$u(t)\ [m]$ - ההזזה של המערכת בזמן

- סימון נגזרות ביחס לזמן: $\dot{u}(t)=\frac{du}{dt}\left[\frac{m}{s}\right]$, $\ddot{u}(t)=\frac{d^2x}{dt^2}\left[\frac{m}{s^2}\right]$ or $[g]$

k - קשיחות המערכת , m - מסה מרוכזת של המערכת $m=\frac{W}{g}$

1.2 מבנים מופשטים:

- מגדל מים: $m\ddot{u}+ku=P$

-מסגרת פלדה בעלת קורה קשיחה לכפיפה ($EI_B=\infty$):

$$k_C=\frac{12EI_C}{h_C^3}\Rightarrow\underbrace{m\ddot{u}(t)}_{\text{מסת קורה + עומס גרביטציוני}}+\underbrace{ku(t)}_{\text{קשיחות אקוויולנטית}}=\underbrace{P}_{\text{חילוץ מהתקן רעידה אדמה או עומס רוח}}$$

- מסגרת כפיפה מבטון רתומה לקרקע:

$$k_h=\frac{24EI_c}{h_c^3}\cdot\frac{12\rho+1}{12\rho+4}\ ;\ \rho=\frac{\frac{EI_B}{L}}{\frac{2EI_c}{h}}\Rightarrow m\ddot{u}(t)+k_hu(t)=P$$

h_c - גובה עמוד, L - אורך קורה

1.3 תנאי התחלה:

הזזה התחלתית (אנרגיה פוטנציאלית): $u(0)=u_0$

מהירות התחלתית (אנרגיה קינטית): $\dot{u}(0)=\dot{u}_0$

1.4 כוח ריסון f_s:

מערכת לא מרוסנת תביא לפתרון (דרך מישדי"פ): $u(t)=u\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$ ניתן לראות מפתרון זה שהמערכת אינה מתרסנת וכדי שתתרסן נוסיף כוח ריסון: $f_s=c\dot{u}(t)$ כאשר: c - מקדם ריסון ויסקוזי ו-$\dot{u}$ מהירות המסה.

1.5 משוואת התנועה של מערכת $SDOF$:

המשוואה המתארת את התנועה של מרכז מסה ביחס לש"מ הסטטי, באה לידי ביטוי בש"מ (דינמי) של כוחות במערכת מול עומס חיצוני:

$$\underbrace{f_I}_{\text{כוח האינרציה}}+\underbrace{f_D}_{\text{כוח הריסון}}+\underbrace{f_S}_{\text{כוח ההשבה}}=\underbrace{P}_{\text{עומס חיצוני}}\Rightarrow m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)=P(t)$$

<u>הנחות:</u>
- לא קיים ריסון אלא אם צוין אחרת
- במבנה קיים התקן חיצוני - ריסון ויסקוזי לינארי או ריסון טבעי - מתכונות החומר שממנו בנוי המבנה.
- כוח ההשבה פועל תמיד בכיוון ש"מ סטטי ובקורס זה נייחס אותו למערכת לינארית-אלסטית.

קשיחות במקביל: $k_{eq}=\sum k_i$ **קשיחות בטור:** $\frac{1}{k_{eq}}=\sum\frac{1}{k_i}$

1.5.1 תנודות קרקע (רעידת אדמה):

$$\underbrace{u^t(t)}_{\text{הזזה כוללת}}=\underbrace{u(t)}_{\text{הזזה נוספת}}+\underbrace{u_g(t)}_{\text{תזוזת קרקע}}\Rightarrow\underbrace{m\ddot{u}^t(t)}_{\text{אינרציה}}+\underbrace{c\dot{u}(t)}_{\text{ריסון}}+\underbrace{ku(t)}_{\text{קשיחות}}=0\overset{\text{הצבה } u^t(t)}{\Longrightarrow}\underbrace{m\ddot{u}(t)+c\dot{u}(t)+ku(t)}_{\text{צריכים לפתור}}=\underbrace{-m\ddot{u}_g(t)}_{\text{עומס ר"א (ידוע)}}$$

* עקב מה שיש באגף ימין של המשוואה (עומס ר"א), מתרחש על המבנה מה שיש באגף שמאל של המשוואה.

*** הכוח החיצוני במקרה זה תלוי במסת המבנה, ככל שהמבנה יהיה גדול יותר כך הכוח מר"א שיופעל עליו יגדל.

1.5.2 מנוע מחולל ויברציות:

$$\underbrace{m\ddot{u}}_{\text{אינרציה}}+\underbrace{ku}_{\text{סטטיקה}}=\underbrace{P(t)}_{\text{מחולל ויברציות}}$$

$$m=m_{\text{קורה}}+\underbrace{m_{\text{מחולל}}}_{\approx0}$$

$$P(t)=m_eR\omega^2\cdot\sin(\omega t)\ ,\ \omega=\dot{\theta}\left[\frac{Rad}{sec}\right]$$

2 מערכות מגורים קשיחים

במערכת בעלת דרגת חופש אחת: **אם** נדע הזזה אחת **אז** נדע את כל ההזזות במבנה.

2.1 משוואת תנועה זוויתית של מערכת $SDOF$:

המשוואה תהיה משוואת מומנטים סביב ציר הסיבוב (בדרגת החופש): נניח זווית קטנה $\theta(t)\approx0$

$$\underbrace{M_I}_{\text{מומנט אינרציה}}+\underbrace{M_D}_{\text{מומנט ריסון}}+\underbrace{M_S}_{\text{מומנט השבה}}=\underbrace{M_P}_{\text{מומנט מכוח חיצוני}}\Rightarrow I\cdot\underbrace{\ddot{\theta}(t)}_{a_r=\frac{\ddot{u}(t)}{R}}+c_\theta\cdot\underbrace{\dot{\theta}(t)}_{\omega=\frac{\dot{u}(t)}{R}}+k_\theta\cdot\underbrace{\theta(t)}_{\theta=\frac{u}{R}}=M(t)\ ;\ I=\sum m_iL_i^2$$

$$I\ddot{\theta}(t)+cR_c^2\dot{\theta}(t)+kR_k^2\theta(t)=P(t)\cdot R_P\ ;\ I=\sum m_iL_i^2$$

2.2 מומנט התמד וחוק שטיינר במערכת מגופים קשיחים:

מוט: (לאורך ציר z) לכפיפה: $I_{xx}=\frac{mL^2}{12}$

לפיתול: $m=\int_0^L\rho(x)dx\overset{\rho(x)=\rho}{=}\rho L\Rightarrow I_{zz}=\frac{mL^2}{3}$

מלבן (ברוחב b ובגובה h): לכפיפה: $m=\rho bh\Rightarrow I_{xx}=\frac{mh^2}{12}$, $I_{yy}=\frac{mb^2}{12}$

לפיתול: $I_{zz}=I_{xx}+I_{yy}=\frac{m(b^2+h^2)}{12}$

דיסקה: לכפיפה: $I_{xx}=I_{yy}=\frac{mR^2}{4}$

לפיתול: $I_{zz}=I_{xx}+I_{yy}=\frac{mR^2}{2}$

חתך אליפסה: לכפיפה: $I_{xx}=\frac{mb^2}{12}$, $I_{yy}=\frac{ma^2}{12}$

לפיתול: $I_{zz}=I_{xx}+I_{yy}=I_{zz}=I_{xx}+I_{yy}=\frac{m(a^2+b^2)}{12}$

כדור מלא: סביב ציר במרכזו: $I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}=\frac{2mR^2}{5}$

קליפת כדור חלול: סביב ציר במרכזו: $I_{xx}=I_{yy}=I_{zz}=\frac{2mR^2}{3}$

מקדם תיקון שטיינר: mL_i^2

דוגמא: מומנט התמד למוט סביב קצהו: $I_{tot}=\underbrace{\frac{mL^2}{12}}_{\text{סביב מרכזו}}+\underbrace{m\left(\frac{L}{2}\right)^2}_{\text{שטיינר}}=\frac{mL^2}{3}$

מילון מושגים ויחידות:

מנת ריסון: $[\%]$ $\zeta=\frac{c}{c_{cr}}=\frac{c}{2m\omega_n}$ **כאשר ריסון קריטי:** $c_{cr}=2m\omega_n\left[\frac{kg\cdot Rad}{Sec}\right]$

תדירות זוויתית טבעית: $\omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}\left[\frac{Rad}{Sec}\right]$

תדירות זוויתית מרוסנת: $\omega_D=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\sqrt{1-\zeta^2}\left[\frac{Rad}{Sec}\right]$

תדירות טבעית: $f_n=\frac{\omega_n}{2\pi}\left[\frac{1}{Sec}=Hz\right]$

זמן מחזור טבעי: $T_n=\frac{1}{f_n}=\frac{2\pi}{\omega_n}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ [Sec]$

זמן מחזור במערכת מרוסנת: $T_D=\frac{2\pi}{\omega_D}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}\ [Sec]$

*** T_n ו-ω_n הינם תיאורטיים בלבד מכיוון שבמציאות תמיד קיים ריסון למערכת.

3 תנודות חופשיות

3.1 תנודות חופשיות במערכת $SDOF$:

הנחה: $c = 0\ ,\ P(t) = 0$

ניסוח הבעיה: $m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0$

תנאי התחלה: * הזזה התחלתית (אנרגיה פוטנציאלית $E_p = \frac{1}{2}ku(0)^2$): $u(0) = u_0$

* מהירות התחלתית (אנרגיה קינטית $E_k = \frac{1}{2}m\dot{u}(0)^2$): $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$

- נפתור את המשוואה: $\ddot{u}(t) + \frac{k}{m}u(t) = 0$
- נניח פתרון: $u(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$
- נגזור פעם ראשונה: $\dot{u}(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}}A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + \sqrt{\frac{k}{m}}B\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$
- נגזור פעם שנייה: $\ddot{u}(t) = -\frac{k}{m}A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - \frac{k}{m}B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$
- נציב תנאי התחלה:

$$u(0) = u_0 \quad \Rightarrow \quad A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 0\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 0\right) = u_0 \quad \Rightarrow \quad A = u_0$$

$$\dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{\frac{k}{m}}A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 0\right) + \sqrt{\frac{k}{m}}B\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot 0\right) = \dot{u}_0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\dot{u}_0}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{\dot{u}_0}{\omega_n}$$

<u>סוגי פתרונות שניתן להפיק:</u>

- **פתרון 1 - הזזה ברגע מסוים t:**

$$\boldsymbol{u(t) = u_0 \cdot \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} \cdot \sin(\omega_n t)}$$

- **פתרון 2 - הזזה מרבית (אינדיקטור לנזק מרבי במבנה):**

$$\boldsymbol{u(t) = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\right)^2} \cdot \sin(\omega_n t + \phi) = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n}\right)^2} \cdot \cos(\omega_n t - \phi) \quad ; \quad \phi = \arctan\left(\frac{u_0 \cdot \omega_n}{\dot{u}_0}\right)}$$

זמן מחזור - הזמן בין 2 רגעים, בהם ההזזה והמהירות זהים.

כלל אצבע - זמן מחזור למבנה בטון: $T_n \approx \frac{\text{מספר קומות}}{10}$

3.2 תנודות חופשיות במערכות מרוסנות:

הנחה: $P(t) = 0$

ניסוח הבעיה: $m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = 0$

תנאי התחלה: $u(0) = u_0$

$\dot{u}(0) = \dot{u}_0$

- נפתור את המשוואה: $\ddot{u}(t) + \frac{c}{m}\dot{u}(t) + \frac{k}{m}u(t) = 0$ כאשר: $\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}\ ,\ \frac{c}{m} = 2\zeta\ ,\ \frac{k}{m} = \omega_n^2$
- נסנח מחדש: $\ddot{u}(t) + 2\zeta\dot{u}(t) + \omega_n^2 u(t) = 0$
- נניח פתרון: $u(t) = ae^{\lambda t}$

$$a(\lambda^2 + \lambda(2\zeta\omega_n) + \omega_n^2) \cdot e^{\lambda t} = 0$$

- בסוגריים יש מספר מרוכב $\quad \lambda = \omega_n\left(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2}\right) \quad ; \quad i = \sqrt{-1}$

<u>לכן נבחין בין שני מצבים:</u>

- אם $\zeta > 1$ אז השורש שלילי - מספר מרוכב הופך למספר ממשי מצב זה נקרא **ריסון על קריטי**.

פתרון (ריסון על קריטי):

$$\boldsymbol{u(t) = u_0 e^{-\zeta\omega_n t}}$$

- אם $\zeta < 1$ אז השורש חיובי - מספר מרוכב נשאר מספר מרוכב מצב זה נקרא **ריסון תת קריטי**.

פתרון ריסון תת קריטי:

- **פתרון 1 - הזזה ברגע מסוים t:**

$$\boldsymbol{u(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \left[u_0 \cdot \cos(\omega_D t) + \frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n \cdot u_0}{\omega_D} \cdot \sin(\omega_D t)\right]}$$

- **פתרון 2 - הזזה מרבית:**

$$\boldsymbol{u(t) = \rho \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \sin(\omega_D t + \phi) \quad ; \quad \rho = \sqrt{u_0^2 + \left[\frac{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}{\omega_D}\right]^2} \quad , \quad \phi = \arctan\left(\frac{u_0\omega_D}{\dot{u}_0 + \zeta\omega_n u_0}\right)}$$

$$\zeta_{Steal} = 0.02\ ,\ \zeta_{Concrete} = 0.05$$

$$\zeta \le 0.2 = 20\% \quad \Rightarrow \quad \omega_n \cong \omega_D$$

בנק' ש"מ: $\sin(\omega_D t + \phi) = \pm 1$, **ואז** יש התנגשות בפונקציית המעטפת.

מבנים מגיעים עד מנת ריסון של 40%: $\zeta_{Structure} = 0.4$

3.3 דעיכת התנועה:

- נגדיר דעיכה בין 2 פיקים סמוכים:

$$\frac{u(t)}{u(t+T_D)} = e^{\zeta\omega_n t} = e^{\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = \frac{u_i}{u_{i+1}}$$

$$\delta = \ln\left(\frac{u_i}{u_{i+1}}\right) = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \xrightarrow{\zeta \le 0.2 \ \Rightarrow\ \sqrt{1-\zeta^2} \simeq 1} \delta \simeq 2\pi\zeta$$

- לכן הדעיכה בין פיק i לבין פיק $i+j$ תבוטא כך:

$$\boldsymbol{\delta = \frac{1}{j}\ln\left(\frac{u_i}{u_{i+j}}\right) \simeq 2\pi\zeta}$$

4 תנודות מאולצות - מערכת עם עומס חיצוני $P(t)$

הארה: ω - תדירות **הכוח**, ω_n - תדירות **המערכת**.

$$\boldsymbol{\beta = \frac{\omega}{\omega_n}}$$

4.1 תנודות מאולצות במערכת ללא ריסון:

הנחה: $c = 0\ ,\ P(t) = P_0\sin(\omega t)$

ניסוח הבעיה: $m\ddot{u}(t) + ku(t) = P_0\sin(\omega t)$

תנאי התחלה: $u(0) = u_0$

$\dot{u}(0) = \dot{u}_0$

- הפתרון יהיה מורכב כך: $u(t) = \underbrace{u_H(t)}_{\text{פתרון הומוגני}} + \underbrace{u_p(t)}_{\text{פתרון פרטי}}$

פתרון הומוגני (מתנודות חופשיות): $u_H(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t)$

פתרון פרטי: $u_p(t) = D \cdot \sin(\omega t)$

- נגזור ונציב $u_p(t)$ לתוך: $m\ddot{u}_p(t) + ku_p(t) = P_0\sin(\omega t)$ ונקבל:

$$D = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{1}{1-\beta^2}$$

- נציב $u_H(t)$ ו-$u_p(t)$ ב-$u(t)$ ונקבל:

$$u(t) = A\cos(\omega_n t) + B\sin(\omega_n t) + \frac{P_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\cdot \sin(\omega t)$$

- נציב תנאי התחלה:

$$u(0) = u_0 \quad\Rightarrow\quad A = u_0$$
$$\dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad\Rightarrow\quad B = \frac{\dot{u}_0}{\omega_n} - \frac{P_0}{k}\cdot\frac{\beta}{1-\beta^2}$$

*** זמן המחזור של התגובה יהיה כזמן המחזור של העומס.
*** המערכת תתערב ותכתיב את גודל התגובה - מכיוון שבטבע מערכת תמיד מכילה ריסון, וכאן אנחנו מזניחים אותו, ניתן להגיד שהפתרון ההומוגני שמבטא את תרומתם של $u(0)$ ו-$\dot{u}(0)$ חולף לכך $u_p(t)$ הפתרון הפרטי נשאר.

לאחר מספר מחזורים המערכת מתייצבת והפתרון מוכתב ע"י העומס (ע"י הפתרון הפרטי):

$$u(t) = \underbrace{u_H(t)}_{Transient\ state} + \underbrace{u_p(t)}_{Steady\ state}$$
$$u(t) = \underbrace{u_0\cdot\cos(\omega_n t) + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_n} - \frac{P_0}{k}\cdot\frac{\beta}{1-\beta^2}\right)\cdot\sin(\omega_n t)}_{\text{מצב דינאמי לא יציב (חולף)}} + \underbrace{\frac{P_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\cdot\sin(\omega t)}_{\text{מצב דינאמי יציב}}$$

פתרון מצב יציב:

$$\boldsymbol{u(t) = \frac{P_0}{k}\cdot\frac{1}{1-\beta^2}\cdot\sin(\omega t)}$$

ניתן לרשום את הפתרון גם כך:

$$\boldsymbol{u(t) = (u_{st})_0\cdot R_d\cdot\sin(\omega t - \phi)} \quad ; \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{cases} \boldsymbol{0}\ ,\ \boldsymbol{\beta < 1} - \text{המכנה חיובי} \\ \boldsymbol{\pi}\ ,\ \boldsymbol{\beta > 1} - \text{המכנה שלילי} \end{cases}$$

הזזה סטטית התחלתית: $(u_{st})_0 = \frac{P_0}{k}$
מקדם הגברה של הזזה: $R_d = \frac{1}{|1-\beta^2|}$

תהודה/רזוננס - מצב בו התדר של העומס החיצוני ω שווה לתדר של המבנה ω_n , בתכנון המבנה נרצה להימנע (להתרחק) ממצב זה.
עבור מערכת זו (ללא ריסון) תהודה ב: $\omega = \omega_n$

אם $\beta > 1$ **אז** נגדיל מסה ונקטין קשיחות (נתרחק ממצב של תהודה)
אם $\beta < 1$ **אז** נקטין מסה ונגדיל קשיחות (נתרחק ממצב של תהודה)

מקרה מיוחד $\omega = \omega_n$**:**
נשים לב שבמצב תהודה הפונקציה של ההזזה **תתבדר:**

$$u(t) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{P_0}{k}\cdot(\omega_n \boldsymbol{t}\cdot\cos(\omega_n t) - \sin(\omega t)) \xrightarrow{t\to\infty} \infty$$

4.2 תנודות מאולצות במערכות מרוסנות:

הנחה: $P(t) = P_0\sin(\omega t)$
הארה: ω - תדירות **הכוח**, ω_n - תדירות **המערכת**.
ניסוח הבעיה: $m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = P_0\sin(\omega t)$
תנאי התחלה: $u(0) = u_0$
$\dot{u}(0) = \dot{u}_0$

- הפתרון יהיה מורכב כך: $u(t) = \underbrace{u_H(t)}_{\text{פתרון הומוגני חולף}} + \underbrace{u_p(t)}_{\text{פתרון פרטי}}$

נקבל:

$$u(t) = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)$$

- נציב תנאי התחלה:

$$\dot{u}(0) = \dot{u}_0 \quad\Rightarrow\quad C = \frac{P_0}{k}\cdot\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$$
$$u(0) = u_0 \quad\Rightarrow\quad D = \frac{P_0}{k}\cdot\frac{-2\zeta\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}$$

פתרון מצב יציב:

$$\boldsymbol{u(t) = \frac{P_0}{k}\cdot\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}\cdot\left[(-2\zeta\beta)\cos(\omega t) + (1-\beta^2)\sin(\omega t)\right]}$$

פתרון מקרה מיוחד $\omega = \omega_n$**:**

$$\boldsymbol{u(t) = (u_{st})_0\cdot\frac{1}{2\zeta}\left[e^{-\zeta\omega_n t}\cdot\left(\cos(\omega_D t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_D t)\right) - \cos(\omega_n t)\right]}$$
$$\boldsymbol{u(t) = (u_{st})_0\cdot\frac{1}{2\zeta}\left[e^{-\zeta\omega_n t} - 1\right]}$$

*למבנה הזה לוקח סביבות $10T_n$ (10 פעמים זמן מחזור) כדי להתייצב עבור עומס $P(t)$, במערכת מרוסנת בתהודה נקבל ערך סופי (לא מתבדר).

4.3 תהודה במערכות מרוסנות:

במערכת מרוסנת יש תהודה של מספר דברים: הזזה, מהירות ותאוצה. נגדיר את טווח התדרים הכולל את שלושת התהודות, נרצה לתכנן את המערכת מחוץ לטווח זה.

נגדיר כמה פרמטרים:

מקדם הגברה הזזה (הזזה=ריאקציה לקשיחות): $R_d = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}$

מקדם הגברה מהירות (מהירות=ריאקציה לריסון): $R_v = \beta R_d$

מקדם הגברה תאוצה (תאוצה=ריאקציה למסה): $R_a = \beta R_v = \beta^2 R_d$

תהודת הזזה - **מקדם הגברת הזזה מקסימלי:** $\frac{dR_d}{d\beta} = 0 \;\Rightarrow\; \beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \sqrt{1-2\zeta^2} \;\Rightarrow\; R_{d,max} = \frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}}$

תהודת מהירות - **מקדם הגברת מהירות מקסימלי:** $\frac{dR_v}{d\beta} = 0 \;\Rightarrow\; \beta = \frac{\omega}{\omega_n} = 1 \;\Rightarrow\; R_{v,max} = \frac{1}{2\zeta}$

תהודת תאוצה - **מקדם הגברת תאוצה מקסימלי:** $\frac{dR_a}{d\beta} = 0 \;\Rightarrow\; \beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2}} \;\Rightarrow\; R_{a,max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$

4.4 ספקטרום תגובה לתכן:

נכנסים לגרף עם $\frac{\omega}{\omega_n}$ ועם מנת ריסון ומהנקוד מורידים קו בניצב לשלושת הצירים: R_d, R_v, R_a ומוציאים את שלושת מקדמי ההגברה.

4.5 תחום רגיש ($Half - Power\ Bandwidth$):

תחום רגיש הינו: $\left[R_{d,max}\right]^2$ לבין $\frac{1}{2}\left[R_{d,max}\right]^2$

התחום יהיה: $1-\zeta \le \frac{\omega}{\omega_n} \le 1+\zeta$

4.6 כוח מועבר ממכונה רוטטת ($TRansmissibility$):

הכוח $f_T(t)$ המועבר לריתום: $f_T = f_S + f_D$ (בלי המסה):

$$f_T(t) = ku(t) + c\dot{u}(t)$$

נגדיר את כוח התמסורת של המערכת מעומס $P(t) = P_0 \sin(\omega t)$ אל יסוד, סמך, תקרה וכדומה.

$$f_T(t) = \frac{P_o}{k} \cdot R_d[k \cdot sin(\omega t + \phi) + c \cdot cos(\omega t + \phi)]$$

$$f_T(0) = \frac{P_o}{k} \cdot R_d\sqrt{k^2 + c^2\omega^2}$$

היחס של הכוח המועבר לאמפליטודת העומס:

$$\boldsymbol{TR = \frac{f_T(0)}{P_o} = \sqrt{\frac{1 + (2\zeta\beta)^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}} \quad , \quad \boldsymbol{\beta = \frac{\omega}{\omega_n}}$$

TR - מקדם תמסורת לעומס הרמוני.

תגובה לרעידת אדמה:

$$\ddot{u}_g(t) = \ddot{u}_{g,0}\sin(\omega t)$$

$$\boldsymbol{u(t) = -\frac{m\ddot{u}_{g,0}}{k}R_d sin(\omega t + \phi)}$$

חוקי עזר:

1. חוק שימור אנרגיה: $\sum E_i = \sum E_f \quad \Rightarrow \quad E_{k,i} + E_{p,i} = E_{k,f} + E_{p,f}$
2. חוק שימור תנע (מערכת עם שני גופים): $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1^* + m_2v_2^*$
   חוק שימור תנע בכלליות: $\sum m_iv_i = \sum m_fv_f$
3.

המרות של יחידות:

המרת קשיחות: $1\left[\frac{lb}{in}\right] = 175.13\left[\frac{N}{m}\right]$

	אירופאי ($S.I$)	אמריקאי	
מסה	$1.0\ [kg]$	$2.2046\ [lb\ or\ Pound]$	
	$0.4536\ [kg]$	$1.0\ [lb\ or\ Pound]$	
כוח (משקל)	$1.0\ [N] = 1.0\frac{[kg][m]}{[sec^2]}$	$0.2248\ [lb_F]$	
	$4.4482\ [N]$	$1.0\ [lb_F]$	
מידת אורך	$1.0\ [m]$	$39.3071\ [inch]$	$3.28084\ [ft]$
	$0.0254\ [m]$	$1.0\ [inch]$	$\frac{1}{12}\ [ft]$
	$0.3048\ [m]$	$12.0\ [inch]$	$1.0\ [ft]$
זמן	$1.0\ [sec]$	$1.0\ [sec]$	
תאוצת הכובד	$9.8067\frac{[m]}{[sec^2]}$	$32.1742\frac{[ft]}{[sec^2]}$	
מאמץ/לחץ	$1.0\ [Pa]$	$1.450377 \cdot 10^{-4}\ [PSI]$	
	$6894.7573\ [Pa]$	$1.0\ [PSI]$	
קשיחות	$175.13\ \frac{[N]}{[m]}$	$1.0\ \frac{[lb_F]}{[inch]}$	

שונות:

- **זהות חשובה:**
  $$asin(\omega t) + bcos(\omega t) = \sqrt{a^2+b^2} \cdot sin(\omega t + \phi) \quad ; \quad \phi = arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \begin{cases} 0 & , \quad a \ge 1 \\ \pi & , \quad a < 1 \end{cases}$$
- **הזזה מקסימלית:** $u(t)_{max} = u_{st,0} \cdot R_d \cdot \sqrt{a^2+b^2}$
- **שרטוט גרף הזזה:**
  יש צורך להגדיר ציר הזזה, ומצב התחלתי הכולל את כל המסה הנבחנת. נגדיר תנאי התחלה בהתאם לכיווניות הציר הנבחר. חיתוכים של סינוס עם ציר x:
  $$\sin(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pi K \ ; \ K \in \mathbb{Z}$$
- נציב: $K = 0, K = 1, K = 2 \ldots$ ונוציא נ"ק התאפסות של הסינוס.
- **הזזה של גרף:** $u(t) = sin(\omega t)$ ע"י הוספת ϕ **כך:** $u(t) = sin(\omega t + \phi)$ הגרף יזוז: $\frac{\phi}{\omega}$ ימינה
- **מהירות מקסימלית ראשונה של תנועה הרמונית:**
  כדי למצוא את הזמן הראשון בו המהירות מקסימלית נשווה: $u(t) = 0$ ונמצא את הזמן הראשון המקיים את זה.
- **כוח גזירה ומומנט בבסיס של כל עמוד:** $V_{c,i} = \frac{12EI_{c,i}}{h_i^3} \cdot u_0 \quad \Rightarrow \quad M_{c,i} = \frac{6EI_{c,i}}{h_i^2} \cdot u_0 = V_{c,i} \cdot \frac{h}{2}$

תנועה חופשית במערכת ללא ריסון:

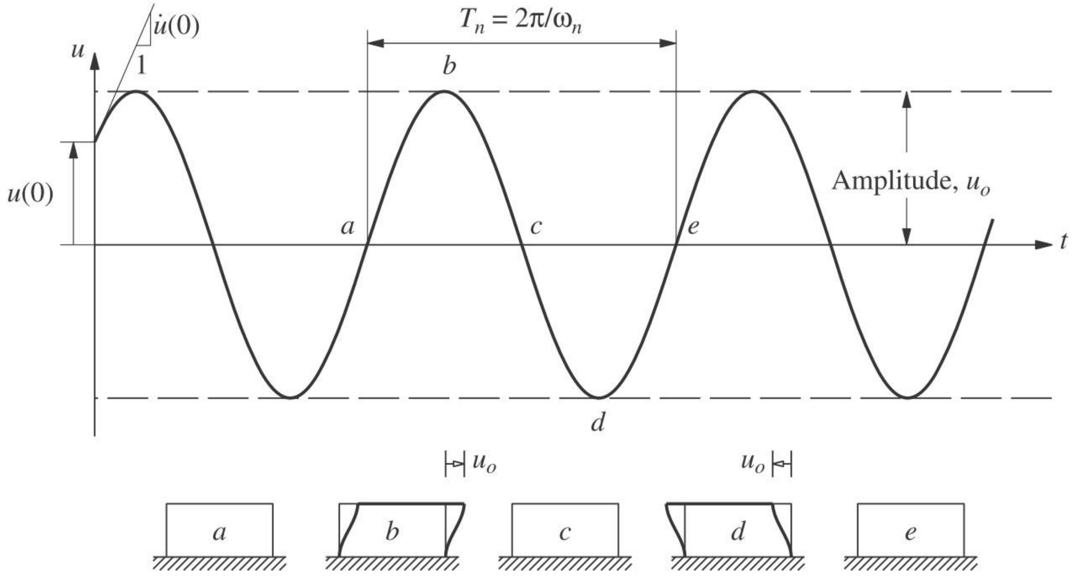

Figure 2.1.1 Free vibration of a system without damping.

תנועה חופשית במערכת ללא ריסון:

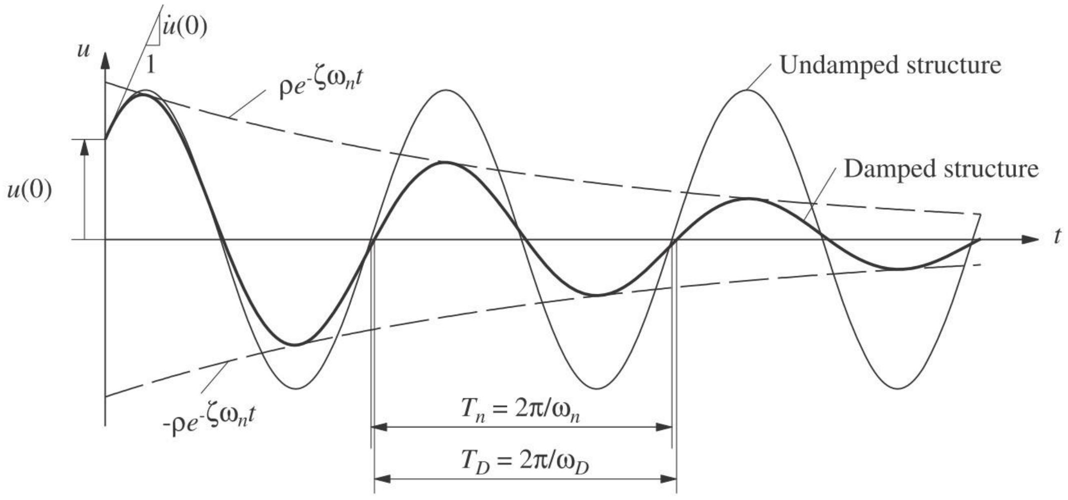

Figure 2.2.2 Effects of damping on free vibration.

תנועה חופשית במערכת עם ריסון לפי מנות ריסון שונות:

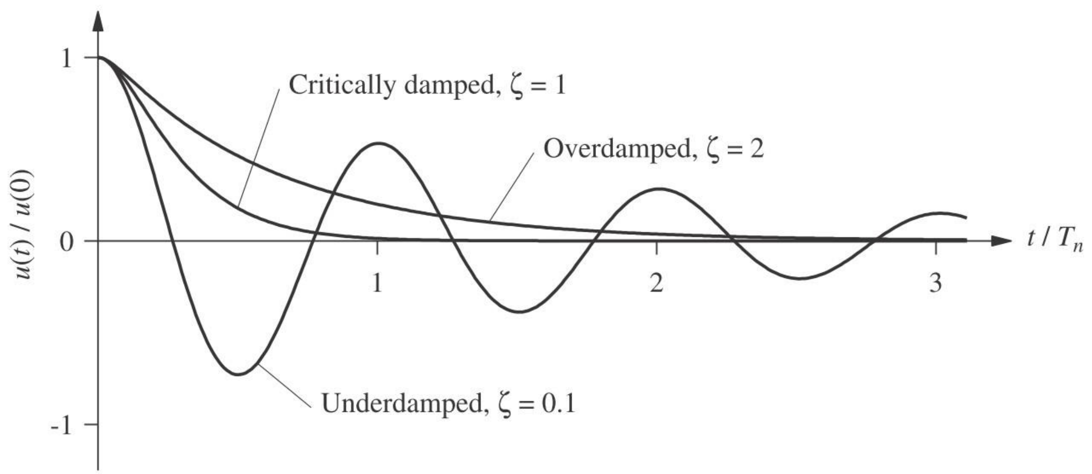

Figure 2.2.1 Free vibration of underdamped, critically damped, and overdamped systems.

תגובה של מערכת לא מרוסנת לכוח הרמוני:

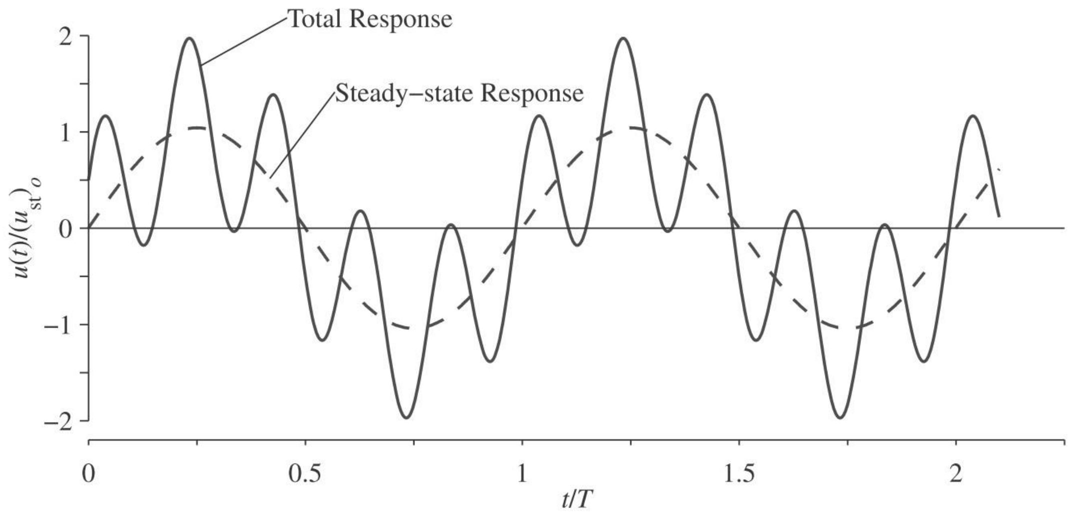

Figure 3.1.1 (a) Harmonic force; (b) response of undamped system to harmonic force; $\omega/\omega_n = 0.2$, $u(0) = 0.5p_o/k$, and $\dot{u}(0) = \omega_n p_o/k$.

מקדם הגברה של מערכת, ואסימפטוטות התהודה:

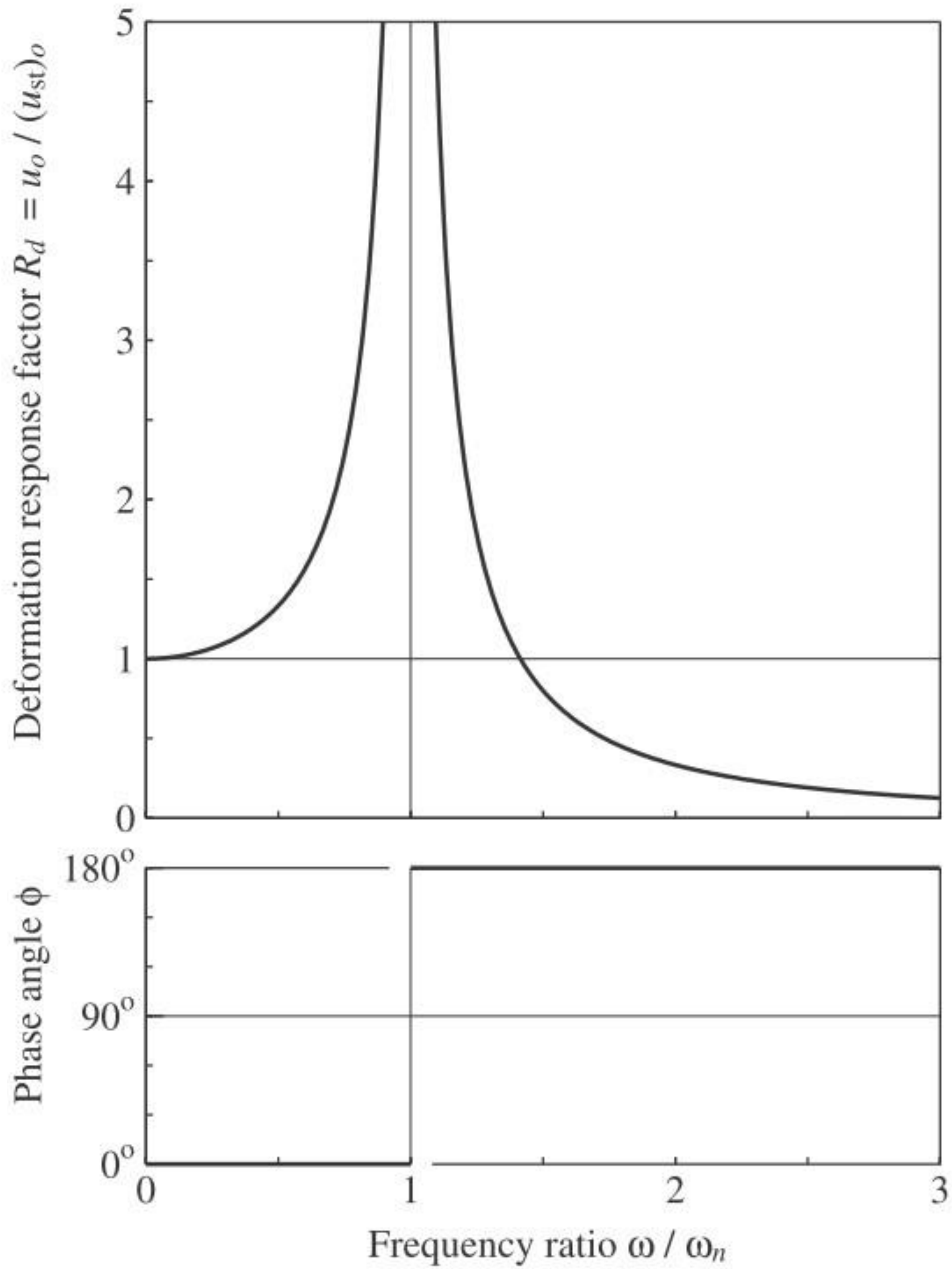

Figure 3.1.3 Deformation response factor and phase angle for an undamped system excited by harmonic force.

תגובה של מערכת לא מרוסנת לכוח סינוסי בתהודה ($\omega = \omega_n$):

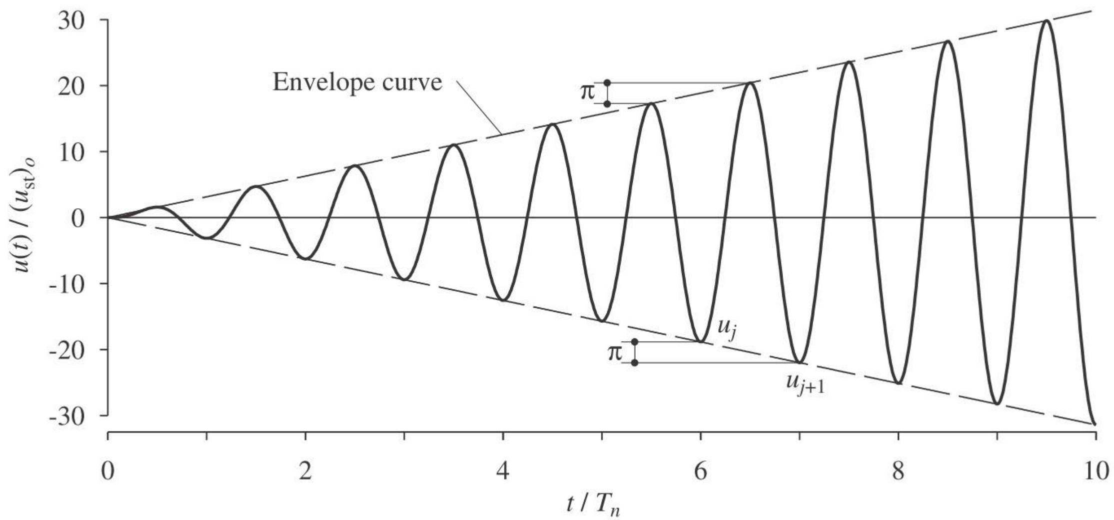

Figure 3.1.4 Response of undamped system to sinusoidal force of frequency $\omega = \omega_n$; $u(0) = \dot{u}(0) = 0$.

תגובה של מערכת מרוסנת לכוח הרמוני:

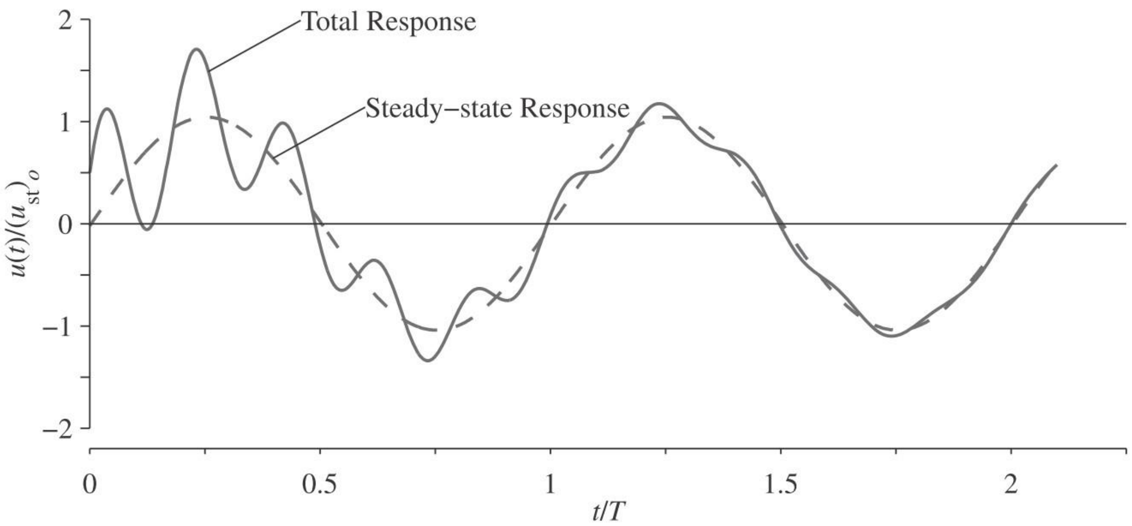

Figure 3.2.1 Response of damped system to harmonic force; $\omega/\omega_n = 0.2$, $\zeta = 0.05$, $u(0) = 0.5p_o/k$, and $\dot{u}(0) = \omega_n p_o/k$.

תגובה של מערכת מרוסנת לכוח סינוסי בתהודה ($\omega = \omega_n$):

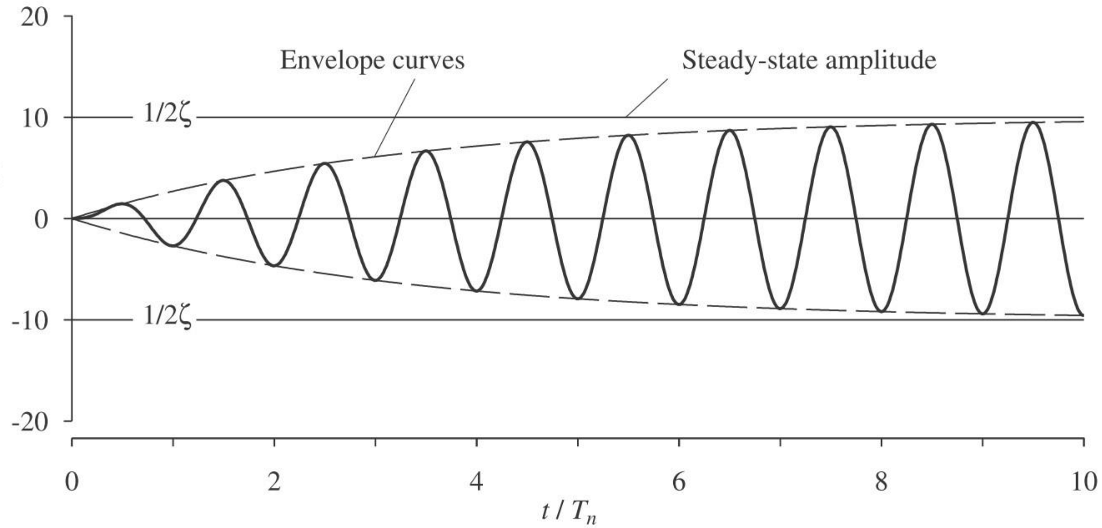

Figure 3.2.2 Response of damped system with $\zeta = 0.05$ to sinusoidal force of frequency $\omega = \omega_n$; $u(0) = \dot{u}(0) = 0$.

מנוע מחולל ויברציות:

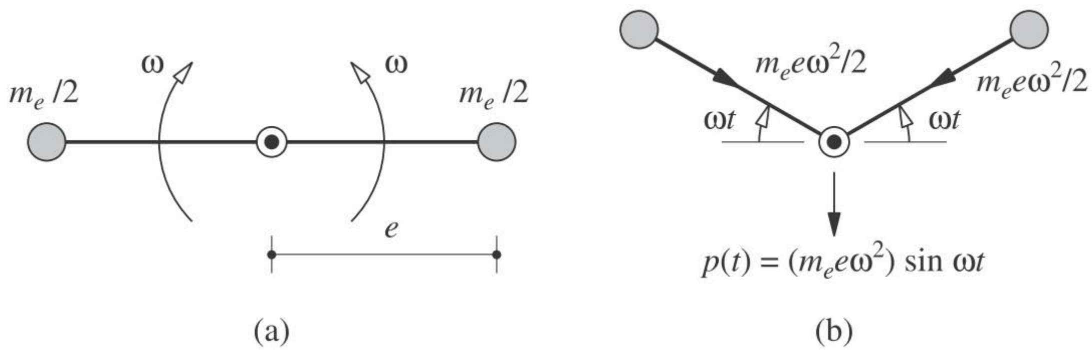

Figure 3.3.2 Vibration generator: (a) initial position; (b) position and forces at time t.

מקדם הגברה של מערכת מרוסנת הנתונה לכוח הרמוני לפי מנות ריסון שונות:

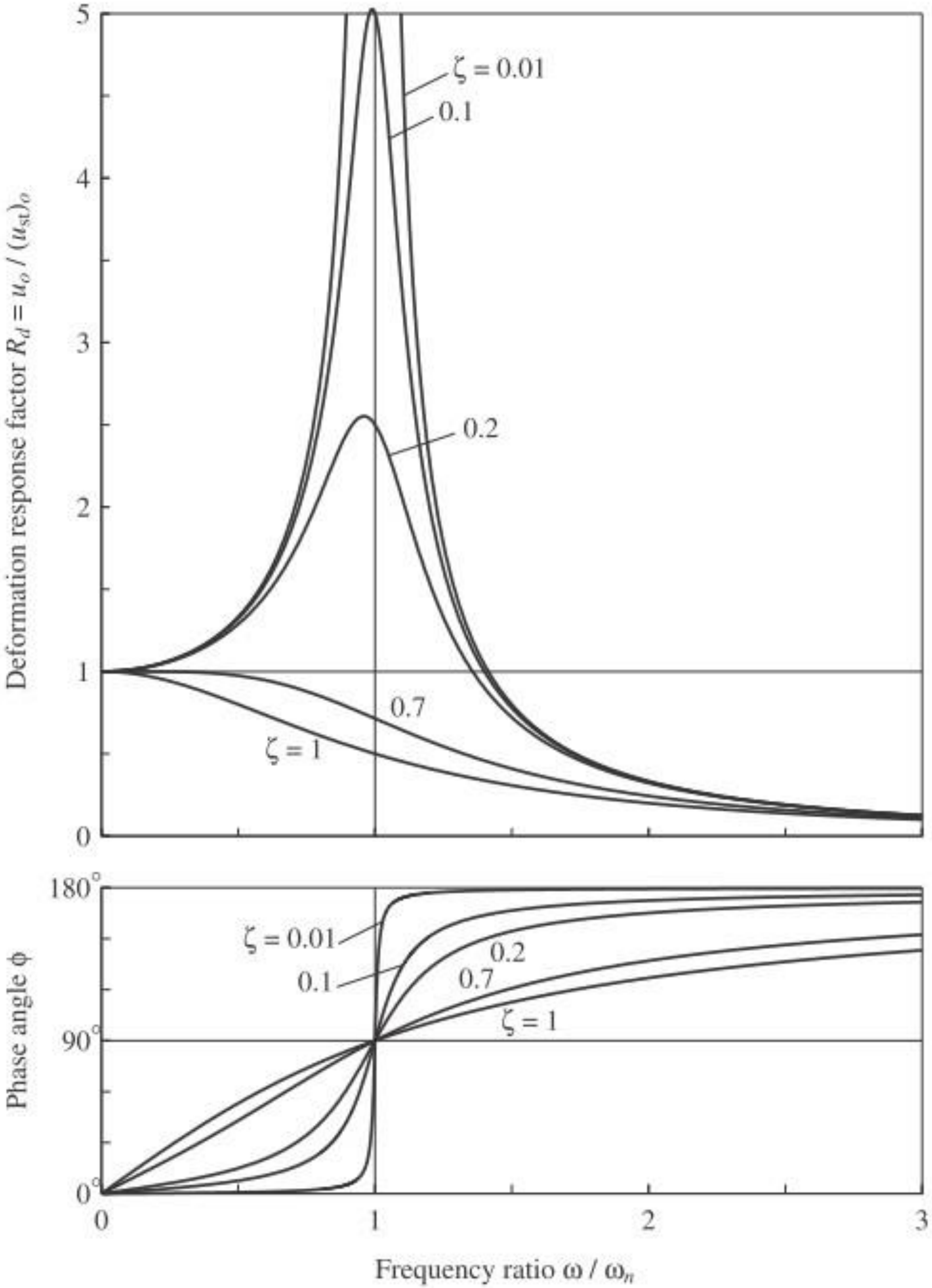

Figure 3.2.6 Deformation response factor and phase angle for a damped system excited by harmonic force.

תגובות דפורמציה, מהירות ותאוצה של מערכת מרוסנת לכוח הרמוני

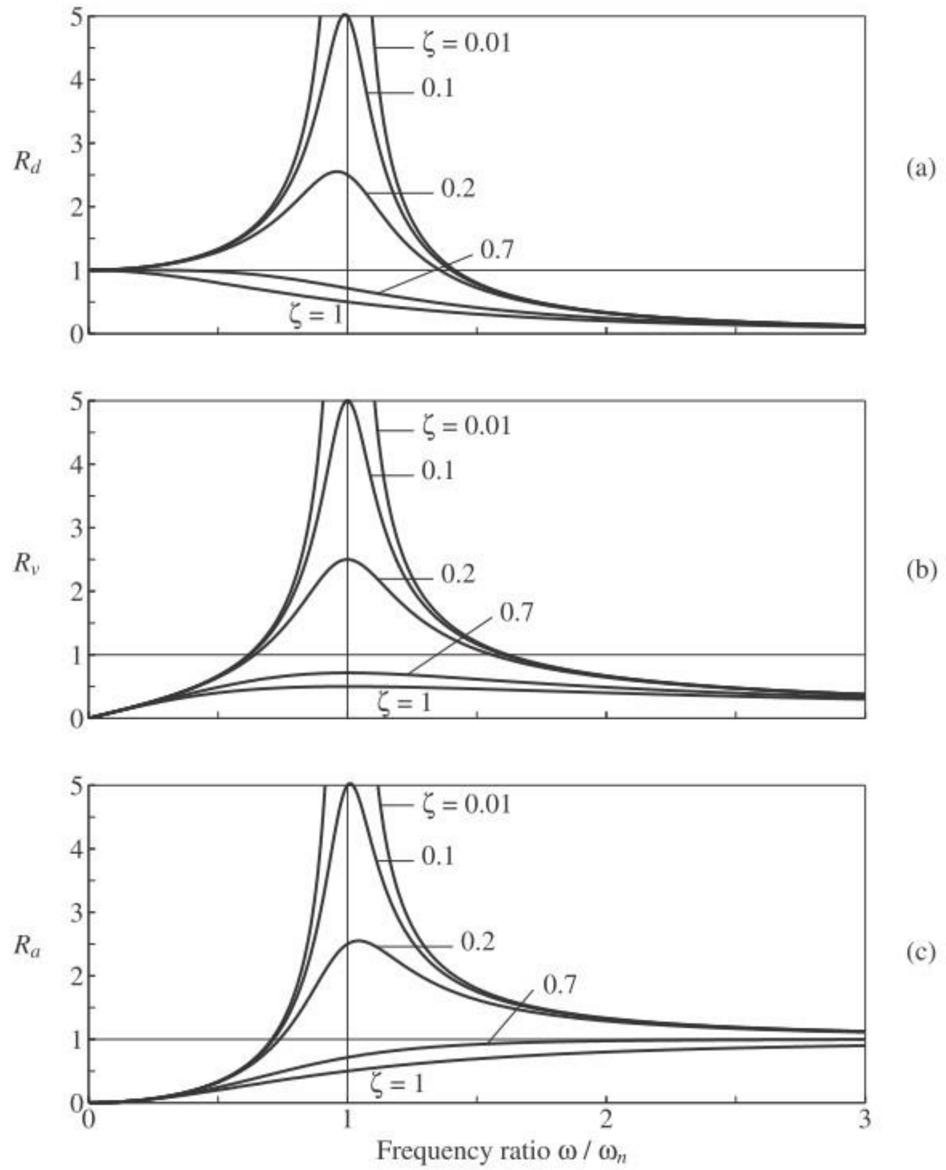

Figure 3.2.7 Deformation, velocity, and acceleration response factors for a damped system excited by harmonic force.

מגרש לוגריתמי ארבע-כיווני של תגובות דפורמציה, מהירות ותאוצה של מערכת מרוסנת לכוח הרמוני

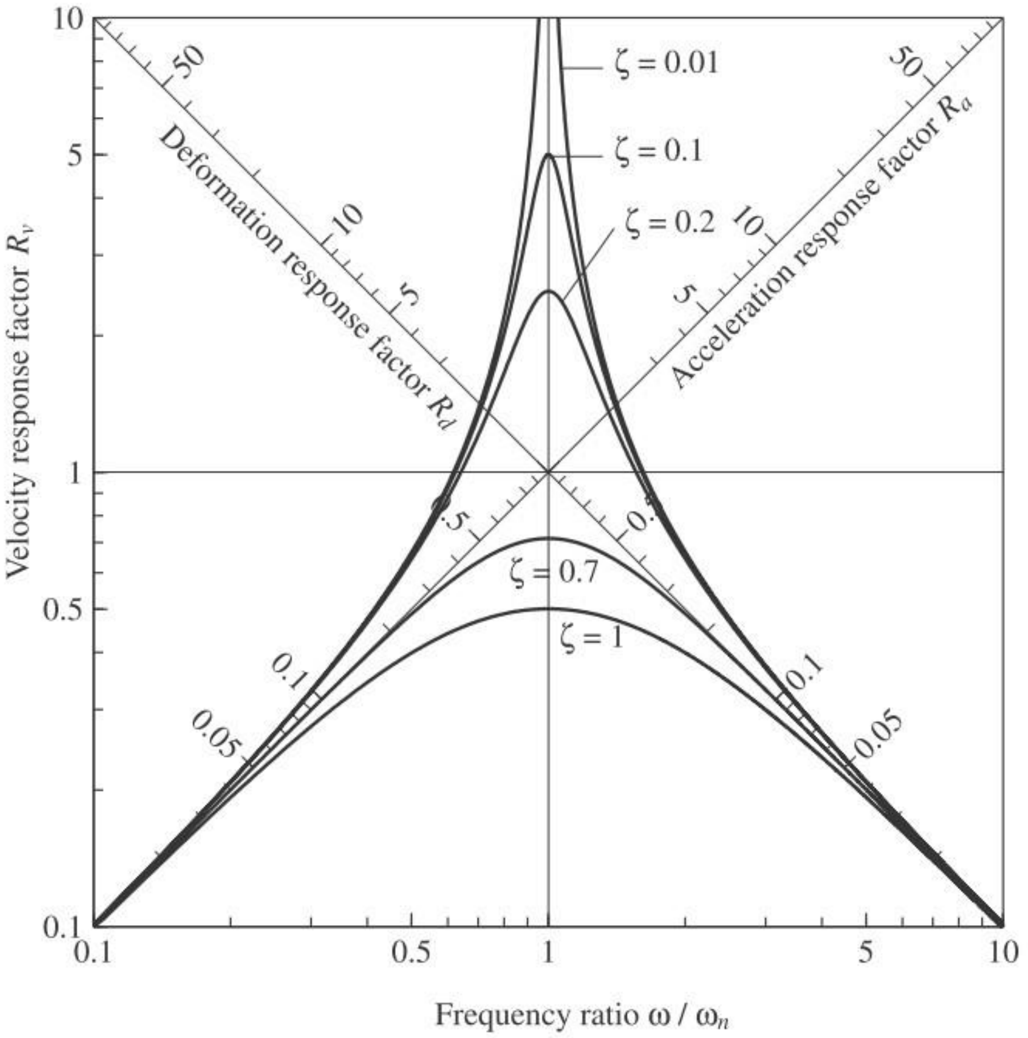

Figure 3.2.8 Four-way logarithmic plot of deformation, velocity, and acceleration response factors for a damped system excited by harmonic force.

3.2.2 Response for $\omega = \omega_n$

$$u(t) = (u_{\rm st})_o \frac{1}{2\zeta}\left[e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_D t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_D t\right) - \cos\omega_n t\right]$$

$$u_o = \frac{(u_{\rm st})_o}{2\zeta}$$

$$u(t) \simeq \underbrace{(u_{\rm st})_o \frac{1}{2\zeta}(e^{-\zeta\omega_n t} - 1)}_{\text{envelope function}} \cos\omega_n t$$

Figure 3.2.2 Response of damped system with $\zeta = 0.05$ to sinusoidal force of frequency $\omega = \omega_n$; $u(0) = \dot{u}(0) = 0$.

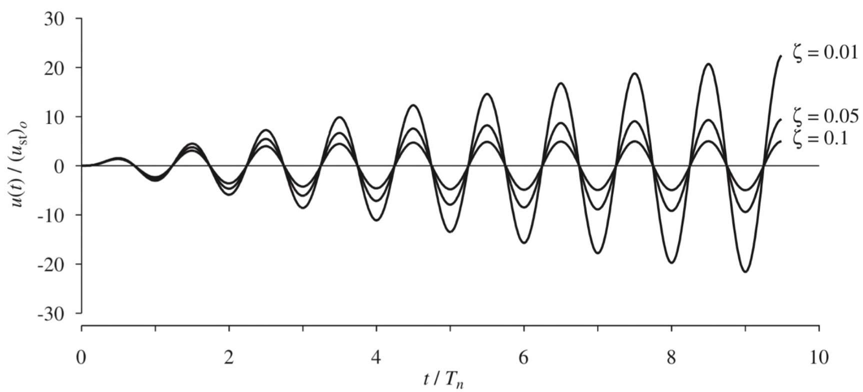

Figure 3.2.3 Response of three systems—$\zeta = 0.01$, 0.05, and 0.1—to sinusoidal force of frequency $\omega = \omega_n$; $u(0) = \dot{u}(0) = 0$.

$$\frac{|u_j|}{u_o} = 1 - e^{-2\pi\zeta j}$$

הגדרה של רוחב פס של חצי הספק

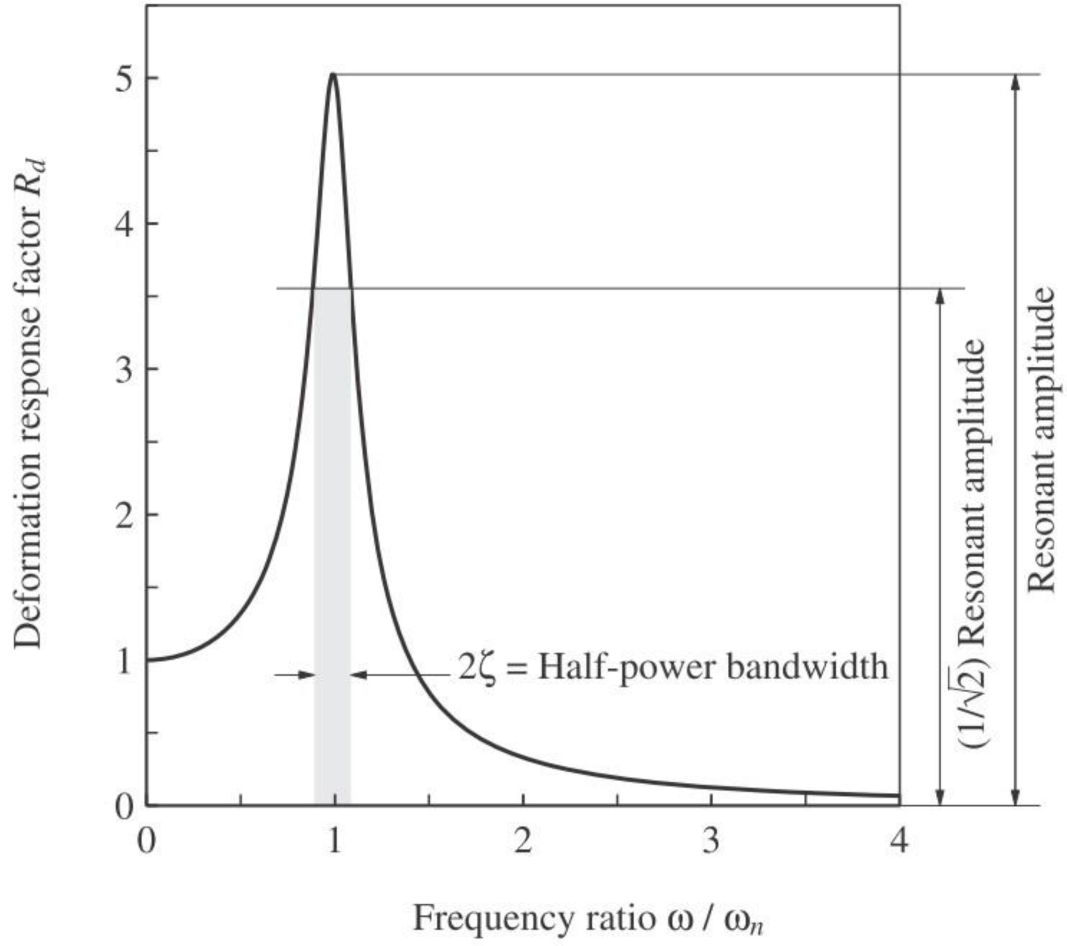

Figure 3.2.9 Definition of half-power bandwidth.