Polya 计数法

西北师大附中 吕欣
visit_world

目录

- 群的概念和一些性质
- Burnside计数引理
- Polya计数法
- 一些训练

群

- 什么是群?
- (可以理解为元素和建立在元素上的一个二元运算构成的代数系统
- 定义二元组 (S,+)，其中 S 是一个元素集合，+是定义在 S 中元素上的二元运算
- 我们称 (S,+) 是一个群当且仅当它满足四条群公理。

群公理

- 封闭性：$\forall x,y\in S$，$x+y\in S$
- 结合律：$\forall a,b,c\in S, (a+b)+c=a+(b+c)$
- 单位元：$\exists e\in S,\forall x\in S, e+x=x+e=x$
- 逆元：$\forall x\in S,\exists y\in S,x+y=y+x=e$

常见的群

- 整数、有理数、实数加法群
- 模 n 意义下的加法群
- 模 n 意义下与 n 互质的数构成的乘法群
- 置换群，群的元素是置换，运算为置换的复合

一些推导

- 若 s+x=e，我们称 s 为 x 的左逆元，可以类似地定义右逆元。
- 在**有限群**中，若 x 有左逆元，则 x 有相等且唯一的右逆元，x 存在逆元与 x 的消去律等价。
- 下两页证明

证明

① 若 a 有左逆元 s，则 a 有右逆元 t

考虑 $a^0, a^1, a^2 \ldots$，考虑最小的 x 使得 $a^x = a^k \ (k > x)$，若 $x > 0$，则有 $a^{x-1} = a^{k-1}$，所以 $x = 0$，所以我们有 $a^k = e$，即 $a^{k-1} \oplus a = e$，所以 a^{k-1} 是 a 的左逆元，同时它也是 a 的右逆元

② 逆元存在与消去律等价。

消去律：$x \oplus a = y \oplus a \Leftrightarrow x = y$

证明：

1. 逆元存在->消去律成立：只需往两边 $\oplus a^{-1}$ 即可。
2. 消去律成立->逆元存在：考虑任意 $x \in S$，我们只需证明 $x \oplus s = e$ 有解即可。考虑 $T = \{x \oplus a \mid a \in S\}$，由消去律，不难证明 $T = S$。所以 $x \oplus s = e$ 有解，证毕。

③ 逆元唯一。

设有 $s \neq t$ 同为 a 的逆元，$a \oplus s = a \oplus t \Rightarrow s = t$，矛盾

拉格朗日定理

- 若有限群 (S,+) 有子群 (S', +)，我们有 |S| 是 |S'| 的倍数。
- 下一页证明

证明:

我们先介绍陪集:S' 关于 a 的右陪集为 $S'_a = \{x \oplus a \mid x \in S'\}$,左陪集为 ${}_aS' = \{a \oplus x \mid x \in S'\}$。

那么对于 $a, b \in S$,设 $S'_a \cap S'_b \neq \varnothing$,则我们存在 $x, y \in S'$,使得 $x \oplus a = y \oplus b \Rightarrow a = x^{-1} \oplus y \oplus b$

那么 $\forall z \in S'$,$z \oplus a = z \oplus (x^{-1} \oplus y \oplus b) = (z \oplus x^{-1} \oplus y) \oplus b$,显然 $z \oplus x^{-1} \oplus y \in S'$

所以我们有:若 $x \in S'_a$,则有 $x \in S'_b$,反过来也成立,所以 $S'_a = S'_b$

所以 S' 的不同的陪集互不相交,且大小相同,又因为 $\bigcup S'_x = S$,所以 $|S'| \mid |S|$

拉格朗日定理

- 欧拉定理实际上是拉格朗日定理的一个直接推论。
- 我们把欧拉定理的证明（用群论知识）留作练习。

轨道-稳定化子定理

- 考虑置换群 G，其中每个元素是 1~n 的置换。
- G 中令元素 x 不变的置换构成了一个子群，称为稳定集 stab(x)={f∈G | f(x)=x}
- x 通过 G 中的置换能变换到的位置称为 x 的轨道 orbit(x)={f(x) | f∈G}
- |orbit(x)| 实际上是 stab(x) 的陪集数，由拉格朗日定理，我们有 |stab(x)| * |orbit(x)| = |G|

Burnside引理

- （终于开始到重点部分了…
- （可以说之前的证明都是为了证明 Burnside 引理的而存在的…
- 用于计算集合 M 关于置换群 G 的轨道数。即，如果我们定义对两个元素 x,y, 若 ∃f∈G, 使得 f(x)=y，那我们就称 x 和 y 是本质相同的。
- M 的轨道数即为 M 中本质不同的元素个数。

推导

M 中的轨道数可以记为：

$$\sum_{x \in M} \frac{1}{|orbit(x)|}$$

因为一个轨道中有 $|orbit(x)|$ 个元素的话，我们令其中每个元素对答案贡献 $\frac{1}{|orbit(x)|}$

推导

由轨道-稳定化子定理，上式

$$= \sum_{x \in M} \frac{|stab(x)|}{|G|} = \frac{\sum_{x \in M} |stab(x)|}{|G|}$$

这个式子的分子上在对置换 f 使元素 x 保持不变的二元组 (x, f) 计数，那么它显然也可以写为：

$$= \frac{1}{|G|} * \sum_{f \in G} |\{x \in M \mid f(x) = x\}|$$

Burnside引理

- Burnside 引理的内容：集合 M 关于置换群 G 的轨道数，等于 G 中每个置换下不动点的个数的算术平均数。
- 下面用一个经典的例子来直观感受一下。

例：棋盘染色

- 考虑一个 2*2 的一个棋盘。
- 用黑白两种颜色给它染色，定义两种染色方法是相同的，当且仅当它们旋转同构。
- 求本质不同的染色方案数。

例：棋盘染色

- 不考虑同构，有 16 种染色方案，令 M 表示 16 种染色方案的集合。
- 令 G 表示旋转 0~3 个 90 度的置换构成的群（注意：这里是染色方案之间的置换）。
- 我们的任务是计算 M 关于 G置换群的轨道数。

例：棋盘染色

- 四种置换下不变的染色方案数分别为 16、2、4、2。
- 本质不同的染色方案为 (16+2+4+2) / 4 = 6
- 手动验证一下，发现答案正确

Polya 原理

- 直接应用Burnside引理来计算还是太慢了，需要对每个置换计算这个置换下不变的染色方案个数。
- 由此引入了 Polya 计数法
- 首先我们介绍置换的循环节

置换的循环节

- 每一个置换都可以写成若干个不相交的“轮换”。
- 比如说 {1,2,3,4,5,6}->{2,1,5,3,4,6} 可以写成三个轮换：(1,2)(3,5,4)(6)
- 注意到这样一个事实：在某个置换下不变的染色方案数，每一个轮换中元素的染色一定是相同的
- 另一方面，不在同一个轮换中的元素的染色互不影响

Polya 原理

- 对一个置换 p，记 c(p) 表示p中的循环节个数
- 设 G 是定义在 X 上的一个置换群（注意，这里的 X 代表棋盘/项链，而不是染色方案）。如果用 m 种颜色对 X 中的元素进行染色，本质不同的方案数为

$$\frac{\sum_{\pi\in G} m^{c(\pi)}}{|G|}$$

POJ 1286

- 用 3 种颜色给一个有 n 个珠子的项链染色
- 考虑旋转、翻转同构，求方案数

POJ 1286

- 旋转：考虑有 k 个循环节的置换有 phi(n / k) 个
- 翻转：分别考虑 n 是奇数和偶数的情况
- 类似：POJ 2409，2154

BZOJ 1004

- 三种颜色的牌分别有 a,b,c 张
- 给出一个大小为 m+1 的置换群
- 问本质不同的把牌摆成一个序列的方案数
- a,b,c<=20, m<=60

BZOJ 1004

- Burnside 引理
- 三维背包DP
- 太水了不展开讲了(雾)

UVa11255

- 有三种颜色的珠子分别 a,b,c 个 (a+b+c<= 40)
- 串成一个项链，考虑旋转和翻转同构，求方案数

UVa11255

- 旋转和翻转置换都可以转换为多重集排列
- 具体细节此处略
- 也可以像上一题那样做

POJ 2888

- 给项链染色，考虑旋转同构
- 有一些限制条件 (x,y)，表示颜色 x 和 y 不能相邻
- 求方案数
- 颜色数<=10

POJ 2888

- 在之前的算法上加入一个矩阵快速幂即可

HDU 2481

- 外面有一个 n 个点的环，中间一个点和外边 n 个点都有边，形成了一个 n+1 个点，2n 条边的图
- 现在要去掉 n 条边，得到一棵生成树
- 考虑旋转同构，方案数?
- n <= 10^9

HDU 2481

- f[n] = 3 * f[n - 1] - f[n - 2]
- 套上一个 Burnside 引理即可

SPOJ 422

- 现在存储了一个 $2^a * 2^b$ 的矩阵
- 矩阵在内存中是按行存储的
- 现在你想求它的转置
- 唯一允许的操作是交换两个内存位置的值
- 求最少需要的次数?
- 40W 组询问，每组询问 $a + b <= 100$W

SPOJ 422

- 可以把内存中每个位置编码为一个 a + b 位的01串
- 那么内存 s 处存储的值的目标位置是 s 循环右移 b 位对应的内存位置
- 设排列有 k 个循环节，那么答案为 2^(a+b) - k
- 循环节计数?

SPOJ 422

- 考虑 2^(a+b) 个不同的二进制串
- 题目实质上要求我们在 “右移 b 位” 这个置换生成的置换群中计算轨道个数
- 这个的做法大家都很熟悉了，本题唯一难点在于模型的转化

BZOJ 1488

- 求不同构的 n 个点的简单图有多少种
- 定义两张图是同构的，当且仅当 A 图可以通过给顶点重新标号，使得 A 图和 B 图完全相同。
- n <= 60

BZOJ 1488

- 每条边有存在或者不存在两种选择
- 可以转换为完全图上对边的 2 染色计数
- 但是这里的置换是点的置换，怎么办?

BZOJ 1488

- 首先还是可以考虑置换的循环节，设某个置换有 k 个循环节，大小分别为 x1,x2…xk，再令 c_i 表示大小为 i 的循环节个数。

- 有多少种置换满足这个条件呢?

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} x_i \cdot \prod_{i=1}^{n} c_i!}$$

BZOJ 1488

- 一个大小为 x 的循环节内部有 (x / 2) 个边循环
- 两个大小分别为 x 和 y 的点循环之间有 gcd(x,y) 个边循环
- 根据这个很容易计算出这个置换下不变的边染色方案数

BZOJ 1488

- 还有一个问题：x1+x2+...=n 有多少个不同的解呢（换句话说，n 个点有多少种不同的划分方法呢）

- 这个数等于 n 的整数拆分数，极限情况 f(60) = 966467，可以接受

- 于是这道题就做完了

- 类似的题：sgu282

Idea from wwwwodddd

- 在 WC 上听B君分享的姿势
- 觉得非常棒，在这里给大家复习一发

羊毛

- 一个由 $n \times m$ 的矩形，我们要用它密铺整个平面；我们要将所有格子染成 c 种颜色。但是 B 君是一个色盲，B 君只能判断两种颜色是否相同，而无法判断出每种颜色具体是什么。
- 输入 n, m, c。问有多少种本质不同的方案，结果对 $10^9 + 7$ 取模。
- 当两种方案的矩形通过循环平移，并且将**颜色重新标号**后一看起来一样，我们认为他们本质相同。
- $1 \le n,m \le 10^9$, $1 \le c \le 16$

羊毛

- 如果你理解了 Burnside 引理，那么这道题应该不会有问题
- 枚举颜色的排列；因为我们只关注轮换的大小，只需枚举 c 的拆分即可
- 之后，根据颜色的轮换大小，和染色对象的轮换大小的倍数关系，计算染色方案数

最后一题 Letzte

- B 君作为一个色盲，要对一个 n 个点的无向完全图所有的边染 m 种颜色之一，问有多少种本质不同的染色方法。

- 如果两个方案通过对点和颜色进行重新标号，可以变为相同的，那么我们认为他们本质相同。

- $1 \le n \le 16, 1 \le m \le 16$

最后一题 Letzte

- 这道题用到的所有处理技巧你都见过了
- 复杂度比较高，所以 n 和 m 也不能出得太大

谢谢大家

- email : 745350128@qq.com
- QQ : 745350128