Définition

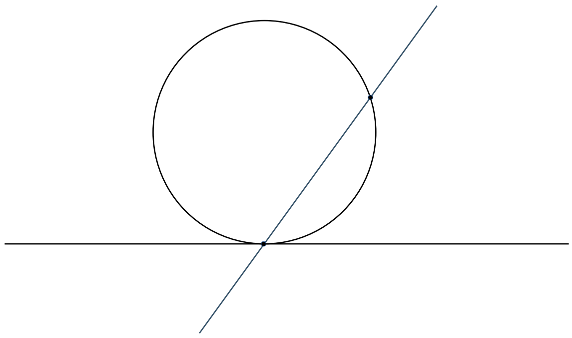
L'ensemble des droites vectorielles dans $\mathbb{R}^{n+1}$ s'appelle l'espace projectif réel. On désigne cette espace par $\mathbb{RP}^n$.

Nous démontrons plus tard que $\mathbb{RP}^n$ est un espace topologique. A ce moment-là, nous avons défini $\mathbb{RP}^n$ seulement comme un ensemble.

On peut comprendre $\mathbb{RP}^n$ comme un ensemble paramétrisant l'ensemble des droites vectorielles dans $\mathbb{R}^{n+1}$, càd que chaque point de $\mathbb{RP}^n$ correspond à une droite vectorielle dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exemple

Il y a une correspondance bijective (en fait, un homéomorphisme) entre $\mathbb{RP}^1$ et le cercle S^1



Rappelons qu'une droite vectorielle est un ensemble $\ell_v := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x = \lambda v\}$ où $v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Ainsi, on peut définir $\mathbb{RP}^n$ comme un ensemble quotient :

$$\mathbb{RP}^n := \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right)/\sim, \qquad \text{où} \quad v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tq } w = \lambda v.$$

De façon équivalente, puisque chaque droite intersecte la sphère en exactement deux points, qui sont antipodaux, nous avons également

$$\mathbb{RP}^n := S^n/\sim, \qquad \text{où} \quad v \sim w \iff w = \pm v.$$

Ainsi, on a la projection canonique $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$. On <u>définit</u> une topologie sur $\mathbb{RP}^n$ comme la topologie induite de S^n, càd que

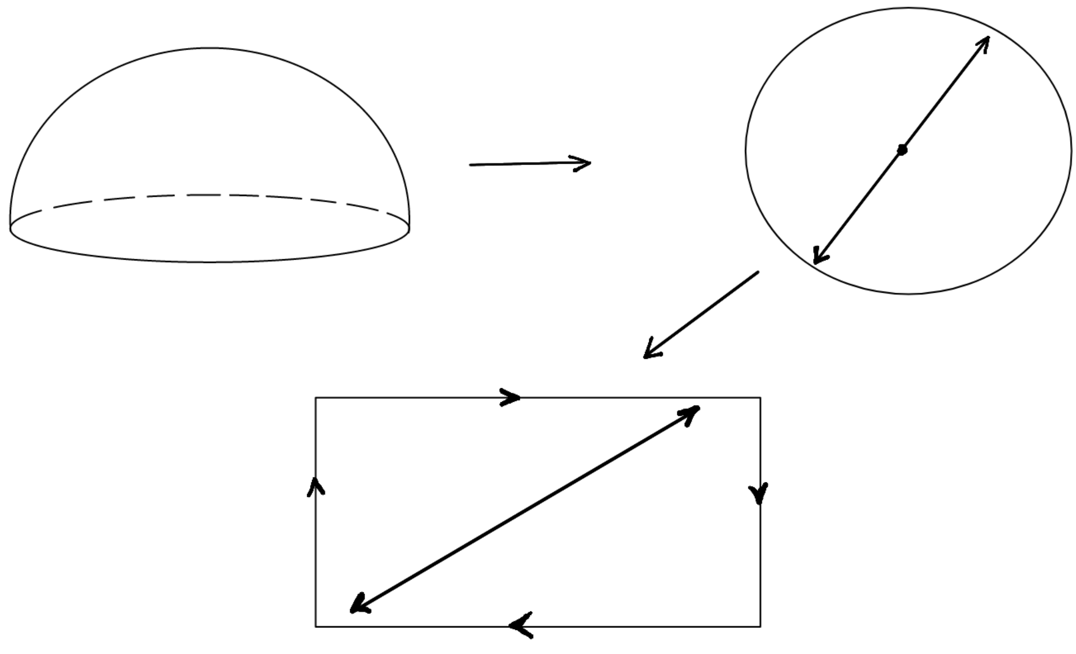
$$\mathbb{RP}^n \supset V \text{ est ouvert} \qquad \iff \qquad S^n \supset \pi^{-1}(V) \text{ est ouvert.}$$

Le plan projectif $\mathbb{RP}^2$

Exercice

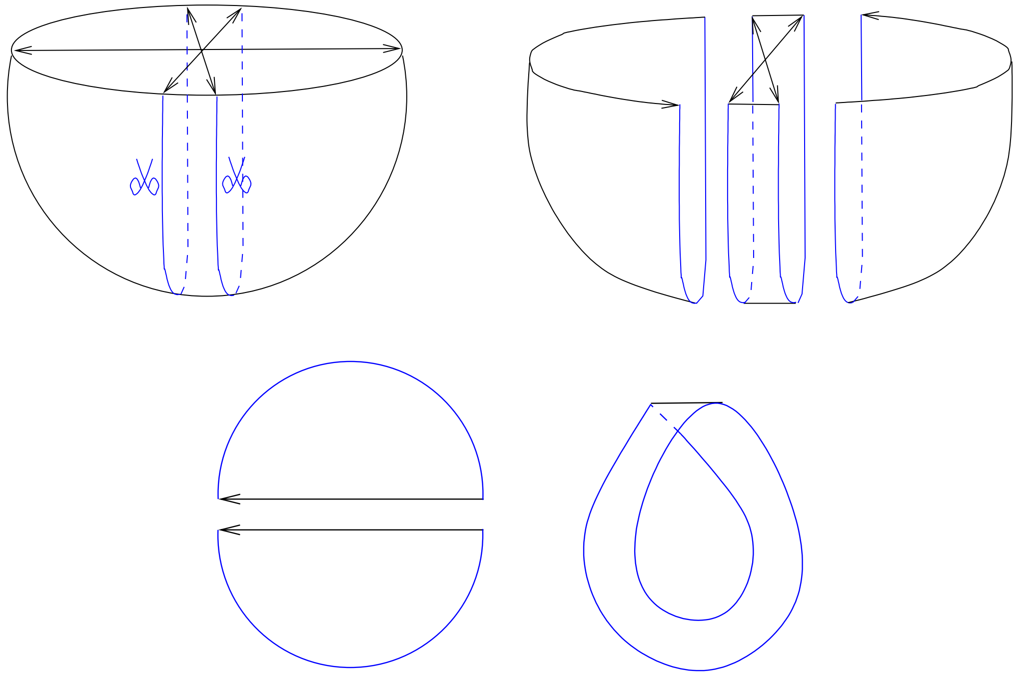
1. Montrer que l'hémisphère
$$S^2_+ := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\right\}$$
contient au moins un représentant de toute classe d'équivalence.
2. Montrer que l'hémisphère et le disque $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\right\}$ sont homéomorphes ;
3. Montrer que le disque D et le rectangle R sont homéomorphes. Alors, S^2_+ et R sont homéomorphes aussi.

Le plan projectif (suite)



Comme dans le cas de la bouteille de Klein, on peut démontrer que le plan projectif ne peut pas se plonger dans $\mathbb{R}^3$.

Le plan projectif est un ruban de Moebius auquel on a collé un disque



Construction de la surface de Boy :
https://www.youtube.com/watch?v=uiq-EcQz_uU.

Explorez le plan projectif vous-même :
https://sketchfab.com/3d-models/boys-surface-bryant-kusner-d49b2e593962495b9deffb4206175dee.

Espaces de Hausdorff / espaces séparés

Rappelons que dans un espace métrique la limite d'une suite est unique si elle existe.

Démonstration. Supposons que m_n est une suite dans un espace métrique (M,d) qui converge vers m et m'.

$$m = \lim m_n \quad \Longrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \text{tq} \quad m_n \in B_\varepsilon(m) \quad \text{si } n \geq N;$$

$$m' = \lim m_n \quad \Longrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N' \quad \text{tq} \quad m_n \in B_\varepsilon(m') \quad \text{si } n \geq N'.$$

Notons que si $m \neq m'$ et $r := d(m,m')/2 > 0$ on a $B_r(m) \cap B_r(m') = \varnothing$ parce que

$$\hat{m} \in B_\varepsilon(m) \cap B_\varepsilon(m) \quad \Longrightarrow$$

$$d(m,m') \leq d(m,\hat{m}) + d(\hat{m},m') < r + r = d(m,m').$$

Alors, si $m \neq m'$, pour $\varepsilon = r = d(m,m')/2$ et tout $n \geq \max\{N,N'\}$ on a $m_n \in B_\varepsilon(m) \cap B_\varepsilon(m')$. Il s'agit donc d'une contradiction qui montre que $m = m'$.

Le point clé de l'argument ci-dessus est le suivant : dans un espace métrique, si $m \neq m'$ il existe un voisinage U_x de x et un voisinage U_y de y tq $U_x \cap U_y = \varnothing$.

Attention

Dans un espace topolgique quelconque il n'est pas nécessaire que les voisinages U_x et U_y tq $U_x \cap U_y = \varnothing$ existent. Par exemple, dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie cofinie, l'intersection de deux ensembles ouverts quelconques est non vide.

Définition

Un espace topologique X est dit *de Hausdorff* si pour tout couple $x, y \in X$ de points distincts il existe des ouverts U_x, V_y tq

$$x \in U_x, \quad y \in U_y \quad \text{et} \quad U_x \cap U_y = \varnothing.$$

On abrège "un espace topologique de Hausdorff" à *un espace Hausdorff*.

Remarque

La terminologie française pour "espace de Hausdorff" est celle *d'espace séparé*.

Lemme

Une suite convergente dans un espace Hausdorff a une seule limite

Démonstration.

Supposons que x_n est une suite dans un espace Hausdorff X qui converge vers x et x'. Puisque X est Hausdorff, $\exists U \ni x$ et $\exists U' \ni x$ ouverts tq $U \cap U' = \varnothing$.

$$\begin{aligned} x = \lim x_n \quad &\Longrightarrow \quad \exists N > 0 \quad \text{tq} \quad x_n \in U \quad \text{si } n \geq N; \\ x' = \lim x_n \quad &\Longrightarrow \quad \exists N' > 0 \quad \text{tq} \quad x_n \in U' \quad \text{si } n \geq N'. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $n \geq \max\{N, N'\}$ on a $x_n \in U \cap U'$, une contradiction. $\square$

Proposition

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace de Hausdorff et $x \in X$. Le singleton $\{x\}$ est une partie fermée de X.

Démonstration.

Choisissons $y \in X \backslash \{x\}$. Puisque X est Hausdorff, il existe deux voisinages U_x et U_y disjoints tels que $x \in U_x$ et $y \in V_y$. En particulier, $U_y \subset X \setminus \{x\}$. Alors

$$X \backslash \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_y$$

est ouvert en tant que la réunion des ouverts. Ainsi, $\{x\}$ est fermé. □

Remarque

Dans l'espace topologique $X = \{a, b\}$ muni de la topologie

$$\mathcal{T} := \{\varnothing, X, \{a\}\}$$

le singleton $\{a\}$ n'est pas fermé. Par contre, $\{b\}$ est fermé.

Proposition

1. *Soient X un esp. Hausdorff et $A \subset X$ un sous-espace. Alors A est Hausdorff.*
2. *Soient X, Y deux espaces Hausdorff. Alors $X \times Y$ est Hausdorff pour la topologie produit.*
3. *Si X est Hausdorff et si X et Y sont homéomorphes alors Y est Hausdorff. En d'autres termes, être un espace Hausdorff est une propriété topologique.*

A titre d'exemple, nous prouvons 1. : Soient $a, b \in A$, $a \neq b$. En considérant a et b comme des points de X, qui est Hausdorff, on trouve $U_a, U_b \in \mathcal{T}_X$ tq

$$a \in U_a, \quad b \in U_b \quad \text{et} \quad U_a \cap U_b = \varnothing.$$

On dénote $V_a := U_a \cap A$ et $V_b := U_b \cap A$. Alors,

$$a \in V_a, \quad b \in V_b \quad \text{et} \quad V_a \cap V_b \subset U_a \cap U_b = \varnothing.$$

Proposition

Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ *et* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *des espaces topologiques et* $f, g\colon X \to Y$ *des fonctions continues. Si* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *est Hausdorff, l'ensemble*

$$E := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

est un fermé de X*.*

Démonstration.

Soit $x \in X \setminus E$, alors $f(x) \neq g(x)$. Comme Y est Hausdorff, $\exists U, V \in \mathcal{T}_Y$ tq

$$f(x) \in U, \quad g(x) \in V \quad \text{et} \quad U \cap V = \varnothing.$$

Puisque f et g sont continues, $f^{-1}(U)$ et $g^{-1}(V)$ sont des voisinages de x. Alors, $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) =: W$ est un voisinage de x aussi. Puisque

$$f(W) \subset f\big(f^{-1}(U)\big) \subset U \quad \text{et} \quad g(W) \subset g\big(g^{-1}(V)\big) \subset V,$$

on a que $f(W) \cap g(W) = \varnothing$. Alors, $X \setminus E$ est ouvert. □

Corollaire

Soit X *un espace topologique,* A *un sous-ensemble dans* X *tq* $\bar{A} = X$ *et* Y *un espace Hausdorff. Pour une application* $f\colon A \to Y$*, il existe au plus une fonction* $F\colon X \to Y$ *continue tq* $F|_A = f$*.*

Démonstration.

Supposons qu'il existe deux prolongements $F, G\colon X \to Y$. Alors,

$$A \subset E = \{x \in X \mid F(x) = G(x)\} \subset X \implies$$
$$X = \bar{A} \subset \bar{E} = E \implies E = X \implies F = G.$$

□

Remarque (suit)

- Si le prolongement de f existe et est continu, $f\colon A \to Y$ est continue (par rapport à la topologie induite).
- Le prolongement peut exister ou non. Par exemple,

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} +1, & \text{si } x > 0, \\ -1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

  est continue sur $A := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mais ne permet pas un prolongement <u>continu</u> défini sur $\mathbb{R}$.

Exercice (*)

Trouver un exemple de l'application continue $f\colon A \to Y$ qui permet deux prolongements continus $\bar{A} \to Y$ (ainsi, Y ne peut pas être Hausdorff).

Les sous-ensembles dense

Définition

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un sous-ensemble $A \subset X$ est dite *dense*, si $\bar{A} = X$. Autrement dite, A est dense, si chaque ouvert de X contient au moins un point de A.

Exemple

1. $(0, 1)$ est dense dans $[0, 1]$.
2. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$.
4. Pour $(X, \mathcal{T}^{discr})$, seulement X est dense.
5. $\mathbb{Z}$ est dense dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}^{cofin})$. En fait, tout sous-ensemble infini est dense dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}^{cofin})$.

On peut reformuler le corollaire précédent comme suit.

Corollaire

Soit X un espace topologique, A un sous-ensemble dense dans X et Y un espace Hausdorff. Pour une application $f: A \to Y$, il existe au plus une fonction $F: \bar{A} \to Y$ continue tq $F|_A = f$.

Pour voir une application, dénotons par $M_n(\mathbb{R})$ l'espace de toutes les matrices de taille $n \times n$ à coefficients réels. $M_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension n^2. Un isomorphisme $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$ est donné par

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}).$$

En particulier, $M_n(\mathbb{R})$ est un espace métrique (alors, topologique). Explicitement,

$$d_2(A, B) := \Big(\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} - b_{ij})^2 \Big)^{1/2}.$$

Lemme

Le sous-ensemble

$$GL_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\} \subset M_n(\mathbb{R})$$

est dense.

Démonstration.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R}) \iff \det A = 0$. Pour trouver une $B \in GL_n(\mathbb{R})$ proche de A considérons le polynôme caractéristique de A

$$\chi_A(\lambda) := \det\big(\lambda\, id - A\big) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n,$$

où $a_j = a_j(A) \in \mathbb{R}$. Puisque $\chi_A \not\equiv 0$, il a au plus n racines (et $\lambda = 0$ est une racine). Alors, $\exists \lambda_0 > 0$ tq la seule racine de χ_A dans $(-\lambda_0, \lambda_0)$ est 0. Si $\lambda_k \to 0$ et $\lambda_k \neq 0$ on a que $\big(A - \lambda_k\, id\big) \in GL_n(\mathbb{R})$ converge vers A et

$$\det(A - \lambda_k id) = (-1)^n \chi_A(\lambda_k) \neq 0.$$

Donc, $A \in \overline{GL_n(\mathbb{R})}$ et ainsi, $\overline{GL_n(\mathbb{R})} = M_n(\mathbb{R})$. ◻

Revenons au polynôme caractéristique

$$\chi_A(\lambda) := \det\left(\lambda\, id - A\right) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Évidemment, $a_n = \chi_A(0) = (-1)^n \det A$ et $a_1(A) = -\mathrm{Tr}\, A$. C'est un peu plus compliqué pour les autres coefficients.

Même si l'on ne peut pas exprimer facilement a_j par les coefficients de A, on peut en établir certaines propriétés comme suit. Si $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$,

$$\det\left(P^{-1}AP\right) = \det A \quad \Longrightarrow \quad \chi_{P^{-1}AP} = \chi_A \quad \Longrightarrow \quad \chi_{QP} = \chi_{PQ}, \qquad (*)$$

où $Q = P^{-1}A \iff A = PQ$.

Théorème

(*) s'applique à toutes $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$. En d'autres termes, $a_j(PQ) = a_j(QP)$.

Remarque

Bien sûr, pour $j = n$ et $j = n - 1$ on a les identités bien connues :

$$\det(PQ) = \det(QP) \quad \text{et} \quad Tr\,(PQ) = Tr\,(QP).$$

Démonstration.

Notons que nous avons montré que $\chi_{QP} = \chi_{PQ}$ pour toutes $Q \in M_n(\mathbb{R})$ et toutes $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, pour Q fixée, considérons

$$f\colon M_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n, \qquad f(P) = \chi_{PQ} - \chi_{QP},$$

où $\mathcal{P}_n$ est l'ensemble de tous les polynômes de degré au plus n. Comme pour M_n, on peut identifier $\mathcal{P}_n$ avec $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$b_0\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \cdots + b_n \longmapsto \left(b_0,\, b_1, \ldots,\, b_n\right).$$

En particulier, $\mathcal{P}_n$ peut être muni de la topologie Hausdorff.

L'application $M_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n$, $A \mapsto \chi_A$ est continue puisque tout a_j est un polynôme de coefficients de A.

L'application $M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $P \mapsto PQ$ est continue puisqu'elle est linéaire. Alors, $M_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n$, $P \mapsto \chi_{PQ}$ est continue comme composition. Ainsi, f est continue et $f \equiv 0$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors, $f = 0$ partout puisque $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense. $\square$

Quand les espaces quotients sont-ils Hausdorff ?

Un quotient d'un espace Hausdorff n'a pas besoin d'être Hausdorff.

Exemple

1. Considérons la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$:
$$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x \text{ et } y \in \mathbb{Q}) \text{ OU } (x \text{ et } y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).$$
Donc, rationnel $\sim$ rationnel, irrationnel $\sim$ irrationnel, mais rationnel $\nsim$ rationnel. Alors, $\mathbb{R}/\sim = \{a, b\}$ muni de la topologie grossière (plus petite). Ainsi, $\mathbb{R}/\sim$ n'est pas Hausdorff.
2. Considérons la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$:
$$x \sim y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \text{ et } y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad 0 \sim 0.$$
Ainsi, $\mathbb{R}/\sim = \{a, b\}$ en tant qu'ensemble, mais la topologie est différente
$$\mathcal{T} = \{\varnothing,\ \{a, b\},\ \{a\}\}.$$
C'est l'exemple non trivial le plus simple d'un espace non Hausdorff.

Théorème

Soit X un espace topologique muni d'une opération continue d'un groupe G. Supposons que

1. $\forall x \in X \quad \exists$ *un voisinage U de x tq $\forall g \in G \setminus \{e\}$*
$$gU \cap U = L_g(U) \cap U = \varnothing.$$
2. $O_x \neq O_{x'} \implies \exists$ *un voisinage U de x et un voisinage U' de x' tq $\forall g \in G$ on a* $\quad U \cap gU' = \varnothing.$

Alors, X/G est Hausdorff.

Notons que la propriété 1. implique que X est Hausdorff.

Démonstration.

Désignons $\pi : X \to X/G$ et posons $V = V_x := \pi(U) \subset X/G$, où U est un voisinage comme dans la propriété 1. Considérons

$$\pi^{-1}(V) = \left\{ y \in X \mid \exists z \in U \ \text{ tq } \ y = g \cdot z \right\} = \bigsqcup_{g \in G} gU.$$

Tout sous-ensemble $gU = L_g(U)$ est ouvert puisque L_g est un homéomorphisme et donc une application ouverte. Alors, $\pi^{-1}(V)$ est ouvert $\iff$ V est ouvert par définition de la topologie quotient. Évidemment, si $U' \subset X$ est ouvert et $U' \subset U$, alors $V' := \pi(U')$ est ouvert dans X/G et

$$\pi^{-1}(V') = \bigsqcup_{g \in G} gU'.$$

Notons que $\pi : U \to V$ est bijective parce que

$$\pi(x) = \pi(x') \quad \Longrightarrow \quad x' = g \cdot x \in U \cap gU \quad \Longrightarrow \quad g = e \quad \Longrightarrow \quad x = x'.$$

Donc, $\pi|_U : U \to V$ est bijective, continue et ouverte $\Longrightarrow$ $\pi|_U$ est un homéo. □

Démonstration (suite).

Soit $[x] \neq [x'] \implies x \neq x'$. Pour x' on trouve les voisinages U' de x' et V' de $[x']$ tq $\pi : U' \to V'$ est un homéo et $\pi^{-1}(V') = \bigsqcup gU'$. Par la propriété 2., on peut supposer que

$$U \cap gU' = \varnothing \qquad \forall g \in G.$$

Nous avons

$$V \cap V' \neq \varnothing \quad \iff \quad \pi^{-1}(V) \cap \pi^{-1}(V') \neq \varnothing \quad \iff \quad \exists g \in G \text{ tq } U \cap gU' \neq \varnothing.$$

Ainsi, $V \cap V' = \varnothing$ et X/G est Hausdorff. □

Exemple

1. Considérons l'opération de $(\mathbb{Z},+)$ sur $X=\mathbb{R}$ définie par $(n,x)\mapsto x+n$. Pour un $x\in\mathbb{R}$ quelconque, posons $U=\big(x-1/4,\ x+1/4\big)$. Évidemment, pour chaque $n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}$ on a que
$$U\cap nU=\big(x-1/4,\ x+1/4\big)\bigcap\big(x+n-1/4,\ x+n+1/4\big)=\varnothing.$$
Alors, la propriété 1. est satisfaite. De la même manière, on peut démontrer la propriété 2. Alors, $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un espace Hausdorff.
Exercice : Montrer, que l'application $F\colon\mathbb{R}\to S^1$ definie par $F(t)=\big(\cos 2\pi t,\ \sin 2\pi t\big)$ induit un homéomorphisme $f\colon\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to S^1$.

2. Considérons l'opération de $\mathbb{Z}^2$ sur $X=\mathbb{R}^2$ définie par $\big((n,m),(x,y)\big)\mapsto(x+n,\ y+m)$.
Exercice : Montrer, que l'espace quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est Hausdorff et que l'application $F\colon\mathbb{R}^2\to S^1\times S^1$ definie par
$$F(x,y)=\big(\cos 2\pi x,\ \sin 2\pi x,\ \cos 2\pi y,\ \sin 2\pi y\big)$$
induit un homéomorphisme $f\colon\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\to S^1\times S^1$.

Exemple (suite)

3. Considérons l'opération de $\mathbb{Z}_2=\{\pm1\}$ sur $X=S^n$ définie par
$$\varepsilon\cdot x=\big(\varepsilon x_0,\ldots,\varepsilon x_n\big).$$
Pour tout $x\in S^n$ il existe évidemment un j tq $x_j\neq 0$. Si $x_j>0$, on peut poser
$$U_x:=S^n\cap\{x_j>0\},$$
qui est ouvert. De plus, $U_x\cap -U_x=\varnothing$. Si $x_j<0$, on peut choisir $U_x:=S^n\cap\{x_j<0\}$. Ça démontre la propriété 1. La propriété 2. est à vous de démontrer comme exercice. Ainsi, $S^n/\mathbb{Z}_2$ est Hausdorff.

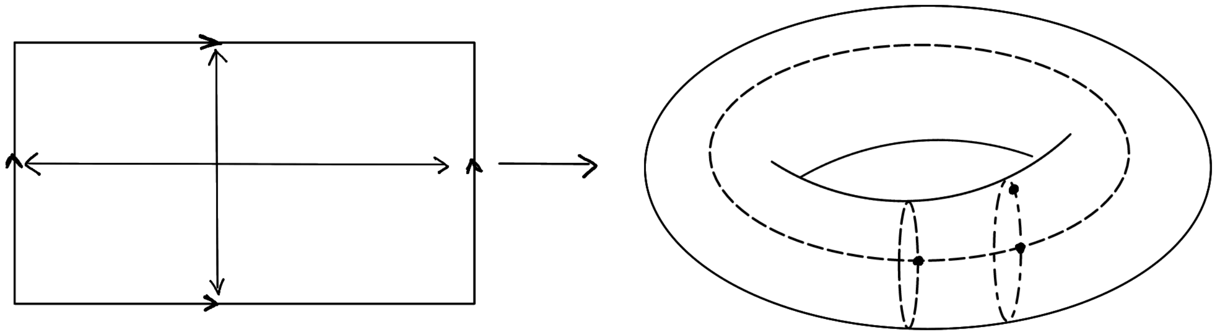
$S^n/\mathbb{Z}_2$ est clairement le plan projectif $\mathbb{RP}^2$, càd que le plan projectif est un espace Hausdorff.

Le tore (revisité)

Considérons l'opération de $\mathbb{Z}^2$ sur $X = \mathbb{R}^2$ comme dans l'exemple 2.

Exercice

Montrer que le carré $R := [0,1] \times [0,1]$ contient au moins un représentant de toute classe d'équivalence. En plus, chaque $(x, y) \in (0,1) \times (0,1)$ est l'unique représentant de sa classe d'équivalence.



Visuellement, il y a une bijection entre le tore et $S^1 \times S^1$. On a démontré déjà qu'en fait, c'est un homéomorphisme.