רדוקציות

הגדרה:

בהינתן פונקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$, נאמר כי מ"ט M מחשבת את f אם לכל $x\in\Sigma^*$:

- M מגיעה ל q_{acc} בסוף החישוב על $f(x)$

וגם

- על הסרט (הפלט) של M רשום $f(x)$

הערה:

מ"ט שמחשבת פונקציה עוצרת על כל קלט.

הגדרה:

בהינתן פונקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$, נאמר כי f **חשיבה** אם קיימת מ"ט המחשבת את f.

דוגמאות:

(1) $f(x)=xx$

1) | x | BB |

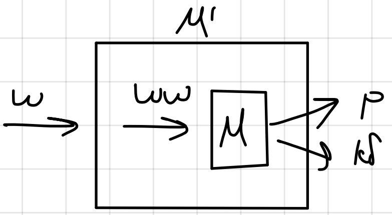
פלט | x | x | BB |

$f_1(x)$ חשיבה.

(2)
$$f_2(x)=\begin{cases} x : & |x| \text{ זוגי} \\ xx : & |x| \text{ אי זוגי} \end{cases}$$

$f_2(x)$ חשיבה

(3)
$$f_3(x)=\begin{cases} \langle M' \rangle : & x=\langle M \rangle \\ \langle M^* \rangle : & x\neq\langle M \rangle \end{cases}$$



כאשר M^* מ"ט שמקבלת כל קלט.

כאשר M' מ"ט שמקבלת את השפה: $L=\{w: ww\in L(M)\}$

$f_3(x)$ **חשיבה** כי ניתן לבנות מ"ט שבודק אם $x=\langle M\rangle$.

אם לא, תחזיר קידוד קבוע של M^*, אם כן תחזיר קידוד של M' ע"י הוספת קוד המשכפל את הקלט בקידוד של M.

(4)
$$f_4(x)=\begin{cases}1 & : x\in L_{acc}\\ 0 & : x\notin L_{acc}\end{cases}$$

$f_4(x)$ לא חשיבה כי יתכן קלט $x=\langle M\rangle,\langle w\rangle$ ו- M לא עוצרת על w.

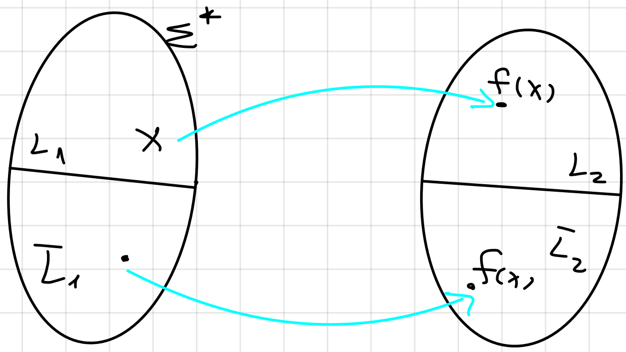
הגדרה

בהינתן שתי שפות $L_1,L_2\subseteq\Sigma^*$, נאמר כי L_1 ניתנת לרדוקציה ל- L_2 ונסמן ב- $L_1\le L_2$.

אם קיימת פונקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ המקיימת:

(1) f חשיבה

(2) לכל $x\in\Sigma^*$: $x\in L_1 \iff f(x)\in L_2$ * צריך להוכיח את שני הכיוונים.



דוגמא:

$L_1=\{x\in\{0,1\}^*:$ זוגי $|x|\}$

$L_2=\{x\in\{0,1\}^*:$ אי זוגי $|x|\}$

$$L_1\le L_2$$

$$f(x)=\begin{cases}1 & : \underset{x\in L_1}{\text{זוגי }|x|}\\ 11 & : \underset{x\notin L_1}{\text{אי זוגי }|x|}\end{cases}$$

$$f(x)=1x$$

משפט הרדוקציה

לכל שתי שפות $L_1,L_2\subseteq\Sigma^*$ אם $L_1\le L_2$ אזי:

(1) אם $L_2\in R$ אזי $L_1\in R$

(2) אם $L_1\notin R$ אזי $L_2\notin R$ (מסקנה מ-(1))

(3) אם $L_2\in RE$ אזי $L_1\in RE$

(4) אם $L_1\notin RE$ אזי $L_2\notin RE$ (מסקנה מ-(3))

הוכחה:

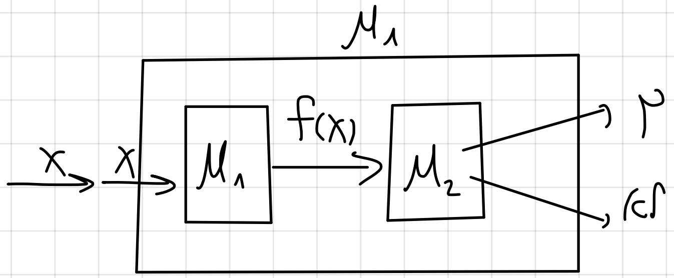
מכיוון שקיימת רדוקציה $L_1\le L_2$, קיימת פונקציה f חשיבה ומקיימת
$x\in L_1 \iff f(x)\in L_2$

תהי M_f מ"ט המחשבת את f.

(1) אם $L_2\in R$ אזי $L_1\in R$

תהי M_2 מ"ט המכריעה את L_2

נבנה מ"ט M_1 המכריעה את L_1



תיאור של M_1:

על קלט x, M_1 מבצעת:

- מחשבת את $f(x)$ בעזרת M_f.
- מריצה את M_2 על $f(x)$ ועונה כמוה.

נכונות:

נראה כי M_1 מכריעה את L_1

- אם $x\in L_1 \Rightarrow f(x)\in L_2 \Rightarrow M_2$ מקבלת את $f(x)$

$\Rightarrow M_1$ מקבלת את x

- אם $x\notin L_1 \Rightarrow f(x)\notin L_2 \Rightarrow M_2$ דוחה את $f(x)$

$\Rightarrow M_1$ דוחה את x

(2) אם $L_1\notin R$ אזי $L_2\notin R$. נובע מ-(1)

(3) אם $L_2 \in RE$ אז: $L_1 \in RE$

תהי: M_2 מ"ט המכריעה את L_2

נבנה מ"ט M_1 המקבלת את L_1

התיאור של M_1:

על קלט x, M_1 מבצעת:

- מחשבת את $f(x)$ בעזרת M_f.
- מריצה את M_2 על $f(x)$ ועונה כמוה.

נכונות:

- אם $x \in L_1 \Leftarrow f(x) \in L_2 \Leftarrow M_2$ מקבלת את $f(x)$.

  $\Leftarrow M_1$ מקבלת את x
- אם $x \notin L_1 \Leftarrow f(x) \notin L_2 \Leftarrow M_2$ לא מקבלת את $f(x)$.

  $\Leftarrow M_1$ לא מקבלת את x.

(4) אם $L_1 \notin RE$, אז: $L_2 \notin RE$

נובע מ- (3)

- כדי להוכיח ששפה $L \in R$, בוחרים שפה אחרת $L' \in R$ ומראים רדוקציה $L \le L'$.
- כדי להוכיח ששפה $L \notin R$, בוחרים שפה אחרת $L' \notin R$ ומראים רדוקציה $L' \le L$.

$L_{acc} = \{\langle M\rangle,\langle w\rangle : w\in L(M)\}$ $\in RE\setminus R$

$L_{halt} = \{\langle M\rangle,\langle w\rangle :$ M עוצרת על w$\}$ $\in RE\setminus R$

$L_d = \{\langle M\rangle : \langle M\rangle \notin L(M)\}$ $\notin RE$

תזכורת:

נוכיח כי $L_{halt}\notin R$ ע"י רדוקציה $L_{acc}\le L_{halt}$

(הוכחה נוספת).

נבנה פונקציה f חשיבה ומקיימת

$x\in L_{acc} \iff f(x)\in L_{halt}$ לכל $x\in\Sigma^*$.

פונקציית הרדוקציה:

$$f(x)=\begin{cases}\langle M'\rangle,\langle w'\rangle & : x=\langle M\rangle,\langle w\rangle\\ \langle M_{loop}\rangle,\langle\varepsilon\rangle & : x\neq\langle M\rangle,\langle w\rangle\end{cases}$$

צריך להגדיר את מ"ט אם רשמנו.

כאשר M_{loop} היא מ"ט שלא עוצרת על אף קלט.

דרישות:

- אם M מקבלת את w $\Leftarrow$ M' תעצור על w.
- אם M לא מקבלת את w $\Leftarrow$ M' לא תעצור על w.

M דוחה   M לא עוצרת

תיאור M':

כאשר M' מ"ט שמתנהגת כמו M פרט למקרים בהם M עוצרת ודוחה, M' נכנסת ללולאה אינסופית.

נכונות הרדוקציה:

(1) f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שבודקת האם $x=\langle M\rangle,\langle w\rangle$. אם לא, מחזיר קידוד של $\langle M_{loop}\rangle,\langle\varepsilon\rangle$, ואם כן, מחזיר קידוד של M' ע"י ביצוע שינויים בקוד של M.

(2) נכונות: $x\in L_{acc} \iff f(x)\in L_{halt}$

- אם $x\in L_{acc} \Leftarrow x=\langle M\rangle,\langle w\rangle$ ו-$w\in L(M) \Leftarrow f(x)=\langle M'\rangle,\langle w\rangle$

ו-M' עוצרת ומקבלת את $w \Leftarrow f(x)\in L_{halt}$

- אם $x\notin L_{acc} \Leftarrow$ שני מקרים:

- $x\neq\langle M\rangle,\langle w\rangle \Leftarrow f(x)=\langle M_{loop}\rangle,\langle\varepsilon\rangle$ ו-M_{loop} לא עוצרת על ε

$\Leftarrow f(x)\notin L_{halt}$

- $x=\langle M\rangle,\langle w\rangle$ ו-$w\notin L(M) \Leftarrow f(x)=\langle M'\rangle,\langle w\rangle \Rightarrow$ שני מקרים:

- M לא עוצרת על $w \Leftarrow M'$ לא עוצרת על $w \Leftarrow f(x)\notin L_{halt}$

- M דוחה את $w \Leftarrow$ בגלל השינוי שעשינו על M, M' נכנסת

ללולאה אינסופית על $w \Leftarrow f(x)\notin L_{halt}$

לסיכום מכיוון ש-$L_{acc}\notin R$, וממשפט הרדוקציה, מתקיים ש-$L_{halt}\notin R$.

תרגול:

נוכיח כי $\overline{L_{acc}} \notin RE$ ע"י רדוקציה $L_d \le \overline{L_{acc}}$

$$\overline{L_{acc}} = \{\langle M\rangle,\langle w\rangle : w \notin L(M)\} \cup \{x \ne \langle M\rangle,\langle w\rangle\}$$

$$L_d = \{\langle M\rangle : \langle M\rangle \notin L(M)\}$$

נבנה פונקציה f חשיבה שמקיימת $x \in L_d \iff f(x) \in \overline{L_{acc}}$

פונקציית הרדוקציה:

$$f(x) = \begin{cases} \langle M'\rangle,\langle w'\rangle & : x = \langle M\rangle \\ \langle M^*\rangle,\langle \varepsilon\rangle & : x \ne \langle M\rangle \end{cases}$$

כאשר M^* היא מ"ט שמקבלת כל קלט

דרישות:

$$w \notin L(M') \Leftarrow \overset{w}{\langle M\rangle} \notin L(\overset{M}{M})$$

$$w' \in L(M') \Leftarrow \langle M\rangle \in L(M)$$

נכונות הרדוקציה:

(1) f חשיבה כי ניתן לבנות מ"ט שבודק האם $x=\langle M\rangle$. אם לא, תפיק קידוד של $\langle M^*\rangle,\langle\varepsilon\rangle$, אם כן, תפיק את הזוג $\langle M\rangle,\langle\langle M\rangle\rangle$ $x,\langle x\rangle = \langle M\rangle,\langle\langle M\rangle\rangle$

(2) נראה כי $x \in L_d \iff f(x) \in \overline{L_{acc}}$.

- אם $x \in L_d \Leftarrow x = \langle M\rangle$ ו-$\overset{w}{\langle M\rangle} \notin L(M) \Leftarrow \langle M\rangle,\langle\langle M\rangle\rangle \notin L_{acc}$

  $\Leftarrow f(x) = \langle M\rangle,\langle\langle M\rangle\rangle \in \overline{L_{acc}}$.

אם $x \notin L_d \Leftarrow$ שני מקרים:

- $x \ne \langle M\rangle \Leftarrow f(x) = \langle M^*\rangle,\langle\varepsilon\rangle$ ו-$\varepsilon \in L(M^*) \Leftarrow f(x) \notin \overline{L_{acc}}$
- $x = \langle M\rangle$ ו-$\langle M\rangle \in L(M) \Leftarrow f(x) = \langle M\rangle,\langle\langle M\rangle\rangle$ ו-$\langle M\rangle \in L(M) \Leftarrow$

  $f(x) \notin \overline{L_{acc}}$