

LA COMPACTITÉ DE PRODUITES

Théorème

Soit X, Y deux espaces topologiques. Alors le produit $X \times Y$ est compact ssi X et Y sont tous les deux compacts.

Démonstration.

Supposons que $X \times Y$ est compact. Puisque p_1 est continue, $X = p_1(X \times Y)$ est compact en tant que l'image d'un espace compact.

Supposons que X et Y sont compacts. Soit \mathcal{W} un recouvrement ouvert de $X \times Y$. Soit $x \in X$ fixé. Puisque \mathcal{W} est un recouvrement de $X \times Y$, $\forall y \in Y$ $\exists W(y) \in \mathcal{W}$ tq $(x, y) \in W(y)$. Par définition de la topologie produit, $\exists U(y) \subset X$ et $\exists V(y) \subset Y$ tq

$$(x, y) \in U(y) \times V(y) \subset W(y).$$

La collection $\{V(y) : y \in Y\}$ est un recouvrement ouvert de Y . La compacité de Y implique qu'il existe un sous-recouvrement fini, disons $V(y_1), \dots, V(y_r)$. Posons

$$U(x) = U(y_1) \cap \dots \cap U(y_r).$$

□ 1 / 16

Démonstration (suite).

Alors pour tout $i = 1, \dots, r$,

$$U(x) \times V(y_i) \subset U(y_i) \times V(y_i) \subset W(y_i)$$

Donc

$$U(x) \times Y \subset U(x) \times \bigcup_{i=1}^r V(y_i) \subset \bigcup_{i=1}^r W(y_i)$$

Maintenant la collection $\{U(x) : x \in X\}$ est un recouvrement ouvert de X . Il existe donc un sous-recouvrement fini $\{U(x_1), \dots, U(x_s)\}$. Chaque sous-espace $U(x_i) \times Y$ est recouvert par un nombre fini d'ouvert du recouvrement \mathcal{W} . Donc $X \times Y$, étant la réunion (finie) des $U(x_i) \times Y$ pour $1 \leq i \leq s$, est aussi recouvert par un nombre fini d'éléments du recouvrement \mathcal{W} .

□

CRITÈRE AUTOMATIQUE D'HOMÉOMORPHISME

Nous avons déjà vu qu'en général

$f: X \rightarrow Y$ est continue et bijective $\not\Rightarrow f^{-1}$ est continue.

Cependant, on a le résultat suivant :

Proposition

Soit $f: X \rightarrow Y$ une bijection continue. Si X est compact et Y est Hausdorff, alors f est un homéomorphisme.

Démonstration.

Soit G un fermé de X . Puisque G est fermé dans X qui est compact, alors G est compact. Comme f est continue, $f(G)$ est aussi compact. Puisque Y est Hausdorff, $f(G)$ est un fermé de Y . Ainsi, f est une application fermée et, donc, un homéomorphisme. \square

3 / 16

En tant qu'application, on a le résultat suivant.

Proposition

L'espace quotient \mathbb{R}/\mathbb{Z} est homéomorphe à l'ensemble $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ muni de la topologie induite par celle de \mathbb{R}^2 .

Démonstration.

On définit l'application

$$\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1, \quad [x] \mapsto e^{2i\pi x}.$$

On a déjà vu que φ est continue et bijective. Comme \mathbb{R}/\mathbb{Z} est compact et S^1 est Hausdorff, φ est alors un homéomorphisme. \square

4 / 16

Exercice

1. Considérons l'opération du groupe \mathbb{Z}^2 sur \mathbb{R}^2 :

$$(n, m) \cdot (x, y) = (x + n, y + m).$$

Prouver que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est homéomorphe au tore \mathbb{T} . De plus, prouver que le tore est homéomorphe à $S^1 \times S^1$ muni de la topologie produit.

2. Prouver que $S^2/\{\pm 1\}$ est homéomorphe au plan projectif.

5 / 16

LA COMPACITÉ DANS \mathbb{R}^n

Définition

Un sous-ensemble $A \subset M$ d'un espace métrique est dit borné s'il existe $R > 0$ et $m_0 \in M$ tq $A \subset B(m_0, R)$.

Exercice

Montrer que A est borné ssi une des propriétés suivantes est vérifiée :

- $\forall m_0 \in M \quad \exists R = R_{m_0} \text{ tq } A \subset B_R(m_0).$
- $\exists C > 0 \text{ tq pour tout } x, y \in A, d(x, y) \leq C.$

Proposition

Soit M un espace métrique. Si $K \subset M$ est compact, alors K est borné et fermé.

Démonstration.

Puisque pour tout $m_0 \in M$ la fonction $K \rightarrow \mathbb{R}, \quad K \ni m \mapsto d(m, m_0)$ est continue, alors elle est bornée, càd que K est bornée. K est fermé en tant qu'un sous-ensemble compact d'un espace Hausdorff. \square

6 / 16

Théorème

Un sous-ensemble $K \subset \mathbb{R}^n$ est compact ssi K est borné et fermé.

Démonstration.

Soit K borné par rapport à la métrique d_∞ ($\Leftrightarrow K$ est borné par rapport à la métrique euclidienne puisque les deux métriques sont équivalentes). Alors, il existe $R > 0$ tq $d_\infty(m, 0) \leq R$, càd

$$K \subset [-R, R]^n.$$

$[-R, R]^n$ est compact en tant que le produit de sous-ensembles compacts. Puisque K est un sous-ensemble fermé, alors K est compact. \square

Remarque

En général, un sous-ensemble borné et fermé d'un espace métrique quelconque n'est pas compact. Par exemple, un sous-ensemble A quelconque d'un espace discret est toujours borné et fermé. Cependant, A n'est pas compact si A est infini.

7 / 16

LES NORMES SUR \mathbb{R}^n

Définition

Soit $(E, +)$ un espace vectoriel. Une *norme sur E* est une application $N : E \rightarrow [0, +\infty)$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- Pour $x \in E$, $N(x) = 0 \iff x = 0$
- (Inégalité triangulaire) $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ pour tous $x, y \in E$.
- (Homogénéité) $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$.

Exemple

Les normes suivantes sont des exemples classiques sur \mathbb{R}^n , $n \geq 1$:

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$;
- $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$
- $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

8 / 16

Exercice

Supposons que N est une norme sur E . Montrer que $d_N(x, y) = N(x - y)$ définit une métrique sur E . Donc, tout espace vectoriel normé est un espace métrique.

Théorème

Soient N_1 et N_2 des normes sur \mathbb{R}^n . Alors N_1 et N_2 sont équivalentes, càd qu'il existe des constante $A, B > 0$ tq

$$A N_2(x) \leq N_1(x) \leq B N_2(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

En particulier, si N est une norme sur \mathbb{R}^n , la topologie métrique associée à la distance $d_N(x, y) = N(x - y)$ coïncide avec la topologie usuelle sur \mathbb{R}^n .

Démonstration.

Soit N une norme sur \mathbb{R}^n quelconque. Il suffit de montrer que N est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$ parce que

$$N_1(x) \leq B\|x\|_\infty \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty \leq \frac{1}{A}N_2(x) \quad \implies \quad N_1(x) \leq \frac{B}{A}N_2(x).$$

□

9 / 16

Démonstration (suite).

Soit (e_1, \dots, e_n) la base standard de \mathbb{R}^n . Désignons $C := \sum_{i=1}^n N(e_i) > 0$.

$$N(x) = N\left(\sum x_i e_i\right) = \sum |x_i| N(e_i) \leq \sum \|x\|_\infty N(e_i) \leq C\|x\|_\infty.$$

En remplaçant x par $x - y$, on obtient $N(x - y) \leq C\|x - y\|_\infty$. Donc, $N: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par rapport à d_∞ . Puisque

$$S_\infty := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$$

est borné et fermé (pourquoi?), alors S_∞ est compact. Donc, la restriction de N sur S_∞ atteint son minimum $A := \inf \{N(x) \mid x \in S_\infty\} = N(x_0) > 0$.

Ainsi, si $x \neq 0$, on a que

$$A \leq N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \quad \iff \quad A\|x\|_\infty \leq N(x).$$

□

Attention

Le théorème implique que les métriques d_{N_1} et d_{N_2} sont équivalentes si N_1 et N_2 sont des normes sur \mathbb{R}^n quelconques. Cependant, le théorème n'implique pas que toutes les distances sur \mathbb{R}^n sont équivalentes!

10 / 16

COMPACITÉ PAR SUITES

Définition

Un sous-espace $K \subset M$ d'un espace métrique est dit *séquentiellement compact* si toute suite $(x_n) \subset K$ possède une sous-suite qui converge vers un point de K .

Théorème

Un sous-espace $K \subset M$ d'un espace métrique est compact ssi K est séquentiellement compact.

La preuve de ce théorème consiste en plusieurs étapes.

Lemme

Soit $(x_n) \subset X$ une suite dans un espace métrique. Écrivons $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Supposons que x est un point limite de S . Alors il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers x .

La preuve découle du fait suivant : tout point limite de A est la limite d'une suite (a_k) tq $a_k \in A$. Détails : *Fine, Bertelson, Premoselli. Intro à la topologie.*

11 / 16

Proposition

Soit $K \subset M$ un sous-espace compact d'un espace métrique. Alors K est séquentiellement compact.

Démonstration.

Si S est fini, il doit exister au moins un point $x \in K$ qui est répété un nombre infini de fois dans (x_n) . Ainsi, dans ce cas-là, il existe une sous-suite constante, alors convergente.

Supposons que S est infini. Il suffit de démontrer que S a un point limite dans K . Supposons qu'il n'existe pas de point limite de S dans K . Donc, $\forall x \in K \quad \exists \varepsilon(x) > 0$ tq $S \cap (B_{\varepsilon(x)}(x) \setminus \{x\}) = \emptyset$. Considérons

$$\mathcal{U} = \{B_{\varepsilon(x)}(x) \mid x \in K\}.$$

La compacité de K implique qu'il existe un sous-recouvrement fini :

$$K \subset B_{\varepsilon(x_1)}(x_1) \cup \dots \cup B_{\varepsilon(x_r)}(x_r).$$

Mais les boules contiennent chacune au plus un point de S donc, ensemble, elles ne contiennent pas plus que r points de S . Ceci contredit le fait que S est infini. □

12 / 16

Corollaire (Bolzano–Weierstrass)

Soit $(x_n) \subset \mathbb{R}^n$ une suite bornée. Alors elle possède une sous-suite convergente.

Démonstration.

Par l'hypothèse, $\exists R > 0$ tq $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \bar{B}_R(0)$. Alors,

$$\bar{S} \subset \overline{\bar{B}_R(0)} = \bar{B}_R(0),$$

parce que $\bar{B}_R(0)$ est fermé. Puisque \bar{S} est borné et fermé, alors \bar{S} est compact par Heine–Borel. Ainsi, (x_n) possède une sous-suite convergente. □

13 / 16

Lemme (Lemme A)

Soit M un espace métrique séquentiellement compact et soit $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un recouvrement ouvert de M . Alors il existe un $r > 0$ avec la propriété suivante : $\forall m \in M \exists U = U_{i(m)} \in \mathcal{U}$ tq $B_r(m) \subset U$.

Démonstration.

Supposons qu'un tel $r > 0$ n'existe pas. Alors, $\forall n \in \mathbb{N} \exists m_n \in M$ tq $B_{1/n}(m_n) \not\subset U_i$ pour tout $i \in I$. Puisque M est séquentiellement compact, la suite (m_n) possède une sous-suite (m_{n_k}) qui converge vers un $m \in M$. Puisque \mathcal{U} est un recouvrement, il existe $U_j \in \mathcal{U}$ tq $m \in U_j$. Alors, $\exists r > 0$ tq $B_r(m) \subset U_j$ parce que U_j est ouvert.

Maintenant, prenons k si grand que $d(m_{n_k}, m) < r/2$ et $1/n_k < r/2$. On a

$$B_{1/n_k}(m_{n_k}) \subset B_r(m)$$

parce que

$$m' \in B_{1/n_k}(m_{n_k}) \implies d(m, m') \leq d(m, m_{n_k}) + d(m_{n_k}, m') < r/2 + 1/n_k < r.$$

Ainsi, on obtient une contradiction, parce que

$$B_{1/n_k}(m_{n_k}) \subset B_r(m) \subset U_j.$$

□

14 / 16

Lemme (Lemme B)

Soit M un espace métrique séquentiellement compact et $r > 0$ quelconque. Alors, il existe un sous-ensemble fini $\{m_1, \dots, m_p\} \subset M$ tq

$$\bigcup_{i=1}^p B_r(m_i) = M.$$

Démonstration.

Supposons qu'aucune collection finie de boules $\{B_r(m_i) \mid 1 \leq i \leq p\}$ n'est pas un recouvrement de M . Donc, $\forall m_1 \in M \exists m_2 \in M \setminus B_r(m_1)$. Puisque $M \neq B_r(m_1) \cup B_r(m_2)$, $\exists m_3 \in M \setminus (B_r(m_1) \cup B_r(m_2))$. Ainsi, on obtient une suite m_n avec la propriété suivante :

$$m_n \notin B_r(m_1) \cup \dots \cup B_r(m_{n-1}).$$

Puisque M est séquentiellement compact, il existe une sous-suite (m_{n_k}) convergeant. Mais (m_{n_k}) n'est pas une suite de Cauchy parce que $d(m_{n_k}, m_{n_{k-1}}) \geq r$. Ceci est une contradiction. \square

15 / 16

Corollaire

Si M est un espace métrique séquentiellement compact, alors M est compact.

Démonstration.

Soit $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un recouvrement ouvert quelconque. Soit $r > 0$ donné par le lemme A. Pour ce r , on peut choisir un recouvrement fini :

$$\{B_r(m_1), \dots, B_r(m_n)\}.$$

Puisque $B_r(m_j) \subset U_{i(j)}$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, la collection

$$\{U_{i(1)}, \dots, U_{i(n)}\}$$

est un sous-recouvrement de \mathcal{U} . \square

\square