Лекции
По математическому анализу Т.П. Лукашенко

hayer, the typemaster; dr_droll corrections

17 сентября 2014 г.

Часть III

Лекции третьего семестра

Глава 1

Определение 1.1. Пусть $\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$ — последовательность, занумерованная целыми числами начиная с n и далее по возростанию.
Тогда выражение вида $a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots = \sum_{k=m}^{\infty} a_k$ называется бесконечным рядом.

Изменением нумерации общий случай можно свести к случаю $n = 1$ или $n = 0$. Тоже можно получить при $n > 1$ добавлением нулевых членов или заменой начальных членов их суммой в случае $n < 0$.

Определение 1.2. $\mathcal{S}_N = \sum_{k=m}^{N}$ — частичная сумма с номером N.
$\mathcal{S}_N = 0$, если $N < m$.
Если существует предел:

$$\lim_{N\to\infty} \mathcal{S}_N = \mathcal{S}$$

то его называют суммой ряда $\mathcal{S}$. Если a_k — действительные числа, то $\mathcal{S}$ действительное число или $\pm\infty$. Ряд называется сходящимся, если его сумма конечна. Если это не так, то ряд называют расходящимся.

Утверждение 1.1. *Критерий Коши.*
Числовой ряд сходится тогда и только тогда, когда:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > N \quad \forall p \in \mathbb{N} : |\mathcal{S}_{m+p} - \mathcal{S}_m| < \epsilon$$

Утверждение 1.2. *Необходимое условие сходимости.*

$$\textit{Если ряд } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \textit{ сходится, то } a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Определение 1.3. Если ряд сходится и $\mathcal{S}$ — его сумма, то $r_n = \mathcal{S} - \mathcal{S}_n$ называется остатком ряда с номером n.

Определение 1.4. Ряд $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} a_k$ называют абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} |a_k|$.

Теорема 1.1. *Если ряд $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} a_k$ абсолюно сходится, то он сходится.*

Доказательство. По критерию Коши, $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m > N \quad \forall p \in \mathbb{N} : |\mathcal{S}_{m+p} - \mathcal{S}_m| < \epsilon$ Так как $|\mathcal{S}_{m+p} - \mathcal{S}_m| \le \sum_{k=m+1}^{m+p} |a_k|$, то выполняется критерий Коши для исходного ряда, и он сходится. □

Определение 1.5. Если ряд сходится, но не сходится абсолютно, то его называют сходящимся условно.

Свойства

1. Если ряд $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}$ сходится (сходится абсолютно) и $\mathcal{S}$ — его сумма, то для любого числа α ряд $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \alpha a_k$ сходится.

   Доказательство.

   $$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \alpha a_k = \alpha \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} a_k = \alpha\, \mathcal{S}_n$$

   Если существует предел частичных сумм исходного ряда равный $\mathcal{S}$, то $\mathcal{S}_\alpha = \alpha\, \mathcal{S}$ □

2. Если ряды $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} b_k$ сходятся (абсолютно сходятся) и $\mathcal{S}_a$ и $\mathcal{S}_b$ — их суммы, то ряд $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ сходится (сходится абсолютно) и его сумма — $\mathcal{S}_a + \mathcal{S}_b$

   Доказательство.

   $$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}(a_k + b_k) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} a_k + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} b_k \xrightarrow{n\to\infty} \mathcal{S}_a + \mathcal{S}_b$$

   Так как

   $$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} |a_k + b_k| \le \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} |a_k| + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} |b_k| \le \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} |a_k| + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} |b_k|, \text{ то } \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} |a_k + b_k|$$

   — монотонная ограниченная последовательность и, следовательно, сходится. □

3. Если ряд $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} a_k$ сходится (абсолютно сходится) и $\mathcal{S}$ его сумма, n_k — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то ряд $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \left(\sum_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_j\right)$, где $n_0 = 0$, сходится (сходится абсолютно) и $\mathcal{S}$ — его сумма.

   Доказательство. Последовательность частичных сумм сгруппированного ряда — это подпоследовательность S_{n_k} последовательности частичных сумм начального ряда. Последовательность:

   $$\sum_{k=1}^{N} \left| \sum_{j=n_{k-1}}^{n_N} a_j \right| \le \sum_{j=1}^{n_N} |a_j|$$

   ограничена, тогда первая сумма — монотонная ограниченная последовательность, которая сходится. □

4. Если члены ряда $a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$, n_k — строго возрастающая последовательность натуральных чисел и $\sup_k(n_k - n_{k-1}) < \infty$), сгруппированный ряд $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} \Big(\sum\limits_{j=n_{k-1}+1}^{n_k} a_j\Big)$, где $n_0 = 0$, сходится $\mathcal{S}$ — его, сумма то начальный ряд также сходится и $\mathcal{S}$ — его сумма.

Доказательство. Для любого $m \in \mathbb{N}$ найдем такое натуральное r, что $n_{r-1} < m \le n_r$. Тогда:

$$|\mathcal{S}_{n_r} - \mathcal{S}_m| \le \sum_{k=m+1}^{n_r} |a_k| \le \sum_{k=n_{r-1}+1}^{n_r} |a_k| \le \sum_{k=n_r-l}^{n_r} |a_k|,$$

где $sup_k(n_k - n_{k-1}) \le l$. Последняя сумма — $\overline{\overline{o}}(1)$. Следовательно, если $\mathcal{S}_{n_r} \xrightarrow{r\to\infty} \mathcal{S}$, то $\mathcal{S}_m \xrightarrow{m\to\infty} \mathcal{S}$ $\square$

Глава 2

Ряды неотрицательных чисел

Признаки сходимости рядов неотрицательных числел

TODO: Вставить замечания

1. Если дан ряд $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} a_k$, то ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность частичных сумм $\mathcal{S}_n$ ограничена.

2. (Признак сравнения) Если даны ряды $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} b_k, 0 \leq a_k \leq b_k,\ k > K$, то из сходимости второго ряда следует сходимость первого, а из расходимости первого расходимость второго.

   Доказательство.

   $$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} a_k \leq \sum_{k=1}^{K} a_k + \sum_{k=K+1}^{n} a_k \ \leq \sum_{k=1}^{K} a_k + \sum_{k=K+1}^{n} b_k \ \leq \sum_{k=1}^{K} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{K} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

   Из сходимости второго ряда следует ограниченность частиных сумм первого, а значит и сходимость первого.
   Если $n > K, p \geq 0$, то $\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k$, поэтому из выполнения критерия Коши для второго ряда следует выполнение критерия Коши для превого. □

3. (Сравннения) Пусть $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} b_k$ — числовые ряды с неотрицательными членами. Если

   $$0 < \alpha \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \beta < \infty, \forall k > K,$$

   то числовые ряды одновременно сходятся или одновременно расходятся.

   Доказательство. $0 \leq a_k \leq \beta b_k$, поэтому, если ряд $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} b_k$ сходится, то сходится $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} a_k$.

Так как $0 \le b_k \le \frac{a_k}{\alpha}$, То если ряд $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} a_k$ сходится, то сходится и второй. □

4. (Сравнения) Пусть $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} a_k$ и $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} b_k$ — числовые ряды со строго положительными членами. Если

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \le \frac{b_{k+1}}{b_k}, \forall k \ge K,$$

то из сходимости ряда $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} a_k$

Доказательство.

$$\prod_{k+K}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \le \prod_{k+K}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{b_k}, \text{ т.е. } \frac{a_n}{a_K} \le \frac{b_n}{b_K}, n > K$$

Значит, $a_n \le \frac{a_K}{b_K} b_n, n > K$, поэтому из сходимости ряда $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} a_k$ □

5. (Д'Алабера) Пусть $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} a_k$ — ряд с неотрицательными членами. Если

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \le q < 1 \text{ при } n \ge K$$

то ряд сходится. Если

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \ge 1 \text{ при } n \ge K$$

То члены ряда не стремятся к нулю, и ряд расходится

Доказательство. Возьмём $b_k = q^k$ — геометрическую прогрессию, ряд $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} q^k$ сходится. Далее используем признак сравнение. Другой случай очевиден. □

6. (Коши) Пусть $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} a_k$ — ряд с неотрицательными членами. Если $\sqrt[n]{a_k} \le q < 1$ при $k \ge K$, то ряд сходится, а если $\sqrt[k]{a_k} \ge 1$ для бесконечного числа номеров, то члены ряда не стремятся к нулю и ряд расходится.

Доказательство. Если $\sqrt[n]{a_k} \le q < 1$, то повторому признаку ряд расходится. □

7. (Интегральный Маклорена-Коши) Пусть $f(x)$ — неотрицательная невозрастающая функция на $[1, +\infty]$. Тогда

$$0 \le \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} f(k) - \int_{1}^{n+1} f(x)dx \le f(1)$$

Ряд и интеграл одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство.

$$0 \leq \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \left(f(k) - \int\limits_{k}^{k+1} f(x)dx \right) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} f(k) - \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx =$$

$$= f(1) + \sum_{k=2}^{n} \left(f(k) - \int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx \right) - \int\limits_{n}^{n+1} f(x)dx \leq f(1)$$

Тогда частичные интеграллы и суммы ограниченны одновременно. □

8. (Признак Куммера) Пусть $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} a_k$ — ряд со строго положительными членами, b_k — последовательность строго положительных чисел,

$$v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1}$$

Если $v_k \geq l \geq 0$ при $k \geq K$, то ряд сходится. Если $v_l \leq 0$ при $k \geq K$ и ряд $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} (b_k)^{-1}$ расходится, то ряд $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} a_k$ также расходится.

Доказательство.

$$v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1} \geq l > 0,\ k \geq K$$

$$a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1} \geq l a_{k+1},\ k \geq K$$

$$\sum_{k=K}^{n-1} \big(a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1} \big) = a_K b_K - a_n b_n \geq l \sum_{k=K}^{n-1} a_{k+1} = l \sum_{j=K+1}^{n} a_j$$

Так как $a_K b_K \geq l \sum\limits_{j=K+1}^{n} a_j$, то частичные суммы ряда $\sum\limits_{j=K+1}^{\infty} a_j$ ограничены и, значит, ряд $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} a_k$ сходится. Итак,

$$v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1} \leq 0 \text{ при } k \geq K,$$

т.е. $a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1} \leq 0$ при $k \geq K$. Значит,

$$\sum_{k=K}^{n-1} \big(a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1} \big) = a_K b_K - a_n b_n \leq 0,\ n > K$$

отсюда: $a_N \geq a_K b_K - (b_n)^{-1}$. Из расходимости ряда $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} b_k$ следует расходимость ряда $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} a_k$ □

9. (Признак Раабе) Пусть $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} a_k$ — ряд со строго положительными членами. Если

$$k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) > q > 1,\ k \geq K,$$

то ряд сходится. Если

$$k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) \leq 1,\ k \geq K,$$

то ряд расходится.

Доказательство. Возьмем $b_k = k$, ряд $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}(b_k)^{-1}$ расходится.

$$v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}}k - (k+1) = k(\frac{a_k}{a_{k+1}}) - 1$$

И пользуемся признаком Куммера. □

10. (Признак Гаусса) Пусть

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \ \ a_k > 0, \ \frac{a_k}{a_{k+1}} = \alpha + \frac{\beta}{k} + \frac{\gamma_k}{k^{1+\epsilon}},$$

где $\alpha, \beta, \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0, \gamma_k$ — ограниченная числова последовательность. Тогда при $\alpha > 1$ или $\alpha = 1, \beta > 1$, ряд $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} a_k$ сходится, а при $\alpha < 1$ или $\alpha = 1, \beta \leq 1$ – расходится.

Доказательство.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \alpha, \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{\alpha}(\alpha \neq 0)$$

Тогда по признаку Даламбера ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha < 1$
При $\alpha = 1$

$$\lim_{k\to\infty} k(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1) = \beta$$

тогда по признаку Раабе ряд сходится при $\beta > 1$ и расходится при $\leq$1
При $\alpha = 1, \beta = 1$ воспользуемся признаком Куммера с $b_k = k\ln k, k \geq 2$.
Ряд обратных к b расходится по интегральному признаку, так как расходится соответствующий интеграл

$$v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}}b_k - b_{k+1} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{\gamma_k}{k^{1+\epsilon}}\right) k\ln k - (k+1)\ln(k+1) =$$

$$= (k+1)\ln k + \frac{\gamma_k}{k^{\epsilon}} lnk - (k+1)\ln(k+1) = \frac{\gamma_k \ln k}{k^{\epsilon}} - \ln(\frac{k+1}{k})^{k+1}$$

$$\frac{\gamma_k \ln k}{k^{\epsilon}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$$\ln(\frac{k+1}{k})^{k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 1$$

$$\frac{\gamma_k \ln k}{k^{\epsilon}} - \ln(\frac{k+1}{k})^{k+1} \to -1$$

□

Теорема 2.1. *Если выполнено условие сходимости Д'Аламбера, то выполнено условие сходимости ряда Коши.*

Доказательство.

$$a_n = a_K \prod_{k=K}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq a_K q^{n-K}, \; \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{a_K} q^{1-\frac{K}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 * q < 1$$

Если взять $p, q < p < 1$, то, начиная с некоторого номера $\sqrt[n]{a_n} < p < 1$ $\square$

Глава 3

Ряды с членами разных знаков или с членами — комплексными числами.

Теорема 3.1. ***(Признак Лейбница)*** *Пусть* $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} a_k$ *— ряд со знакочередующимся членами, которыепо модулю монотонно стремятся к нулю. Тогда ряд сходится и остаток* $|r_n| \geq |a_{n+1}| \geq |a_n|$.

Доказательство. Пусть $a_1 > 0$. Тогда $\mathcal{S}_{2n} = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}}(a_{2k-1}+a_{2k})$ – неубывающая последовательность, $\mathcal{S}_{2n+1} = a_1 + \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}}(a_{2k}+a_{2k+1})$ — невозрастающая последовательность, $\mathcal{S}_{2n} \leq S_{2n+1} = a_1 + \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}}(a_{2k}+a_{2k+1}) \leq 0$ — невозрастающая последовательность, $\mathcal{S}_{2n} \leq \mathcal{S}_{2n+1}$.

Значит, $\mathcal{S}_{2n}$ — неубывающая, ограниченная сверху последовательность. $\mathcal{S}_{2n+1}$ — невозрастающая, ограниченная снизу последовательность. Они сходятся и, так как $\mathcal{S}_{2n+1} - \mathcal{S}_{2n} = a_{2n+1} = \overline{o}(1)$, то имеют бощий предел $\mathcal{S}$.

$$r_{2n+1} = \sum_{k=2n+2}^{\infty} a_k = \underbrace{a_{2n+2}}_{\leq 0} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \underbrace{\left(a_{2k-1} + a_{2k}\right)}_{\geq 0} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{\left(a_{2k} + a_{2k+1}\right)}_{\leq 0}$$

Следовательно,

$$a_{2n+2} \leq r_{2n+1} \leq 0, |r_{2n+1}| \leq |a_{2n+2}| \leq |a_{2n+2}|$$

$$r_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=n}^{\infty} \underbrace{\left(a_{2k+1} + a_{2k+2}\right)}_{\geq 0} = \underbrace{a_{2n+1}}_{\geq 0} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{\left(a_{2k-1} + a_{2k}\right)}_{\leq 0}$$

Следовательно $0 \leq r_{2n} \leq a_{2n+1} \leq |a_{2n}|$ □

Преобразование Абеля

$$\sum_{k=m}^{n} u_k v_k = \sum_{s=m-1}^{n-1} U_k\big(v_k - v_{k+1}\big) + U_n v_n - U_{m-1} v_{m-1} =$$

$$= \sum_{k=m}^{n} U_k(v_k - v_{k+1}) + U_n v_n - U_{m-1} u_m,$$

$$\text{где } U_n = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} u_k, U_0 = 0, v_0 = 0$$

Доказательство.

$$\sum_{k=m}^{n} u_k v_k = \sum_{k=m}^{n} \big(U_k - U_{k-1}\big) v_k = \sum_{k=m}^{n} U_k v_k - \sum_{k=m}^{n} U_{k-1} v_k =$$

$$= \sum_{k=m}^{n} U_k v_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} U_k v_{k+1} = \sum_{k=m-1}^{n-1} U_k(v_k - v_{k+1}) + V_n v_n - U_{m-1} v_{m-1} =$$

$$= \sum_{k=m}^{n-1} U_k(v_k - v_{k+1}) + U_n v_n - U_{m-1} v_m$$

□

Последовательность ограниченной вариации.

Определение 3.1. Последовательность $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется последовательностью ограниченной вариации, если сходится ряд модулей разниц между соседними членами

Теорема 3.2. *Последовательность действительных чисел является последовательностью ограниенной вариации тогда и только тогда, когда её можно представить как разность двух неубывающих(невозрастающих) сходящихся последовательностей*

Доказательство. (Достаточность) Монотонная сходящаяся последовательность v_k является последовательностью ограниченнной вариации. Действительно, если v_k — невозрастающая последовательность, то $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} |v_k - v_{k+1}| = \sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} (v_k - v_k + 1) = v_1 - v_{n+1}$ — имеет предел при $n \to \infty$, следовательно, последовательность имеет ограниченную вариацию.

Сумма, разность последовательностей ограниченной вариации являются последовательностями ограниченной вариации. Для любого числа α и VB-последовательности v_k αv_k ограниченна.

(Необходимость) Последовательность $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} |v_k - v_{k+1}|$ — неубывающая, $G_n = \sum_{k=1}^{n-1} \big|v_k - v_k + 1\big| + (v_k - v_{k+1})$ — неубывающая последовательность, $v_n = v_1 - \sum_{k=1}^{n-1}(v_k - v_{k+1}) = S_n + v_1 - G_n = S_n - (-v_1 + G_n)$ Домножением на минус единицу можно получить рвзность двух невозрастающей последовательностей. □

Теорема 3.3. *Если v_n — последовательность ограниченной вариации, то она сходится*

Доказательство. $v_n = v_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1} - v_k)$, ряд $\sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1} - v_k)$ сходится абсолютно. $\square$

Глава 4

Ряды

1. **Признак Абеля.** Если ряд $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} u_k$ сходится, а v_k — последовательность ограниченной вариации, то сходится ряд $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} u_k v_k$

2. **Признак Дирихле.** Если последовательность частичных сумм ряда $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} u_k$ ограничена, а v_k — сходящаяся к 0 VB-последовательность, то сходится ряд $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty} u_k v_k$.

   Доказательство.

   $$\sum_{k=m}^{\infty} u_k v_k = \sum_{k=m-1}^{n-1} \mathcal{U}_k(v_k - v_{k+1}) + \mathcal{U}_n\, v_n - \mathcal{U}_{m-1}\, v_{m-1}$$

   В обоих случаях $\mathcal{U}_k$ ограничена, ряд $\sum_{\mathrm{k=1}}^{\infty}(v_k - v_{k+1})$ сходится.

   $$(\forall \epsilon > 0)\ (\exists N_1) \sum_{k=n_1+1}^{\infty} < \epsilon,$$

   тогда при $n, m > N_1 + 1$

   $$\left| \sum_{k=m-1}^{n-1} \mathcal{U}_{v_k - v_{k+1}} \right| \leq sup_k |\, \mathcal{U}_k\,| * \epsilon$$

   В признаке Абеля $\mathcal{U}_k$ и v_k сходятся, значится последовательность $\mathcal{U}_k\, v_k$.
   В признаке Дирихле $\mathcal{U}_k$ ограничена, $V_k \xrightarrow{k \to \infty} 0 \to$ сходится последовательность $\mathcal{U}_k\, v_k$.
   В обоих случаях

   $$(\forall \epsilon > 0)(\exists N_2)(\forall n, m > N_2)|\, \mathcal{U}_m\, v_m - \mathcal{U}_{m-1}\, v_{m-1}| < \epsilon$$

   Тогда $\forall n, m > \max\{N_1 + 1, N_2\}$ имеем

   $$|\sum_{k=m}^{n} u_k v_k| < \sup_k |\, \mathcal{U}_k\,| * \epsilon + \epsilon,$$

   следовательно, выполнен критрий Коши. □

Следствие. *Признак Лейбница следует из признака Дирихле.*

$$u_k = (-1)^k$$

Определение 4.1. Пусть $k(i)$ — взаимно-однозначное отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Пусть дан ряд $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} a_k$. Тогда $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k(i)}$ называется его перестановкой.

Теорема 4.1. ***(Коши).*** *Если ряд сходится абсолютно, то любая его перестановка тоже сходится абсолютно, и его сумма равна сумме исходного ряда.*

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{k(i)}| \le \sum_{\mathrm{k}=1}^{\max\limits_{i=1,\dots,n} k(i)} |a_k| \le \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} |a_k| < \infty$$

TODO k() fix Следовательно есть абсолютная сходимость.
Пусть $\mathcal{S} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} a_k$,

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N) \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \epsilon$$

Пусть $M = \max\limits_{k(i) \le N}(i)$. Тогда $\forall m > M$ имеем

$$\left| \sum_{i=1}^{m} a_{k(i)} - \mathcal{S} \right| \le \left| \sum_{i=1}^{m} a_{k(i)} - \sum_{k=1}^{N} a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{N} |a_k| - \mathcal{S} \right| <$$

$$< \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < 2\epsilon$$

Следовательно $\lim\limits_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} a_{k(i)} = \mathcal{S}$ □

Теорема 4.2. ***(Риманя).*** *Пусть $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}$ — условно-сходящийся ряд действительных чисел. Тогда $\forall \mathcal{S} \in \overline{\mathbb{R}}$ найдеся такая перестановка $k(i)$ членов ряда, что $\sum_{i=1}^{\infty} = \mathcal{S}$*

Утверждение. *(В обозначениях теоремы 4.2) бесконечно много $a_k \ge 0$ и бесконечно много $a_k < 0$*

Доказательство. пусть u_j — занумерованные $a_k \le 0$ в порядке роста k, а v_j — аналогично для $a_k < 0$. Тогда суммы обоих последовательностей расходятся к $\pm\infty$. Действительно, если бы оба сходилось, то сходился абсолютно исходный ряд. Если бы расходился только один из этих рядов, то расходился бы и исходный □

Доказательство. **(Теоремы 4.2).**
$\mathcal{S} \in \mathbb{R}$
Найдется такое n_1, что $\sum_{j=1}^{n_1} \ge \mathcal{S}$, существует наименьшее m_1 такое, что

$$\sum_{j=1}^{n_1} u_j + \sum_{i=1}^{m_1} v_i \le \mathcal{S}$$

$$u_1, \cdots, u_{n_1}, v_1, \cdots, v_{m_1}$$

Существует наименьшее $n_2 > n_1 : \sum_{j=1}^{n_2} u_j + \sum_{i=1}^{m_1} v_i > \mathcal{S}$
Существует наименьшее $m_2 > m_1 : \sum_{j=1}^{n_2} u_j + \sum_{i=1}^{2_1} v_i < \mathcal{S}$
Существует наименьшее $n_3 > n_2 : \sum_{j=1}^{n_2} u_j + \sum_{i=1}^{m_1} v_i > \mathcal{S} \dots$

$$\sum_{j=1}^{n_r} u_j + \sum_{i=1}^{m_2} v_i - \mathcal{S} < 0 \text{ и } \left|\sum_{j=1}^{n_r} u_j + \sum_{i=1}^{m_r} v_i - \mathcal{S}\right| \le |v_{m_r}|$$

$$\sum_{j=1}^{n_{r+1}} u_j + \sum_{i=1}^{m_r} v_i - \mathcal{S} > 0 \text{ и } \left(\sum_{j=1}^{n_{r+1}} u_j + \sum_{i=1}^{m_r} v_i - \mathcal{S}\right) \le u_{n_{r+1}}$$

Суммы переставленного ряда с номерами

$$\mathcal{S}_{n_r+m_r} \text{ и } \mathcal{S}_{n_{r+1}+m_r} \xrightarrow{r\to\infty} \mathcal{S}$$

Если $n_r + m_r \le l \le n_{r+1} + m_r$, то

$$\mathcal{S}_{n_r+m_r} \le \mathcal{S}_l \le \mathcal{S}\, n_{r+1} + m_r$$

Если $n_{r+1} + m_r \le p \le n_{r+1} + m_{r+1}$, то

$$\mathcal{S}_{n_{r+1}+m_r} \le \mathcal{S} \le \mathcal{S}_{n_{r+1}+m_{r+1}}$$

Следовательно, последовательность частичных сумм $\to \mathcal{S}$
$\mathcal{S} = +\infty$
Если $n_r + m_r \le l \le n_{r+1} + m_r$, то

$$\mathcal{S}_{n_r+m_r} \le l \le n_{r+1} + m_r$$

$\exists n_1 : \sum_{j=1}^{n_1} u_j > 1$
$\exists n_2 : \sum_{j=1}^{n_2} u_j + v_1 > 2 \dots$
$\mathcal{S}_{n_k+(k+1)} \to +\infty$ $\mathcal{S}_{n_k+k} \to +\infty$, так как $v_k \to 0$
Аналогично для $\mathcal{S} = -\infty$ $\square$