Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчет по заданию №6

«Сборка многомодульных программ. Вычисление корней уравнений и определённых интегралов.»

Вариант 8 / метод хорд/ формула прямоугольников

Выполнил:
студент 106 группы
Синюков М. В.

Преподаватель:
Корухова Л. С.
Манушин Д. В
Соловьев М. А.

Москва
2020

Содержание

Постановка задачи

С точностью $\varepsilon = 0.001$ вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной 3 кривыми, уравнения которых y=e^x+2 , y= -2$*x$+8 , y= -5/x находятся в файле "func.s"в виде ассемблерного листинга. Необходимо разработать программу, реализующую функции приближенного вычисления корней, интегральных сумм и площади на пересечении графиков функций F1, F2, F3. Необходимо обеспечить точность ε_1 вычисления абсциссы точек пересечения кривых, используя метод приближенного решения уравнения F(x) = 0 методом хорд (секущих).Отрезки для поиска пересечения вычисляются вручную, аналитически, до момента компиляции программы . Требуется представить площадь заданной фигуры как алгебраическую сумму определённых интегралов и вычислить эти интегралы с некоторой точностью ε_2 по квадратурной формуле прямоугольников.

Математическое обоснование

Метод касательных [2] На каждой итерации $x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$. [1.1]

Метод хорд. [3] Итерационная формула для метода хорд получается при подстановке в [1.1] метода касательных выражения для приближенного вычисления производной функции в точке:

$x^{k+1} = \frac{a*f(b)-b*f(a)}{F(b)-F(a)}$, где в зависимости от знака произведения первой и второй производных на отрезке, выбирается a=x^k (случай положительной производной) или b=x^k (случай отрицательной производной)

Оценка точности Как видно из графика и свойств функций, функции ограничены значением 10.

A_i-вычисленный интеграл для функции F_i.
S_i–Истинное значение интеграла для функции F_i. Пределы истинных интервалов обозначим a_i
V_i–Истинное значение для интеграла функции F_i на вычисленных интервалах.Пределы вычисленных интервалов обозначим b_i
Погрешность вычисления площади интеграла: $\varepsilon = |A_1+A_2+A_3$-$S_1$-$S_2$-$S_3| \leq |A_1|+A_2+A_3$-$S_1$-$S_2$-$S_3| \leq \sum\limits_{i=1}^{3} |A_i - S_i| \leq \sum\limits_{i=1}^{3} |A_i - V_i + V_i - S_i| \leq \sum\limits_{i=1}^{3} |A_i - V_i| + \sum\limits_{i=1}^{3} |V_i - S_i| \leq \sum\limits_{i=1}^{2} \int_{a_i}^{b_i} F_1$
$+ \sum\limits_{i=1,3} \int_{a_i}^{b_i} F_2 + \sum\limits_{i=2}^{3} \int_{a_i}^{b_i} F_3 + 3 * \varepsilon_2 \leq 6 * \varepsilon_1 * max_{i \in 1,2,3}(max_{x \in [a_1, a_3]}(|F_i(x))|) + 3 * \varepsilon_2$
$\leq 60 * \varepsilon_2 + 3 * \varepsilon_1$
Следовательно ε_1=0.00001 и ε_2= 0.00001 будет достаточно , чтобы гарантировать точность вычислений 0.001

Набором кривых для вычисления площади являются кривые 8-го вариант:
F1(x)= e^x +2
F2(x)=2x-8
F3(x)= -5/x

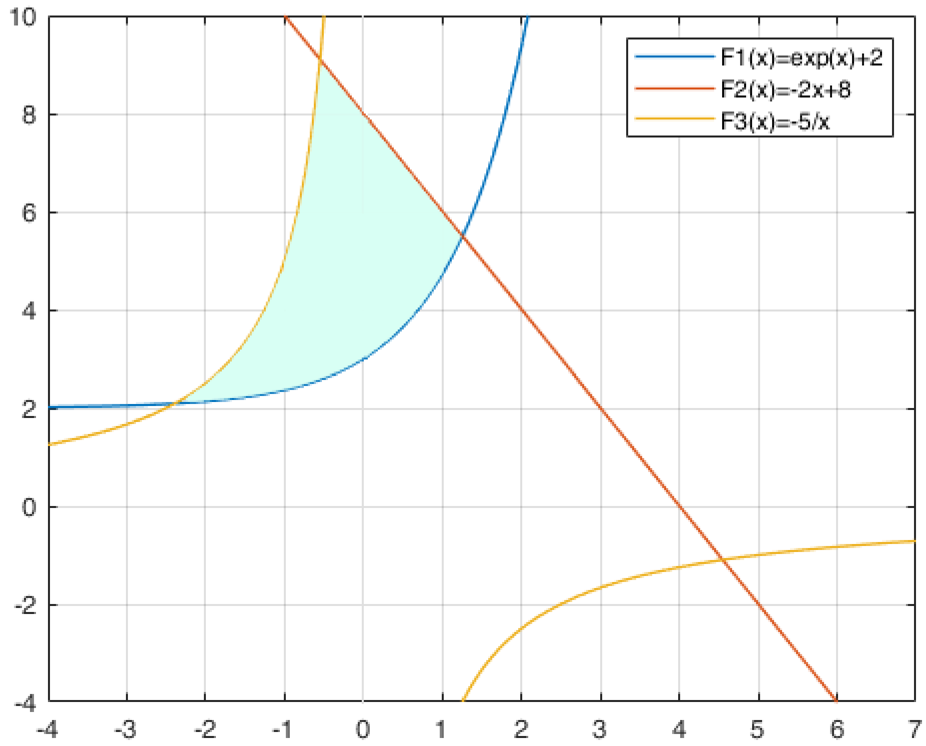


Рис. 1: Плоская фигура, ограниченная графиками уравнений 1-го набора

Результаты экспериментов

В данном разделе отображены результаты проведённых вычислений: координаты точек пересечения и площадь полученных фигур.

Кривые	x
y= e^x + 2 и y = -5/x	-2.3905367039
y=e^x +2 и y = -2*x +8	1.2517579314
y $= -2*x+8$ и y=$-5/x$	-0.5495097

Таблица 1: Координаты точек пересечения кривых 1-го набора

Аналитическое обоснование выбора интервалов отыскания корней:
Производные функций:
F1' = e^x
F2' = -2
F3' = $5/x^2$
Производные функций F1 и F3 на всей числовой прямой положительны.
В то время как производная F2 отрицательна на всей числовой прямой.
Тогда F1'-F2' знакопостоянна, следовательно функция монотонна и меняет знак только в одной точке так как знак функции на концах интервала (-3, 4) различен:

$(F1(-3) - F2(-3)) * ((F1(4) - F2(4))) < 0$
Все требования для работы функции отыскания корня на интервале (-3,4) соблюдены.
F3'-F2' также знакопостоянна, тогда F1-F2 монотонна и имеет только одну точку смены знака так как
$(F3(-1) - F2(-1)) * ((F3(-0.3) - F2(-0.3))) < 0$
Все требования для работы функции отыскания корня на интервале (-1,0.3) соблюдены.
Рассмотрим F1'-F3'$= e^x - 5/x^2$. Из графика $e^x - 5/x^2$ видно ,что на промежутке (-3 -1) функция F1-F3 монотонна, имеет один корень на интервале так как
$(F1(-3) - F3(-3)) * ((F1(-1) - F3(-1))) < 0$
Требования для работы функции отыскания корня на интервале (-3 -1) соблюдены.

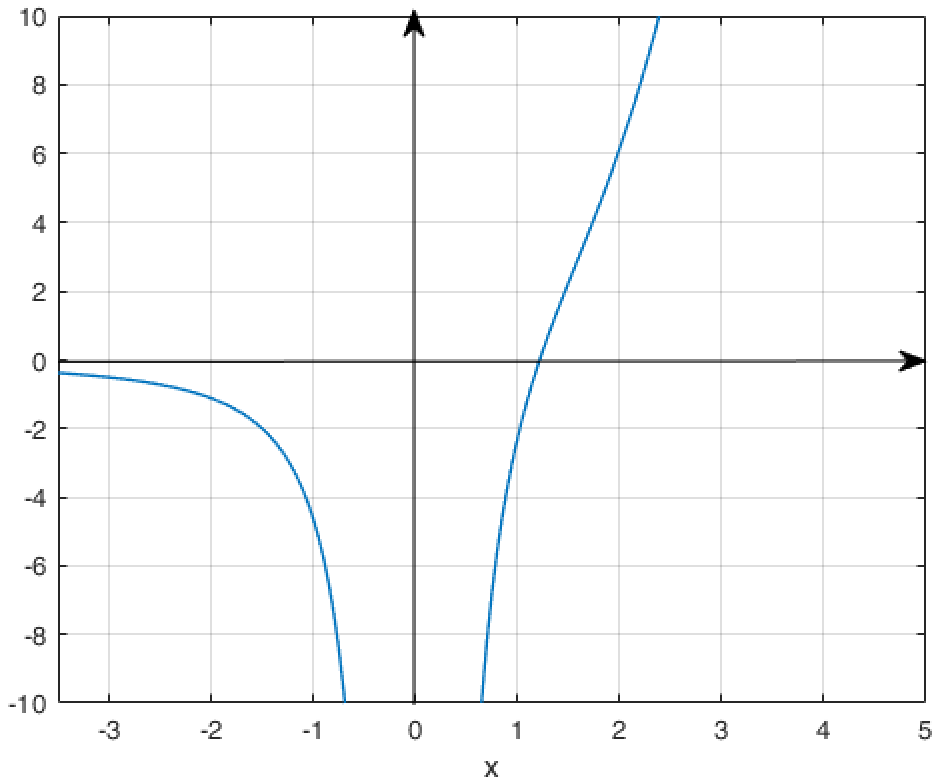


Рис. 2: График $e^x - 5/x^2$

Вычисленная площадь фигуры на пересечении графиков функций F1,F2,F3: 9.806974
Аналитическое обоснование вычисления площади:

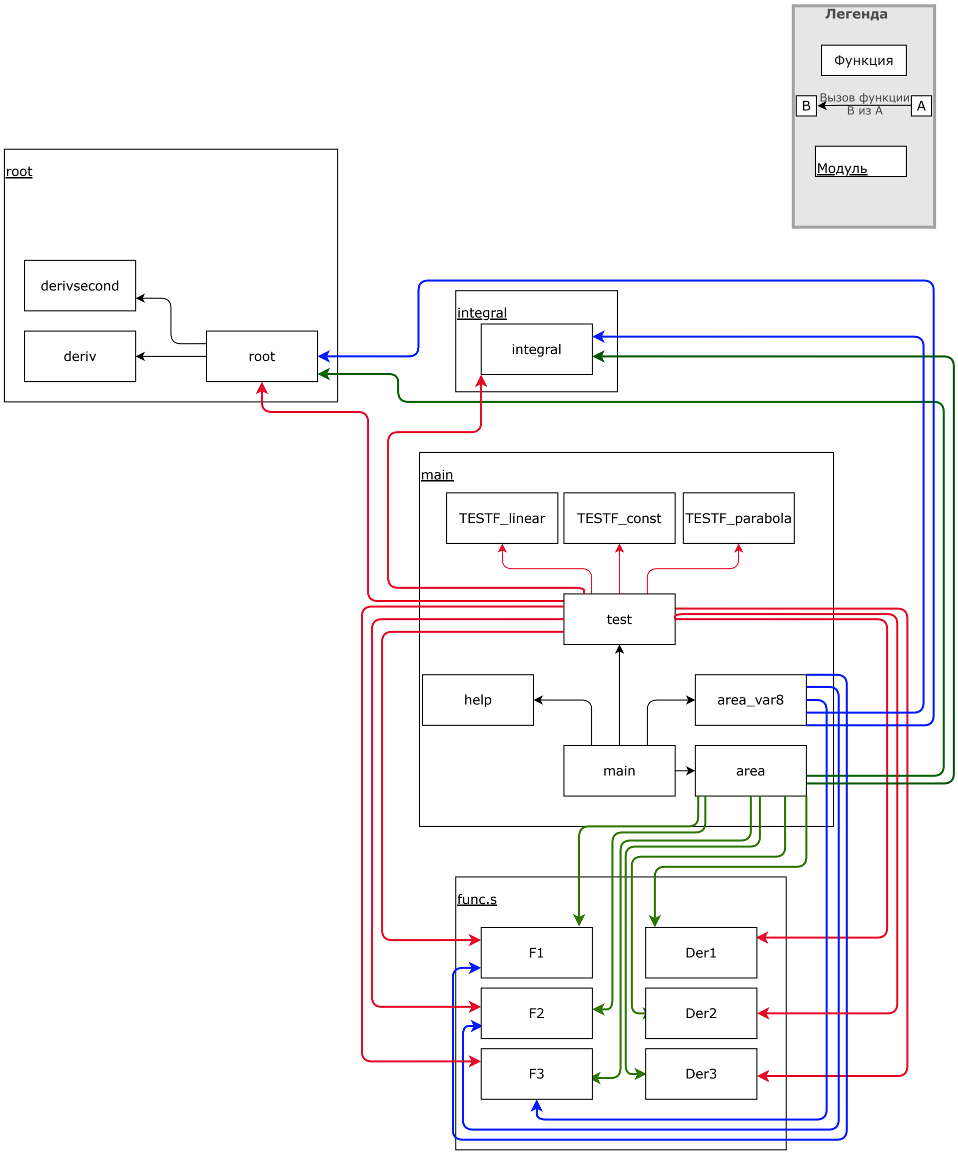
$$S = -\int_{-2.3905367039}^{1.2517579314} (e^x + 2)dx + \int_{-0.5495097}^{1.2517579314} (-2 * x + 8)dx + \int_{-2.3905367039}^{-0.5495097} -5/x dx =$$

$$= -\left(e^x + 2 * x\right)\Big|_{-2.3905367039}^{1.2517579314} + \left(-x^2 + 8 * x\right)\Big|_{-0.5495097}^{1.2517579314} + \left(-5 * ln(x)\right)\Big|_{-2.3905367039}^{-0.5495097} \approx 9.80694$$

Результат соответствует аналитическому решению с точностью $\varepsilon = 0.01$

Структура программы и спецификация функций

Рис. 3: Диаграмма связи функций и модулей



main.c

- double TESTF_const(double x)
  Функция для тестирования работы функций корня и интеграла: y=1

- double TESTF_linear(double x)
  Функция для тестирования работы функций корня и интеграла: y=x

- double TESTF_parabola(double x)
  Функция для тестирования работы функций корня и интеграла: y=x**2

- void help()
  Вывод help

- void test()
  Произведение тестирования для функций корня и интеграла с возможностью выбора метода вычисления корнея

- double area()
  Вычисление площади фигуры, ограниченной функциями из func.s на интервале (a,b), метод вычисления корня задаётся последним параметром

- int main(int argc, char **argv)
  Вызов функций на основе переданных аргументов

root.c

- double rightderiv(double x, double (*F)(double)
  Правая производная фунции в точке

- double deriv(double x, double (*F)(double))
  Приближенно вычисленная производная F в точке x

- double derivsecond(double x, double (*F)(double))
  Приближенно вычисленная вторая производная F в точке x

- double root(double (*f)(double), double (*g)(double), double a, double b, double eps)
  Вычисление корня f(x)=g(x) на отрезке (a,b) с точностью eps методом хорд

integral.c

- integral(double (*f)(double), double a, double b, double eps)
  Вычисление интеграла функции f на отрезке (a,b) с точностью eps

Сборка программы (Make-файл)

Текст Make-файла:

```
COMPILER=gcc
OPT=-O2 -std=gnu99 -m32 -lm
.PHONY: all clean help test

all: main

clean:
rm -rf main.o integral.o root.o main
rm -rf func.o generator.o
func.o: generator.c
$(COMPILER) generator.c -c -o generator.o $(OPT)
nasm -DUNIX -Werror -f elf -o func.o func.s

integral.o: integral.c
$(COMPILER) integral.c -c -o integral.o $(OPT)

root.o: root.c
$(COMPILER) root.c -c -o root.o $(OPT)

main.o: main.c
$(COMPILER) main.c -c -o main.o $(OPT)

main: main.o integral.o root.o func.o
$(COMPILER) -o main main.o integral.o root.o func.o  $(OPT)

help: main
./main -help

test: main
./main -test -axis -iter
area: main
./main -area
```

Отладка программы, тестирование функций

Кривые	Метод хорд	Метод касательных	Истинное значение	f'
y=x^2 и y = x	0.999992	1	1	2x и 1
y =x^3 и y= 0	0.00008	0.00002	0	3x и 0
y =$-5/x$ и y=-2 * x + 8	4.549509	4.545455	4.54950975	$5/x^2$ и -2

Таблица 2: Тестирование функций для вычисления точек пересечения кривых

Аналитическое обоснование:
1)

$$x = x^2$$

$$x * (x - 1) = 0$$

$$x = 1$$

2)

$$x^3 = 0$$

$$x = 0$$

3)

$$-5/x = -2x + 8$$

$$-2x^2 + 8x + 5 = 0$$

$$-2x^2 + 8x + 5 = 0$$

$$x \approx 4.54950975$$

Кривая	Отрезок	Интеграл	Истинное значение
sin x / x	(-1 1)	1.892166	1.892166
$(sinx)^2$	(- π, π)	3.141592	π
sin(x)	(-4,4)	0.000000	0
f(x) = x^2	(-5,1)	42.000220	42
f(x) = 1	(0,25)	25.0000	25
(x) = x	(0,5)	12.499981	12.5

Таблица 3: Тестирование функции интеграла

Аналитическое обоснование[3]:
1)

$$\int_{-\pi}^{\pi} (sinx)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (1/2 - 1/2 * cos2x) dx = \left(\frac{x - sin(2x)/2}{2} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

2)
$\int_{-4}^{4} (sinx) dx$ =[осевая симметрия sin относительно 0]=0 3)

$$\int_{-5}^{1} x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-5}^{1} = 5^3/3 + 1/3 = 42.$$

4)

$$\int_0^{25} 1dx = (x)\Big|_0^{25} = 25.$$

5)

$$\int_0^5 xdx = \left(x^2/2\right)\Big|_0^5 = 12.5.$$

Программа на Си и на Ассемблере

Исходные тексты программы имеются в архиве, приложенном к отчёту

Анализ допущенных ошибок

1. Была допущена ошибка с переопределением функций F1-F3. Исправлено изменением
   extern F1 на global F1
   extern F2 на global F2
   extern F3 на global F3
   в модуле func.s

2. Отсутствовали комментарии к функциям модуля func.s. Комментарии добавлены к каждой функции

3. Ошибка в переносе результатов вычислений в таблицы. В таблицу 1 был ошибочно занесён правый корень уравнения $-5/x = -2x + 8$

Список литературы

[1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1 — Москва: Наука, 1985.

[2] Самарский А. А., Гулин А. В. Численные Методы.Учеб. пособие для вузов. — М.:Наука, 1989.

[3] Костомаров Д.П., Фаворский А.П. Вводные лекции по численным методам: Учеб. пособие. – М.: Логос, 2004