Соколов Арсений [illegible]
[illegible]

Лекция 6

Одномерная оптимизация с использованием производной.

6.1. Метод средней точки

Пусть ф-ия $f(x)$ непр. диф-ма на отрезке $[a, b]$ и имеет единственную стационарную точку на этом отрезке, а сл-но ур-ие $f'(x) = 0$ имеет единств. решение. Пусть также $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$. В этом случае стационарная точка $x_* \in (a, b)$ является точкой минимума $f(x)$, $f'(x) < 0$ на $[a, x_*)$ и $f'(x) > 0$ на $(x_*, b]$.

Положим $a_0 = a$, $b_0 = b$. Возьмем точку $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ — середину отрезка $[a_0, b_0]$. Вычислим $f'(c_0)$. Если окажется, что $f'(c_0) = 0$, то мы нашли стационарную точку. Если $f'(c_0) < 0$, то тогда $f'(x) < 0$ на всем отрезке $[a_0, c_0]$. Поэтому положим $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$. Аналогично, если $f'(c_0) > 0$, то положим $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$. Длина отрезка $l([a_1, b_1]) = \frac{1}{2} l([a_0, b_0]) = \frac{b-a}{2}$

Опишем k-й шаг. Пусть построен отрезок $[a_{k-1}, b_{k-1}]$, $f'(a_{k-1}) < 0$, $f'(b_{k-1}) > 0$ и

$$l([a_{k-1}, b_{k-1}]) = \frac{b-a}{2^{k-1}}$$

Возьмем точку $c_{k-1} = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}$. Вычислим $f'(c_{k-1})$

Если $f'(c_{k-1}) = 0$, то $c_{k-1} = x_*$ — стац. точка

Если $f'(c_{k-1}) < 0$, то положим $a_k = c_{k-1}$, $b_k = b_{k-1}$

Если $f'(c_{k-1}) > 0$, то положим $a_k = a_{k-1}$, $b_k = c_{k-1}$

Тогда:

$$l([a_k, b_k]) = \frac{1}{2} l([a_{k-1}, b_{k-1}]) = \frac{b-a}{2^k}$$

Заметим, что $\lim\limits_{k \to +\infty} l([a_k, b_k]) = 0$

Если стац. точка не найдена точно, то возможны условия остановки алгоритма:

1) Длина получ. отрезка меньше наперёд заданн. константы $l([a_k, b_k]) < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$
2) Проведено заранее заданное кол-во шагов K

В качестве приближ. знач. точки минимума можно взять точку $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$, тогда [illegible] $f(c_k)$

Пример. Рассмотр. ф-цию $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 1$ и отрезок $[-2,5; 0]$, т.к. $f'(x)$ удовл. условиям выше, воспользуемся методом средн. точки

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9; \quad f'(-2.5) = -2.25 < 0$$
$$f'(0) = 9 > 0$$

$$c_0 = -1.25; \quad f'(c_0) \approx -1.31 < 0$$

Отсюда

$$a_1 = -1.25; \quad b_1 = 0; \quad c_1 \approx -0.63; \quad f'(c_1) \approx 2.63 > 0$$

Следовательно, $a_2 = -1.25$, $b_2 = -0.63$, приближ. знач. т. минимума можно взять $c_2 = -0.94$, минимум $f_* \approx -?.99$

6.2 Метод хорд (секущих)

Замеч. 6.2.1. Пусть ф-ия $g(x)$ определена в точках x_1 и x_2, $x_1 \neq x_2$, $g(x_1) > 0$, $g(x_2) < 0$, тогда прямая, проходящая через точки $(x_1, g(x_1))$ и $(x_2, g(x_2))$, имеет ур-е

$$y = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot x + \frac{g(x_1)x_2 - g(x_2)x_1}{x_2 - x_1},$$

а точка пересеч. этой прямой с осью абсцисс

$$x = \frac{g(x_2)x_1 - g(x_1)x_2}{g(x_2) - g(x_1)} = x_1 - \frac{g(x_1)(x_2 - x_1)}{g(x_2) - g(x_1)}$$

$$x \in (x_1, x_2) \quad \#$$

Пусть ф-ия $f(x)$ непр. дифф-ма на отрезке $[a, b]$ и имеет единств. стацион. точку на этом отрезке, $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$. В этом случае стац. точка $x_* \in (a, b)$ является точкой минимума ф-ии $f(x)$, $f'(x) < 0$ на интервале $[a, x_*)$ и $f'(x) > 0$ на интерв. $(x_*, b]$.

Опишем $(k+1)$-й шаг. Пусть найдены точки a_k и b_k, где $a_k, b_k \in [a, b]$, $a_k < b_k$, $f'(a_k) < 0$, $f'(b_k) > 0$. Проведём прямую через точки $(a_k, f'(a_k))$ и $(b_k, f'(b_k))$ и найдём точку пересеч. c_k данной прямой и оси абсцисс. Получаем

$$c_k = \frac{f'(b_k)a_k - f'(a_k)b_k}{f'(b_k) - f'(a_k)} \in (a_k, b_k)$$

Сапегов Алексей ЭИ-15
Мои лекции

Вычислим значение $f'(c_n)$

Если $f'(c_n)=0$, то мы нашли стац. точку.

Если $f'(c_n)\neq 0$ и $k>0$, то проверим условие $|c_n - c_{n-1}| < \varepsilon$ для заданной заранее погрешности $\varepsilon > 0$. Если данное условие выполнено, то остановим выполнение алгоритма, если не выполнено, то продолжим.

Если $f'(c_n)<0$, то положим $a_{n+1}=c_n$, $b_{n+1}=b_n$

Если $f'(c_n)>0$, то положим $a_{n+1}=a_n$, $b_{n+1}=c_n$

Получаем, что $f'(a_{n+1})<0$, $f'(b_{n+1})>0$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$

Если стац. точка не найдена сразу, то условием остановки может быть также выполнение заранее заданного количества итераций K. Приближенным значением точки минимума возьмем т. c_n, $m_* = f(c_n)$

Пример:

$f(x) = x^3+6x^2+9x+1$, $[-2.5; 0]$

$f'(x) = 3x^2+12x+9$; $f'(-2.5) = -2.25 < 0$
$f'(0) = 9 > 0$

$c_0 = -2$; $f'(c_0) = -3 < 0$

$a_1 = -2$, $b_1 = 0$, $c_1 = -1.5$; $f'(c_1) = -2.25 < 0$

$a_2 = -1.5$, $b_2 = 0$, $c_2 = -1.2$

$c_2 = -1.2 \Rightarrow m_* \approx -2.89$

6.3. Метод Ньютона (касательных)

Пусть ф-ция $f(x)$ дважды непрерывно дифф-ма на $[c,d]$ и имеет единств. стац. точку x_* на этом отрезке, $f'(c)<0$, $f'(d)>0$. Тогда точка x_* принадлежит интервалу (c,d) и является точкой минимума ф-ции $f(x)$. Пусть также $f''(x) \geq m > 0$, $|f'''(x)| \leq M$ на отрезке $[c,d]$ для некоторых m и M.

Известно, что если вып-ся описанные выше условия, то $\exists \delta$: $0 < \delta \leq \min(x_* - c, d - x_*)$ и тогда $[x_*-\delta, x_*+\delta] \subset [c,d]$ и итерационная посл-ть метода Ньютона для ф-ции $f(x)$ сходится к точке x_* при любом выборе начальной точки $x_0 \in [x_*-\delta, x_*+\delta]$. Значение пар-ра δ как пар-ра сходимости метода простой итерации может, например, быть найдено из условия: $\forall x \in [x_*-\delta, x_*+\delta]$ ↳

Сотник Аркадий Ник
ФИИ-63 [illegible]

$\Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{m^2}{2M}$

Заметим, что метод Ньютона обладает наибольшей скоростью сходимости относительно других описанных методов, однако он предъявляет весьма высокие требования к исходной ф-ции $f(x)$ и выбору нач. т. x_0

~~О~~

Опишем алгоритм метода Ньютона. Будем искать решение ур-ния $f'(x)=0$. Проведем оценку второй и третьей производных ф-ции $f'(x)$ на $[c;d]$. При необходимости применим метод средней точки некоторое кол-во раз, чтобы сузить интервал поиска точки x_*

Выберем x_0 – произвольную точку получ. отрезка. Если $f'(x_0)=0$, то мы нашли стац. точку. Если нет, то запишем ур-е касательной к графику ф-ции $f'(x)$ в этой точке.

$$y = f'(x_0) + f''(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Точка пересеч. данной касат. с осью абсцисс

$$x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}$$

Если оказалось, что т. x_1 не принадлежит полученному отрезку, то это означает, что мы не приблизились к корню x_* достаточно близко при выборе точки x_0, и необходимо провести дальнейшую корректировку

Опишем $(k+1)$-й шаг. Пусть найдена точка x_k. Касат. к графику $f'(x)$ в т. $(x_k, f'(x_k))$ имеет ур-е:

$$y = f'(x_k) + f''(x_k)(x - x_k)$$

Проверим условие остановки алгоритма. Если оно не выполняется, то продолжим вычисления. Если стац. точка не найдена точно, то условием остановки алгор. может быть:

1) $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon_x$ для зад. наперед. конст. $\varepsilon_x > 0$

2) $|f'(x_k)| < \varepsilon_{f'}$ для зад. наперед конст. $\varepsilon_{f'} > 0$

3) Проведено заданное кол-во итераций K.

Соколов [illegible] ФИ11-63 [illegible]

Пример:

$x^3 + 6x^2 + 9x + 1$; $[-2.5; 0]$.

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$; $f''(x) = 6x + 12$; $f'''(x) = 6$.

$-3 \le f''(x) \le 12$; $f'''(x) \le 6$

Выполним итерац. метода средней точки:

$[-1.25; 0] \subset [-2.5; 0]$, $f'(-1.25) = -1.31 < 0$

$f'(0) = 9 > 0$

$f''(x) \ge 4.5$ на отрезке $[-1.25, 0]$, $x_0 = -1.25$.

$$x_1 = -1.25 - \frac{-1.31}{4.5} \approx -0.96$$

Приблизительное знач. т. минимум -0.96, $f_* \approx -3$.