09 | 04 | 2020

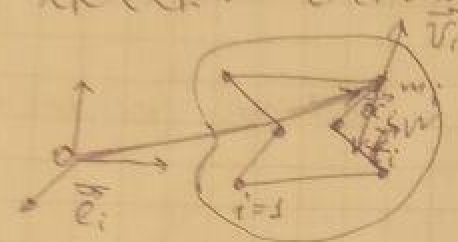
Лекция 8

4. Закон изменения кол-ва движения

Введем $\vec{I} = \int_V \rho \vec{v}\, dV$ — вектор кол-ва движения СС (вектор импульса)

$\forall t \geq 0 \quad \vec{I} = \int_V \vec{v}\, dm$

Пример! Система матер. точки



$m_i \vec{v}_i$ — кол-во движения матер. точки $M_i(\vec{x}_i)$

$I = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$ — суммарный вектор

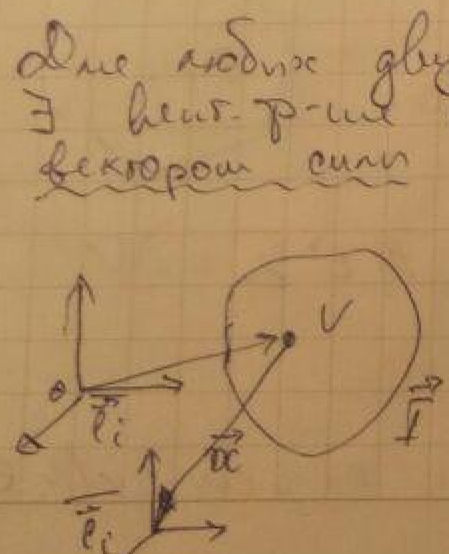
$\sum_{i=1}^{N} F_i$ — суммарный вектор внешних сил, действующ. на систему точек

$$\boxed{\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{F}} \qquad (1)$$

$\forall t \geq 0$

Аксиома 5. (Закон изменения кол-ва движ-ие)

Для любых двух областей (СС) $\forall V_1, \forall V_2$ $\forall t \geq 0$ $\exists$ вект-р-ия $\vec{F}(V_1, V_2, t)$, возможно $\vec{0}$-значная, назыв. вектором сил взаимодействия тел V_1 и V_2, облад. св-ми:



1) Аддитивность.

$\vec{F}(V_1' + V_1'', V_2, t) = \vec{F}(V_1', V_2, t) + \vec{F}(V_1'', V_2, t)$

$\vec{F}(V_1, V_2' + V_2'', t) = \vec{F}(V_1, V_2', t) + \vec{F}(V_1, V_2'', t)$

Согласно акс. 5, для $\forall$СС, в том числе для dV $\exists d\vec{F}$ с которой обл-ть dV взаимод. со своим окружением, $d\vec{F}$ м.б. ō-тачна

Введем $\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dm}$ – плотность массовых сил (внутр. гл.), т.е. действующих на произв. т. $M \in V$;

$$\vec{S} = \frac{d\vec{F}}{d\Sigma} \text{ – плотность поверхностных сил} \qquad (3)$$

(для граничн. точки), $M \in \Sigma$

В силу аддитивности $\vec{F}$, вектор сумм. сил, действ. на обл. V, можно представ. в виде:

$$\vec{F} = \vec{F}_m + \vec{F}_\Sigma$$

(4) $\vec{F}_m = \int_V d\vec{F}$ – сумм. вектор массовых сил, действ. на V

$\vec{F}_\Sigma = \int_\Sigma d\vec{F}$ – вектор сумм. поверхн. сил действ. на V

(3) → (4):

$$\vec{F}_m = \int_V d\vec{F} = \int \rho \vec{f} dV \, ; \quad \vec{F}_\Sigma = \int_\Sigma \vec{S} \, d\Sigma \qquad (5)$$

Тогда (2) → $\frac{d}{dt} \underbrace{\int_V \rho \vec{v} \, dV}_{I} = \int \rho \vec{f} dV + \int_\Sigma d\Sigma$ (6)

интегр. ~~диффер~~ формулировка з-на измен. кол-ва движ.

5. Внешние и внутр. силы.

Силы

массовые — поверхностные

внешн. — внутр. — внешн. — внутр.

(по отнош. к обл. V)

2) $\boxed{\frac{d\vec{I}_i}{dt} = \vec{F}}$ (2)

$\vec{F}$ – сумм. вектор внешн. сил, действ. на тело V со ~~сто~~ стороны внешности тела V

U – совокупность всех С.С в $E_3^?$ ("вселенная")

$U \setminus V$ – внешние тела по относ. к V.

Замеч. 1 Ур-е (2) зависит от выбора системы отсчета $O\vec{e}_i$,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}(x^i,t)}{dt}\Big|_{x^i}, \quad \vec{x} = x^i\vec{e}_i$$

$$\vec{e}_i \to \vec{e}_i', \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{x}'}{dt}$$

В определение $\vec{I}$ заложено понятие $O\vec{e}_i$ – инерциальной системы отсчета.

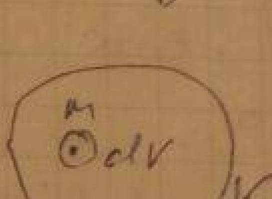
Предполагается, что $\exists$ такие инерц. С.О., в кот. закон измен. кол-ва движения имеет вид (2).
$\exists$ неинерц. С.О., в кот. закон ~~дв~~ имеет другую форму

Замеч. 2 V – содержит одни и те же мат. точки $\forall t$

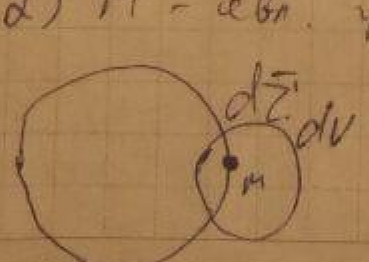
Сформулируем интегр. формулировку закона ~~дв~~ изменения кол-ва движ.

Рассмотр. 2 типа матер. точки:

1) M – явл. внутр. точкой обл. V $\Rightarrow$



2) M – явл. граничной точкой обл. V, $M \in \Sigma = \partial V$



$d\Sigma = dV \cap \Sigma$

Введем dV – элем. объем, $dV \subset V$

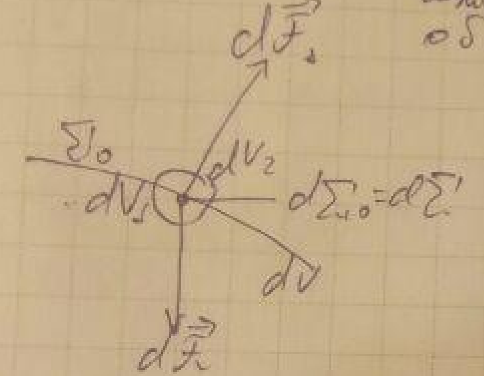
$$\boxed{\int_V \rho\left(\vec{F} - \frac{d\vec{v}}{dt}\right)dV + \oint_\Sigma \vec{S}\, d\Sigma = 0} \quad (9)$$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ – ускор. точки – плотность массовой внутр. сил (сил инерции)

Рассмотр. внутр. поверхн. сил

Рассмотр. об. V, разделим V на V_1 и V_2 поверхн-ю Σ'_0.

$dV = dV_1 \cup dV_2$, $d\Sigma' = \Sigma \cap dV$



Для dV_1 применим акс. 5, тогда $\exists\, d\vec{F}$, с котор. обл. dV_1 взаимод. с обл. dV_2.

~~Для dV_1 применим акс. 5~~

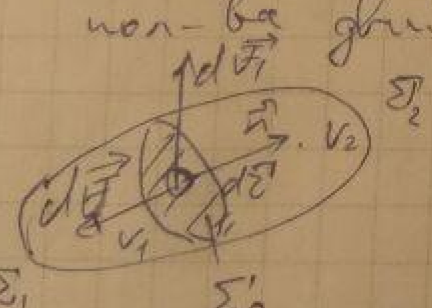
Для dV_2 —||—||— $\exists\, d\vec{F}_2$, с котор. dV_2 взаим. с dV_1

Введем $\vec{t}_i = \vec{S}_i = \frac{d\vec{F}_i}{d\Sigma'}$ – вектор ~~напряженност~~ напряжений

На внешнюю площадку $d\Sigma' \subset V$ действует 2 силы $d\vec{F}_1$ и $d\vec{F}_2$.

6. Теорема №1 Коши.

Рассмотр. обл. V и разделим ее пов-тью Σ_0 на V_1 и V_2. Применим к $V_1 + V_2 = V$ ур-е изменен. кол-ва движ. в форме (9)



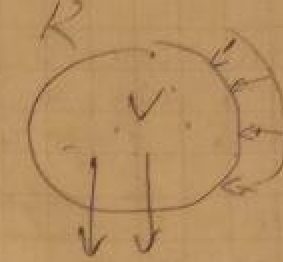
тогда: $\int_{V_1+V_2} \rho\left(\vec{F} - \frac{d\vec{v}}{dt}\right)dV + \oint_{\Sigma_1+\Sigma_2} \vec{p}\, d\Sigma = 0$ (10)

Применим (9) по отдельности к V_1 и к V_2:

- $\int_{V_1} \rho\left(\vec{F} - \frac{d\vec{v}}{dt}\right)dV + \oint_{\Sigma_1} \vec{p}\, d\Sigma + \int_{\Sigma_0} \vec{t}_n\, d\Sigma = 0$ (11)

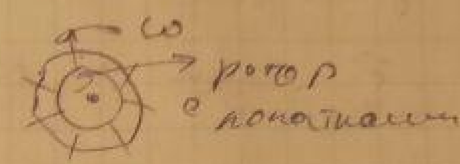
Массов. внешн. силы V:

- Сила тяжести (сила грав.)
- Электромагн. силы



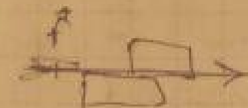
Массовые внутр. силы V:

- Сила инерции



Поверхностн. внешн. силы V

- Сила трения



Поверхност. внутр. силы V:

Новая формулировка з-на измен. кол-ва движ.

Рассмотр $\frac{d}{dt}\int\limits_{V(t)} \underbrace{\rho\vec{v}}_{\vec{a}}\, dV = \int\limits_V \left(\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + \nabla\cdot(\vec{v}\otimes\vec{a})\right) dV \ominus$

интеграл по подвижному объему

$$\ominus \int\limits_V \left(\frac{\partial \rho\vec{v}}{\partial t} + \nabla\cdot(\vec{v}\otimes\rho\vec{v})\right) dV = \int\limits_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\vec{v} + \rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\nabla\cdot\rho\vec{v})\vec{v} +$$

$$+\nabla\otimes\vec{v}\cdot\rho\vec{v}\,) dV = \left\{ \text{т.к. } \underbrace{\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\rho\vec{v}\right)}_{\text{дифф. ур-ие нерazр. в перем. Эйлера.}}\vec{v} = 0\cdot\vec{v} = 0 \right\} =$$

$$= \int\limits_V \rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\otimes\vec{v}\right) dV = \int\limits_V \rho\frac{d\vec{v}}{dt}\, dV \qquad (7)$$

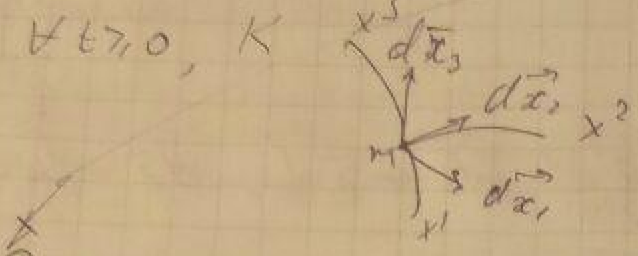
Тогда (6) $\rightarrow \int\limits_V \rho\frac{d\vec{v}}{dt}\, dV - \int\limits_V \rho\vec{F}\, dV - \int\limits_\Sigma \vec{\varsigma}\, d\Sigma = 0 \quad (8)$

7. Теорема Коши

Рассмотрим $\forall M \in V$, введем $\vec{r}_\alpha = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^\alpha}$, $\alpha = 1,2,3$

$d\vec{x}_\alpha = \vec{r}_\alpha\, dx^\alpha$ – элем.

$\forall t \geq 0$, K



Радиус-векторы, ориент. по x^α

Обозначим $d\Sigma_\alpha$ – коорд. площадки, образующ. $d\vec{x}_\beta$ и $d\vec{x}_\gamma$, α, β, γ – цикл., $\vec{n}$ – вектор ед. норм к $d\Sigma_0$ – наклонн. площ.

Вектор нормали к $d\Sigma_\alpha$ как вектор произв. $d\vec{x}_\beta \times d\vec{x}_\gamma = \vec{r}_\beta \times \vec{r}_\gamma\, dx^\beta dx^\gamma = \sqrt{g}\, \vec{r}^\alpha dx^\beta dx^\gamma$

Ед. нормаль к $d\Sigma_\alpha$ $\left(-\frac{\vec{r}^\alpha}{|\vec{r}^\alpha|}\right)$ – внешн. норм. к ∂V. Площади граней $d\Sigma_0$, $d\Sigma_\alpha$ связаны соотнош.

$$\vec{n}\, d\Sigma_0 + \sum_{\alpha=1}^{3} \left(-\frac{\vec{r}^\alpha}{|\vec{r}^\alpha|}\right) d\Sigma_\alpha = 0 \qquad (15)$$

докажем

(16) следует из:

$$\oint_\Sigma \vec{n}\, d\Sigma = \int_\Sigma \vec{n}\, E\, d\Sigma = \left\{ \begin{matrix} \text{по ф-ле} \\ \text{Гаусса-Остр.} \end{matrix} \right\} = \int_V \nabla \cdot E\, dV = 0 \qquad (16)$$

(16) ⇒ (15)

Преобразуем (15): домножим скалярно на $\vec{r}_\beta$

$$\vec{n} \cdot \vec{r}_\beta\, d\Sigma_0 = \sum_{\alpha=1}^{3} \vec{r}_\beta \cdot \frac{\vec{r}^\alpha}{|\vec{r}^\alpha|}\, d\Sigma_\alpha = \frac{d\Sigma_\beta}{|\vec{r}^\beta|} \qquad (17)$$

$$\vec{t}_n = \frac{d\vec{\mathcal{F}}}{d\Sigma} = \vec{S}$$

$$\vec{t}_n = \frac{d\vec{\mathcal{F}}_2}{d\Sigma} = \vec{S}_2$$

- $$\int\limits_{V_2} \rho\left(\vec{F} - \frac{d\vec{v}}{dt}\right) dV + \int\limits_{\Sigma_2} \vec{S}\, d\Sigma + \int\limits_{\Sigma'_0} t_{-n}\, d\Sigma = 0 \quad (12)$$

Вычтем (10) − (11) − (12):

$$\boxed{\int\limits_{\Sigma_0} (\vec{t}_n + \vec{t}_{-n})\, d\Sigma = 0} \qquad (13)$$

В силу произвольности Σ'_0:

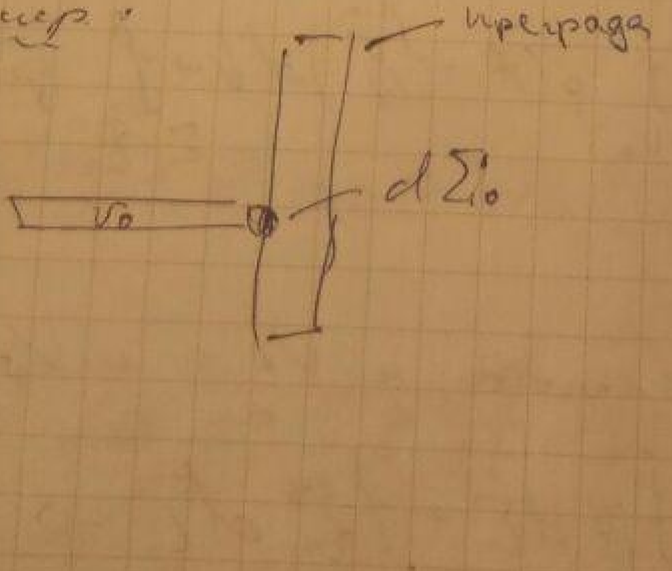
$$(13) \Leftrightarrow \boxed{\vec{t}_n = -\vec{t}_{-n}} \qquad (14)$$

<u>Теорема №1 Коши</u> (о непр-ти вектора напряжений)

Для одной и той же точки M, явл-ся внутр. точкой обл. V, вектор напряжений $\vec{t}_n$, определенный по отнош. к ориент. площад. $\vec{n}\,d\Sigma_0$ и $(-\vec{n}\,d\Sigma'_0)$, различается только знаком, т.е. (14)

<u>Замеч.</u> Ур-е (14) справедливо только если Σ – не явл. пов-тью разрыва. Не вып. для пов-ти разрыва

<u>Пример</u>:

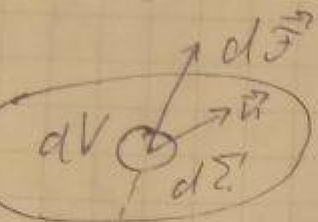


Получаем

$$\boxed{\vec{t}_n = \sum_{\alpha=1}^{3} \vec{n}\cdot\vec{r}_\alpha\,|\vec{r}^{\alpha}|\,\vec{t}_{\alpha}} \quad (21) \qquad \bar{t}_{\alpha} = -\bar{t}_{\alpha}$$

Теорема № 2 Коши

Вектор напряжений $\vec{t}_n$ на произв. площадке с нормалью $\vec{n}$ выражается через вектора напряжений $\vec{t}_\alpha$ на 3-х коорд. площадках с помощью ф-лы (21)



$$\boxed{\vec{t}_n = \frac{d\vec{F}}{d\Sigma}}$$

Введем $|\vec{r}^{\alpha}| = \sqrt{\vec{r}^{\alpha}\cdot\vec{r}^{\alpha}} = \sqrt{g^{\alpha\alpha}}$

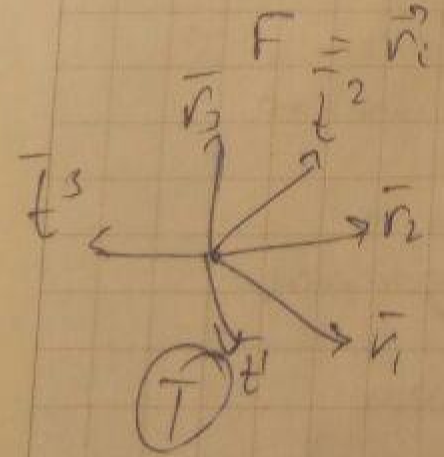
$\vec{t}^{\alpha} = \vec{t}_\alpha\,|\vec{r}^{\alpha}| = \vec{t}_\alpha\sqrt{g^{\alpha\alpha}}$ — вектор истинных напряжен (22)

Тогда $\sum_{\alpha=1}^{3} \vec{n}\cdot\vec{r}_\alpha\,|\vec{r}^{\alpha}|\,\vec{t}_\alpha = \vec{n}\cdot\sum_{\alpha=1}^{3}\vec{r}_\alpha\otimes\vec{t}^{\alpha}$

Введем $T = \sum_{\alpha=1}^{3}\vec{r}_\alpha\otimes\vec{t}^{\alpha} = \vec{r}_i\otimes\vec{t}^{i} = [\underbrace{\vec{r}_i}_{\text{лев}}, \underbrace{\vec{t}^{i}}_{\text{прав}}]$ (23)

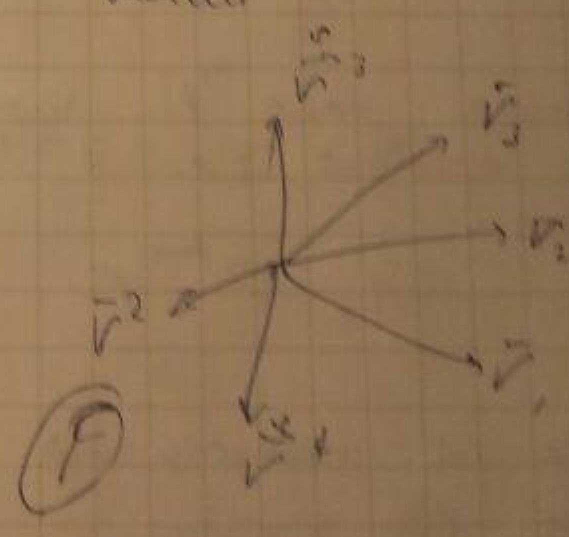
Тензор истинных напряжений Коши

$F = \vec{r}_i\otimes\overset{\circ}{\vec{r}}{}^{i} = [\vec{r}_i ; \overset{\circ}{\vec{r}}{}^{i}]$



C, A, J, Λ

T, F



Отсюда $d\Sigma_\beta = d\Sigma_0 \, \vec{\nu} \cdot \vec{r}_\beta |\vec{r}^\beta|$ (18)

Применим к тетраэдру dV ур-е (9), тогда

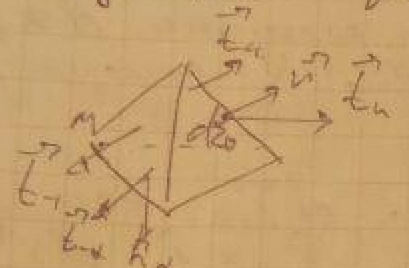
$$\int_V \rho\left(\vec{F} - \frac{d\vec{v}}{dt}\right)dV + \int_\Sigma \vec{p} \cdot d\Sigma = 0$$

$V \to dV$

$\Sigma \to d\Sigma_\alpha + d\Sigma_0$

$\int_{dV} \varphi \to \varphi \qquad \int\left(\vec{F} - \frac{d\vec{v}}{dt}\right)dV + \sum \vec{t}_{-\alpha} \cdot d\Sigma_\alpha + \vec{t}_n \, d\Sigma_0 = 0,$ (19)

где $\vec{t}_{-\alpha}$ - векторы напряжений на $d\Sigma_\alpha$



Поделим (19) на $d\Sigma_0$, тогда

$$\vec{t}_n + \sum_{\alpha=1}^{3} \vec{t}_{-\alpha} \frac{d\Sigma_\alpha}{d\Sigma_0} = -\rho\left(\vec{F} - \frac{d\vec{v}}{dt}\right)\frac{dV}{d\Sigma_0} \qquad (20)$$

Стянем dV к точке

Введем $h = \operatorname{diam}(dV)$

Тогда $d\Sigma_0 = O(h^2)$, $h \to 0$

$d\Sigma_\alpha = O(h^2)$,

$dV = O(h^3)$

Отсюда при $h \to 0$: $\frac{dV}{d\Sigma_0} = O(h)$,

слева (20): $O(1)$

Физический смысл компонент тензора напряжений Коши

К пол. $\vec{r}_i \longrightarrow \hat{r}_i \longrightarrow \hat{r}_i$

физич. базис

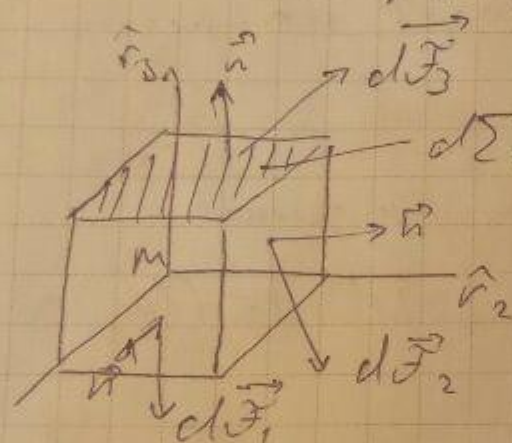
$$T = T^{ij}\hat{r}_i \otimes \hat{r}_j \qquad (1)$$

Очевидно, что $\hat{T}^{ij}$ совпадает с T^{ij}

т. $M \in V$, $dV \in V$, $M \in dV$

dV имеет форму куба

dV



$d\Sigma_\alpha$ – площадь грани куба, ортогон. к $\hat{r}_\alpha$, $\alpha = 1,2,3$

На кажд. грань $d\Sigma_\alpha$ действ. поверхн. сила $d\vec{F}_\alpha$

$$\frac{d\vec{F}_\alpha}{d\Sigma_\alpha} = \vec{t}_n = \vec{n}\cdot T \qquad (2)$$

$$d\vec{F}_\alpha = dF^i_\alpha \hat{r}_i, \qquad \vec{n} = \hat{n}^i r_i \qquad (3)$$

(1), (3) $\longrightarrow$ (2)

$$\frac{dF^i_\alpha}{d\Sigma_\alpha} = \hat{n}_j \hat{T}^{ji} = \hat{T}^{\alpha i}, \qquad \alpha = 1,2,3 \qquad (4)$$

$d\Sigma_\alpha$: $\hat{n}_\alpha = 1$, $\hat{n}_\beta = \hat{n}_\gamma = 0$,

$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$, т.е. $\hat{n}_j = \delta^\alpha_j$

Из (4) на $d\Sigma_\alpha$

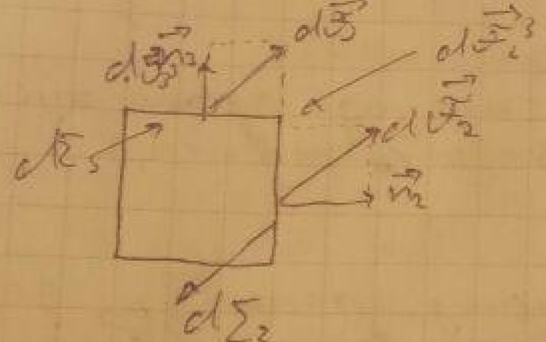
(З) $\hat{T}^{\alpha\alpha} = \frac{d\vec{F}^\alpha_\alpha}{d\Sigma_\alpha}$ - норм. напряж.

(В) $\hat{T}^{\alpha\beta} = \frac{d\vec{F}^\beta_\alpha}{d\Sigma_\alpha}$ - касат. напряж. $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ (5)

(В) $\hat{T}^{\alpha\gamma} = \frac{d\vec{F}^\gamma_\alpha}{d\Sigma_\alpha}$ - касат. напр.

В ф-ле (5) - 9 соотнош.

Схема действия парных касат. напряж.:



Единица измерения:

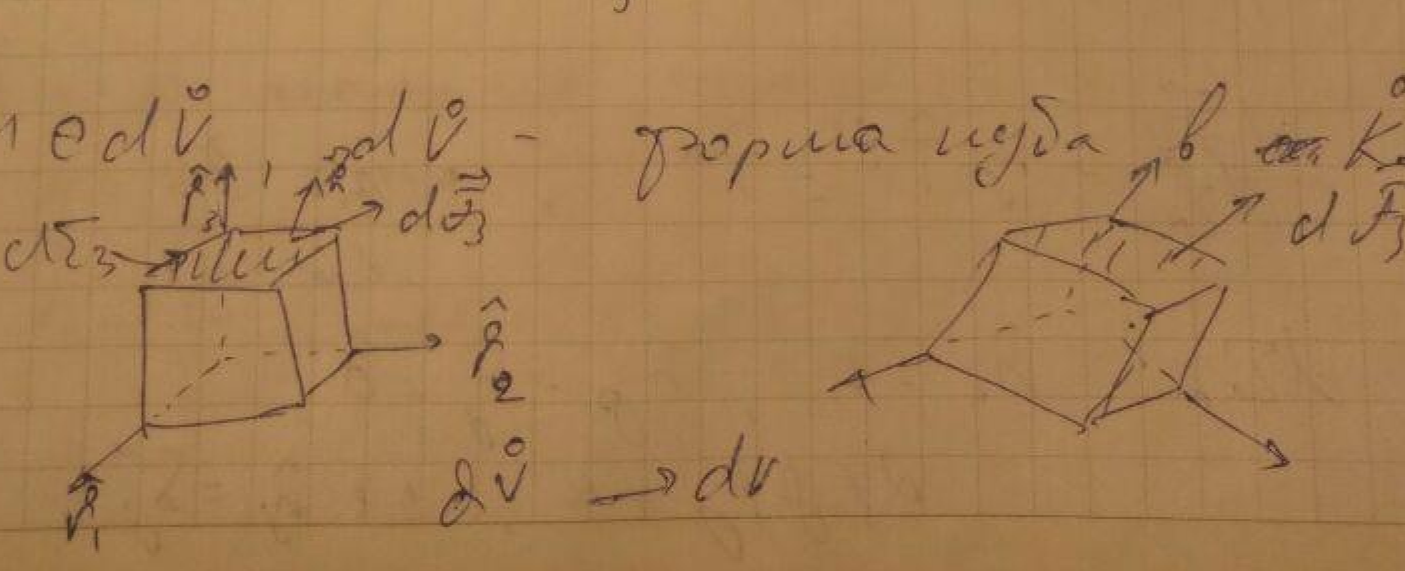
$[T^{\alpha\beta}] = [T^{\beta\alpha}] = Па$

Физическ. смысл компонент тензора Пиолы - Кирхгофа

$\hat{\mathring{r}}_i$ - ортогон. базис в $\mathring{K}$

$$P = \hat{P}^{ij}\, \hat{\mathring{r}}_i \otimes \hat{\mathring{r}}_j \quad (6)$$

$м\ell\, d\mathring{V}$, $d\mathring{V}$ - форма куба в $\mathring{K}$



$d\mathring{V} \to dV$

С учетом (23) теорема (21) м.б. записана так:

$$\boxed{\vec{t}_n = \vec{n} \cdot T} \qquad (24)$$

$$\vec{t}_n = \frac{d\vec{F}}{d\Sigma}$$

T – не зависит от $\vec{n}$, а только от $\vec{x}$.

$\exists T(\vec{x})$

8. Обобщ. теорема Коши.

Пусть $\exists$ • непр. дифф. тенз. поле $A(x,t)$, в обл. V, $\forall t \geq 0$

• непр. дифф. тенз. поле ${}^mC(x,t)$ в обл. V $\forall t \geq 0$

• непр. дифф. тензорное поле ${}^mB_n(x,t)$ в обл. $V \cup \Sigma$ $\forall t \geq 0$ и зависит от выбора вектора нормали $\vec{n}$ к Σ, кот. удовл.:

$$\frac{d}{dt}\int_{\hat{V}} \rho\, {}^mA\, dV = \int_{\hat{V}} \rho\, {}^mC\, dV + \int_{\hat{\Sigma}} {}^mB_n\, d\Sigma \qquad \forall \hat{V} \subset V \quad (25)$$

ур-е баланса

Тогда поле ${}^mB_n$ может зависеть от вектора $\vec{n}$ только линейно, т.е. $\exists\, {}^{m+1}B$: $\forall V \cup \Sigma$ имеет место соотнош.-

$${}^mB_n = \vec{n} \cdot {}^{m+1}B \qquad (26)$$ — Ур-е сохранен.

Док-ся аналогично теореме Коши

$A = \vec{v}$

$C = \vec{f}$

$B_n = \vec{t}_n$, $m = 1$ $\Rightarrow {}^2B = T$

$\vec{t}_n = \vec{n} \cdot T$

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v}\, dV = \int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt}\, dV$$

Тогда соотнош. (11):

$$\int_V \rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{F}\right) dV + \int_\Sigma \vec{n} \cdot T\, d\Sigma = 0$$

Применим ф-лу О-Г:

$$\int_V \left(\rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{F} - \nabla \cdot T\right) dV = 0$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{F} - \nabla \cdot T = 0$$

Теорема. Если ф-ии $\vec{F}$, $\vec{v}$, T и $\vec{F}$ удовл. уравн. кол-ва движ. (11) и завис. от x^i, t, явл-ся непр. дифф. в $V(t)$ $\forall t \geq 0$, то в каждой точке $M \in V(t)$ имеет место ур-ие дв-я в Эйлеровом описан. (К)

$$\boxed{\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla T + \rho \vec{F}} \qquad (12)$$

- Дивергентная ф-ла УД:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\, \nabla \otimes \vec{v}$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \rho \vec{v}\, \nabla \otimes \vec{v} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \vec{v}\right) \vec{v} =$$

$$= \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \rho \vec{F} + \nabla T$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla (\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \rho \vec{F} + \nabla \cdot T}$$

$d\overset{\circ}{V}$ и $dV \longrightarrow T(x)$, $P(\overset{\circ}{x})$

$x \in dV$, $\overset{\circ}{x} \in d\overset{\circ}{V}$

$d\Sigma_\alpha \longrightarrow d\vec{F}_\alpha$

Соотнош. на грани $d\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha$:

$$\frac{d\vec{F}_\alpha}{d\Sigma_\alpha}\left(\frac{d\Sigma_\alpha}{d\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha}\right) = \vec{t}_n\left(\frac{d\Sigma_\alpha}{d\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha}\right) = \overset{\circ}{n} P \qquad (7)$$

$$d\vec{F}_\alpha = d\overset{\circ}{F}{}^i_\alpha \hat{v}_i, \quad \overset{\circ}{n} = \hat{\overset{\circ}{n}}{}^i \hat{v}_i \qquad (8)$$

(6), (8) в (7), получаем:

$$\frac{d\overset{\circ}{F}{}^j_\alpha}{d\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha} = \hat{\overset{\circ}{n}}_i \hat{P}^{ij} = \hat{P}^{\alpha j} \quad \alpha = 1,2,3 \qquad (9)$$

$d\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha$: $\hat{\overset{\circ}{n}}_\alpha = 1$, $\hat{\overset{\circ}{n}}_\beta = \hat{\overset{\circ}{n}}_\gamma = 0 \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$

Из (9):

на $d\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha$ получаем:

$$\hat{P}^{\alpha\alpha} = \frac{d\overset{\circ}{F}{}^\alpha_\alpha}{d\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha}, \quad \hat{P}^{\alpha\beta} = \frac{d\overset{\circ}{F}{}^\beta_\alpha}{d\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha}, \quad \hat{P}^{\alpha\gamma} = \frac{d\overset{\circ}{F}{}^\gamma_\alpha}{d\overset{\circ}{\Sigma}_\alpha}, \qquad (10)$$

$$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$$

$d\vec{F}_\alpha$ – действ. на деформ. площ. $d\Sigma_\alpha$

Уравнение движения

Рассматр. интегр. ф-у закона изм. кол-ва движ.:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\vec{v}\, dV = \int_V \rho\vec{F}\, dV + \int_\Sigma \vec{t}_n\, d\Sigma \qquad (11)$$

• Интегральн. ф-ла закона изм. кол-ва движ. в матер. (Лагранж.) описании:

$$\int_{\mathring{V}} \mathring{\rho}\left(\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{f}\right) d\mathring{V} - \oint_{\mathring{\Sigma}} \mathring{n} P \, d\mathring{\Sigma} = 0$$

$$\int_{\mathring{V}} \left(\mathring{\rho}\left(\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{f}\right) - \mathring{\nabla} \cdot P\right) d\mathring{V} = 0$$

• Дифференц. ф-ла ЗИКД в мат. (Лагр.) опис.:

$$\frac{\partial \mathring{\rho}\vec{v}}{\partial t} = \mathring{\nabla} P + \mathring{\rho} \vec{f} \qquad \text{в} \mathring{k}$$