Basic Calculas

hayami-m

4/29

shift operator

l^2 の片側ずらし作用素 V のスペクトルを分類せよ.

l^2 の片側ずらし作用素 V は等長であるから, (Beurling より) スペクトル半径は $r(V) = 1$ である. $x \in l^2, \lambda \in \mathbb{C}$ が $V^*x = \lambda x$ を満たすとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ について $x_n = \lambda^n x_0$ を満たす. またこのとき $x \in l^2$ より $|\lambda| < 1$ でなければならない. 逆に $|\lambda| < 1, x_n = \lambda^n$ とすれば $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N} \cup 0} \in l^2$ かつ $V^*x = \lambda x$ である. したがって, $\sigma_p(V^*) = \mathbb{D}$. $(\lambda I - T)^* = \overline{\lambda} I - T^*$ だから, $r(V^*) = r(V) = 1$. Gelfand より $\sigma(V^*)$ はコンパクトなので, $\sigma(V^*) = \overline{\mathbb{D}}$. また, $\sigma(V) = \overline{\mathbb{D}}$.

ここで, $(S^1 =)\partial\sigma(V^*) = \sigma_p(V^*) \cup \sigma_c(V^*) \subset \sigma_{ap}(V^*)$ と $(\mathbb{D} =)\sigma_p(V^*) \subset \sigma_{ap}(V^*)$ より, $(\overline{\mathbb{D}} =)\sigma(V^*) = \sigma_{ap}(V^*) \cup \sigma_r(V^*)$ から, $\sigma_r(V^*) = \emptyset, \sigma_c(V^*) = S^1$ がわかる.

連続スペクトル間の対応から $\sigma_c(V) = S^1$ がわかる.

$x \in l^2, \lambda \in \mathbb{C}$ が $Vx = \lambda x$ を満たすとき, 全ての $n \in \mathbb{N}$ について $\lambda x_0 = 0, \lambda x_n = x_{n-1}$ を満たす. $x \neq 0$ なら $\lambda = 0$ でなければならないが, このとき対応する $x \in l^2$ は $x = 0$ のみである. したがって $\sigma_p(V) = \emptyset$. 点スペクトルの対応から $\sigma_r(V) = \sigma_p(V^*) \backslash \sigma_p(V) = \mathbb{D}$ がわかる.