five lemma

hayami-m

22/10/16

five lemma

k 加群の可換図式

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"'] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"'] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"'] & A_5 \arrow[d, "h_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] & B_4 \arrow[r, "g_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

において, 各行は完全であり, h_2, h_4 が同型, h_1 が全射, h_5 が単射とする. このとき, h_3 は同型である.

proof:

[injection] $h_3(a) = h_3(a')$ を満たす $a, a' \in A_3$ を取る.
このとき, 可換性より $g_3 h_3(a' - a) = h_4 f_3(a' - a) = 0$ である.
h_4 は同型であるから, 特に単射であり $f_3(a' - a) = 0$ である.
exactness より, $a' - a \in \operatorname{Ker} f_3 = \operatorname{Im} f_2$ であるから, ある $a_2 \in A_2$ が存在して $f_2(a_2) = a' - a$ を満たす.
可換性より, $g_2 h_2(a_2) = h_3 f_2(a_2) = 0$ である.
exactness より, $h_2(a_2) \in \operatorname{Ker} g_2 = \operatorname{Im} g_1$ であるから, ある $b_1 \in B_1$ が存在して $g_1(b_1) = h_2(a_2)$ を満たす.
h_1 の全射性から, ある $a_1 \in A_1$ が存在して $h_1(a_1) = b_1$ を満たす.
可換性より, $h_2 f_1(a_1) = g_1 h_1(a_1) = g_1(b_1) = h_2(a_2)$ である.
h_2 は同型であるから, 特に単射であり $f_1(a_1) = a_2$ である.
このことと exactness より, $a' - a = f_2(a_2) = f_2 f_1(a_1) = 0$ である.
以上から, h_3 の単射性が示せた.

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, mapsto] & f_1(a_1) = a_2 \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & a' - a \arrow[l, mapsto] \arrow[r] \arrow[d] & f_3(a' - a) = 0 \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] \\
b_1 \arrow[u, mapsto, "\mathrm{surj}"] & h_2(a_2) \arrow[l, mapsto] \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

[surgection] $b_3 \in B_3$ を取る.
h_4 が同型より, $a_4 \in A_4$ で $h_4(a_4) = g_3(b_3)$ を満たすものが一意に存在する.
可換性と exactness より, $h_5 f_4(a_4) = g_4 h_4(a_4) = g_4 g_3(b_3) = 0$ である.
h_5 の単射性から, $f_4(a_4) = 0$ である.
このことと exactness より, $a_4 \in \operatorname{Ker} f_4 = \operatorname{Im} f_3$ であるから, ある $a_3 \in A_3$ が存在して $f_3(a_3) = a_4$ を満たす.
可換性より, $g_3 h_3(a_3) = h_4 f_3(a_3) = h_4(a_4) = g_3(b_3)$ である.

exactness より, $b_3 - h_3(a_3) \in \operatorname{Ker} g_3 = \operatorname{Im} g_2$ であるから, ある $b_2 \in B_2$ が存在して $g_2(b_2) = b_3 - h_3(a_3)$ を満たす.
h_2 の全射性から, ある $a_2 \in A_2$ が存在して $h_2(a_2) = b_2$ を満たす.
可換性より, $h_3 f_2(a_2) = g_2 h_2(a_2) = g_2(b_2) = b_3 - h_3(a_3)$ である. つまり, $b_3 = h_3(a_3 + f_2(a_2))$ である.
以上から, h_3 の全射性が示せた.

$$
\begin{tikzcd}
a_2 \arrow[r, mapsto] & f_2(a_2), a_3 \arrow[d, dotted] & a_4 \arrow[l, mapsto] \arrow[r] & f_4(a_4) = 0 \arrow[d, "\text{inj}"] \\
b_2 \arrow[u, mapsto, "\text{surj}"] & b_3 - h_3(a_3), b_3 \arrow[l, mapsto] \arrow[r] & g_3(b_3) \arrow[u, mapsto, "\text{surj}"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

余談

h_1 が単射で, h_5 が全射とすると, h_3 は必ずしも同型にならない. 反例は以下のようなものがある.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] \arrow[d, "h_3"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "0"'] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "1"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "1"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "0"] & 0
\end{tikzcd}
$$

このようにすれば, 可換性より $h_3 = 0$ となり, 同型写像ではない.