Proposition

Soit $f: X \to Y$ une application continue entre deux espaces topologiques. Si X est connexe, alors $f(X) \subset Y$ est connexe pour la topologie induite.

Démonstration.

Supposons que $f(X)$ est non-connexe :

$$f(X) = U \cup V, \qquad U, V \in \mathcal{T}_{f(X)}, \quad U \cap V = \varnothing, \quad U \neq \varnothing \text{ et } V \neq \varnothing.$$

Par déf. de la top. induite, $\exists\, \tilde{U}, \tilde{W} \in \mathcal{T}_Y$ tq $U = f(X) \cap \tilde{U}$ et $V = f(X) \cap \tilde{V}$.
Puisque f est continue,

$$A := f^{-1}(\tilde{U}) = f^{-1}(U) \qquad \text{et} \quad B := f^{-1}(\tilde{V}) = f^{-1}(V)$$

sont ouverts dans X. De plus,

$$X = A \cup B \qquad A \cap B = \varnothing, \quad A \neq \varnothing \text{ et } B \neq \varnothing.$$

puisque

$$X = f^{-1}\big(f(X)\big) = f^{-1}\big(U \cup V\big) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = A \cup B$$

et $U, V \neq \varnothing \implies A, B \neq \varnothing$. Alors, X est non-connexe, une contradiction. □

Remarque

Dans cette proposition seulement X est supposé être connexe. En particulier, Y peut être non-connexe.

Comme corollaire, on obtient

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)

Supposons que X est connexe et $f \in C^0(X)$. Si $y_0 := f(x_0) \leq y_1 := f(x_1)$, alors toutes les valeurs $y \in [y_0,\ y_1]$ sont atteintes par f, càd l'équation

$$f(x) = y$$

a une solution pour tout $y \in [y_0,\ y_1]$.

Démonstration.

Puisque $f(X) \subset \mathbb{R}$ est connexe et $y_0, y_1 \in f(X)$, l'intervalle $[y_0, y_1]$ est contenu dans $f(X)$. □

Ainsi, le théorème des valeurs intermédiaires pour fonctions $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est un corollaire de la connexité de l'intervalle sauf qu'en général les sup et inf ne sont pas toujours atteintes.

Proposition

Être connexe est une propriété topologique, càd

$$\begin{array}{l} X \text{ est connexe et} \\ X \text{ et } Y \text{ sont homéomorphes} \end{array} \implies Y \text{ est connexe.}$$

Démonstration.

Supposons que $f\colon X \to Y$ est un homéomorphisme. Puisque X est connexe, $Y = f(X)$ est connexe aussi. □

Lemme

Un espace topologique X est non-connexe si et seulement s'il existe une fonction continue $f\colon X \to \{0,1\}$ et surjective (⇔ non-constante), où $\{0,1\}$ est muni de la topologie discrète.

Démonstration.

Supposons $\exists f$. Soit $U = f^{-1}(0)$ et $V = f^{-1}(1)$. Evidemment $X = U \cup V$. Puisque $\{0\}$ et $\{1\}$ sont des ouverts de $\{0,1\}$, U et V sont des ouverts de X. Puisque f est surjective ni U ni V n'est vide. Donc X est non-connexe.

Supposons que X est non-connexe. Alors

$$X = U \cup V, \qquad U, V \in \mathcal{T}_X, \quad U \cap V = \varnothing, \quad U \neq \varnothing \text{ et } V \neq \varnothing.$$

Définissons $f\colon X \to \{0,1\}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U, \\ 1 & \text{si } x \in V. \end{cases}$$

C'est une fonction continue puisque $f^{-1}(0) = U$ et $f^{-1}(1) = V$ sont des ouverts. En outre, f est surjective puisque ni U ni V ne sont vides. □

Proposition

Un produit $X \times Y$ de deux espaces topologiques est connexe si et seulement si X et Y sont connexes.

Démonstration.

Supposons que $X \times Y$ est connexe. Alors $X = p_1(X \times Y)$ et $Y = p_2(X \times Y)$ sont les images d'applications continues définies sur un espace connexe.

Supposons que X, Y sont connexes et que $F\colon X \times Y \to \{0,1\}$ est continue. Puisque $\iota_y\colon X \to X \times Y$, $\iota_y(x) = (x,y)$, est continue (pourquoi ?) $\forall\, y \in Y$, on a que

$$f_y\colon X \to \{0,1\}, \qquad f_y = F \circ \iota_y \quad \iff \quad f_y(x) = F(x,y)$$

est continue. Alors, f_y est constante parce que X est connexe. De la même manière,

$$f_x\colon Y \to \{0,1\}, \qquad f_x(y) = F(x,y)$$

est constante $\forall x \in X$. Alors, pour tout $(x,y), (x',y') \in X \times Y$ on a que

$$F(x,y) = f_x(y) = f_x(y') = F(x,y') = f_{y'}(x) = f_{y'}(x') = F(x',y'),$$

càd que F est constante. □

Exemple

- $\mathbb{R}^n$ est connexe ;
- Tout rectangle est connexe.

Proposition

Soit X un espace topologique et $A \subset X$ une partie connexe de X. Alors $\bar{A}$ est aussi connexe.

Démonstration.

Soit $f : \bar{A} \to \{0,1\}$ une fonction continue. Alors,

$$f|_A\colon A \to \{0,1\} \quad \text{est continue} \quad \Longrightarrow \quad f|_A \quad \text{est constante} \equiv 1.$$

Puisque $\left(\{0,1\}, \mathcal{T}^{discr}\right)$ est Hausdorff et A est dense dans $\bar{A}$, il existe au plus une fonction continue $F\colon \bar{A} \to \{0,1\}$ tq $F|_A \equiv 1$. Cette fonction existe bien et est évidemment la fonction constante. Par l'unicité, $f : \bar{A} \to \{0,1\}$ est constante. Donc, $\bar{A}$ est connexe. □

Connexité par arcs

Définition

Un espace topologique X est dit *connexe par arcs* si pour tout $x_0, x_1 \in X$ il existe un application continue $\gamma\colon [0,1] \to X$ tel que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = x_1$. Dans ce cas-là, γ s'appelle un chemin (arc) joignant x_0 à x_1.

Exemple

- $[0,1]$ est connexe par arcs : $\gamma(t) = (1-t)x_0 + tx_1$. Par contre, $[0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ n'est pas connexe par arc (Pourquoi ?).
- $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs (Pourquoi ?).
- Si $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est connexe par arc : Si x_0 et x_1 ne sont pas colinéaires, on peut définir
$$\gamma(t) = (1-t)x_0 + tx_1.$$
Sinon, on choisit x_2 qui n'est pas colinéaire avec x_0 et définit γ par exemple par
$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-2t)x_0 + 2t\,x_2 & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ (2-2t)x_2 + (2t-1)x_1 & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Exemple (suite)

- S^n est connexe par arcs si $n \geq 1$: Pour démontrer cela, on constate que
$$\pi\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n, \qquad \pi(x) := \frac{x}{\|x\|}$$
est continue et surjective. Pour $x_0, x_1 \in S^n$ on choisit $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tq $\pi(y_j) = x_j$. Si γ est un chemin dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ joignant y_0 à y_1, alors $\pi \circ \gamma$ est un arc dans S^n joignant x_0 à x_1. Ainsi, S^n est connexe par arcs.
- Si X et Y sont connexes par arcs, alors $X \times Y$ est aussi connexe par arcs : Pour deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) on choisit un chemin γ_X dans X joignant x_0 à x_1 et un chemin γ_Y dans Y joignant y_0 à y_1. On definit
$$\gamma\colon [0,1] \to X \times Y, \qquad \gamma(t) = \big(\gamma_X(t),\ \gamma_Y(t)\big).$$
C'est un chemin dans $X \times Y$ joignant (x_0, y_0) à (x_1, y_1).

Proposition

Soit X un espace topologique qui est connexe par arcs. Alors X est connexe.

Démonstration.

Supposons que X n'est pas connexe, càd $X = U \cup V$, où U et V sont des ouverts tq $U \cap V = \varnothing$. Choisissons $x_0 \in U$ et $x_1 \in V$. Alors, $\exists \gamma$ joignant x_0 à x_1.

Puisque γ est continue, $\gamma^{-1}(U), \gamma^{-1}(V) \subset [0,1]$ sont ouverts. En plus,

$$0 \in \gamma^{-1}(U) \text{ et } 1 \in \gamma^{-1}(V) \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma^{-1}(U) \neq \varnothing \neq \gamma^{-1}(V).$$

Alors, $[0,1]$ est la réunion de deux ouverts non-vides

$$[0,1] = \gamma^{-1}(X) = \gamma^{-1}(U \cup V) = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V).$$

C'est impossible parce que $[0,1]$ est connexe. $\square$

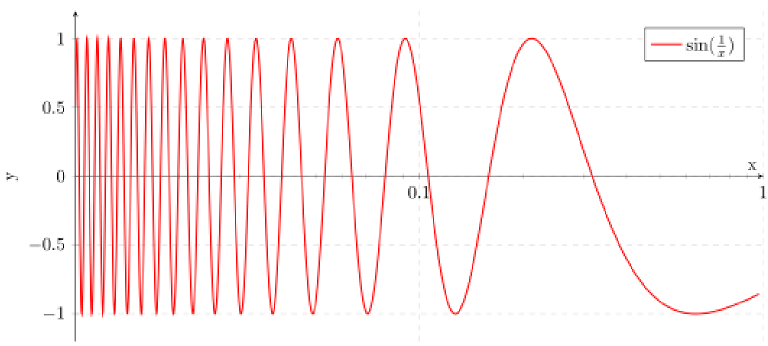
Cependant,

$$X \text{ est connexe} \qquad \not\Longrightarrow \qquad X \text{ est connexe par arcs.}$$

Pour construire un exemple, considérons

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y = \sin\frac{1}{x}\right\} \cup \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ y \in [-1,1]\right\}$$

$$= \overline{\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y = \sin\frac{1}{x}\right\}}.$$



Cet espace est connexe en tant que l'adhérence d'un espace connexe. Cependant, X n'est pas connexe par arcs : Soit π_0 la restriction de $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi(x,y) = x$, sur X. Alors, $\pi_0 : X \to [0,\infty)$ est continue et surjective. Si γ est un chemin joignant $(0,0)$ à $(1/2\pi, 0)$, $\pi_0 \circ \gamma : [0,1] \to [0, \frac{1}{2\pi}]$ est continue et donc surjective. Neanmoins, γ ne peut pas être continue en $t = 0$.

Composantes connexes

Nous allons montrer qu'un espace topologique X peut toujours s'écrire comme une union disjointe de sous-espaces connexes, appelés les *composantes connexes*.

Lemme

Soit X un espace topologique. Supposons qu'il existe une collection $\{A_i \subset X : i \in I\}$ de sous-espaces telle que

1. *Pour tout $i \in I$, A_i est connexe.*
2. *Pour tout $i, j \in I$, $A_i \cap A_j \neq \varnothing$.*

Alors, $A = \bigcup_i A_i$ est un sous-espace connexe. En particulier, si $X = \bigcup_i A_i$ alors X est connexe.

Démonstration.

Soit $f : A \to \{0, 1\}$ continue. Puisque chaque A_i est connexe, $f|_{A_i}$ est constante. Écrivons $f(A_i) = \{p_i\}$ où $p_i = 0$ ou 1. Mais pour tout $i, j \in I$, $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ donc $p_i = p_j$ ce qui implique que f est constante sur A. □

Définition

Soit X un espace topologique. Si $x \in X$, la composante connexe de X, notée C_x, est la réunion de tous les sous-ensembles connexes de X qui contiennent x.

Lemme

La composante connexe de x est connexe. De plus C_x est fermé dans X et deux composantes connexes C_x et C_y sont soit disjointes, soit égales.
C_x est le plus grand sous ensemble connexe de X qui contient x au sens où tout sous-ensemble connexe C' de X qui contient C_x coïncide avec C_x.

Démonstration.

Soient C_i et C_j deux sous-ensembles connexes contenants x. Donc, $C_i \cap C_j$ est non-vide et ainsi

$$\bigcup_{i \in I} \{C_i \mid C_i \ni x \text{ et } C_i \text{ est connexe }\}$$

est toujours connexe par le lemme précédent. En particulier, C_x est connexe en tant que la réunion de tous sous-ensembles connexes contenants x. □

Lemme

La composante connexe de x est connexe. De plus C_x est fermé dans X et deux composantes connexes C_x et C_y sont soit disjointes, soit égales.
C_x est le plus grand sous ensemble connexe de X qui contient x au sens où tout sous-ensemble connexe C' de X qui contient C_x coïncide avec C_x.

Démonstration (suite).

Puisque C_x est connexe, alors $\bar{C}_x$ est connexe. Donc, $\bar{C}_x$ est un sous-ensemble connexe qui contient $x \implies C_x \supset \bar{C}_x$ puisque C_x est la réunion de tous sous-ensembles connexes contenants $x \implies C_x = \bar{C}_x \Leftrightarrow C_x$ est fermé.

Si $C_x \cap C_y \neq \varnothing$, alors $C_x \cup C_y$ est connexe $\implies C_x = C_x \cup C_y = C_y$.

Si C' est connexe et contient x, alors $C' \subset C_x$. Si de plus $C' \supset C_x$, on a nécessairement que $C' = C_x$. □

Remarque

Supposons que le nombre des composantes connexes d'un espace topologique X est <u>fini</u>, donc

$$X = C_1 \cup \cdots \cup C_k.$$

Puisque tout C_i est fermé, le sous-ensemble $C_2 \cup \cdots \cup C_k$ est fermé. Donc, C_1 est ouvert en tant que le complément d'un fermé. De même, tout C_j est ouvert (et fermé).

Remarque

On peut définir les composantes connexes par arcs de la même manière. Bien que cette deux notions soient très proches, en général les composants connexes par arc et les composants connexes sont différents. Par exemple, l'espace

$$\overline{\{(x, \sin 1/x) \mid x > 0\}}$$

a seulement une composante connexe, mais deux composantes connexes par arcs.

Variétés topologiques

Définition

Soit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Un espace topologique Hausdorff X s'appelle *une variété topologique* de dimension n si tout point de X possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Pour expliquer : Si X est une variété topologique, alors X admet un recouvrement ouvert $\{U_i \mid i \in I\}$ tq pour tout $i \in I$ il existe un homéomorphisme $\varphi_i : U_i \to V_i$, où $V_i \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert.

Exemple

1. $\mathbb{R}^n$ est une variété topologique de dimension n. Plus généralement, tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une variété topologique de dimension n.
2. $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est une variété topologique de dimension n : S^n est Hausdorff comme un sous-espace de $\mathbb{R}^{n+1}$. De plus, $\left\{S^n \setminus \{S\}, S^n \setminus \{N\}\right\}$ est un recouvrement ouvert et on a déjà montré que $S^n \setminus \{S\}$ et $S^n \setminus \{N\}$ sont homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ (projection stéréographique).

Exemple (suite)

3. Le tore est une variété topologique de dimension 2. De la même manière, le ruban de Möbius, la bouteille de Klein et le plan projectif sont des variétés topologiques de dimension 2.
4. La réunion de deux droites qui se croisent, n'est pas une variété topologique (Pourquoi ?).
5. La réunion de deux sphères qui se touchent en un point n'est pas une variété topologique (Pourquoi ?).

Exercice

Démontrer que l'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ est une variété topologique de dimension n.

Théorème

Une variété topologique X est connexe ssi elle est connexe par arcs.

Démonstration.

On a de démontrer qu'une variété topologique connexe est connexe par arcs. On choisit un point $x_0 \in X$ quelconque et désigne

$$\mathcal{C}_{x_0} := \left\{x_1 \in X \mid \exists \gamma \in \mathcal{C}^0\big([0,1];\ X\big) \text{ tq } \gamma(0) = x_0 \text{ et } \gamma(1) = x_1 \right\}.$$

On va démontrer que $\mathcal{C}_{x_0}$ est ouvert. Soit $x_1 \in \mathcal{C}_{x_0}$ quelconque et $\varphi : U \to V$ un homéomorphisme comme dans la définition d'une variété topologique. Puisque $V \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, alors on peut trouver $r > 0$ tq $B_r\big(\varphi(x_1)\big) \subset V$. Désignons

$$U' := \varphi^{-1}\Big(B_r\big(\varphi(x_1)\big)\Big),$$

qui est un voisinage de x_1. Notons, que U' est connexe par arcs parce que U' est homéomorphe à $B_r\big(\varphi(x_1)\big)$. □

Démonstration (suite).

Si $x' \in U'$ et $\delta \in \mathcal{C}^0\big([0,1];\ U'\big)$ tq $\delta(0) = x_1$ et $\delta(1) = x'$, pour le chemin

$$\varepsilon(t) := \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2], \\ \delta(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

on a $\varepsilon(0) = x_0$ et $\varepsilon(1) = x'$. Ainsi, $U' \subset \mathcal{C}_{x_0}$ et, donc, $\mathcal{C}_{x_0}$ est ouvert.

On va démontrer que $X \setminus \mathcal{C}_{x_0}$ est ouvert. En effet, si $y \notin \mathcal{C}_{x_0}$, on peut choisir un voisinage U_y de y qui est homéomorphe à une boule ouverte dans $\mathbb{R}^n$. Si $U_y \cap \mathcal{C}_{x_0} \neq \varnothing$, un argument similaire donne que $y \in \mathcal{C}_{x_0}$. Ainsi, $U_y \subset X \setminus \mathcal{C}_{x_0}$ et, donc, $X \setminus \mathcal{C}_{x_0}$ est ouvert. Puisque $x_0 \in \mathcal{C}_{x_0} \implies \mathcal{C}_{x_0} \neq \varnothing$, par la connexité de X on a forcément que

$$X \setminus \mathcal{C}_{x_0} = \varnothing \qquad \Longleftrightarrow \qquad X = \mathcal{C}_{x_0}.$$

□

Exercice

On dit d'un espace topologique X qu'il est localement connexe par arcs si $\forall x \in X$ il existe un voisinage U de x qui est connexe par arcs. Généraliser la démonstration ci-dessus pour montrer que tout espace connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.