

COMPACITÉ PAR RECOUVREMENTS

Rappelons que toute fonction continue $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée.

Question

Pour quels espaces topologiques X les fonctions continues $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ sont-elles toutes bornées ?

Observation : Toute fonction continue $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ est *localement bornée*, càd pour tout $x \in X \exists$ un voisinage V_x de x tq f est bornée sur V_x .

Donc, nous avons un “recouvrement” de X par des ouverts

$$X = \bigcup_{x \in X} V_x$$

sur lesquels f est bornée. Si on pouvait trouver un « sous-recouvrement » fini tq

$$X = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_k},$$

alors on pourrait conclure que f est bornée sur X .

Ceci motive les définitions suivantes.

1 / 16

Définition

Soit $A \subset (X, \mathcal{T})$ un sous-espace d'un espace topologique. Un *recouvrement ouvert* de A est une collection

$$\mathcal{U} = \{U_i \in \mathcal{T} : i \in I\}$$

d'ouverts tel que $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

Un sous-recouvrement du recouvrement \mathcal{U} de A est une sous-collection $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ qui est encore un recouvrement de A .

Un recouvrement est dit *fini* s'il contient un nombre fini d'éléments.

Définition

Un espace topologique (X, \mathcal{T}) est dit *compact* si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini.

Attention

- Parfois, dans la définition de la compacité, on exige aussi que X est Hausdorff.
- La définition ne dit pas seulement qu'il existe un recouvrement fini. Il doit être possible de trouver un sous-recouvrement fini quel que soit le recouvrement donné.

2 / 16

Exemple

- Un sous-ensemble fini est toujours compact.
- Chaque ensemble X muni de la topologie cofinie est compact (ici, $A = X$) : Soit $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un recouvrement ouvert quelconque. Choisissons un $U_{i_0} \in \mathcal{U}$. Alors,

$$X \setminus U_{i_0} = \{x_1, \dots, x_k\}.$$

\mathcal{U} est un recouvrement $\implies \forall x_j \in X \setminus U_{i_0} \exists U_j \in \mathcal{U} \text{ tq } x_j \in U_j$. Alors,
$$X = U_{i_0} \cup U_1 \cup \dots \cup U_k.$$

- $(0, 1)$ n'est pas compact : Posons

$$\mathcal{U} = \{(1/n, 1) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

C'est un recouvrement parce que $\forall x \in (0, 1) \exists N > 1/x$, donc $x \in (1/N, 1)$. Si $\{(1/n_1, 1), \dots, (1/n_k, 1)\}$ est une sous-collection finie, soit $n = \max\{n_j : 1 \leq j \leq k\}$. Alors, $(1/n_j, 1) \subset (1/n, 1) \implies$
$$(1/n_1, 1) \cup \dots \cup (1/n_k, 1) = (1/n, 1) \neq (0, 1).$$

3 / 16

Lemme

Soit $A \subset X$ un sous-espace d'un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est compact par rapport à la topologie induite;
2. De tout recouvrement de A par des ouverts de X on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Démonstration.

1. \implies 2. Soit $\mathcal{U} = \{U_i \in \mathcal{T}_X \mid i \in I\}$ un recouvrement ouvert de A quelconque. Alors, $\{U_i \cap A \mid i \in I\}$ est un recouvrement ouvert (par rapport à la topologie induite). Donc, la compacité de A implique que

$$A = (U_1 \cap A) \cup \dots \cup (U_k \cap A) = (U_1 \cup \dots \cup U_k) \cap A.$$

Donc, $A \subset U_1 \cup \dots \cup U_k$.

2. \implies 1. Soit $\mathcal{V} := \{V_i \in \mathcal{T}_A \mid i \in I\}$ un recouvrement ouvert quelconque. Par définition de la top. induite, $\forall i \in I \exists U_i \in \mathcal{T}_X \text{ tq } V_i = U_i \cap A$. Donc,

$$A = \bigcup_{i \in I} V_i \implies A = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap A) = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \implies A \subset \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Alors, $A \subset U_1 \cup \dots \cup U_k \implies A = A \cap (U_1 \cup \dots \cup U_k) = V_1 \cup \dots \cup V_k$. □

4 / 16

Théorème (Heine–Borel)

$[0, 1]$ est compact.

Démonstration.

Soit \mathcal{U} un recouvrement de $[0, 1]$ par des ouverts de \mathbb{R} . Désignons

$$\tau := \sup \{ t \in [0, 1] \mid \exists \text{ un sous-recouvrement fini qui recouvre } [0, t] \}.$$

Évidemment, $\tau > 0$.

On veut démontrer que $\tau = 1$. Supposons que $\tau < 1$. Puisque \mathcal{U} est un recouvrement de $[0, 1]$, $\exists U_0 \in \mathcal{U}$ tq $\tau \in U_0$. Puisque U_0 est ouvert, $\exists \delta > 0$ tq $(\tau - \delta, \tau + \delta) \subset U_0$. Par définition de τ , $\exists t_0 \in (\tau - \delta, \tau]$ tq l'intervalle $[0, t_0]$ admet un sous-recouvrement fini : $\{U_1, \dots, U_k \mid U_j \in \mathcal{U}\}$. Alors,

$$\{U_0, U_1, \dots, U_k\}$$

est un sous-recouvrement fini de $[0, \tau + \delta]$, ce qui est impossible. Ainsi, $\tau = 1$.

Enfin, le même argument montre en fait que $[0, 1]$ admet un sous-recouvrement fini. □

5 / 16

Théorème

Soit $f: X \rightarrow Y$ continue. Si X est compact, alors $f(X) \subset Y$ est compact (par rapport à la topologie induite de Y).

Démonstration.

Soit $\{U_i \in \mathcal{T}_Y \mid i \in I\}$ un recouvrement de $f(X)$, càd

$$f(X) \subset \bigcup_{i \in I} U_i \quad \implies \quad X \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i).$$

Puisque f est continue, $\{f^{-1}(U_i) \mid i \in I\}$ est un recouvrement ouvert de X . Par la compacité de X ,

$$\begin{aligned} X &= f^{-1}(U_1) \cup \dots \cup f^{-1}(U_k) = f^{-1}(U_1 \cup \dots \cup U_k) \\ &\implies f(X) \subset U_1 \cup \dots \cup U_k. \end{aligned}$$

Ainsi, $f(X)$ est compact. □

En tant qu'illustration, considérons \mathbb{R}/\mathbb{Z} muni de la topologie quotient. Soit $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la projection canonique. Donc, π est continue et

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \pi(\mathbb{R}) = \pi([0, 1]).$$

Puisque $[0, 1]$ est compact, alors \mathbb{R}/\mathbb{Z} est compact aussi.

6 / 16

Corollaire

Compacité est une propriété topologique.

Corollaire

Tout intervalle fermé et borné $[a, b]$ est compact.

Corollaire

Chaque fonction continue $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ sur un espace X compact est bornée.

Démonstration.

Considérons le recouvrement ouvert de \mathbb{R} :

$$\mathcal{U} := \{U_n := (-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Puisque $f(X) \subset \mathbb{R}$ est compact, il existe un sous-recouvrement fini, disons $\{U_{n_1}, \dots, U_{n_k}\}$. Posons $n = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Alors,

$$f(X) \subset U_{n_1} \cup \dots \cup U_{n_k} = (-n, n).$$

Ainsi, f est bornée. □

7 / 16

Proposition

Un fermé d'un espace compact est lui-même compact.

Démonstration.

Soit F un fermé dans un espace compact X . Soit \mathcal{U} un recouvrement ouvert de F quelconque. Alors, $\mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}$ est un recouvrement ouvert de X .

Puisque X est compact, il existe un sous-recouvrement fini :

$$U_1, U_2, \dots, U_k.$$

Si $U_i \in \mathcal{U}$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on a trouvé un sous-recouvrement fini de X (et, donc, de F). Si l'un de ces ensembles, disons U_k , est $X \setminus F$, on considère

$$U_1, U_2, \dots, U_{k-1}. \quad (*)$$

Puisque $\bigcup_{i=1}^k U_i = X$, on a que $\bigcup_{i=1}^{k-1} U_i$ contient tous les points de $X \setminus U_k = X \setminus (X \setminus F) = F$. Ainsi, $(*)$ est un sous-recouvrement de F fini. □

8 / 16

L'inverse n'est généralement pas vrai, càd un compact n'est pas nécessairement fermé (Considérez (X, \mathcal{T}^{cofin})). Cependant, c'est vrai si X est Hausdorff.

Proposition

Si X est un espace Hausdorff et $A \subset X$ est un sous-espace compact, alors A est fermé.

Démonstration.

Choisissons $x \in X \setminus A$. $\forall a \in A \exists U_a \in \mathcal{T}_X$ et $\exists V_a \in \mathcal{T}_X$ tq $a \in U_a, x \in V_a$ et $U_a \cap V_a = \emptyset$. Évidemment, $\mathcal{U} := \{U_a \mid a \in A\}$ est un recouvrement ouvert de A . Alors, il existe un sous-recouvrement fini :

$$A \subset U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_k}.$$

Soient V_{a_1}, \dots, V_{a_k} les voisinages de x correspondants et $V_x := V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_k}$.

L'ouvert V_x est un voisinage de x qui est disjoint de $U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_k}$ et donc de A . Ainsi, $V_x \subset X \setminus A$ et alors $X \setminus A$ est ouvert. \square

9 / 16

Théorème (Théorème des valeurs extrêmes)

Une fonction continue $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ sur un espace X compact est bornée et atteint son maximum et son minimum.

Démonstration.

On a déjà montré que f est bornée. Puisque $f(X) \subset \mathbb{R}$ est compact dans un espace Hausdorff, $f(X)$ est fermé.

Si $A \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble fermé et borné, alors $\sup A \in A$ et $\inf A \in A$ (les point limites de A sont contenus dans A). Ainsi, f atteint son maximum et son minimum. \square

FORMULATION ÉQUIVALENTE EN TERMES DE FERMÉS

Proposition

Un espace topologique X est compact ssi pour toute collection $\mathcal{F} = \{F_i \text{ fermé de } X; i \in I\}$ de fermés de X tq $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, il existe un sous-ensemble $\{F_{i_1}, \dots, F_{i_k}\}$ fini tq $\bigcap_{j=1}^k F_{i_j} = \emptyset$.

Démonstration.

Supposons que X est compact et \mathcal{F} est une collection de fermés comme ci-dessus. Alors, $\mathcal{U} := \{U_i := X \setminus F_i \mid i \in I\}$ est une collection des ouverts. De plus,

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i) = X \setminus \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right) = X \setminus \emptyset = X.$$

Donc, \mathcal{U} est un recouvrement ouvert $\implies \exists$ un sous-recouvrement fini : $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_k}\}$. Mais cela implique que

$$\emptyset = X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k U_{i_j} \right) = X \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k (X \setminus F_{i_j}) \right) = \bigcap_{j=1}^k F_{i_j}.$$

La direction inverse : Exercice. □

11 / 16

Corollaire

Soit X un espace compact et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de fermés tq $F_n \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots \implies \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset.$$

Démonstration.

Supposons que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$. Comme X est compact, il existe F_{n_1}, \dots, F_{n_k} tq $\bigcap_{i=1}^k F_{n_i} = \emptyset$. Quitte à renommer les fermés, on peut supposer que $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$. Alors, $\bigcap_{i=1}^k F_{n_i} = F_{n_k} \neq \emptyset$. Contradiction. □

Merge this with the preceding proposition ?

LA COMPACTITÉ DE PRODUITES

Théorème

Soit X, Y deux espaces topologiques. Alors le produit $X \times Y$ est compact ssi X et Y sont tous les deux compacts.

Démonstration.

Supposons que $X \times Y$ est compact. Puisque p_1 est continue, $X = p_1(X \times Y)$ est compact en tant que l'image d'un espace compact.

Supposons que X et Y sont compacts. Soit \mathcal{W} un recouvrement ouvert de $X \times Y$. Soit $x \in X$ fixé. Puisque \mathcal{W} est un recouvrement de $X \times Y$, $\forall y \in Y$
 $\exists W(y) \in \mathcal{W}$ tq $(x, y) \in W(y)$. Par définition de la topologie produit,
 $\exists U(y) \subset X$ et $\exists V(y) \subset Y$ tq

$$(x, y) \in U(y) \times V(y) \subset W(y).$$

La collection $\{V(y) : y \in Y\}$ est un recouvrement ouvert de Y . La compacité de Y implique qu'il existe un sous-recouvrement fini, disons $V(y_1), \dots, V(y_r)$. Posons

$$U(x) = U(y_1) \cap \dots \cap U(y_r).$$

13 / 16

Démonstration (suit).

Alors pour tout $i = 1, \dots, r$,

$$U(x) \times V(y_i) \subset U(y_i) \times V(y_i) \subset W(y_i)$$

Donc

$$U(x) \times Y \subset U(x) \times \bigcup_{i=1}^r V(y_i) \subset \bigcup_{i=1}^r W(y_i)$$

Maintenant la collection $\{U(x) : x \in X\}$ est un recouvrement ouvert de X . Il existe donc un sous-recouvrement fini $\{U(x_1), \dots, U(x_s)\}$. Chaque sous-espace $U(x_i) \times Y$ est recouvert par un nombre fini d'ouvert du recouvrement \mathcal{W} . Donc $X \times Y$, étant la réunion (finie) des $U(x_i) \times Y$ pour $1 \leq i \leq s$, est aussi recouvert par un nombre fini d'éléments du recouvrement \mathcal{W} .

□

CRITÈRE AUTOMATIQUE D'HOMÉOMORPHISME

Nous avons déjà vu qu'en général

$f: X \rightarrow Y$ est continue et bijective $\not\Rightarrow f^{-1}$ est continue.

Cependant, si on a le résultat suivant :

Proposition

Soit $f: X \rightarrow Y$ une bijection continue. Si X est compact et Y est Hausdorff alors f^{-1} est continue. En particulier, f est un homéomorphisme et Y est compact.

Démonstration.

Soit F un fermé de X . Puisque F est fermé dans X qui est compact, alors F est compact. Comme f est continue, $f(F)$ est aussi compact. Puisque Y est Hausdorff, $f(F)$ est un fermé de Y . Ainsi, $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ est un fermé de Y , càd que f^{-1} est continue. \square

15 / 16

En tant qu'application, on a le résultat suivant.

Proposition

L'espace quotient \mathbb{R}/\mathbb{Z} est homéomorphe à l'ensemble $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ muni de la topologie induite par celle de \mathbb{R}^2 .

Démonstration.

On définit l'application

$$\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{T}, \quad [x] \mapsto e^{2i\pi x}.$$

φ est bien définie, car si $[x] = [y]$, alors $x - y \in \mathbb{Z}$ et, donc, $e^{2i\pi x} = e^{2i\pi y}$. Le même genre d'argument montre que φ est injective, et elle est surjective par surjectivité de l'exponentielle complexe.

Puisque S^1 est muni de la top. induite, $\varphi: \mathbb{R}/\sim \rightarrow S^1$ est continue ssi φ est continue comme l'application $\mathbb{R}/\sim \rightarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Par la caractérisation des applications continues sur un espace quotient, φ est continue ssi $\operatorname{Re} \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$ sont continues, ce qui est évident (vérifiez-le!). Ainsi, φ est bijective et continue.

Comme \mathbb{R}/\mathbb{Z} est compact, φ est alors un homéomorphisme. \square

16 / 16