R6 inshi

Xia-seasons

8/20

基礎 1

$\mathbb{R}^2$ の部分集合 D を

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, (x^2+y^2)^2 \leq x^2 + 2y^2\}$$

で定める．積分

$$\int\int_D xye^{1-x^2-y^2}dxdy$$

の値を求めよ．

Proof. $t = x^2+y^2-1$ とすれば,

$$x \geq 0, y \geq 0, (x^2+y^2)^2 \leq x^2+2y^2 \Longleftrightarrow t \geq x^2-1, x \geq 0, t^2+x^2 \leq 1$$

である．$2ydxdy = dxdt$ に注意する．

$$D' = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, t \geq x^2-1, x^2+t^2 \leq 1\}$$

とすれば,

$$\begin{aligned}
\int\int_D xye^{1-x^2-y^2}dxdy &= \int\int_{D'} \frac{1}{2}xe^{-t}dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x\left(\int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-t}dt\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 xe^{1-x^2} - xe^{-\sqrt{1-x^2}}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{2}e^{1-x^2} - \sqrt{1-x^2}e^{-\sqrt{1-x^2}} - e^{-\sqrt{1-x^2}}\right)dx \\
&= \frac{1}{4}((-1-2\cdot 0-2\cdot 1)-(-e-2\cdot e^{-1}-2\cdot e^{-1})) \\
&= \frac{1}{4}(e-3+4e^{-1})
\end{aligned}$$

と計算できる． □

基礎 2

a を複素数とし, 複素 3 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 1 & -a & 1 \\ 2a & -2a & a+1 \end{pmatrix}$$

と定める. 行列 A の固有値をすべて求めよ. また, A の階数を求めよ.

Proof. $\lambda \in \mathbb{C}, I$ を 3 次元単位行列とするとき,

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-(a-1) & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+a & -1 \\ -2a & 2a & \lambda-(a+1) \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-(a-1))(\lambda+a)(\lambda-(a+1)) - (-1)(2a)(\lambda-(a-1)) \\ &= (\lambda-(a-1))(\lambda^2-\lambda-a^2-a+2a) \\ &= (\lambda-(a-1))(\lambda-a)(\lambda+(a-1)) \end{aligned}$$

である. したがって, A の固有値は $a, (a-1), -(a-1)$ である. また A は

$$\begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ a & -a & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

へと基本変形によって移るから,

$$\mathrm{rank} A = \begin{cases} 1 & a=1 \\ 2 & a=0 \\ 3 & a \neq 0,1 \end{cases}$$

となる. □

基礎 3

n, m を $n \geq 2m$ を満たす正の整数とする. V を有限次元複素ベクトル空間とする. $f: V \to V$ を $f^m = f^n$ を満たす線型写像とする. このとき,

$$V = \mathrm{Ker}(f^m) \oplus \mathrm{Im}(f^m)$$

を示せ. ここで, $\mathrm{Ker}(f^m)$ は f^m の核であり, $\mathrm{Im}(f^m)$ は f^m の像である.

Proof. $x \in V$ を任意にとる. $y = f^{n-m}(x)$ とすれば, $n \geq 2m$ より $y \in \mathrm{Im}(f^m)$ である. ここで, $f^m(x-y) = f^m(x) - f^n(x) = 0$ となり, $x - y \in \mathrm{Ker}(f^m)$ である. したがって $V = \mathrm{Ker}(f^m) + \mathrm{Im}(f^m)$ である. $v \in \mathrm{Ker}(f^m) \cap \mathrm{Im}(f^m)$

をとると, $v \in \mathrm{Im}(f^m)$ よりある $u \in V$ があって, $v = f^m(u)$ とかける. また $v \in \mathrm{Ker}(f^m), n \geq 2m$ から特に $v \in \ker(f^{n-m})$ であるから,

$$0 = f^{n-m}(v) = f^n(u) = f^m(u) = v$$

となる. したがって $V = \mathrm{Ker}(f^m) \oplus \mathrm{Im}(f^m)$ がわかった. □

基礎 4

r を正の実数とし, $\mathbb{R}$ 上の関数 $\rho_r(x)$ を

$$\rho_r(x) = \sin(re^{-r^2x^2})$$

と定義する. $\mathbb{R}$ 上の有界な実数値連続関数 $f(x)$ に対し, 次の問いに答えよ.

(1) 任意の $r > 0$ に対し, 広義積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho_r(x)dx$ が収束することを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho_r(x)dx = 0$ を示せ.

(3) $f(x)$ が $x = 0$ で微分可能で $f(0) = 0$ を満たすとき $\displaystyle\lim_{r\to\infty} r\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\rho_r(x)dx = 0$ を示せ.

(1). $1 < a < b$ とする.

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\rho_r(x)dx\right| &\leq ||f||_\infty \int_a^b re^{-r^2x^2}dx \leq ||f||_\infty \int_a^b rxe^{-r^2x^2}dx \\ &\leq \frac{||f||_\infty}{2r}\int_a^b \frac{d}{dx}(-e^{-r^2x^2})dx = \frac{||f||_\infty}{2r}(e^{-r^2a^2} - e^{-r^2b^2}) \\ &< \frac{||f||_\infty}{2r}e^{-r^2a^2} \longrightarrow 0 \quad (a \to \infty)\end{aligned}$$

$b < a < -1$ においても同様のことが言える. したがって広義積分は収束する. □

(2). $\delta > 0$ を任意にとる. このとき

$$\left|\int_0^\delta f(x)\rho_r(x)dx\right| \leq ||f||_\infty \delta$$

でありまた

$$\begin{aligned}\left|\int_\delta^\infty f(x)\rho_r(x)dx\right| &\le ||f||_\infty \int_\delta^\infty re^{-r^2x^2}dx\\ &\le ||f||_\infty \int_\delta^\infty r\frac{x}{\delta}e^{-r^2x^2}dx\\ &\le \frac{||f||_\infty}{2r\delta}e^{-r^2\delta^2}\end{aligned}$$

である．したがって δ を十分小さく, r を十分大きく取れば

$$\int_0^\infty f(x)\rho_r(x)dx \longrightarrow 0$$

となる．負の範囲についても同様に評価できるので, $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\int_{-\infty}^\infty f(x)\rho_r(x)dx = 0$ が言えた. □

(3). $f(x)$ は $x=0$ で可微分かつ $f(0)=0$ であるから,

$$g(x) = \begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & x \neq 0\\ f'(0) & x = 0\end{cases}$$

とすれば, $g(x)$ は有界連続関数であり, $g(x) = f(x)x$ となる．$\sin y \le \sqrt{y}$ $(y>0)$ に注意すれば,

$$\begin{aligned}r\int_{-\infty}^\infty f(x)\rho_r(x)dx &= \int_{-\infty}^\infty g(x)rx\rho_r(x)dx\\ &\le ||g||_\infty \int_{-\infty}^\infty rx\rho_r(x)dx\\ &\le ||g||_\infty \int_{-\infty}^\infty rx\sqrt{r}e^{-\frac{1}{2}r^2x^2}dx\\ &= \frac{||g||_\infty}{\sqrt{r}}\int_{-\infty}^\infty \frac{d}{dx}(-e^{-\frac{1}{2}r^2x^2})dx\\ &= \frac{2||g||_\infty}{\sqrt{r}}\left[-e^{-\frac{1}{2}r^2x^2}\right]_0^\infty = \frac{2||g||_\infty}{\sqrt{r}}\end{aligned}$$

となる．したがって, $\displaystyle\lim_{r\to\infty} r\int_{-\infty}^\infty f(x)\rho_r(x)dx = 0$ となる. □

基礎 5

a を正の実数としたとき, 次の広義積分の値を求めよ.

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{(\cos x - 1)(x+1)}{x(x^2+a^2)}dx$$

Proof. まず, f を $\mathbb{C}$ 上の関数へと拡張する.

$$f(z) = \frac{(e^{iz}-1)(z+1)}{z(z^2+a^2)}$$

$x=0$ が除去可能特異点であることに注意する. $x=ai$ は一位の極であるから,

$$\mathrm{Res}(f,ai) = (z-ai)f(z)\big|_{z=ai} = \left.\frac{(e^{iz}-1)(z+1)}{z(z+ai)}\right|_{z=ai} = \frac{(e^{-a}-1)(1+ai)}{2(ai)^2}$$

十分大きな正数 $R>0$ に対して

$$\begin{aligned} I_R &= \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})iRe^{i\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{(e^{iRe^{i\theta}}-1)(Re^{i\theta}+1)}{R^2e^{2i\theta}+a^2} id\theta \\ &= \frac{1}{R}\int_0^{\pi} \frac{(e^{-R\sin\theta}e^{iRcos\theta}-1)(e^{i\theta}+1)}{e^{2i\theta}+\frac{a^2}{R^2}} id\theta \end{aligned}$$

ここで被積分関数は R に依存しない定数で抑えられるので, $\lim_{R\to\infty} I_R = 0$ である. 以上より,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos x-1)(x+1)}{x(x^2+a^2)}dx = \mathrm{Re}(2\pi i\mathrm{Res}(f,ai)) = \frac{\pi}{2a}(e^{-a}-1)$$

□

基礎 6

S^2 は 2 次元球面 $\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$ を表すこととする. 写像 $f: S^2\times S^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$$

により定める. この写像の臨界値を全て求めよ.

Proof. f の $\mathbb{R}^6$ への拡張を $\tilde{f}$ としておく.

$$F:\mathbb{R}^6 \ni (x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3) \mapsto (x_1^2+x_2^2+x_3^3-1, y_1^2+y_2^2+y_3^2-1) \in \mathbb{R}^2$$

と定めると, $S^2\times S^2 = F^{-1}(0,0)$ である. このとき, $p\in S^2\times S^2$ に対して

$$\begin{aligned} \mathrm{rank} df_p &= \mathrm{rank}\begin{pmatrix} J\tilde{f}_p \\ JF_p \end{pmatrix} - 3 \\ &= \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2y_1 & 2y_2 & 2y_3 \end{pmatrix} - 3 \end{aligned}$$

とかける．したがって，f が臨界値 q をとるとき，$p = f^{-1}(q)$ とすれば $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3$ もしくは $x_1 = -y_1, x_2 = -y_2, x_3 = -y_3$ となる．したがって, 臨界値全体の集合は $2S^2 \cup \{0\}$ である． □

専門 6

Φ は $[0,\infty)$ 上の単調増加で下に凸な連続関数であり，さらに $\Phi(0) = 0$ および $\Phi(t) \geq t\ (t \in [0,\infty)])$ を満たすとする．

$$\mathcal{L} = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \middle| f \text{ はルベーグ可測かつある} \lambda > 0 \text{ に対して} \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{x}\right) dx \middle| \leq 1 \right\}$$

と定める．また, $f \in \mathcal{L}$ に対して,

$$||f|| = \inf\left\{ \lambda > 0 \mid \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{x}\right) dx \leq 1 \right\}$$

とする．次の問に答えよ．

(1) $f \in \mathcal{L}$ のとき, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < ||f||$ であることを示せ.

(2) $f, g \in \mathcal{L}$ とする．$f - g \in \mathcal{L}$ であることと, $||f - g|| \leq ||f|| + ||g||$ であることを示せ.

(3) $\mathcal{L}$ の元からなる列 $\{f_n\}$ が次の性質をもつとする.
「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある正の整数 N が存在して, $m, n \geq N$ のとき, $||f_m - f_n|| < \varepsilon$ を満たす.」
このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} ||f_m - f|| < 0$ を満たす $\mathcal{L}$ の元 f が存在することを示せ.

(1). $\lambda > ||f||$ を任意にとると, $\Phi(t) \geq t\ (t \in [0,\infty])$ より,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{\lambda} dx \leq \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1$$

したがって, $\lambda > ||f||$ の任意性より $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < ||f||$ がわかった. □

(2). $\lambda_1 > ||f||, \lambda_2 > ||g||$ を任意にとる．$|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ と Φ が下に凸であることから,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x) - g(x)|}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) dx &\leq \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x)| + |g(x)|}{\lambda_1 + \lambda_2}\right) \\
&\leq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda_1}\right) dx + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|g(x)|}{\lambda_2}\right) dx \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

したがって, $\lambda_1 > ||f||, \lambda_2 > ||g||$ の任意性より, $||f - g|| < ||f|| + ||g||$ がわかった. □

(3). $\{f_n\}$ は $\mathcal{L}$ の Cauchy 列であり, 特に (1) より

$$\int_{\mathbb{R}} |f_m(x) - f_n(x)| dx < ||f_m - f_n||$$

より $\{f_n\}$ は L^1 収束する. 特に $\{f_n\}$ の部分列 $\{f_{n_j}\}$ で f に概収束するものが取れる. ここで,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx &= \int_{\mathbb{R}} \liminf_{j\to\infty} \Phi\left(\frac{|f_{n_j}(x)|}{\lambda}\right) dx \\ &\underset{Fatou's\, lemma}{\leq} \liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f_{n_j}(x)|}{\lambda}\right) dx\end{aligned}$$

となり, $||f|| \leq \liminf_{j\to\infty} ||f_{n_j}||$, 特に $f \in \mathcal{L}$ がわかった. さらに,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f(x) - f_n(x)|}{\lambda}\right) dx &= \int_{\mathbb{R}} \liminf_{m\to\infty} \Phi\left(\frac{|f_m(x) - f_n(x)|}{\lambda}\right) dx \\ &\underset{Fatou's\, lemma}{\leq} \liminf_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{|f_m(x) - f_n(x)|}{\lambda}\right) dx\end{aligned}$$

「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある正の整数 N が存在して, $n, m \geq N$ のとき, $||f_m - f_n|| < \varepsilon$ を満たす.」ので, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 十分大きな n を取れば

$$||f - f_n|| < \liminf_{m\to\infty} ||f_m - f_n|| < \varepsilon$$

したがって, $\lim_{n\to\infty} ||f - f_n|| = 0$ がわかった. □

専門 7

H を Hilbert 空間とし, $H_1, H_2, \dots$ を互いに直行する H の有限次元部分空間で,

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\right)^{\perp} = \{0\}$$

を満たすものとする. 正の整数 n に対して P_n を H_n から H_n への直行射影とし, 整数 $n \leq 0$ については $P_n = 0$ とする.
有界線形作用素 $T : H \to H$ が次の 2 条件を満たすとする.

(1) $\lim_{n\to\infty} ||TP_n|| = 0$

(2) $a_n = \sup_{k\geq 1} ||P_{n+k}TP_n||$ とするとき,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n < \infty$$

ここで作用素 A に対して $||A||$ を作用素ノルムとする.
$n \in \mathbb{Z}$ に対して作用素 $S_n : H \to H$ を

$$S_n x = \sum_{k=1}^{\infty} P_{n+k}TP_k x$$

と定める.

(1) $||S_n|| \leq a_n$ を示せ.

(2) S_n はコンパクト作用素であることを示せ.

(3) T はコンパクト作用素であることを示せ.

(1). H は Hilbert 空間であって, $\{P_n\}$ は互いに直交する射影であるから, $x \in H$ に対して,

$$\begin{aligned}
||S_n x||^2 &= ||\sum_{k=1}^{\infty} P_{n+k}TP_k x||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} ||P_{n+k}TP_k x||^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} ||P_{n+k}TP_k \frac{P_k x}{||P_k x||}||^2 ||P_k x||^2 \\
&\leq ||a_n|| \sum_{k=1}^{\infty} ||P_k x||^2 \\
&= ||a_n|| ||x||^2
\end{aligned}$$

したがって, $||S_n|| \leq a_n$ である. □

(2). 任意の $n \in \mathbb{N}$ について，H_n は有限次元空間であるから，そこへの写像 $P_{n+k}TP_k$ は有限階作用素である．ある $N \in \mathbb{N}$ に対して $S_{n,N} := \sum_{k=1}^{N-1} P_{n+k}TP_k$ とすれば，$S_{n,N}$ は有限階作用素である．また条件 (i) より，

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, N \leq n \Rightarrow ||TP_n|| < \varepsilon$$

であるから，N をそう取り直しておく．ここで P_n が直交射影であるので，

$$\begin{aligned}
||(S_n - S_{n,k})x||^2 = ||\sum_{k=N}^{\infty} P_{n+k}TP_kx||^2 &= \sum_{k=N}^{\infty} ||P_{n+k}TP_kx||^2 \\
&\leq \sum_{k=N}^{\infty} ||P_{n+k}||^2||TP_k||^2||P_kx||^2 \\
&\leq \varepsilon^2 \sum_{k=N}^{\infty} ||P_kx||^2 \leq \varepsilon^2||x||^2
\end{aligned}$$

となり，$||S_n - S_{n,N}|| < \varepsilon^2$ がわかる．したがって $S_{n,N}$ は S_n にノルム収束しており，Hilbert 空間上の有限階作用素全体の集合はコンパクト作用素全体の集合の稠密な部分集合であったので，S_n がコンパクト作用素であることが言えた． □

(3). $T_N = \sum_{n=-N+1}^{N-1} S_n$ とする．$x_l \in H_l$ に対して，$l < N$ を取れば

$$\begin{aligned}
||(T - T_N)x_l||^2 &= ||\sum_{n=1}^{\infty} P_nTx_l - \sum_{n=-N+1}^{N-1} P_{n+l}Tx_l||^2 \\
&= ||\sum_{n=N+l}^{\infty} P_nTx_l||^2 = \sum_{n=N+l}^{\infty} ||P_nTx_l||^2 \\
&= \sum_{n=N+l}^{\infty} ||P_nTP_l\frac{x_l}{||x_l||}||^2||x_l||^2 \\
&= ||x_l||^2 \sum_{n=N+l}^{\infty} a_n^2
\end{aligned}$$

が成り立つ．条件 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n < \infty$ より，上式は x_l によらず 0 に収束する．条件 $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\right)^{\perp} = \{0\}$ より，H 上でも収束することが言える．したがって，コンパクト作用素全体の集合が閉であることから，T がコンパクト作用素であることがわかった． □