סיכום למבחן בדינמיקה - תרשים זרימה

האם פועל עומס?

- כן → **תגובה הרמונית** → **האם יש ריסון?**
  - כן → תגובות מאולצות מרוסנות - עומס הרמוני
  - לא → תגובות מאולצות ללא ריסון - עומס הרמוני
- לא → **תגובה חופשית** → **האם יש ריסון?**
  - כן → תגובות חופשיות מרוסנות
  - לא → תגובות חופשיות ללא ריסון

תגובות מאולצות מרוסנות - עומס הרמוני

משוואות התנועה של המערכת

$$M\ddot{U}+C\dot{U}+KU=P_0\sin(\omega\cdot t)$$

פתרון:

$$\boxed{U(t)=U_0\cdot\sin(\omega t-\phi)=\underbrace{U_{st,0}}_{\frac{P_0}{K}}\cdot R_d\cdot\sin(\omega t-\phi)}$$

$$\phi=\tan^{-1}\frac{2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$R_d=\frac{U_0}{U_{st,0}}=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta(\omega/\omega_n)\right]^2}}$$

$$U_0=\frac{P_0}{K}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left[2\zeta(\omega/\omega_n)\right]^2}}$$

$$\dot{U}(t)=U_0\cdot\omega\cdot\cos(\omega t-\phi)\rightarrow\underset{\text{מהירות מקס}}{\dot{U}_0}=U_0\cdot\omega$$

$$\underset{\text{תאוצה מקס}}{\ddot{U}_0}=U_0\cdot\omega^2$$

$$\underset{\text{תהודה}}{U_0}=R_{d\,max}\cdot U_{st,0}$$

תהודת ההזזה

$$R_{d\,max}=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}\iff\frac{\omega}{\omega_n}=\sqrt{1-2\zeta^2}$$

מקדם הגברת מהירות

$$R_v=\frac{\omega}{\omega_n}\cdot R_d$$

מקדם הגברת תאוצה

$$R_a=R_d\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$$

$$\ddot{U}_{0\,max}=\frac{P_0}{M}\cdot R_a$$

$m\ddot{U}+KU=P_0\sin(\omega_n t)$

$m\ddot{U}+c\dot{U}+KU=P_0\cdot\sin(\omega_n t)$ מקרה פרטי $\omega=\omega_n$

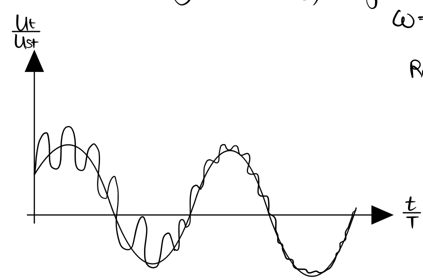
$\frac{\omega}{\omega_n}=1$ לא מצב של תהודה במערכת עם ריסון! אלא תהודת המהירות מתקבלת במצב זה. $(R_{v,max})$

תהודת התאוצה

$$R_{a,max}=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$U(t)=U_{st,0}\cdot\frac{1}{2\zeta}\left(e^{-\omega_n\zeta t}-1\right)$$

פתרון המעטפת עבור $\omega=\omega_n$ ↓ $R_d=\frac{1}{2\zeta}$



תגובות מאולצות ללא ריסון - עומס הרמוני

משוואות התנועה של המערכת

$$M\ddot{U}+KU=\underbrace{P_0\sin(\omega\cdot t)}_{P(t)}$$

פתרון:

$$\boxed{U(t)=\frac{P_0}{K}\cdot\frac{\sin(\omega t)}{1-(\omega/\omega_n)^2}}$$

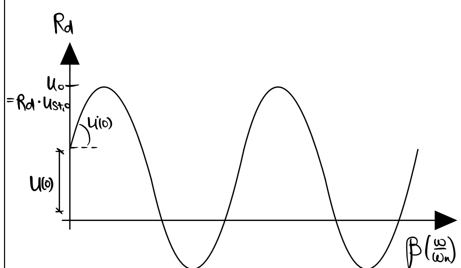
ω – של העומס

$$\underset{\text{הזזה סטטית מקס}}{U_{st,0}}=\frac{P_0}{K},\quad\underset{\text{מקדם הגברה}}{R_d}=\frac{1}{\left|1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right|}$$

$$\underset{\text{תדירות העומס}}{\omega}=f\cdot2\pi$$

$$U_0=U_{st,0}\cdot R_d\ ,\ (\sin=1)$$

רזוננס (תהודה) ← מצב שבו ההגברה הדינאמית שואפת לאינסוף – $\omega=\omega_n$. כדי להרחיק את ההגברה הדינאמית נשנה מסה, או קשיחות של המבנה.



תגובות חופשיות מרוסנות

משוואות התנועה של המערכת

$$M\ddot{U}+C\dot{U}+KU=0$$

פתרון:

$$\boxed{U(t)=\rho\cdot e^{-\zeta\omega_n\cdot t}\cdot\sin(\omega_D\cdot t+\phi)}$$

$$\underset{\text{הזזה מקס}}{U_0}=\rho=\sqrt{U(0)^2+\left(\frac{\dot{U}(0)+\zeta\omega_n\cdot U(0)}{\omega_D}\right)^2}$$

$$\boxed{U(t)=\rho\cdot e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_D\cdot t-\phi)}$$

תנאי התחלה $U=U(0)$, $\dot{U}=\dot{U}(0)$

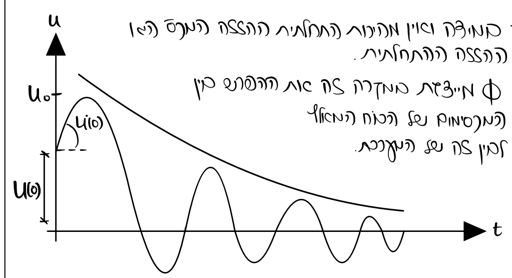
$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{\dot{U}(0)+\zeta\omega_n\cdot U(0)}{U(0)\cdot\omega_D}\right)$$

$$\omega_D=\omega_n\cdot\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\underset{\text{הדקרמנט הלוגריתמי}}{\delta}=\ln\left(\frac{U_i}{U_j}\right)\cdot\frac{1}{j-i}=\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\quad,\ \zeta=\frac{\delta}{2\pi}\cdot100\%$$

במידה ואין מהירות התחלתית ההזזה המקס היא ההזזה ההתחלתית.

ϕ מייצגת במדרה זה את ההפרש בין המקסימום של הכוח המאולץ לזמן זה של המערכת.



תגובות חופשיות ללא ריסון

משוואות התנועה של המערכת

$$M\ddot{U}+KU=0$$

פתרון:

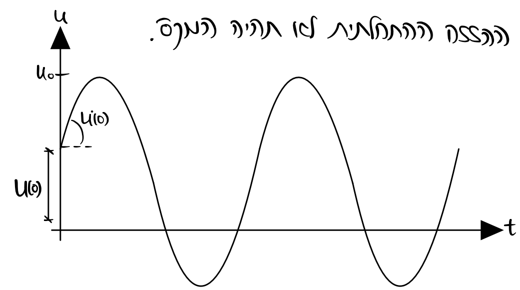
$$\boxed{U(t)=U(0)\cdot\cos(\omega_n\cdot t)+\frac{\dot{U}(0)}{\omega_n}\cdot\sin(\omega_n\cdot t)=\sqrt{U(0)^2+\left(\frac{\dot{U}(0)}{\omega_n}\right)^2}\cdot\cos(\omega_n\cdot t-\phi)}$$

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{\dot{U}(0)}{\omega_n\cdot U(0)}\right)$$

$$\underset{\text{הזזה מקס}}{U_0}=\underbrace{\sqrt{U(0)^2+\left(\frac{\dot{U}(0)}{\omega_n}\right)^2}}_{=\rho}\ ,\ \underset{\text{מהירות מקס}}{\dot{U}_0}=U_0\cdot\omega_n\ ,\ \underset{\text{תאוצה מקס}}{\ddot{U}}=U_0\omega_n^2$$

$$\underset{\text{מקדם ההגברה}}{R_d}=\frac{1}{\left|1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right|}$$

כאשר יש מהירות התחלתית ההזזה ההתחלתית לא תהיה המקס.



נוסחאות כלליות (מתאימות לכל המצבים)

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}\ [sec]$$ זמן מחזור טבעי של המערכת (משך הזמן למחזור תנודה אחד)

$$f_n = \frac{1}{T_n}\left[\frac{cycle}{sec} = Hz = \frac{Rpm}{60}\right]$$ תדירות קווית

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} = 2\pi f_n = \frac{2\pi}{T_n}\left[\frac{rad}{sec}\right]$$ תדירות זוויתית עצמית

$C =$ ריסון המערכת. קבוע לכל חומר מסוים. $\left[\frac{N\cdot sec}{M}\right]$

$$C_{cr} = 2M\omega_n$$ מקדם הריסון הקריטי של המערכת
לשים ♡ שהוא תלוי ב- M וב- ω_n
ולכן הוא יכול להשתנות!

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

$$\xi = \frac{C}{C_{cr}} = \frac{C}{2M\omega_n}$$ מנת הריסון = היחס בין מקדמי הריסון של המערכת.

ξ כולל = ξ מבני + ξ מרסן

$$\omega_D = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$ תדירות במערכת מרוסנת

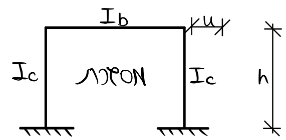
* עבור $0.2 > \xi$ *

$$\omega_D = \omega_n$$

העומס המועבר

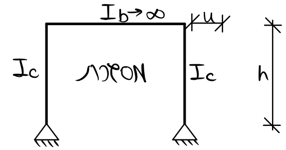
$$T_R = \frac{f_{to}}{P_0} = \frac{U_0^T}{U_{g0}} = \frac{\ddot{U}_0^T}{\ddot{U}_{g0}} = \sqrt{\frac{1+(2\xi\beta)^2}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$ מקדם טרנסמיסיביות

קשיחויות $\left[\frac{N}{m}\right]$

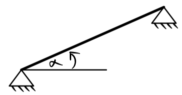


$$K_h = \frac{12\cdot n\cdot E\cdot I_c}{h^3}\cdot\left(\frac{12\rho+1}{12\rho+4}\right),\qquad \rho = \frac{EI_b/L}{n\cdot EI_c/h}$$

K_h – קשיחות אופקית של המסגרת; n – מס עמודים

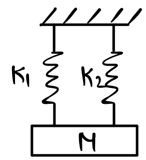


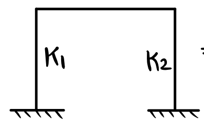
$$K_{עמוד} = \frac{3EI}{h^3}$$



$$K_{מוט\ מסבך} = \frac{EA}{L}(\cos\alpha)^2$$

חיבור קשיחויות במקביל-
הוספת אלמנט נוסף יגרום למבנה להיות קשיח יותר



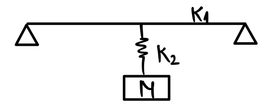


$$\Rightarrow K_{eq} = K_1 + K_2$$

חיבור קשיחויות בטור-
הוספת אלמנט למבנה תגרע מקשיחותו.

$$\frac{1}{K_{eq}} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}$$

$$K_{eq} = \frac{K_1\cdot K_2}{K_1+K_2}$$



במקרה של תזוזת קרקע:

$$U^t(t) = U_g(t) + U(t)$$

$U^t(t)$ – התזוזה הכוללת; $U_g(t)$ – תזוזת הקרקע; $U(t)$ – התזוזה של המסה

$$M\ddot{U}^t(t) + C\cdot\dot{U}(t) + KU(t) = 0$$

$$M\ddot{U}(t) + C\cdot\dot{U}(t) + KU(t) = -M\ddot{U}_g$$

$$X(t) = V\cdot t\ ,\quad \frac{\partial X}{\partial t} = V$$ (במידה והתזוזה קרקע נתונה כפונ' של X)

$$\ddot{U}_g - \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)\cdot U_g'' = V^2 U''_g$$

$X=Vt$ נגזור לפי X ונציב

משוואות התנועה הסיבוביות

(משוואות ש"מ מומנטים)

$$I\ddot{\theta}(t) + C_\theta\dot{\theta}(t) + K_\theta\theta(t) = M(t)$$

$\ddot{\theta}$ – תאוצה זוויתית $\alpha = \frac{a}{R}$; $\dot{\theta}$ – מהירות משיקית $\omega = \frac{V}{R}$; θ – הזזה משיקית $\frac{u}{R}$

$$\theta\cdot R = U(t)$$

תאוצה רדיאלית: $\omega^2 R$

כוח רדיאלי: $M\omega^2 R$

חוק שטיינר

סיבוב של מסה לא סביב מרכז המסה

$$I_{tot} = I_0 + M\cdot R^2$$

(אין I_0 עבור מסה נקודתית)

$$f\ (rpm) = \frac{\omega\left(\frac{rad}{sec}\right)\cdot 60}{2\pi}$$

$$\omega\left(\frac{rad}{sec}\right) = \frac{2\pi\cdot f(rpm)}{60}$$

$$u_h(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(u_0\cos\omega_d t + \frac{(\dot{u}_0 + \xi\omega_n u_0)}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)$$

$$\omega_D = \sqrt{1-\xi^2}$$

הערות נוספות:

$$\theta(t) = \frac{u}{r}$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\dot{u}(t)}{r}$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{\ddot{u}(t)}{r}$$

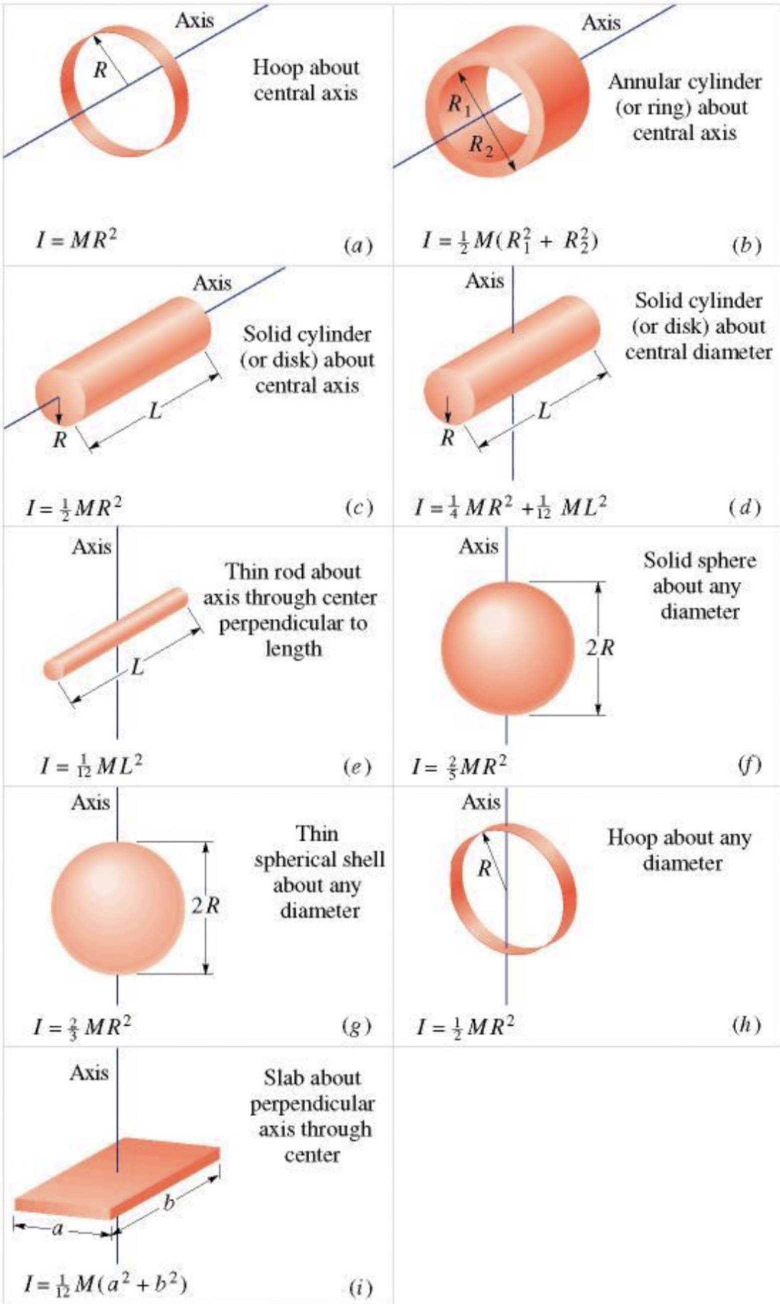
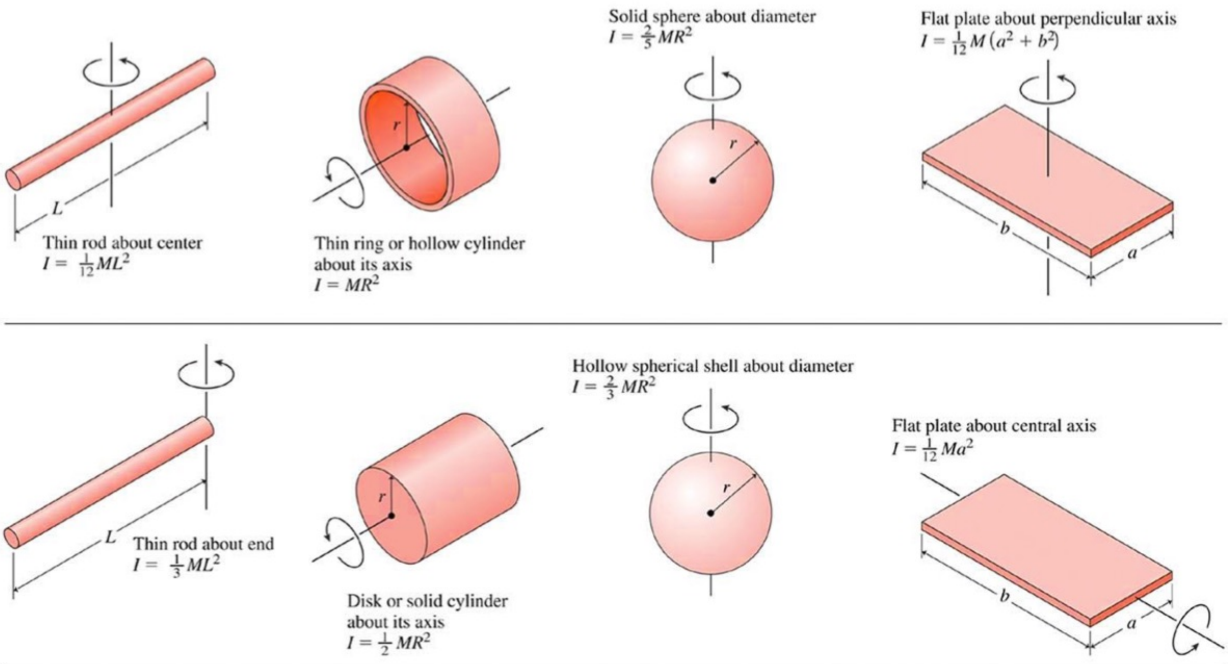


TABLE 10.2 Rotational Inertias



For all cases M is the total mass, i.e. $M = V\rho$ where V is the volume and ρ is the mass density.