Proposition 1: Доказать, что $\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} \varphi\left(s, t_k'\right) K_\xi\left(t, t_k'\right) \Delta t_k - R_{\xi\zeta}(t,s)\right| \to 0$

Proof: $\square$

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(s, t_k'\right) K_\xi\left(t, t_k'\right) \Delta t_k - R_{\xi\zeta}(t,s)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(s, t_k')(\mathrm{M}\,\xi_t\xi_{t_k'} - \mathrm{M}\,\xi_t\,\mathrm{M}\,\xi_{t_k'})\Delta t_k - \mathrm{M}\,\xi_t\zeta_s + \mathrm{M}\,\xi_t\,\mathrm{M}\,\zeta_s\right| \leq$$
$$\leq \left|\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(s, t_k')\,\mathrm{M}\,\xi_t\xi_{t_k'}\Delta t_k - \mathrm{M}\,\xi_t\zeta_s\right| + \left|\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(s, t_k')\,\mathrm{M}\,\xi\,\mathrm{M}\,\xi_{t_k'}\Delta t_k - \mathrm{M}\,\xi_t\,\mathrm{M}\,\zeta_s\right|$$

Докажем, что данное выражение стремится к нулю. Для этого рассмотрим каждое слагаемое по отдельности. Для первого слагаемого имеем:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(s, t_k')\,\mathrm{M}\,\xi_t\xi_{t_k'}\Delta t_k - \mathrm{M}\,\xi_t\zeta_s\right| = \left|\mathrm{M}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(s, t_k')\xi_t\xi_{t_k'}\Delta t_k - \xi_t\zeta_s\right)\right| =$$
$$= \left|\mathrm{M}\left[\xi_t\left(\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(s, t_k')\xi_{t_k'}\Delta t_n - \zeta_s\right)\right]\right| \leq \mathrm{M}\left|\xi_t\left(\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(s, t_k')\xi_{t_k}'\Delta t_k - \zeta_s\right)\right| \leq$$
$$\leq \sqrt{\mathrm{M}\,\xi_t^2} \cdot \sqrt{\mathrm{M}\left|\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(s, t_k')\xi_{t_k'}\Delta t_k - \zeta_s\right|^2} \longrightarrow 0$$

Для второго слагаемого:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(s, t_k')\,\mathrm{M}\,\xi_t\,\mathrm{M}\,\xi_{t_k'}\Delta t_k - \mathrm{M}\,\xi_t\,\mathrm{M}\,\zeta_s\right| = \left|\mathrm{M}\,\xi_\mathrm{t}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(s, t_k')\,\mathrm{M}\,\xi_{t_k'}\Delta t_k - \mathrm{M}\,\zeta_s\right)\right| \leq$$
$$\leq |\mathrm{M}\xi_\mathrm{t}| \cdot \left|\mathrm{M}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(s, t_k')\xi_{t_k'}\Delta t_k - \zeta_s\right| \leq |\mathrm{M}\xi_\mathrm{t}| \cdot \mathrm{M}\sqrt{\left|\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(s, t_k')\xi_{t_k'}\Delta t_k - \zeta_s\right|^2} \longrightarrow 0$$

Таким образом:

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(s, t_k'\right) K_\xi\left(t, t_k'\right) \Delta t_k - R_{\xi\zeta}(t,s)\right| =$$
$$= \left|\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(s, t_k')\,\mathrm{M}\,\xi_t\xi_{t_k'}\Delta t_k - \mathrm{M}\,\xi_t\zeta_s\right| + \left|\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(s, t_k')\,\mathrm{M}\,\xi\,\mathrm{M}\,\xi_{t_k'}\Delta t_k - \mathrm{M}\,\xi_t\,\mathrm{M}\,\zeta_s\right| \longrightarrow 0 + 0 = 0$$