# Le groupe fondamental

**Question :** Étant donné deux espaces topologiques, disons $X$ et $Y$, comment peut-on décider s'ils sont homéomorphes ou non ?

Il n'y a pas de méthode générale. Une possibilité est de procéder de la manière suivante.

*Une considération naïve.* On choisit un espace simple, par exemple le cercle $S^1$. Si les espaces $C^0(S^1, X)$ et $C^0(S^1, Y)$ sont différents, alors $X$ et $Y$ ne sont pas homéomorphes. Cela soulève la question suivante :

**Question :** Comment peut-on décider si les espaces $C^0(S^1, X)$ et $C^0(S^1, Y)$ sont différents ?

Parfois, on peut démontrer que les composants connexes (par arcs) de $C^0(S^1, X)$ et $C^0(S^1, Y)$ sont différents. Par exemple, si on peut démontrer que $C^0(S^1, X)$ est connexe par arcs et $C^0(S^1, Y)$ n'est pas connexe par arcs, on conclut que $X$ et $Y$ ne sont pas homéomorphes.

C'est cette approche qui se révèle effective et que nous décrivons ici plus en détail.



Soit $X$ un espace topologique quelconque. Nous rappelons qu'un arc joignant $x_0 \in X$ et $x_1 \in X$ est une application $\gamma \colon [0,1] \to X$ continue tq $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x_1$. On note $I := [0,1]$.

**Définition**

Deux arcs $\gamma_0, \gamma_1 \colon I \to X$ tq $\gamma_0(0) = x_0 = \gamma_1(0)$ et $\gamma_0(1) = x_1 = \gamma_1(1)$ sont dits *homotopes relativement à* $\{0,1\}$ s'il existe une application continue $h \colon I \times I \to X$ avec les propriétés suivantes :

1. $h(t,0) = \gamma_0(t)$ pour tout $t \in I$;
2. $h(t,1) = \gamma_1(t)$ pour tout $t \in I$;
3. $h(0,s) = x_0$ pour tout $s \in I$;
4. $h(1,s) = x_1$ pour tout $s \in I$.

L'application $h$ qui apparaît dans la définition ci-dessus s'appelle *une homotopie* entre $\gamma_0$ et $\gamma_1$.

Si $\gamma_0$ et $\gamma_1$ sont homotopes, on écrit $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ rel $\{0,1\}$ (ou, simplement $\gamma_0 \simeq \gamma_1$).

Si on definit $\gamma_s : I \to X$ par $\gamma_s(t) = h(t,s)$, on peut penser de la famille $\{\gamma_s \mid s \in I\}$ comme un arc (dans $C^0(I,X)$) joignant $\gamma_0$ et $\gamma_1$. Alors, informellement, $\gamma_0$ et $\gamma_1$ sont homotopes, si on peut déformer continûment $\gamma_0$ vers $\gamma_1$ (en préservant les extrémités).

**Proposition**

*Si $X$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ convexe, alors tous les arcs (joignants $x_0$ et $x_1$) sont homotopes.*

**Démonstration.**

Posons

$$h(t,s) := (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t).$$

Une vérification directe montre que c'est une homotopie entre $\gamma_0$ et $\gamma_1$. □



**Lemma**

$\simeq$ rel $\{0,1\}$ *est une relation d'équivalence sur l'ensemble de tous les arcs dans $X$ joignant $x_0$ et $x_1$.*

**Démonstration.**

La réflexivité est évidente.

Si $h$ est une homotopie entre $\gamma_0$ et $\gamma_1$, alors $\hat{h}(t,s) := h(t,1-s)$ est une homotopie entre $\gamma_1$ et $\gamma_0$. Donc, $\simeq$ est symétrique.

Soient $h$ une homotopie entre $\gamma_0$ et $\gamma_1$ et $\tilde{h}$ une homotopie entre $\gamma_1$ et $\gamma_2$, donc

$$\tilde{h}(t,0) = \gamma_1(t) \qquad \text{et} \qquad \tilde{h}(t,1) = \gamma_2(t)$$

(de plus, on a toujours que les extrémités sont préservées). On definit

$$H(t,s) := \begin{cases} h(t,2s) & \text{si } s \in [0,1/2], \\ \tilde{h}(t,2s-1) & \text{si } s \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Puisque $h(t,1) = \gamma_1(t) = \tilde{h}(t,0)$, l'application $H$ est continue. De plus, $H$ préserve les extrémités. Ainsi, $H$ est une homotopie entre $\gamma_0$ et $\gamma_2$ qui montre la transitivité. □

# Produit

Soit $\gamma$ un arc joignant $x_0$ et $x_1$ ; soit $\beta$ un arc joignant $x_1$ et $x_2$. On définit un arc $\gamma * \beta$ par

$$\gamma * \beta(t) := \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ \beta(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Notons que $\gamma * \beta$ est continu et joigne $x_0$ à $x_2$.

**Remarque**

« Le produit » $\gamma * \beta$ est bien défini seulement si $\gamma(1) = \beta(0)$ !

**Lemme**

*Si* $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ rel $\{0, 1\}$ *et* $\beta_0 \simeq \beta_1$ rel $\{0, 1\}$, *alors*

$$\gamma_0 * \beta_0 \simeq \gamma_1 * \beta_1 \text{ rel } \{0, 1\}.$$

La démonstration est à vous comme exercice.



Soit $X$ un espace topologique quelconque. On choisit $x_0 \in X$. Considérons

$$\Omega(X, x_0) := \left\{ \gamma \text{ est un arc dans } X \text{ joignant } x_0 \text{ à } x_1 = x_0 \right\}.$$

Tout élément $\gamma$ de $\Omega(X, x_0)$ s'appelle un lacet (base en $x_0$). Un lacet est simplement une application continue $\gamma : S^1 \to X$ tq $\gamma(0) = x_0 = \gamma(1)$, ou on pense de $S^1$ comme $[0, 1]/\sim$.

**Définition**

L'ensemble

$$\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0)/\simeq$$

s'appelle *le groupe fondamental* de $X$ (base en $x_0$).

Notons qu'à ce stade, $\pi_1(X, x_0)$ est bien défini seulement comme un ensemble. On va justifier le nom plus tard.

Si $\gamma$ est un lacet, $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ s'appelle la classe d'équivalence de $\gamma$. On peut voir $[\gamma]$ comme la composante connexe par arcs de $\gamma$ dans $\Omega(X, x_0)$ (nous n'essayons pas ni de prouver cela ni même de définir une topologie sur $\Omega(X, x_0)$).

**Théorème**

*$\pi_1(X,x_0)$ est un groupe par rapport à la multiplication*
$$[\gamma_1]\cdot[\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2]. \tag{$*$}$$

On va prouver ce théorème en plusieurs étapes.

**Étape 1.** Soit $\gamma$ un lacet et $\rho\colon[0,1]\to[0,1]$ une application continue tq $\rho(0)=0$ et $\rho(1)=1$. Alors, $[\gamma\circ\rho]=[\gamma]$.

En effet, $h(t,s)=\gamma\big((1-s)t+s\rho(t)\big)$ est une homotopie.

**Étape 2**. Le produit $(*)$ est bien défini et associatif.

On a déjà démontré que l'application $\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_0)$ donnée par $(*)$ est bien défini. Pour démontrer l'associativité, on observe d'abord que

$$(a*\beta)*\gamma(t)=\begin{cases}\alpha(4t) & \text{si } t\in[0,1/4],\\ \beta(4t-1) & \text{si } t\in[1/4,1/2],\\ \gamma(2t-1), & \text{si } t\in[1/2,1],\end{cases}$$



et
$$\alpha*(\beta*\gamma)(t)=\begin{cases}\alpha(2t) & \text{si } t\in[0,1/2],\\ \beta(4t-2) & \text{si } t\in[1/2,3/4],\\ \gamma(4t-3), & \text{si } t\in[3/4,1].\end{cases}$$
On peut vérifier que
$$(a*\beta)*\gamma=\big((a*\beta)*\gamma\big)\circ\rho,$$
ou
$$\rho(t)=\begin{cases}t/2, & \text{si } t\in[0,1/2],\\ t-1/4, & \text{si } t\in[1/2,3/4],\\ 2t-1, & \text{si } t\in[3/4,1].\end{cases}$$

Donc,
$$\begin{aligned}\big([\alpha][\beta]\big)[\gamma]&=[\alpha*\beta][\gamma]=[(\alpha*\beta)*\gamma]=[\alpha*(\beta*\gamma)]\\&=[\alpha][\beta*\gamma]=[\alpha]\big([\beta][\gamma]\big).\end{aligned}$$

**Étape 3**. Il existe un élément neutre dans $\pi_1(X, x_0)$ par rapport au produit $(*)$.

Soit $x_0$ le lacet constant, càd l'application constante $I \to X_0$, $t \mapsto x_0$. Pour un lacet $\gamma$, on a

$$(\gamma * x_0)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ x_0 & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Si on définit $\rho$ par

$$\rho(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ 1 & \text{si } t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

on a évidemment que $\gamma \circ \rho = \gamma * x_0$. Ainsi,

$$[\gamma] = [\gamma * x_0] = [\gamma][x_0].$$

De la même manière, on obtient $[x_0][\gamma] = [\gamma]$. Par conséquent, $[x_0]$ est l'élément neutre dans $\pi_1(X, x_0)$.



**Étape 4**. Nous prouvons l'existence d'un inverse.

Pour un lacet $\gamma$, on définit

$$\bar{\gamma}(t) := \gamma(1 - t).$$

On va prouver que $\gamma * \bar{\gamma} \simeq x_0 \simeq \bar{\gamma} * \gamma$. En effet, considérons

$$h(t, s) := \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, s/2], \\ \gamma(s) & \text{si } t \in [s/2, 1 - s/2], \\ \gamma(2 - 2t) & \text{si } t \in [1 - s/2, 1]. \end{cases}$$

Puisque $h(t, 0) = x_0$ et $h(t, 1) = \gamma * \bar{\gamma}(t)$, on obtient que $\gamma * \bar{\gamma} \simeq x_0$. De la même manière, on a $\bar{\gamma} * \gamma \simeq x_0$. Ainsi,

$$[\gamma]^{-1} = [\bar{\gamma}] \in \pi_1(X, x_0)$$

est l'élément inverse de $[\gamma]$.

En résumé, les étapes 1 – 4 montrent que $\pi_1(X, x_0)$ est un groupe.

**Proposition**

*Si $X \subset \mathbb{R}^n$ est convexe, alors $\pi_1(X, x_0) \cong \{1\}$ pour tout $x_0 \in X$.*

**Proposition**

*Si $X$ est connexe par arcs, alors $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(X, x_1)$ sont isomorphes pour tous $x_0, x_1 \in X$.*

On peut trouver une démonstration dans *Gamelin, Greene. Introduction to topology, Theorem 3.3.*

Si $X$ est connexe par arcs, on note par $\pi_1(X)$ la classe d'isomorphisme du groupe $\pi_1(X, x_0)$. Parfois, on dit que $\pi_1(X)$ est le groupe fondamental de $X$ même si ce n'est pas tout à fait correct.



## Homomorphismes induits

Soit $f : X \to Y$ une application continue tq $f(x_0) = y_0 \in Y$. Définissons

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0) \qquad \text{par} \qquad f_*[\gamma] = [f \circ \gamma].$$

**Théorème**

*L'application $f_*$ est bien définie. En fait, $f_*$ est un homomorphisme de groupes. De plus, si $g : Y \to Z$ est une autre application continue, on a*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

**Démonstration.**

Si $h$ et une homotopie entre $\gamma_0$ at $\gamma_1$, alors $f \circ h$ est une homotopie entre $f \circ \gamma_0$ et $f \circ \gamma_1$. Par conséquent, $f_*$ est bien défini.

Si $\gamma$ et $\beta$ sont deux lacets, on a

$$f \circ (\gamma * \beta)(t) = \begin{cases} f \circ \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ f \circ \beta(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases} = (f \circ \gamma) * (f \circ \beta)\ (t).$$

$\square$

**Démonstration (suite).**

Par conséquent,

$$f_*\big([\gamma][\beta]\big) = \big(f_*[\gamma]\big)\big(f_*[\beta]\big),$$

càd que $f_*$ est un homomorphisme de groupes.

La propriété $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ découle immédiatement de la définition de $f_*$. □

**Corollaire**

*Si $f$ est un homéomorphisme, alors $f_*$ est un isomorphisme.*

**Démonstration.**

Si $f$ est un homéomorphisme, alors $\exists g \colon Y \to X$ tq

$$f \circ g = id_Y \qquad \text{et} \qquad g \circ f = id_X$$

(bien sûr, $g = f^{-1}$). En utilisant le théorème précédent, on obtient

$$f_* \circ g_* = (id_Y)_* = id : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Y, y_0) \qquad \text{et}$$
$$g_* \circ f_* = id : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0).$$

Ainsi, $f_*$ est un isomorphisme. □