Rappels

Définition

La boule ouverte centrée en $m \in M$ de rayon $r > 0$ est l'ensemble
$$B_r(m) = \{m' \in M : d(m,m') < r\}.$$

Définition

Un sous-ensemble $U \subset M$ est dite ouvert si
$$\forall m \in U \quad \exists r > 0 \quad \text{tq} \quad B_r(m) \subset U.$$

Définition

Une suite (x_n) dans un espace métrique (M,d) converge vers $x \in M$ lorsque $n \to \infty$ si $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N > 0$ tq pour tout $n \geq N$ on a $d(x_n,x) < \varepsilon$.

Rappels II

Définition

Soient d, d' deux métriques sur l'ensemble M. Elles sont dites *Lipschitz équivalentes* (ou simplement équivalentes) s'il existe $A, B > 0$ tel que pour tout $x, y \in M$
$$A\,d(x,y) \leq d'(x,y) \leq B\,d(x,y).$$

Soient d et d' Lipschitz équivalentes. La suite (x_n) converge par rapport à d ssi (x_n) converge par rapport à d'.

Théorème (Critère des suites pour un fermé)

Soit M un espace métrique. Un sous-ensemble $A \subset M$ est fermé si et seulement si, pour toute suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers $m \in M$ on a que $m \in A$.

Rappels III

Théorème

Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $f\colon (M, d_M) \to (N, d_N)$ *est continue;*
2. $\forall m \in M$ *et* $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta(m, \varepsilon) > 0$ *tq*
$$d_M(m', m) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_N\big(f(m'), f(m)\big) < \varepsilon.$$
3. $\forall m \in M$ *et pour chaque suite* (x_n) *de points de* M *on a que*
$$\lim_{n\to\infty} x_n = m \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(m).$$

La topologie induite

Soit (M, d) un espace métrique. Pour tout $A \subset M$ on obtient une métrique sur A par restriction : $d_A\colon A \times A \to \mathbb{R}$, $\quad d_A = d|_{A\times A}$.
d_A s'appelle la métrique induite (de celle de M sur A).

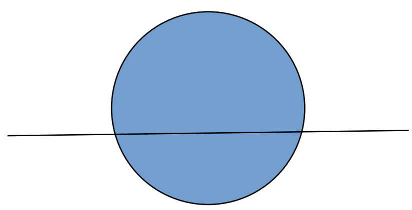
Exemple

Considérons $\mathbb{Z} \subset (\mathbb{R}, d_E)$. La métrique induite est $d_{\mathbb{Z}}(n, m) = |n - m|$. Remarquez que $\mathcal{T}_{d_{\mathbb{Z}}}$ est la topologie discrète (parce que $B_1(n) = \{n\}$) bien que $d_{\mathbb{Z}}$ et la métrique discrète ne soient pas Lipschitz équivalents.

Exercice

Montrer que $B_r^A(a) = \{a' \in A \mid d_A(a', a) < r\} = B_r^M(a) \cap A$.

Par
exemple, soit $M = \mathbb{R}^2$ muni de la métrique euclidienne et $A = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{[-10, 10] \times \{0\}\big\}$.
$B_2^A\big((0,1)\big)$ est non-connexe.



Proposition

Un sous-ensemble $U \subset A$ est ouvert par rapport à d_A ssi $\exists V \subset M$ qui est ouvert dans (M, d) tq $U = V \cap A$.

Démonstration.

Supposons que $U \subset A$ et un ouvert. Alors, $\forall u \in U \ \ \exists r = r(u) > 0$ tq $B_r^A(u) = \{u' \in U \mid d_A(u', u) < r\} \subset U$. Considérons

$$V := \bigcup_{u \in U} B^M_{r(u)}(u).$$

V est ouvert comme la réunion des ouverts et

$$V \cap A = \bigcup_{u \in U} \left(B^M_{r(u)}(u) \cap A\right) = \bigcup_{u \in U} B^A_{r(u)}(u) = U.$$

Inversement, supposons que $V \subset M$ est ouvert et $U = V \cap A$. Alors, $V \in \mathcal{T}_M$ $\implies \ \forall v \in V \quad \exists\, B^M_{r(v)}(v) \subset V$. En particulier, $\forall u \in U$ $B^A_{r(u)}(u) = B^M_{r(u)}(u) \cap A \subset V \cap A \implies V \cap A$ est ouvert dans (A, d_A). □

Ainsi, on a démontré que

$$\mathcal{T}_{d_A} = \left\{V \cap A \mid V \in \mathcal{T}_{(M,d)}\right\}. \tag{*}$$

Pour les espaces topologiques on *définit* la top. induite en utilisant (*) :

Définition

Soit $A \subset (X, \mathcal{T})$ un sous-ensemble non-vide d'un espace topologique. Définissons une collection de sous-ensembles de A par

$$\mathcal{T}|_A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}.$$

$\mathcal{T}|_A$ est une topologie sur A appelée *la topologie induite*.

Remarque

Quand on pense à $A \subset X$ comme étant un espace topologique pour la topologie induite, on dit que A est un *sous-espace* de X.

On va démontrer plus tard que la top. induite est bien une topologie.

Exemple

1. $(0,1) \subset \mathbb{R}$: $U \subset (0,1)$ est ouvert ssi U est ouvert dans $\mathbb{R}$ parce que si V est ouvert dans $\mathbb{R}$ et $U = V \cap (0,1)$, U est ouvert dans $\mathbb{R}$.
2. $[0,1] \subset \mathbb{R}$:
   - $[0,\ 0{,}1)$ est ouvert parce que $[0,\ 0{,}1) = (-2,\ 0{,}1) \cap [0,\ 1]$.
   - $[0,\ 0{,}1]$ n'est pas ouvert.
   - $(0{,}5,\ 1]$ est ouvert.
   - En général, un ouvert de $[0,1]$ est de la forme suivante
   $$[0,\varepsilon) \cup V \cup (\delta,1] \quad \text{ou} \quad [0,\varepsilon) \cup V \quad \text{ou} \quad V \cup (\delta,1] \quad \text{ou} \quad V,$$
   où V est ouvert dans $(0,1)$.
3. $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$: la topologie induite est la topologie standard parce que $(a,b) = B_r(m) \cap \mathbb{R}$ si $m = \left(\frac{a+b}{2},\ 0\right)$ et $r = \frac{b-a}{2}$.

Attn : Un ensemble ouvert dans A n'est pas nécessairement ouvert dans X !

Lemma

La topologie induite $\mathcal{T}|_A$ est bien une topologie sur A.

Démonstration.

T1. $A = X \cap A$, $\varnothing = \varnothing \cap A$.

T2. Soient $V_1, \ldots, V_k \in \mathcal{T}|_A$. Alors il existe $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{T}$ t.q. $V_j = U_j \cap A$. Or
$$V_1 \cap \cdots \cap V_k = U_1 \cap A \cap \cdots \cap U_k \cap A = U_1 \cap \cdots \cap U_k \cap A.$$
Puisque $\mathcal{T}$ est une topologie, $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{T}$. Donc $V_1 \cap \cdots \cap V_k \in \mathcal{T}|_A$.

T3. Soit $\{V_i : i \in I\}$ une collection quelconque d'éléments de $\mathcal{T}|_A$. Alors pour tout $i \in I$, il existe $U_i \in \mathcal{T}$ t.q. $U_i \cap A = V_i$. Or
$$\bigcup V_i = \bigcup (U_i \cap A) = \left(\bigcup U_i\right) \cap A.$$
Puisque $\mathcal{T}$ est une topologie, $\bigcup U_i \in \mathcal{T}$. Donc $\bigcup V_i \in \mathcal{T}|_A$. $\square$

Proposition

1. *Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\varnothing \neq A \subset X$. Soit $\iota : A \to X$ l'inclusion. Alors ι est $(\mathcal{T}|_A, \mathcal{T})$-continue.*
2. *Soit $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ continue et $\varnothing \neq A \subset X$. Alors, $f|_A := f \circ \iota : A \to Y$ est $(\mathcal{T}_X|_A, \mathcal{T}_Y)$-continue.*
3. *Soient $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques et $\varnothing \neq B \subset Y$. Alors une application $f : X \to B$ est $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y|_B)$-continue si et seulement si $\iota \circ f$ est $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y)$-continue.*

Démonstration de 2.

Soit $U \in \mathcal{T}_Y$. Alors,

$$\big(f \circ \iota\big)^{-1}(U) = \iota^{-1}\big(f^{-1}(U)\big) = f^{-1}(U) \cap A$$

est ouvert comme l'intersection des ouverts. □

Exercice

Démontrer 1. et 3.

Bases d'une topologie

Définition

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. *Une base de la topologie* est un sous-ensemble $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, $\mathcal{B} = \{B_j \mid j \in J\}$ tq tout ensemble ouvert de X est la réunion d'ensembles appartenant à $\mathcal{B}$:

$$\forall U \in \mathcal{T} \quad \exists K \subset J \quad \text{tq} \quad U = \textstyle\bigcup_{k \in K} B_k.$$

On observe :

- Tout $B \in \mathcal{B}$ est un ouvert de X ;
- $\mathcal{B}$ est une base de la topologie ssi $\forall U \in \mathcal{T} \quad \text{et} \quad \forall x \in U \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad \text{tq} \quad x \in B \subset U.$

Exemple

1. Pour un espace topologique quelconque $(X, \mathcal{T})$, $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ est toujours une base de la topologie.

Exemple (suite)

2. Pour $(X, \mathcal{T}^{discr})$, $\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ est une base. Donc, une base de la topologie n'est pas unique en général (en fait, presque jamais).
3. Dans un espace métrique, $\mathcal{B} := \{B_r(m) \mid m \in M,\ r \in (0, \infty)\}$ est une base. $\mathcal{B}' := \{B_r(m) \mid m \in M,\ r \in \mathbb{Q},\ r > 0\}$ est une base aussi.
4. $\mathcal{B} := \{B_r(p) \mid p \in \mathbb{Q}^n,\ r \in \mathbb{Q},\ r > 0\}$ est une base de la topologie de $\mathbb{R}^n$. En particulier, $\mathbb{R}^n$ admet une base de la topologie dénombrable.

Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ est une base de la topologie, on a que

B1 $\forall x \in X \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad$ tq $\quad x \in B$.

B2 $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \quad$ et $\quad \forall x \in B_1 \cap B_2 \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad$ tq $\quad x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

En effet, B1 est évidente. $B_1, B_2 \in \mathcal{T} \implies B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T} \implies$ B2.

B1 $\forall x \in X \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad$ tq $\quad x \in B$.

B2 $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \quad$ et $\quad \forall x \in B_1 \cap B_2 \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad$ tq $\quad x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Proposition

Soit $\mathcal{B}$ et une famille de sous-ensembles d'un ensemble $X \neq \varnothing$ quelconque. Si B1 et B2 sont satisfaites, il existe une unique topologie $\mathcal{T}$ tq $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$.

Démonstration.

On définit $\mathcal{T} := \{U_K := \bigcup_{k \in K} B_k \mid K \subset J\} \cup \{\varnothing\}$. Alors, $\mathcal{T}$ est une topologie parce que

- B1 $\implies X \in \mathcal{T}$; De plus, T3 est évident.
- $V_K \cap V_L = \left(\bigcup_{k \in K} B_k\right) \bigcap \left(\bigcup_{\ell \in L} B_\ell\right) = \bigcup_{k \in K, \ell \in L} \left(B_k \cap B_\ell\right)$;

  $B_k \cap B_\ell \overset{B2}{=} \bigcup_{x \in B_k \cap B_\ell} B'_{k,l} \in \mathcal{T} \implies V_K \cap V_L \in \mathcal{T}$.

Par définition de $\mathcal{T}$, $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$.

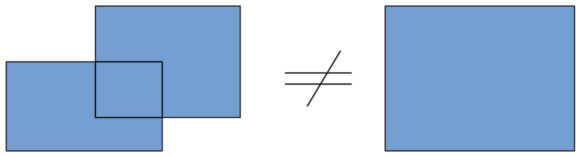
L'unicité : l'exercice. $\square$

TOPOLOGIE DU PRODUIT

Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ des espaces topologiques. On est tenté de définir la topologie sur $X \times Y$ par

$$\left\{U \times V \mid U \in \mathcal{T}_X,\ V \in \mathcal{T}_Y\right\}. \tag{*}$$

Pourtant, (*)
n'est pas une topologie parce que
T3 n'est pas satisfaite en général.



Lemme

(*) a les propriétés B1 et B2.

La démonstration : exercice.

Corollaire

(*) est la base d'une topologie sur $X \times Y$. Cette topologie s'appelle la topologie produit.

Exercice

Si $\mathcal{B}_X$ et $\mathcal{B}_Y$ sont des bases des topologies de X et Y respectivement, alors $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y := \left\{B \times C \mid B \in \mathcal{B}_X,\ C \in \mathcal{B}_Y\right\}$ est une base de la topologie du produit.

Exemple

Considérons $\mathbb{R}^2$ comme le produit : $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$. Une base de la topologie du produit est constituée de rectangles $(a, b) \times (c, d)$. La topologie du produit coïncide avec la topologie standard (= celle induite par la métrique de Manhattan) parce que :

- Si U est ouvert par rapport à la topologie standard, on a $\forall u \in U\ \ \exists r > 0$ tq $B_r^{Manh}(u) \subset U$. Alors, U est ouvert par rapport à la topologie produit, parce que $B_r^{Manh}(u)$ est un rectangle.
- Si U est ouvert par rapport à la topologie du produit, $\forall u \in U$ $\exists (a,b) \times (c,d) \subset U \quad \text{tq} \quad u \in (a,b) \times (c,d) \implies \exists r > 0 \quad \text{tq}$ $B_r^{Manh}(u) \subset U$. Alors, U est ouvert par rapport à la topologie standard.

Attention

Un ouvert dans $X \times Y$ n'est pas nécessairement de la forme $U \times V$. Par exemple, la boule ouverte $B_1(0) = \left\{x_1^2 + x_2^2 < 1\right\} \subset \mathbb{R}^2$ n'est pas un rectangle !

Exercice

Généraliser l'exemple précédent pour montrer ce qui suit : Si (M, d_M) et (N, d_N) sont des espaces métriques, alors la topologie du produit sur $M \times N$ coïncide avec $\mathcal{T}_{d_1}$ où

$$d_1\big((m_1, n_1), (m_2, n_2)\big) = d_M(m_1, m_2) + d_N(n_1, n_2).$$

Exercice

Soient X et Y deux espaces topologiques. Choisissons un $y \in Y$ et identifions X avec $X \times \{y\} \subset X \times Y$. Montrer que la topologie induite sur $X \times \{y\}$ coïncide avec la topologie initiale de X.

Proposition

Les projections $p_1 : X \times Y \to X$ et $p_2 : X \times Y \to Y$ sont continues.

Démonstration.

$U \in \mathcal{T}_X \implies p_1^{-1}(U) = U \times Y \in \mathcal{T}_{X \times Y} \implies p_1$ est continue. □

Proposition

Soit $f : Z \to X \times Y$ une application où X, Y, Z sont des espaces topologiques. Alors f est continue ssi $\quad p_1 \circ f : Z \to X \quad$ et $\quad p_2 \circ f : Z \to Y$ sont continues.

Démonstration.

f est continue $\implies p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ sont continues en tant que composition des applications continues.

Démonstration (suite).

Supposons que $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ sont continues. Soit $W \subset X \times Y$ ouvert pour la topologie produit et $z \in f^{-1}(W)$ quelconque. On va montrer qu'il existe un ouvert $T_z \subset f^{-1}(W)$ tq $z \in T_z$. Il s'ensuivra que $f^{-1}(W)$ est ouvert, puisque

$$f^{-1}(W) = \bigcup_{z \in W} T_z$$

est une union d'ouverts.

Écrivons $f(z) = (x, y) \in W$. Alors il existe des ouverts $x \in U \subset X$ et $y \in V \subset Y$ tq $U \times V \subset W$. L'hypothèse implique que $T_1 = (p_1 \circ f)^{-1}(U)$ et $T_2 = (p_2 \circ f)^{-1}(V)$ sont des ouverts. De plus $z \in T_1 \cap T_2$.

Il reste à vérifier que $T_1 \cap T_2 \subset f^{-1}(W)$. Mais si $\hat{z} \in T_1 \cap T_2$ alors $p_1(f(\hat{z})) \in U$ et $p_2(f(\hat{z})) \in V$, donc $f(\hat{z}) \in U \times V \subset W$. □

Homéomorphismes

Définition

Une application $f : X \to Y$ est *un homéomorphisme* si

1. f est bijective.
2. f est continue.
3. f^{-1} est continue.

S'il existe un homéomorphisme entre X et Y, on dit que ces espaces sont homéomorphes.

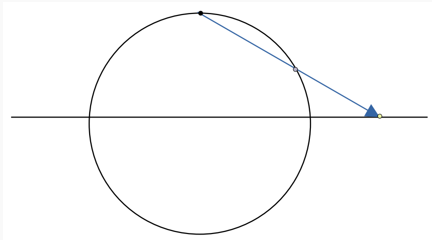
En topologie, les homéomorphismes jouent un rôle similaire aux

- isomorphismes entre deux groupes en algèbre ou
- isomorphismes entre deux espaces vectoriels en algèbre linéaire.

Attention

1. et 2. $\not\Longrightarrow$ 3. car $id : (X, \mathfrak{T}^{discr}) \to (X, \mathfrak{T}^{gros})$ est bijective et continue, mais $id^{-1} = id : (X, \mathfrak{T}^{gros}) \to (X, \mathfrak{T}^{discr})$ n'est pas continue (si X contient au moins 2 points).

Exemple

1. Un intervalle (a,b) quelconque est homéomorphe à $(0,1)$ car
$$f\colon (0,1) \to (a,b), \qquad f(x) = a + (b-a)x$$
est un homéomorphisme.
2. $$f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x}{1-|x|}$$
est un homéomorphisme.
3. $S^1 \setminus \{pt\}$ et $\mathbb{R}$ sont homéomorphes. Exercice : trouver les formules pour $f\colon S^1 \setminus \{pt\} \to \mathbb{R}$ et $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to S^1 \setminus \{pt\}$ et prouver que ces deux applications sont continues.

4. $\mathrm{id}\colon \left(\mathcal{C}^0(a,b), \mathcal{T}_{d_\infty}\right) \to \left(\mathcal{C}^0(a,b), \mathcal{T}_{d_1}\right)$ n'est pas un homéomorphisme, car id^{-1} n'est pas continue (bien que $\mathrm{id}\colon \left(\mathcal{C}^0(a,b), \mathcal{T}_{d_\infty}\right) \to \left(\mathcal{C}^0(a,b), \mathcal{T}_{d_1}\right)$ soit bijective et continue).

Proposition

Un homéomorphisme est une application ouverte, càd que $f(U)$ est un ouvert si U est ouvert.

Démonstration.

Nous désignons $g = f^{-1}\colon Y \to X$. La preuve découle d'identité
$$g^{-1}(A) = \left\{ y \in Y \mid g(y) = a \in A \;\Leftrightarrow\; y = g^{-1}(a) = f(a) \right\} = f(A)$$
qui est valide pour tout $A \subset X$. Autrement dit,
$$\left(f^{-1}\right)^{-1}(A) = f(A).$$
Puisque f^{-1} est continue, $f(A)$ est ouvert si A est ouvert. □

Remarque

Supposons que $f\colon X \to Y$ est bijective et continue. En fait, on a démontré que f est un homéomorphisme ssi f est une application ouverte (ou de manière équivalente ssi f est une application fermée)

Topologie quotient

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur X, càd que

- $x \sim x$;
- $x \sim y \implies y \sim x$;
- $x \sim y$ et $y \sim z \implies x \sim z$.

Désignons par $[x]$ la classe d'équivalence de x et par $X/\sim$ le quotient :

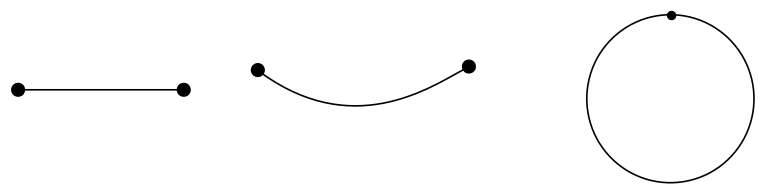
$$[x] = \{x' \in X \mid x' \sim x\} \qquad \text{et} \qquad X/\sim = \{[x] \in X \mid x \in X\}.$$

À titre d'exemple, définissons une relation d'équivalence sur $[0,1]$ par

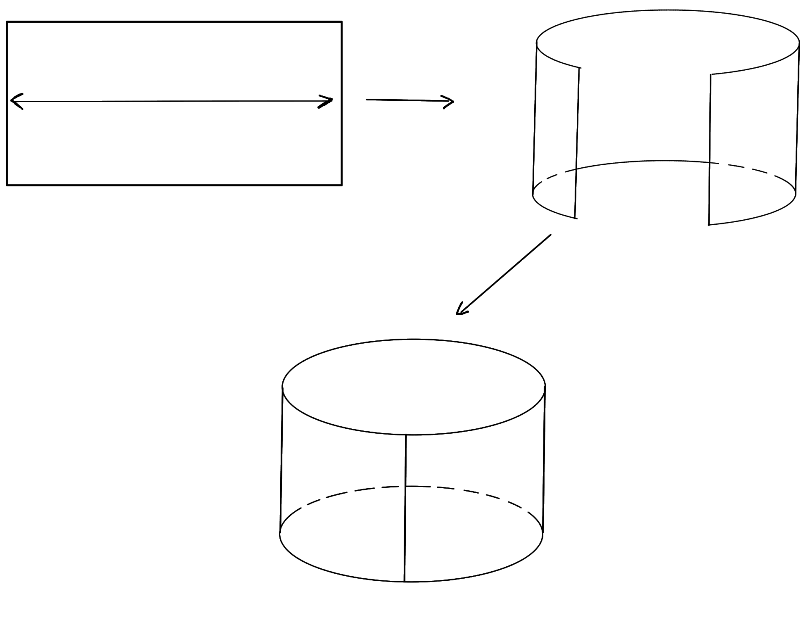
$$x \sim y \iff \begin{cases} x = y & \text{si } x, y \in (0,1), \\ x = y \text{ ou } x = 1 - y & \text{si } x, y \in \{0,1\}. \end{cases}$$

Effectivement, on doit identifier (« coller ») 0 et 1 (et seulement ces deux points).

En images,
cela se traduit comme suit :

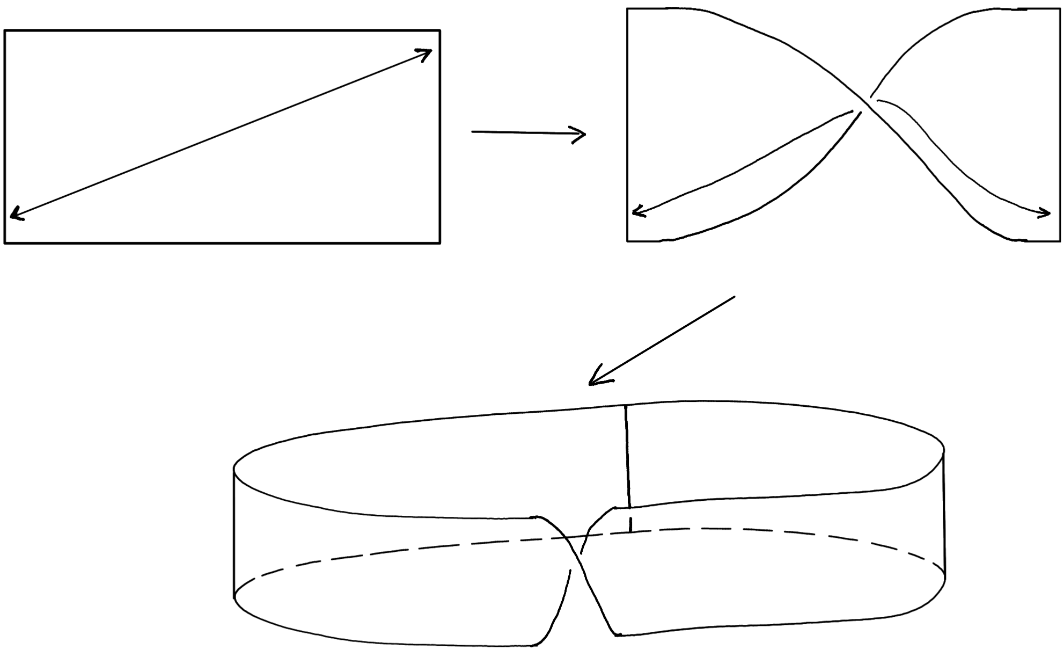


Un autre exemple :
$X = [0,1] \times [0,1]$, $(1, y) \sim (0, y)$ pour tout $y \in [0,1]$.

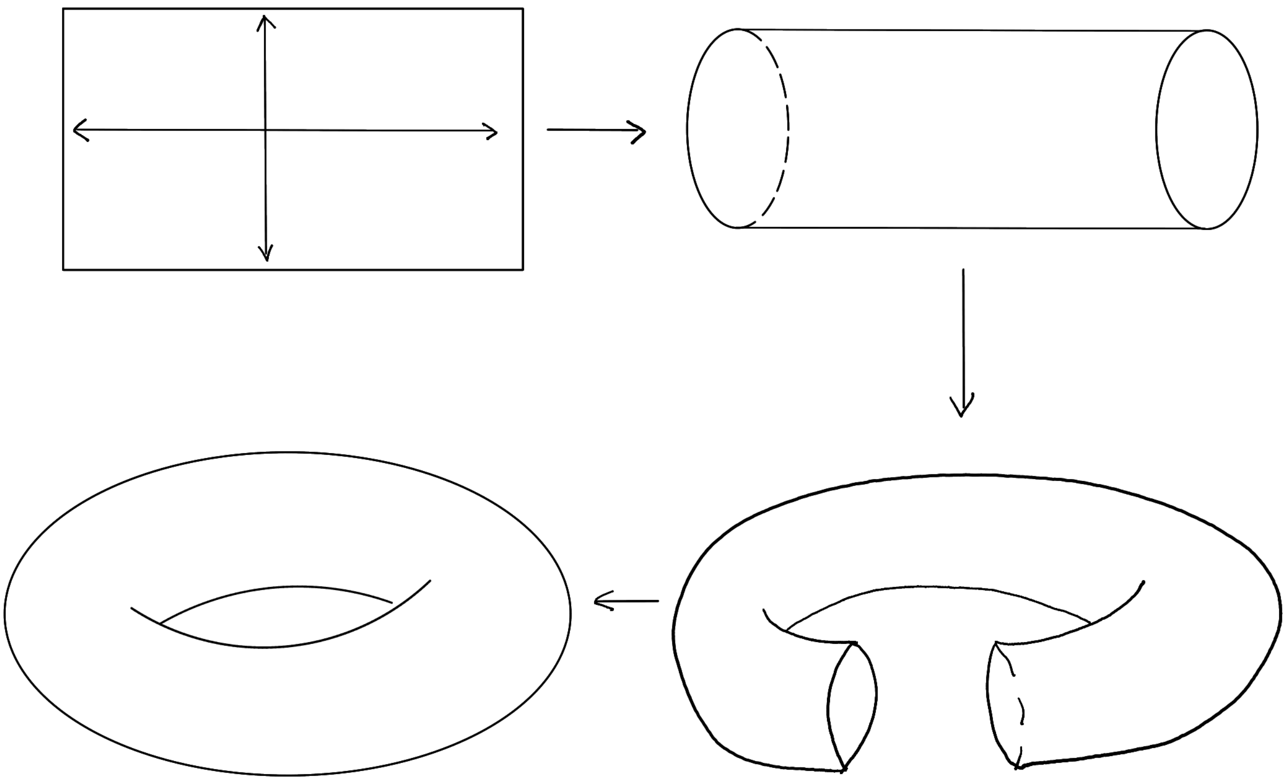


Ruban de Möbius

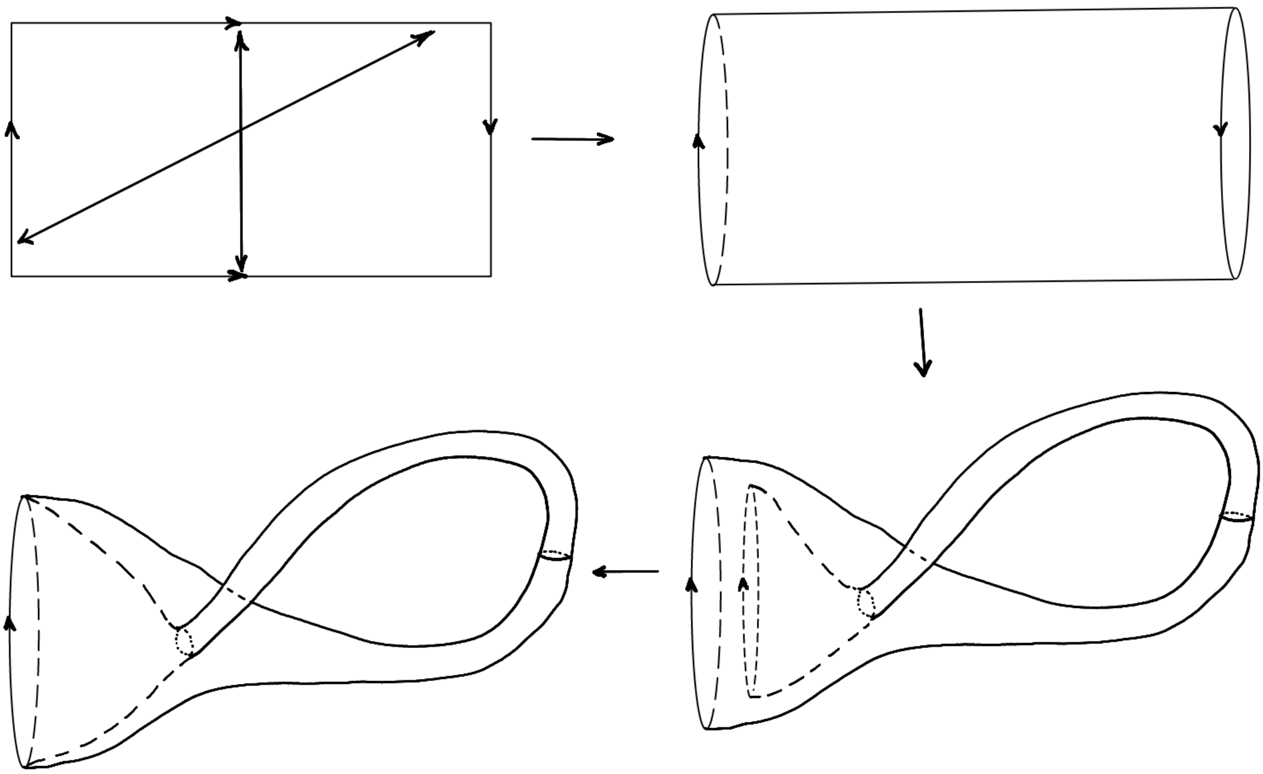
Encore un autre exemple : $X = [0,1] \times [0,1]$, $(1,y) \sim (0, 1-y)$ pour tout $y \in [0,1]$.



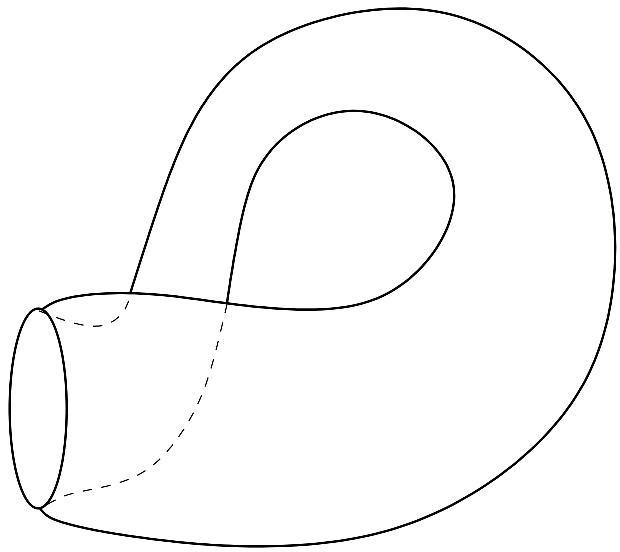
Le tore



La bouteille de Klein



La bouteille de Klein (suite)



On peut démontrer que La bouteille de Klein ne peut pas se plonger dans $\mathbb{R}^3$ (nous n’essaierons ni de prouver cette affirmation, ni même de la préciser au cours).

Nous avons construit le cercle, le ruban de Möbius, le tore et la bouteille de Klein comme des ensembles quotients. On peut munir ces ensembles (et les ensembles quotients en général) de la manière suivante.

Soit $\pi : X \to X/\sim$ la projection : $\pi(x) = [x] = \{x' \in X \mid x' \sim x\}$.

Définition

Soit X un espace topologique et $\sim$ une relation d'équivalence sur X quelconque. La famille $\mathcal{T}_{X/\sim}$ définie par

$$\mathcal{T}_{X/\sim} \ni U \iff \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$$

s'appelle *la topologie quotient* sur $X/\sim$.

Lemme

La topologie quotient est bien une topologie.

Démonstration.

Désignons $Y := X/\sim$.
T1 : $\pi^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $\pi^{-1}(Y) = X$.

T2 : $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{T}_Y \iff \pi^{-1}(U_j) \in \mathcal{T}_X$ pour tout $j = 1, \ldots, k$. Alors,

$$\pi^{-1}(U_1 \cap \cdots \cap U_k) = \pi^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \pi^{-1}(U_k) \in \mathcal{T}_X.$$

Donc $U_1 \cap \cdots \cap U_k \in \mathcal{T}_Y$.

T3 : Soit $\{U_i : i \in I\}$ une collection d'éléments $U_i \in \mathcal{T}_Y \iff \pi^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}_X$. Alors,

$$\pi^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} U_i\Big) = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}_X.$$

Donc $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_Y$. □