1.1. SƠ LƯỢC VỀ LÔGICH MỆNH ĐỀ

1.1.1. Mệnh đề

- Lôgích mệnh đề là một hệ thống lôgich đơn giản nhất, với đơn vị cơ bản là các *mệnh đề* mang nội dung của các phán đoán, mỗi phán đoán được giả thiết là có một giá trị chân lý nhất định là đúng hoặc sai.
- Để chỉ các mệnh đề chưa xác định ta dùng các chữ cái p, q, r … và gọi chúng là các *biến mệnh đề*.
- Nếu biến mệnh đề p đúng ta cho p nhận giá trị 1 và p sai ta cho nhận giá trị 0. Giá trị 1 hoặc 0 được gọi là *thể hiện* của p.
- *Mệnh đề phức hợp* được xây dựng từ các mệnh đề đơn giản hơn bằng các phép liên kết lôgich mệnh đề.

1.1.2. Các phép liên kết lôgich mệnh đề

1. Phép phủ định

Phủ định của mệnh đề p là mệnh đề được ký hiệu $\overline{p}$ đọc là không p

Mệnh đề $\overline{p}$ đúng khi p sai và $\overline{p}$ sai khi p đúng

2. Phép hội)

Hội của hai mệnh đề p, q là mệnh đề được ký hiệu $p \wedge q$ (đọc là p và q)

Mệnh đề $p \wedge q$ chỉ đúng khi p và q cùng đúng

3. Phép tuyển

Tuyển của hai mệnh đề p, q là mệnh đề được ký hiệu $p \vee q$ (p hoặc q)

Mệnh đề $p \vee q$ chỉ sai khi p và q cùng sai

4. Phép kéo theo

Mệnh đề p kéo theo q, ký hiệu $p \Rightarrow q$, (đọc p kéo theo q, p suy ra q)

Mệnh đề p kéo theo q chỉ sai khi p đúng q sai

5. Phép tương đương

Mệnh đề p tương đương q, $p \Leftrightarrow q$, là mệnh đề $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Mệnh đề $p \Leftrightarrow q$ đúng khi cả hai mệnh đề p và q cùng đúng hoặc cùng sai và mệnh đề $p \Leftrightarrow q$ sai trong trường hợp ngược lại

- Một công thức gồm các biến mệnh đề và các phép liên kết mệnh đề được gọi là một *công thức mệnh đề.*
- Bảng liệt kê các thể hiện của công thức mệnh đề được gọi là *bảng chân trị.*

- Một công thức mệnh đề được gọi là hằng đúng nếu nó luôn nhận giá trị 1 trong mọi thể hiện của các biến mệnh đề có trong công thức.
- Ta ký hiệu mệnh đề tương đương hằng đúng là "≡" thay cho "⇔"

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

1.1.3. Các tính chất

Dùng bảng chân trị ta dễ dàng kiểm chứng các mệnh đề hằng đúng

1) $\overline{\overline{p}} \equiv p$ *luật phủ định kép.*

2) $(p \Rightarrow q) \equiv (\overline{p} \vee q)$

3) $p \wedge q \equiv q \wedge p, \quad p \vee q \equiv q \vee p$ *luật giao hoán*

4) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ *luật kết hợp*

5) $[p \wedge (q \vee r)] \equiv [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
$[p \vee (q \wedge r)] \equiv [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ *luật phân phối*

6) Mệnh đề $p \vee \overline{p}$ luôn đúng *luật bài trung*
$p \wedge \overline{p}$ luôn sai *luật mâu thuẫn*

7) $\overline{p \vee q} \equiv \overline{p} \wedge \overline{q}; \quad \overline{p \wedge q} \equiv \overline{p} \vee \overline{q}$ *luật De Morgan*

MỞ ĐẦU VỀ LÔGICH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP ÁNH XẠ VÀ ĐẠI SỐ BOOLE

1.2. TẬP HỢP

- Khái niệm tập hợp, ánh xạ và các cấu trúc đại số là các khái niệm cơ bản: vừa là công cụ vừa ngôn ngữ của toán học hiện đại. Vì vai trò nền tảng của nó nên khái niệm tập hợp được đưa rất sớm vào chương trình toán phổ thông (toán lớp 6).
- Khái niệm tập hợp được Cantor (Căng-to) đưa ra vào cuối thế kỷ 19. Sau đó được chính xác hoá bằng hệ tiên đề về tập hợp. Có thể tiếp thu lý thuyết tập hợp theo nhiều mức độ khác nhau.
- Chúng ta chỉ tiếp cận lý thuyết tập hợp ở mức độ trực quan kết hợp với các phép toán lô gich hình thức như "và", "hoặc", phép kéo theo, phép tương đương, lượng từ phổ biến, lượng từ tồn tại. Với các phép toán lô gích này ta có tương ứng các phép toán giao, hợp, hiệu các tập hợp con của các tập hợp.

MỞ ĐẦU VỀ LÔGICH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP ÁNH XẠ VÀ ĐẠI SỐ BOOLE

1.2.1. Khái niệm tập hợp

- Khái niệm tập hợp và phần tử là khái niệm cơ bản của toán học, không thể định nghĩa qua các khái niệm đã biết
- Các khái niệm "tập hợp", "phần tử" xét trong mối quan hệ phần tử của tập hợp trong lý thuyết tập hợp là giống với khái niệm "đường thẳng", "điểm" và quan hệ điểm thuộc đường thẳng được xét trong hình học
- Tập hợp được đặc trưng tính chất rằng một phần tử bất kỳ chỉ có thể hoặc thuộc hoặc không thuộc tập hợp

Nếu phần tử x thuộc A ta ký hiệu $x \in A$

x không thuộc A ta ký hiệu $x \notin A$

MỞ ĐẦU VỀ LÔGICH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP ÁNH XẠ VÀ ĐẠI SỐ BOOLE

Có thể biểu diễn tập hợp theo hai cách sau

a) Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp trong dấu ngoặc nhọn

Trường hợp tập hợp có hữu hạn phần tử hoặc các phần tử của tập hợp có thể liệt kê theo một quy luật dễ nhận biết thì ta có thể biểu diễn các phần tử trong dấu ngoặc nhọn

Ví dụ 1.1: *Tập các số tự nhiên lẻ nhỏ hơn 10 là* $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

Tập hợp các nghiệm của phương trình $x^2 - 1 = 0$ *là* $\{-1, 1\}$

Tập hợp các số tự nhiên chẵn có thể biểu diễn dưới dạng:

$$P = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

b) Nêu đặc trưng tính chất của các phần tử tạo thành tập hợp

Có những tập hợp không thể liệt kê các phần tử của chúng, khi đó ta biểu diễn tập hợp này bằng cách đặc trưng các tính chất của phần tử tạo nên tập hợp.

Ví dụ 1.2: Tập hợp các số tự nhiên chẵn $P=\{n\in\mathbb{N}\,|\,n=2m,\ m\in\mathbb{N}\}$.

Giản đồ Venn

Để có hình ảnh trực quan về tập hợp, người ta thường biểu diễn tập hợp như là miền phẳng giới hạn bởi đường cong khép kín không tự cắt được gọi là ***giản đồ Venn***

MỞ ĐẦU VỀ LÔGICH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP ÁNH XẠ VÀ ĐẠI SỐ BOOLE

- Tập hợp có thể được biểu diễn bằng cách đặc trưng tính chất của phần tử thông qua khái niệm *hàm mệnh đề*
- Hàm mệnh đề xác định trong tập hợp D là một mệnh đề $S(x)$ phụ thuộc vào biến $x\in D$. Khi cho biến x một giá trị cụ thể thì ta được mệnh đề lôgich (mệnh đề chỉ nhận một trong hai giá trị hoặc đúng hoặc sai)
- Tập hợp các phần tử $x\in D$ sao cho $S(x)$ đúng là miền đúng của hàm mệnh đề $S(x)$ và ký hiệu $D_{S(x)}$ hoặc $\{x\in D\,|\,S(x)\}$

MỞ ĐẦU VỀ LÔGICH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP ÁNH XẠ VÀ ĐẠI SỐ BOOLE

1.2.3. Một số tập hợp số thường gặp

- Tập các số tự nhiên $\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$.
- Tập các số nguyên $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,...\}$.
- Tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q}=\{p/q\,|\,q\neq 0,\ p,q\in\mathbb{Z}\}$.
- Tập các số thực $\mathbb{R}$ (gồm các số hữu tỉ và vô tỉ).
- Tập các số phức $\mathbb{C}=\{z=x+iy\,|\,x,y\in\mathbb{R};\ i^2=-1\}$.

MỞ ĐẦU VỀ LÔGICH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP ÁNH XẠ VÀ ĐẠI SỐ BOOLE

1.2.4. Tập con

- Tập A được gọi là tập con của B nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B, khi đó ta ký hiệu $A\subset B$ hay $B\supset A$

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

- Hai tập A,B bằng nhau, ký hiệu $A=B$ khi và chỉ khi $A\subset B$ và $B\subset A$

Để chứng minh $A\subset B$ ta chỉ cần chứng minh $x\in A\Rightarrow x\in B$

Để chứng minh $A=B$ ta chỉ cần chứng minh $x\in A\Leftrightarrow x\in B$

- ***Tập rỗng*** là tập không chứa phần tử nào, ký hiệu $\varnothing$
- Một cách hình thức ta có thể xem tập rỗng là tập con của mọi tập hợp

Tập hợp tất cả các tập con của X được ký hiệu $\mathscr{P}(X)$

Vậy $A \in \mathscr{P}(X)$ khi và chỉ khi $A \subset X$

Tập X là tập con của chính nó nên là phần tử lớn nhất

$\varnothing$ là phần tử bé nhất trong $\mathscr{P}(X)$

Ví dụ 1.5: $X = \{a, b, c\}$

$$\mathscr{P}(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{c,a\}, X\}$$

Nếu X có n phần tử thì $\mathscr{P}(X)$ có 2^n phần tử

1.2.5 Các phép toán trên các tập hợp

1. Phép hợp

Hợp của hai tập A và B, ký hiệu $A \cup B$, là tập gồm các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập A, B

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$$

2. Phép giao

Giao của hai tập A và B, ký hiệu $A \cap B$, là tập gồm các phần tử thuộc đồng thời cả hai tập A, B

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B))$$

3. Hiệu của hai tập

Hiệu của hai tập A và B, ký hiệu $A \setminus B$, là tập gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B

$$(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B))$$

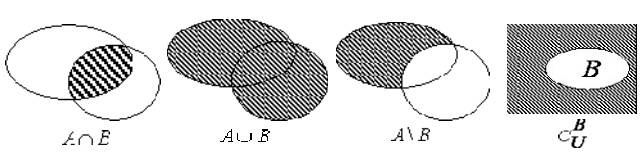
Thông thường giả thiết tất cả các tập được xét là các tập con của một tập cố định gọi là *tập phổ dụng* U. Tập $U \setminus B$ được gọi là phần bù của B trong U và được ký hiệu là C_U^B hoặc $\overline{B}$

Ví dụ 1.5

Xét các tập $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{b,d,e,f\}$, $U = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$

$$A \cup B = \{a,b,c,d,e,f\},\ A \cap B = \{b, d\},\ A \setminus B = \{a,c\}$$

$$C_U^A = \{e,f,g,h\},\ C_U^B = \{a,c,g,h\}$$



Phép hợp và giao các tập hợp được mở rộng cho n tập con $A_1, \ldots, A_n$ như sau:

Hợp $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ (hoặc ký hiệu $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$) là tập có các phần tử thuộc ít nhất một trong các tập $A_1, \ldots, A_n$.

Giao $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ (hoặc ký hiệu $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$) là tập có các phần tử thuộc đồng thời tất cả các tập $A_1, \ldots, A_n$.

Ví dụ 1.6:

Chứng minh rằng nếu $A\cup C\subset A\cup B,\ A\cap C\subset A\cap B$ thì $C\subset B$

Tính chất

1. $A\cup B=B\cup A,\ \ A\cap B=B\cap A$ *tính giao hoán*
2. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ *tính kết hợp*
3. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ *tính phân bố*
4. $\overline{\overline{A}}=A;\ A\cup\varnothing=A;\ A\cap U=A$
5. $A\cup\overline{A}=U;\ A\cap\overline{A}=\varnothing$

Tính chất

6. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B};\ \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ *luật De Morgan*
7. $A\setminus B=A\cap\overline{B}=A\cap\left(\overline{A\cap B}\right)=A\setminus(A\cap B)=C_A^{A\cap B}$
8. $A\cup A=A,\ A\cap A=A$ *tính lũy đẳng*
9. $A\cap B\subset A\subset A\cup B;\ A\cap B\subset B\subset A\cup B.$
10. $\begin{cases}A\subset C\\ B\subset C\end{cases}\Rightarrow A\cup B\subset C;\ \begin{cases}D\subset A\\ D\subset B\end{cases}\Rightarrow D\subset A\cap B.$

1.2.7 Lượng từ phổ biến và lượng từ tồn tại

Giả sử $S(x)$ là một hàm mệnh đề xác định trên tập D có miền đúng $D_{S(x)}=\{x\in D|S(x)\}$

a) Mệnh đề $\forall x\in D, S(x)$ (đọc là với mọi $x\in D,\ S(x)$) là một mệnh đề đúng nếu $D_{S(x)}=D$ và sai trong trường hợp ngược lại

Ký hiệu ∀(đọc là với mọi) được gọi là ***lượng từ phổ biến***

Khi D đã xác định thì ta thường viết tắt $\forall x,\ S(x)$ hay $(\forall x),\ S(x)$

b) Mệnh đề $\exists x\in D, S(x)$ (đọc là tồn tại $x\in D,\ S(x)$) là một mệnh đề đúng nếu $D_{S(x)}\neq\varnothing$ và sai trong trường hợp ngược lại

Ký hiệu ∃(đọc là tồn tại) được gọi là ***lượng từ tồn tại***

Mở rộng khái niệm lượng từ tồn tại với ký hiệu $\exists!\, x\in D,\ S(x)$

(đọc là tồn tại duy nhất $x\in D,\ S(x)$) nếu $D_{S(x)}$ có đúng một phần tử

Phép phủ định lượng từ

$$\overline{\forall x\in D,\ S(x)}\Leftrightarrow\left(\exists x\in D,\ \overline{S(x)}\right)$$

$$\overline{\exists x\in D,\ S(x)}\Leftrightarrow\left(\forall x\in D,\ \overline{S(x)}\right)$$

Ví dụ 1.7

Theo định nghĩa của giới hạn

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0;\forall x:\ \ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

Sử dụng mệnh đề hằng đúng $(p\Rightarrow q)\equiv(\overline{p}\vee q)$

ta có $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ tương đương với

$$\overline{(|x-a|<\delta)}\vee(|f(x)-L|<\varepsilon)$$

Vậy phủ định của $\lim_{x\to a} f(x)=L$ là

$$\exists\varepsilon>0,\ \forall\delta>0;\exists x:\ \ (0<|x-a|<\delta)\wedge(|f(x)-L|\geq\varepsilon)$$

1.2.7. Phép hợp và giao suy rộng

$\bigcup_{i\in I} A_i$ là tập gồm các phần tử thuộc ít nhất một tập A_i nào đó

$\bigcap_{i\in I} A_i$ là tập gồm các phần tử thuộc mọi tập A_i

$$x\in\bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \left(\exists i_0\in I;\ x\in A_{i_0}\right)$$

$$x\in\bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \left(\forall i\in I;\ x\in A_i\right)$$

Ví dụ 1.8

$$A_n=\{x\in\mathbb{R}\,|\,0\leq x\leq n/(n+1)\}\ \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=[0;1)$$

$$B_n=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-1/(n+1)\leq x<1+1/(n+1)\}\ \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n=[0;1]$$

1.3. Tích Descartes của các tập hợp

Tích Descartes của hai tập X, Y là tập, ký hiệu $X\times Y$, gồm các phần tử có dạng (x,y) trong đó $x\in X$ và $y\in Y$

$$X\times Y=\{(x,y)\,|\,x\in X\ \text{ và }\ y\in Y\}$$

Ví dụ 1.9 $\quad X=\{a,b,c\},\quad Y=\{1,2\}$

$$X\times Y=\{(a,1),(b,1),(c,1),(a,2),(b,2),(c,2)\}$$

$$Y\times X=\{(1,a),(2,a),(1,b),(2,b),(1,c),(2,c)\}$$

Ta có thể chứng minh được rằng nếu X có n phần tử, Y có m phần tử thì $X\times Y$ có $n\cdot m$ phần tử

Tích Descartes của n tập hợp $X_1, X_2,..., X_n$

$$X_1\times X_2\times\ldots\times X_n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,|\,x_i\in X_i,\ i=1,2,\ldots,n\}$$

Nhận xét 1.1

1. Với mọi $(x_1,\ldots,x_n)\in X_1\times\ldots\times X_n;\ (x'_1,\ldots,x'_n)\in X_1\times\ldots\times X_n$

   ta có $(x_1,\ldots,x_n)=(x'_1,\ldots,x'_n)\Leftrightarrow x_i=x'_i, \forall i=1,\ldots,n$

2. Tích Descartes $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ còn được ký hiệu $\prod_{i\in I} X_i$

3. Tích Descartes của các tập hợp không có tính giao hoán

4. Khi $X_1=\ldots=X_n=X$ ta ký hiệu X^n thay cho $\underbrace{X\times\ldots\times X}_{n\text{ lần}}$

Chẳng hạn $\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,|\,x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}\}$

$$\mathbb{R}^2=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}\qquad \mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\,|\,x,y,z\in\mathbb{R}\}$$

$$(x,y)=(1,-3)\in\mathbb{R}^2\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-3\end{cases}$$

1.4. ÁNH XẠ

- Khái niệm ánh xạ được khái quát hoá từ khái niệm hàm số trong đó hàm số thường được cho dưới dạng công thức tính giá trị của hàm số phụ thuộc vào biến số.
- Khái niệm này giúp ta mô tả các phép tương ứng từ một tập này đến tập kia thoả mãn điều kiện rằng mỗi phần tử của tập nguồn chỉ cho ứng với một phần tử duy nhất của tập đích và mọi phần tử của tập nguồn đều được cho ứng với phần tử của tập đích. Ở đâu có tương ứng thì ta có thể mô tả được dưới ngôn ngữ ánh xạ.

1.4.1. Định nghĩa và ví dụ

Một ánh xạ từ tập X vào tập Y là một quy luật cho tương ứng mỗi một phần tử $x \in X$ với một phần tử duy nhất $y = f(x)$ của Y thỏa mãn hai điều kiện sau:

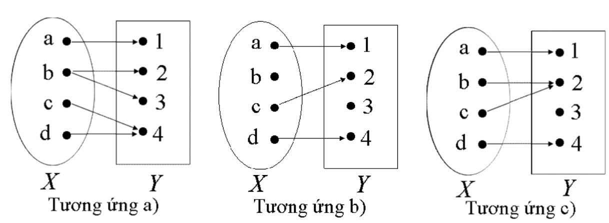
1. Mọi $x \in X$ đều có ảnh tương ứng $y = f(x) \in Y$
2. Với mỗi $x \in X$ ảnh $y = f(x)$ là duy nhất

Ta ký hiệu $\begin{array}{l} f: X \longrightarrow Y \\ x \mapsto y = f(x) \end{array}$ hay $\begin{array}{l} X \xrightarrow{f} Y \\ x \mapsto y = f(x) \end{array}$

X được gọi là tập nguồn, Y được gọi là tập đích

Mỗi hàm số $y = f(x)$ bất kỳ có thể được xem là ánh xạ từ tập xác định D vào $\mathbb{R}$

Ví dụ 1.17



Tương ứng a) không thỏa mãn điều kiện thứ 2

Tương ứng b) không thỏa mãn điều kiện 1

Chỉ có tương ứng c) xác định một ánh xạ từ X vào Y

Hai ánh xạ $f: X \to Y$, $g: X' \to Y'$ được gọi là bằng nhau, ký hiệu $f = g$, nếu thỏa mãn $\begin{cases} X = X', Y = Y' \\ f(x) = g(x); \forall x \in X \end{cases}$

Xét ánh xạ $f: X \to Y$

- Cho $A \subset X$, ta ký hiệu và gọi tập sau là ảnh của A qua ánh xạ f

$$f(A) = \left\{ f(x) \,\middle|\, x \in A \right\}$$

Nói riêng $f(X) = \operatorname{Im} f$ được gọi là tập ảnh hay tập giá trị của f

- Cho $B \subset Y$, ta gọi tập sau là nghịch ảnh của B qua ánh xạ f

$$f^{-1}(B) = \left\{ x \in X \,\middle|\, f(x) \in B \right\}$$

Ta viết $f^{-1}(y)$ thay cho $f^{-1}(\{y\})$

$$f^{-1}(y) = \left\{ x \in X \,\middle|\, y = f(x) \right\}$$

1.4.2. Phân loại các ánh xạ

Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là *đơn ánh* nếu ảnh của hai phần tử phân biệt là hai phần tử phân biệt

$$\forall x_1, x_2 \in X; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

hoặc một cách tương đương

$$\forall x_1, x_2 \in X; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là *toàn ánh* nếu mọi phần tử của Y là ảnh của phần tử nào đó của X

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \text{ sao cho } y = f(x)$$

Ánh xạ vừa đơn ánh vừa toàn ánh được gọi là *song ánh*

Vậy f là một song ánh khi thỏa mãn điều kiện sau:

$$\forall y \in Y, \exists! x \in X \text{ sao cho } y = f(x)$$

- Khi ánh xạ $f: X \to Y$ được cho dưới dạng công thức xác định ảnh $y = f(x)$ thì ta có thể xác định tính chất đơn ánh, toàn ánh của ánh xạ f bằng cách giải phương trình:

$$f(x) = y, \; y \in Y$$

trong đó ta xem x là ẩn và y là tham biến

- Nếu với mọi $y \in Y$ phương trình luôn có nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là toàn ánh.
- Nếu với mỗi $y \in Y$ phương trình có không quá 1 nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là đơn ánh.
- Nếu với mọi $y \in Y$ phương trình luôn có duy nhất nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ f là song ánh.

- Trường hợp ánh xạ không cho công thức xác định ảnh ta xét loại của ánh xạ bằng cách dựa vào định nghĩa

Ví dụ 1.20

Cho ánh xạ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$x \mapsto y = f(x) = x(x+1)$$

Xét phương trình $y = f(x) = x(x+1) = x^2 + x$ hay $x^2 + x - y = 0$

Biết số $\Delta = 1 + 4y > 0$ (vì $y \in \mathbb{N}$)

Phương trình luôn có 2 nghiệm thực

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}, \; x_2 = \frac{-1-\sqrt{1+4y}}{2}$$

Vì $x_2 < 0$ nên phương trình có không quá 1 nghiệm trong $\mathbb{N}$.

Vậy f là đơn ánh

Mặt khác tồn tại $y \in \mathbb{N}$ mà nghiệm $x_1 \notin \mathbb{N}$ (chẳng hạn $y = 1$), nghĩa là phương trình trên vô nghiệm trong $\mathbb{N}$. Vậy f không toàn ánh

Ví dụ 1.21 Các hàm số đơn điệu chặt:

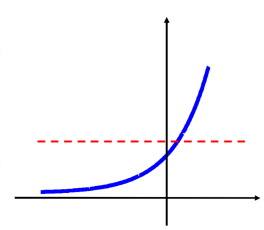
- Đồng biến chặt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Nghịch biến chặt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

là các song ánh từ tập xác định lên miền giá trị của nó

Hàm số $f(x) = 2^x$

có đạo hàm $f'(x) = 2^x \ln 2 > 0$ do đó hàm số luôn đồng biến, hàm số chỉ nhận giá trị dương. Vậy f là đơn ánh nhưng không toàn ánh.

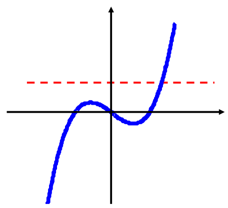
Có thể nhận thấy rằng đường thẳng song song với trục hoành cắt đồ thị không quá 1 điểm do đó phương trình $f(x) = y, \; y \in Y$ có không quá 1 nghiệm.



Hàm số $g(x)=x^3-3x$ không luôn đồng biến và nhận mọi giá trị

Đường thẳng song song với trục hoành cắt đồ thị tại 1 hoặc 3 điểm do đó phương trình (1.29) luôn có 1 hoặc 3 nghiệm

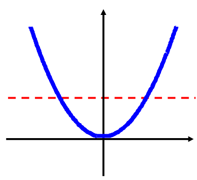
Vậy g là toàn ánh nhưng không đơn ánh



Hàm số $h(x)=x^2$ không luôn đồng biến và chỉ nhận giá trị ≥ 0.

Đường thẳng song song với trục hoành luôn cắt đồ thị tại 2 điểm khi ở trên trục hoành và không cắt đồ thị khi ở dưới trục hoành do đó phương trình có 2 nghiệm khi $y>0$ và vô nghiệm khi $y<0$.

Vậy h là không toàn ánh và không đơn ánh.



1.4.3. Ánh xạ ngược của một song ánh

Giả sử $f: X \to Y$ là một song ánh

$$\exists! x \in X \longrightarrow \forall y \in Y$$

Như vậy ta có thể xác định một ánh xạ từ Y vào X bằng cách cho ứng mỗi phần tử $y \in Y$ với phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$

Ánh xạ này được gọi là ánh xạ ngược của f và được ký hiệu f^{-1}

$$f^{-1}: Y \to X \quad f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

f^{-1} cũng là một song ánh

Ví dụ 1.20 Hàm mũ $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$

là một song ánh (vì hàm mũ đơn điệu chặt) có hàm ngược là hàm lôgarit

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

Ví dụ 1.21 Xét hàm $\sin: [-\pi/2;\pi/2] \to [-1;1]$

$$x \mapsto \sin x$$

đơn điệu tăng chặt và toàn ánh nên nó là một song ánh

Hàm ngược được ký hiệu $\arcsin: [-1;1] \to [-\pi/2;\pi/2]$

$$y \mapsto \arcsin y$$

$$x = \arcsin y \Leftrightarrow y = \sin x,\ \forall x \in [-\pi/2;\pi/2], y \in [-1;1]$$

Tương tự

$$x = \arccos y \Leftrightarrow y = \cos x,\ \forall x \in [0;\pi], y \in [-1;1]$$

$$x = \arctan y \Leftrightarrow y = \tan x,\ \forall x \in (-\pi/2;\pi/2), y \in (-\infty;\infty)$$

$$x = \operatorname{arccot} y \Leftrightarrow y = \cot x,\ \forall x \in (0;\pi), y \in (-\infty;\infty)$$

1.4.4. Hợp của hai ánh xạ

Với hai ánh xạ $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

$$x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$$

thì tương ứng $x \mapsto g(f(x))$ xác định một ánh xạ từ X vào Z

được gọi là hợp của hai ánh xạ f và g, ký hiệu $g \circ f$

$$g \circ f: X \to Z$$

$$x \mapsto g(f(x))$$

Vậy $g \circ f: X \to Z$ có công thức xác định ảnh $g \circ f(x) = g(f(x))$

Ví dụ 1.26

Xét hai hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ với công thức xác định ảnh $f(x) = \sin x,\ g(x) = 2x^2+4.$

Ta có thể thiết lập hai hàm hợp từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$

$$f\circ g(x) = \sin(2x^2+4)$$

$$g\circ f(x) = 2\sin^2 x + 4$$

Qua ví dụ trên ta thấy nói chung $g\circ f \neq f\circ g$

nghĩa là phép hợp ánh xạ không có tính giao hoán.

Ví dụ 1.27

- Xét hai hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

  với công thức xác định ảnh $f(x) = 2x+3,\ g(x) = \sin x$

- Khi đó hàm hợp $g\circ f$ có công thức xác định ảnh

  $$g\circ f(x) = \sin(2x+3)$$

- Hàm số $u = \sin^2(2x+3)$ là hợp của 3 hàm số có công thức xác định ảnh sau:

  $$y = f(x) = 2x+3;\ z = g(y) = \sin y \ \text{ và } \ u = h(z) = z^2$$

1.4.5. Lực lượng của một tập hợp

Khái niệm lực lượng của tập hợp có thể xem như là sự mở rộng khái niệm số phần tử của tập hợp

Tập X có n phần tử nếu có thể liệt kê dạng $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Vậy X có n phần tử khi tồn tại song ánh từ tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ lên X

Hai tập hợp X, Y được gọi là *cùng lực lượng* nếu tồn tại song ánh từ X lên Y

Tập có lực lượng n hoặc 0 được gọi là các *tập hữu hạn*

Tập không hữu hạn được gọi là *tập vô hạn*

Tập có cùng lực lượng với tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ hay hữu hạn được gọi là *tập đếm được*

1.7. ĐẠI SỐ BOOLE

- Lý thuyết đại số Boole được George Boole (1815 - 1864) giới thiệu vào năm 1854 trong bài báo "Các quy luật của tư duy", trong đó kỹ thuật đại số được dùng để phân tích các quy luật của lôgích và các phương pháp suy diễn.
- Sau đó đại số Boole được áp dụng trong các lĩnh vực khác nhau của toán học như đại số, giải tích, xác suất...
- Vào khoảng năm 1938, Claude Shannon (Clau Sê-nôn) (một kỹ sư viễn thông người Mỹ) là người đầu tiên đã áp dụng đại số Boole vào lĩnh vực máy tính điện tử và lý thuyết mạng

1.7.1. Định nghĩa và các tính chất cơ bản của đại số Boole

Một đại số Boole $(B,\vee,\wedge,')$ là một tập khác trống B với hai phép toán hai ngôi $\vee,\wedge : B\times B\to B$ và phép toán một ngôi $' : B\to B$ thoả mãn các tiên đề sau:

- B_1: $\vee,\wedge$ có tính kết hợp, nghĩa là với mọi $a, b, c\in B$
  $a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c,\ a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$
- B_2: $\vee,\wedge$ có tính giao hoán, nghĩa là với mọi $a, b\in B$
  $a\vee b=b\vee a,\ a\wedge b=b\wedge a$
- B_3: Tồn tại phần tử không và phần tử đơn vị $0, 1\in B, 0\neq 1$ sao cho với mọi $a\in B$: $a\vee 0=a,\ a\wedge 1=a$
- B_4: Với mọi $a\in B$ thì $a'\in B$ là phần tử đối theo nghĩa sau:
  $a\vee a'=1,\ a\wedge a'=0$
- B_5: $\vee$ phân phối đối với $\wedge$ và $\wedge$ phân phối đối với $\vee$
  $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c),\ a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

Ví dụ 1.43

Giả sử $X\neq\varnothing$, xét $\mathscr{P}(X)$ là tập các tập con của X

Các luật hợp thành $\vee,\wedge$ là phép hợp, phép giao các tập con của X

và phép toán một ngôi $'$ là phép lấy phần bù của tập con trong X

Khi đó $(\mathscr{P}(X),\cup,\cap,')$ là đại số Boole với phần tử không là $\varnothing$ và phần tử đơn vị là chính tập X

Ví dụ 1.44 Xét $B_2=\{0,1\}$ tập gồm hai phần tử 0 và 1. Ta định nghĩa

$$a\vee b=\begin{cases}1 & \text{nếu ít nhất một trong hai phần tử } a,b \text{ là } 1\\ 0 & \text{nếu ngược lại}\end{cases}$$

$$a\wedge b=\begin{cases}1 & \text{nếu cả hai phần tử } a,b \text{ là } 1\\ 0 & \text{nếu ngược lại}\end{cases}\qquad a'=\begin{cases}1 & \text{nếu } a=0\\ 0 & \text{nếu } a=1\end{cases}$$

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

	$'$
0	1
1	0

thì $(B_2,\vee,\wedge,')$ là một đại số Boole

Ví dụ 1.45

Xét $B_4=\{0, 1, a, b\}$, ta định nghĩa các phép toán

$\vee$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	1	1	1
a	a	1	a	1
b	b	1	1	b

$\wedge$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	a	0
b	0	b	0	b

	$'$
0	1
1	0
a	b
b	a

thì $(B_4,\vee,\wedge,')$ là một đại số Boole

1.7.2. Công thức Boole, hàm Boole và nguyên lý đối ngẫu

- Một biểu thức chứa các biến liên kết với một số hữu hạn lần các phép toán $\vee, \wedge, '$ và hai phần tử $0,\ 1$ của đại số Boole $(B, \vee, \wedge, ')$ được gọi là một *công thức Boole*

  $(x \vee y') \wedge 1$ và $(x' \wedge y) \vee z$ là hai công thức Boole
- Mỗi công thức Boole của đại số Boole $(B, \vee, \wedge, ')$ xác định một hàm nhận giá trị thuộc B vì khi thay các biến có mặt trong công thức bởi các phần tử của B thì nhận được giá trị là phần tử của B. Mỗi hàm xác định bởi công thức Boole được gọi là *Hàm Boole*
- Hai công thức Boole xác định cùng một hàm Boole được gọi là hai công thức tương đương

  $x \wedge (y \vee z)$ và $(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ là hai công thức tương đương

  Ta kí hiệu $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

- Hai công thức Boole trong đại số Boole $(B, \vee, \wedge, ')$ được gọi là *đối ngẫu* nếu trong một công thức ta thay $\vee$, $\wedge$, 0, 1 lần lượt bằng $\wedge$, $\vee$, 1, 0 thì ta được công thức hai

Hai công thức $x \wedge (y \vee 1)$ và $x \vee (y \wedge 0)$ là đối ngẫu

- Trong mỗi tiên đề của hệ tiên đề B_1-B_5 của đại số Boole đều chứa từng cặp công thức đối ngẫu nhau, vì vậy ta có nguyên lý đối ngẫu sau

Nguyên lý đối ngẫu :

Nếu hai công thức của đại số Boole được chứng minh là tương đương dựa trên cơ sở hệ tiên đề B_1-B_5 thì hai công thức đối ngẫu của chúng cũng tương đương

Chẳng hạn, ta sẽ chứng minh $a \vee 1 = 1$,

do đó theo nguyên lý đối ngẫu ta cũng có $a \wedge 0 = 0$

Tính chất

Giả sử $(B, \vee, \wedge, ')$ là đại số Boole với phần tử không và đơn vị là $0,\ 1$, khi đó với mọi $a, b \in B$ ta có

1) $a \vee a = a, \quad a \wedge a = a;$

2) $0' = 1, \quad 1' = 0;$

3) $a \vee 1 = 1, \quad a \wedge 0 = 0;$

4) $a \vee (a \wedge b) = a, \quad a \wedge (a \vee b) = a;$ (*tính hấp thu*)

5) Nếu tồn tại $c \in B$ sao cho $a \vee c = b \vee c$ và $a \wedge c = b \wedge c$ thì $a = b$;

6) Nếu $a \vee b = 1$ và $a \wedge b = 0$ thì $b = a'$; (*tính duy nhất của phần bù*)

7) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$ và $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ (*công thức De Morgan*).

Áp dụng các tính chất này cùng với hệ tiên đề B_1-B_5 ta có thể rút gọn công thức Boole bất kỳ

Ví dụ 1.49 Rút gọn công thức Boole $(x \wedge y) \vee (x \wedge y') \vee (x' \vee y)$

Giải: $(x \wedge y) \vee (x \wedge y') = x \wedge (y \vee y') = x \wedge 1 = x$

$\Rightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge y') \vee (x' \vee y) = x \vee (x' \vee y) = (x \vee x') \vee y = 1 \vee y = 1.$

Ví dụ 1.50 Rút gọn công thức Boole $(x \wedge y') \vee [x \wedge (y \wedge z)'] \vee z$

Giải: $(x \wedge y') \vee [x \wedge (y \wedge z)'] \vee z$

$$= (x \wedge y') \vee [(x \wedge y') \vee (x \wedge z')] \vee z$$
$$= (x \wedge y') \vee (x \wedge z') \vee z = (x \wedge y') \vee [(x \vee z) \wedge (z' \vee z)]$$
$$= (x \wedge y') \vee [(x \vee z) \wedge 1]$$
$$= (x \wedge y') \vee (x \vee z) = [(x \wedge y') \vee x] \vee z = x \vee z$$

Ví dụ 1.51

Rút gọn công thức Boole

$$(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z)$$

Giải:

$$(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y \wedge z)$$

$$= [(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z')] \vee [(x \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge z)]$$

$$= [(x \wedge y) \wedge (z \vee z')] \vee [(y \wedge z) \wedge (x \vee x')]$$

$$= (x \wedge y) \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z)$$

1.7.3 Phương pháp xây dựng hàm Boole trong B_2 thỏa mãn giá trị cho trước

Một vài trường hợp khi ứng dụng đại số Boole để giải quyết vấn đề thực tế sẽ dẫn đến bài toán cần tìm các hàm Boole theo các biến nào đó thỏa mãn các điều kiện cho trước

Chúng ta chỉ ra hai phương pháp xây dựng các hàm như thế

Phương pháp thứ nhất biểu diễn hàm cần tìm dạng "tổng ($\vee$) các tích ($\wedge$)"

Sử dụng nguyên lý đối ngẫu ta có phương pháp thứ hai dạng "tích các tổng"

Để xây dựng hàm cần tìm dạng "tổng các tích" ta thực hiện các bước sau:

1) Lập bảng các giá trị các biến $x_i \in B_2$ có mặt trong công thức và giá trị tương ứng của hàm F của các biến này (tương tự bảng chân trị trong mục 1.2)

2) Chỉ xét các hàng của bảng trên mà hàm F nhận giá trị 1. Trong mỗi hàng này ta lập biểu thức là $\wedge$ của các biến:
   - x_i nếu x_i nhận giá trị 1
   - x'_i nếu x_i nhận giá trị 0

3) Hàm F cần tìm có được bằng cách lấy $\vee$ của các biểu thức theo hàng

Ví dụ 1.52

Tìm hàm của hai biến $F(x,y)$ nhận giá trị 1 khi x, y đồng thời nhận giá trị 1 hoặc 0

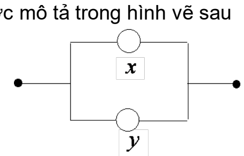
x	y	$F(x,y)$	Biểu thức theo hàng
1	1	1	$x \wedge y$
1	0	0	
0	1	0	
0	0	1	$x' \wedge y'$

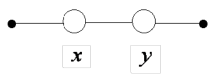
Vậy hàm cần tìm là $F(x,y) = (x \wedge y) \vee (x' \wedge y')$

1.7.4. Ứng dụng đại số Boole vào mạng chuyển mạch

Ta chỉ xét các mạng gồm các chuyển mạch *(switching networks)* có hai trạng thái đóng (dòng điện đi qua được) và mở (dòng điện không qua được)

Hai mạng đơn giản nhất là mạng song song cơ bản (basic parallel network) và mạng nối tiếp cơ bản (basic series network) được mô tả trong hình vẽ sau





Một mạng bất kỳ có thể nhận được bằng cách ghép nối tiếp hay song song các mạng cơ bản này

Ta ký hiệu các chuyển mạch bởi các biến $x, y, z, \ldots$

Nếu x ở trạng thái mở ta cho x nhận giá trị 0 và ở trạng thái đóng ta cho x nhận giá trị 1

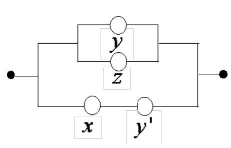
Trong một mạng nếu hai chuyển mạch luôn cùng trạng thái thì ta ký hiệu cùng một biến. Hai chuyển mạch có trạng thái luôn ngược nhau, nếu một chuyển mạch được ký hiệu là x thì chuyển mạch kia được ký hiệu là x'

Mạng song song cơ bản nhận giá trị 1 khi có ít nhất một trong hai chuyển mạch x, y nhận giá trị 1, ta ký hiệu $x \vee y$

Mạng nối tiếp cơ bản nhận giá trị 1 khi đồng thời hai chuyển mạch x, y nhận giá trị 1, ta ký hiệu $x \wedge y$

Như vậy $x, y, x', x \vee y, x \wedge y$ có thể được xem như các biến nhận giá trị trong đại số Boole B_2

Bằng phương pháp này ta có thể biểu diễn một mạng bất kỳ bởi một công thức Boole và ngược lại



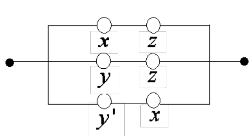
có công thức Boole tương ứng

$$(y \vee z) \vee (x \wedge y')$$

Công thức Boole

$$(x \wedge z) \vee (y \wedge z) \vee (y' \wedge x)$$

biểu diễn mạng



Trong các công thức cần xét ta thay

$(x \vee y)'$ bởi $x' \wedge y'$ và $(x \wedge y)'$ bởi $x' \vee y'$

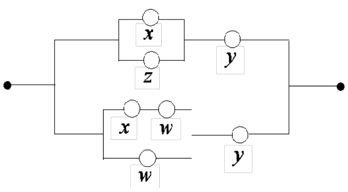
Hai mạng N_1 và N_2 được gọi là *tương đương* nếu nó thực hiện cùng một chức năng, nghĩa là với bất kỳ cách chọn các trạng thái đóng mở ở mọi vị trí chuyển mạch trong mạng thì trạng thái đầu vào và đầu ra của N_1 và N_2 đều như nhau.

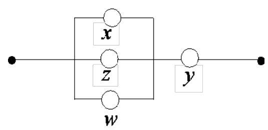
Ta có thể áp dụng đại số Boole để giải quyết hai vấn đề sau:

- Với một mạng cho trước tìm mạng tương đương đơn giản hơn
  Tìm mạng tương ứng xác định bởi công thức Boole tương đương đơn giản hơn
- Thiết kế một mạng thoả mãn các điều kiện cho trước

1.7.4.1 Tìm mạng tương đương đơn giản hơn

Ví dụ 1.53 Tìm mạng tương đương đơn giản hơn của mạng sau





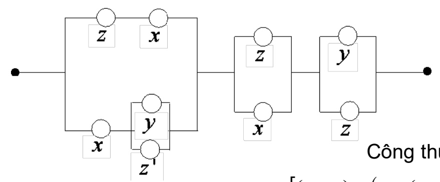
Công thức Boole tương ứng

$[(x\vee z)\wedge y]\vee[((x\wedge w)\vee w)\wedge y]$

Công thức Boole rút gọn

$(x\vee z\vee w)\wedge y$

Ví dụ 1.54 Tìm mạng tương đương đơn giản hơn

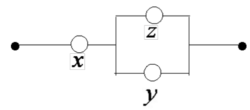


Công thức Boole tương ứng

$[(z\wedge x)\vee(x\wedge(y\vee z'))]\wedge(z\vee x)\wedge(z\vee y)$

Công thức Boole rút gọn

$x\wedge(z\vee x)\wedge(z\vee y)=x\wedge(z\vee y)$



1.7.4.2 Thiết kế một mạng thoả mãn các điều kiện cho trước

Ví dụ 1.55

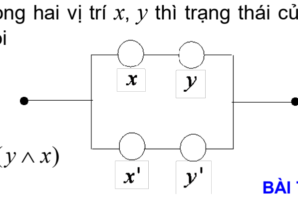
Thiết kế một mạng điện cho một bóng đèn ở cầu thang mà có thể bật tắt ở cả hai đầu cầu thang

Gọi x và y là hai công tắc ở hai đầu cầu thang

Theo yêu cầu đặt ra ta cần thiết kế một mạng điện sao cho khi thay đổi trạng thái của một trong hai vị trí x, y thì trạng thái của đầu ra (bóng đèn) phải thay đổi

Công thức Boole thỏa mãn điều kiện trên

$(x'\vee y)\wedge(y'\vee x)=(x'\wedge y')\vee(y\wedge x)$



BÀI TẬP