Basic Caluculas

hayami-m

4/21

Volterra operator

$C[0,1]$ の norm を $||f||_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ とする. $V \in \mathbf{B}(C[0,1])$ を $Vf(x) = \int_0^t f(s)ds$ と定める.

1. $V^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t f(s)(t-s)^{n-1}ds$ を示せ.
2. $\sigma(V)$ を求めよ.

1. 帰納法で示す. $n=1$ のとき, 定義より大丈夫. $n-1$ のとき成立することを仮定しておく.

$$V^n f(t) = V^{n-1}Vf(t) = \frac{1}{(n-2)!}\int_0^t (t-s)^{n-2} Vf(s)ds$$

ここで, $Vf(s)$ は微分可能であるので, 部分積分できて,

$$\begin{aligned}\int_0^t (t-s)^{n-2}Vf(s)ds &= -\frac{1}{n-1}\left[(t-s)^{n-1}Vf(s)\right]_0^t + \frac{1}{n-1}\int_0^t (t-s)^{n-1}f(s)ds \\ &= \frac{1}{n-1}\int_0^t (t-s)^{n-1}f(s)ds\end{aligned}$$

以上から, 次のように n で成立することがわかる. 以上から, 任意の n について示された.

$$V^n f(t) = \frac{1}{(n-2)!}\frac{1}{n-1}\int_0^t (t-s)^{n-1}f(s)ds = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t f(s)(t-s)^{n-1}ds$$

□

2. Beurling の定理を利用しよう. まずは $||V^n||$ を計算しよう.

$$||V^n|| = \sup_{||f||_\infty=1} ||V^n f|| = \sup_{||f||_\infty=1}\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t f(s)(t-s)^{n-1}ds\right|$$

ここで, $||f||_\infty = 1$ の上で,

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t f(s)(t-s)^{n-1}ds\right| &\le \sup_{t\in[0,1]}\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t |f(s)||(t-s)^{n-1}|ds \\ &\le \sup_{t\in[0,1]}\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}ds = \sup_{t\in[0,1]}\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

と計算できるから, Beurling の定理とスターリングの公式から,

$$r(V) = \lim_{n\to\infty} ||V^n||^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = 0$$

以上から, $\sigma(V) = \{0\}$ がわかった. □