数値計算の理論と実際

第 11 回 偏微分方程式の解法 1

2 階定数係数線形偏微分方程式の一般形は次のように表される。

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + d\frac{\partial z}{\partial x} + e\frac{\partial z}{\partial y} + Az + B = 0 \tag{1}$$

a, b, c, d, e, A, B は定数、$z(x, y)$ は未知関数である。
次のように 3 つに分類される。

1. $b^2 - 4ac > 0$ のとき, 双曲型
2. $b^2 - 4ac = 0$ のとき, 放物型
3. $b^2 - 4ac < 0$ のとき, 楕円型

それぞれで特に代表的なものについて実習する。

1 差分近似

偏微分方程式を数値的に解く際には、偏導関数の値をなんらかの方法で近似する必要がある場合が多い。関数 $z(x, y)$ に対し、平面上の点 (a, b) および、正の数 h, k を用いて、

$$x_i = a + ih, \qquad y_j = b + jk$$

$$z_{ij} = z(x_i, y_i)$$

とおく。平面を幅 h と k の一様格子に区切って、格子点 (x_i, y_i) 上の関数値 を z_{ij} としているわけである。h が十分小さければ、

$$f'(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h}, \qquad f'(x_i) \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{h} \tag{2}$$

と近似できそうである (ここで $f_i = f(x_i)$)。前者を**前進差分**、後者を**後退差分**という。2 階微分を前進差分で表すと、

$$f''(x_i) \approx \frac{f'_{i+1} - f'_i}{h}$$

となる。1 階微分の項に後退差分の式を代入すると、

$$f''(x_i) \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

となる。これを**中心差分**とよぶ。

したがって、h, k が微小な場合次のようになる。

$$\frac{\partial z}{\partial x} \approx \frac{z_{i+1,j} - z_{i,j}}{h} \tag{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \approx \frac{z_{i,j+1} - z_{i,j}}{k}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \approx \frac{z_{i+1,j} - 2z_{i,j} + z_{i-1,j}}{h^2} \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \approx \frac{z_{i,j+1} - 2z_{i,j} + z_{i,j-1}}{k^2}$$

2　1次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \tag{5}$$

という形の偏微分方程式を考える。ここで c は正の定数である。これは双曲型の偏微分方程式である。

一様な線密度の弦が x 軸上で両端を固定された状態にあるとする。各点 x に変位 $z = f(x)$ と z 軸方向の速度 $v(x)$ を与えると、弦は xz 平面で振動する。時刻 t における弦の z 軸方向の変位 $z(x, t)$ はこの型の偏微分方程式に従う。

差分による近似式を代入すると、

$$\frac{z_{i,j+1} - 2z_{i,j} + z_{i,j-1}}{k^2} = c\frac{z_{i+1,j} - 2z_{i,j} + z_{i-1,j}}{h^2} \tag{6}$$

となる、ここで $k/h = r$ とし、$z_{i,j+1}$ について解くと、

$$z_{i,j+1} = cr^2 z_{i+1,j} + 2(1 - cr^2)z_{i,j} + cr^2 z_{i-1,j} - z_{i,j-1} \tag{7}$$

となる。すなわち、i 番目の格子点の $j+1$ 番目の時刻の z を得るには、

- 1 つ前の時刻の自分と両隣の合計 3 つの格子点
- 2 つ前の時刻の自分の格子点

の 4 つの格子点の情報が必要であることがわかる。

さらに $h = \sqrt{c}k$ となるように h, k を選ぶと、

$$z_{i,j+1} = z_{i+1,j} + z_{i-1,j} - z_{i,j-1} \tag{8}$$

1 つ前の時刻の自分の格子点 (z_i, j) の項を消去でき、必要な格子点は 3 つに減らすことができる。

2.1 練習問題

次の波動方程式を解く。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad (0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq t) \tag{9}$$

$$z(x,0) = 0.05x(2-x), \qquad z_t(x,0) = 0$$

$$z(0,t) = 0, \qquad z(2,t) = 0$$

2 行目は初期条件、3 行目は境界条件である。

まず $0 \leq x \leq 2$ を 8 等分することにする。$h = 0.25$ となり、$i = 0, 1, \cdots, 8$ となる。$h = \sqrt{c}k$ となるように時間方向の格子間隔を選ぶと、$k = 0.25/3, r = 1/3$ となる。

計算の手順としては次のようになる。

1. 初期条件 $(t = 0)$ の $z(x,0)$ を格子点に与える。
2. 境界条件を設定する。
3. 式 (8) に従って、$j = 1, 2, \cdots$ の時刻における $z(x,t)$ を順次計算していく。

ただしこのままでは、$j = 1$ の時に計算できない。2 つ前の時刻の自分の格子点が必要であるが、$j = -1$ の情報は存在しないからである。これは次のように考える。k が微小なとき、$z_t(x,0) = 0$ より、

$$z(x,-k) \approx z(x,0) - k\frac{\partial}{\partial t}z(x,0) = z(x,0) \tag{10}$$

$$z(x,k) \approx z(x,0) + k\frac{\partial}{\partial t}z(x,0) = z(x,0)$$

つまり、$z_{i,1} \approx z_{i,-1}$ となり、$j = 0$ のときの式 (8) に代入すると、

$$z_{i,1} \approx \frac{1}{2}(z_{i+1,0} + z_{i-1,0}) \tag{11}$$

となる。これで $j = 2$ 以降が計算できるのであった。

以下サンプルコードと $j = 3$ の時の x, z である。今回、コード量は非常に少なくて済むが、格子点番号等の取扱いがややこしいので注意を要する。

```
0.0000 0.0000
0.2500 0.0062
0.5000 0.0125
0.7500 0.0187
1.0000 0.0219
1.2500 0.0187
1.5000 0.0125
1.7500 0.0062
2.0000 0.0000
```

```
double x0 = 0.0;
double xe = 2.0;
double t0 = 0.0;
double te = 5.0;
double h = 0.25;
double c = 9.0;
double k = ...
int n = ...
int nt = ...   kや x, t 方向の格子点数を計算

double z[n+1][nt];

for( int i=0; i<n; i++){
   初期条件の入力
}
for( int j=0; j<nt; j++){
  境界条件の入力
}

j=1 での z を計算
.
.
j=1 以降での z を計算

for( int j=0; j<nt; j++){
  for( int i=0; i<=n; i++){
    double x = x0 + i*h;
    fprintf( stdout, "%.4lf %.4lf\n", x, z[i][j]);
  }
  fprintf( stdout, "\n\n");
}
```