Crible 豊穣圏入門

奈須 隼大

2023 年 12 月 18 日

この記事は 🎄 圏論 Advent Calendar 2023 の 18 日目の記事として書かれた.[1)]

0 ⛄はじめに

unification（統一性）は圏論において興味深い特徴の一つである．数学（あるいはその他の自然科学）の様々な分野のあれやこれやはしばしば圏の言葉によって抽象化され一つの概念として統一される．標語的に言えば，圏論とは**抽象の avenue** である.[2)]

enriched category はその恰好の例である．例えば，圏，preordered sets，加法圏，（一般化）距離空間はそれぞれ **Set**，$\{\top,\bot\}$，**Ab**，$\mathbb{R}_+$ を enrichment とする enriched category である．また，それぞれの様々な性質が enriched category の言葉で定式化される．例としては，距離空間の Cauchy completeness は enriched category としてのある (co)limit の class に対する completeness とみなせる．（ [Hir22] が参考になるだろう．）先に挙げた例は monoidal 圏による enriched category として捉えられ，かつ数学において自然に現れるものばかりである．

この記事では 'the nice lists' に加えられるべき enriched category として crible enriched category なるものを紹介する．これは monoidal category による enrichment の枠を超えた bicategory enriched category の一例である．面白いことに，presheaf，つまり **Set** への functor そのものが crible enriched category としてみなせるのだ．そして，距離空間の例における Cauchy completeness のように，enriched category としてのある (co)limit の class に対する completeness を課すことで（性質の良い）sketch の model を切り出すこともできる．

この記事の目的は，bicategory enriched category の種々の概念をまとめるとともに，その具体例として crible enriched category を紹介することである．それに加え，古典的な結果である presheaf と skeletal, symmetric, Cauchy complete な crible enriched category の対応や，sketch の model との関係を説明することで crible enriched category の有用性を示したい．その意味で，2 節と 4 節が一般論，1 節，3 節，および 5 節が各論的な内容となっている．

基本的には，(locally posetal) bicategory と presheaf に関する知識があれば読めるように書いたが，もちろん monoidal category による enrichment の知識があるほうが理解しやすいと思う．古典的な文献として [Wal81, BC82, BCSW83] を含む一連の論文が挙げられる．最近だと Stubbe,Heymans らによって quantaloid enriched category の理論が展開されていて，その中でも入門的な文献として [Stu14] がある．

本稿で「問」を付した箇所は，定義を理解すれば容易に信じることができ，かつ，より高い見地から見れば自明であるような事実がほとんどである．ここで，トポス理論のテキスト [Joh02] の序文にある次の一節を引用しておく．

> *In keeping with this, there are no 'exercises for the reader' (which are often the lazy author's way of leaving out the proofs of results that he can't be bothered to write out in full)...* [Joh02, xiii]

---

1) https://adventar.org/calendars/8591
2) この言葉は ChatGPT によって生成された．気に入ったので使わせてもらったが擦りすぎかもしれない．

目次

1 Crible

今回の主役である crible を定義する．この用語は [Wal82] によって導入されたものと思われ，フランス語で「ふるい」を意味するらしい．[3)]

定義 1.1. $\mathbf{C}$ を小圏とする．

(i) 対象 c, c' に対しその間の **span** とは，射の組 $(f\colon d \to c,\ f'\colon d \to c')$ のことをいう．これを

$$\begin{tikzcd} & d \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ c & & c' \end{tikzcd}$$

と表す．

(ii) 対象 c, c' に対しその間の **crible** とは，span の集合 R であって，

$$\begin{tikzcd} & d \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ c & & c' \end{tikzcd} \in R \quad\Longrightarrow\quad \begin{tikzcd} & e \arrow[d, "k"] & \\ & d \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ c & & c' \end{tikzcd} \in R \qquad (\forall k\colon e \to d \in \mathbf{C}).$$

をみたすもののことである．$\mathbf{C}$ が直積を持つときは，これは前層 $よ_{c\times c'}$ の部分前層と同じものである．これを $R\colon c \nrightarrow c'$ と表す．

span の集合 R に対して，それを含む最小の crible を $\langle R\rangle$ と書き，以下このような記号を柔軟に使う．

以降では圏 $\mathbf{C}$ が有限極限を持つことを仮定する．このとき，crible を 1-cell とする bicategory が定義される．

定義 1.2. 有限極限をもつ小圏 $\mathbf{C}$ に対して、bicategory $\mathcal{C}\mathrm{rib}(\mathbf{C})$ を次で定義する．

- 0-cells は $\mathbf{C}$ の対象.
- 1-cells は cribles.

3) 同じくふるいを意味する英語 sieve は representable functor の subfunctor のことを指す．crible はこの二対象化なのでもっともな名前である．

- 1-cells $R\colon c \nrightarrow c'$ と $R'\colon c' \nrightarrow c''$ の合成 $R \odot R'\colon c \nrightarrow c''$ は，pullback を用いて，

$$
R \odot R' \coloneqq \left\langle
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & e \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, phantom, very near start, "\vee"] & & \\
 & d \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & & d' \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "g'"] & \\
c & & c' & & c''
\end{tikzcd}
\;\middle|\;
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & d \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\
c & & c'
\end{tikzcd} \in R,\
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & d' \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "g'"] & \\
c' & & c''
\end{tikzcd} \in R'
\right\rangle
$$

と定める．（この e を頂点とする span を 2 つの span の合成という．）
- 2-cells $\alpha\colon R \Rightarrow R'$ は，各 R, R' に対し高々一意で，存在するのは次のようなときに限る．

$$
\forall
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & d \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\
c & & c'
\end{tikzcd} \in R \quad \exists
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & e \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "g'"] & \\
c' & & c'
\end{tikzcd} \in R' \, \exists \alpha_d\colon d \to e \quad \text{s.t.}
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & d \arrow[d, "\alpha_d"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "f'"] & \\
 & e \arrow[dl, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & \\
c & & c'
\end{tikzcd} \quad \text{commutes.}
$$

このとき，単に $R \subseteq R'$ と書く．

問 1.3. この定義が確かに bicategory を定めることを示せ．

特に，identity 1-cell は

$$
\left\langle
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & c \arrow[dl, "\mathtt{id}_c"'] \arrow[dr, "\mathtt{id}_c"] & \\
c & & c
\end{tikzcd}
\right\rangle
=
\left\{
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & d \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f"] & \\
c & & c
\end{tikzcd}
\;\middle|\;
f\colon d \to c \in \mathbf{C}
\right\}\colon c \nrightarrow c
$$

で与えられる．また，crible $R\colon c \nrightarrow c'$ に対し，$R^\circ\colon c' \nrightarrow c$ を

$$
R^\circ \coloneqq \left\{
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & d \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\
c' & & c
\end{tikzcd}
\;\middle|\;
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & d \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
c & & c
\end{tikzcd} \in R
\right\}\colon c' \nrightarrow c
$$

ここで，特別な crible を定義する．

定義 1.4. $\mathbf{C}$ の射 $f\colon c \to c'$ に対し，

$$
f_* \coloneqq \left\langle
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & c \arrow[dl, "\mathtt{id}_c"'] \arrow[dr, "f"] & \\
c & & c'
\end{tikzcd}
\right\rangle\colon c \nrightarrow c'
$$

と定める．また，$f^* \coloneqq (f_*)^\circ$ と定める．これらを **representable crible** という．

問 1.5. $(-)_*$ が $\mathbf{C}$ から $\mathcal{C}\mathrm{rib}(\mathbf{C})$ への pseudo-functor を定めることを示せ．

2　Bicategory enriched category

豊穣圏とは，圏の定義で射の集合を集合ではなく monoidal 圏の対象とするものであった．さらに思い出すと，monoidal 圏とは single-object bicategory のことであった．そこで，bicategory の 1-cell を “射の集合” と見なすことで一般化したものが bicategory enriched category である．折角なので，一般の bicategory enriched category を定義しておくが，この記事で扱うのは locally preordered bicategory のみであり，その場合は bicategory での合成によって記述される種々の compatibility condition が自動的に充たされる．特に，$\mathcal{C}\mathrm{rib}(\mathbf{C})$ は quantaloid で

あり，様々な圏論的構成を許容する．これに関しては，[Stu14] が良くまとまっている（が，profunctor の向きについては流儀が異なるので注意）．

定義 2.1. Bicategory $\mathcal{B}$ に対し，(small) **$\mathcal{B}$-enriched category** $\mathfrak{F}$ は，

- 対象の集合 $\mathfrak{F}_0$，
- 各対象 x に対する $\mathcal{B}$ の 0-cell $|x| \in \mathcal{B}$ の割り当て（$|x|$ を x の **index** という），
- 各対象 x, y に対する $\mathcal{B}$ の 1-cell $\mathfrak{F}(x,y)\colon |x| \mathrel{\rightarrow\mkern-14mu\mapstochar\mkern10mu} |y|$ の割り当て，
- 各対象 x, y, z に対する $\mathcal{B}$ の 2-cell
$$\begin{tikzcd}
 & {|y|} \arrow[dr, "\mathfrak{F}(y,z)"] & \\
{|x|} \arrow[ur, "\mathfrak{F}(x,y)"] \arrow[rr, "\mathfrak{F}(x,z)"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3, "\circ_{x,y,z}"] & & {|z|}
\end{tikzcd}$$
の割り当て，
- 各対象 x に対する $\mathcal{B}$ の 2-cell
$$\begin{tikzcd}
{|x|} \arrow[rr, bend left, equal, "\mathtt{Id}_{|x|}"] \arrow[rr, bend right, "\mathfrak{F}(x,x)"'] \arrow[rr, phantom, "\mathfrak{Id}_x"] & & {|x|}
\end{tikzcd}$$
の割り当て

の組であって，合成に関して結合律

$$\begin{tikzcd}
 & {|x|} \arrow[r, "\mathfrak{F}(x,y)"] & {|y|} \arrow[dr, "\mathfrak{F}(y,z)"] & \\
{|w|} \arrow[ur, "\mathfrak{F}(w,x)"] \arrow[urr, "\mathfrak{F}(w,y)"'] \arrow[rrr, bend right, "\mathfrak{F}(w,z)"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\circ_{w,x,y}"] & & \arrow[r, phantom, "\circ_{w,y,z}"] & {|z|}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & {|x|} \arrow[r, "\mathfrak{F}(x,y)"] \arrow[drr, "\mathfrak{F}(x,z)"'] & {|y|} \arrow[dr, "\mathfrak{F}(y,z)"] & \\
{|w|} \arrow[ur, "\mathfrak{F}(w,x)"] \arrow[rrr, bend right, "\mathfrak{F}(w,z)"'] \arrow[r, phantom, "\circ_{w,x,z}"] & & \arrow[u, phantom, "\circ_{x,y,z}"] & {|z|}
\end{tikzcd}$$

と単位律

$$\begin{tikzcd}
 & {|x|} \arrow[dr, "\mathfrak{F}(x,y)"] & \\
{|x|} \arrow[ur, bend left, equal] \arrow[ur, "\mathfrak{F}(x,x)"'] \arrow[ur, phantom, bend left, "\mathfrak{Id}_x"] \arrow[rr, bend right, "\mathfrak{F}(x,y)"'] \arrow[rr, phantom, "\circ_{x,x,y}"] & & {|y|}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & {|y|} \arrow[dr, bend left, equal] \arrow[dr, "\mathfrak{F}(y,y)"'] \arrow[dr, phantom, bend left, "\mathfrak{Id}_y"] & \\
{|x|} \arrow[ur, "\mathfrak{F}(x,y)"] \arrow[rr, bend right, "\mathfrak{F}(x,y)"'] \arrow[rr, phantom, "\circ_{x,y,y}"] & & {|y|}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
{|x|} \arrow[r, "\mathfrak{F}(x,y)"] & {|y|}
\end{tikzcd}$$

を充たすものである．

問 2.2. 0-cell $c \in \mathcal{B}$ に対し，$\mathcal{B}$-enriched category $\mathfrak{O}_c$ が次で定まることを確認せよ．

- 対象の集合 $\mathfrak{O}_c$ は一点集合 $\{*\}$ で index は c とする．
- 唯一の hom-1-cell $\mathfrak{O}_c(*,*)$ は $\mathtt{Id}_c\colon c \mathrel{\rightarrow\mkern-14mu\mapstochar\mkern10mu} c$ とする．

(1-) 圏の様々な概念を一般の monoidal **豊穣**圏に拡張するとき，monoidal unit から hom-object への射を "射" とみなす方法がある．これをさらに広げて，bicategory enriched category の場合には，identity 1-cell から hom-1-cell への 2-cell を "射" とみなす．そうすると残念ながら異なる index の間には射が存在しないことになってしまうが，例えば二つの対象が同型であるためには index が等しいことを課すことはそこまで不自然ではないかもしれない．

定義 2.3. $\mathcal{B}$-enriched category $\mathfrak{F}$ に対し，$\mathfrak{F}$ の対象 x, y が**同型**であるとは，$|x| = |y|$ であり，かつ $\mathcal{B}$ の 2-cell $\alpha\colon \mathtt{Id}_{|x|} \Rightarrow \mathfrak{F}(x,y)$，及び $\beta\colon \mathtt{Id}_{|x|} \Rightarrow \mathfrak{F}(y,x)$ が存在して，

$$
\begin{tikzcd}
 & {|y|} \arrow[dr, bend left=40, equal, "\mathtt{Id}_{|x|}"] \arrow[dr, "\mathfrak{F}(y,x)"'{name=B}] & \\
{|x|} \arrow[ur, bend left=40, equal, "\mathtt{Id}_{|x|}"] \arrow[ur, "\mathfrak{F}(x,y)"'] \arrow[rr, bend right=20, "\mathfrak{F}(x,x)"'] \arrow[ur, phantom, bend left=20, "\alpha"] \arrow[rr, phantom, "\circ"] & & {|x|} \arrow[ul, phantom, bend right=20, "\beta"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
{|x|} \arrow[r, bend left=40, equal, "\mathtt{Id}_{|x|}"] \arrow[r, bend right=40, "\mathfrak{F}(x,x)"'] \arrow[r, phantom, "\mathfrak{Id}_x"] & {|x|}
\end{tikzcd}
$$

及びこの α, β の役割を入れ替えたものが成り立つことをいう．ここで $\mathfrak{Id}_x\colon |x| \to |x|$ は $\mathcal{B}$ の単位射である．$\mathcal{B}$-enriched category $\mathfrak{F}$ が **skeletal** であるとは，同型な対象が一致することをいう．

定義 2.4. $\mathcal{B}$ が symmetric bicategory であるとき，つまり，identity-on-0-cells equivalence $(-)^\circ\colon \mathcal{B}^{\mathsf{op}} \to \mathcal{B}$ が存在するとき，$\mathcal{B}$-enriched category $\mathfrak{F}$ が **symmetric** であるとは，$\mathfrak{F}(y,x) \cong \mathfrak{F}(x,y)^\circ$ が各対象 x, y に対して成り立ち，これが合成や単位射を respect することをいう．

例 2.5. Lawvere metric space（$\mathbb{R}_+$-enriched category）が symmetric かつ skeletal であることと，それが距離空間であることは同値である．

圏を定義したので，次は関手を定義する．

定義 2.6. $\mathcal{B}$-enriched category $\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{G}$ に対し，**$\mathcal{B}$-enriched functor** $K\colon \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ とは，

- 対象の間の写像 $K_0\colon \mathfrak{F}_0 \to \mathfrak{G}_0; x \mapsto Kx$，であって，index を保つもの，
- 各対象 x, y に対し，$\mathcal{B}$ の 2-cell $K_{x,y}\colon \mathfrak{F}(x,y) \Rightarrow \mathfrak{G}(Kx,Ky)\colon |x| \to\!\!\!\!\!\mapsto |y|$ の割り当て

の組であって，関手性，つまり合成の保存

$$
\begin{tikzcd}
 & {|y|} \arrow[dr, bend left=40, "\mathfrak{F}(y,z)"] \arrow[dr] \arrow[dr, phantom, bend left=15, "K_{y,z}"] & \\
{|x|} \arrow[ur, bend left=40, "\mathfrak{F}(x,y)"] \arrow[ur] \arrow[ur, phantom, bend left=15, "K_{x,y}"] \arrow[rr, bend right=20, "\mathfrak{G}(Kx,Kz)"'] \arrow[rr, phantom, "\circ_{Kx,Ky,Kz}"] & & {|z|}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & {|y|} \arrow[dr, bend left=40, "\mathfrak{F}(y,z)"] & \\
{|x|} \arrow[ur, bend left=40, "\mathfrak{F}(x,y)"] \arrow[rr, "\mathfrak{F}(x,z)"{description}] \arrow[rr, bend right=40, "\mathfrak{G}(Kx,Kz)"'] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\circ_{x,y,z}"] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "K_{x,z}"] & & {|z|}
\end{tikzcd}
$$

および単位射の保存を充たすものである．

問 2.7. 恒等関手及び関手の合成を定義せよ．

関手を定義したので，次は関係手（profunctor）を定義する．（2 節の残りはもし 1-圏ないし monoidal 豊穣圏の profunctor の前提知識がなければ読み飛ばしてもらって構わない．）

定義 2.8. $\mathcal{B}$-enriched category $\mathfrak{F}$ と $\mathfrak{G}$ に対し，**$\mathcal{B}$-enriched profunctor** $P\colon \mathfrak{F} \to\!\!\!\!\!\mapsto \mathfrak{G}$ とは，

- 対象 $x \in \mathfrak{F}$ と $y \in \mathfrak{G}$ に対する $\mathcal{B}$ の 1-cell $P(x,y)\colon |x| \to\!\!\!\!\!\mapsto |y|$ の割り当て，

- 対象 $x, x' \in \mathfrak{F}$ と $y \in \mathfrak{G}$ に対する $\mathcal{B}$ の 2-cell

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & {|x'|_{\mathfrak{F}}} \arrow[dr, "{P(x',y)}", "\shortmid"{marking}] & \\ {|x|_{\mathfrak{F}}} \arrow[ur, "{\mathfrak{F}(x,x')}", "\shortmid"{marking}] \arrow[rr, bend right, "{P(x,y)}"', "\shortmid"{marking}] \arrow[rr, phantom, "P_{x,x';y}"] & & {|y|_{\mathfrak{G}}} \end{tikzcd}$$

  の割り当て，
- 対象 $x \in \mathfrak{F}$ と $y, y' \in \mathfrak{G}$ に対する $\mathcal{B}$ の 2-cell

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & {|y|_{\mathfrak{G}}} \arrow[dr, "{\mathfrak{G}(y,y')}", "\shortmid"{marking}] & \\ {|x|_{\mathfrak{F}}} \arrow[ur, "{P(x,y)}", "\shortmid"{marking}] \arrow[rr, bend right, "{P(x,y')}"', "\shortmid"{marking}] \arrow[rr, phantom, "P_{x;y,y'}"] & & {|y'|_{\mathfrak{G}}} \end{tikzcd}$$

の組であって，自然性を充たすものである．

問 2.9. 自然性の条件を書き下せ．$\mathcal{B}$-enriched profunctor $\mathfrak{F}(-, \bullet) \colon \mathfrak{F} \nrightarrow \mathfrak{F}$ を上手いこと定義せよ．($\mathcal{B}$-enriched functor $K \colon \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ に対して定まる関係手として，二種類の関係手

$$K_* := \mathfrak{G}(K(-), \bullet) \colon \mathfrak{F} \nrightarrow \mathfrak{G}, \quad K^* := \mathfrak{G}(\bullet, K(-)) \colon \mathfrak{G} \nrightarrow \mathfrak{F}$$

がある．)

さらに，二つの関係手の間の自然変換を定義する．関手の間の自然変換 $K \Rightarrow L$ は特に関手から定まる関係手の間の自然変換 $K^* \Rightarrow L^*$ として定義する．

定義 2.10. $\mathcal{B}$-enriched profunctor $P, Q \colon \mathfrak{F} \nrightarrow \mathfrak{G}$ に対し，**$\mathcal{B}$-enriched natural transformation** $\alpha \colon P \Rightarrow Q$ とは，対象 $x \in \mathfrak{F}$ と $y \in \mathfrak{G}$ に対する $\mathcal{B}$ の 2-cell $\alpha_{x,y} \colon P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)$ の割り当てであって，自然性を充たすものである．

問 2.11. 自然性の条件を書き下せ．$\mathcal{B}$-enriched natural transformation $\alpha \colon K \Rightarrow L \colon \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ を $\alpha \colon K^* \Rightarrow L^* \colon \mathfrak{F} \nrightarrow \mathfrak{G}$ として定義したとき，それは各対象 $x \in \mathfrak{F}$ に対し，$\mathcal{B}$ の 2-cell $\alpha_x \colon \mathtt{Id}_{|x|} \Rightarrow \mathfrak{G}(K_0(x), L_0(x))$ の割り当てであって，自然性を充たすものと等価であることを示せ．また，その条件を書き下せ．

関係手の合成は任意の bicategory に対して定義されるわけではない．bicategory のすべての hom-category が cocomplete であり，それが composition によって保たれることが必要である．そのような bicategory は **locally cocomplete** bicategory と呼ばれる．特に，locally preordered のとき，**quantaloid** と呼ばれる．$\mathcal{C}\mathrm{rib}(\mathbf{C})$ は crible の union が生成する crible が sup を与えることから quantaloid である．

定義 2.12. $\mathcal{B}$-enriched profunctor $P \colon \mathfrak{F} \nrightarrow \mathfrak{G}$, $Q \colon \mathfrak{G} \nrightarrow \mathfrak{H}$ に対し，P と Q の**合成** $P \boxdot Q \colon \mathfrak{F} \nrightarrow \mathfrak{H}$ を次で定める．

$$(P \boxdot Q)(x, z) := \int^{y \in \mathfrak{G}} P(x, y) \odot Q(y, z) \colon |x| \nrightarrow |z|$$

ただし，coend 内の $\odot$ は $\mathcal{B}$ の合成であり，この coend は $\mathcal{B}(|x|,|z|)$ における

$$\left(\begin{tikzcd} & P(x,y)\odot\mathfrak{G}(y,y')\odot Q(y',z) \arrow[dl, "P_{x;y,y'}\odot\mathtt{Id}_{Q(y',z)}"'] \arrow[dr, "\mathtt{Id}_{P(x,y)}\odot Q_{y;y',z}"] & \\ P(x,y')\odot Q(y',z) & & P(x,y)\odot Q(y,z) \end{tikzcd}\right)_{y,y'\in\mathfrak{G}}$$

という図式の colimit である．

特に quantaloid の場合は，関係手の合成は次のように表せる．

$$(P\boxdot Q)(x,z)=\bigvee_{y\in\mathfrak{G}}P(x,y)\odot Q(y,z).$$

問 2.13. $\mathcal{B}$-enriched profunctor の合成に関して，問 2.9 の profunctor $\mathfrak{F}(-,\bullet)\colon\mathfrak{F}\nrightarrow\mathfrak{F}$ が同型を除いて identity になることを示せ．また，同型を除いて合成の結合律が成り立つことを示せ．さらに，bicategory enriched category と bicategory enriched profunctor は bicategory $\mathcal{B}$-$\mathcal{P}$rof をなすことを示せ．

3 Crible enriched category

古典的な結果として，景 $(\mathbf{C},J)$ に対しその層圏 $\mathbf{Sh}(\mathbf{C},J)$ はある条件を充たす $\mathcal{C}\mathrm{rib}(\mathbf{C})$-enriched category のなす bicategory と biequivalent であることが知られている．（[Wal81, BC82] が標準的な参考文献であるが，そこでは $\mathcal{C}\mathrm{rib}(\mathbf{C})$ を $\mathbb{R}\mathrm{el}(\mathbf{C})$ と表記している．）この節ではこの特別な場合，つまり，

定理 3.1. $\mathbf{C}$ を有限極限を持つ小圏とする．このとき，

- 前層 $F\colon\mathbf{C}^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Set}$，及び
- Cauchy complete，symmetric，かつ skeletal な $\mathcal{C}\mathrm{rib}(\mathbf{C})$-enriched category $\mathfrak{F}$

は 1 対 1 に対応する．

という定理を具体的に確認していく．

初めに，前層 $F\colon\mathbf{C}^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Set}$ から $\mathcal{C}\mathrm{rib}(\mathbf{C})$-enriched category $\mathfrak{F}$ を構成しよう．以下，$f\colon c\to c'$ と $x\in F(c')$ に対し，$F(f)(x)\in F(c)$ を $x\cdot f$ と書く．

命題 3.2. 前層 $F\colon\mathbf{C}^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Set}$ に対し，$\mathcal{C}\mathrm{rib}(\mathbf{C})$-enriched category $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_F$ が次のようにして定まる．

- 対象の集合 $\mathfrak{F}_0:=\{\,(c,x)\mid c\in\mathbf{C},\ x\in F(c)\,\}$.
- 対象 (c,x) の index は $|(c,x)|:=c$.
- 対象 (c,x) と (c',x') の間の hom-crible は，

$$\mathfrak{F}((c,x),(c',x')):=\left\{\begin{tikzcd}[column sep=small] & d \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ c & & c'\end{tikzcd}\ \middle|\ \begin{tikzcd}[column sep=small] & x\cdot f=x'\cdot f' & \\ x \arrow[ur, mapsto, "f"] & & x' \arrow[ul, mapsto, "f'"'] \end{tikzcd}\right\}\colon c\nrightarrow c'$$

これは symmetric であり，かつ skeletal である．

証明 単位射について，$F(\mathtt{id}_c)(x)=x$ であるから $\mathtt{Id}_c\subseteq\mathfrak{F}((c,x),(c,x))$.

合成について，$\begin{tikzcd}[column sep=small] & d \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ c & & c' \end{tikzcd} \in \mathfrak{F}((c,x),(c',x'))$ と $\begin{tikzcd}[column sep=small] & e \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "g'"] & \\ c' & & c'' \end{tikzcd} \in \mathfrak{F}((c',x'),(c'',x''))$ に対し，

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \cdot & \\ x \arrow[ur, mapsto, "f"] & & x' \arrow[ul, mapsto, "f'"'] \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \cdot & \\ x' \arrow[ur, mapsto, "g"] & & x'' \arrow[ul, mapsto, "g'"'] \end{tikzcd}$$

であるから，f' と g の pullback を $p\colon a \to d$, $q\colon a \to e$ が与えるとすると，

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & a \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] \arrow[dd, phantom, "\lrcorner"] & & \\ & d \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & & e \arrow[dl, "g'"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ c & & c' & & c'' \end{tikzcd} \qquad \Bigg| \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & & \cdot & & \\ & \cdot \arrow[ur, mapsto, "p"] & \circlearrowright & \cdot \arrow[ul, mapsto, "q"'] & \\ x \arrow[ur, mapsto, "f"] & & x' \arrow[ul, mapsto, "g"] \arrow[ur, mapsto, "f'"'] & & x'' \arrow[ul, mapsto, "g'"'] \end{tikzcd}$$

となり，$\mathfrak{F}((c,x),(c',x')) \odot \mathfrak{F}((c',x'),(c'',x'')) \subseteq \mathfrak{F}((c,x),(c'',x''))$ が従い，$\mathfrak{F}$ は crible enriched category である．定義より，symmetric である．$(c,x),(c,x') \in \mathfrak{F}_0$ が同型であることは，$\mathtt{Id}_c \subseteq \mathfrak{F}((c,x),(c,x'))$，つまり $x = x'$ であることと同値である．したがって，$\mathfrak{F}$ は skeletal である．

さて，Cauchy completeness についてまだ導入していなかった．

定義 3.3. $\mathcal{B}$-enriched category $\mathfrak{F}$ が **Cauchy complete** であるとは，right adjoint を持つ任意の profunctor $P\colon \mathfrak{G} \nrightarrow \mathfrak{F}$ がある functor $K\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{F}$ によって represent されることをいう．

命題 3.4. $\mathcal{B}$-enriched category $\mathfrak{F}$ が Cauchy complete であるためには，任意の 0-cell $c \in \mathcal{B}$ と right adjoint を持つ任意の profunctor $P\colon \mathfrak{D}_c \nrightarrow \mathfrak{F}$ がある functor $x\colon \mathfrak{D}_c \to \mathfrak{F}$（これは $\mathfrak{F}$ の対象のデータと等価）によって represent されることが必要十分である．

証明 [BCSW83, Proposition 16] を参照．具体的には，monoidal category enriched の場合 [Hir22, Theorem 3.4] と同様に示せる．

skeletal な crible enriched category の場合は，profunctor の adjunction は次のように具体的に表せる．（関係手を知らなければこれを定義と思って読んで頂きたい．）

補題 3.5. $\mathcal{B}$-enriched category の間の profunctor $P\colon \mathfrak{D}_c \nrightarrow \mathfrak{F}$ と $Q\colon \mathfrak{F} \nrightarrow \mathfrak{D}_c$ に対し，その間の adjunction $P\colon \mathfrak{D}_c \rightleftarrows \mathfrak{F}\colon Q$ は存在すれば一意であり，そのような adjunction が存在するための必要十分条件は，以下の条件を充たすことである．

- ある対象 $x_0 \in \mathfrak{F}$ とある span

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & c \arrow[dl, "\mathtt{id}_c"'] \arrow[dr, "f_0"] & \\ c & & {|x_0|} \end{tikzcd} \in P(x_0), \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & c \arrow[dl, "f_0"'] \arrow[dr, "\mathtt{id}_c"] & \\ {|x_0|} & & c \end{tikzcd} \in Q(x_0)$$

が存在する．
- 任意の対象 $x, x' \in \mathfrak{F}$ に対し，

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & d \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "t"] & \\ {|x'|} & & c \end{tikzcd} \in Q(x'), \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & e \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "l"] & \\ c & & {|x|} \end{tikzcd} \in P(x)$$

を任意にとればその（この向きの）合成は $\mathfrak{F}(x', x)$ に属する．

証明　profunctor $P\colon \mathfrak{O}_c \nrightarrow \mathfrak{F}$ の right adjoint $Q\colon \mathfrak{F} \nrightarrow \mathfrak{O}_c$ のデータを書き下せば，各対象 $x \in \mathfrak{F}$ に対する $P(x)\colon c \nrightarrow |x|$ と $Q(x)\colon |x| \nrightarrow c$ の割り当てであって自然性を充たすものを得る．adjunction の unit と counit は 2-cell のデータとして与えられるため存在すれば一意である．unit は,

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{O}_c \arrow[rr, equal, bend left, "\mathtt{Id}_{\mathfrak{O}_c}"] \arrow[dr, "P"'] \arrow[rr, phantom, "\rotatebox{90}{$\subseteq$}"] & & \mathfrak{O}_c \\ & \mathfrak{F} \arrow[ur, "Q"'] & \end{tikzcd} \quad \text{in the bicategory of } \mathcal{B}\text{-profunctors}$$

であり，profunctor の合成と自然変換を思い出せば，ある対象 $x_0 \in \mathfrak{F}$ とある span

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & d_0 \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f_0"] & \\ c & & {|x_0|} \end{tikzcd} \in P(x_0), \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & e_0 \arrow[dl, "g_0"'] \arrow[dr, "g"] & \\ {|x_0|} & & c \end{tikzcd} \in Q(x_0)$$

が存在し，その（この向きの）合成が共通の section を持つ二つの射からなることがわかる．この共通の section を前に合成したものもそれぞれ $P(x_0)$ と $Q(x_0)$ に属することに注意すれば，所期の条件が得られる．counit の存在は，各 $x, x' \in \mathfrak{F}$ に対し，

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dr, "P(x)"] & \\ {|x'|} \arrow[ur, "Q(x')"] \arrow[rr, equal, bend right, "\mathfrak{F}(x',x)"'] \arrow[rr, phantom, "\rotatebox{90}{$\subseteq$}"] & & {|x|} \end{tikzcd} \quad \text{in} \quad \mathcal{C}\mathrm{rib}(\mathbf{C})$$

となることと同値である． ♣

> **補題 3.6.** 命題 3.2 の $\mathcal{C}\mathrm{rib}(\mathbf{C})$-enriched category $\mathfrak{F}$ は Cauchy complete である．

証明　$P\colon \mathfrak{O}_c \nrightarrow \mathfrak{F}$ を right adjoint Q を持つ任意の profunctor とする．補題 3.5 の一つ目の条件によって得られる対象 $x_0 \in \mathfrak{F}$ を取る．ここで前層 F の作用を用いて $x_1 \coloneqq x_0 \cdot f_0 \in F(c)$ と定める．このとき，$P = \mathfrak{F}(x_1, -)$ となることを示す．対象 $x \in \mathfrak{F}$ と $\begin{tikzcd}[column sep=small] & e \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "l"] & \\ c & & {|x|} \end{tikzcd} \in \mathfrak{F}(x_1, x)$ を任意にとると，$x \cdot l = x_1 \cdot k = x_0 \cdot f_0 \cdot k$ であるから，

$\begin{tikzcd}[column sep=small] & c \arrow[dl, "\mathtt{id}_c"'] \arrow[dr, "f_0"] & \\ c & & {|x_0|} \end{tikzcd} \in P(x_0)$ と $\begin{tikzcd}[column sep=small] & e \arrow[dl, "f_0 \cdot k"'] \arrow[dr, "l"] & \\ {|x_0|} & & {|x|} \end{tikzcd} \in \mathfrak{F}(x_0, x)$ を合わせて，$\begin{tikzcd}[column sep=small] & e \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "l"] & \\ c & & {|x|} \end{tikzcd} \in P(x)$ を得る．同様の議論により，$\mathfrak{F}(x, x_1) \subseteq Q(x)$ も得られる．

逆に，$\begin{tikzcd}[column sep=small] & e \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "l"] & \\ c & & {|x|} \end{tikzcd} \in P(x)$ を任意にとると，$\begin{tikzcd}[column sep=small] & c \arrow[dl, "f_0"'] \arrow[dr, "\mathtt{id}_c"] & \\ x_0 & & c \end{tikzcd} \in Q(x)$ と 2 つ目の条件により，下左図の span は $\mathfrak{F}(x_0, x)$ に属する．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & & e \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "\mathtt{id}_e"] & & & \\ & & c \arrow[dl, "f_0"'] \arrow[dr, "\mathtt{id}_c"] & & e \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "l"] & & \\ & {|x_0|} & & c & & {|x|} & \end{tikzcd} \qquad \Bigg| \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & & & \cdot \arrow[dr, equal] & & \\ & & x_1 \arrow[ur, mapsto, "k"] & & \cdot & \\ & x_0 \arrow[ur, mapsto, "f_0"] & & & & x \arrow[ul, mapsto, "l"'] \end{tikzcd}$$

これより，$x_1 \cdot k = x \cdot l$ となり，結果的に $\begin{tikzcd}[column sep=small] & e \arrow[dl, "k"'] \arrow[dr, "l"] & \\ c & & {|x|} \end{tikzcd} \in \mathfrak{F}(x_1, x)$ が得られる． ♣

> **命題 3.7.** $\mathcal{C}\mathrm{rib}(\mathbf{C})$-enriched category $\mathfrak{F}$ が Cauchy complete，symmetric，かつ skeletal ならば，ある前層 $F\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ が存在して $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_F$ となる．

証明　$\mathfrak{F}$ に対して，前層 $F\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を次のように定めたい．

- 対象 $c \in \mathbf{C}$ に対し，$F(c) \coloneqq \{\, x \in \mathfrak{F}_0 \mid |x| = c \,\}$ とする．
- 射 $f\colon d \to c$ と $x \in F(c)$, $y \in F(d)$ に対し，$\begin{smallmatrix} & d & \\ {}^{\mathtt{id}_d}\swarrow & & \searrow^{f} \\ d & & c \end{smallmatrix} \in \mathfrak{F}(y,x)$ が成り立つとき，そしてそのときのみ，$F(f)\colon F(c) \to F(d)$ は x を y に移す．

初めに，$F(f)$ が写像として well-defined であることを示す．値の一意性は $\mathfrak{F}$ が skeletal であることから従う．実際，$y, y' \in F(c)$ が上を充たすとすると，symmetry により $\begin{smallmatrix} & d & \\ {}^{f}\swarrow & & \searrow^{\mathtt{id}_d} \\ c & & d \end{smallmatrix} \in \mathfrak{F}(x,y')$ も成り立つから，$(\mathtt{id}_d, \mathtt{id}_d) \in \mathfrak{F}(y,x) \odot \mathfrak{F}(x,y') \subseteq \mathfrak{F}(y,y')$ となり，$\mathtt{Id}_d \subseteq \mathfrak{F}(y,y')$ を得る．同様に，$\mathtt{Id}_d \subseteq \mathfrak{F}(y',y)$ も得られて，skeletal であることから $y = y'$ が従う．

全域性は Cauchy-completeness から従う．実際，$x \in F(c)$ と $f\colon d \to c$ に対し，$P\colon \mathfrak{D}_d \nrightarrow \mathfrak{F}$ を

$$P(z) \coloneqq \langle(\mathtt{id}_c, f)\rangle \odot \mathfrak{F}(x,z) = \left\{ \begin{tikzcd}[sep=small] & p \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ d \arrow[dr, "f"'] & \lrcorner & e \arrow[dl, "g"] \arrow[dr, "h"] & \\ & c & & {|z|} \end{tikzcd} \;\middle|\; \begin{smallmatrix} & e & \\ {}^{g}\swarrow & & \searrow^{h} \\ c & & |z| \end{smallmatrix} \in \mathfrak{F}(x,z) \right\} : d \nrightarrow |z|$$

と定め，$Q\colon \mathfrak{F} \nrightarrow \mathfrak{D}_d$ を $Q(z) \coloneqq \mathfrak{F}(z,x) \odot \langle(f, \mathtt{id}_c)\rangle = P(z)^\circ$ で定めると，Q は P の right adjoint となる．このことは，補題 3.5 にあてはめて確認できるし，あるいは，$\mathfrak{F}(x,-) \dashv \mathfrak{F}(-,x)$ と $\langle(\mathtt{id}_c, f)\rangle \dashv \langle(f, \mathtt{id}_c)\rangle$ を合成すれば達成できる．Cauchy completeness から，P はある functor $y\colon \mathfrak{D}_d \to \mathfrak{F}$ によって represent されて，$P = \mathfrak{F}(y,-)$ となる．特に，$P(x)$ を考えれば $(\mathtt{id}_d, f) \in \mathfrak{F}(x,y)$，つまり，$F(f)(x) = y$ となる．

F が前層である，すなわち，F が合成と単位射を保つことは，well-definedness を踏まえれば $\mathfrak{F}$ の合成と単位射から直ちに従う．

最後に，$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_F$ を示そう．対象の集合が index をこめて一致することは明らかであるので，示すべきは，hom-crible の一致である．$x \in F(c)$, $y \in F(d)$ に対し，$\mathfrak{F}_F$ の hom-crible $\mathfrak{F}_F\left((c,x),(d,y)\right)$ が span $\begin{smallmatrix} & e & \\ {}^{f}\swarrow & & \searrow^{g} \\ c & & d \end{smallmatrix}$ を含むのは，ある $z \in F(e)$ に対し，$\begin{smallmatrix} & e & \\ {}^{\mathtt{id}_e}\swarrow & & \searrow^{f} \\ e & & c \end{smallmatrix} \in \mathfrak{F}(z,x)$ と $\begin{smallmatrix} & e & \\ {}^{\mathtt{id}_e}\swarrow & & \searrow^{g} \\ e & & d \end{smallmatrix} \in \mathfrak{F}(z,y)$ が成り立つときである．これが成り立てば $\mathfrak{F}$ の symmetry と合成によって，$\begin{smallmatrix} & e & \\ {}^{f}\swarrow & & \searrow^{g} \\ c & & d \end{smallmatrix} \in \mathfrak{F}(x,y)$ が得られる．逆に，$\begin{smallmatrix} & e & \\ {}^{f}\swarrow & & \searrow^{g} \\ c & & d \end{smallmatrix} \in \mathfrak{F}(x,y)$ が成り立つとき，$z \coloneqq x \cdot f$ とすれば，$\begin{smallmatrix} & e & \\ {}^{\mathtt{id}_e}\swarrow & & \searrow^{f} \\ e & & c \end{smallmatrix} \in \mathfrak{F}(z,x)$ なので合成を用いれば $\begin{smallmatrix} & e & \\ {}^{\mathtt{id}_e}\swarrow & & \searrow^{g} \\ e & & d \end{smallmatrix} \in \mathfrak{F}(z,y)$ が得られる．したがって，$\begin{smallmatrix} & e & \\ {}^{f}\swarrow & & \searrow^{g} \\ c & & d \end{smallmatrix} \in \mathfrak{F}_F\left((c,x),(d,y)\right)$ となる． 🌲

逆に，前層 $F\colon \mathbf{C}^{\mathsf{op}} \to \mathbf{Set}$ から enriched category $\mathfrak{F}$ を構成してそこから命題 3.7 のように前層を復元すると元の前層と同型になることがわかる．したがって，定理 3.1 が示された．

4 Limits in bicategory enriched categories

圏を作ったならその中で普遍性を持つ対象を考えたくなるのが人情である．この節では weighted colimit を定義する．limit も同様に定義されるし，何より symmetric な category ではどちらかを考えれば十分なのでこの記事では limit の話は割愛する．

まず，closed bicategory の定義を思い出す．

定義 4.1 (closed bicategory)**.** bicategory $\mathcal{B}$ が **closed** であるとは，任意の 0-cells $a, b, c \in \mathcal{B}$ に対して，二変数関手

$$\circ_{a,b,c} \colon \mathcal{B}(a,b) \times \mathcal{B}(b,c) \to \mathcal{B}(a,c)$$

が両方の変数について右随伴を持つことをいう．

これは言い換えれば，任意の 1-cells $f \colon a \to c, g \colon a \to b, h \colon b \to c$ とと 2-cell $\alpha \colon g \odot h \to f$ に対して，

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & b \arrow[dr, bend left, "h"] & \\ a \arrow[ur, bend left, "g"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \Downarrow \alpha & c \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & b \arrow[dr, bend left=60, "h"] \arrow[dr, bend right, "f/g"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \overline{\alpha}"] & \\ a \arrow[ur, bend left, "g"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \Downarrow \varepsilon'_{f,g} & c \end{tikzcd}$$

となる $\overline{\alpha} \colon h \to f/g$ が一意に存在し（right extension），双対的に任意の 2-cell $\beta \colon g \odot h \to f$ に対して，

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & b \arrow[dr, bend left, "h"] & \\ a \arrow[ur, bend left, "g"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \Downarrow \beta & c \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & b \arrow[dr, bend left, "h"] & \\ a \arrow[ur, bend left=60, "g"] \arrow[ur, bend right, "h\backslash f"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \overline{\beta}"] \arrow[rr, bend right, "f"'] & \Downarrow \varepsilon_{f,h} & c \end{tikzcd}$$

となる $\overline{\beta} \colon g \to h\backslash f$ が一意に存在する（right lifting）（そういう $\varepsilon, \varepsilon'$ が存在する）ということである．

命題 4.2. quantaloid は closed bicategory である．

証明 各 hom-preordered set は complete sup-semilattice であり，合成は sup を保つので，adjoint functor theorem より両方の変数について右随伴を持つ． ♣

極限の定義には，enriching bicategory が closed かつ **locally complete** であることを課しておくほうが都合がよい．[4] 手始めに，この仮定のもとでは $\mathcal{B}$-enriched categories と $\mathcal{B}$-enriched profunctors のなす bicategory $\mathcal{B}$-$\mathcal{P}$rof が closed であることを示す．

補題 4.3. $\mathcal{B}$ を bicategory とする．$\mathcal{B}$-$\mathcal{P}$rof は closed bicategory である．

証明 $\mathcal{B}$-enriched profunctor $W \colon \mathfrak{D} \nrightarrow \mathfrak{C}$ と $\mathcal{B}$-enriched profunctor $P \colon \mathfrak{D} \nrightarrow \mathfrak{E}$ が与えられたとする．このとき，任意の $Q \colon \mathfrak{C} \nrightarrow \mathfrak{E}$ に対して，

$$\begin{aligned}
& \alpha \colon W \boxdot Q \Rightarrow P \\
\rightsquigarrow \quad & \alpha_{c,e} \colon \left(\int^{c \in \mathfrak{C}} W(d,c) \odot Q(c,e) \right) \Rightarrow P(d,e) \colon |d|_{\mathfrak{D}} \nrightarrow |e|_{\mathfrak{E}} \quad (d \in \mathfrak{D}, e \in \mathfrak{E}) \\
\rightsquigarrow \quad & \alpha_{c,d,e} \colon W(d,c) \odot Q(c,e) \Rightarrow P(d,e) \colon |d|_{\mathfrak{D}} \nrightarrow |e|_{\mathfrak{E}} \quad (c \in \mathfrak{C}, d \in \mathfrak{D}, e \in \mathfrak{E}) \\
\rightsquigarrow \quad & \overline{\alpha}_{c,d,e} \colon Q(c,e) \Rightarrow P(d,e)/W(d,c) \colon |c|_{\mathfrak{C}} \nrightarrow |e|_{\mathfrak{E}} \quad (c \in \mathfrak{C}, d \in \mathfrak{D}, e \in \mathfrak{E}) \\
\rightsquigarrow \quad & \overline{\alpha}_{c,e} \colon Q(c,e) \Rightarrow \left(\int_{d \in \mathfrak{D}} P(d,e)/W(d,c) \right) \colon |c|_{\mathfrak{C}} \nrightarrow |e|_{\mathfrak{E}} \quad (c \in \mathfrak{C}, e \in \mathfrak{E})
\end{aligned}$$

4） 1-圏の極限において関手圏がなくても cone だけから極限を定義できるのと同様に，limit の定義自体はこの仮定なしでも不可能ではないかもしれない．ただ，そのような設定の下で limit を定義したい状況も考えにくいし，適切に良い bicategory に埋め込み base change を考えれば locally complete な bicategory の場合に帰着できる．

という対応がある．ただし，登場する $\alpha, \overline{\alpha}$ はすべて object 変数について natural である．よって，W に沿った P の right extension が

$$(P/W)(c,e) = \int_{d \in \mathfrak{D}} P(d,e)/W(d,c) \,:\, |c| \to\!\!\!\!\!\mapsto |e| \quad (c \in \mathfrak{C}, e \in \mathfrak{E})$$

によって実現される．right lifting についても双対的に示される．

定義 4.4 (weighted colimit)**.** $\mathcal{B}$ を bicategory とする．$\mathcal{B}$-weight とは，$\mathcal{B}$-enriched profunctor $W \colon \mathfrak{D} \to\!\!\!\!\!\mapsto \mathfrak{C}$ のことである．$\mathcal{B}$-enriched functor $F \colon \mathfrak{D} \to \mathfrak{F}$ の weight $W \colon \mathfrak{D} \to\!\!\!\!\!\mapsto \mathfrak{C}$ による weighted colimit とは，enriched profunctor $F_* \colon \mathfrak{D} \to\!\!\!\!\!\mapsto \mathfrak{F}$ の W に沿った right extension $F_*/W \colon \mathfrak{C} \to\!\!\!\!\!\mapsto \mathfrak{F}$ の representation $L \colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{F}$ のことをいう．すなわち，

$$\mathfrak{F}(Lc, x) \cong (F_*/W)(c,x) = \int_{d \in \mathfrak{D}} \mathfrak{F}(F(d), x)/W(d,c) \quad (c \in \mathfrak{C}, x \in \mathfrak{F})$$

となるような L のことである．

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{D} \arrow[rr, "W", "\shortmid"{marking}] \arrow[dr, "F"'] & & \mathfrak{C} \arrow[dl, "L"] \\
& \mathfrak{F} &
\end{tikzcd}$$

例 4.5. $\mathcal{V}$ を Bénabou cosmos（complete かつ cocomplete な symmetric monoidal closed category）とする．$\mathcal{V}$-enriched category の weighted colimit が，$\mathcal{B} = \Sigma\mathcal{V}$-enriched category としての terminal category への profunctor を weight とする weighted colimit と一致することを確認しよう．
$\mathcal{V}$-enriched functor $F \colon \mathfrak{C} \to \mathfrak{F}$ と weight $W \colon \mathfrak{C} \to\!\!\!\!\!\mapsto 1$ が与えられたとする．このとき，right extension は monoidal category としての $[-,-]$ で与えられることに注意すると，

$$(F_*/W)(x) = \int_{c \in \mathfrak{C}} [W(c), \mathfrak{F}(F(c), x)] \cong [\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{V}](W, \mathfrak{F}(F-, x)).$$

この copresheaf の representation が weighted colimit であった．

問 4.6. crible enriched category $\mathfrak{F}$ として，presheaf $F \colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ に対応するものを考える．このとき，$\mathfrak{F}$-enriched functor $x \colon \mathfrak{D}_c \to \mathfrak{F}$ は $x \in F(c)$ によって定まる．weight として，$\left\langle c \xleftarrow{f} d \xrightarrow{\mathtt{id}_d} d \right\rangle$ によって定義される profunctor $f \colon \mathfrak{D}_c \to\!\!\!\!\!\mapsto \mathfrak{D}_d$ を考えると，

$$(x_*/f)(*, y) = \int_{* \in \mathfrak{D}_c} \mathfrak{F}(x(*), y)/\langle (f, \mathtt{id}_d) \rangle = \mathfrak{F}(x, y)/\langle (f, \mathtt{id}_d) \rangle$$

となる．これが $\mathfrak{F}(x \cdot f, y)$ と一致することを確認し，この形の weighted colimit が存在することを示せ．

実は，問 4.6 で定義される weight $W \colon \mathfrak{D}_c \to\!\!\!\!\!\mapsto \mathfrak{D}_d$ は absolute weight である．そのため，Cauchy complete な enriched category $\mathfrak{F}$ に対しては，W-weighted colimit が存在するというからくりである．[5)]

5） symmetric な enriched category に対しては面白い結果が知られていて，$\mathcal{B}$ が ‘良い’involutive quantaloid であるとき，absolute weight による weighted (co)limit が存在することと，symmetric absolute weight による weighted (co)limit が存在することが同値である [HS11]．ここで，symmetric absolute weight とは，right adjoint profunctor が元の profunctor の involution であるような absolute weight のことをいう．さらに言えば，1-category $\mathcal{B}\text{-}\mathcal{C}at$ において，Cauchy completion monad と symmetric completion comonad の間に distributive law が存在する．SMCC enriched category に対してはそこまで symmetric category を考えることは少ない気がするが，quantaloid enriched category は様々な興味深い例がありその性質が調べられているようだ．

5 Models of sketches and completeness of bicategory enriched categories

この節では，presheaf が sketch の model であることと，bicategory enriched category としてある weight の colimit を持つことが同値であることを示す．sketch とその model の具体例や詳細は [BW85] あるいは [く 22] を参照されたい．

定義 5.1 (sketch)**.** small category $\mathbf{C}$ 上の **(colimit) sketch** とは，$\mathbf{C}$ 上の cocone[a] の集合 L のことである．また，$\mathbf{C}$ 上の colimit sketch L の **model** とは，$\mathbf{C}$ 上の presheaf であって，任意の cocone $\gamma \in \mathrm{L}$ に対して，その F による像 $F(\gamma)$ が **Set** における limit cone であるようなもののことである．

[a] cone とは，小圏 $\mathbf{J}$，functor $K\colon \mathbf{J} \to \mathbf{C}$,，対象 $c \in \mathbf{C}$，natural transformation $\gamma\colon K \to \Delta c$ の組 $C = (\mathbf{J}, K, c, \gamma)$ のことを指す．ここで，$\Delta c\colon \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ は定数 functor である．

この記事では presheaf を考えているため，sketch の model の定義で cocone が limit cone に移ることを要求しており，普通の sketch の定義とは見た目が異なる．必要なら最初から $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ 上の sketch をとっておけばよい．

例 5.2. $(\mathbf{C}, \mathrm{E})$ を景 (site) とする．covering $\left(f_i\colon c_i \to c\right)_{i \in I} \in \mathrm{E}(c)$ に対して，c を頂点とする cocone が

$$\begin{tikzcd} & c_i \times_c c_j \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\ c_i \arrow[dr, "f_i"'] & & c_j \arrow[dl, "f_j"] \\ & c & \end{tikzcd}$$

たちによって与えられる．すべての covering についてこの cocone を取り，それらを集めて L_{E} とする．このとき，$\mathbf{C}$ 上の presheaf F が colimit sketch L_{E} の model であることと，F が E-sheaf であることは同値である．

それでは，colimit sketch の model を bicategory enriched category として捉えてみよう．

補題 5.3 (From diagrams to enriched categories)**.** $\mathbf{C}$ を小圏，$K\colon \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ を小圏 $\mathbf{J}$ からの functor とする．このとき，$\mathcal{C}\mathrm{rib}(\mathbf{C})$-enriched category $\mathfrak{K}$ が次のように定まる．

- 対象は $\mathbf{J}$ の対象とする．
- 対象 $j \in \mathbf{J}$ の index は $|j| = K(j)$ とする．
- 対象 $j, k \in \mathbf{J}$ の間の hom-crible は

$$\mathfrak{K}(j,k) = \left\langle \begin{tikzcd}[ampersand replacement=\&] \& {|j|} \arrow[dl, "\mathtt{id}"'] \arrow[dr, "K(t)"] \& \\ {|j|} \& \& {|k|} \end{tikzcd} \middle| \; t\colon j \to k \right\rangle$$

証明 composition と identity は，K がそれらを保つことから従う． ♣

補題 5.4 (From cocones to weights)**.** $\mathbf{C}$ を小圏，$K\colon \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ を小圏 $\mathbf{J}$ からの functor，$(\gamma_j)_j$ を $c \in \mathbf{C}$ 上の

cocone とする．このとき，$\mathcal{C}\mathrm{rib}(\mathbf{C})$-enriched profunctor $\Gamma\colon \mathfrak{K} \to\!\!\!\!\!\!\mapsto \mathfrak{O}_c$ が次のように定まる．

$$\Gamma(j,*) = \left\langle \begin{tikzcd} & {|j|} \arrow[dl, "\mathtt{id}"'] \arrow[dr, "\gamma_j"] & \\ {|j|} & & c \end{tikzcd} \right\rangle : |j| \to\!\!\!\!\!\mapsto c \quad (j \in \mathbf{J})$$

証明　profunctor に対する $\mathfrak{K}$ の action は，$(\gamma_j)_j$ が cocone であることから従う． ♣

補題 5.5 (From matching families to diarams)**.** $\mathbf{C}$ を小圏，$F\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を presheaf，$K\colon \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ を小圏 $\mathbf{J}$ からの functor とする．このとき，F の **matching family** $(x_j)_j$ とは，各 $j \in \mathbf{J}$ に対する $x_j \in F(j)$ の割り当てであって，任意の射 $t\colon j \to k$ に対して $x_j = x_k \cdot K(t)$ となるもののことである．言い換えれば，$\lim_{j\in\mathbf{J}} F(K(j))$ の元である．これは，$\mathcal{C}\mathrm{rib}(\mathbf{C})$-enriched functor $X\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{F}$ と一対一に対応する．

証明　functoriality は $\mathfrak{K}(j,k) \subseteq \mathfrak{F}(x_j, x_k)$ を意味し，これは matching family の条件と同値である． ♣

colimit sketch の model とある weight の colimit を持つ crible enriched category の間の対応のために sketch の stability という概念を導入する．

定義 5.6 (stable colimit sketch)**.** $\mathbf{C}$ を小圏，$K\colon \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ を小圏 $\mathbf{J}$ からの functor とする．$\mathbf{C}$ 上の colimit sketch L が **stable** であるとは，任意の L に含まれる cocone $\gamma\colon K \Rightarrow \Delta c$ と任意の射 $f\colon d \to c$ に対して，f に沿った γ の pullback も L に属することをいう．

例 5.7.　(i) 例 5.2 は stable colimit sketch を与える．これは site の stability に由来する．

(ii) D を diagram categories の集合とする．例えば，（ある濃度未満の）離散圏全体の class や，有限圏全体の class などが考えられる．$\mathbf{C}$ を pullback と D-colimit を持ち，そのような colimit はすべて pullback stable であるとする．(cf. [GL12]) このとき，L を D-colimit cone 全体の集合とすると，$\mathbf{C}$ 上の colimit sketch L は stable である．

定理 5.8. $\mathbf{C}$ を小圏，$F\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を presheaf とする．$\mathfrak{F}$ を定理 3.1 によって F に対応する $\mathcal{C}\mathrm{rib}(\mathbf{C})$-enriched category とする．また，L を $\mathbf{C}$ 上の colimit sketch とする．このとき，以下の 2 条件を考える．

(i) F は L の model である．

(ii) $\mathfrak{F}$ は各 cocone $(\gamma_j)_j \in$ L に対して補題 5.4 によってそれと対応する weight $\Gamma\colon \mathfrak{K} \to\!\!\!\!\!\!\mapsto \mathfrak{O}_c$ による weighted colimit を持つ．

(ii) が成り立てば (i) が成り立つ．さらに，colimit sketch L が stable であるならば，逆も成り立つ．

証明　$(\gamma_i)_i$ を $c \in \mathbf{C}$ 上の cocone とし，対応する weight を $\Gamma\colon \mathfrak{K} \to\!\!\!\!\!\!\mapsto \mathfrak{O}_c$ とする．F が $(\gamma_i)_i$ を limit cone に移すということは，

$$F(c) \to \lim_{j\in\mathbf{J}} F(K(j)); \quad x \mapsto (x \cdot \gamma_j)_j$$

が同型であることと同値であることを思い出そう．この codomain の元が matching family であった．

$X\colon \mathfrak{K} \to \mathfrak{F}$ に対して，X_*/Γ を計算してみよう．$X(j) = x_j$ と書くことにする．$z \in \mathfrak{F}$，$|z| = d$ とすると，

$$\begin{aligned}(X_*/\Gamma)(*, z) &= \bigwedge_{j \in \mathbf{J}} \mathfrak{F}(x_j, z)/\Gamma(j, *) \\ &= \bigwedge_{j \in \mathbf{J}} \left\{ \begin{tikzcd}[column sep=small] & e \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ c & & d \end{tikzcd} \;\middle|\; (\mathtt{id}, \gamma_j) \odot (f, g) \in \mathfrak{F}(x_j, z) \right\}.\end{aligned}$$

$x \in F(c)$ が $\mathfrak{F}(x, -) \subseteq (X_*/\Gamma)(*, -)$ を充たすとする．特に x を代入した場合から，任意の $j \in \mathbf{J}$ に対して $(\mathtt{id}, \gamma_j) \in \mathfrak{F}(x_j, x)$ となる．これは $x_j = x \cdot \gamma_j$ を意味する．

逆に，$x_j = x \cdot \gamma_j$ となるような $x \in F(c)$ に対して，$c \xleftarrow{f} e \xrightarrow{g} d \in \mathfrak{F}(x, z)$ をとれば次を得る．

$$\begin{tikzcd} & & \cdot \arrow[dl, "\pi_j"'] \arrow[dr, "\pi'_j"] \arrow[dd, phantom, "\lrcorner" rotate=-45, near start] & & \\ & K(j) \arrow[dr, "\gamma_j"'] & & e \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ K(j) \arrow[ur, equal] & & c & & d \end{tikzcd} \qquad \Bigg| \qquad \begin{tikzcd} & & \cdot & & \\ & x_j \arrow[ur, mapsto, "\pi_j"] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft"] & & \cdot \arrow[ul, mapsto, "\pi'_j"'] & \\ x_j \arrow[ur, equal] & & x \arrow[ul, mapsto, "\gamma_j"] \arrow[ur, mapsto, "f"'] & & z \arrow[ul, mapsto, "g"'] \end{tikzcd}$$

$(\mathtt{id}, \gamma_j) \odot (f, g) \in \mathfrak{F}(x_j, z)$ となる．つまり，$\mathfrak{F}(x, z) \subseteq (X_*/\Gamma)(*, z)$ が言える．

以上を踏まえて主張を示す．初めに，もし X_*/Γ が Γ-weighted colimit を持つならば，colimit x によって $\mathfrak{F}(x, -) \subseteq (X_*/\Gamma)(*, -)$ が成り立つ．したがって，$x_j = x \cdot \gamma_j$ となるような $x \in F(c)$ が確かに存在する．また，$x_j = y \cdot \gamma_j$ となるような $y \in F(c)$ があったとすると，$\mathfrak{F}(y, -) \subseteq (X_*/\Gamma)(*, -) = \mathfrak{F}(x, -)$ が成り立つので，skeletality より $y = x$ となる．したがって，$x_j = x \cdot \gamma_j$ となるような $x \in F(c)$ は一意に存在する．すなわち，F が $(\gamma_i)_i$ を limit cone に移す．

L が stable であるとする．もし F が $(\gamma_i)_i$ を limit cone に移すならば，$X_*/\Gamma \cong \mathfrak{F}(x, -)$ となるような $x \in F(c)$ が存在することを示そう．$X = (x_j)_j$ を matching family とみてその amalgamation を $x \in F(c)$ とする．上の議論から，$\mathfrak{F}(x, z) \subseteq (X_*/\Gamma)(*, z)$ となることがわかっている．$c \xleftarrow{f} e \xrightarrow{g} d \in (X_*/\Gamma)(*, z)$ を任意にとると，上と同じ pullback をとれば，仮定から

$$x_j \cdot \pi_j = z \cdot g \cdot \pi'_j$$

となるが，$x_j = x \cdot \gamma_j$ であることから

$$z \cdot g \cdot \pi'_j = x \cdot \gamma_j \cdot \pi_j = x \cdot f \cdot \pi'_j$$

を得る．L の stability より $(\pi_j)_j$ は L に属する e を頂点とする cocone であるから，$x \cdot f = z \cdot g$ となる．これは，$c \xleftarrow{f} e \xrightarrow{g} d \in \mathfrak{F}(x, z)$ を意味する．結果的に，$X_*/\Gamma \cong \mathfrak{F}(x, -)$ を得る． 🌲

6 🛷おわりに

本稿では sketch の model を bicategory enriched category として捉えることを試みた．limit sketch の場合にも同様のことができると考えていたがどうやらうまくいきそうにない．また，presheaf に対応する enriched category に限定しても，weighted (co)limit がどのような概念を捉えうるかを特定しきれてはいない．

一方で，分かっていることもいくつかある．今回 presheaf を enriched category と見なしたが，presheaf の間の natural transformation は enriched functor と対応する．そして，stable sketch の間の model の射は，weighted colimit を保つ enriched functor と対応する．さらに，小圏の間の関手は crible のなす quantaloid の間に functor を誘導し，これによる base change を考えれば presheaf を discrete fibration と見た時の base change が捉えられる．

参考文献

[BC82] R. Betti and A. Carboni. Cauchy-completion and the associated sheaf. *Cahiers Topologie Géom. Différentielle*, 23(3):243–256, 1982.

[BCSW83] R. Betti, A. Carboni, R. Street, and R. Walters. Variation through enrichment. *J. Pure Appl. Algebra*, 29(2):109–127, 1983. doi:10.1016/0022-4049(83)90100-7.

[BW85] M. Barr and C. Wells. *Toposes, triples and theories*, volume 278 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1985. doi:10.1007/978-1-4899-0021-0.

[GL12] R. Garner and S. Lack. Lex colimits. *J. Pure Appl. Algebra*, 216(6):1372–1396, 2012. doi:10.1016/j.jpaa.2012.01.003.

[Hir22] K. Hirata. 圏の cauchy 完備化. 圏論 Advent Calendar 2022, 2022. URL `https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~khirata/cauchy_completion.pdf`.

[HS11] H. Heymans and I. Stubbe. Symmetry and Cauchy completion of quantaloid-enriched categories. *Theory Appl. Categ.*, 25:No. 11, 276–294, 2011.

[Joh02] P. T. Johnstone. *Sketches of an Elephant: a Topos Theory Compendium. Vol. 1*, volume 43 of *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2002.

[Stu14] I. Stubbe. An introduction to quantaloid-enriched categories. *Fuzzy Sets and Systems*, 256:95–116, 2014. doi:10.1016/j.fss.2013.08.009.

[Wal81] R. F. C. Walters. Sheaves and Cauchy-complete categories. *Cahiers Topologie Géom. Différentielle*, 22(3):283–286, 1981. Third Colloquium on Categories, Part IV (Amiens, 1980).

[Wal82] R. F. C. Walters. Sheaves on sites as Cauchy-complete categories. *J. Pure Appl. Algebra*, 24(1):95–102, 1982. doi:10.1016/0022-4049(82)90061-5.

[く22] くろの. Cat の対称モノイダル閉構造. 圏論 Advent Calendar 2022, 2022. URL `https://drive.google.com/file/d/1L_ouDGMDcLEks6QqTEEs6k0axrfK-JHQ/edit`.

A　さぼった図式

2 節に含まれる定義の中で条件の記述をさぼっているものがあるので，それを補う．

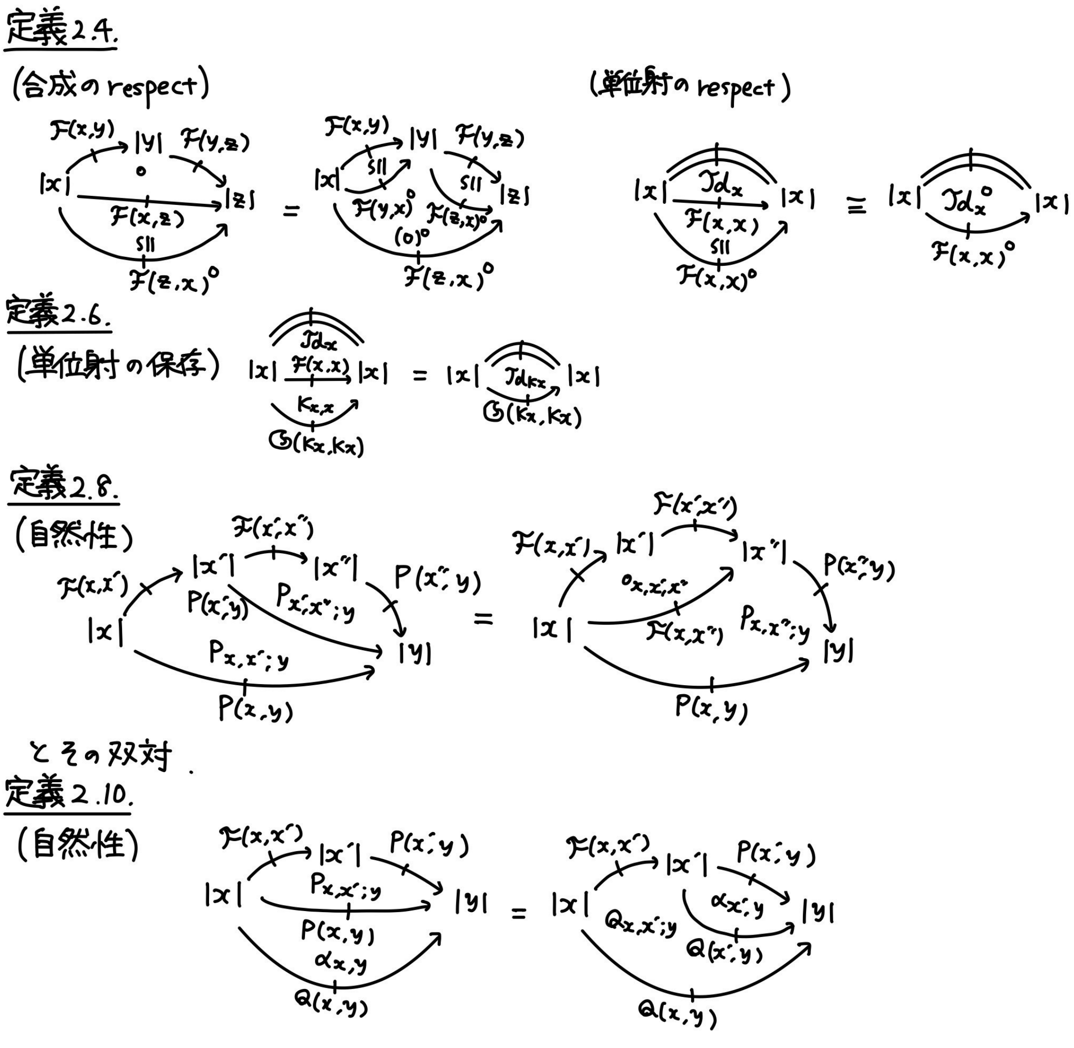
定義2.4.
(合成のrespect)
(単位射のrespect)
定義2.6.
(単位射の保存)
定義2.8.
(自然性)
とその双対.
定義2.10.
(自然性)

図1　さぼった図式