

1. Umiemy już (z kinematyki) policzyć:

- współrzędne uogólnione \mathbf{q}
- wektor więzów Φ
- Jakobian $\Phi_{\mathbf{q}}$
- tę dziwną macierz Γ
- macierze obrotów poszczególnych układów \mathbf{R}_i

2. Dokładamy do tego, na podstawie danych:

- macierz masową członu \mathbf{M}
- wektor sił uogólnionych \mathbf{Q}
- wektor nieoznaczonych mnożników Lagrange'a λ (nieznany!)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_n \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & J_{z_i} \end{bmatrix} \quad (\text{a to przecież znamy z polecenia})$$

Wektor sił uogólnionych \mathbf{Q} wyznaczamy kawałkami (które później zsumujemy). Będzie to część odpowiadająca za grawitację \mathbf{Q}^G , część odpowiadająca za siły czynne \mathbf{Q}^F i część odpowiadająca za tłumiki \mathbf{Q}^C . Poniżej masz wzory na policzenie tego dla każdego z członów (\mathbf{Q}_i^G , \mathbf{Q}_i^F i \mathbf{Q}_i^C), które najpierw sumujemy w celu uzyskania pełnego wektora dla członu \mathbf{Q}_i , a później wzór jak to skleić do całego globalnego \mathbf{Q} .

$$\mathbf{Q}_i^G = \begin{bmatrix} m_i \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix}$$

gdzie \mathbf{g} jest wektorem grawitacji $[0, -9.81]^T$ (czyli w efekcie cały wektor \mathbf{Q}_i^G ma 3 elementy), a m_i to oczywiście masa

$$\mathbf{Q}_i^F = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_i \mathbf{s}^{(i)})^T \mathbf{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_i \mathbf{s}^{(i)})^T \end{bmatrix} \mathbf{F}$$

gdzie \mathbf{F} to wektor siły działającej bezpośrednio na dany człon, a $\mathbf{s}^{(0)}$ to wektor od początku układu π_i do dowolnego punktu na linii wektora \mathbf{F} , zapisany w układzie π_i . Przyjmijmy, że w wektorku $\mathbf{s}^{(0)}$ chodzi o punkt przyłożenia siły, będzie najłatwiej. Tutaj jak widać już jest uwzględniony też moment pochodzący od \mathbf{F} .

$$\mathbf{Q}_i^C = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_i \mathbf{s}_A^{(i)})^T \end{bmatrix} \mathbf{u} F, \quad \mathbf{Q}_j^C = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_j \mathbf{s}_B^{(j)})^T \end{bmatrix} (-\mathbf{u} F)$$

Gdzie, po kolei:

\mathbf{u} jest wersorem kierunkowym tłumika (wzdłuż tłumika, mamy to z obliczeń dla więzów postępowych)

$F = c^*(d_{\text{prim}})$ jest wartością siły

c jest współczynnikiem tłumienia tłumika

d_{prim} (tam powinna być kropka nad d) jest prędkością wydłużania siłownika
(wykorzystujemy wartość z poprzedniego kroku całkowania)

s_A i s_B to znowu wektorki do punktów na osi, po jednym przy każdym z ciał (też je już mamy)

3. Tym razem strategia jest od drugiej strony. Zamiast liczyć położenia i ich różniczkować najpierw uzyskujemy przyspieszenia każdego członu, a później to całkujemy. Będziemy to robić różnymi metodami. Ogólnie chodzi nam o rozwiązanie, a następnie całkowanie układu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{N \times N} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{N \times 1} \\ -\boldsymbol{\lambda}_{m \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{N \times 1} \\ \boldsymbol{\Gamma}_{m \times 1} \end{bmatrix}$$

gdzie znamy już wszystko poza wektorem, gdzie jest \mathbf{q}_{bis} i $\boldsymbol{\lambda}$ - właśnie to chcemy policzyć.
Po rozwiązaniu lecimy całkowanie trzema metodami (do wyboru).

Euler

Przykładowy kod na stronie 32-33 skryptu DUW_3 (skrypt Calkuj.m)

RK

Przykładowy kod na stronie 33 skryptu DUW_3 (skrypt Calkuj_ode45.m)

Baumgarte

Tutaj rozwiązujemy zamiast tego w każdym kroku układ poniżej (różnica jest w prawych stronach):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ -\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \boldsymbol{\Gamma} - 2\alpha \cdot \Phi_q \dot{\mathbf{q}} - \beta^2 \cdot \Phi \end{bmatrix}$$

Przykładowy kod na stronie 34 skryptu DUW_3 (skrypt Calkuj_Baumgarte.m)