

Лекции
По математическому анализу Т.П. Лукашенко

hayer, the typemaster; dr_droll corrections

17 сентября 2014 г.

Часть III

Лекции третьего семестра

Глава 1

Определение 1.1. Пусть $\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$ — последовательность, занумерованная целыми числами начиная с n и далее по возрастанию. Тогда выражение вида $a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots = \sum_{k=m}^{\infty} a_k$ называется бесконечным рядом.

Изменением нумерации общий случай можно свести к случаю $n = 1$ или $n = 0$. Тоже можно получить при $n > 1$ добавлением нулевых членов или заменой начальных членов их суммой в случае $n < 0$.

Определение 1.2. $S_N = \sum_{k=m}^N a_k$ — частичная сумма с номером N . $S_N = 0$, если $N < m$.

Если существует предел:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$$

то его называют суммой ряда S . Если a_k — действительные числа, то S действительное число или $\pm\infty$. Ряд называется сходящимся, если его сумма конечна. Если это не так, то ряд называют расходящимся.

Утверждение 1.1. *Критерий Коши.*

Числовой ряд сходится тогда и только тогда, когда:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > N \quad \forall p \in \mathbb{N} : |S_{m+p} - S_m| < \epsilon$$

Утверждение 1.2. *Необходимое условие сходимости.*

$$\text{Если ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится, то } a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Определение 1.3. Если ряд сходится и S — его сумма, то $r_n = S - S_n$ называется остатком ряда с номером n .

Определение 1.4. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называют абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Теорема 1.1. *Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ абсолютно сходится, то он сходится.*

Доказательство. По критерию Коши, $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > N \quad \forall p \in \mathbb{N} : |S_{m+p} - S_m| < \epsilon$. Так как $|S_{m+p} - S_m| \leq \sum_{k=m+1}^{m+p} |a_k|$, то выполняется критерий Коши для исходного ряда, и он сходится. \square

Определение 1.5. Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то его называют сходящимся условно.

Свойства

1. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится (сходится абсолютно) и \mathcal{S} — его сумма, то для любого числа α ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k$ сходится.

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^n \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^n a_k = \alpha \mathcal{S}_n$$

Если существует предел частичных сумм исходного ряда равный \mathcal{S} , то $\mathcal{S}_\alpha = \alpha \mathcal{S}$ \square

2. Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся (абсолютно сходятся) и \mathcal{S}_a и \mathcal{S}_b — их суммы, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ сходится (сходится абсолютно) и его сумма — $\mathcal{S}_a + \mathcal{S}_b$

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_a + \mathcal{S}_b$$

Так как

$$\sum_{k=1}^n |a_k + b_k| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| + \sum_{k=1}^n |b_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|, \text{ то } \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|$$

— монотонная ограниченная последовательность и, следовательно, сходится. \square

3. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится (абсолютно сходится) и \mathcal{S} его сумма, n_k — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_j \right)$, где $n_0 = 0$, сходится (сходится абсолютно) и \mathcal{S} — его сумма.

Доказательство. Последовательность частичных сумм сгруппированного ряда — это подпоследовательность \mathcal{S}_{n_k} последовательности частичных сумм начального ряда. Последовательность:

$$\sum_{k=1}^N \left| \sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n_N} |a_j|$$

ограничена, тогда первая сумма — монотонная ограниченная последовательность, которая сходится. \square

4. Если члены ряда $a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, n_k — строго возрастающая последовательность натуральных чисел и $\sup_k (n_k - n_{k-1}) < \infty$, сгруппированный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_j \right)$, где $n_0 = 0$, сходится \mathcal{S} — его, сумма то начальный ряд также сходится и \mathcal{S} — его сумма.

Доказательство. Для любого $m \in \mathbb{N}$ найдем такое натуральное r , что $n_{r-1} < m \leq n_r$. Тогда:

$$|\mathcal{S}_{n_r} - \mathcal{S}_m| \leq \sum_{k=m+1}^{n_r} |a_k| \leq \sum_{k=n_{r-1}+1}^{n_r} |a_k| \leq \sum_{k=n_r-l}^{n_r} |a_k|,$$

где $\sup_k (n_k - n_{k-1}) \leq l$. Последняя сумма $= \bar{o}(1)$. Следовательно, если $\mathcal{S}_{n_r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \mathcal{S}$, то $\mathcal{S}_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathcal{S}$ \square

Глава 2

Ряды неотрицательных чисел

Признаки сходимости рядов неотрицательных чисел

TODO: Вставить замечания

1. Если дан ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, то ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность частичных сумм S_n ограничена.
2. (Признак сравнения) Если даны ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $0 \leq a_k \leq b_k$, $k > K$, то из сходимости второго ряда следует сходимость первого, а из расходимости первого расходимость второго.

Доказательство.

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^K a_k + \sum_{k=K+1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^K a_k + \sum_{k=K+1}^n b_k \leq \sum_{k=1}^K a_k + \sum_{k=1}^n b_k \leq \sum_{k=1}^K a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Из сходимости второго ряда следует ограниченность частичных сумм первого, а значит и сходимость первого.

Если $n > K$, $p \geq 0$, то $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k$, поэтому из выполнения критерия Коши для второго ряда следует выполнение критерия Коши для первого. \square

3. (Сравнения) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ — числовые ряды с неотрицательными членами. Если

$$0 < \alpha \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \beta < \infty, \forall k > K,$$

то числовые ряды одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство. $0 \leq a_k \leq \beta b_k$, поэтому, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то сходится $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Так как $0 \leq b_k \leq \frac{a_k}{\alpha}$, То если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то сходится и второй. \square

4. (Сравнения) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ — числовые ряды со строго положительными членами. Если

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}, \forall k \geq K,$$

то из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Доказательство.

$$\prod_{k+K}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \prod_{k+K}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{b_k}, \text{ т.е. } \frac{a_n}{a_K} \leq \frac{b_n}{b_K}, n > K$$

Значит, $a_n \leq \frac{a_K}{b_K} b_n, n > K$, поэтому из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ \square

5. (Д'Алабера) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — ряд с неотрицательными членами. Если

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1 \text{ при } n \geq K$$

то ряд сходится. Если

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1 \text{ при } n \geq K$$

То члены ряда не стремятся к нулю, и ряд расходится

Доказательство. Возьмём $b_k = q^k$ — геометрическую прогрессию, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится. Далее используем признак сравнение. Другой случай очевиден. \square

6. (Коши) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — ряд с неотрицательными членами. Если $\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1$ при $k \geq K$, то ряд сходится, а если $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ для бесконечного числа номеров, то члены ряда не стремятся к нулю и ряд расходится.

Доказательство. Если $\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1$, то повторому признаку ряд сходится. \square

7. (Интегральный Маклорена-Коши) Пусть $f(x)$ — неотрицательная невозрастающая функция на $[1, +\infty]$. Тогда

$$0 \leq \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx \leq f(1)$$

Ряд и интеграл одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=1}^n \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right) = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx = \\ &= f(1) + \sum_{k=2}^n \left(f(k) - \int_{k-1}^k f(x) dx \right) - \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(1) \end{aligned}$$

Тогда частичные интегралы и суммы ограничены одновременно. \square

8. (Признак Куммера) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — ряд со строго положительными членами, b_k — последовательность строго положительных чисел,

$$v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1}$$

Если $v_k \geq l \geq 0$ при $k \geq K$, то ряд сходится. Если $v_l \leq 0$ при $k \geq K$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k)^{-1}$ расходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ также расходится.

Доказательство.

$$v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1} \geq l > 0, \quad k \geq K$$

$$a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1} \geq l a_{k+1}, \quad k \geq K$$

$$\sum_{k=K}^{n-1} (a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1}) = a_K b_K - a_n b_n \geq l \sum_{k=K}^{n-1} a_{k+1} = l \sum_{j=K+1}^n a_j$$

Так как $a_K b_K \geq l \sum_{j=K+1}^n a_j$, то частичные суммы ряда $\sum_{j=K+1}^{\infty} a_j$ ограничены и, значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Итак,

$$v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1} \leq 0 \quad \text{при } k \geq K,$$

т.е. $a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1} \leq 0$ при $k \geq K$. Значит,

$$\sum_{k=K}^{n-1} (a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1}) = a_K b_K - a_n b_n \leq 0, \quad n > K$$

отсюда: $a_n \geq a_K b_K - (b_n)^{-1}$. Из расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ \square

9. (Признак Раабе) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — ряд со строго положительными членами. Если

$$k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) > q > 1, \quad k \geq K,$$

то ряд сходится. Если

$$k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) \leq 1, \quad k \geq K,$$

то ряд расходится.

Доказательство. Возьмем $b_k = k$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k)^{-1}$ расходится.

$$v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} k - (k+1) = k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} \right) - 1$$

И пользуемся признаком Куммера. □

10. (Признак Гаусса) Пусть

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \quad a_k > 0, \quad \frac{a_k}{a_{k+1}} = \alpha + \frac{\beta}{k} + \frac{\gamma_k}{k^{1+\epsilon}},$$

где $\alpha, \beta, \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, \gamma_k$ — ограниченная числовая последовательность. Тогда при $\alpha > 1$ или $\alpha = 1, \beta > 1$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а при $\alpha < 1$ или $\alpha = 1, \beta \leq 1$ — расходится.

Доказательство.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \alpha, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{\alpha} (\alpha \neq 0)$$

Тогда по признаку Даламбера ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$

При $\alpha = 1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) = \beta$$

тогда по признаку Раабе ряд сходится при $\beta > 1$ и расходится при ≤ 1 .
При $\alpha = 1, \beta = 1$ воспользуемся признаком Куммера с $b_k = k \ln k, k \geq 2$.

Ряд обратных к b расходится по интегральному признаку, так как расходится соответствующий интеграл

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{\gamma_k}{k^{1+\epsilon}} \right) k \ln k - (k+1) \ln(k+1) = \\ &= (k+1) \ln k + \frac{\gamma_k}{k^\epsilon} \ln k - (k+1) \ln(k+1) = \frac{\gamma_k \ln k}{k^\epsilon} - \ln \left(\frac{k+1}{k} \right)^{k+1} \\ &\quad \frac{\gamma_k \ln k}{k^\epsilon} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \\ &\quad \ln \left(\frac{k+1}{k} \right)^{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1 \\ &\quad \frac{\gamma_k \ln k}{k^\epsilon} - \ln \left(\frac{k+1}{k} \right)^{k+1} \rightarrow -1 \end{aligned}$$

□

Теорема 2.1. *Если выполнено условие сходимости Д'Аламбера, то выполнено условие сходимости ряда Коши.*

Доказательство.

$$a_n = a_K \prod_{k=K}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq a_K q^{n-K}, \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{a_K} q^{1-\frac{K}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 * q < 1$$

Если взять $p, q < p < 1$, то, начиная с некоторого номера $\sqrt[n]{a_n} < p < 1$ \square

Глава 3

Ряды с членами разных знаков или с членами — комплексными числами.

Теорема 3.1. (Признак Лейбница) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — ряд со знакоперевающими членами, которые по модулю монотонно стремятся к нулю. Тогда ряд сходится и остаток $|r_n| \geq |a_{n+1}| \geq |a_n|$.

Доказательство. Пусть $a_1 > 0$. Тогда $s_{2n} = \sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k})$ — неубывающая последовательность, $s_{2n+1} = a_1 + \sum_{k=1}^n (a_{2k} + a_{2k+1})$ — невозрастающая последовательность, $s_{2n} \leq s_{2n+1} = a_1 + \sum_{k=1}^n (a_{2k} + a_{2k+1}) \leq 0$ — невозрастающая последовательность, $s_{2n} \leq s_{2n+1}$.

Значит, s_{2n} — неубывающая, ограниченная сверху последовательность. s_{2n+1} — невозрастающая, ограниченная снизу последовательность. Они сходятся и, так как $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} = o(1)$, то имеют общий предел s .

$$r_{2n+1} = \sum_{k=2n+2}^{\infty} a_k = \underbrace{a_{2n+2}}_{\leq 0} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \underbrace{(a_{2k-1} + a_{2k})}_{\geq 0} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{(a_{2k} + a_{2k+1})}_{\leq 0}$$

Следовательно,

$$a_{2n+2} \leq r_{2n+1} \leq 0, |r_{2n+1}| \leq |a_{2n+2}| \leq |a_{2n+1}|$$

$$r_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=n}^{\infty} \underbrace{(a_{2k+1} + a_{2k+2})}_{\geq 0} = \underbrace{a_{2n+1}}_{\geq 0} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{(a_{2k-1} + a_{2k})}_{\leq 0}$$

Следовательно $0 \leq r_{2n} \leq a_{2n+1} \leq |a_{2n}|$

□

Преобразование Абеля

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^n u_k v_k &= \sum_{s=m-1}^{n-1} U_s (v_s - v_{s+1}) + U_n v_n - U_{m-1} v_{m-1} = \\ &= \sum_{k=m}^n U_k (v_k - v_{k+1}) + U_n v_n - U_{m-1} v_m, \\ \text{где } U_n &= \sum_{k=1}^n u_k, U_0 = 0, v_0 = 0\end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^n u_k v_k &= \sum_{k=m}^n (U_k - U_{k-1}) v_k = \sum_{k=m}^n U_k v_k - \sum_{k=m}^n U_{k-1} v_k = \\ &= \sum_{k=m}^n U_k v_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} U_k v_{k+1} = \sum_{k=m-1}^{n-1} U_k (v_k - v_{k+1}) + U_n v_n - U_{m-1} v_m = \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} U_k (v_k - v_{k+1}) + U_n v_n - U_{m-1} v_m\end{aligned}$$

□

Последовательность ограниченной вариации.

Определение 3.1. Последовательность $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется последовательностью ограниченной вариации, если сходится ряд модулей разниц между соседними членами

Теорема 3.2. *Последовательность действительных чисел является последовательностью ограниченной вариации тогда и только тогда, когда её можно представить как разность двух неубывающих (невозрастающих) сходящихся последовательностей*

Доказательство. (Достаточность) Монотонная сходящаяся последовательность v_k является последовательностью ограниченной вариации. Действительно, если v_k — невозрастающая последовательность, то $\sum_{k=1}^n |v_k - v_{k+1}| = \sum_{k=1}^n (v_k - v_{k+1}) = v_1 - v_{n+1}$ — имеет предел при $n \rightarrow \infty$, следовательно, последовательность имеет ограниченную вариацию.

Сумма, разность последовательностей ограниченной вариации являются последовательностями ограниченной вариации. Для любого числа α и VB-последовательности v_k αv_k ограничена.

(Необходимость) Последовательность $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} |v_k - v_{k+1}|$ — неубывающая, $G_n = \sum_{k=1}^{n-1} |v_k - v_{k+1}| + (v_k - v_{k+1})$ — неубывающая последовательность, $v_n = v_1 - \sum_{k=1}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) = S_n + v_1 - G_n = S_n - (-v_1 + G_n)$ Домножением на минус единицу можно получить разность двух невозрастающих последовательностей. □

Теорема 3.3. Если v_n — последовательность ограниченной вариации, то она сходится

Доказательство. $v_n = v_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$, ряд $\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$ сходится абсолютно. \square

Глава 4

Ряды

1. **Признак Абеля.** Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится, а v_k — последовательность ограниченной вариации, то сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$
2. **Признак Дирихле.** Если последовательность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ ограничена, а v_k — сходящаяся к 0 VB-последовательность, то сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$.

Доказательство.

$$\sum_{k=m}^{\infty} u_k v_k = \sum_{k=m-1}^{n-1} \mathcal{U}_k (v_k - v_{k+1}) + \mathcal{U}_n v_n - \mathcal{U}_{m-1} v_{m-1}$$

В обоих случаях \mathcal{U}_k ограничена, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (v_k - v_{k+1})$ сходится.

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists N_1) \sum_{k=n_1+1}^{\infty} < \epsilon,$$

тогда при $n, m > N_1 + 1$

$$\left| \sum_{k=m-1}^{n-1} \mathcal{U}_{v_k - v_{k+1}} \right| \leq \sup_k |\mathcal{U}_k| * \epsilon$$

В признаке Абеля \mathcal{U}_k и v_k сходятся, значит последовательность $\mathcal{U}_k v_k$.

В признаке Дирихле \mathcal{U}_k ограничена, $V_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \rightarrow$ сходится последовательность $\mathcal{U}_k v_k$.

В обоих случаях

$$(\forall \epsilon > 0) (\exists N_2) (\forall n, m > N_2) |\mathcal{U}_m v_m - \mathcal{U}_{m-1} v_{m-1}| < \epsilon$$

Тогда $\forall n, m > \max\{N_1 + 1, N_2\}$ имеем

$$\left| \sum_{k=m}^n u_k v_k \right| < \sup_k |\mathcal{U}_k| * \epsilon + \epsilon,$$

следовательно, выполнен критерий Коши.

□

Следствие. Признак Лейбница следует из признака Дирихле.

$$u_k = (-1)^k$$

Определение 4.1. Пусть $k(i)$ — взаимно-однозначное отображение $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Пусть дан ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Тогда $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k(i)}$ называется его перестановкой.

Теорема 4.1. (Коши). Если ряд сходится абсолютно, то любая его перестановка тоже сходится абсолютно, и его сумма равна сумме исходного ряда.

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^n |a_{k(i)}| \leq \sum_{k=1}^{\max_{i=1, \dots, n} k(i)} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$$

TODO $k()$ fix Следовательно есть абсолютная сходимость.

Пусть $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N) \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \epsilon$$

Пусть $M = \max_{k(i) \leq N} (i)$. Тогда $\forall m > M$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^m a_{k(i)} - S \right| &\leq \left| \sum_{i=1}^m a_{k(i)} - \sum_{k=1}^N a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^N a_k - S \right| < \\ &< \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < 2\epsilon \end{aligned}$$

Следовательно $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m a_{k(i)} = S$ □

Теорема 4.2. (Римана). Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ — условно-сходящийся ряд действительных чисел. Тогда $\forall S \in \mathbb{R}$ найдется такая перестановка $k(i)$ членов ряда, что $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k(i)} = S$

Утверждение. (В обозначениях теоремы 4.2) бесконечно много $a_k \geq 0$ и бесконечно много $a_k < 0$

Доказательство. пусть u_j — занумерованные $a_k \leq 0$ в порядке роста k , а v_j — аналогично для $a_k < 0$. Тогда суммы обоих последовательностей расходятся к $\pm\infty$. Действительно, если бы оба сходились, то сходил бы абсолютно исходный ряд. Если бы расходился только один из этих рядов, то расходился бы и исходный □

Доказательство. (Теоремы 4.2).

$S \in \mathbb{R}$

Найдется такое n_1 , что $\sum_{j=1}^{n_1} u_j \geq S$, существует наименьшее m_1 такое, что

$$\sum_{j=1}^{n_1} u_j + \sum_{i=1}^{m_1} v_i \leq S$$

$$u_1, \dots, u_{n_1}, v_1, \dots, v_{m_1}$$

Существует наименьшее $n_2 > n_1 : \sum_{j=1}^{n_2} u_j + \sum_{i=1}^{m_1} v_i > \mathcal{S}$

Существует наименьшее $m_2 > m_1 : \sum_{j=1}^{n_2} u_j + \sum_{i=1}^{m_2} v_i < \mathcal{S}$

Существует наименьшее $n_3 > n_2 : \sum_{j=1}^{n_3} u_j + \sum_{i=1}^{m_1} v_i > \mathcal{S} \dots$

$$\sum_{j=1}^{n_r} u_j + \sum_{i=1}^{m_2} v_i - \mathcal{S} < 0 \text{ и } \left| \sum_{j=1}^{n_r} u_j + \sum_{i=1}^{m_r} v_i - \mathcal{S} \right| \leq |v_{m_r}|$$

$$\sum_{j=1}^{n_{r+1}} u_j + \sum_{i=1}^{m_r} v_i - \mathcal{S} > 0 \text{ и } \left(\sum_{j=1}^{n_{r+1}} u_j + \sum_{i=1}^{m_r} v_i - \mathcal{S} \right) \leq u_{n_{r+1}}$$

Суммы переставленного ряда с номерами

$$\mathcal{S}_{n_r+m_r} \text{ и } \mathcal{S}_{n_{r+1}+m_r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \mathcal{S}$$

Если $n_r + m_r \leq l \leq n_{r+1} + m_r$, то

$$\mathcal{S}_{n_r+m_r} \leq \mathcal{S}_l \leq \mathcal{S}_{n_{r+1}+m_r}$$

Если $n_{r+1} + m_r \leq p \leq n_{r+1} + m_{r+1}$, то

$$\mathcal{S}_{n_{r+1}+m_r} \leq \mathcal{S} \leq \mathcal{S}_{n_{r+1}+m_{r+1}}$$

Следовательно, последовательность частичных сумм $\rightarrow \mathcal{S}$

$\mathcal{S} = +\infty$

Если $n_r + m_r \leq l \leq n_{r+1} + m_r$, то

$$\mathcal{S}_{n_r+m_r} \leq l \leq n_{r+1} + m_r$$

$$\exists n_1 : \sum_{j=1}^{n_1} u_j > 1$$

$$\exists n_2 : \sum_{j=1}^{n_2} u_j + v_1 > 2 \dots$$

$$\mathcal{S}_{n_k+(k+1)} \rightarrow +\infty \quad \mathcal{S}_{n_k+k} \rightarrow +\infty, \text{ так как } v_k \rightarrow 0$$

Аналогично для $\mathcal{S} = -\infty$

□