数値計算の理論と実際

第13回 偏微分方程式の解法3

1　ポアソン方程式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{1}$$

という形の偏微分方程式を考える。これは楕円型の偏微分方程式である。特に、$f(x, y) = 0$ のときは**ラプラス方程式**という

平面に適当な電荷を置いた時の静電ポテンシャルの分布や、適当な質量分布を置いた時の重力ポテンシャルはポアソン方程式に従う。

差分による近似式を代入すると、

$$\frac{z_{i+1,j} - 2z_{i,j} + z_{i-1,j}}{h^2} + \frac{z_{i,j+1} - 2z_{i,j} + z_{i,j-1}}{k^2} = f_{i,j} \tag{2}$$

となる。ここで $k/h = r, p = -2(r^2 + 1), q = r^2$ とおくと、

$$qz_{i-1,j} + z_{i,j-1} + pz_{i,j} + z_{i,j+1} + qz_{i+1,j} \approx f_{i,j}k^2 \tag{3}$$

となる。

今回は $f_{i,j} = 0$、つまりラプラス方程式の実習を行う。さらに $h = k$ であれば $r = 1, p = -4, q = 1$ であり、式 (3) は

$$z_{i-1,j} + z_{i,j-1} + z_{i,j+1} + z_{i+1,j} = 4z_{i,j} \tag{4}$$

となる。つまり座標 (x, y) 上の z は周囲の値の平均となっている。

1.1　練習問題1

次のラプラス方程式を解く。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.0 \qquad (0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1) \tag{5}$$

$$z(x, 0) = 0 \qquad z(x, 1) = x \qquad z(0, y) = 0, \qquad z(1, y) = y \tag{6}$$

2行目は境界条件である。

直接法で連立方程式を解くことも可能であるが、今回は反復法が簡単である。以下サンプルコードと結果である。

```
int main(){

  double x0 = 0.0;
  double xe = 1.0;
  double y0 = 0.0;
  double ye = 1.0;
  int n;
  cerr << "input n " << endl;
  cin >> n;

  double dx = (xe - x0) / (n-1);
  double dy = (ye - y0) / (n-1);

  const int itr_max = 100;   #ガウスザイデルの最大反復数
  const double eps = 1.0e-7; #反復法の許容エラー
  double z[n][n];

  #初期値と境界条件を設定

  for( int k=0; k<itr_max; k++){
    ガウスザイデルで方程式を解く
  }

  for( int i=0; i<n; i++){
    double x = i*dx;
    for( int j=0; j<n; j++){
      double y = j*dy;
      fprintf( stdout, "%.4lf\t%.4lf\t%.4lf\n", x, y, z[i][j]);
    }
    fprintf( stdout, "\n");
  }

}
```

1.2 練習問題2

さらに中心の z を 1.0 に固定した時のラプラス方程式を解く。また SOR 法で解くプログラムを実装せよ。

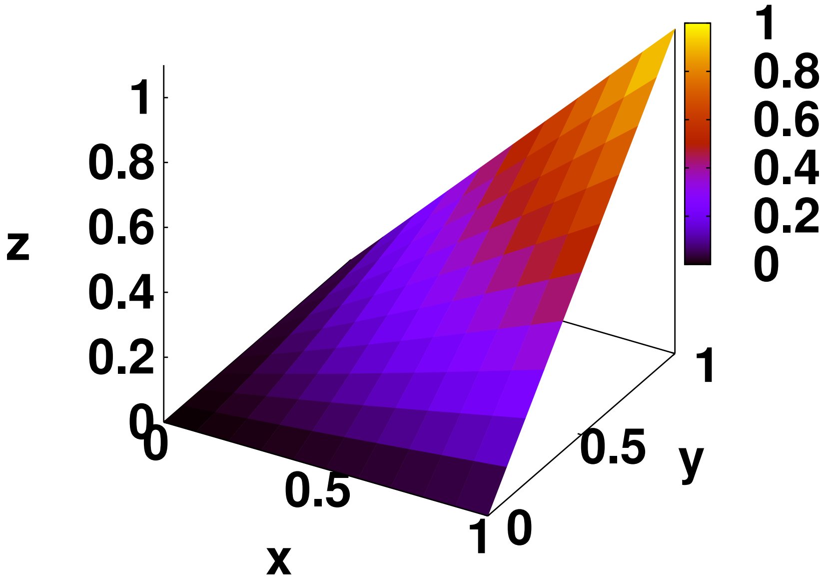

図 1: