МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Семинар от 11.04.20
по основам сеточных методов

3 курс, группа ФН11-63Б
Вариант 3

Преподаватель
_____________ В. А. Кутыркин
«___» _______ 2020 г.

Москва, 2020 г.

Задачи для решения на семинаре

Найти решения задач Коши (m – номер группы, N - номер фамилии студента в журнале группы):

$$m = 63;$$

$$N = 3;$$

Задача 1

$$\begin{cases} y_{n+2} - (66-m)y_{n+1} + (65-m)y_n = N; \quad n \in Z; \\ y_0 = 64 - m, y_1 = N. \end{cases}$$

Подставляя $m = 63, N = 3$, получаем:

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 3; \quad n \in Z; \\ y_0 = 1, y_1 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Найдём корни характеристического уравнения:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 = \lambda_1 \\ \lambda = 2 = \lambda_2 \end{array} \right.$$

То есть $\gamma = 1 = \lambda_1$ – это корень кратности $k = 1$.
Следовательно, $y_n^{\text{ч}} = A \cdot n$
Подставляем:

$$y_{n+2}^{\text{ч}} - 3y_{n+1}^{\text{ч}} + 2y_n^{\text{ч}} = A(n+2) - 3A(n+1) + 2An = An + 2A - 3An - 3A + 2An = -A = 3$$

$$A = -3, \quad y_n^{\text{ч}} = -3 \cdot n$$

$$y_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot 2^n - 3n$$

Из начальных условий определим константы C_1, C_2:

$$\begin{cases} y_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot 2^n - 3n; \\ y_0 = 1; \\ y_1 = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1; \\ 3 = C_1 + 2C_2 - 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 - C_2; \\ 1 - C_2 + 2C_2 - 3 = 3; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -4 \\ C_2 = 5 \end{cases}$$

Тогда можем записать

Ответ: $y_n = -4 \cdot 1^n + 5 \cdot 2^n - 3 \cdot n$

Задача 2

$$\begin{cases} y_{n+2} - 2(64-m)y_{n+1} + (64-m)^2 y_n = (64-m)^n N; \quad n \in Z \\ y_0 = 64 - m, y_1 = N \end{cases}$$

Подставляя $m = 63, N = 3$, получаем:

$$\begin{cases} y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 3 \cdot 1^n; \quad n \in Z \\ y_0 = 1, y_1 = 3 \end{cases}$$

Решение.

Найдём корни характеристического уравнения:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 = \lambda_1 \\ \lambda = 1 = \lambda_2 \end{array} \right.$$

То есть $\gamma = 1 = \lambda_1 = \lambda_2$ – это корень кратности $k = 2$.
Следовательно, $y_n^{\text{ч}} = An^2 \cdot 1^n$
Подставляем:

$$y_{n+2}^{\text{ч}} - 2y_{n+1}^{\text{ч}} + y_n^{\text{ч}} = A \cdot 1^{n+2}(n+2)^2 - 2A \cdot 1^{n+1}(n+1)^2 + A \cdot 1^n n^2 = 2A \cdot 1^n = 3 \cdot 1^n$$

$$A = \frac{3}{2}, \quad y_n^{\text{ч}} = \frac{3}{2} \cdot 1^n n^2$$

$$y_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 n \cdot 1^n + \frac{3}{2} \cdot 1^n n^2$$

Из начальных условий определим константы C_1, C_2:

$$\begin{cases} y_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 n \cdot 1^n + \frac{3}{2} \cdot 1^n n^2; \\ y_0 = 1; \\ y_1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1; \\ 1 + C_2 + \frac{3}{2} = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1; \\ C_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Тогда можем записать

Ответ: $y_n = 1^n + \frac{1}{2} n \cdot 1^n + \frac{3}{2} \cdot 1^n n^2$

Задача 3

$$\begin{cases} y_{n+2} - y_{n+1} + y_n = \mathrm{N}\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right); \quad n \in Z \\ y_0 = 64 - m, y_1 = N \end{cases}$$

Подставляя $m = 63, N = 3$, получаем:

$$\begin{cases} y_{n+2} - y_{n+1} + y_n = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right); \quad n \in Z \\ y_0 = 1, y_1 = 3 \end{cases}$$

Решение.

Найдём корни характеристического уравнения:

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \lambda_1 \\ \lambda = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} = \lambda_2 \end{array} \right.$$

Следовательно, $y_n^{\text{ч}} = n(A\cos(\frac{\pi}{3}n) + B\sin(\frac{\pi}{3}n))$
Подставляем:

$$\begin{aligned} & y^{\text{ч}}_{n+2} - y^{\text{ч}}_{n+1} + y^{\text{ч}}_n = \\ & = (n+2)\left(A\cos\left(\frac{\pi}{3}(n+2)\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{3}(n+2)\right)\right) - \\ & - (n+1)\left(A\cos\left(\frac{\pi}{3}(n+1)\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{3}(n+1)\right)\right) + n\left(A\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) = \\ & = \frac{-\sqrt{3}A - 3B}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \frac{-3A + \sqrt{3}B}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{-\sqrt{3}A - 3B}{2} = 3; \\ \frac{-3A + \sqrt{3}B}{2} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ B = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$$y_n^{\text{ч}} = n(\frac{-\sqrt{3}}{2}\cos(\frac{\pi}{3}n) - \frac{3}{2}\sin(\frac{\pi}{3}n))$$

$$y_n = y_n^O + y_n^{\text{ч}} = C_1\cos(\frac{\pi}{3}n) + C_2\sin(\frac{\pi}{3}n) + n(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\frac{\pi}{3}n) - \frac{3}{2}\sin(\frac{\pi}{3}n))$$

Из начальных условий определим константы C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + C_2\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) + n\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) - \frac{3}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right) = 3\sin(\frac{\pi}{3}n) \\ y_0 = 1 \\ y_1 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{3}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 3\sin(\frac{\pi}{3}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ \frac{\sqrt{3}C_2}{2} - \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 5 \end{cases}$$

Тогда можем записать

Ответ:

$$y_n = \cos(\frac{\pi}{3}n) + 5\sin(\frac{\pi}{3}n) + n(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\frac{\pi}{3}n) - \frac{3}{2}\sin(\frac{\pi}{3}n))$$