МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Домашнее задание №3 по основам сеточных методов

3 курс, группа ФН11-63Б
Вариант 3

Преподаватель
______________ В. А. Кутыркин
«___» ________ 2020 г.

Москва, 2020 г.

Задание 1

Задание.

Используя метод Рунге-Кутты порядка $m = 4$, четырёхшаговый метод Адамса-Башфорта и метод прогноза-коррекции (с четвёртым порядком точности) найти численные решения задачи Коши (шаг сетки $h = 0.05$):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{2N+3}{N+(n-60)+1} \sin\left(\frac{2N+3}{(N+n-60)\cdot t} x\right), \quad t \in [0.5; 2.5] \\ x(0.5) = \frac{N}{4} \end{cases}$$

Графически проиллюстрировать сравнение приближённых решений. Используя практическое правило Рунге, оценить погрешность приближённого решения по методу Рунге-Кутты порядка $m = 4$.

Решение.

Подставим значения $n = 63, N = 3$ в систему:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x\left(t\right) = \frac{9}{7} \sin\left(3/2\, \frac{x\left(t\right)}{t}\right)$$

$$x(0.5) = \frac{3}{4}$$

1 Метод Рунге-Кутты порядка $m = 4$

Равномерную сетку задаём $\frac{b-a}{h} + 1 = \frac{2.5-0.5}{0.05} + 1 = 41$ узлами. При $m = 4$ используется рабочая формула вида:

$$\begin{cases} x_0(t+h) = x_0(t) + \frac{h}{6}\left(\omega_1 + 2\omega_2 + 2\omega_3 + \omega_4\right) + O\left(h^5\right) \\ \omega_1 = \omega_1\left(t, x_0(t), h\right) = f\left(t, x_0(t)\right) \\ \omega_2 = \omega_2\left(t, x_0(t), h\right) = f\left(t + \frac{1}{2}h, x_0(t) + \frac{1}{2}h\omega_1\right) \\ \omega_3 = \omega_3\left(t, x_0(t), h\right) = f\left(t + \frac{1}{2}h, x_0(t) + \frac{1}{2}h\omega_2\right) \\ \omega_3 = \omega_3\left(t, x_0(t), h\right) = f\left(t + h, x_0(t) + h\omega_3\right) \end{cases}$$

Тогда

$^>x^0 = [3/4, 0.8075773070, 0.8658126486, 0.9245493314, 0.9836782141, 1.043120710, 1.102818639, 1.162727898, 1.222814372, 1.283051205, 1.343416927, 1.403894142, 1.464468582, 1.525128421, 1.585863759, 1.646666238, 1.707528745, 1.768445184, 1.829410293, 1.890419506, 1.951468836, 2.012554786, 2.073674272, 2.134824563, 2.196003230, 2.257208106, 2.318437249, 2.379688912, 2.440961521, 2.502253652, 2.563564014, 2.624891431, 2.686234831, 2.747593236, 2.808965748, 2.870351544, 2.931749865, 2.993160014, 3.054581345, 3.116013262, 3.177455211]$

Четырёхшаговый метод Адамса-Башфорта

Первые четыре значения $^>x^1$ найдены методом Рунге-Кутты порядка $m = 4$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{24}\left(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}\right),$$

где $f_i = f(t_i, x_i)$
Тогда

$^>x^1 = [3/4, 0.8075773070, 0.8658126486, 0.9245493314, 0.9836861018, 1.043132300, 1.102832799, 1.162743180, 1.222830266, 1.283067324, 1.343433075, 1.403910189, 1.464484454, 1.525144073, 1.585879167, 1.646681390, 1.707543637, 1.768459816, 1.829424670, 1.890433634, 1.951482723, 2.012568439, 2.073687700, 2.134837774, 2.196016232, 2.257220907, 2.318449856, 2.379701333, 2.440973764, 2.502265723, 2.563575919, 2.624903176, 2.686246422, 2.747604678, 2.808977047, 2.870362704, 2.931760892, 2.993170911, 3.054592117, 3.116023912, 3.177465744]$

Метод прогноза-коррекции (с четвёртым порядком точности)

Прогноз:

$$\begin{aligned}
&x_{n+1}^{(0)} = x_n + \frac{h}{24}\left(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}\right)\\
&f_{n+1}^{(0)} = f\left(t_{n+1}, x_{n+1}^{(0)}\right)
\end{aligned}$$

Коррекция:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{24}\left(9f_{n+1}^{(0)} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}\right),$$

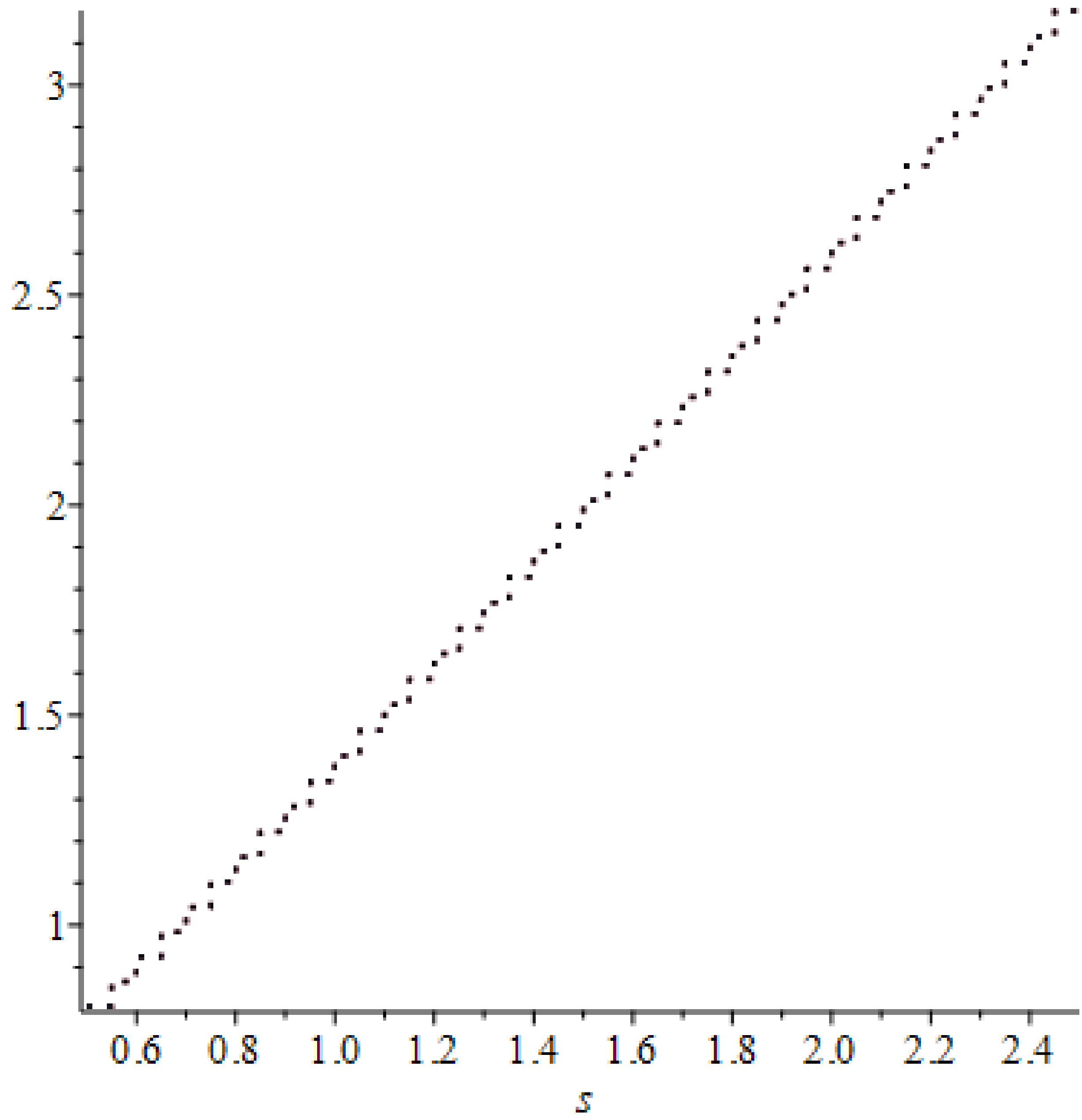
где $f_i = f(t_i, x_i)$

Тогда

$^{>}x2 = [3/4, 0.8075773070, 0.8658126486, 0.9245493314, 0.9836776811, 1.043119894, 1.102817667, 1.162726842, 1.222813274, 1.283050089, 1.343415809, 1.403893030, 1.464467482, 1.525127336, 1.585862691, 1.646665188, 1.707527713, 1.768444169, 1.829409296, 1.890418526, 1.951467873, 2.012553839, 2.073673340, 2.134823646, 2.196002328, 2.257207218, 2.318436374, 2.379688050, 2.440960672, 2.502252815, 2.563563188, 2.624890616, 2.686234027, 2.747592442, 2.808964964, 2.870350769, 2.931749100, 2.993159258, 3.054580598, 3.116012523, 3.177454480]$

Сравнение решений

Построим совмещённые графики:



Можем заметить, что графики совпали.

Оценим погрешность приближенного решения по методу Рунге-Кутты порядка $m = 4$, используя практическое правило Рунге. Способ практической оценки абсолютной погрешности метода Рунге-Кутта порядка m состоит в следующем:

1. находят при фиксированном (доастаточно большом) $k \in \mathbb{N}$ приближенное табличное решение $^{>}\underline{\mathbf{u}}_{(k)} = [u_0, u_1, \ldots, u_k >$ на сетке

$A_k = \langle a = \tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k = b\rangle$ отрезка $[a;b]$;

2. находят приближенное табличное решение $^{>}\underline{\mathbf{u}}^{*}_{(k)} = [u^*_0, u^*_1, \dots, u^*_k\rangle$ на сетке $\left\langle a = \tau_0, \frac{\tau_0+\tau_1}{2}, \tau_1, \frac{\tau_1+\tau_2}{2}, \tau_2, \dots, \frac{\tau_{k-1}+\tau_k}{2}, \tau_k = b\right\rangle$ и, затем, составляют вектор
$^{>}\underset{\sim(k)}{\mathbf{u}^*} = [u^*_0, u^*_1, \dots, u^*_k\rangle$;
3. величину $\varepsilon = \frac{1}{2^m-1}||^{>}\underset{\sim(k)}{\mathbf{u}} -^{>} \underline{\mathbf{u}}_{(k)}||$ считают практичекой погрешностью метода.

Имеем:

$$||^{>}\underset{\sim(41)}{\mathbf{u}} -^{>} \underline{\mathbf{u}}_{(41)}||= 0.06197620007$$

Вывод.

Таким образом, можем сделать вывод, что методы Рунге-Кутты порядка $m = 4$, четырёхшаговый метод Адамса-Башфорта и метод прогноза-коррекции (с четвёртым порядком точности) могут успешно применяться для численного решения задачи Коши для нормальных ОДУ.