## קידוד של מילה

$$M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,s,q_{acc},q_{rej})$$

$$\underline{Q}=\{q_1,q_2,\ldots,q_m\}$$

$$\Sigma=\{a_1,a_2,\ldots,a_r\}$$

$$\Gamma=\{a_1,a_2,\ldots,a_t\}$$

$$\langle M\rangle=\underbrace{CI^m}_{|Q|}\underbrace{CI^n}_{|\Sigma|}\underbrace{CI^t}_{|\Gamma|}\underbrace{CI}_{s}\underbrace{CI^{m-1}}_{q_{acc}}\underbrace{CI^m}_{q_{rej}}\underbrace{CI_{1,1}C\ldots CT_{m-2,t}C}_{\text{טבלת מעברים } T}$$

$$x\in\{I,C\}^*$$

**הערה:**

דהיינו מחרוזת $x\in\{I,C\}^*$, נ:ת לדעת מ"ס שבודקין בזמן סופי האם x היא קידוד חוקי של מ"ט או לא.

**קידוד של מילה** $\omega=\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$

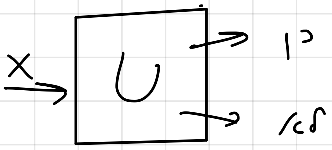
$$\langle\omega\rangle\ ch(\sigma_1)ch(\sigma_2)C\ldots ch(\sigma_n)C$$

## מ"ט אוניברסלית U:

לכל $x\in\{I,C\}^*$ U מבצעת:

(1) בודקת האם x הוא קידוד חוקי של מ"ט M ומילה w. אם לא ⇐ עוצרת ודוחה.

(2) אחרת, מבצעת סימולציה של ריצת M על w




(1)

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\langle M\rangle$ | , | $\langle M\rangle$ | BB..... |

- רושמת את הקונפיגורציה ההתחלתית של M על סרט נוסף.

(2)

| | | |
|---|---|---|
| $\langle s\rangle$ | , | $\langle M\rangle$ |

||||||

סדרה של I

- U ניגשת לקלט המעודכן ומחשבת את הקונפיגורציה הבאה.
- בצעד כלשהו, נניח כי הקונפיגורציה הנוכחית היא $uqv$ כאשר $v=\underline{\alpha}v'$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\langle u\rangle$ | , | $\langle q\rangle$ | , | $\langle v\rangle$ | BB... |

נניח כי $q=q_i$ , $\alpha=a_j$

U ניגשת לתא $T_{i,j}$, ומתנהגת לפי השינוי שמצוין בתא זה.
כלומר, משנה את המצב הנוכחי, משנה את האות שמתחת לראש.
ומזיזה את הראש בהתאם.

- בסוף כל שלב סימולציה, U בודקת האם המצב הנוכחי $q_{acc}$
אם כן, עוצרת ומקבלת.

אם לא בודקת האם המצב הנוכחי הוא $q_{rej}$ אם כן, עוצרת ודוחה.
אחרת ממשיכה לשלב הבא.

## מה השפה של U?

לכל קלט $x\in\{I,C\}^*$

- אם $x\neq\langle M\rangle,\langle w\rangle$ $\Leftarrow$ U דוחה את x.
- אם $x=\langle M\rangle,\langle w\rangle$
  - אם M מקבלת את $w$ $\Leftarrow$ U מקבלת את x
  - אם M דוחה את $w$ $\Leftarrow$ U דוחה את x
  - אם M לא עוצרת על $w$ $\Leftarrow$ U לא עוצרת על x.

$$L(U)=\{\langle M\rangle,\langle w\rangle : w\in L(M)\}$$

## הגדרה:

$$L_{acc} = \{\langle M\rangle,\langle w\rangle : w \in L(M)\}$$

$$L_{halt} = \{\langle M\rangle,\langle w\rangle : \text{M עוצרת על } w\}$$

$$L_d = \{\langle M\rangle : \langle M\rangle \notin L(M)\}$$

## אבחנה:

$L_{acc} \subseteq L_{halt}$


## טענה 1:

$L_{acc} \in RE$

**הוכחה:**

ראינו כבר כי $L(U) = L_{acc}$, ולכן $U$ מקבלת את $L_{acc}$ ולכן $L_{acc} \in RE$.

## טענה 2:

$L_{halt} \in RE$

**הוכחה:**

נבנה מכונת טיורינג אוניברסלית $U'$ שעובדת כמו $U$ עם השינוי הבא:

- אם בזמן הסימולציה של $M$ על $w$, $M$ הגיעה ל-$q_{rej}$, $U'$ תעצור ותקבל.

**נכונות הבנייה:**

- אם $X \in L_{halt}$ $\Leftarrow$ $X = \langle M\rangle,\langle w\rangle$ ו-$M$ עוצרת על $w$ $\Leftarrow$ $U'$ עוצרת ומקבלת את $X$.
- אם $X \notin L_{halt}$ $\Leftarrow$ שני מקרים:

(1) $X \neq \langle M\rangle,\langle w\rangle$ $\Leftarrow$ $U'$ עוצרת ודוחה את $X$.

(2) $X = \langle M\rangle,\langle w\rangle$ ו-$M$ לא עוצרת על $w$ $\Leftarrow$ $U'$ לא עוצרת על $X$.

ולכן $U'$ מקבלת את $L_{halt}$.

## שאלה 3: $L_d \notin RE$

הוכחה:

נניח בשלילה כי $L_d \in RE$ ותהי $M_d$ מ"ט טיורינג המקבלת את $L_d$, כלומר, $L(M_d)=L_d$.

נבדוק את ההתנהגות של $M_d$ על הקידוד שלה $<M_d>$.

שתי אפשרויות:

- $<M_d> \in L(M_d) \Leftarrow <M_d> \notin L_d \Leftarrow L_d \neq L(M_d)$
- $<M_d> \notin L(M_d) \Leftarrow <M_d> \in L_d \Leftarrow L_d \neq L(M_d)$

בשני המקרים קיבלנו סתירה לכך ש-$M_d$ מקבלת את $L_d$ ולכן $L_d \notin RE$.

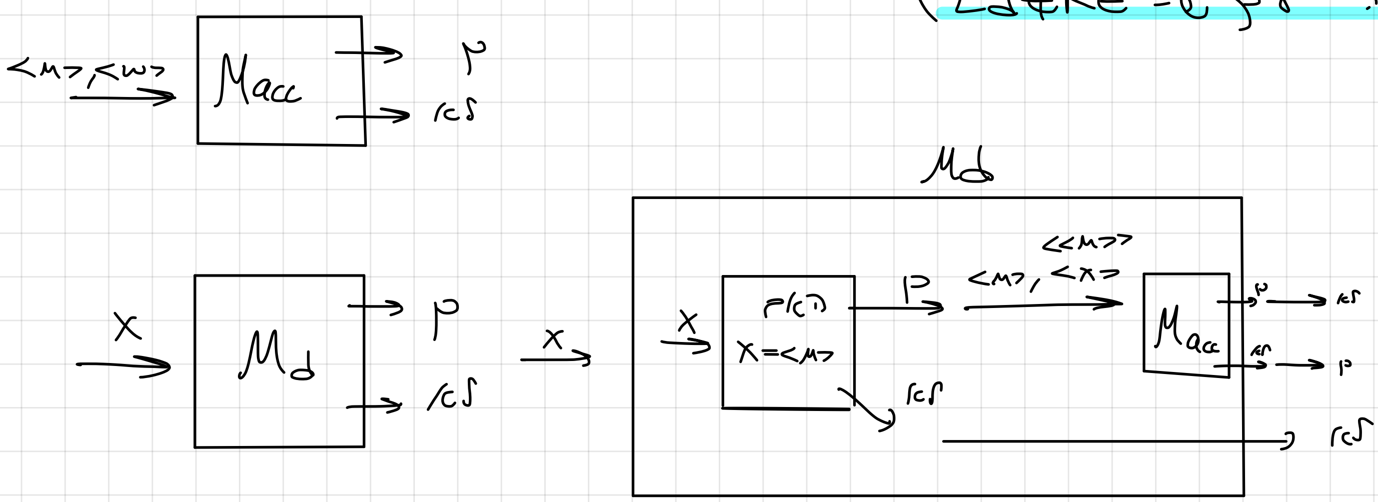
## שאלה 4: $L_{acc} \notin R$

הוכחה:

נניח בשלילה כי $L_{acc} \in R$ ותהי $M_{acc}$ מ"ט המכריעה את $L_{acc}$.

נשתמש ב-$M_{acc}$ כדי לבנות מ"ט $M_d$ המכריעה את $L_d$

(בסתירה לכך ש-$L_d \notin RE$)



## הרצה של $M_d$ :

על קלט $x$, $M_d$ מתנהגת:

(1) בודקת האם $x=\langle M\rangle$. אם לא ← דוחה

(2) אחרת, מחשבת את $\langle x\rangle=\langle\langle M\rangle\rangle$ ומריצה את $M_{acc}$ על הזוג $\langle M\rangle,\overset{\omega}{\langle\langle M\rangle\rangle}$

- אם $M_{acc}$ מקבלת $\Leftarrow$ $M_d$ דוחה
- אם $M_{acc}$ דוחה $\Leftarrow$ $M_d$ מקבלת

נראה כי $M_d$ מכריעה את $L_d$ :

- אם $x\in L_d$ $\Leftarrow$ $x=\langle M\rangle$ ו- $\overset{\omega}{\langle M\rangle}\notin L(M)$ $\Leftarrow$ $\langle M\rangle,\overset{\omega}{\langle\langle M\rangle\rangle}\notin L_{acc}$
$\Leftarrow$ $M_{acc}$ דוחה את הזוג $\langle M\rangle,\langle\langle M\rangle\rangle$ $\Leftarrow$ $M_d$ מקבלת את $x$.

- אם $x\notin L_d$ $\Leftarrow$ יש שני מקרים:
- $x\neq\langle M\rangle$ $\Leftarrow$ $M_d$ דוחה את $x$.
- $x=\langle M\rangle$ ו- $\overset{\omega}{\langle M\rangle}\in L(M)$ $\Leftarrow$ $\langle M\rangle,\langle\langle M\rangle\rangle\in L_{acc}$ $\Leftarrow$ $M_{acc}$ מקבלת
את הזוג $\langle M\rangle,\langle\langle M\rangle\rangle$ $\Leftarrow$ $M_d$ דוחה את $x$.

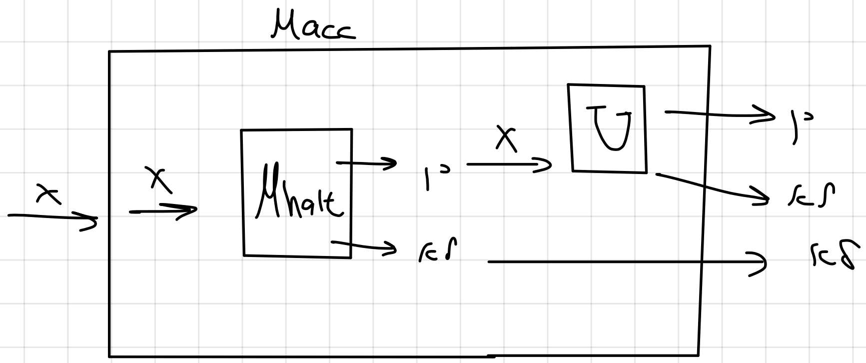
הראינו כי $M_d$ מכריעה את $L_d$ בסתירה לכך ש- $L_d\notin RE$ ולכן $L_{acc}\notin R$

$$\boxed{\begin{array}{c} L_{acc}\notin R \Leftarrow L_d\notin RE \\ \Updownarrow \\ L_d\in RE \Leftarrow L_{acc}\in R \end{array}}$$

סעיף ג : $L_{halt} \notin R$

הוכחה:

נניח בשלילה כי $L_{halt} \in R$ ותהי $M_{halt}$ מ"ט המכריעה את $L_{halt}$.
נשתמש ב-$M_{halt}$ כדי לבנות מ"ט $M_{acc}$ המכריעה את $L_{acc}$
(בסתירה לכך ש-$L_{acc} \notin R$)

## תיאור של $M_{acc}$:

על קלט $M_{acc}, x$ מבצעת.

- מריצה את $M_{halt}$ על $x$
- אם $M_{halt}$ דוחה $\Leftarrow M_{acc}$ דוחה.

אם $M_{halt}$ מקבלת $\Leftarrow M_{acc}$ מריצה את $U$ על $x$ ועונה כמוה.

נראה כי $M_{acc}$ מכריעה את $L_{acc}$

- אם $x \in L_{acc} \Leftarrow x=\langle M\rangle,\langle w\rangle$ ו-$w \in L(M) \Leftarrow M_{acc}$ מריצה את $M_{halt}$
  על $x$ ו-$M_{halt}$ מקבלת $\Leftarrow M_{acc}$ מריצה את $U$ על $x$ ו-$U$ מקבלת
  $\Leftarrow M_{acc}$ מקבלת על $x$.
- אם $x \notin L_{acc} \Leftarrow$ שני מקרים:
  - $x \neq \langle M\rangle,\langle w\rangle \Leftarrow M_{acc}$ מריצה את $M_{halt}$ על $x$
    ו-$M_{halt}$ דוחה $\Leftarrow M_{acc}$ דוחה את $x$.
  - $x=\langle M\rangle,\langle w\rangle$ ו-$w \notin L(M) \Leftarrow$ שני מקרים
  - $M$ לא עוצרת על $w \Leftarrow M_{acc}$ מריצה את $M_{halt}$ על $x$ ו-$M_{halt}$ דוחה
    $\Leftarrow M_{acc}$ דוחה את $x$.
  - $M$ דוחה את $w \Leftarrow M_{acc}$ מריצה את $M_{halt}$ על $x$ ו-$M_{halt}$ מקבלת
    $\Leftarrow M_{acc}$ מריצה את $U$ על $x$ ו-$U$ דוחה $\Leftarrow M_{acc}$ דוחה את $x$

הראינו כי $M_{acc}$ מכריעה את $L_{acc}$ בסתירה לכך ש-$L_{acc} \notin R$ ולכן $L_{halt} \notin R$

לסיכום הוכחנו-

$L_{acc} \in RE \setminus R$

$L_{halt} \in RE \setminus R$

$L_d \notin RE$