Quotient norm

four-seasons

10/27

Quotient norm

$Y \underset{\text{closed-sp}}{\subset} X$: normed space

1. X/Y の商ノルムはノルムである.
2. $Q : X \ni x \mapsto [x] \in X/Y$ とする. $Y \neq X \Rightarrow ||Q|| = 1$ である.

Hint. 商ノルムの定義から, 以下の式が成り立つ.

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in Y. ||[x]|| \leq ||x + y|| \leq ||[x]|| + \varepsilon \tag{0.1}$$

Proof. **[1]** $||[x]|| := \inf_{y \in Y} ||x + y||$ である. ここで式 0.1 で $||[x]|| = 0$ とすれば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $y \in Y$ があり, $||x + y|| < \varepsilon$ と書ける. Y が閉に注意すれば, これは $x \in \overline{Y} = Y$ を意味する. 逆は明らか.

$$x \in Y \Rightarrow \exists y \in Y. x + y = 0 \Rightarrow ||[x]|| = 0$$

$\alpha \in \mathbb{C} \backslash 0$ とする. また, $x \in X$ とする. このとき,

$$||[\alpha x]|| = \inf_{y \in Y} ||\alpha x + y|| = |\alpha| \inf_{y \in Y} ||x + \frac{y}{\alpha}|| = |\alpha| \inf_{y \in Y} ||x + y|| = |\alpha| ||[x]||$$

これでスカラー倍が示せた. $x, x' \in X$ について考える.

$$||[x + x']|| = \inf_{y \in Y} ||x + x' + y|| = \inf_{y, y' \in Y} ||x + x' + y + y'|| \leq \inf_{y \in Y} ||x + y|| + \inf_{y \in Y} ||x' + y|| = ||[x]|| + ||[x']||$$

となり, 三角不等式が示せた. 以上から, 商ノルムはノルムであることがわかった.

[2] $||Q|| = \sup_{||x||=1} ||[x]|| \leq \sup_{||x||=1} ||x + 0|| = 1$ であることは良い. 逆を示そう. $x \in X \backslash Y$ とする. このとき定義から式 0.1 が成立するので, Y の点列 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ を, 任意の正数 ε について十分大きな n を取れば

$$||[x]|| \leq ||x + y_n|| \leq ||[x]|| + \varepsilon$$

を満たすように取れる. ここで, $x_n := \frac{x + y_n}{||x + y_n||}$ とする. $||x_n|| = 1$ に注意して上式を使えば,

$$\begin{aligned} ||Q|| \geq ||[x_n]|| = \inf_{y \in Y} ||x_n + y|| = \frac{1}{||x + y_n||} \inf_{y \in Y} ||x + y|| = \frac{||x||}{||x + y_n||} \\ \geq \frac{||x + y_n|| - \varepsilon}{||x + y_n||} \geq 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

ここで ε は任意であった. したがって, $||Q|| = 1$ がわかった. □

注意 0.0.1 (誤答例)**.** どこが間違っているか当てよう！

(2) 後半

$x \in X$ に対して, $|||[x]||| = \inf_{y \in Y} ||x+y||$ を与える $y' \in Y$ を固定する．このとき, $X \neq Y$ であるから, $|||[x]||| = ||x+y'|| \neq 0$ となる．このとき, $x' := \frac{x+y'}{||x+y'||}$ と定めると, $||x'|| = 1$ である．したがって,

$$||Q|| = \sup_{||x||=1} |||[x]||| \geq |||[x']||| = \frac{1}{||x+y'||} \inf_{y \in Y} ||x+y'+y|| = \frac{1}{||x+y'||} \inf_{y \in Y} ||x+y|| = 1$$

良い y' は自然に取れない (Hillbert 空間でないから中線定理を使えず射影定理などもまた使えない) し, 構成も非自明である (構成できるのか？).