

# 杂题选讲

*hzwer*

*PekingUniversity*

2017 年 7 月 27 日



## 1 图论

500A.New Year Transportation  
437C.The Child and Toy  
475B.Strongly Connected City  
639B.Bear and Forgotten Tree 3  
623A.Graph and String  
NOIP2009 最优贸易  
449B.Jzzhu and Cities  
Usaco2012Jan.Bovine Alliance  
链型网络  
715B.Complete The Graph  
冷战  
666B.World Tour  
543B.Destroying Roads  
507E.Breaking Good  
545E.Paths and Trees

## 500A.New Year Transportation

## 475B.Strongly Connected City

639B.Bear and Forgotten Tree 3

## 623A.Graph and String

NOIP2009 最优贸易

449B. Jzzhu and Cities

Usaco2012Jan.Bovine Alliance

## 链型网络

## 715B. Complete The Graph

冷战

666B. World Tour

## 543B.Destroying Roads

## 507E.Breaking Good

545E.Paths and Trees

## 杂题选讲

## 437C.The Child and Toy

639B.Bear and Forgotten Tree 3

## 623A.Graph and String

NOIP2009 最优贸易

449B.Jzzhu and Cities

Usaco2012Jan.Bovine Alliance

## 链型网络

## 715B.Complete The Graph

冷战

666B. World Tour

## 543B.Destroying Roads

507E.Breaking Good

545E.Paths and Trees

$n$  个带权点,  $m$  条边的无向图, 删除一个点的代价是与这个点相邻的, 且没有被删除的点权和。

n 个带权点，m 条边的无向图，删除一个点的代价是与这个点相邻的，且没有被删除的点权和。  
求将所有点删除的最小代价。

n 个带权点，m 条边的无向图，删除一个点的代价是与这个点相邻的，且没有被删除的点权和。  
求将所有点删除的最小代价。  
 $1 \leq n \leq 1000, 1 \leq m \leq 2000$

按照从大到小的次序删点。



按照从大到小的次序删点。  
发现每条边的贡献是连接的两个点的权值的最小值。

## 545E.Paths and Trees

## 475B.Strongly Connected City

给定  $n$  条水平和  $m$  条竖直的单向街道，其互相交叉为  $n*m$  个结点，问这些结点是否都能互相到达。

给定  $n$  条水平和  $m$  条竖直的单向街道，其互相交叉为  $n*m$  个结点，问这些结点是否都能互相到达。

$$1 \leq n, m \leq 20$$

1. 从每个结点开始 dfs，最后看每个结点是否最终被搜到  $n*m$  次。

1. 从每个结点开始 dfs，最后看每个结点是否最终被搜到  $n*m$  次。
2. 求强连通图可以直接套用 tarjan 算法。

## 题解

1. 从每个结点开始 dfs，最后看每个结点是否最终被搜到  $n*m$  次。
2. 求强连通图可以直接套用 tarjan 算法。
3. 实际上只需要判断外环路是否成环即可。

500A.New Year Transportation  
437C.The Child and Toy  
475B.Strongly Connected City  
**639B.Bear and Forgotten Tree 3**  
623A.Graph and String  
NOIP2009 最优贸易  
449B.Jzzhu and Cities  
Usaco2012Jan.Bovine Alliance  
链型网络  
715B.Complete The Graph  
冷战  
666B.World Tour  
543B.Destroying Roads  
507E.Breaking Good  
545E.Paths and Trees



构造一棵  $n$  个点，深度  $h$ ，最长链为  $d$  的树。

构造一棵  $n$  个点，深度  $h$ ，最长链为  $d$  的树。  
 $1 \leq n, h, d \leq 10^5$

首先构造一个长度为  $d$  的链，然后把其中一个距离边上为  $h$  的点变为根。  
把剩下的点全都接在根上。

## 545E.Paths and Trees

n 个结点的无向图，每个结点标号"abc" 三个字母其中一个。

n 个结点的无向图，每个结点标号"abc" 三个字母其中一个。  
将标号为相同字母的结点连边，将所有标号为 b 的结点与其它标号的结点连边。

n 个结点的无向图，每个结点标号"abc" 三个字母其中一个。  
将标号为相同字母的结点连边，将所有标号为 b 的结点与其它标号的结点连边。  
给出图的 m 个连边，求一种合法的标号方案，不存在输出'NO'。

n 个结点的无向图，每个结点标号"abc" 三个字母其中一个。  
将标号为相同字母的结点连边，将所有标号为 b 的结点与其它标号的结点连边。  
给出图的 m 个连边，求一种合法的标号方案，不存在输出'NO'。  
 $1 \leq n \leq 500, 1 \leq m \leq n(n-1)/2$



如果有一个点和其它点都有连边，将其标号 b。  
然后选择一个未被标号的点，标号为 a，二分图染色。

## ① 图论

## 437C.The Child and Toy

## 639B.Bear and Forgotten Tree 3

## NOIP2009 最优贸易

Usaco2012Jan.Bovine Alliance

## 715B.Complete The Graph

666B. World Tour

## 543B.Destroying Roads

507E.Breaking Good

## 545E.Paths and Trees

$$1 \leq n \leq 10^5, 1 \leq m \leq 5 * 10^5$$

显然只要两次 spfa 处理出到某个点的路径上的最小买入价格以及其到终点路径上的最大卖出价格即可

## 1 图论

## 500A.New Year Transportation

## 437C.The Child and Toy

## 475B.Strongly Connected City

639B.Bear and Forgotten Tree 3

## 623A.Graph and String

NOIP2009 最优贸易

## 449B. Jzzhu and Cities

Usaco2012Jan.Bovine Alliance

## 链型网络

## 715B.Complete The Graph

冷战

666B. World Tour

## 543B.Destroying Roads

507E.Breaking Good

## 545E.Paths and Trees

$n$  个点,  $m$  条带权边的无向图, 另外还有  $k$  条特殊边, 每条边连接 1 和  $i$ 。

n 个点，m 条带权边的无向图，另外还有 k 条特殊边，每条边连接 1 和 i。

求可以删除这 k 条边中的多少条，使得每个点到 1 的最短距离不变。

## 449B.Jzzhu and Cities

$n$  个点,  $m$  条带权边的无向图, 另外还有  $k$  条特殊边, 每条边连接 1 和  $i$ 。

求可以删除这  $k$  条边中的多少条, 使得每个点到 1 的最短距离不变。

$$1 \leq n, m, K \leq 10^5$$



求 1 到所有结点的最短路, 对于每条特殊边 1 到 x:

求 1 到所有结点的最短路, 对于每条特殊边 1 到 x:  
若其长度大于  $\text{dis}(x)$ , 删除。

求 1 到所有结点的最短路，对于每条特殊边 1 到 x:  
若其长度大于  $\text{dis}(x)$ ，删除。  
否则考察所有非特殊边  $x-y$ ，若  $\text{dis}(y)+w=\text{dis}(x)$ ，删除。

否则需要保存一条长度为  $\text{dis}(x)$  的边。

## 1 图论

500A.New Year Transportation

437C.The Child and Toy

475B.Strongly Connected City

639B.Bear and Forgotten Tree 3

623A.Graph and String

NOIP2009 最优贸易

449B.Jzzhu and Cities

Usaco2012Jan.Bovine Alliance

链型网络

715B.Complete The Graph

冷战

666B.World Tour

543B.Destroying Roads

507E.Breaking Good

545E.Paths and Trees

## Usaco2012Jan.Bovine Alliance

给出  $n$  个点  $m$  条边的图，现把点和边分组，每条边只能和相邻两点之一分在一组，点不可以和多条边一组，但点可以单独一组，问分组方案数。

答案对  $10^9 + 7$  取模

$1 \leq n, m \leq 10^5$

## 题解

连通块是独立的，设某个连通块点数为  $n$ ，边数为  $m$

## 题解

连通块是独立的，设某个连通块点数为  $n$ ，边数为  $m$

若  $m > n$ ，边数大于点数，必然有一个点要与多条边分在一组，无解



## 题解

连通块是独立的，设某个连通块点数为  $n$ ，边数为  $m$

若  $m > n$ ，边数大于点数，必然有一个点要与多条边分在一组，无解

若  $m = n$ ，环 + 外向树，解为 2

## 题解

连通块是独立的，设某个连通块点数为  $n$ ，边数为  $m$

若  $m > n$ ，边数大于点数，必然有一个点要与多条边分在一组，无解

若  $m = n$ ，环 + 外向树，解为 2

若  $m = n - 1$ ，树，解为  $n$

## 题解

连通块是独立的，设某个连通块点数为  $n$ ，边数为  $m$

若  $m > n$ ，边数大于点数，必然有一个点要与多条边分在一组，无解

若  $m = n$ ，环 + 外向树，解为 2

若  $m = n - 1$ ，树，解为  $n$

若  $m < n - 1$ ，不存在

# 题解

连通块是独立的，设某个连通块点数为  $n$ ，边数为  $m$

若  $m > n$ ，边数大于点数，必然有一个点要与多条边分在一组，无解

若  $m = n$ ，环 + 外向树，解为 2

若  $m = n - 1$ ，树，解为  $n$

若  $m < n - 1$ ，不存在

使用并查集维护连通块的边数和点数

## 1 图论

500A.New Year Transportation

437C.The Child and Toy

475B.Strongly Connected City

639B.Bear and Forgotten Tree 3

623A.Graph and String

NOIP2009 最优贸易

449B.Jzzhu and Cities

Usaco2012Jan.Bovine Alliance

链型网络

715B.Complete The Graph

冷战

666B.World Tour

543B.Destroying Roads

507E.Breaking Good

545E.Paths and Trees

# 链型网络

给定一张无重边、自环的无向图.

每次可以加边, 或者询问有多少个点满足将该点删除后, 原图的每个连通块都为一条链

$$1 \leq n, m \leq 10^5$$

## 直观感受

对于下面一些简单的情况，我们可以容易得出答案.

- 原图为若干条链，则答案为点数  $N$ ;
- 原图为单个简单环加若干条链，则答案为环大小;
- 原图中超过一个连通块有环，答案为 0.
- 原图中一个连通块为一个点连接三条链，答案为 4;
- 原图中一个连通块为一个点连接三条以上的链，答案为 1;

但是考虑到环套树这样更复杂的情况, 上述分类讨论也无能为力.



但是考虑到环套树这样更复杂的情况, 上述分类讨论也无能为力.

我们需要思考链本身的性质，一个图的每个连通块为链，等价于每个点的度数小于等于 2 且无环. 转化后的条件明显更有利于解决问题.

首先考虑图中是否有度数大于等于 3 的点, 如果存在一个度数大于等于 3 的点  $u$ , 因为要保证去掉一个点后每个点的度数都小于等于 2, 我们要么去掉  $u$ , 要么在  $u$  度数恰好为 3 时, 去掉  $u$  的三个相邻点中的一个. 而其他的点均不可能成为答案.

这样我们只需要在加边过程中第一次出现度数为 3 的点的时候，对于可能成为答案的 4 个点，分别维护一个去掉该点之后的图。然后在 4 个图中分别进行判断  
只要在加边时判断每个点度数都小于等于 2，再用并查集判断是否有环即可。

剩下的就是每个点的度数都小于等于 2 的情况，这样每个连通块只能是链或者简单环，我们只需采用一开始的分类讨论即可。

- 原图为若干条链，则答案为点数  $N$ ;
- 原图为单个简单环加若干条链，则答案为环大小;
- 原图中超过一个连通块有环，答案为 0.

这只需要维护一个记录集合大小的并查集就能做到.

# 1 图论

500A.New Year Transportation

437C.The Child and Toy

475B.Strongly Connected City

639B.Bear and Forgotten Tree 3

623A.Graph and String

NOIP2009 最优贸易

449B.Jzzhu and Cities

Usaco2012Jan.Bovine Alliance

链型网络

715B.Complete The Graph

冷战

666B.World Tour

543B.Destroying Roads

507E.Breaking Good

545E.Paths and Trees

# 715B.Complete The Graph

给一张  $n$  个点,  $m$  条边的无向图, 要求设定一些边的边权使得所有边权都是正整数, 最终  $S$  到  $T$  的最短路为  $L$   
 $1 \leq n \leq 1000, 1 \leq m \leq 10000$

用  $f(i,j)$  表示从  $S$  到点  $i$ , 经过  $j$  条无边权的边的最短路  
 选择一个最小的  $j$ , 使得  $f(T,j) + j \leq L$

可以证明不会产生其它的最短路



## 1 图论

500A.New Year Transportation

437C.The Child and Toy

475B.Strongly Connected City

639B.Bear and Forgotten Tree 3

623A.Graph and String

NOIP2009 最优贸易

449B.Jzzhu and Cities

Usaco2012Jan.Bovine Alliance

链型网络

715B.Complete The Graph

冷战

666B.World Tour

543B.Destroying Roads

507E.Breaking Good

545E.Paths and Trees

# 冷战

给定  $n$  个点的图。动态的往图中加边，并且询问某两个点最早什么时候联通，强制在线。

$$1 \leq n \leq 10^5$$

考虑并查集。并查集实际上维护了一棵树。那么假如我们按秩合并，这棵树的深度是  $O(\log n)$  的。

## 题解

考虑并查集。并查集实际上维护了一棵树。那么假如我们按秩合并，这棵树的深度是  $O(\log n)$  的。

我们将一个点连向其父亲的边权设为这条边加入的时间，那么每次询问时，暴力查询树上从  $u$  到  $v$  所经过边权的最大值即可。

## 题解

考虑并查集。并查集实际上维护了一棵树。那么假如我们按秩合并，这棵树的深度是  $O(\log n)$  的。

我们将一个点连向其父亲的边权设为这条边加入的时间，那么每次询问时，暴力查询树上从  $u$  到  $v$  所经过边权的最大值即可。

时间复杂度为  $O(n \log n)$ ，常数较小。

# 1 图论

500A.New Year Transportation

437C.The Child and Toy

475B.Strongly Connected City

639B.Bear and Forgotten Tree 3

623A.Graph and String

NOIP2009 最优贸易

449B.Jzzhu and Cities

Usaco2012Jan.Bovine Alliance

链型网络

715B.Complete The Graph

冷战

**666B.World Tour**

543B.Destroying Roads

507E.Breaking Good

545E.Paths and Trees

给定一张边权为 1 的有向图，求四个不同点 A, B, C, D  
使得  $\text{dis}(A, B) + \text{dis}(B, C) + \text{dis}(C, D)$  取最大值  
 $1 \leq n \leq 3000, 1 \leq m \leq 5000$

复杂度  $O(n^2)$



## 1 图论

500A.New Year Transportation

437C.The Child and Toy

475B.Strongly Connected City

639B.Bear and Forgotten Tree 3

623A.Graph and String

NOIP2009 最优贸易

449B.Jzzhu and Cities

Usaco2012Jan.Bovine Alliance

链型网络

715B.Complete The Graph

冷战

666B.World Tour

**543B.Destroying Roads**

507E.Breaking Good

545E.Paths and Trees

# 543B.Destroying Roads

$n$  个结点, $m$  条边的无向图 (边权全为 1), 问最多能删掉多少条边  
使得  $s_1$  到  $t_1$  距离不超过  $l_1$ ,  $s_2$  到  $t_2$  距离不超过  $l_2$ 。

# 543B.Destroying Roads

$n$  个结点, $m$  条边的无向图 (边权全为 1), 问最多能删掉多少条边  
使得  $s_1$  到  $t_1$  距离不超过  $l_1$ ,  $s_2$  到  $t_2$  距离不超过  $l_2$ 。  
 $1 \leq n \leq 500, 1 \leq m \leq n(n-1)/2$

其实就是问，至少需要多少条边，才能使得  $s_1$  到  $t_1$  距离不超过  $l_1$ ,  $s_2$  到  $t_2$  距离不超过  $l_2$ 。

如果这两条路径不相交，那么答案为  $\text{dis}(s_1, t_1) + \text{dis}(s_2, t_2)$ 。

如果相交部分为  $(p_1, p_2)$ , 答案为  $p_1, p_2$  的最短路, 加上  $p_1, p_2$  到其它 4 个点的最短路。

预处理任意点对距离，枚举两条路径重叠部分。

# 1 图论

500A.New Year Transportation  
437C.The Child and Toy  
475B.Strongly Connected City  
639B.Bear and Forgotten Tree 3  
623A.Graph and String  
NOIP2009 最优贸易  
449B.Jzzhu and Cities  
Usaco2012Jan.Bovine Alliance  
链型网络  
715B.Complete The Graph  
冷战  
666B.World Tour  
543B.Destroying Roads  
**507E.Breaking Good**  
545E.Paths and Trees



# 507E.Breaking Good

给定一个  $n$  个点， $m$  条边的有向图，边权都为 1，一些需要维修。

# 507E.Breaking Good

给定一个  $n$  个点， $m$  条边的有向图，边权都为 1，一些需要维修。  
你需要选择一条 1 到  $n$  的最短路，将它们修好，并炸毁其它所有不在路径上的完好的路。

# 507E.Breaking Good

给定一个  $n$  个点， $m$  条边的有向图，边权都为 1，一些需要维修。  
你需要选择一条 1 到  $n$  的最短路，将它们修好，并炸毁其它所有不在路径上的完好的路。  
若有多条最短路，选择影响值最小的。

给定一个  $n$  个点,  $m$  条边的有向图, 边权都为 1, 一些需要维修。  
 你需要选择一条 1 到  $n$  的最短路, 将它们修好, 并炸毁其它所有不在路径上的完好的路。  
 若有多条最短路, 选择影响值最小的。  
 影响值 = 维修的路数 + 炸毁的路数。

# 507E.Breaking Good

给定一个  $n$  个点， $m$  条边的有向图，边权都为 1，一些需要维修。  
你需要选择一条 1 到  $n$  的最短路，将它们修好，并炸毁其它所有不在路径上的完好的路。  
若有多条最短路，选择影响值最小的。  
影响值 = 维修的路数 + 炸毁的路数。  
 $1 \leq n, m \leq 10^5$

$$\text{维修的路数} = \text{最短路长度} - \text{最短路上的完好的路数}$$

炸毁的路数 = 总完好路数 - 最短路上完好的路数

维修的路数 = 最短路长度 - 最短路上的完好路数  
 炸毁的路数 = 总完好路数 - 最短路上的完好路数  
 所以只要选择一条完好的路最多的最短路



维修的路数 = 最短路长度 - 最短路上的完好路数  
炸毁的路数 = 总完好路数 - 最短路上的完好路数  
所以只要选择一条完好的路最多的最短路  
分层图 bfs

## 1 图论

500A.New Year Transportation  
437C.The Child and Toy  
475B.Strongly Connected City  
639B.Bear and Forgotten Tree 3  
623A.Graph and String  
NOIP2009 最优贸易  
449B.Jzzhu and Cities  
Usaco2012Jan.Bovine Alliance  
链型网络  
715B.Complete The Graph  
冷战  
666B.World Tour  
543B.Destroying Roads  
507E.Breaking Good  
545E.Paths and Trees

## 545E.Paths and Trees

给定一个  $n$  个点， $m$  条边的无向图和一个点  $u$ ，找出若干条边组成一个子图，要求这个子图中  $u$  到其他点的最短距离与在原图中的相等，并且要求子图所有边的权重和最小，求出最小值。

$$1 \leq n, m \leq 3 * 10^5$$



求 u 到所有结点的最短路

记录下到每个结点最短路上的最后一条边 (若有多条, 取最小的)

答案是以  $u$  为根的一棵最短路径树