Basic Caluculas

hayami-m

3/30

演習 0.0.1. 次の式の値を求めよ.

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} \cdots$$

Proof. 次の式 $f(x)$ を考えると, 与えられた式は $f(1)$ と表せる.

$$f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} - \frac{1}{13}x^{13} \cdots$$

このとき, $|x| < 1$ において, $f'(x)$ は次のように書ける.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 - x^2) - x^4(1 - x^2) + x^8(1 - x^2) \cdots \\ &= (1 - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n} = \frac{1 - x^2}{1 + x^4} \end{aligned}$$

ところで, 次の計算ができる.

$$\int_0^1 (1 - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n} dx = \int_0^1 \frac{1 - x^2}{1 + x^4} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{1 + x^2 + \sqrt{2}x}{1 + x^2 - \sqrt{2}x} \right)' dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \log(1 + \sqrt{2})$$

これは $f(1)$ ではないので, 次の確認をする.

$$\int_0^1 (1 - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n} dx < \int_0^1 (1 - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} dx = \int_0^1 (1 - \lim_{n \to \infty} x^{2n}) dx < 1$$

したがって, Fubini の定理が使えて,

$$\int_0^1 (1 - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 x^{4n} - x^{4n+2} dx$$

このとき, 右辺は $f(1)$ を表す. 以上より, $f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \log(1 + \sqrt{2})$ がわかった. □