30 | 04 | 2020

Лекция 14

Условия совместности деформаций (продолжение)

1. Свойства компонент тензора Римана-Кристоффеля

$$R^{\,m}_{nji} = \frac{\partial \Gamma^m_{ij}}{\partial x^n} - \frac{\partial \Gamma^m_{in}}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^{k}\Gamma_{kn}^{m} - \Gamma_{in}^{k}\Gamma_{kj}^{m} = 0 \quad (1)$$

$$R_{njik} = R_{nji}^{\,m}\, g_{mk} \quad (2)$$

Эти компоненты удовл. ур-ию:

$$R_{njik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^i \partial x^n} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{in}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{kn}}{\partial x^i \partial x^j}\right) +$$

$$+ g^{ml}\left(\Gamma_{inl}\Gamma_{kjm} - \Gamma_{ijl}\Gamma_{knm}\right) = 0, \quad (3)$$

где $\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$ (4)

$$g^{ml} g_{lk} = \delta^m_k \quad (5)$$

Явное выражение компонент обр. метрич. матр. g^{ml} через g_{ek}

$$g^{ml} = \frac{1}{2g}\,\epsilon^{msp}\,\epsilon^{luv}\, g_{su}\, g_{pv} \quad (6)$$

$g = \det(g_{ij})$

Компоненты тензора Р-К обладают св-ми

1) ассиметрия по индексам:

$n \rightleftarrows j$ $\quad R_{njik} = -R_{jnik}$ (7)

$i \leftrightarrow k$: $\quad R_{njik} = -R_{njki}$ (8)

Рассмотрим ∀ вектор $\bar a$: $\bar a = a^i \bar r_i = a_i \bar r^i$ (12)

Вычислим ковариантную производную от контравар. к-т a^i:

$$b^k_i = \nabla_i a^k = \frac{\partial a^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{is} a^s \qquad (13)$$

Эти производные образуют комп-ты тензора 2-го ранга

т.о. $B = b_i^k \bar r^i \otimes \bar r_k = \nabla \otimes \bar a$ (14)

Вычислим 2-ую ковариантную производную или 1-ую ковариантную производную от компонент тензора B:

$$\nabla_j b_i^k = \frac{\partial}{\partial x^j} b_i^k + \Gamma^k_{jm} b_i^m - \Gamma^m_{ji} b_m^k \qquad (15)$$

(13) → (15)

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(\nabla_i a^k) + \Gamma^k_{jm}\nabla_i a^m - \Gamma^m_{ji}\nabla_m a^k = \frac{\partial^2 a^k}{\partial x^j \partial x^i} + \frac{\partial \Gamma^k_{is}}{\partial x^j} a^s + \Gamma^k_{is}\frac{\partial a^s}{\partial x^j} + \Gamma^k_{jm}\left(\frac{\partial a^m}{\partial x^i} + \Gamma^m_{is} a^s\right) - \Gamma^m_{ji}\left(\frac{\partial a^k}{\partial x^m} + \Gamma^k_{ms} a^s\right) \qquad (16)$$

$i \leftrightarrow j$: $\nabla_j\nabla_i a^k - \nabla_i\nabla_j a^k = \left(\frac{\partial\Gamma^k_{is}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^k_{js}}{\partial x^i} + \left(\Gamma^k_{jm}\Gamma^m_{is} - \Gamma^k_{im}\Gamma^m_{js}\right)\right) a^s = R_{jis}^{\quad k}\cdot a^s$

$$\nabla_j\nabla_i a^k - \nabla_i\nabla_j a^k = R_{jis}^{\quad k} a^s \qquad (17)$$

Отсюда следует:

1) т.к. a^k — компоненты тензора 1-го ранга (вектора), то $\nabla_i a^k$ и $\nabla_j \nabla_i a^k$ — компоненты 2-го и 3-го ранга, т.е.

$\parallel g^{ml}(\Gamma_{inl}\Gamma_{kjm} - \Gamma_{ijl}\Gamma_{knm}) = -g^{ml}(\Gamma_{knl}\Gamma_{ijm} - \Gamma_{kjl}\Gamma_{inm})$

$i \leftrightarrow k$ $\quad$ $(l \leftrightarrow m)$ $\quad$ $l \leftrightarrow m$

т.к. $g^{ml} = g^{lm}$

г) Симметрия по парам индексов

$(n, j) \leftrightarrow (i, k)$

$R_{njik} = R_{iknj}$ (9)

Общее число компонент тензора Р-К: $3^4 = 81$, но в силу (7)-(9) у этих компонент много зависим., т.е. на 81 комп. наложены усл. $\Rightarrow$ $\Rightarrow \exists$ независим. комп. тензора

Их: $81 - 75 = 6$

т.к. компоненты тензора Р-К имеют только 6 независим. компонент. В качестве таких независим. компонент могут быть выбраны, например:

$R_{1212}, R_{2323}, R_{3131}, R_{1223}, R_{1231}, R_{2331}$ (10)

$(R_{1111} = R_{2222} = R_{3333} = 0)$

Можно построить тензор 4-го ранга

$^4R = R_{njik}\, \bar{r}^n \otimes \bar{r}^j \otimes \bar{r}^i \otimes \bar{r}^k$ (11)

- Докажем, что К-ты тензора Р-К действит. являются компонентами тензора 4-го ранга. Можно доказывать этот факт непосредств., т.е. что R_{njik} преобразуются по тензорному закону при замене базиса $\bar{r}_i \to \bar{r}_i$, однако это достаточно громоздко. Поэтому поступим по-другому.

Рассмотрим разность: $R_{kjin} - \overset{\circ}{R}_{kjin} =$

$$= (\varepsilon_{kj,in} - \varepsilon_{kn,ij} + \varepsilon_{in,kj} - \varepsilon_{ij,kn}) + g^{ml}(\Gamma_{inl}\Gamma_{kjm} - \Gamma_{ijl}\Gamma_{knm}) -$$
$$- \overset{\circ}{g}^{ml}(\overset{\circ}{\Gamma}_{inl}\overset{\circ}{\Gamma}_{kjm} - \overset{\circ}{\Gamma}_{ijl}\overset{\circ}{\Gamma}_{knm}) = 0 \qquad (22)$$

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}(g_{ik,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k}) = // g_{ij} = 2\varepsilon_{ij} + \overset{\circ}{g}_{ij} // = \overset{\circ}{\Gamma}_{ijk} + \varepsilon_{ijk} \qquad (23)$$

где $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ik,j} + \varepsilon_{kj,i} - \varepsilon_{ij,k}$ (24)

Использую ф-лу (6) получим:

$$g^{ij} = \frac{1}{2g}\epsilon^{imn}\epsilon^{jkl} g_{mk} g_{nl} = \frac{1}{2g}\epsilon^{imn}\epsilon^{jkl}(\overset{\circ}{g}_{mk} + 2\varepsilon_{mk})$$
$$(\overset{\circ}{g}_{nl} + 2\varepsilon_{nl}), \quad g = \det(\overset{\circ}{g}_{ij} + 2\varepsilon_{ij}) \qquad (25)$$

т.о., мы доказали!

<u>Теорема</u>. УСД для С.С. в ∀ К выполнен ⟺
⟺ в К компоненты тензора деформации ε_{ij} удовл. ур-ию (22) с учетом (23)-(25)

<u>Замеч.</u>: Ур-ие ${}^4R = 0 \Rightarrow {}^4R = {}^4B$ – в неевклидов. пр-ах.

УСД (22) имеют след. решен.:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\overset{\circ}{\nabla}_i u_j + \overset{\circ}{\nabla}_j u_i + \overset{\circ}{\nabla}_i u_k \overset{\circ}{\nabla}_j u_l \overset{\circ}{g}^{kl}) \qquad (26)$$

т.е. если ∃ $\bar{u}$ или однозначная ф-ия ⇒

$$\Rightarrow F^T = E + \overset{\circ}{\nabla} \otimes \bar{u} \qquad (27)$$

если $\nabla_j \nabla_i a^k - C_{ji}^{k} = R_{jis}^{\ k} a^s$ (18)

тогда по обратному тензорному признаку $\Rightarrow$

$\Rightarrow R_{jis}^{\ k}$ – это тензор 4-го ранга

Тогда $R_{jis}^{\ k}$ – компоненты тензора ${}^4R$ 4-го ранга

2) В силу УСД в форме 2 или 3: $R_{nji}^{\ k} = 0$
тогда из (17) следует, что

$$\nabla_i \nabla_j a^k = \nabla_j \nabla_i a^k \qquad (19)$$

т.е. 2-ые ковариант. производные перестановочны.

Заметим, что (18) имеет место в силу того, что рассматриваем наши точечно-евклид. пр-во $E_3^a \Rightarrow {}^4R = 0$ – тензор кривизны для $\forall x^i \in V \subset E_3^a$

Евклидовость означает, что нет кривизны пр-ва

2. Четвертая форма условия совместности деформ.

Рассмотрим поле метр. матр $g_{ij}(X^k)$ $\forall t \geq 0$ в K, тогда $\overset{\circ}{g}_{ij}(X^k)$ при $t=0$ и определим:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \overset{\circ}{g}_{ij}) \qquad (20)$$

– компоненты тензора деформации

Тогда рассмотрим в $\overset{\circ}{K}$ аналогичные компоненты компонентам $R_{nji}^{\ k}$, то в K: $R_{nji}^{\ k}$

– компоненты тензора Р-К в отсчетной конфигурац. $\overset{\circ}{K}$

$$\overset{\circ}{R}_{njik} = \frac{1}{2}(\overset{\circ}{g}_{kj,ni} - \overset{\circ}{g}_{kn,ij} + g_{in,kj} - \overset{\circ}{g}_{ij,kn}) +$$

$$+ \overset{\circ}{g}{}^{ml}(\overset{\circ}{\Gamma}_{inl}\overset{\circ}{\Gamma}_{kjm} - \overset{\circ}{\Gamma}_{ijl}\overset{\circ}{\Gamma}_{knm}) \qquad (21),$$

где $\overset{\circ}{g}_{kj,in} = \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial X^i \partial X^n}$

Утверждение. УСД вып. тогда и только тогда, когда в $\mathcal{K}$ $\exists$ поле тензора $F(x^i,t)$ такое, что:

- $\det F \neq 0 \quad \forall x^i \in V,\ \forall t \geq 0$
- $F(x^i,0) = E \quad \forall x^i \in \overset{\circ}{V},\ t=0$
- $F(x^i,t)$ обладают векторн. потенц., т.е. $\exists\ \bar{v}(x^i,t)$, что $\forall x^i \in V,\ \forall t \geq 0$ вып. (7)

Док-во:

$\Rightarrow$) Пусть УСД вып-ся, тогда $\exists$ поле перемещ. $\bar{u}(x^i,t)$, тогда (1) – (7) получаем, что (7) имеет место

$\Leftarrow$) Пусть $\exists\ \bar{v}(x^i,t)$: вып. (7), тогда рассмотр. ф-цию $\tilde{\bar{u}}(x^i,t) = \int_0^t \bar{v}(x^i,\tau)\,d\tau$ (8)

$$\overset{\circ}{\nabla} \otimes \tilde{\bar{u}} = \overset{\circ}{\nabla} \otimes \int_0^t \bar{v}\,d\tau = \int_0^t \overset{\circ}{\nabla} \otimes \bar{v}\,d\tau = \int_0^t \frac{d}{d\tau} F^T d\tau = F^T - E$$

Если положить $\tilde{\bar{x}} = \overset{\circ}{\bar{x}} + \tilde{\bar{u}}$, то этот вектор удовл.

$$F^T = E + \overset{\circ}{\nabla} \otimes \tilde{\bar{u}} = \overset{\circ}{\bar{r}}{}^i \otimes \frac{\partial(\overset{\circ}{\bar{x}} + \tilde{\bar{u}})}{\partial x^i} = \overset{\circ}{\bar{r}}{}^i \otimes \frac{\partial \tilde{\bar{x}}}{\partial x^i} = \overset{\circ}{\bar{r}}{}^i \otimes \tilde{\bar{r}}_i$$

Т.о. мы построили такой радиус-вектор $\tilde{\bar{x}}$, который удовл. всем кинематич. соотнош., которые введены для радиус-вектора

$\tilde{\bar{x}} = \overset{\circ}{\bar{x}} + \tilde{\bar{u}}$;

$F = \tilde{\bar{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\bar{r}}{}^i$;

$\tilde{\bar{r}}_i = \dfrac{\partial \tilde{\bar{x}}}{\partial x^i}$

Т.о. $\tilde{\bar{u}}$ явл. вектором перемещений

ч.т.д.

Лекция 15

1) Динамические уравнения совместности ДУС

ЛСД: $\bar{x} = \bar{x}(x^i, t) \to F_{ij}$ (1)

$\bar{r}_i = \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial x^i} \to g_{ij} \to \dfrac{\partial \bar{r}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^m \bar{r}_m$

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} - \mathring{g}_{ij})$

$\bar{v} = \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial t}\Big|_{x^i} = \dfrac{d\bar{x}}{dt} \quad \bar{u} = \bar{x} - \mathring{\bar{x}}$ (2)

$F = \bar{r}_i \otimes \mathring{\bar{r}}^i$ (3),

$F^T = \mathring{\bar{r}}^i \otimes \bar{r}_i = \mathring{\bar{r}}^i \otimes \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial x^i} = \mathring{\bar{\nabla}} \otimes \bar{x}$ (4)

(3) → (4):

$F^T = \mathring{\nabla} \otimes (\bar{u} + \mathring{\bar{x}}) = \mathring{\nabla} \otimes \bar{u} + \mathring{\nabla} \otimes \mathring{\bar{x}} \;//\; \mathring{\nabla} \otimes \mathring{\bar{x}} = \mathring{\bar{r}}^i \otimes \dfrac{\partial \mathring{\bar{x}}}{\partial x^i} =$

$= \mathring{\bar{r}}^i \otimes \mathring{\bar{r}}_j = E \;// = E + \mathring{\nabla} \otimes \bar{u}$ (5)

$E = \bar{r}_i \otimes \bar{r}^i$

Дифференц (5) по t: $\dfrac{d}{dt} F^T = \dfrac{d}{dt} \mathring{\nabla} \otimes \bar{u} =$

$= \dfrac{d}{dt}\left(\mathring{\bar{r}}^i \otimes \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x^i}\right) = \mathring{\bar{r}}^i \otimes \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t \partial x^i} = \mathring{\bar{r}}^i \otimes \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^i \partial t} =$

$= \mathring{\bar{r}}^i \otimes \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial x^i \partial t} = \mathring{\bar{r}}^i \otimes \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial x^i} = \mathring{\nabla} \otimes \bar{v}$ (6) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt} F^T = \mathring{\nabla} \otimes \bar{v}$ (7) — динамич. ур-ие совместности в Лагранж. описании.

(9) · $(-\bar{v})$.

$$-\nabla(\rho F)\otimes\bar{v}=0 \qquad (19)$$

(18) + (19)

$$\frac{\partial\rho F^T}{\partial t}+\nabla(\rho\bar{v}\otimes F^T)-\nabla(\rho F\otimes\bar{v})=0 \qquad (20)$$

$$\frac{\partial\rho F^T}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\bar{v}\otimes F^T-\rho F\otimes\bar{v})=0 \qquad (21)$$

– динамич. ур-ние совместности в эйлеровом описании

Они имеют дивергентный вид и эквив. (7)

3 Полная система законов сохр в эйлеровом описан.

Объед. все законы сохр. в единой форме записи получим универсальную форму записи для ур-ий:

a) $$\rho\frac{dA_\alpha}{\partial t}=\nabla\cdot\bar{B}_\alpha+\rho C_\alpha, \quad \alpha=\overline{1,6} \qquad (22)$$

где $\bar{A}_\alpha$, $\bar{B}_a$, $\bar{C}_\alpha$ – обобщ. векторы

$$\bar{A}_\alpha=\begin{pmatrix}\frac{1}{\rho}\\ \bar{v}\\ \varepsilon\\ \eta\\ F^T\end{pmatrix}, \quad B_\alpha=\begin{pmatrix}\bar{v}\\ T\\ T\cdot\bar{v}-\bar{q}\\ \bar{q}/\theta\\ 0\\ \rho F\otimes\bar{v}\end{pmatrix}, \quad C_\alpha=\begin{pmatrix}0\\ \bar{f}\\ \bar{f}\cdot\bar{v}+q_m\\ (q_m+q^*)/\theta\\ \bar{v}\\ 0\end{pmatrix} \qquad (23)$$

$\alpha=1$ – ур-ие неразр.
$\alpha=2$ – ур-ие движ.
$\alpha=3$ – ур-ие энергии (I-зн термод.)

2. ДУС в эйлеровом описании

Используем след. соотнош.:

$$\nabla\cdot(\rho F)=0 \quad (9)$$

Рассмотр.: $\frac{d}{dt}F^T=\mathring{\nabla}\otimes\bar v$

$$\mathring{\nabla}\otimes\bar v=\mathring{r}^i\otimes\frac{\partial\bar v}{\partial x^i}=\mathring{r}^j\delta_j^i\otimes\frac{\partial\bar v}{\partial x^i}=\mathring{r}^j(\bar r_j,\bar r^i)\otimes\frac{\partial\bar v}{\partial x^i}=$$

$$=\mathring{r}^j\otimes\bar r_j\cdot\bar r^i\otimes\frac{\partial\bar v}{\partial x^i}=F^T\cdot\nabla\otimes\bar v \quad (10)$$

$$\mathring{\nabla}\otimes\bar a=F^T\cdot\nabla\otimes\bar a \quad (11)$$

(10) → (7), $\frac{dF^T}{dt}=F^T\cdot\nabla\otimes\bar v$ (12)

Рассмотр. ур-ие неразрывности в перем. Эйлера

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\rho\bar v=0 \quad (13) \quad |\cdot F^T$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}F^T+F^T\cdot\nabla\cdot\rho\bar v=0 \quad (14)$$

Умножим (12) на ρ: $\rho\frac{dF^T}{dt}=\rho F^T\cdot\nabla\otimes\bar v$ (15)

$$\frac{dF^T}{dt}=\frac{\partial F^T}{\partial t}+\bar v\cdot\nabla\otimes F^T \quad (16)$$

(16) → (15): $\rho\frac{\partial F^T}{\partial t}+\rho\bar v\cdot\nabla\otimes F^T-\rho F^T\cdot\nabla\otimes\bar v=0$

(4) + (17):

$$\frac{\partial\rho F^T}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\bar v\otimes F^T\cdot\nabla\otimes\bar v)=0 \quad (18)$$

07 | 05 | 2020

где

$$\hat{\mathring{A}}_{\alpha} \begin{pmatrix} (\rho/\mathring{\rho})\det F^{T} \\ \overline{\overline{\varepsilon}} \\ \eta \\ \bar{u} \\ F^{T} \\ \bar{x}\times\bar{v} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathring{B}}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ P \\ P\cdot\bar{v}-\bar{q} \\ -\bar{q}/\theta \\ 0 \\ \mathring{\rho}\cdot E\otimes\bar{v} \\ -P\times\bar{x} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathring{C}}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \\ f\cdot\bar{v}+q_m \\ \bar{v} \\ 0 \\ x\times f \end{pmatrix} \quad (32)$$

Лекция 16.

V Определяющие соотношения

1. Незамкнутость системы законов сохранения МСС

Рассмотрим Эйлерово описание в дивергентной форме

Она имеет вид:

$$\frac{\partial \rho A_\alpha}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\bar{v}\otimes A_\alpha - B_\alpha) = \rho C_\alpha \quad (1)$$

$$\alpha = \overline{1..6}$$

где $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha$ — коэф-ты столбцы

Сколько ур-ий в (1) и сколько неизв?

$\alpha=1 \to 1$; $\alpha=2 \to 3$; $\alpha=3 \to 1$;

$\alpha=4 \to 1$; $\alpha=5 \to 3$; $\alpha=6 \to 9$.

$\Rightarrow$ имеем 18 скалярн. ур-ий

Неизв. в сист. (1):

$$\underset{1}{\rho},\ \underset{3}{\bar{v}},\ \underset{1}{e},\ \underset{1}{\eta},\ \underset{3}{\bar{u}},\ \underset{9}{F},\ \underset{6}{T},\ \underset{3}{\bar{q}},\ \underset{1}{\theta},\ \underset{1}{\bar{q}^*} \quad (3)$$

остальные величины: f, q_m — известны. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 29 неизв. $\Rightarrow$ система незамкнута

$\alpha=4$ – ур-ие баланса энтропии
$\alpha=5$ – кинематич. ур-ие
$\alpha=6$ – ДУС

$$\rho\frac{dF^T}{dt}=\nabla(\rho F\otimes\bar{v})$$

Т.о. (22)–(23) – полная система законов сохран. в эйлеровом описании в полных дифф-ах.

б) $$\rho\frac{\partial A_\alpha}{\partial t}+\rho\bar{v}\cdot\nabla\otimes A_\alpha+\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\bar{v}\right)A_\alpha=\frac{\partial\rho A_\alpha}{\partial t}+\nabla(\rho\bar{v}\otimes A_\alpha) \quad (24)$$

Тогда (22) запишется так:

$$\frac{\partial\rho A_\alpha}{\partial t}+\nabla(\rho\bar{v}\otimes A_\alpha-B_\alpha)=\rho C_\alpha \quad (25)$$

где $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha$:

$$A_\alpha=\begin{pmatrix}1\\ \bar{v}\\ \varepsilon\\ \eta\\ \bar{u}\\ F^T\end{pmatrix},\quad B_\alpha=\begin{pmatrix}0\\ T\\ T\cdot\bar{v}-\bar{q}\\ \bar{q}/\theta\\ 0\\ \rho F\otimes\bar{v}\end{pmatrix}$$

C_α – такое же, как и (23)

– дивергентная формул.

б) Интегр. формулировка законов сохранения в Лагранж. опис.

$$\frac{d}{dt}\int_{\overset{\circ}{V}}\overset{\circ}{\rho}\hat{\overset{\circ}{A}}_\alpha\,d\overset{\circ}{V}=\oint_{\overset{\circ}{\Sigma}}\overset{\circ}{\bar{n}}\cdot\hat{\overset{\circ}{B}}_\alpha\,d\overset{\circ}{\Sigma}+\int_{\overset{\circ}{V}}\overset{\circ}{\rho}\hat{\overset{\circ}{C}}_\alpha\,d\overset{\circ}{V} \quad (31)$$