関数解析学 練習問題 回答付き

hayami-m

1/1

例 0.0.1 (Banach space)**.** $C[0,1]$: $[0,1]$ から C への連続関数全体のなす Banach space とする.

演習 0.0.1. $f \in C[0,1]$ に対して次の条件を考える: f は実数値関数で次の等式を満たす

$$\int_0^{1/2} f(t)dt - \int_{1/2}^1 f(t)dt = 1$$

このような f をすべて集めた部分集合を $\mathcal{C} \subset C[0,1]$ とする. 次の問いに答えよ.

1. $\mathcal{C} \subset C[0,1]$: closed convex subset. である.
2. ${}^\forall f \in \mathcal{C}. ||f||_\infty \geq 1$
3. $\inf\limits_{f \in \mathcal{C}} ||f||_\infty = 1$ を示し, さらにこの inf の値を実現する $f \in \mathcal{C}$ は存在しないことを示せ.

次の関数を考える (これは線形である):

$$\varphi : C[0,1] \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_{1/2}^1 f(t)dt$$

1. [$\mathcal{C}$: convex] $f, g \in \mathcal{C}, s \in [0,1]$ とする. $sf + (1-s)g \in C[0,1]$ であり, $\varphi(sf + (1-s)g) = s\varphi(f) + (1-s)\varphi(g) = 1$ となる. したがって, $\mathcal{C}$ は convex.
[$\mathcal{C}$: closed] $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ を $\mathcal{C}$ の cauchy sequence とすると, $C[0,1]$ の completeness より, ${}^\exists f \in C[0,1]. f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$: converge. i.e. ${}^\forall \varepsilon > 0, {}^\exists N \in \mathbb{N}, N \leq n \Rightarrow ||f - f_n|| < \varepsilon$. ここで,

$$\begin{aligned}
|\varphi(f) - \varphi(f_n)| &= |\varphi(f - f_n)| \\
&\leq \left| \int_0^{1/2} (f(t) - f_n(t))dt \right| + \left| \int_{1/2}^1 (f(t) - f_n(t))dt \right| \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ は任意かつ $\varphi(f_n) = 1$ (${}^\forall n \in \mathbb{N}$) なので, $\varphi(f) = 1$. よって, $f \in \mathcal{C}$ であり, $\mathcal{C}$ は closed. □

2. $f \in \mathcal{C}$ に対して,

$$||f||_\infty \geq \int_0^1 |f(t)|dt \geq \int_0^{1/2} |f(t)|dt + \int_{1/2}^1 |f(t)|dt \geq \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_{1/2}^1 f(t)dt = 1$$

□

3. 次の条件を満たすようなリフト関数を考える.

$$f_n'(t) = \begin{cases} 1 & (0 \le t \le 1/2 - 1/n) \\ (t - \frac{1}{2})n & (1/2 - 1/n \le t \le 1/2 + 1/n) \\ -1 & (1/2 + 1/n \le t \le 1) \end{cases},\ f_n(t) = \frac{f_n'(t)}{\varphi(f_n'(t))}$$

すると $\varphi(f_n(t)) = 1$ i.e. $f_n \in \mathcal{C}$ であり, $||f_n||_\infty \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. つまり $\inf_{f\in\mathcal{C}} ||f||_\infty = 1$ がわかる. 逆に $||f||_\infty = 1$ なる元 $f \in \mathcal{C}$ を取れば,

$$1 = \varphi(f) = \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_{1/2}^1 f(t)dt \le \int_0^{1/2} ||f||_\infty dt - \int_{1/2}^1 -||f||_\infty dt = 1/2 + 1/2$$

となり, 等号成立のためには $f = \begin{cases} 1 & (0 \le t \le 1/2) \\ -1 & (1/2 \le t \le 1) \end{cases}$ となる必要があり矛盾. □

例 0.0.2. (Hilbert space) 数列空間 $l^2 = \{x \in \mathbb{C}^\infty; \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ は Hilbert space である.

演習 0.0.2. l^2 の自然な正規直行基底を $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$ とする. l^2 の有界点列を $\{x^{(n)}\}$ とする.

1. $x^{(n)} = \delta_{m,n}{}_{m=1}^{\infty}$ とすると, $\{x^{(n)}\}$ は 0 に弱収束する.
2. $K < \mathbb{N}$ として, $a = (a_k)_k \in l^\infty$ を次で定める.

$$a_k = \begin{cases} 1 & (k \le K) \\ 0 & (k > K) \end{cases}$$

   もし $\{x^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ が 0 に弱収束すれば, $\lim_{n\to\infty} ||M_a x^{(n)}||_2 = 0$ となることを示せ. ただし M_a は a による掛け算作用素である.
3. 任意の $a = (a_k)_k \in c_0$ に対して, 上と同じ結論が成り立つことを示せ.

1. $x^{(n)} = \delta_n$ とすると, $y = \{y_n\} \in l^2$ に対して, $\langle x^{(n)}, y\rangle = \overline{y_n}$ ここで, $y \in l^2$ より, $\lim_{n\to\infty} |y_n| = 0$ なので, 主張は示された. □

2.

$$M_a x^{(n)} = (a_k x_k^{(n)})_k = \begin{cases} x_k^{(n)} & 1 \le k \le K \\ 0 & K < k \end{cases}$$

主張を示すには, 十分大きな n を取れば任意の $1 \le k \le K$ について, $x_k^{(n)} = 0$ となることを示せばいい. そうでないとすると, $\langle x^{(n)}, \delta_k\rangle = x_k^{(n)} \neq 0$ となり, $\{x^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ が 0 に弱収束することに反する. □

3. $b \in c_0$ について, ある $K \in \mathbb{N}$ があり, $b_k = 0(k \le K)$ といえる. この K について, 上の a をとると, $x \in l^2$ について,

$$M_b x = M_b M_a x, \quad ||M_b x|| \le ||M_b|| ||M_a x||$$

であるので, 上と同様のことが成り立つ. □

定義 0.0.3 (unitary representation)**.** 可換群 G と Hilbert space $\mathcal{H}$ と写像 $\pi : G \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$ が次の条件をみたすとき, $(\pi, \mathcal{H})$ が G の unitary representation と言われる:

$$(\pi_g)^* = \pi_{g^{-1}}, \quad \pi_g \circ \pi_h = \pi_{gh} \quad ({}^\forall g, h \in G)$$
$$\pi_e = \mathrm{id}_{\mathcal{H}} \quad (e \in G, \mathrm{unit})$$

演習 0.0.3. 可算群 G に数え上げ測度を入れて測度空間とみなして, $l^2(G)$ を考える. 写像 $\pi : G \to \mathbf{B}(l^2(G)), \quad g \mapsto \pi_g$ を次のように与える.

$$(\pi_g f)(h) = f(g^{-1}h), \quad f \in l^2(G), \quad g, h \in G$$

このとき, $(\pi, \mathbf{B}(l^2(G))$ が G の unitary representation であることを示せ.

Proof. まずは任意の $g \in G$ に対して $\pi_g \in \mathbf{B}(l^2(G))$ であることを示そう. 線形性は明らかである.

$$||f||_2^2 = \sum_{h \in G} |f(h)|^2 = \sum_{g^{-1}h \in G} |f(g^{-1}h)|^2 = ||\pi_g(f)||_2^2$$

であるから, π_g は等長であり, 特に有界である. 他の条件も見よう. $f_1, f_2 \in \mathbf{B}(l^2(G))$ について,

$$\langle \pi_g(f_1), f_2 \rangle = \sum_{h \in G} \pi_g(f_1)(h)\overline{f_2(h)} = \sum_{gh \in G} f_1(h)\overline{f_2(gh)} = \langle f_1, \pi_{g^{-1}}(f_2) \rangle$$

が成り立つ. また $f \in \mathbf{B}(l^2(G)), \quad g, h, i \in G$ に対して,

$$(\pi_g \circ \pi_h)(f)(i) = \pi_g(\pi_h f(i)) = \pi_h f(g^{-1}i) = f(h^{-1}g^{-1}i) = \pi_{gh} f(i)$$

がなりたつ. $\pi_e = \mathrm{id}_{l^2(G)}$ は明らかである. □

演習 0.0.4. 有限群 G に対して, 任意のユニタリ表現 $\pi : G \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$ を考える. このとき, $P := \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{g \in G} \pi_g$ は射影作用素であり, その像は次の集合と一致することを示せ:

$$\mathcal{H}^G := \{x \in \mathcal{H} | {}^\forall g \in G, \quad \pi_g(x) = x\}$$

Proof. まずは射影作用素であることを確認しよう:

$$P^2 = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g,h \in G} \pi_{gh} = \frac{1}{|G|^2} \sum_{g \in G} |G| \pi_g = P$$

$P(\mathcal{H}) \supseteq \mathcal{H}^G$ は明らかなので, 逆を示す. $x \in P(\mathcal{H})$ とすると, $x = P(x) = \dfrac{1}{|G|} \displaystyle\sum_{g \in G} \pi_g(x)$ である. 任意の $h \in G$ に対して,

$$\pi_h(x) = \pi_h(P(x)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \pi_h \pi_g(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{hg \in G} \pi_{hg}(x) = P(x) = x$$

となるので, $x \in \mathcal{H}^G$ である. □

定義 0.0.4 (unitary equivalent)**.** $\mathcal{H}, \mathcal{K}$: Hilbert space, $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H}), B \in \mathbf{B}(\mathcal{K})$
A, B : unitary euqivalent $:\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\exists !} u : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ unitary operator.$(UA = BU)$

演習 0.0.5. $\mathbb{T} = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ 上のルベーグ可測関数空間 $L^p(\mathbb{T}) \quad (1 \leq p \leq \infty)$ を考える．各 $n \in \mathbf{Z}$ について $e_n(t) := e^{int}, \quad t \in [0, 2\pi)$ と定める．閉部分空間

$$H^2(\mathbb{T}) := \overline{\mathrm{span}\{e_k\ ;\ \}_{k=0}^{\infty}} \subset L^2(\mathbb{T})$$

に対応する直交射影写像を P_+ とする．以下が成り立つ．

1. $\{e_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ は $L^2(\mathbb{T})$ の正規直交基底である．
2. $e_1(t) = e^{int}$ による $L^2(\mathbb{T})$ の掛け算作用素 M_{e_1} は $l^2(\mathbf{Z})$ の両側ずらし作用素 U と unitary equivalent である．
3. $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ に対して，$T_f \in \mathbf{B}(H^2(\mathbb{T}))$ を，

$$T_f h = P_+ f h, \quad h \in H^2(\mathbb{T})$$

と定める．このとき，T_{e_1} と l^2 の片側ずらし作用素 V は unitary equivalent である．

2. $\rho : l^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T})$ を，$\{a_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \mapsto \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e_n$ と定める．これは明らかに unitary であり，

$$\rho U(\{a_n\}) = \rho(\{a_{n-1}\}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n-1} e_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e_{n+1} = M_{e_1}\rho(\{a_n\})$$

より $\rho U = M_{e_1}\rho$ であって，unitary equivalent であることがわかった． □

3. $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n \in H^2(\mathbf{T})$ とする．$T_{e_1} f = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_{n+1}$ なので，$T_{e_1}\rho(\{a_n\}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_{n+1} = \rho V(\{a_n\})$ □

定義 0.0.5 (uniformly convex)**.** Banach space X が一様凸 (uniformly convex) とは，次が成り立つことである:

$$^\forall\varepsilon > 0, ^\exists\delta > 0.(^\forall x, y \in B_X, ||x - y|| \geq \varepsilon \Rightarrow \left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right| \leq 1 - \delta)$$

特に Hilbert space は uniformaly convex である．

演習 0.0.6. X: Banach space, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$: sequence of X, weakly converges to $x \in X$ する．次が成り立つことを示せ．

1. $||x|| \leq \liminf_{n\to\infty} ||x_n||$
2. X: uniformly convex and $\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = ||x|| \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0$

1. 次の Hahn-Banach の拡張定理からの補題を利用する．

Cor

Banach space X , $x \in X$ について，$\varphi \in X^*$ で，$||\varphi|| = 1$ かつ $\varphi(x) = ||x||$ なるものが存在する．

弱収束の仮定から，この φ に対して，次のことがいえる:

$$^\forall\varepsilon > 0, ^\exists N \in \mathbb{N}, N \leq n \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(x_n)| < \varepsilon$$

またここで $||\varphi|| = 1$ より $|\varphi(x_n)| \leq ||x_n||$ $(^\forall n \in \mathbb{N})$ が成り立つ．

したがって, 十分小さな ε とそれに対応する十分大きな N を取れば, $N \leq n$ で, $-\varepsilon + ||x|| < |\varphi(x_n)| \leq ||x_n||$ が成り立つ.

したがって, $-\varepsilon + ||x|| < \inf_{N \leq n} ||x_n||$ である. ε は任意であるから, 次が言える.

$$||x|| \leq \liminf_{n \to \infty} ||x_n||$$

□

2. 背理法で示す. $y_n := x_n/||x_n||, x := x/||x||$ とし, $\lim_{n \to \infty} ||y - y_n|| \neq 0$ と仮定する. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{y_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ を取れば,

$$||y - y_{n_j}|| \geq \varepsilon \quad (j \in \mathbb{N})$$

とできる. X は uniformaly convex space であるから, ある $\delta > 0$ があり,

$$||y + y_{n_j}|| \leq 2(1 - \delta)$$

が成り立つ. 先程用いた補題を再び使って, $||\varphi|| = 1, \varphi(y) = ||y|| = 1$ なる $\varphi \in X^*$ を取れば, 仮定より $\{y_{n_j}\}$ は $\{y\}$ に弱収束するので, $\lim_{n \to \infty} \varphi(y + y_{n_j}) = 2$ である. ここで, 次の式が成り立つ:

$$|\varphi(y + y_{n_j})| \leq ||\varphi|| ||y + y_{n_j}|| \leq 2(1 - \delta) < 2 \quad ({}^{\forall} j \in \mathbb{N})$$

これは矛盾であり, 仮定は誤り. したがって, $\lim_{n \to \infty} ||y_n - y|| = 0$ □

定義 0.0.6.
- $C_c(\mathbf{R})$: $\mathbf{R}$ 上のコンパクト台を持つ連続関数全体の集合とする.
- $L^p(\mathbf{R})$: $\mathbf{R}$ 上のルベーグ測度に関する L^p 空間とする.

ここで, $C_c(\mathbf{R}) \subset L^p(\mathbf{R})$ は L^p-dence である.

演習 0.0.7. 可測関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ と $t \in \mathbf{R}$ に対して, 平行移動した関数 f^t を次で定める:

$$f^t(s) = f(s - t), \quad s \in \mathbf{R}$$

$1 \leq p \leq \infty, t \in \mathbf{R}$ について, L^p 空間上の作用素 $U_t \in B(L^p(\mathbf{R}))$ を

$$U_t f = f^t, \quad f \in L^p(\mathbf{R})$$

と定める. 次を示せ.

1. U_t : isometry
2. $\mathbf{R}$ の 0 に収束する点列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ と任意の $f \in L^p(\mathbf{R})$ に対して次が成り立つ:

$$\lim_{n \to \infty} ||U_{t_n} f - f||_p = 0$$

   つまり強作用素位相に対して連続である.
3. $\mathbf{R}$ の無限大に発散する点列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ と任意の $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ に対して次が成り立つ:

$$\lim_{n \to \infty} \langle U_{t_n} f, g \rangle_{L^2} = 0$$

   つまり弱作用素位相に対して連続である.

1. $||U_t f||_p^p = \int_{\mathbf{R}} |f(s-t)|^p ds = \int_{\mathbf{R}} |f(s)|^p ds = ||f||_p^p$ $\square$

2. $C_c(\mathbf{R}) \subset L^p(\mathbf{R})$ は L^p-dence であるから, $f \in C_c(\mathbf{R})$ に対して示せば十分. コンパクト集合上の連続関数は一様連続であることに注意する. $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ であるから,

$$^\forall \varepsilon > 0, ^\exists N \in \mathbf{N}. N \leq n \Longrightarrow ^\forall s \in \operatorname{Supp} f. |f(s-t_n) - f(s)| < \varepsilon$$

とかける. したがって, この記号をこのまま用いれば,

$$||U_{t_n} f - f||_p^p = \int_{\mathbf{R}} |f(s-t_n) - f(s)|^p ds \leq \int_{\operatorname{Supp} f} \varepsilon^p ds + 2|t_n| ||f||_\infty^p$$

とかける. $\varepsilon > 0$ は任意より, $\lim_{n\to\infty} ||U_{t_n} f - f||_p = 0$ がわかった. $\square$

3. $C_c(\mathbf{R}) \subset L^2(\mathbf{R})$ は L^2-dense より, $g \in C_c(\mathbf{R})$ に対して示せば十分である. このとき, $\operatorname{Supp} g$ は bounded なので, 十分大きな $M \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ を取れば, $\operatorname{Supp} g \subset [-M, M]$ とできる. また, $f \in L^2(\mathbf{R})$ なので, $||U_{t_n} f||_2^2 < \infty$ であって, 特に, $^\forall \varepsilon > 0, ^\exists M \in \mathbf{R}_{\geq 0}. |(\int_{\mathbf{R}} - \int_{-M}^{M})(|f(x)|^2) dx| < \varepsilon$ が成り立つ. 特に, $^\forall x \in \mathbf{R} \backslash [-M, M]. |f(x)| < \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ である. 上の 2 つのうち大きな方の M に揃えて, $N \in \mathbf{N}. N \leq n \Rightarrow t_n > 2M$ なる N を取ると, $N \leq n$ において,

$$\begin{aligned} \langle U_{t_n} f, g \rangle &= \int_{\mathbf{R}} f(s-t_n) \overline{g(s)} ds = \int_{\operatorname{Supp} g} f(s-t_n) \overline{g(s)} ds \\ &\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_{\operatorname{Supp} g} \overline{g(s)} ds \quad (\because s - t_n \notin [-M, M]) \end{aligned}$$

ここで, $\varepsilon > 0$ の任意性から, $\lim_{n\to\infty} ||U_{t_n} f - f||_p = 0$ が言えた. $\square$

定義 0.0.7 (Dirichlet Kernel)**.** $n \in \mathbf{N}, t \in [-\pi, \pi)$ に対して, Dirichlet Kernel $D_n(t)$ を次のように定める.

$$D_n := \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin\frac{t}{2}}$$

加法定理を用いると次のように変形できる.

$$D_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin\frac{t}{2}} = 1 + w\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$$

演習 0.0.8. $\varphi_n(f) : C(\mathbb{T}) \to \mathbf{C}$: linear map を次のように定める.

$$\varphi_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt, \quad (f \in C(\mathbb{T}))$$

このとき, 次のことを示せ.

1. $^\forall n \in \mathbf{N}. ||\varphi_n|| = ||D_n||_1$
2. $\{||D_n||_1\}_{n=1}^\infty$ は非有界.
3. $\{\varphi_n(f)\}_{n=1}^\infty$ が有界でないような $f \in C(\mathbb{T})$ が存在する.

1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 連続関数 $f_\varepsilon : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を,

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} -1 & t < -\varepsilon \\ \dfrac{t}{\varepsilon} & -\varepsilon \le t \le \varepsilon \\ 1 & t > \varepsilon \end{cases}$$

と定める. このとき,

$$\begin{aligned} ||D_n||_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt = \frac{1}{2\pi}\int_{|D_n(t)|>\varepsilon} |D_n(t)|dt + \frac{1}{2\pi}\int_{|D_n(t)|\le\varepsilon} |D_n(t)|dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{|D_n(t)|>\varepsilon} f_\varepsilon(D_n(t))D_n(t)dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{|D_n(t)|\le\varepsilon} f_\varepsilon(D_n(t))D_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{|D_n(t)|\le\varepsilon} |D_n(t)|(1 - \frac{|D_n(t)|}{\varepsilon})dt \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\varepsilon(D_n(t))D_n(t)dt + \varepsilon \le ||\varphi_n|| + \varepsilon \end{aligned}$$

がわかる. 任意の $\varepsilon > 0$ について上式は成り立つので, $||D_n||_1 \le ||\varphi_n||$ がわかった.
$||\varphi_n|| \le \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt = ||D_n||_1$ は明らか. □

2. 有名不等式を用いて, つぎのように変形できる.

$$||D_n||_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin(\frac{t}{2})}\right| dt \ge \frac{2}{\pi}\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin s|}{s} ds$$

簡単な計算により, 右辺は無限大に発散することがわかる. (具体的には $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k-1)\pi}$ でなどで下から抑えられる.) □

3. 1 と 2 の結果と, 次の定理の対偶より直ちに従う.

一様有界性原理

$\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: family of bounded operators between Banach space X, Y

$$^\forall x \in X. \sup_{\lambda\in\Lambda} ||T_\lambda x|| < \infty \Longrightarrow \{||T_\lambda||\}_{\lambda\in\Lambda} : \text{bounded}$$

□

演習 0.0.9. $\mathcal{H}$: Hilbert space, $T \in B(\mathcal{H}), n \in \mathbf{N}$ に対して,

$$A_n(T) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k$$

と定めたとき, 次が成り立つ.

1. $\{||T^n||\}_{n=1}^{\infty}$ が有界とする. このとき任意の $x \in \overline{R(I-T)} \subset \mathcal{H}$ に対して, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ||A_n(T)x|| = 0$
2. $U \in B(\mathcal{H})$ がユニタリ作用素とする. $P \in B(H)$ を $\ker(I-U)$ への射影作用素とする. このとき任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ||A_n(U)x - Px|| = 0$

1. $\{||T^n||\}_{n=1}^{\infty}$ が有界とする．$||A_n(T)|| \leq \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}||T^k|| \leq \sup_{0\leq k\leq n-1}||T^k||$ であるから, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して, $A_n(T)$ は有界である．$x \in R(I-T)$ とすると, $^\exists y \in \mathcal{H}.x = (I-T)(y)$ である．したがって,

$$||A_n(T)x|| = ||\frac{1}{n}(I-T^n)(y)|| \leq \frac{1}{n}(1+||T^n||)||y||$$

であり, $\lim_{n\to\infty}||A_n(T)x|| = 0$. 次に $x \in \overline{R(I-T)}$ とすると, $\mathcal{H}$ の有界列 $\{y_n\}$ があり, $x = \lim_{n\to\infty}(I-T)(y_n)$ である．つまり $^\forall n,^\exists K \in \mathbf{N}.K \leq k \Rightarrow ||x-(I-T)y_k|| < 1/n$ である．このような $K \leq k$ を取れば,

$$\begin{aligned}||A_n(T)x|| &= ||A_n(T)(x-(I-T)y_k)|| + ||A_n(T)(I-T)y_k|| \\ &\leq ||A_n(T)||||x-(I-T)y_k|| + \frac{1}{n}(1+||T^n||)||y_k|| \\ &\leq \frac{1}{n}\sup_{0\leq l\leq n-1}||T^l|| + \frac{1}{n}(1+||T^n||)||y_k||\end{aligned}$$

したがって, $n \to \infty$ とすると右辺は 0 に収束する． □

2. U はユニタリ作用素であるから, $\overline{R(I-U)}^{\perp} = \ker(I-U^*) = \ker(I-U)$ に注意する．したがって特に $\mathcal{H} = \overline{R(I-U)} \oplus \ker(I-U)$ となる．$z \in \ker(I-U)$ とすれば, $z = Uz$ なので, $A_n(U)z = z$ である．ここで, $x \in \mathcal{H}$ に対して, $z = P(x), y = x - P(x)$ とすれば,

$$A_n(U)x - Px = A_n(U)(y+z) - z = A_n(U)y$$

であり, また U はユニタリより $\{U^n\}_{n=0}^{\infty}$ は有界なので, 先に示したことを用いれば題意が示せる． □