Домашнее задание 1 часть 1

Вариант 3

Соколов Арсений, ФН11-63Б

Задание

Для заданной функции $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 30, \quad x \in [0;3]$:

1. Используя все целочисленный точки отрезка $[0;3]$ найти аппроксимирующую линейную функцию вида $y = kx + l$ методом наименьших квадратов.

   В задачах 2-8 найти приблизительные значения точки минимума и минимума функции указанным методом. Задачи 2-7 – для функции на отрезке $[0;3]$. Для задачи 5 сделать рисунок. Выполнить 2 итерации. Вычисления проводить с точностью до двух десятичных знаков.

2. Метод деления отрезка пополам, $\delta = 0.1$.
3. Метод золотого сечения.
4. метод парабол, $u_0 = 1.5, h = 0.2$.
5. Метод ломаных, $x_0 = 2$.
6. Метод средней точки.
7. Метод хорд.
8. Метод Ньютона, $x_0 = 2, \quad [0,3]$.

МНК

В соответствии с методом наименьших квадратов коэффициенты k, l найдем по формулам:

$$\begin{cases} k = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \\ l = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i - k\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}, \end{cases} \tag{1}$$

где $n = 4$.

Посчитаем соответствущие значения:

```r
x <- 0:3
x
```

[1] 0 1 2 3

```r
f <- function(x)
{
  2*x^3 + 9*x^2 -24*x -30
}
```

```r
y <- f(x)
y
```

[1] -30 -43 -26 33

```r
xy <- x * y
xy
```

[1]   0 -43 -52 99

```r
x_sq <- x^2
x_sq
```

[1] 0 1 4 9

И соответствующие суммы:

```r
sum(x)
```

[1] 6

```r
sum(y)
```

[1] -66

```r
sum(xy)
```

[1] 4

```r
sum(x_sq)
```

[1] 14

```r
sum(x^2)
```

[1] 14

```
sum(x)^2
```

[1] 36

Тогда можем рассчитать наши значения k, l:

$$\begin{cases} k = \frac{4\cdot4-6\cdot(-66)}{4\cdot14-36} = \frac{412}{20} = 20.6 \\ l = \frac{-66-20.6\cdot6}{4} = \frac{-189.6}{4} = -47.4 \end{cases} \tag{2}$$

Проверим:

```
lm(y~x)
```

```
Call:
lm(formula = y ~ x)

Coefficients:
(Intercept)            x
      -47.4         20.6
```

Действительно, наши рассчёты верны.

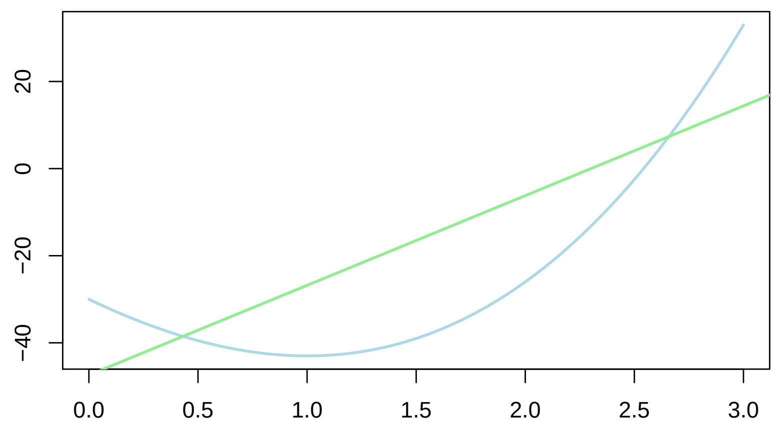
Таким образом линейная аппроксимация заданной функции имеет вид:

$$g(x) = 20.6x - 47.6 \tag{3}$$

Можем для примера изобразить исходную функцию и полученную методом МНК линейную аппроксимацию. Для этого зададим большее число точек на исходном отрезке $[0; 3]$:

```
x_for_plot <- seq(0,3,0.01)
```

```
plot(f(x_for_plot)~x_for_plot, type = "l", lwd = 2, col = "lightblue",
     xlab = "", ylab = "")
abline(lm(y~x), col = "lightgreen", lwd = 2)
```



Метод деления отрезка пополам

По условию $\delta = 0.1$. Рассмотрим первую итерацию:

```r
a <- 0
b <- 3
d <- 0.1
```

```r
u1 <- (a+b-d)/2
u1
```

[1] 1.45

```r
u2 <- (a+b+d)/2
u2
```

[1] 1.55

```r
f(u1)
```

[1] -39.78

```r
f(u2)
```

[1] -38.13

Получили, что $f(u_1) < f(u_2)$, следовательно $a_1 = a, b_1 = u_2$. Тогда вторая итерация:

```r
a1 <- a
b1 <- u2
```

```r
u3 <- (a1+b1-d)/2
u3
```

[1] 0.725

```r
u4 <- (a1+b1+d)/2
u4
```

[1] 0.825

```r
f(u3)
```

[1] -41.907

```r
f(u4)
```

[1] -42.551

Получили, что $f(u_3) > f(u_4)$, следовательно $\overline{u} = u_4 = 0.825$, тогда минимум функции $m_* \approx f(\overline{u}) \approx -42.55$.

Метод золотого сечения

Первая итерация:

```
a <- 0
b <- 3
```

```
u1 <- a + (3- sqrt(5))/2 * (b-a)
u1
```

[1] 1.1459

```
u2 <- a + (sqrt(5) - 1)/2 * (b-a)
u2
```

[1] 1.8541

```
f(u1)
```

[1] -42.674

```
f(u2)
```

[1] -30.812

Получили $f(u_1) < f(u_2) \Rightarrow a_2 = a, b_2 = u_2, \overline{u}_2 = u_1$

```
(a2 <- a)
```

[1] 0

```
(b2 <- u2)
```

[1] 1.8541

```
(u2_tmp <- u2)
```

[1] 1.8541

Вторая итерация:

```
u3 <- a2 + (sqrt(5)-1)/2 * (b2-a2)
u3
```

[1] 1.1459

```
f(u2_tmp)
```

[1] -30.812

```
f(u3)
```

[1] -42.674

Получили, что $f(\overline{u}_2) > f(u_3)$, следовательно точка минимума $\overline{u}_3 = 0.825$, а минимум функции $m_* \approx -41.91$.

Метод парабол

Полагаем $u_0 = 1.5,\ h = 0.2.$

Первая итерация:

```
u0 <- 1.5
h <- 0.2
```

```
f(u0)
```

[1] -39

Рассмотрим точку $u_1 = u_0 + h$:

```
u1 <- u0 + h
u1
```

[1] 1.7

Так как $u_1 \in [0; 3]$, то вычислим также $f(u_1)$:

```
f(u1)
```

[1] -34.964

Получили, что $f(u_0) < f(u_1)$, следовательно:

```
u2 <- u0 + 2^(2-1) * h
u2
```

[1] 1.9

$u_2 \in [0; 3] \Rightarrow$

```
f(u2)
```

[1] -29.392

Создадим функцию для проверки на выпуклость комбинации. Она возвращает булевский вектор длины 4, каждый элемент которого отвечает за соответствующую проверку на выпуклость. Можно было бы возвращать одно булево значение, равное применению логического "И" на этих 4 значениях, но вывод результата всех проверок кажется более наглядным:

```
check_convex <- function(x1,x2,x3, f)
{
  chk1 <- (x1 < x2) & (x2 < x3)
  chk2 <- f(x1) >= f(x2)
  chk3 <- f(x2) <= f(x3)
  chk4 <- (f(x1) + f(x3)) > 2*f(x2)
  return(c(chk1 , chk2 , chk3 , chk4))
}
```

Проверим полученную комбинацию на выпуклость:

```
check_convex(u0,u1,u2,f)
```

[1] TRUE FALSE TRUE TRUE

Получили, что данная комбинация не является выпуклой. Следовательно рассмотрим следующую точку:

```
u3 <- u0 + 2^(3-1) * h
u3
```

[1] 2.3

Проверим комбинацию u_1, u_2, u_3 на выпуклость:

```
check_convex(u1,u2,u3, f)
```

[1] TRUE FALSE TRUE TRUE

Получили, что данная комбинация не является выпуклой. Следовательно рассмотрим следующую точку:

```
u4 <- u0 + 2^(4-1) * h
u4
```

[1] 3.1

Получили, что выпуклая комбинация так и не найдена, а очередная точка $u_4 \notin [0;3]$. Следовательно, полагаем $w = b$

Вычислем $f(w)$:

```
w <- b
f(w)
```

[1] 33

Найдём точку $\overline{u}_4$ такую, что

$$f\left(\bar{u}_n\right)=\min \left(f(w), f\left(u_0\right), f\left(u_1\right), \ldots f\left(u_n\right)\right) \tag{4}$$

```
min(f(w), f(u0), f(u1), f(u2), f(u3))
```

[1] -39

Что соответствует точке $a = 0$, тогда $m_* \approx f(a) = -39$

Метод ломаных

По условию $x_0 = 2$. Чтобы оценить постоянную Липшица, вычислим производную функции $f(x)$. Производная $f'(x) = 6x^2 + 18x - 24$ принимает на отрезке $[0;3]$ значения от -24 до 84. Таким образом, $L = 84$. Тогда:

$$\begin{aligned} &p_0(x) = g_2(x) = f(2) - 84|x-2| = -26 - 84|x-2| = \\ &= \begin{cases} -26 - 84(-x+2) = 84x - 194, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ -26 - 84(x-2) = -84x + 142, & \text{если } 2 < x \leqslant 3 \end{cases} \end{aligned} \tag{5}$$

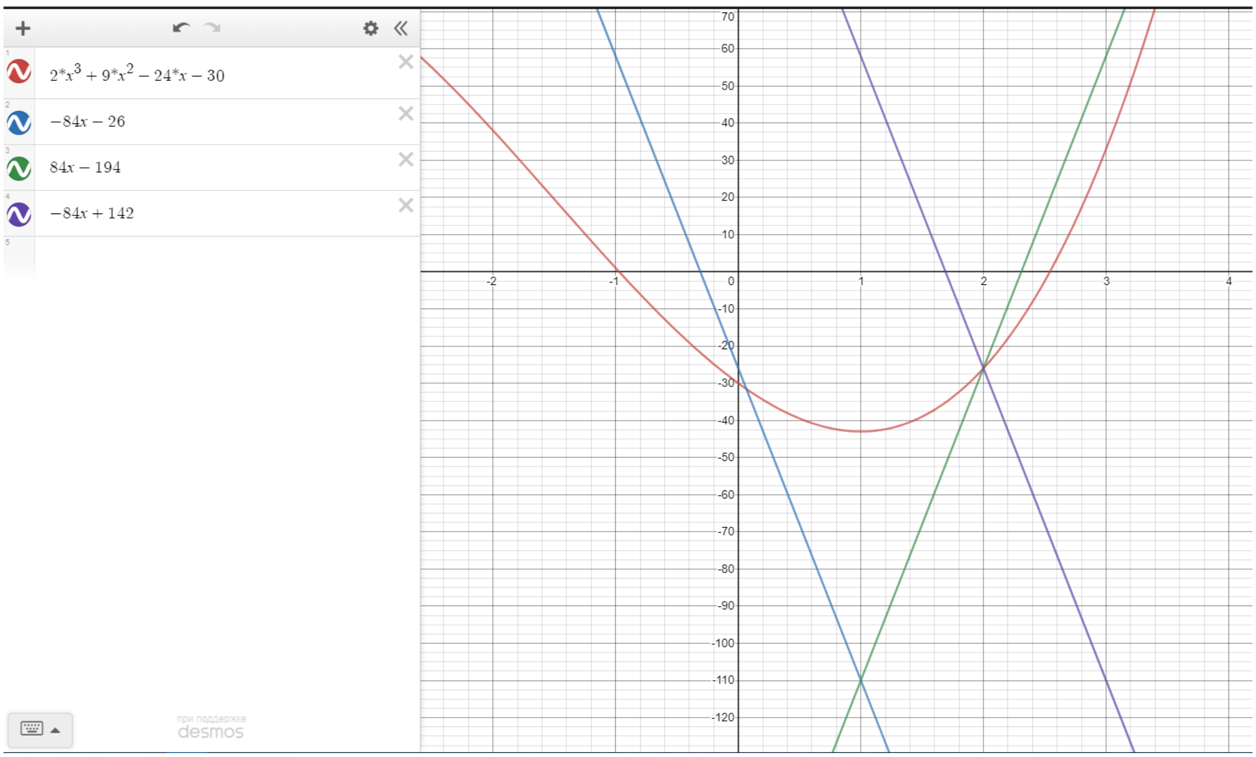
Отсюда $p_0(0) = -194, \quad p_0(3) = -110$ и $x_1 = 0$.

Функция $g_0(x) = -26 - 84|x-0| = -84x - 26 \quad \forall x \in [0;3]$, и пересекается с функцией $p_0(x)$ в точке 1. Тогда

$$p_1(x) = \begin{cases} -84x - 26, & \text{если } 0 < x \leqslant 1 \\ 84x - 194, & \text{если } 1 < x \leqslant 2 \\ -84x + 142, & \text{если } 2 < x \leqslant 3 \end{cases} \tag{6}$$

Отсюда $x_2 = 1$.

Получили точку минимума $x_2 = 1$, а минимум функции $m_* = -43$



Метод средней точки

```
a0 <- 0
b0 <- 3
```

Производная:

```
f_d <- function(x)
{
  6*x^2+18*x-24
}
```

```
f_d(a0)
```

[1] -24

```
f_d(b0)
```

[1] 84

$f'(a_0) < 0, \ f'(b_0) > 0$. Тогда

```
c0 <- (a+b)/2
c0
```

[1] 1.5

```
f_d(c0)
```

[1] 16.5

$f'(c_0) > 0$

Отсюда

```
(a1 <- a0)
```

[1] 0

```
(b1 <- c0)
```

[1] 1.5

Тогда c_1

```
c1 <- (a1+b1)/2
c1
```

[1] 0.75

```
f_d(c1)
```

[1] -7.125

$f'(c_1) < 0$

Отсюда

```
(a2 <- c1)
```

[1] 0.75

```
(b2 <- b1)
```

[1] 1.5

Тогда c_2

```
c2 <- (a2+b2)/2
c2
```

[1] 1.125

```
f(c2)
```

[1] -42.762

Следовательно, приблизительное значение точки минимума можно взять $c_2 = 1.125$, минимум функции $m_* \approx -42.762$.

Метод хорд

```
a0 <- 0
b0 <- 3
```

```
f_d <- function(x)
{
  6*x^2+18*x-24
}
```

```
f_d(a0)
```

```
[1] -24
```

```
f_d(b0)
```

```
[1] 84
```

Получили, что $f'(a_0) < 0,\ f'(b_0) > 0$. Функция для получения c_k имеет вид:

```
ck <- function(a,b,fd)
{
  (fd(b)*a - fd(a)*b)/(fd(b) - fd(a))
}
```

Тогда c_0:

```
(c0 <- ck(a0,b0,f_d))
```

```
[1] 0.66667
```

```
f_d(c0)
```

```
[1] -9.3333
```

Получили, что $f'(c_0) < 0$. Отсюда

```
a1 <- c0
b1 <- b0
c1 <- ck(a1,b1,f_d)
c1
```

```
[1] 0.9
```

```
f_d(c1)
```

```
[1] -2.94
```

Получили, что $f'(c_1) < 0$. Отсюда

```
a2 <- c1
b2 <- b1
c2 <- ck(a2,b2,f_d)
c2
```

```
[1] 0.97101
```

```
f(c2)
```

```
[1] -42.987
```

Приблизительное значение точки минимума возьмём $c_2 \approx 0.97$, минимум функции $m_* \approx -42.99$

Метод Ньютона

По условию $x_0 = 2,\ c = 0,\ d = 0$. Получаем:

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x - 30 \tag{7}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 18x - 24 \tag{8}$$

$$f''(x) = 12x + 18 \tag{9}$$

$$f'''(x) = 12 \tag{10}$$

Таким образом, на отрезке $[0;3]$

$$18 \le f''(x) \le 54, \quad f'''(x) \le 12 \tag{11}$$

Запишем вторую производную:

```
f_2d <- function(x)
{
  12*x+18
}
```

А так же начальную точку:

```
x0 <- 2
```

Выполним терацию метода средней точки. Получаем:

```
x1 <- x0 - f_d(x0) / f_2d(x0)
x1
```

[1] 1.1429

$x_1 \in [0;3]$

Вторая итерация:

```
x2 <- x1 - f_d(x1) / f_2d(x1)
x2
```

[1] 1.0039

```
f(x2)
```

[1] -43

$x_2 \in [0;3]$

Приблизительное значение точки минимума $x_2 \approx 1$, минимум функции $m_* \approx -43$