RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE dla BIOINFORMATYKÓW

ćwiczenia, dr hab. Anna Ochal

Metody numeryczne rozwiązywania zagadnień początkowych

Laboratorium 1, 09.12.2019

prowadzenie: Jan Havránek, Michał Pawliszko

Metody jednokrokowe znajdowania przybliżonego rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \quad t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

1. metoda Eulera $x_{n+1} = x_n + hf(t_{n,}x_n)$

2. ulepszona metoda Eulera $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$, gdzie
$k_1 = hf(t_n, x_n)$, $k_2 = hf(t_n + h, x_n + k_1)$

3. zmodyfikowana metoda Eulera $x_{n+1} = x_n + k_2$, gdzie
$k_1 = hf(t_n, x_n)$, $k_2 = hf(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_1)$

4. metoda Rungego-Kutty rz.4 (RK4) $x_n = x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, gdzie
$k_1 = hf(t_n, x_n)$, $k_2 = hf(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_1)$, $k_3 = hf(t_n + \frac{1}{2}h, x_n + \frac{1}{2}k_2)$,
$k_4 = hf(t_n + h, x_n + k_3)$

Przykład metody wielokrokowej znajdowania przybliżonego rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego

1. metoda Adamsa-Bashfortha(o 3 krokach)

$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n,}x_n)$ (metoda Eulera)

$$x_{n+2} = x_{n+1} + h\left(\frac{3}{2}f(t_{n+1}, x_{n+1}) - \frac{1}{2}f(t_n, x_n)\right)$$

$$x_{n+3} = x_{n+2} + h\left(\frac{23}{12}f(t_{n+2}, x_{n+2}) - \frac{16}{12}f(t_{n+1}, x_{n+1}) + \frac{5}{12}f(t_n, y_n)\right)$$

Zadanie 1. Zapoznać się ze strukturą kodu (plik *01_Wprowadzenie.ipynb)* . Przeanalizować sposób implementacji metody Eulera. Analogicznie zaimplementować ulepszoną metodę Eulera oraz znaleźć rozwiązanie przybliżone dla podanego zagadnienia Cauchy'ego

$$\begin{cases} -x + e^{-t}, & t \geq 0 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad \text{z rozw. dokł.} \quad x(t) = e^{-t} + te^{-t}, \quad t \in [0,10]$$

- Porównać na wykresie z rozwiązaniem dokładnym oraz przybliżonym uzyskanym metodą Eulera.
- Jakie można wyciągnąć wnioski?

Zadanie 2. Zaleźć rozwiązanie przybliżone różnymi metodami numerycznymi dla równań

a) Równanie z zadania 1

b) $\begin{cases} x' = 5x\,, & t \geq 0 \\ x(0) = 2 \end{cases}$ z rozw .dokł. $x(t) = 2e^{5t}, \quad t \in [0,2]$

c) $\begin{cases} x' = \lambda(-x + \sin(t)), & t \geq t \\ x(0) = 0 \end{cases}$ z rozw. dokł. $x(t) = \frac{\lambda}{1+\lambda^2} e^{-\lambda t} + \frac{\lambda^2 \sin(t) - \lambda c \quad (t)}{1+\lambda^2},$
$t \in [0; 0{,}2]$

dla λ = 100

- Jakie różnice można zaobserwować miedzy różnymi metodami?
- Jaka jest zależność wyników od kroku h?
- Jak zastosowane metody sprawdzają się w zależności od równania? (Czy są stabilne?)

(plik *02_Piaskownica.ipynb*)

Zadanie 3. Dla zagadnienia Cauchy'ego z zadania 1:

a) zmierzyć błąd dla różnych metod i h (np. 0.1, 0.01, 0.001)
b) zmierzyć koszt obliczeń oraz czas ich wykonywania dla różnych metod i h = 0.001

- Jak zmienia się błąd i koszt obliczeń w zależności od metody oraz kroku?

(plik *03_Pomiary.ipynb)*