Quand les espaces quotients sont-ils Hausdorff ?

Un quotient d'un espace Hausdorff n'a pas besoin d'être Hausdorff.

Exemple

1. Considérons la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$:
$$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big(x \text{ et } y \in \mathbb{Q}\big) \text{ OU } \big(x \text{ et } y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\big).$$
Donc, rationnel $\sim$ rationnel, irrationnel $\sim$ irrationnel, mais rationnel $\not\sim$ rationnel. Alors, $\mathbb{R}/\sim = \{a, b\}$ muni de la topologie grossière (plus petite). Ainsi, $\mathbb{R}/\sim$ n'est pas Hausdorff.
2. Considérons la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$:
$$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \text{ et } y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad 0 \sim 0.$$
Ainsi, $\mathbb{R}/\sim = \{a, b\}$ en tant qu'ensemble, mais la topologie est différente
$$\mathcal{T} = \big\{\varnothing,\ \{a, b\},\ \{a\}\big\}.$$
C'est l'exemple non trivial le plus simple d'un espace non Hausdorff.

Théorème

Soit X un espace topologique muni d'une opération continue d'un groupe G. Supposons que

1. $\forall x \in X \quad \exists$ *un voisinage U de x tq* $\forall g \in G \setminus \{e\}$
$$gU \cap U = L_g(U) \cap U = \varnothing.$$
2. $O_x \neq O_{x'} \implies \exists$ *un voisinage U de x et un voisinage U' de x' tq* $\forall g \in G$ *on a* $\quad U \cap gU' = \varnothing$.

Alors, X/G est Hausdorff.

Notons que la propriété 1. implique que X est Hausdorff.

Démonstration.

Désignons $\pi : X \to X/G$ et posons $V = V_x := \pi(U) \subset X/G$, où U est un voisinage comme dans la propriété 1. Considérons

$$\pi^{-1}(V) = \left\{ y \in X \mid \exists z \in U \quad \text{tq} \quad y = g \cdot z \right\} = \bigsqcup_{g \in G} gU.$$

Tout sous-ensemble $gU = L_g(U)$ est ouvert puisque L_g est un homéomorphisme et donc une application ouverte. Alors, $\pi^{-1}(V)$ est ouvert $\iff$ V est ouvert par définition de la topologie quotient. Évidemment, si $U' \subset X$ est ouvert et $U' \subset U$, alors $V' := \pi(U')$ est ouvert dans X/G et

$$\pi^{-1}(V') = \bigsqcup_{g \in G} gU'.$$

Notons que $\pi : U \to V$ est bijective parce que

$$\pi(x) = \pi(x') \quad \Longrightarrow \quad x' = g \cdot x \in U \cap gU \quad \Longrightarrow \quad g = e \quad \Longrightarrow \quad x = x'.$$

Donc, $\pi|_U : U \to V$ est bijective, continue et ouverte $\Longrightarrow$ $\pi|_U$ est un homéo. □

Démonstration (suite).

Soit $[x] \neq [x'] \implies x \neq x'$. Pour x' on trouve les voisinages U' de x' et V' de $[x']$ tq $\pi : U' \to V'$ est un homéo et $\pi^{-1}(V') = \bigsqcup gU'$. Par la propriété 2., on peut supposer que

$$U \cap gU' = \varnothing \qquad \forall g \in G.$$

Nous avons

$$V \cap V' \neq \varnothing \quad \iff \quad \pi^{-1}(V) \cap \pi^{-1}(V') \neq \varnothing \quad \iff \quad \exists g \in G \text{ tq } U \cap gU' \neq \varnothing.$$

Ainsi, $V \cap V' = \varnothing$ et X/G est Hausdorff. □

Exemple

1. Considérons l'opération de $(\mathbb{Z}, +)$ sur $X = \mathbb{R}$ définie par $(n, x) \mapsto x + n$. Pour un $x \in \mathbb{R}$ quelconque, posons $U = \big(x - 1/4,\ x + 1/4\big)$. Évidemment, pour chaque $n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ on a que
$$U \cap nU = \big(x - 1/4,\ x + 1/4\big) \bigcap \big(x + n - 1/4,\ x + n + 1/4\big) = \varnothing.$$
Alors, la propriété 1. est satisfaite. De la même manière, on peut démontrer la propriété 2. Alors, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un espace Hausdorff.
Exercice : Montrer, que l'application $F\colon \mathbb{R} \to S^1$ definie par $F(t) = \big(\cos 2\pi t,\ \sin 2\pi t\big)$ induit un homéomorphisme $f\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$.

2. Considérons l'opération de $\mathbb{Z}^2$ sur $X = \mathbb{R}^2$ définie par $\big((n, m), (x, y)\big) \mapsto (x + n,\ y + m)$.
Exercice : Montrer, que l'espace quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est Hausdorff et que l'application $F\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ definie par
$$F(x, y) = \big(\cos 2\pi x,\ \sin 2\pi x,\ \cos 2\pi y,\ \sin 2\pi y\big)$$
induit un homéomorphisme $f\colon \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to S^1 \times S^1$.

Exemple (suite)

3. Considérons l'opération de $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ sur $X = S^n$ définie par
$$\varepsilon \cdot x = \big(\varepsilon x_0, \ldots, \varepsilon x_n\big).$$
Pour tout $x \in S^n$ il existe évidemment un j tq $x_j \neq 0$. Si $x_j > 0$, on peut poser
$$U_x := S^n \cap \{x_j > 0\},$$
qui est ouvert. De plus, $U_x \cap -U_x = \varnothing$. Si $x_j < 0$, on peut choisir $U_x := S^n \cap \{x_j < 0\}$. Ça démontre la propriété 1. La propriété 2. est à vous de démontrer comme exercice. Ainsi, $S^n/\mathbb{Z}_2$ est Hausdorff.

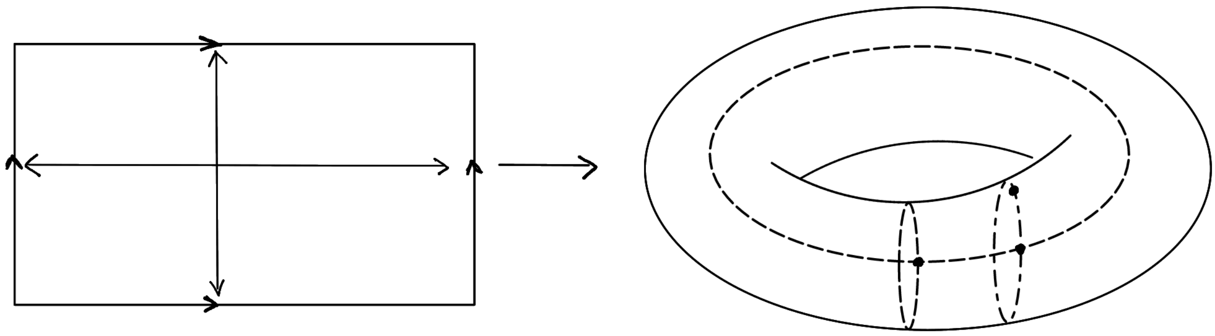
$S^n/\mathbb{Z}_2$ est clairement le plan projectif $\mathbb{RP}^2$, càd que le plan projectif est un espace Hausdorff.

Le tore (revisité)

Considérons l'opération de $\mathbb{Z}^2$ sur $X = \mathbb{R}^2$ comme dans l'exemple 2.

Exercice

Montrer que le carré $R := [0,1] \times [0,1]$ contient au moins un représentant de toute classe d'équivalence. En plus, chaque $(x, y) \in (0,1) \times (0,1)$ est l'unique représentant de sa classe d'équivalence.



Visuellement, il y a une bijection entre le tore et $S^1 \times S^1$. On a démontré déjà qu'en fait, c'est un homéomorphisme.

Espaces connexes

Intuitivement un espace est connexe s'il ne tombe pas en plusieurs morceaux.

Définition

Un espace topologique X est dit *connexe* si

$$X = U \cup V \quad \text{et} \quad U \cap V = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad U = \varnothing \quad \text{ou} \quad V = \varnothing$$

lorsque U et V sont ouverts.

Si X n'est pas connexe, il existe des ouverts $U \neq \varnothing$ et $V \neq \varnothing$ tq

$$X = U \cup V \quad \text{et} \quad U \cap V = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad U = X \setminus V \text{ est fermé.}$$

Bien sûr, $V = X \setminus U$ est fermé aussi. Donc, U et V sont ouverts et fermés simultanément.

Exemple (non-exemples)

- $(X, \mathcal{T}^{discr})$ n'est pas connexe (au moins si X contient au moins 2 points) : $X = \{x_0\} \cap \big(X \setminus \{x_0\}\big)$.
- $(0,1) \cup (1,2)$ n'est pas connexe.

Lemme

Soit $A \subset X$ un sous-espace d'un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *A est connexe par rapport a la topologie induite ;*
2. *Pour tous ouverts U_1 U_2 de X tq*
$$A \subset U_1 \cup U_2 \qquad \text{et} \qquad U_1 \cap U_2 \cap A = \varnothing, \tag{$*$}$$
on a soit $A \subset U_1$, soit $A \subset U_2$.

Démonstration.

1. $\Longrightarrow$ 2. Soient $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_X$ tq $(*)$. Désignons $V_j := U_j \cap A \in \mathcal{T}_A$. Alors,
$$A = V_1 \cup V_2 \quad \text{et} \quad V_1 \cap V_2 = \varnothing \qquad \Longrightarrow \qquad V_1 = \varnothing \quad \text{ou} \quad V_2 = \varnothing.$$
Donc, $A \subset U_2$ ou $A \subset U_1$.

2. $\Longrightarrow$ 1. Soient $V_1, V_2 \in \mathcal{T}_A$ tq
$$A = V_1 \cup V_2 \quad \text{et} \quad V_1 \cap V_2 = \varnothing. \tag{$**$}$$
Alors, il existe $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_X$ tq $V_j = U_j \cap A$. $(**) \Longrightarrow (*) \Longrightarrow$ $A \subset U_1$ ou $A \subset U_2 \Longrightarrow V_2 = \varnothing$ ou $V_1 = \varnothing$. □

Proposition

$[0,1]$ *est connexe.*

Démonstration.

Supposons que $[0,1]$ est non-connexe. Alors, $[0,1] = U \cup V$, où $U \neq \varnothing$ et $V \neq \varnothing$ sont ouverts <u>et</u> fermés. En outre, on peut supposer que $0 \in U$.

Posons
$$\tau := \sup\left\{t \in [0,1] \mid [0,t] \subset U\right\}.$$

Cas A : $\tau = 1$. Puisque 1 est un point limite de U et U est fermé, $1 \in U$. Puisque U est ouvert, $\exists \varepsilon > 0$ tq $(1-\varepsilon, 1] \subset U$. De plus, par définition de τ, $\exists t > 1-\varepsilon$ tq $[0,t] \subset U$. Alors, on a que
$$[0,1] = [0,t] \cup (1-\varepsilon, 1] \subset U \qquad \Longrightarrow \qquad V = \varnothing.$$
Contradiction.

Cas B : $\tau < 1$. On peut supposer que $\tau > 0$ (Pourquoi ?). La démonstration de cas A implique que $\tau \in U$. Puisque U est ouvert, $\exists \varepsilon > 0$ tq $(\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon) \subset U \Longrightarrow [0, \tau+\varepsilon] \subset U \Longrightarrow \tau \neq \sup$. Contradiction aussi. □

Remarque

La même démonstration montre que on fait chaque intervalle

$$[a,b], \quad (a,b], \quad [a,b) \quad \text{et} \quad (a,b) \tag{$*$}$$

est connexe. En fait, un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est connexe (par rapport à la topologie induite) ssi A est un intervalle, càd

$$a_0, a_1 \in A, \quad a_0 \leq a_1 \quad \Longrightarrow \quad [a_0,\ a_1] \subset A. \tag{$**$}$$

Exercice

Montrer que $(**)$ implique que A est l'un des éléments de la liste $(*)$, où on admet aussi des intervalles (semi-)infinis, par exemple $(-\infty, b]$.

Proposition

Soit $f\colon X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques. Si X est connexe, alors $f(X) \subset Y$ est connexe pour la topologie induite.

Démonstration.

Supposons que $f(X)$ soit non-connexe :

$$f(X) = U \cup V, \qquad U, V \in \mathcal{T}_{f(X)}, \quad U \cap V = \varnothing, \quad U \neq \varnothing \text{ et } V \neq \varnothing.$$

Par déf. de la top. induite, $\exists\ \tilde{U}, \tilde{W} \in \mathcal{T}_Y$ tq $U = f(X) \cap \tilde{U}$ et $V = f(X) \cap \tilde{V}$.
Puisque f est continue,

$$A := f^{-1}(\tilde{U}) = f^{-1}(U) \qquad \text{et} \quad B := f^{-1}(\tilde{V}) = f^{-1}(V)$$

sont ouverts dans X. De plus,

$$X = A \cup B \qquad A \cap B = \varnothing, \quad A \neq \varnothing \text{ et } B \neq \varnothing.$$

puisque

$$X = f^{-1}\big(f(X)\big) = f^{-1}\big(U \cup V\big) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = A \cup B$$

et $U, V \neq \varnothing \implies A, B \neq \varnothing$. Alors, X est non-connexe, une contradiction. $\square$

Remarque

Dans cette proposition seulement X est supposé être connexe. En particulier, Y peut être non-connexe.

Comme corollaire, on obtient

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)

Supposons que X est connexe et $f \in C^0(X)$. Si $y_0 := f(x_0) \leq y_1 := f(x_1)$, alors toutes les valeurs $y \in [y_0,\ y_1]$ sont atteintes par f, càd l'équation

$$f(x) = y$$

a une solution pour tout $y \in [y_0,\ y_1]$.

Démonstration.

Puisque $f(X) \subset \mathbb{R}$ est connexe et $y_0, y_1 \in f(X)$, l'intervalle $[y_0, y_1]$ est contenue dans $f(X)$. □

Ainsi, le théorème des valeurs intermédiaires pour fonctions $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ est un corollaire de la connexité de l'intervalle sauf qu'en général les sup et inf ne sont pas toujours atteintes.

Proposition

Être connexe est une propriété topologique, càd

$$\begin{array}{l} X \text{ est connexe et} \\ X \text{ et } Y \text{ sont homéomorphes} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad Y \text{ est connexe.}$$

Démonstration.

Supposons que $f\colon X \to Y$ est un homéomorphisme. Puisque X et connexe, $Y = f(X)$ est connexe aussi. □

Lemme

Un espace topologique X est non-connexe si et seulement s'il existe une fonction continue $f: X \to \{0,1\}$ et surjective ($\Leftrightarrow$ non-constante), où $\{0,1\}$ est muni de la topologie discrète.

Démonstration.

Supposons $\exists f$. Soit $U = f^{-1}(0)$ et $V = f^{-1}(1)$. Evidemment $X = U \cup V$. Puisque $\{0\}$ et $\{1\}$ sont des ouverts de $\{0,1\}$, U et V sont des ouverts de X. Puisque f est surjective ni U ni V n'est vide. Donc X est non-connexe.

Supposons que X est non-connexe. Alors

$$X = U \cup V, \qquad U, V \in \mathcal{T}_X, \quad U \cap V = \varnothing, \quad U \neq \varnothing \text{ et } V \neq \varnothing.$$

Définissons $f: X \to \{0,1\}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est une fonction continue puisque $f^{-1}(0) = U$ et $f^{-1}(1) = V$ sont des ouverts. En outre, f est surjective puisque ni U ni V n'est vide. $\square$

Proposition

Un produit $X \times Y$ de deux espaces topologiques est connexe si et seulement si X et Y sont connexes.

Démonstration.

Supposons que $X \times Y$ est connexe. Alors $X = p_1(X \times Y)$ et $Y = p_2(X \times Y)$ sont les images d'applications continues définies sur un espace connexe.

Supposons que X, Y sont connexes et que $F: X \times Y \to \{0,1\}$ est continue. Puisque $\iota_y: X \to X \times Y$, $\iota_y(x) = (x, y)$, est continue (pourquoi ?) $\forall\, y \in Y$, on a que

$$f_y: X \to \{0,1\}, \qquad f_y(x) := F(x, y)$$

est continue. Alors, f_y est constante parce que X est connexe. De la même manière,

$$f_x: Y \to \{0,1\}, \qquad f_x(y) = F(x, y)$$

est constante $\forall x \in X$. Alors, port tout $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ on a que

$$F(x, y) = f_x(y) = f_x(y') = F(x, y') = f_{y'}(x) = f_{y'}(x') = F(x', y'),$$

càd que F est constante. $\square$

Exemple

- $\mathbb{R}^n$ est connexe ;
- Tout rectangle est connexe.

Proposition

Soit X un espace topologique et $A \subset X$ une partie connexe de X. Alors $\bar{A}$ est aussi connexe.

Démonstration.

Soit $f : \bar{A} \to \{0,1\}$ une fonction continue. Alors,

$$f|_A : A \to \{0,1\} \quad \text{est continue} \quad \Longrightarrow \quad f|_A \quad \text{est constante} \equiv 1.$$

Puisque $\left(\{0,1\}, \mathcal{T}^{discr}\right)$ est Hausdorff et A est dense dans $\bar{A}$, il existe au plus une fonction continue $F : \bar{A} \to \{0,1\}$ tq $F|_A \equiv 1$. Cette fonction existe bien et est évidemment la fonction constante. Par l'unicité, $f : \bar{A} \to \{0,1\}$ est constante. Donc, $\bar{A}$ est connexe. □