МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Домашнее задания №4 по теории случайных процессов

3 курс, группа ФН11-63Б
Вариант 19

Преподаватель
_____________ Т. В. Облакова
«___» _______ 2020 г.

Москва, 2020 г.

Содержание

Моделирование двумерного винеровского процесса

1. На отрезке $[0, T]$ с шагом h смоделировать n траекторий двумерного винеровского процесса с интенсивностью σ.

2. Вывести на печать несколько траекторий.

3. Для каждой траектории вычислить:

   3.1 вариации компонент $\left(\sum\limits_k \left|W^{(1)}_{(k+1)h} - W^{(1)}_{kh}\right|, \sum\limits_k \left|W^{(2)}_{(k+1)h} - W^{(2)}_{kh}\right|\right)$,
   а так же среднее значение вариации $\left(\mathrm{Var}^{(1)}(h), \mathrm{Var}^{(2)}(h)\right)$ по всем траекториям;

   3.2 суммы квадратов приращений компонент
   $\left(\sum\limits_k \left|W^{(1)}_{(k+1)h} - W^{(1)}_{kh}\right|^2, \sum\limits_k \left|W^{(2)}_{(k+1)h} - W^{(2)}_{kh}\right|^2\right)$,
   а так же среднее значение этих сумм $(\mathrm{SqVar}^{(1)}(h), \mathrm{SqVar}^{(2)}(h))$.

4. Уменьшить значение h в два раза и вычислить $\left(\mathrm{Var}^{(1)}(\frac{h}{2}), \mathrm{Var}^{(2)}(\frac{h}{2})\right)$ и $(\mathrm{SqVar}^{(1)}(\frac{h}{2}), \mathrm{SqVar}^{(2)}(\frac{h}{2}))$.

5. Вычислить теоретическую вероятность $\mathrm{P}(|\overline{W}_T| \geq z)$ и сравнить ее с эмпирической вероятностью достижения указанного уровня z в момент T.

Начальные данные

$$T = 4, \quad n = 160, \quad \sigma = 0.75, \quad h = 0.02, \quad z = 2.5$$

1 Формирование двумерного винеровского процесса

Одномерный винеровский процесс, описывающий броуновской движение представляет собой кумулятивную сумму гауссовых случайных величин вида $N(0, \sigma^2 \cdot h)$. Тогда в двумерном случае второй элемент пары будет формироваться аналогично первому. Для формирования n различных траекторий остаётся реплицировать вышеописанную операцию n раз.
Введём начальные данные:

```
> addTaskCallback(function(...) {set.seed(1337);TRUE})
> Tt  <-  4
> n  <-  160
> sigma  <-  0.75
> h  <-  0.01
> z  <-  2.5
> N  <-  Tt/h
> N
[1] 400
```

Функция для формирования одной траектории имеет вид:

```
pair.func <- function()
{
        pair  <-  t(replicate(N,
                sapply(c(1,2), function(y) rnorm(1, 0, h * sigma^2)),
                simplify = T))
        return(apply(rbind(c(0,0),pair), 2, cumsum))
}
```

Теперь можем ее реплицировать $n = 160$ раз и получить требуемый набор из $n = 160$ двумерных винеровских процессов:

```
> pairs.extnd.list <- replicate(n, pair.func(), F)
> pairs.list <- Map(function(x) x[c(T,F),], pairs.extnd.list)
```

По типу данных переменная `pairs.list` представляет собой лист(список) матриц. Например, распечатаем верхние 4 элемента первой траектории.

```
> head(pairs.list[[1]], 4)
            [,1]       [,2]
[1,]  0.000000000 0.00000000
[2,] -0.009801647 0.01316957
[3,]  0.009304977 0.32247326
[4,]  0.230552785 0.16546962
```

Можем так же для примера привести значения другой траектории:

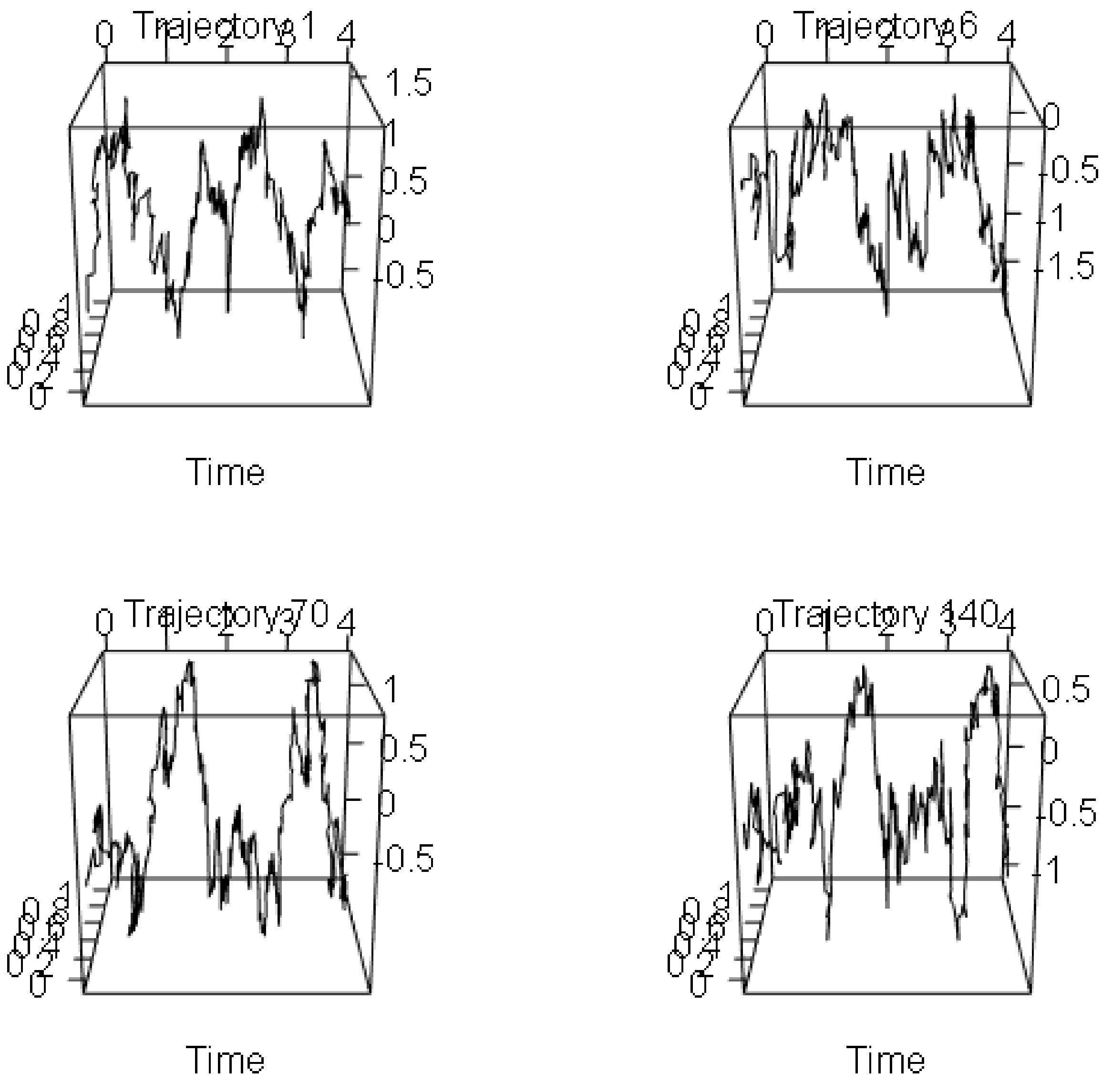
```
> ### Для 6-ой траектории:
> head(pairs.list[[6]],4)
> head(pairs.list[[6]],4)
            [,1]         [,2]
[1,]  0.00000000  0.000000000
[2,] -0.01351392 -0.075122664
[3,] -0.01128064  0.002188971
[4,] -0.27148618 -0.129458504
> tail(pairs.list[[6]],4)
            [,1]      [,2]
[198,] -0.5810057 -1.660147
[199,] -0.5118538 -1.687288
[200,] -0.5211355 -1.779348
[201,] -0.4496010 -1.613658
```

Как Вы могли заметить, в начальных данных в коде используется значение $h = 0.01$. Это связано с особенностями реализации решения пункта 4. Кроме того можно заметить, что вместо ожидаемого `replicate` для `pairs.list` для него используется паттерн функционального программирования `Map`, а простой `replicate` используется для формирования `pairs.extnd.list`.

2 Построение графиков

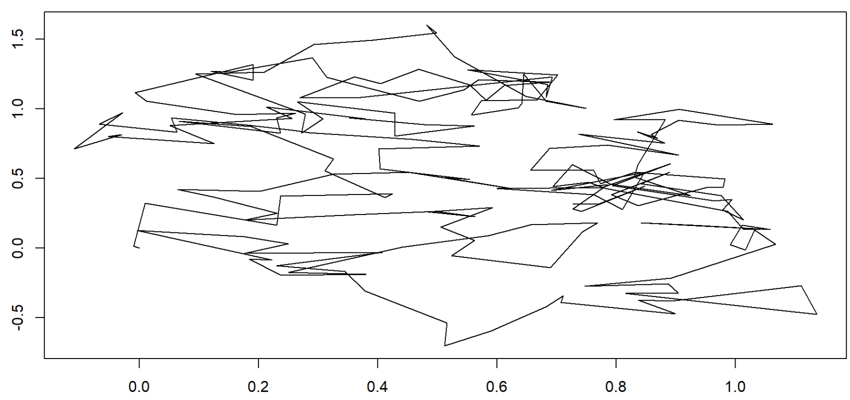
Рассмотрим два типа возможных визуализаций. Во-первых, мы можем изобразить в объёме движение траектории, отложив по одной из осей время. Во-вторых, можно изобразить классическую броуновскую картину на двумерном графике, где точками будут являться соответствующие пары для каждой из траекторий, причём последующие точки будут соединены отрезками прямых.

Изобразим в объёме несколько траекторий:

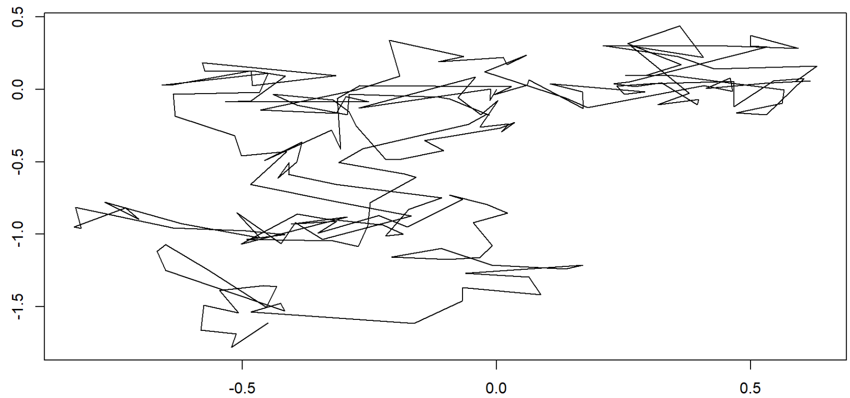


Далее, для этих же траекторий построим классические графики броуновского движения:

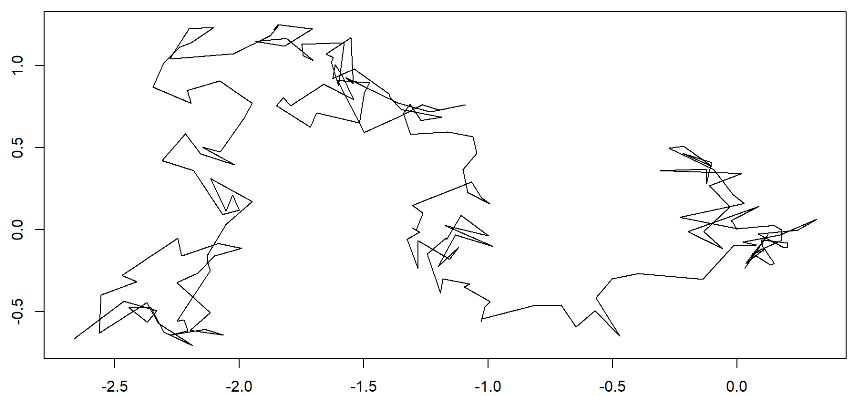
Trajectory 1, h = 0.02



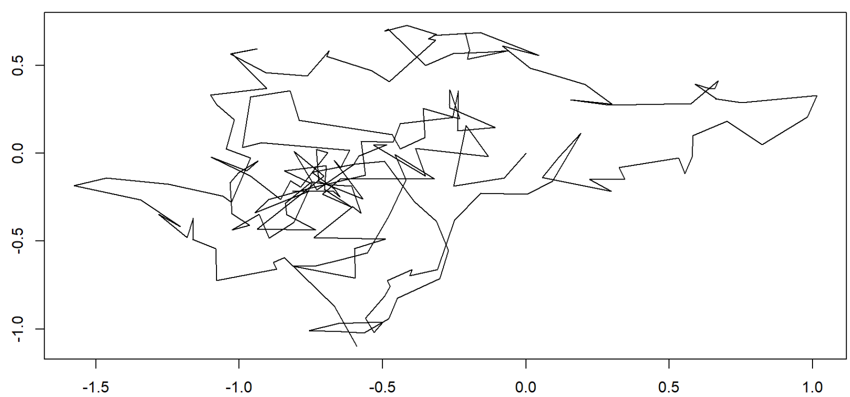
Trajectory 6, h = 0.02



Trajectory 70, h = 0.02



Trajectory 140, h = 0.02



3 Вычисление характиристик двумерного винеровского процесса

3.1 Вариации компонент. Среднее значение вариации

Найдём вариации компонент $\left(\sum_k \left|W^{(1)}_{(k+1)h} - W^{(1)}_{kh}\right|, \sum_k \left|W^{(2)}_{(k+1)h} - W^{(2)}_{kh}\right|\right)$:

```
> var_foo <- function(y)
+ {
+   sum(abs(diff(y)))
+ }
>
> vars <- t(sapply(pairs.list, function(x) apply(x, 2, var_foo)))
```

Выведем на печать вариации компонент для первых и последних пяти траекторий:

```
> head(vars,5)
         [,1]     [,2]
[1,] 17.46365 18.10675
[2,] 16.82400 16.25767
[3,] 17.39559 16.03837
[4,] 17.33865 15.00066
[5,] 16.05115 16.93480
> tail(vars,5)
         [,1]     [,2]
[156,] 19.99023 17.77190
[157,] 16.35341 16.54479
[158,] 16.62718 17.14943
[159,] 17.45334 18.07495
[160,] 16.78373 17.36628
```

Тогда среднее значение вариации $\left(\mathrm{Var}^{(1)}(h), \mathrm{Var}^{(2)}(h)\right)$ по всем траекториям:

```
> mean_vars <- colMeans(vars)
> mean_vars
[1] 17.01906 16.91866
```

3.2 Суммы квадратов приращений. Среднее значение суммы квадратов приращений

Найдём суммы квадратов приращений компонент
$\left(\sum_k \left|W^{(1)}_{(k+1)h} - W^{(1)}_{kh}\right|^2, \sum_k \left|W^{(2)}_{(k+1)h} - W^{(2)}_{kh}\right|^2\right)$:

```
> sq.var_foo <- function(y)
+ {
+   sum(abs(diff(y))^2)
+ }
>
> sq.vars <- t(sapply(pairs.list, function(x) apply(x, 2, sq.var_foo)))
```

Выведем на печать вариации компонент для первых и последних пяти траекторий:

```
> head(sq.vars,5)
         [,1]     [,2]
[1,] 2.333261 2.598706
[2,] 2.208715 2.124458
[3,] 2.313816 2.017766
[4,] 2.368920 1.849391
[5,] 1.961947 2.345290
> tail(sq.vars,5)
         [,1]     [,2]
[156,] 3.147324 2.232487
[157,] 2.128623 2.094030
[158,] 2.105166 2.304816
[159,] 2.478495 2.442681
[160,] 2.163211 2.254925
```

Найдём среднее значение этих сумм $(\mathrm{SqVar}^{(1)}(h), \mathrm{SqVar}^{(2)}(h))$:

```
> mean_sq.vars <- colMeans(vars)
> mean_sq.vars
[1] 2.285641 2.243726
```

4 Рассмотрение уменьшенного вдвое шага h

Для более детального изучения картины поведения броуновского движения уменьшим шаг h вдвое до $\tilde{h} = \frac{h}{2} = 0.01$. Проделаем описанные выше действия для получившегося двумерного винеровского процесса.

Найдём вариации компонент $\left(\sum_k \left|W^{(1)}_{(k+1)\tilde{h}} - W^{(1)}_{k\tilde{h}}\right|, \sum_k \left|W^{(2)}_{(k+1)\tilde{h}} - W^{(2)}_{k\tilde{h}}\right|\right)$:

```
> vars.extnd <- t(sapply(pairs.extnd.list,
+         function(x) apply(x, 2, var_foo)))
> head(vars.extnd,5)
         [,1]     [,2]
[1,] 24.26126 25.06274
[2,] 25.18078 23.63542
[3,] 23.54455 24.56995
[4,] 23.46042 23.20730
[5,] 22.35894 22.91436
> tail(vars.extnd,5)
         [,1]     [,2]
[156,] 26.86954 23.84102
[157,] 23.28283 22.33214
[158,] 25.28249 24.57040
[159,] 23.64685 25.76409
[160,] 24.12964 23.42405
```

А так же среднее значение вариации $\left(\mathrm{Var}^{(1)}(\tilde{h}), \mathrm{Var}^{(2)}(\tilde{h})\right)$:

```
> mean_vars.extnd <- colMeans(vars.extnd)
> mean_vars.extnd
[1] 24.02536 23.96380
```

Далее ищем суммы квадратов приращений компонент $\left(\sum_k \left|W^{(1)}_{(k+1)\tilde{h}} - W^{(1)}_{k\tilde{h}}\right|^2, \sum_k \left|W^{(2)}_{(k+1)\tilde{h}} - W^{(2)}_{k\tilde{h}}\right|^2\right)$:

```
> sq.vars.extnd  <- t(sapply(pairs.extnd.list,
+         function(x) apply(x, 2, sq.var_foo)))
> head(sq.vars.extnd ,4)
[,1]     [,2]
[1,] 2.326814 2.470255
[2,] 2.413601 2.326623
[3,] 2.106365 2.234015
[4,] 2.244770 2.045897
```

```
> tail(sq.vars.extnd ,4)
[,1]     [,2]
[157,] 2.137992 1.946296
[158,] 2.447775 2.410783
[159,] 2.224500 2.576072
[160,] 2.201613 2.195686
```

А так же среднее значение этих сумм $(\mathrm{SqVar}^{(1)}(\tilde{h}), \mathrm{SqVar}^{(2)}(\tilde{h}))$

```
> mean_sq.vars.extnd  <- colMeans(vars.extnd )
> mean_sq.vars.extnd
[1] 2.266860 2.257994
```

Можем сравнить полученные средние для двух значений h. Первый и третий столбец соответствуют $h = 0.02$, а второй и четвёртый – $\tilde{h} = 0.01$:

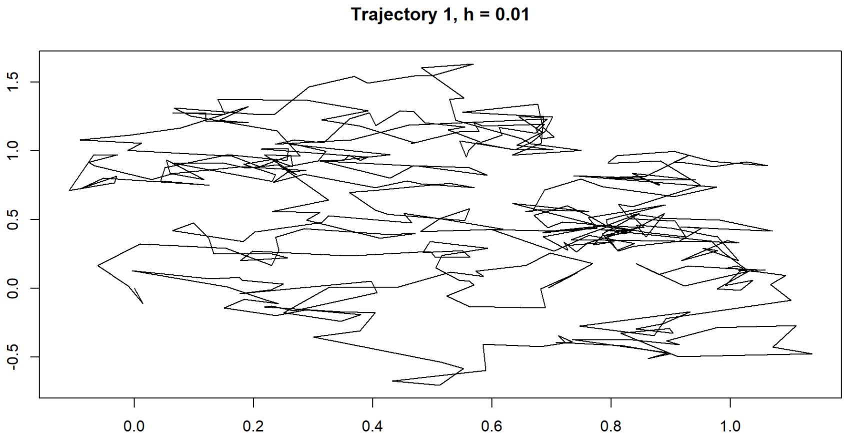
```
> compare_table <- data.table(mean_vars = mean_vars,
+                             mean_vars.extnd = mean_vars.extnd,
+                             mean_sq.vars = mean_sq.vars,
+                             mean_sq.vars.extnd = mean_sq.vars.extnd)
> compare_table
mean_vars mean_vars.extnd mean_sq.vars mean_sq.vars.extnd
1:   17.01906         24.02536      2.285641             2.266860
2:   16.91866         23.96380      2.243726             2.257994
```

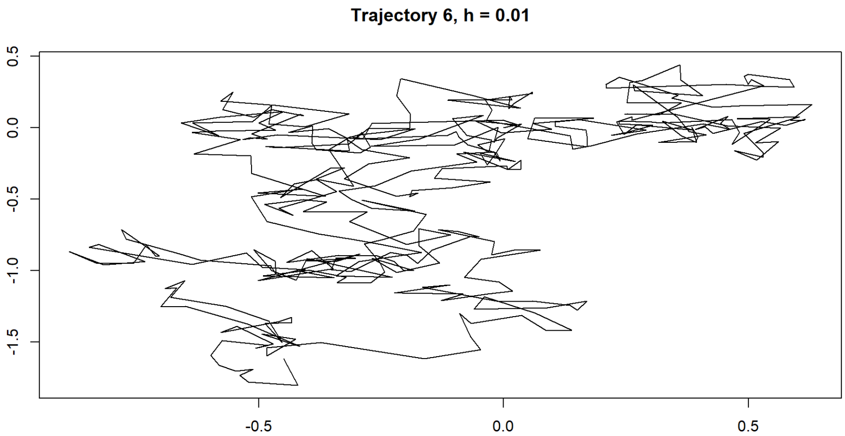
Или в относительных величинах:

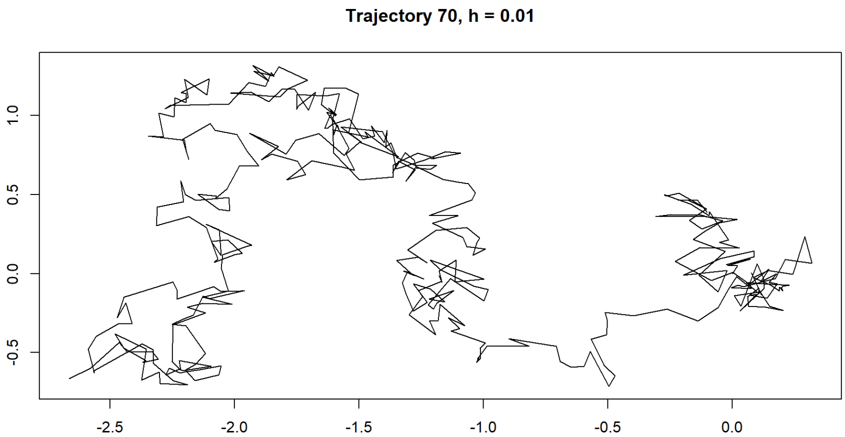
```
> compare_table.rel <- data.table(compare_table[,1] / compare_table[,2],
+                                 compare_table[,3] / compare_table[,4])
> compare_table.rel
mean_vars mean_sq.vars
1: 0.7083788    1.0082851
2: 0.7060092    0.9936808
```

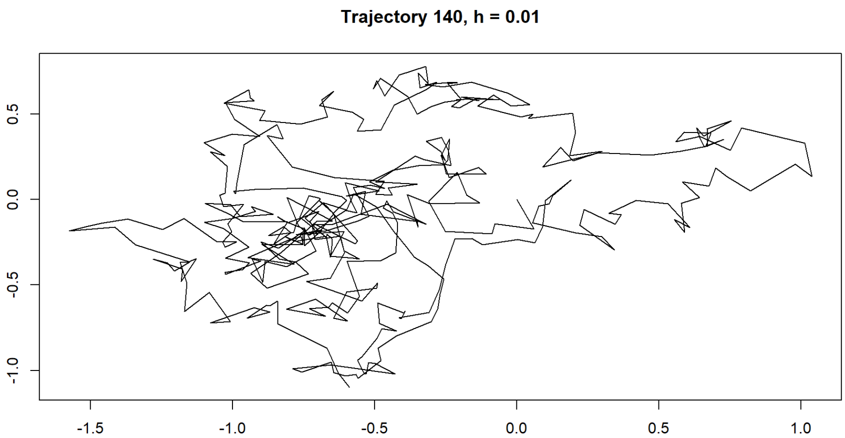
Видим, что отличия в средних значениях суммы квадратов приращений компонент существенно меньше, чем отличия у средних значений вариаций компонент. Это связано с тем, что траектории винеровского процесса имеют неограниченную вариацию (сумма приращений при измельчении разбиения стремится к бесконечности). С другой стороны, суммы *квадратов* приращений при измельчении стремятся к дисперсии $T\sigma^2 = 4 \cdot 0.75^2 = 2.25$, что хорошо соотносится с полученными эмпирическими значениями.

Наконец построим графики:

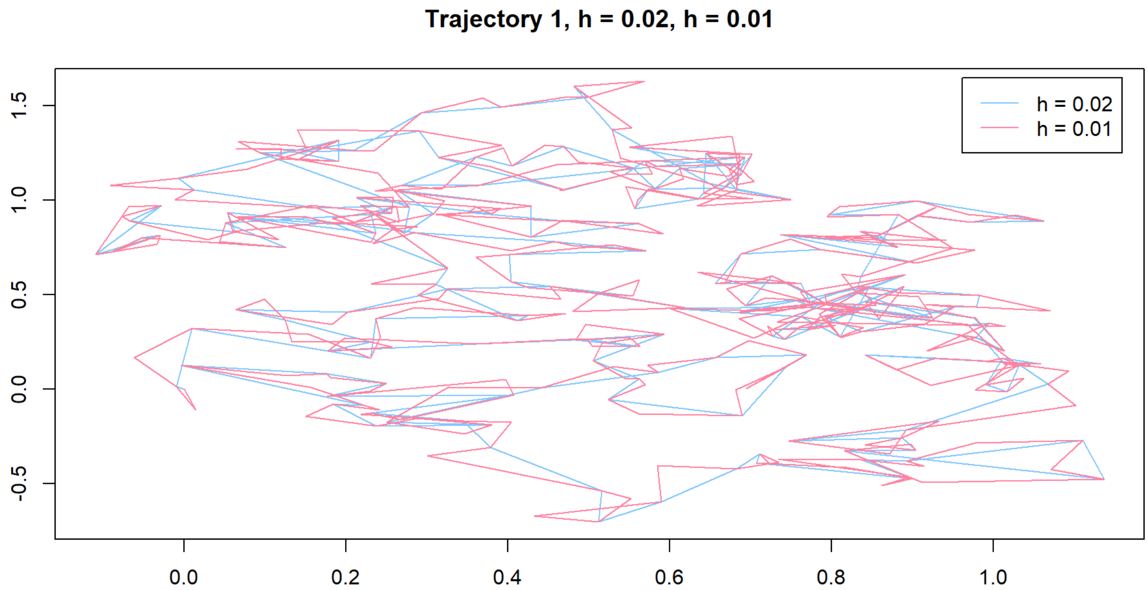

Trajectory 1, h = 0.01
-0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


Trajectory 6, h = 0.01
-1.5
-1.0
-0.5
0.0
0.5
-0.5
0.0
0.5

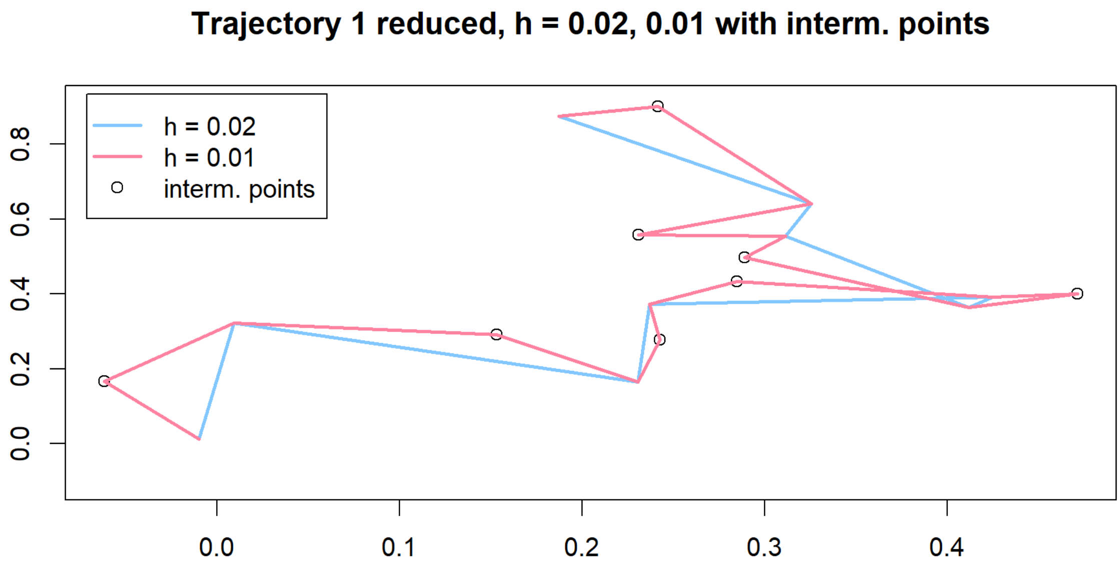

Trajectory 70, h = 0.01
-0.5
0.0
0.5
1.0
-2.5
-2.0
-1.5
-1.0
-0.5
0.0


Trajectory 140, h = 0.01
-1.0
-0.5
0.0
0.5
-1.5
-1.0
-0.5
0.0
0.5
1.0

Кроме того, можем построить совмещённые графики для соответствующих траекторий при $h = 0.02$ и $\tilde{h} = 0.01$.



В связи с большим количеством точек график выглядит не очень информативным. Рассмотрим в приближении несколько точек детальнее:



Теперь можем видеть разницу между траекториями с $h = 0.02$ и $\tilde{h} = \frac{h}{2} = 0.01$. Уменьшение в два раза шага позволяет получить «промежуточные» точки при рассмотрении броуновского движения частицы.

5 Вероятность достижения уровня z в момент T

5.1 Эмпирическая вероятность

Рассчитаем эмпирическую вероятность достижения уровня z в момент T. Будем интерпретировать это как количество траекторий, которые в момент времени $T = 4$ находятся за пределами окружности радиуса $z = 2.5$. Это соответствует значению евклидовой метрики на последней точке для каждой траектории. То есть:

```
> euc_metric <- function(y)
+ {
+   sqrt(sum(y[dim(y)[1],]^2))
+ }
>
> z.sc <- as.numeric(Map(euc_metric, pairs.list))
```

Выведем на печать первые и последние 5 элементов полученных значений:

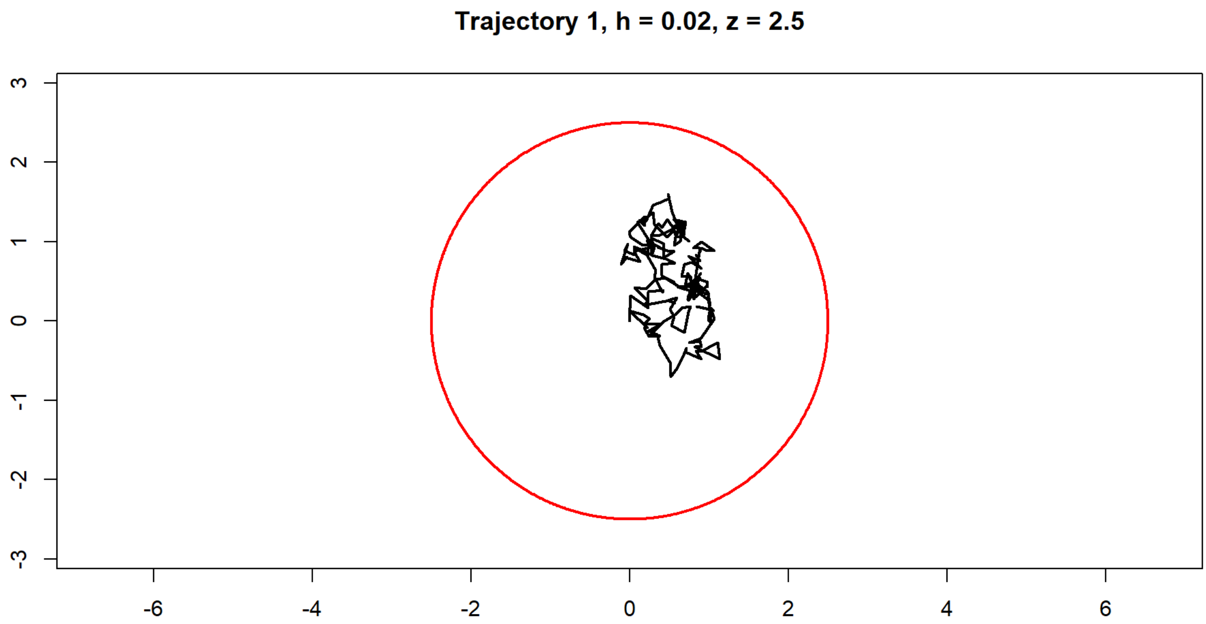
```
> head(z.sc,5)
[1] 0.7919054 0.7308046 1.7206144 1.1162275 1.2255906
> tail(z.sc,5)
[1] 2.0275873 1.5579907 0.7739086 1.5382913 2.5450301
```

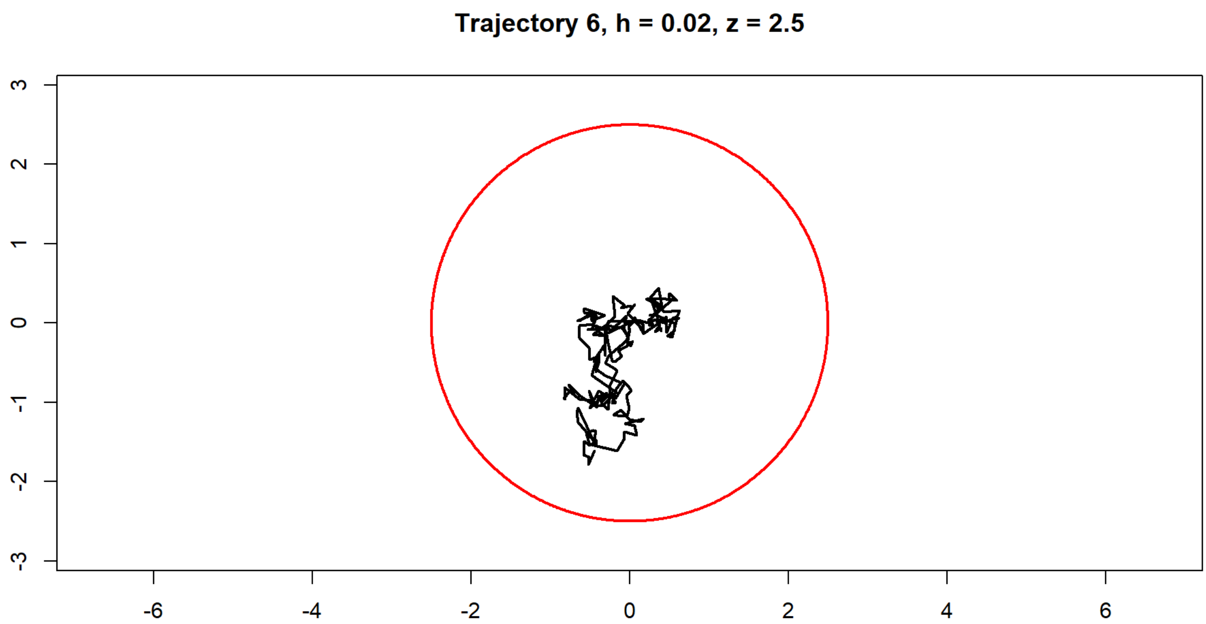
Теперь можем рассчитать долю траекторий, последняя точка которых находится вне окружности радиуса $z = 2.5$:

```
> pos.sc <- length(z_sc[z_sc > z])
> pos.sc
[1] 42
> z.prob <- pos.sc/((N/2)+1)
> z.prob
[1] 0.2089552
```

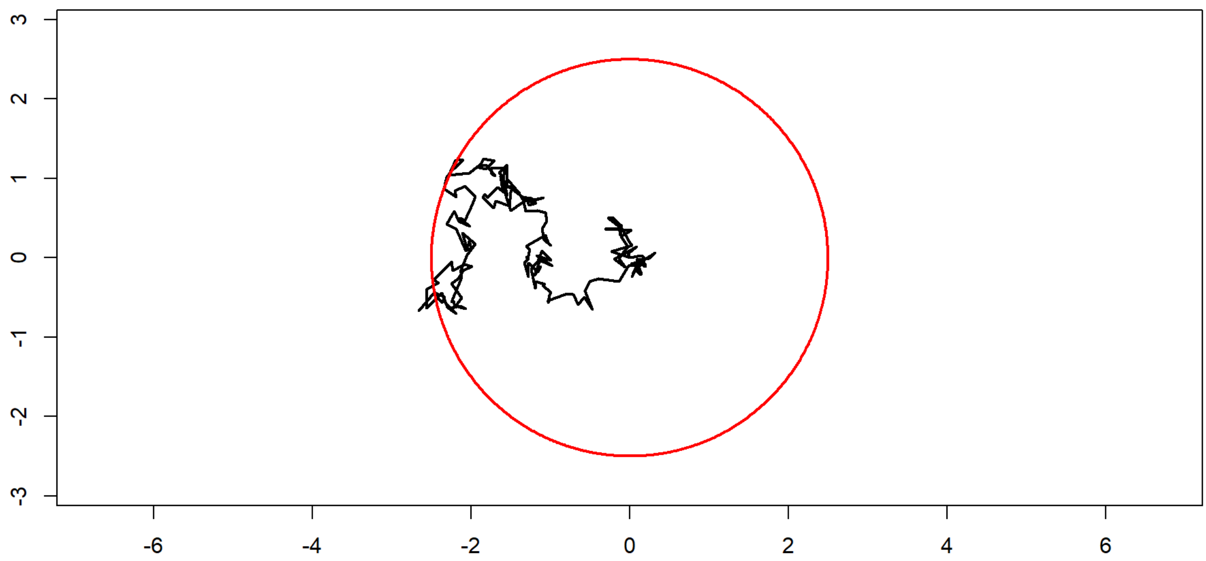
Значение `(N/2)+1` обусловлено особенностями реализации, которые были описаны выше. Длина каждой траектории, как и требуется по условию равняется $\frac{T}{h} + 1 = 200 + 1 = 201$, где дополнительная единица соответствует точке $(0; 0)$. Значение `N` же равняется 400, так как оно используется в формировании траекторий `pairs.extnd.list` при $\tilde{h} = \frac{h}{2} = 0.01$ для выполнения пункта 4.

Кроме того, можем изобразить несколько графиков, отражающих взаимное расположение траектории, окружности радиуса $z = 2.5$ и точки, соответствующей последнему положению частицы:

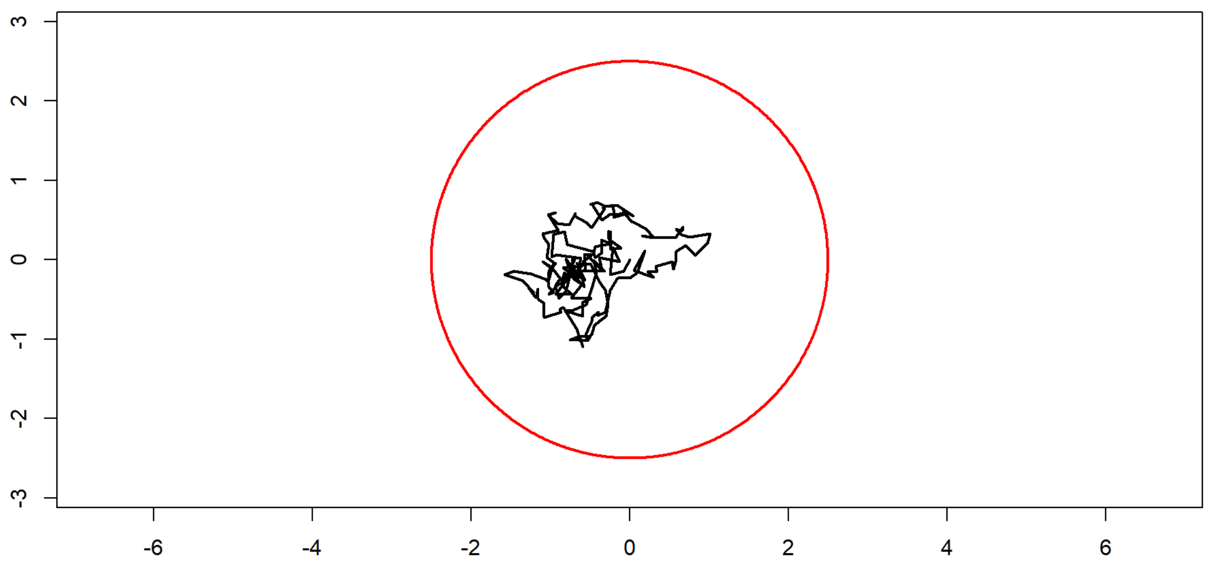

Trajectory 1, h = 0.02, z = 2.5
3
2
1
0
-1
-2
-3
-6
-4
-2
0
2
4
6


Trajectory 6, h = 0.02, z = 2.5
3
2
1
0
-1
-2
-3
-6
-4
-2
0
2
4
6

Trajectory 70, h = 0.02, z = 2.5



Trajectory 140, h = 0.02, z = 2.5



5.2 Теоретическая вероятность

Рассчитаем теоретическую вероятность $P(|\overline{W}_T| \geq z)$ того, что в момент времени $T = 4$ Траектории достигнут уровня $z = 2.5$. Так как $|\overline{W}_T|$ означает евклидову метрику, то есть $|\overline{W}_T| = \sqrt{(W_T^{(1)})^2 + (W_T^{(2)})^2}$, причём $W_T^{(1)} \sim \mathrm{N}(0, \sigma\sqrt{T})$ и $W_T^{(2)} \sim \mathrm{N}(0, \sigma\sqrt{T})$, то по свойства нормального распределения:

$$\frac{(W_T^{(1)})^2}{\sigma^2 T} + \frac{(W_T^{(2)})^2}{\sigma^2 T} \sim \mathcal{X}^2(2)$$

Тогда искомая вероятность будет равна:

$$\mathrm{P}\left(\left(\frac{W_T^{(1)}}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2 + \left(\frac{W_T^{(2)}}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2 \geq \frac{z^2}{\sigma^2 T}\right) = 1 - \mathrm{F}_{\mathcal{X}^2(2)}\left(\frac{z^2}{\sigma^2 T}\right)$$

Имеем:

```
> z.theor <- 1 - pchisq(z^2/(sigma^2 * Tt),2)
> z.theor
[1] 0.2493522
```

Видим, что теоретическое и эмпирические значения вероятностей достаточно близки.

6 Выводы

В результате проделанной работы было

- сформировано $n = 160$ двумерных винеровских процессов на интервале $[0; T] = [0; 4]$ интенсивности $\sigma = 0.75$ с шагом $h = 0.05$, моделирующих броуновское движение;
- для каждой траектории вычислены вариации компонент и среднее значение вариации по всем траекториям
- для каждой траектории вычислены суммы квадратов приращений компонент и среднее значение этих сумм по всем траекториям
- рассмотрено «под микроскопом» движение броуновской частицы путем уменьшения в два раза шага h
- Вычислены теоретическая и эмпирическая вероятности достижения траекториями уровня $z = 2.5$ в момент времени $T = 4$