数値計算の理論と実際

第 8 回 常微分方程式の解法 1

関数 $f(x,y)$ について、微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

を満たす未知関数 $y(x)$ を求める問題を、1 階常微分方程式の初期値問題とよぶ。$f(x,y)$ の形によっては解析的に解くことができるが、ここでは数値的に解くことを考える。

1　オイラー法

式 (1) の x_0 まわりでのテイラー展開は、

$$y(x_0+h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2!}y''(x_0)h^2 + \cdots \tag{2}$$

初期条件として x_0, y_0 が与えられているので、第 2 項までは既知である。$x_1 = x_0 + h$ とおき、第 2 項までを使った $y(x_1)$ の近似値を y_1 とすると、

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h \tag{3}$$

となる。

次に $x_2 = x_1 + h$ とすると、同様に

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h \tag{4}$$

と逐次的に近似値 y_n を計算することができる。これを**オイラー法**とよぶ。

1.1　練習問題

$$y' = y - 12x + 3, \qquad y(0) = 1 \tag{5}$$

について $h = 0.1$ として、$0 \le x \le 1$ の解曲線を図示せよ。また真の解 $y = 12x - 8e^x + 9$ と比較せよ。h を $0.5, 0.25, 0.125\cdots$ のように半分ずつにしていったときの解曲線と真の解とのずれについて調べよ。以下サンプルコードである。

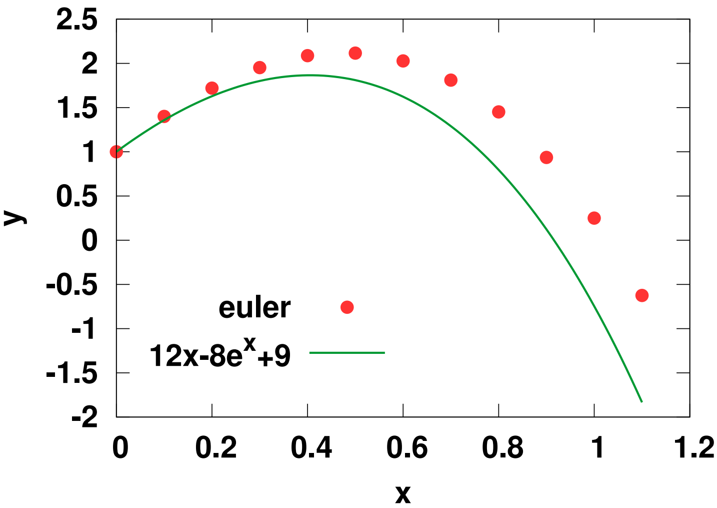

図 1: オイラー法 $(h = 0.1)$

```
#include<iostream>
#include<cstdio>
#include<cmath>

using namespace std;

double func( const double x, const double y){

  f(x,y) の計算

}

double func_y( const double x){

  真値の計算

}

int main(){

  double x0, y0, xe, h;
  cerr << "input x0,y0,xe,h" << endl;
  cin >> x0 >> y0 >> xe >> h;
  cerr << x0 << "\t" << y0 << "\t" << xe << "\t" << h << endl;

  オイラー法の実装。真値とのずれも計算する。グラフ化しやすいように出力。
     cout << ......

}
```

2　ルンゲクッタ法

オイラー法では式 (2) と (3) を比較すると明らかなように、近似式が h の 1 次の項までしか一致しない。2 次、3 次といったように、高次の項まで一致するようにできれば、精度を上げられそうである。なおテイラー展開の h^n の項まで一致することを n 次精度という。したがってオイラー法は 1 次精度である。1 ステップの真値とのずれは h^2 に比例するが、ステップ数は $1/h$ に比例するため、全体としてのずれは h に比例する。

2 次精度の公式を使えば、真値とのずれは h^2 に比例する。逆に h を大きくできるので、計算コストを低く抑えることもできるようになる。式 (2) を見ると h^2 の項には 2 回微分が含まれている。これは $f(x, y)$ から直接求めることができない。

そこで次のように考える。接線の傾き $f(x_n, y_n)$ だけを用いるのではなく、x_{n+1} における傾き $f(x_{n+1}, y_{n+1})$ との平均をその区間での傾きとすると精度が上がりそうである。すなわち

$$y_{n+1} = x_n + \frac{1}{2}h\left\{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right\}. \tag{6}$$

だが右辺に y_{n+1} が含まれている。そこでオイラー近似した

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \tag{7}$$

で代用することにして式 (6) の右辺に代入して整理すると

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf(x_n + h, y_n + k_1), \\ k &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \\ y_{n+1} &= y_n + k \end{aligned} \tag{8}$$

となる。k, k_1, k_2 は 1 次変数である。これは 2 次精度となっており、**ルンゲクッタ 2 次**やホイン法と呼ばれる。

2.1　練習問題

式 (6) をルンゲクッタ 2 次で解いて解曲線を図示してみよ。またオイラー法と精度を比較せよ。

3　ルンゲクッタ 4 次

同様の考え方で 4 次精度の公式を導くことができる。これは区間内の 4 点の傾きの加重平均となっている。簡単で実用上精度も十分なことが多いため、非常によく使われる。

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}), \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}), \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3), \\ k &= \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \tag{9}$$

3.1　練習問題

以下の微分方程式をオイラー、ルンゲクッタ 2 次、4 次で解く。

1. $y' = x + y, \qquad y(0) = 1$
2. $y' = e^{-\sin x} - y\cos x, \qquad y(0) = 1$