

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН

Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Домашнее задания №2  
по теории случайных процессов

3 курс, группа ФН11-63Б

Вариант 19

Преподаватель

\_\_\_\_\_ Т. В. Облакова

«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2020 г.

Москва, 2020 г.

## Задание 3

Процесс изменения состояний системы  $S$ -однородный марковский процесс, заданный размеченным графом. Запишите систему уравнений Колмогорова для вероятностей состояний системы и найдите их предельные значения, если начальные условия имеют вид:  $p_2(0) = 1$ .

**Решение.**

Размеченный граф состояний системы  $S$ , процесс изменения состояния которой представляет собой однородный марковский процесс с дискретными состояниями изображён на рис. 1.

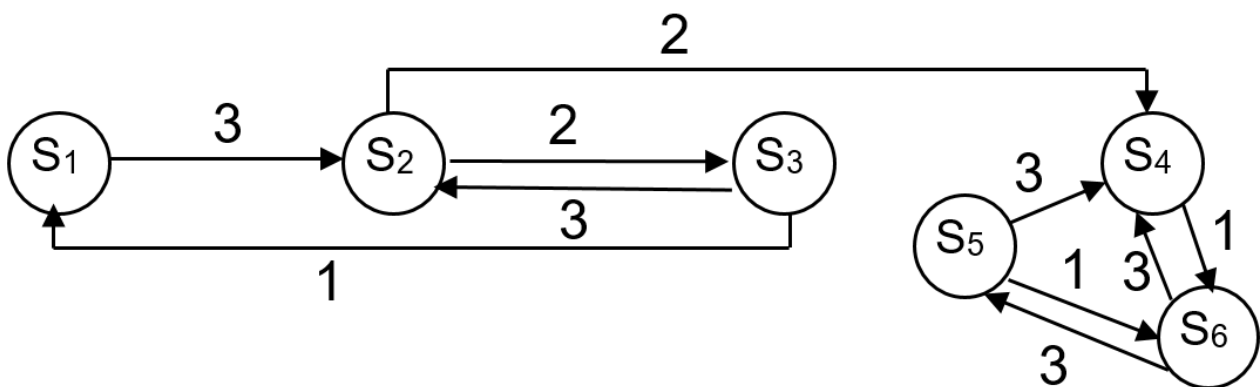


Рис. 1: Размеченный граф состояний системы  $S$

Сформулируем задачу Коши для системы уравнений Колмогорова (1), если  $T = [0, \infty)$  и в начальный момент времени  $t = 0$  система находится в состоянии (2)

$$\begin{cases} p(t)' = \lambda(t)p(t), & t > 0; \\ p(0) = p_0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\lambda(t) = \lambda$ , так как рассматривается однородный марковский процесс, а сама матрица  $\lambda$  вводится как указано далее. Пусть

$$I = (1 \dots 1) \in M_{1n}(\mathbb{R});$$

$$\lambda_k^0 = (\lambda_{k1} \dots \lambda_{k,k-1} \ 0 \ \lambda_{k,k+1} \dots \lambda_{kn})^T,$$

где  $\lambda_{ki}$  для  $i = \{1, n\} \setminus \{k\}$  – плотности вероятностей переходов системы  $S$  из состояния  $S_k$  во все иные возможные состояния, а

$$\lambda_{kk} = -I\lambda_k^0 = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_{ki} -$$

суммарная плотность вероятности перехода системы и состояния  $s_k$  взятая со знаком "минус".

$$p(0) = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T \quad (2)$$

Согласно заданному размеченному графу состояний, имеем

$$\lambda(t) = \lambda = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Таким образом, вектор  $p(t)$  вероятностей состояний изучаемой системы  $S$  является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} p_1(t)' = -3p_1(t) + p_3(t); \\ p_2(t)' = 3p_1(t) - 4p_2(t) + 3p_3(t); \\ p_3(t)' = 2p_2(t) - 4p_3(t); \\ p_4(t)' = 2p_2(t) - p_4(t) + 3p_5(t) + 3p_6(t); \\ p_5(t)' = -4p_5(t) + 3p_6(t); \\ p_6(t)' = p_4(t) + p_5(t) - 6p_6(t); \\ p_2(0) = 1; \\ p_k(0) = 0, \quad k = \{1, 3, 4, 5, 6\}. \end{cases}$$

Перепишем систему в изображениях:

$$\begin{cases} s\tilde{p}_1(s) - p_1(0) = -\tilde{p}_1(s) + \tilde{p}_3(s); \\ s\tilde{p}_2(s) - p_2(0) = 3\tilde{p}_1(s) - 4\tilde{p}_2(s) + 3\tilde{p}_3(s); \\ s\tilde{p}_3(s) - p_3(0) = 2\tilde{p}_2(s) - 4\tilde{p}_3(s); \\ s\tilde{p}_4(s) - p_4(0) = 2\tilde{p}_2(s) - 4\tilde{p}_4(s) + 3\tilde{p}_5(s) + 3\tilde{p}_6(s); \\ s\tilde{p}_5(s) - p_5(0) = -4\tilde{p}_5(s) + 3\tilde{p}_6(s); \\ s\tilde{p}_6(s) - p_6(0) = \tilde{p}_4(s) + \tilde{p}_5(s) - 6\tilde{p}_6(s); \\ \tilde{p}_1(s) + \tilde{p}_2(s) + \tilde{p}_3(s) + \tilde{p}_4(s) + \tilde{p}_5(s) + \tilde{p}_6(s) = \frac{1}{s}. \end{cases}$$

Подставляя (2) получим:

$$\begin{cases} s\tilde{p}_1(s) = -\tilde{p}_1(s) + \tilde{p}_3(s); \\ s\tilde{p}_2(s) - 1 = 3\tilde{p}_1(s) - 4\tilde{p}_2(s) + 3\tilde{p}_3(s); \\ s\tilde{p}_3(s) = 2\tilde{p}_2(s) - 4\tilde{p}_3(s); \\ s\tilde{p}_4(s) = 2\tilde{p}_2(s) - 4\tilde{p}_4(s) + 3\tilde{p}_5(s) + 3\tilde{p}_6(s); \\ s\tilde{p}_5(s) = -4\tilde{p}_5(s) + 3\tilde{p}_6(s); \\ s\tilde{p}_6(s) = \tilde{p}_4(s) + \tilde{p}_5(s) - 6\tilde{p}_6(s); \\ \tilde{p}_1(s) + \tilde{p}_2(s) + \tilde{p}_3(s) + \tilde{p}_4(s) + \tilde{p}_5(s) + \tilde{p}_6(s) = \frac{1}{s}. \end{cases}$$

Решая полученную систему, имеем:

$$\begin{cases} \tilde{p}_1(s) = \frac{2}{s^3+9s^2+18s+4}; \\ \tilde{p}_2(s) = \frac{s^2+5s+4}{s^3+9s^2+18s+4}; \\ \tilde{p}_3(s) = \frac{2(s+1)}{s^3+9s^2+18s+4}; \\ \tilde{p}_4(s) = \frac{2(s+3)(s^2+5s+2)}{(s+4)s(s^3+9s^2+18s+4)}; \\ \tilde{p}_5(s) = \frac{6(s^2+5s+2)}{s(s^4+16s^3+81s^2+130s+28)(s+4)}; \\ \tilde{p}_6(s) = \frac{2(s^2+5s+2)}{s(s^4+16s^3+81s^2+130s+28)}; \end{cases}$$

Найдём предельные вероятности:

$$\Pi_k = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_k(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s\tilde{p}_k(s), \quad k = \overline{1, n}.$$

$$\begin{cases} \Pi_1 = 0; \\ \Pi_2 = 0; \\ \Pi_3 = 0; \\ \Pi_4 = \frac{3}{4}; \\ \Pi_5 = \frac{3}{28}; \\ \Pi_6 = \frac{1}{7}. \end{cases}$$

Вектор финальных вероятностей:

$$\Pi = (0 \ 0 \ 0 \ \frac{3}{4} \ \frac{3}{28} \ \frac{1}{7}); \quad \frac{3}{4} + \frac{3}{28} + \frac{1}{7} = \frac{21}{28} + \frac{3}{28} + \frac{4}{28} = 1$$

### Вывод.

Полученный вектор финальных вероятностей соответствует очевидным соображениям о том, что изначальный граф состояний системы  $S$ , изображённый на рис. 1, состоит из двух подсистем:  $S_A = S_1, S_2, S_3$  и  $S_B = S_4, S_5, S_6$ , причём при выходе из подсистемы  $A$  обратно вернуться уже не получится. Поэтому значения  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  равны нулю.

## Задание 4

Требуется найти закон распределения времени пребывания марковского процесса в подмножестве состояний  $U = \{S_2, S_3\}$ , а также найти среднее время пребывания системы в  $U$ .

### Решение.

Закон распределения времени пребывания Марковского процесса в подмножестве состояний  $U = \{S_2, S_3\}$  имеет вид:

$$P_{T_U}(t) = \sum_{k=1}^r \left( \sum_{j=1}^l \lambda_{i_k j} \right) p_{i_k}(t) = 2p_2(t) + p_3(t)$$

Так как подмножество  $U$  не замкнуто, найдём  $p_2(t)$  и  $p_3(t)$ , решив систему:

$$\begin{cases} p_2(t)' = -4p_2(t) + 3p_3(t); \\ p_3(t)' = -4p_3(t) + 2p_2(t). \end{cases}$$

Переходя к изображениям:

$$\begin{cases} \tilde{p}_2(s) - 1 = -4\tilde{p}_2(s) + 3\tilde{p}_3(s); \\ \tilde{p}_3(s) = -4\tilde{p}_3(s) + 2\tilde{p}_2(s); \end{cases}$$

Получаем:

$$\begin{cases} \tilde{p}_2(s) = \frac{s+4}{s^2+8s+10}; \\ \tilde{p}_3(s) = \frac{2}{s^2+8s+10} \end{cases}$$

Возвращаясь к оригиналам:

$$\begin{cases} p_2(t) = e^{-4t} \cosh(t\sqrt{6}); \\ p_3(t) = 1/3 \sqrt{6} e^{-4t} \sinh(t\sqrt{6}). \end{cases}$$

Тогда закон распределения времени пребывания Марковского процесса в подмножестве состояний  $U = \{S_2, S_3\}$  имеет вид:

$$P_{T_U}(t) = 2p_2(t) + p_3(t) = \frac{e^{-4t}(\sqrt{6} \sinh(t\sqrt{6}) + 6 \cosh(t\sqrt{6}))}{3}$$

Найдём среднее время пребывания:

$$M\xi = \int_0^{+\infty} x p_\xi(x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-4x}(\sqrt{3} \sinh(2t\sqrt{3}) + 6 \cosh(2x\sqrt{3}))}{3} dx = \frac{3}{5}$$