莫比乌斯反演

visit_world

目录

反演式

- 回忆一下莫比乌斯函数的定义
- $\mu(n)$ =
  - 0，n 是有平方因子数
  - $(-1)^k$，k 是质因子的个数
- 回忆一下我们学的狄利克雷卷积
- $1 * \mu = e$
- 这就是莫比乌斯反演

反演式

- 证明一下这个式子：
- $(1 * \mu)(n) = ?$
  - $n = 1$ 时，显然 $(1 * \mu)(1) = 1$
  - 首先可以把 n 里重复的质因子去掉而不影响答案
  - 只需要考虑 $n = p1 * p2 * p3 * \ldots * pk$ 的情况
  - 我们把 $p1$ 取出来，考虑任何一种没有 $p1$ 的选法，与选上 $p1$ 的贡献会相互抵消
  - 所以，对于任意的 $n > 1$，我们有 $(1 * \mu)(n) = 0$
  - 这恰好符合元函数 $e(n)$ 的定义
- 所以 $1 * \mu = e$

反演式

- 考虑通过反演式证明 $id * \mu = \varphi$
- 首先有 $\varphi * 1 = id$
- 两边同时对 μ 做卷积
- $\varphi = id * \mu$
- 证完啦!

和式变换技巧

- 先看一个简单的例子：
- 给出 n, m，对所有满足 1 <= x <= n, 1 <= y <= m 的 (x, y)，求 gcd(x, y) 的和
- 就让 n, m <= 1e7 好了
- 多组询问

和式变换技巧

- ∑(x <= n) ∑ (y <= m) gcd(x, y)
  - = ∑(x <= n) ∑ (y <= m) ∑ (d|gcd(x, y)) φ(d)
  - = ∑(x) ∑(y) ∑(d|x and d|y) φ(d)
  - = ∑(d <= n) φ(d) ∑(d|x) ∑(d|y) 1
  - = ∑(d) φ(d) * [n / d] * [m / d]
- 请认真领会每一步变换
- 主要用到了 φ * 1 = id 把不好处理的 gcd 转换为约数的 φ 之和，然后转换枚举对象，简化计算。

和式变换技巧

- 到这一步，我们已经得到了一个单次询问 O(n) 的做法
- 但是面对 10000 组询问，这个复杂度还不够
- 注意到这样一点：[n / d] 的可能取值是 sqrt(n) 级别的
- 证明：
    - d <= sqrt(n) 的时候，至多有 sqrt(n) 种取值
    - d > sqrt(n) 时，[n / d] 至多有 sqrt(n) 种取值
    - 所以总的来说， [n / d] 的取值是 O(sqrt(n)) 的
- 这个例子里，[n / d] * [m / d] 的取值也是 sqrt(n) 级别的
- 相当于n、m各插了 sqrt(n) 块隔板，总的隔板数是 sqrt(n) 的

一般这样写

```
void calc(int n, int m)
{
    if (n > m)  swap(n, m);
    for (int i = 1, p; i <= n; i = p + 1)
    {
        p = min(n / (n / i), m / (m / i));
        ans += sum[p] - sum[i - 1] * (n / i) * (m / i);
    }
    return ans;
}
```

套路总结

- 反演的套路，假设我们要计算长得像下边这样的式子：
  - ∑(x) ∑(y) 嘿嘿嘿(x) * 嗯嗯嗯(y) * f(gcd(x,y))
  - 嘿嘿嘿、嗯嗯嗯、f 均为数论函数
- 形象理解一下，就是枚举了 x、y，然后把关于 x 的一部分、关于 y 的一部分和关于 gcd(x,y) 的一部分，分别算出了一个函数值，然后乘起来求和。
- 其中最棘手的部分是 f(gcd(x,y))
- 尝试找到一个函数 g，使得 g = f * u，那么：f = g * 1

套路总结

- ∑(x) ∑(y) 嘿(x) * 嗯(y) * ∑(d|gcd(x,y)) g(d)
- = (∑{d} g(d)) * ∑(d|x) 嘿(x) * ∑(d|y) 嗯(y)
- 通过这样一种变换，使得 x 和 y 的枚举、计算相对**独立**，然后就能通过进一步推导得到一些能快速计算的式子

和式变换技巧

- 需要连续的一段 O(1) 计算，预处理 φ 的前缀和
- 我们现在能得到一个单次询问 O(sqrt(n)) 的做法
- 常数很小
- 足以通过各种数据

和式变换技巧

- 这个留作练习：
- 给出 n, m，求所有满足 $1 <= x <= n, 1 <= y <= m$ 的x, y，$lcm(x, y)$ 的和
- $n, m <= 1e7$
- 多组询问
- BZOJ 上： 2693，2154
- (下面三页从JZP课件抓来的......公式不好打)
- (比较鬼畜……推不出来可以理解)
- 提示：$lcm(x, y) = x * y / gcd(x, y)$

参考

- $\sum_{a=1}^{N}\sum_{b=1}^{M}\operatorname{lcm}(a,b)$
- $=\sum_{d}\sum_{a=1}^{N}\sum_{1\le b\le M \text{ and } \gcd(a,b)=d}\frac{ab}{d}$
- $=\sum d\sum_{a=1}^{\lfloor N/d\rfloor}\sum_{b=1}^{\lfloor M/d\rfloor}[\gcd(a,b)=1]ab$
- 令$f(n,m)=\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m}[\gcd(a,b)=1]ab$
- $f(n,m)=\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m}ab\sum_{d|\gcd(a,b)}\mu(d)$
- $=\frac{1}{4}\sum\mu(d)d^2\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor+1\right)\left(\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor+1\right)$

参考

- 将$f(n,m)$代回原式：
- $\sum_{a=1}^{N}\sum_{b=1}^{M}\operatorname{lcm}(a,b)$
- $=\frac{1}{4}\sum d\sum \mu(d')d'^2\left\lfloor\frac{\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor}{d'}\right\rfloor\left\lfloor\frac{\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor}{d'}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor}{d'}\right\rfloor+1\right)\left(\left\lfloor\frac{\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor}{d'}\right\rfloor+1\right)$
- $=\frac{1}{4}\sum d\sum \mu(d')d'^2\left\lfloor\frac{N}{dd'}\right\rfloor\left\lfloor\frac{M}{dd'}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{N}{dd'}\right\rfloor+1\right)\left(\left\lfloor\frac{M}{dd'}\right\rfloor+1\right)$
- $=\frac{1}{4}\sum\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{N}{d}\right\rfloor+1\right)\left(\left\lfloor\frac{M}{d}\right\rfloor+1\right)d\sum_{d'|d}d'\mu(d')$
- 令$g(n)=n\sum_{d|n}d\mu(d)$，不难看出$g(n)$满足积性，可以通过线性筛法预处理。

参考

- 其实前面用了一个有趣的结论：若连续且单调增的函数$f(x)$满足当$f(x)$为整数时可推出x为整数，则$\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor f(\lfloor x \rfloor) \rfloor$。
- 令$f(x) = \frac{x}{k}$（k为正整数），可以得到$\left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{k} \right\rfloor$，因此推导过程中的$\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{N}{d} \right\rfloor}{d'} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{N}{dd\prime} \right\rfloor$。

和式变换技巧

- 再看一个简单的例子：
- 给出 n, m, 求
  - $\sum(1<=x<=n) \sum(1 <= y <= m) [gcd(x, y) = 1]$
- [x]： 当表达式 x 为真时，值为1，否则值为 0
- n, m <= 1e7
- 多组询问

和式变换技巧

- 上一个例子用到了 $\varphi * 1 = id$
- 这个例子我们需要用 $\mu * 1 = e$
- 留作练习

BZOJ 2440

- 给定 K，求第 K 个无平方因子数
- K <= 1e9

BZOJ 2440

- 显然可以二分，用 log 的代价二分答案，问题转换为 [1, x] 中有多少无平方因子数
- 由容斥原理，[1, x] 中无平方因子数等于：
  - 0 个质数乘积的平方的倍数个数
  - - 1 个质数乘积的平方的倍数个数
  - + 2 个质数乘积的平方的倍数的个数
  - ……
- 枚举 [1, sqrt(x)] 范围内的数，把 mu[i] * (x / (i * i)) 加入答案
- 莫比乌斯函数的应用，并没有用到反演的那些性质 = =

BZOJ 2005

- 给定 n, m，计算：
  - $\sum(x <= n) \sum(y <= m) \gcd(x, y) * 2 - 1$
- n, m <= 1e5
- 单组询问 :-(

BZOJ 2005

- ans = 2 * (∑(d) φ(d) * [n / d] * [m / d]) - n * m
- 如果充分理解了之前的内容应该能推导出这一步
- 但我们从莫比乌斯反演的角度再推一推公式?
  - 要算 ∑(x) ∑(y) gcd(x, y)
  - 枚举 gcd(x, y) = d
  - = ∑(d) d * ∑(d|x) ∑(d|y) [gcd(x, y) = d]
  - = ∑(d) d * ∑(x<=n/d) ∑(y <= m/d) [gcd(x, y) = 1]
  - = ∑(d) d * ∑(x<=n/d) ∑(y <= m/d) ∑(k|x and k|y) μ(k)
  - = ∑(d) d * ∑(k) μ(k) * [n / kd] * [m / kd]
  - 枚举 T = kd   ⭑
  - = ∑(T) [n / T] * [m / T] * ∑(ab = T) a * μ(b)
- 发现了什么？我们迂回地说明了 φ = id * μ （滑稽.jpg）

BZOJ 2301

- 给出 a, b, c, d, k，询问有多少组 (x, y) 满足：
  - a <= x <= b
  - c <= y <= d
  - gcd(x, y) = k
- 5W 组询问，a, b, c, d <= 5W

BZOJ 2301

- 首先一个询问可以拆成四个
- $\sum(1 <= x <= n) \sum (1 <= y <= m)$ [gcd(x, y) = k]
- $= \sum(1 <= x <= n/k) \sum (1 <= y <= m/ k)$ [gcd(x, y) = 1]
- 哎这个式子怎么这么熟悉?
- 单次询问 O(sqrt(n))
- 搞定

BZOJ 2820

- 给出 n, m，求有多少对(x, y) 满足
  - 1 <= x <= n
  - 1 <= y <= m
  - gcd(x, y) 为质数
- n, m <= 1e7
- 1W 组询问

BZOJ 2820

- 套用上一问的思路枚举 p 是会 T 掉的
- 先推一推公式吧：
  - ∑(p是质数) ∑(d) μ(d) * [n / pd] * [m / pd]
  - 我们改为枚举 pd = T   *
  - = ∑ (T) [n / T] * [m / T] * ∑(p|T and p是质数) μ(T / p)
- 设后面那一坨为 g(T)
- 我们对每个质数 p ，暴力枚举它的倍数，能把 g 预处理出来
- 这个过程的复杂度......反正低于 O(n * log(n)) 就是了
- 然后把 g 的前缀和算出来
- 单次询问 O(sqrt(n))

BZOJ 3529

- 令 F(i) 表示 i 的约数和
- 给出 n, m, a，对满足以下条件的(x, y)：
  - 1 <= x <= n
  - 1 <= y <= m
  - F(gcd(x, y)) <= a
- 求 F(gcd(x, y)) 的和
- n, m <= 1e5, a <= 1e9
- 2W组询问

BZOJ 3529

- 如果没有a的限制…
  - 枚举 gcd(x, y) = d
  - ∑(d) F(d) * ∑(k) μ(k) * [n / dk] * [m / dk]
  - = ∑(T) [n / T] * [m / T] * ∑(ab = T) F(a) * μ(b)
  - 设 h(n) = ∑(ab = n) F(a) * μ(b)
- 按照套路，我们把 h 的前缀和预处理出来，然后O(sqrt(n))回答询问

BZOJ 3529

- 考虑离线
- 询问按 a 的大小排序
- 用树状数组维护 h 的前缀和
- 处理到一个询问的时候，F 值 <= a 的若干个 F(x) 加入到 h 中
- 枚举 x 的倍数就可以完成
- 调和级数分析复杂度
- 总复杂度为 O(n * log ^ 2 n + T * sqrt(n) * log(n))

练习

- 讲过的所有题我建议你都 A 掉
- 证明:
  - 若有 $F(n) = \sum_{(n|d)} f(d)$
  - 则有 $f(n) = \sum_{(n|d)} F(d) * \mu(d / n)$
- BZOJ 4407 (简单)
- BZOJ 3994
- 拓展:
  - BZOJ 3309 (困难)
  - BZOJ 3434 (困难 EXT)

Thanks

- email : 745350128@qq.com
- QQ : 745350128