МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

# Семинар от 25.04.20
## по основам сеточных методов

3 курс, группа ФН11-63Б
Вариант 3

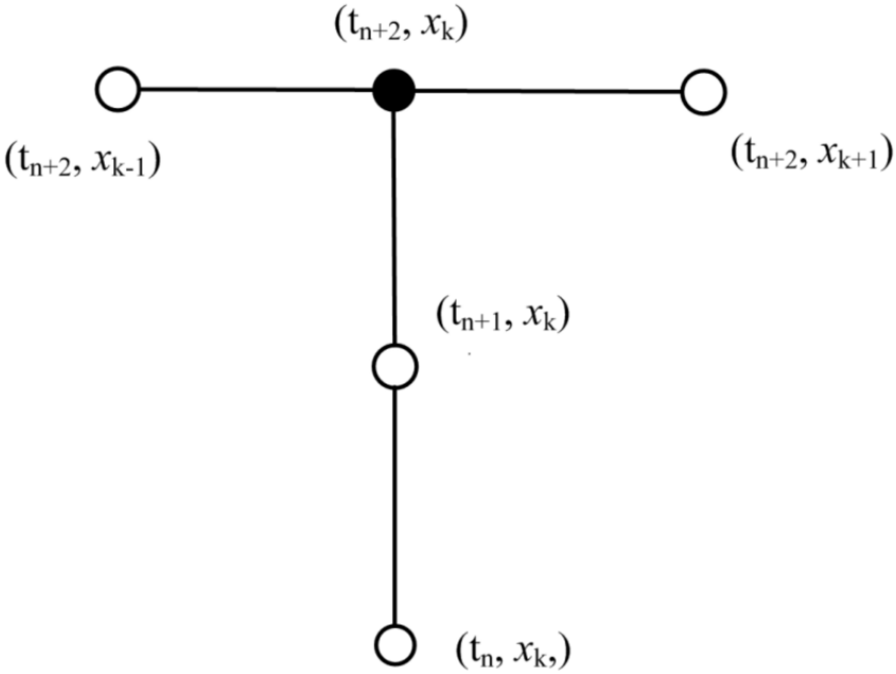
Преподаватель
______________ В. А. Кутыркин
«___» ________ 2020 г.

Москва, 2020 г.

Семинар от 25.04.2020, Основы сеточных методов , ФН11-63Б, вариант 3, Соколов Арсений Андреевич, Кутыркин Владимир Андреевич

# Задачи для решения на семинаре

**Задача1.** На рисунке 1 показан шаблон внутреннего узла трёхслойной неявной конечно разностной схемы для уравнения колебания струны (1). Исследовать спектральную устойчивость этой неявной схемы.




$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = f(t,x), (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = \mu(x), \quad x \in \mathbb{R}, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \eta(x) \quad \text{(начальные условия)}, \end{cases} \tag{1}$$

где $u \in C([0;T],\mathbb{R})$ – неизвестная гладкая функция, $\mu \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, и $f \in C([0;T] \times \mathbb{R},\mathbb{R})$ – заданные гладкие функции.

**Решение.**

Неявная разностная схема для задачи (1), индуцированная для внутреннего узла сетки $C$ с шаблоном, показанным на рисунке 1, определяет аппроксимирующую задачу (1) (тип аппроксимирования $(\tau^2, h^2)$) конечно разностную схему:

$$\begin{cases} \frac{u_k^n - 2u_k^{n+1} + u_k^{n+2}}{\tau^2} - \frac{u_{k+1}^{n+2} - 2u_k^{n+2} + u_{k-1}^{n+2}}{h^2} = f_k^{n+2}, N = \overline{1, n-1}, k \in Z \\ u_k^0 = \mu_k, \frac{u_k^1 - u_k^0}{\tau} = \eta_k, k \in Z \end{cases}$$

Для исследования спектральной устойчивости трёхслойной схемы также можно использовать спектральный признак устойчивости, анализируя конечно разностную схему вида:

$$\frac{u_k^n - 2u_k^{n+1} + u_k^{n+2}}{\tau^2} - \frac{u_{k+1}^{n+2} - 2u_k^{n+2} + u_{k-1}^{n+2}}{h^2} = f_k^{n+2}, N = \overline{1, n-1}, k \in Z,$$

где, согласно спектральному признаку, используются соотношения:

$$u_k^n = e^{i\varphi k}, \varphi \in [0; 2\pi); \quad u_k^n = \lambda u_k^{n-1}, u_k^{n+1} = \lambda u_k^n = \lambda^2 u_k^{n-1}, k \in Z,$$
$$r = \frac{\tau^2}{h^2}, e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi} = -4\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Получаем:

$$\lambda^2\left(1 + 4r\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) - 2\lambda + 1 = 0$$

Из теоремы Виета, получаем:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a}; \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{2}{1+4r\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}; \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{1}{1+4r\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}. \end{cases}$$

Откуда, решая полученную систему относительно $\lambda_1, \lambda_2$, имеем:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1+2i\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1+4r\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}; \\ \lambda_2 = -\frac{1-2i\sqrt{r}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{1+4r\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}. \end{cases}$$

Условие спектральной устойчивости неявной конечноразностной схемы для гиперболического уравнения колебания струны:

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4r\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}} \leq 1$$

То есть, неявная конечноразностная схема спектральной устойчива $\Rightarrow$ не накладывай ограничений на уменьшающиеся шаги сетки.

**Задача 2.** Исследовать на спектральную устойчивость явную конечноразностную схему для матричной задачи (2)

$$\begin{cases} \frac{\partial^{>}\boldsymbol{w}}{\partial t} - \boldsymbol{A}\frac{\partial^{>}\boldsymbol{w}}{\partial x} =^{>} \mathbf{0}, \quad (t,x) \in (0;T] \times \mathbb{R}; \\ {}^{>}\boldsymbol{w}(0,x) = \boldsymbol{\Phi}(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

если на сетке $C$ эта схема имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{{}^{>}w_k^{n+1} - {}^{>}w_k^n}{\tau} - A\frac{{}^{>}w_{k+1}^n - {}^{>}w_k^n}{2h} =^{>} \mathbf{0}, N = \overline{1, n-1}, k \in \mathbb{Z} \\ {}^{>}w_k^0 =^{>} \Phi_k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

**Решение.**

Согласно признаку спектральной устойчивости, для данной схемы рассматривается схема:

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} - A\frac{e^{i\varphi} - 1}{2h} = 0,$$

где ${}^{>}w_k^n =^{>} de^{i\varphi k} \quad ({}^{>}g \in^{>} \mathbb{R}^2, \quad {}^{>}g \neq^{>} 0), \varphi \in [0; 2\pi)$

Подставляя $\forall\varphi \in [0; 2\pi)$, получим:

$$\frac{\lambda - 1}{\tau}{}^{>}g - A\frac{e^{i\varphi} - 1}{2h}{}^{>}g =^{>} 0$$

Используя для числа Куранта обозначение: $r = \frac{\tau}{h}$:

$$\left[(\lambda - 1)E - rA\frac{e^{i\varphi} - 1}{2}\right]{}^{>}g = {}^{>}0$$

Если при умножении матрицы на ненулевой вектор в результате получен нулевой вектор, то это означает, что определитель матрицы равен нулю.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -r\frac{e^{i\varphi}-1}{2} \\ -r\frac{e^{i\varphi}-1}{2} & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - r^2\frac{\left(e^{i\varphi} - 1\right)^2}{4} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda_1(\varphi) = 1 + r\frac{e^{i\varphi} - 1}{2},$$

$$\lambda_2(\varphi) = 1 - r\frac{e^{i\varphi} - 1}{2}$$

Корни $\lambda_1(\varphi)$, $\lambda_2(\varphi)$ при изменении вещественного параметра $\varphi$ пробегают окружности радиуса $\frac{r}{2}$ с центрами в точках $1-\frac{r}{2}$ и $1+\frac{r}{2}$. Таким образом, условие устойчивости не выполнено ни при каких $r$