# Exercices de Géométrie Différentielle 1

## Séance 2 - 05/10/2021

1. On considère l'application $f : \mathbb{RP}^1 \to \mathbb{RP}^1$ définie par
$$f([(x,y)]) := [(xy, x^2 - y^2)].$$
   (i) Vérifier que $f$ est bien définie.
   (ii) Montrer que $f$ est une application lisse.

2. Montrer que l'application antipodale
$$f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n : x \mapsto -x$$
   est un difféomorphisme.

3. On considère $U(n) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A\overline{A}^t = Id\}$ et $SU(n) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A\overline{A}^t = Id \text{ et } \det(A) = 1\}$. Montrer que :
   (a) $U(1)$ est homéomorphe à $S^1$.
   (b) $SU(2)$ est homéomorphe à $S^3$.
   (c) $S^3 \times S^1/\sim$ est une variété lisse, où $(x,y) \sim (-x,-y)$.
   Utiliser le point $(b)$ pour induire une structure de variété lisse sur $SU(2)$ et le point $(a)$ et l'application $U(1) \times SU(2) \to U(2) : (z, A) \to zA$ pour montrer que $U(2) \cong S^3 \times S^1/\sim$.

A. Soient $\mathbb{S}^2$ la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$ et $P = (0,0,1) \in \mathbb{S}^2$ le pôle nord. On note $(u,v)$ les coordonnées locales associées à la projection stéréographique suivant le pôle sud, et on considère l'application lisse $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y,z) := z.$$
   Calculer $\frac{\partial}{\partial u}\Big|_P(f)$ et $\frac{\partial}{\partial v}\Big|_P(f)$. Monter que le pôle sud est un maximal local de $f$.

B. On considère $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un polynôme homogène de degré $m > 0$, i.e pour tout $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ on à $f(\lambda x) = \lambda^m f(x)$. Montrer que :
   1. $\langle \nabla f(x), x \rangle = mf(x)$, où $\nabla f(x) = (\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x))$.
   2. Tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est une valeur régulière de $f$.