树形 dp 入门

hzwer

PekingUniversity

2016 年 8 月 19 日

1. 树
   - 简介
   - 例题

认识树

树是一种十分优美的数据结构，因为它本身就具有的递归性，所以树和子树之间能相互传递很多信息。

认识树

树是一种十分优美的数据结构，因为它本身就具有的递归性，所以树和子树之间能相互传递很多信息。
树上的许多特征都可以通过它的子树的对应特征计算获得。

认识树

树是一种十分优美的数据结构，因为它本身就具有的递归性，所以树和子树之间能相互传递很多信息。
树上的许多特征都可以通过它的子树的对应特征计算获得。
所以树做动态规划求最优解和做统计非常方便。

认识树

树是一种十分优美的数据结构，因为它本身就具有的递归性，所以树和子树之间能相互传递很多信息。
树上的许多特征都可以通过它的子树的对应特征计算获得。
所以树做动态规划求最优解和做统计非常方便。

定义

n 个点，n-1 条边的无向连通图称为树。

定义

n 个点，n-1 条边的无向连通图称为树。
结点?

定义

n 个点，n-1 条边的无向连通图称为树。
结点?
叶节点和分支节点?

定义

n 个点，n-1 条边的无向连通图称为树。
结点?
叶节点和分支节点?
结点的度?

定义

n 个点，n-1 条边的无向连通图称为树。
结点?
叶节点和分支节点?
结点的度? 结点的连边数

定义

n 个点，n-1 条边的无向连通图称为树。
结点?
叶节点和分支节点?
结点的度? 结点的连边数
树的度数?

定义

n 个点，n-1 条边的无向连通图称为树。
结点?
叶节点和分支节点?
结点的度? 结点的连边数
树的度数? 结点的度的最大值

定义

n 个点，n-1 条边的无向连通图称为树。
结点?
叶节点和分支节点?
结点的度? 结点的连边数
树的度数? 结点的度的最大值
祖先和子孙?

定义

n 个点，n-1 条边的无向连通图称为树。
结点?
叶节点和分支节点?
结点的度? 结点的连边数
树的度数? 结点的度的最大值
祖先和子孙?
森林?

定义

n 个点，n-1 条边的无向连通图称为树。
结点?
叶节点和分支节点?
结点的度? 结点的连边数
树的度数? 结点的度的最大值
祖先和子孙?
森林? 仙人掌?

定义

n 个点，n-1 条边的无向连通图称为树。
结点?
叶节点和分支节点?
结点的度? 结点的连边数
树的度数? 结点的度的最大值
祖先和子孙?
森林? 仙人掌? 沙漠?

定义

n 个点，n-1 条边的无向连通图称为树。
结点?
叶节点和分支节点?
结点的度? 结点的连边数
树的度数? 结点的度的最大值
祖先和子孙?
森林? 仙人掌? 沙漠?
结点深度，树高，子树大小?

1 树

简介

例题

例题 1

给定一棵 n 个点的无权树，问树中每个子树的大小，每个节点的深度?
其中 $0 \le n \le 10^5$

例题 2

给定一棵 n 个点的点权树，问树中每个子树的点权和，点权最大值？
其中 $0 \leq n \leq 10^5$

例题 3

给定一棵 n 个点的无权树，求树的重心?
重心定义为，删去该点之后，图中的所有连通块的最大尺寸最小。
其中 $0 \leq n \leq 10^5$

例题 4

给定一棵 n 个点的边权树，问树中每个子树的最长链？次长链？
其中 $0 \leq n \leq 10^5$

例题 5

给定一棵 n 个点的边权树，对于树中每个节点 i，询问其到其它所有结点的距离和。
其中 $0 \leq n \leq 10^5$

例题 6

给定一棵 n 个点的边权树，求树的直径。
其中 $0 \le n \le 10^5$

题解

树的直径一定为某个点到其不同子树叶子的最长链 + 次长链

题解

树的直径一定为某个点到其不同子树叶子的最长链 + 次长链
随便 dp 一下

还有一个做法。
选择一个点 X，求出其最远点 Y，再求 Y 的最远点 Z，则 YZ 为直径

还有一个做法。
选择一个点 X，求出其最远点 Y，再求 Y 的最远点 Z，则 YZ 为直径
这样为什么是对的?

还有一个做法。
选择一个点 X，求出其最远点 Y，再求 Y 的最远点 Z，则 YZ 为直径
这样为什么是对的?
分三步证明，反证法。

还有一个做法。
选择一个点 X，求出其最远点 Y，再求 Y 的最远点 Z，则 YZ 为直径
这样为什么是对的?
分三步证明，反证法。
先证明 XY 与直径有交

还有一个做法。
选择一个点 X，求出其最远点 Y，再求 Y 的最远点 Z，则 YZ 为直径
这样为什么是对的?
分三步证明，反证法。
先证明 XY 与直径有交
再证明 Y 是直径的一个端点

还有一个做法。
选择一个点 X，求出其最远点 Y，再求 Y 的最远点 Z，则 YZ 为直径
这样为什么是对的?
分三步证明，反证法。
先证明 XY 与直径有交
再证明 Y 是直径的一个端点
那么找 Y 的最远点 Z，YZ 即为直径

还有一个做法。
选择一个点 X，求出其最远点 Y，再求 Y 的最远点 Z，则 YZ 为直径
这样为什么是对的?
分三步证明，反证法。
先证明 XY 与直径有交
再证明 Y 是直径的一个端点
那么找 Y 的最远点 Z，YZ 即为直径

例题 7

给定一棵 n 个点的无权树，求其每个子树的重心。
子树重心定义为，删去该点之后，子树的所有连通块大小均不超过 $n/2$
其中 $0 \leq n \leq 10^5$

例题 8. 没有上司的舞会

公司的人际关系构成一棵 n 个结点的树，现公司要举行一场晚会并规定
如果邀请了某个人，那么一定不会邀请他的上司（上司的上司，上司的上司的上司……都可以邀请)。
每个人都有一个气氛值，求一个邀请方案，使欢乐值的和最大。
其中 $0 \leq n \leq 10^5$

题解

状态很简单

题解

状态很简单

f_i 表示 i 人参加了舞会的时候这个子树的欢乐值之和

g_i 表示 i 人没参加舞会的时候这个子树的欢乐值之和

题解

状态很简单

f_i 表示 i 人参加了舞会的时候这个子树的欢乐值之和

g_i 表示 i 人没参加舞会的时候这个子树的欢乐值之和

转移更简单

题解

状态很简单

f_i 表示 i 人参加了舞会的时候这个子树的欢乐值之和

g_i 表示 i 人没参加舞会的时候这个子树的欢乐值之和

转移更简单

$f_i = v_i + \sum g_j (fa_j = i)$

$g_i = \sum max(f_j, g_j)(fa_j = i)$

例题 9. 二叉苹果树

有一棵苹果树，它是一棵二叉树，共 N 个节点，树节点编号为 1 N
编号为 1 的节点为树的根，边可理解为树的分枝，每个分支都长着若干个苹果
现在要减去若干个分支，保留 M 个分支，使得这 M 个分支中的苹果数量最多。其中 $0 \le n \le 10^4, 0 \le m \le 50$

题解

此题和前面的题有个明显不同的地方，我们关注树的信息，还需要在树上分配资源。

题解

此题和前面的题有个明显不同的地方，我们关注树的信息，还需要在树上分配资源。
所以我们描述问题时需增加一维表示要分配的资源，用 $f[i,j]$ 表示以 i 为根的树上保留 j 个边能获得的最多的苹果个数。

题解

此题和前面的题有个明显不同的地方，我们关注树的信息，还需要在树上分配资源。

所以我们描述问题时需增加一维表示要分配的资源，用 $f[i,j]$ 表示以 i 为根的树上保留 j 个边能获得的最多的苹果个数。

我们可以用子树的相关特性算出树的相关特性。

题解

此题和前面的题有个明显不同的地方，我们关注树的信息，还需要在树上分配资源。
所以我们描述问题时需增加一维表示要分配的资源，用 $f[i,j]$ 表示以 i 为根的树上保留 j 个边能获得的最多的苹果个数。
我们可以用子树的相关特性算出树的相关特性。

$f[i,j] = max(f[sonl, j-1] + W[i, sonl],$
$f[sonr, j-1] + W[i, sonr],$
$f[sonl, k] + f[sonr, j-2-k] + W[i, sonl] + W[i, sonr])$
$(0 \le k \le j-2)$
W 表示对应树枝上的苹果数。
答案是 $f[root, M]$
时间复杂度是 $O(NM^2)$