МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Домашнее задание №1 по теории случайных процессов

3 курс, группа ФН11-63Б
Вариант 19

Преподаватель
_____________ Т. В. Облакова
«___» _______ 2019 г.

Москва, 2019 г.

Начальные данные

```
> ### Начальные данные:
> m <- 6 # Число состояний марковской цепи
> k <- 5 # время (шаги)
> n <- 180 # траектории
> set.seed(1337)
```

Задание 1

Смоделировать вектор начальных вероятностей $p(\vec{0}) = p(0)$ и матрицу переходных вероятностей P для однородной цепи маркова с данным числом состояний $s_1, s_2, \ldots, s_m$.
Решение.
1. Генерируем $(m + 1)$ раз вектор $\vec{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_{m-1})$ из независимых и равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин.

```
> r_tmp <- replicate((m+1), runif((m-1), min = 0, max = 1),
+         simplify = F)
> r_tmp
[[1]]
[1] 0.57632155 0.56474213 0.07399023 0.45386562 0.37327926

[[2]]
[1] 0.3313175 0.9476300 0.2811173 0.2454040 0.1460436

[[3]]
[1] 0.9794303 0.9937176 0.8273587 0.1939823 0.9813254

[[4]]
[1] 0.02522857 0.97238848 0.92379666 0.33913968 0.24657940

[[5]]
[1] 0.84916377 0.72408821 0.04661798 0.15367816 0.56259417

[[6]]
[1] 0.9814257 0.9317742 0.8986149 0.4697933 0.9950081

[[7]]
[1] 0.8982745 0.1016177 0.7394574 0.2291205 0.7883651
```

2. Для каждого из полученных векторов строим вариационный ряд, то есть

упорядочиваем по возрастанию.

```
> r <- lapply(r_tmp, sort)
> r
[[1]]
[1] 0.07399023 0.37327926 0.45386562 0.56474213 0.57632155

[[2]]
[1] 0.1460436 0.2454040 0.2811173 0.3313175 0.9476300

[[3]]
[1] 0.1939823 0.8273587 0.9794303 0.9813254 0.9937176

[[4]]
[1] 0.02522857 0.24657940 0.33913968 0.92379666 0.97238848

[[5]]
[1] 0.04661798 0.15367816 0.56259417 0.72408821 0.84916377

[[6]]
[1] 0.4697933 0.8986149 0.9317742 0.9814257 0.9950081

[[7]]
[1] 0.1016177 0.2291205 0.7394574 0.7883651 0.8982745
```

3. Находим длины отрезков, на которые вектор $\vec{r}$ разбивает отрезок $[0;1]$ – получаем вектор вероятностей $\vec{p}$.

```
> p_tmp <- lapply(r, diff)
>
> heads <- lapply(r, head, 1)
> tails <- lapply(r, function(x) (1-tail(x,1)))
>
> p <- mapply(append, mapply(append, heads,p_tmp,SIMPLIFY = F),
+             tails, SIMPLIFY = F)
> p
[[1]]
[1] 0.07399023 0.29928903 0.08058636 0.11087650 0.01157942 0.42367845

[[2]]
[1] 0.14604362 0.09936043 0.03571326 0.05020014 0.61631257 0.05236998
```

```
[[3]]
[1] 0.193982297 0.633376436 0.152071561 0.001895136 0.012392162 0.00628241

[[4]]
[1] 0.02522857 0.22135084 0.09256028 0.58465698 0.04859183 0.02761152

[[5]]
[1] 0.04661798 0.10706018 0.40891601 0.16149404 0.12507555 0.15083623

[[6]]
[1] 0.469793260 0.428821684 0.033159286 0.049651461 0.013582420 0.00499190

[[7]]
[1] 0.10161771 0.12750281 0.51033685 0.04890769 0.10990946 0.10172548
```

Проверим, что полученные вектора обладают свойством стохастичности:

```
> mapply(sum, p)
[1] 1 1 1 1 1 1 1
```

Получили, что сумма элементов каждого вектора $\vec{p}$ равна единице.

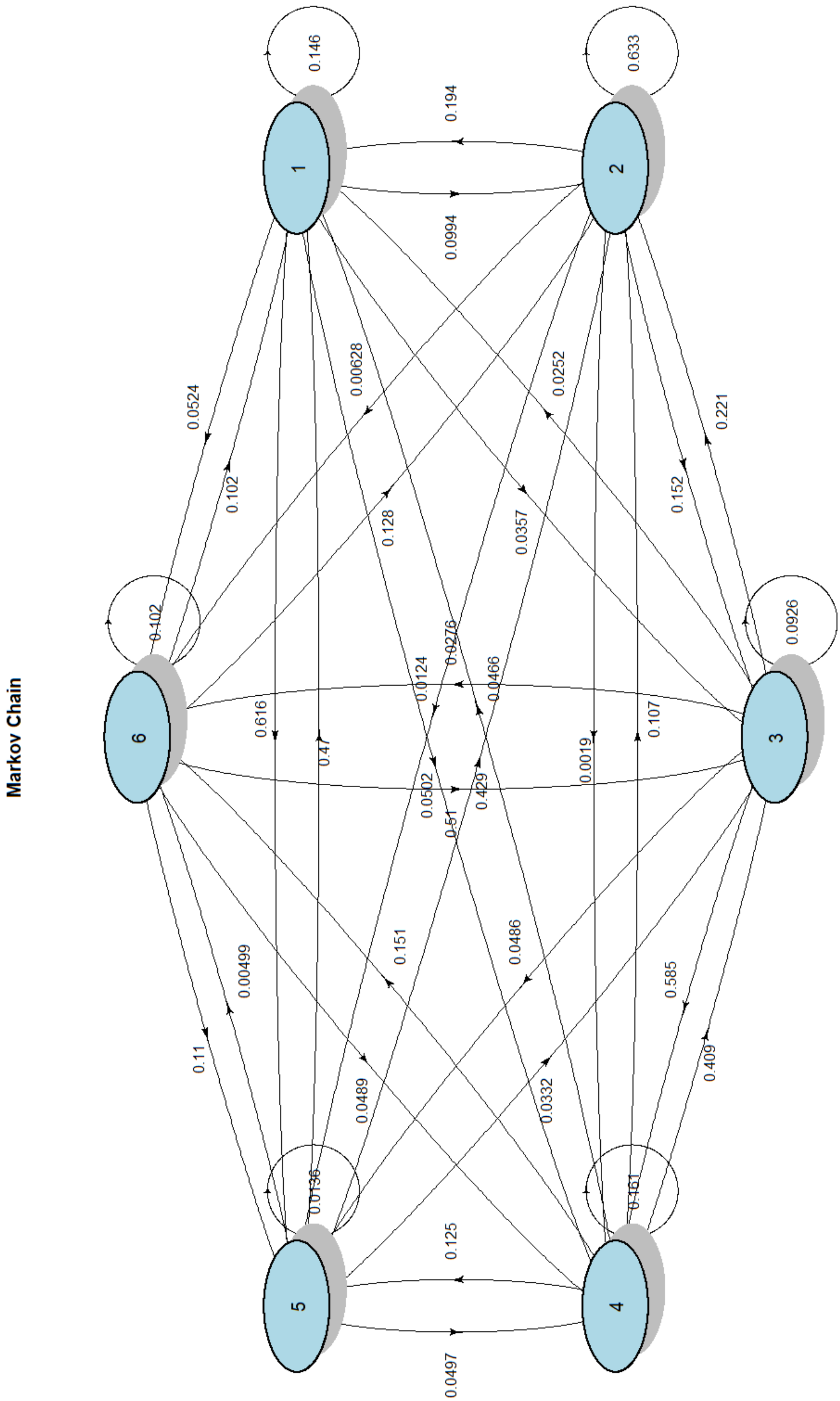
4. Первый из полученных векторов $\vec{p}$ считаем вектором начальных вероятностей, из остальных составляем матрицу переходов P, записывая их по строкам.

```
> p0 <- p[[1]] # вектор начальных условий
> p0
[1] 0.07399023 0.29928903 0.08058636 0.11087650 0.01157942 0.42367845
> P <- t(simplify2array(p))[-1,] # матрица переходов
> P
           [,1]       [,2]       [,3]        [,4]       [,5]        [,6]
[1,] 0.14604362 0.09936043 0.03571326 0.050200143 0.61631257 0.052369977
[2,] 0.19398230 0.63337644 0.15207156 0.001895136 0.01239216 0.006282408
[3,] 0.02522857 0.22135084 0.09256028 0.584656978 0.04859183 0.027611518
[4,] 0.04661798 0.10706018 0.40891601 0.161494042 0.12507555 0.150836234
[5,] 0.46979326 0.42882168 0.03315929 0.049651461 0.01358242 0.004991889
[6,] 0.10161771 0.12750281 0.51033685 0.048907685 0.10990946 0.101725481
```

Задание 2

Построить размеченный граф состояний цепи.
Решение.

```
> library(markovchain)
> library(diagram)
>
> png(filename = "../img/1.png",
+     width = 1920, height = 1080,
+     res = 96 * 1.25)
> plotmat(signif(P,3),
+         lwd = 1, box.lwd = 2,
+         cex.txt = 0.8,
+         box.size = 0.04,
+         box.type = "circle",
+         box.prop = 0.5,
+         box.col = "light blue",
+         arr.length=.25,
+         arr.width=.1,
+         self.cex = .7,
+         self.shifty = -.01,
+         self.shiftx = .07,
+         main = "Markov Chain")
> dev.off()
```


Markov Chain
1
2
3
4
5
6
0.146
0.633
0.194
0.0994
0.0524
0.102
0.00628
0.128
0.0252
0.0357
0.221
0.152
0.102
0.0926
0.616
0.47
0.0124
0.0276
0.0466
0.107
0.0019
0.0502
0.429
0.51
0.00499
0.11
0.151
0.0486
0.585
0.409
0.0489
0.0332
0.0136
0.161
0.125
0.0497

Задание 3.

Вычислить безусловные вероятности состояний смоделированной цепи на k шаге.
Решение.

```
> library(matrixcalc)
> p_k <- p0 %*% matrix.power(P,k)
> p_k
         [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]       [,6]
[1,] 0.170569 0.3514299 0.1596612 0.1356754 0.1402044 0.04246026
```

А также для некоторых других значений k:

```
> p_k2 <- p0 %*% matrix.power(P,2)
> p_k2
          [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]       [,6]
[1,] 0.1461953 0.3307245 0.1527279 0.2160571 0.1160726 0.03822257

> p_k3 <- p0 %*% matrix.power(P,3)
> p_k3
          [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]       [,6]
[1,] 0.1578451 0.3355846 0.1813559 0.1397837 0.1344228 0.05100792

> p_k4 <- p0 %*% matrix.power(P,4)
> p_k4
          [,1]      [,2]      [,3]     [,4]      [,5]       [,6]
[1,] 0.1675757 0.3474905 0.1611048 0.146334 0.1351685 0.04232641

> p_k5 <- p0 %*% matrix.power(P,5)
> p_k5
         [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]       [,6]
[1,] 0.170569 0.3514299 0.1596612 0.1356754 0.1402044 0.04246026

> p_k10 <- p0 %*% matrix.power(P,10)
> p_k10
          [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]       [,6]
[1,] 0.1762364 0.3585034 0.1531416 0.1291872 0.1428944 0.04003696

> p_k100 <- p0 %*% matrix.power(P,100)
> p_k100
          [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]       [,6]
[1,] 0.1765572 0.3589433 0.1527727 0.1287059 0.1431139 0.03990709
```

Задание 4

Смоделировать n траекторий полученной цепи за k шагов и найти вектор относительных частот ее состояний на k шаге.
Решение.

1. Генерируем равномерно распределенную на $[0;1]$ случайную величину r_0 и по вектору $\vec{r_1}$ разыгрываем начальное состояние следующим образом: если $r_0 < r_{1_1}$, то полагаем, что $\xi_0 = s_1 = 1$, если $r_0 < r_{1_2}$, то полагаем, что $\xi_0 = s_2 = 2$, $\dots$, если $r_0 < r_{1_{m-1}}$, то полагаем, что $\xi_0 = s_{m-1} = m-1$, иначе если $r_0 > r_{1_{m-1}}$, то полагаем, что $\xi_0 = s_m = m = j_0$.

```
> r0 <- runif(1, min = 0, max = 1)
> r0
[1] 0.4436541
> foo <- function(r0_loc,j)
+   {
+     ifelse(r0_loc < r[[j+1]][1],1,
+     ifelse(r0_loc < r[[j+1]][2],2,
+     ifelse(r0_loc < r[[j+1]][3],3,
+     ifelse(r0_loc < r[[j+1]][4],4,
+     ifelse(r0_loc < r[[j+1]][5],5,6)))))
+   }
>
>   step_1 <- foo(r0,1)
> step_1
[1] 3
###
> r[[1]]
[1] 0.07399023 0.37327926 0.45386562 0.56474213 0.57632155
```

Разыгранное число $r_0 = 0.4436541$, что меньше, чем 4-эй элемент r_1, но больше, чем 2-эй, то есть $(0.37327926 = r_{1_2}) < 0.4436541 < (0.56474213 = r_{1_4}) \Rightarrow \xi_0 = 3$.

2. Генерируем ещё одно значение r_1 и по строке с номером $j_0 = 3$ аналогично предыдущему пункту разыгрываем значение ξ_1 :

```
> r1 <- runif(1, min = 0, max = 1)
> r1
[1] 0.930468
> step_2 <- foo(r1,step_1)
```

```
> step_2
[1] 5
```

3. Повторяем алгоритм заданное число раз k.

```
> r2 <- runif(1, min = 0, max = 1)
> r2
[1] 0.6091826
> step_3 <- foo(r2,step_2)
> step_3
[1] 2
> r3 <- runif(1, min = 0, max = 1)
> r3
[1] 0.4071127
> step_4 <- foo(r3,step_3)
> step_4
[1] 2
> r4 <- runif(1, min = 0, max = 1)
> r4
[1] 0.8295361
> step_5 <- foo(r4,step_4)
> step_5
[1] 3
> r5 <- runif(1, min = 0, max = 1)
> r5
[1] 0.9402458
> step_6 <- foo(r5,step_5)
> step_6
[1] 5
```

Получаем выборочную траекторию цепи:

```
> c(step_1,step_2,step_3,step_4,step_5,step6)
[1] 3 5 2 2 3 5
```

4. Повторяем процедуру 1-3 n число раз.

Полученный выше вектор подробно описан для одной итерации. В общем виде алгоритм выглядит, как представлено ниже в листинге. Очевидно, что вектор из предыдущего пункта не является первым вектором в получаемом ниже списке траекторий, так как использован только в качестве примера. В общем виде цикл итерируется от 1 до n и первая траектория не будет равна той, что получена выше, так как будет перезаписана первой итерацией цикла.

```
tracs <- list()
for (i in 1:n)
{
        r0 <- runif(1, min = 0, max = 1)
        foo <- function(r0_loc,j)
        {
                ifelse(r0_loc < r[[j+1]][1],1,
                ifelse(r0_loc < r[[j+1]][2],2,
                ifelse(r0_loc < r[[j+1]][3],3,
                ifelse(r0_loc < r[[j+1]][4],4,
                ifelse(r0_loc < r[[j+1]][5],5,6)))))
        }
        step_1 <- foo(r0,0)
        step_2 <- foo(runif(1, min = 0, max = 1),step_1)
        step_3 <- foo(runif(1, min = 0, max = 1),step_2)
        step_4 <- foo(runif(1, min = 0, max = 1),step_3)
        step_5 <- foo(runif(1, min = 0, max = 1),step_4)
        trac <- list(c(step_1,step_2,step_3,step_4,step_5,step_6))
        tracs[k] <- trac
}

tracs_array <- t(simplify2array(tracs,higher = F))
colnames(tracs_array) <- paste("Шаг",as.character(0:k))
rownames(tracs_array) <- paste("Тр.",as.character(1:n))
```

В итоге получаем $n = 180$ штук траекторий длины $k = 5$.

Посмотрим на первые и последние 5 траекторий:

```
> head(tracs_array,5)
        Шаг 0 Шаг 1 Шаг 2 Шаг 3 Шаг 4 Шаг 5
Тр. 1     2     3     3     5     2     2
Тр. 2     6     3     4     4     4     1
Тр. 3     3     6     3     4     5     2
Тр. 4     3     4     2     3     4     5
Тр. 5     2     1     5     2     2     1
> tail(tracs_array,5)
        Шаг 0 Шаг 1 Шаг 2 Шаг 3 Шаг 4 Шаг 5
Тр. 176     3     2     1     1     5     1
Тр. 177     2     3     4     2     1     1
Тр. 178     2     1     5     2     3     4
Тр. 179     2     1     1     2     2     2
Тр. 180     3     4     6     5     1     5
```

Задание 5

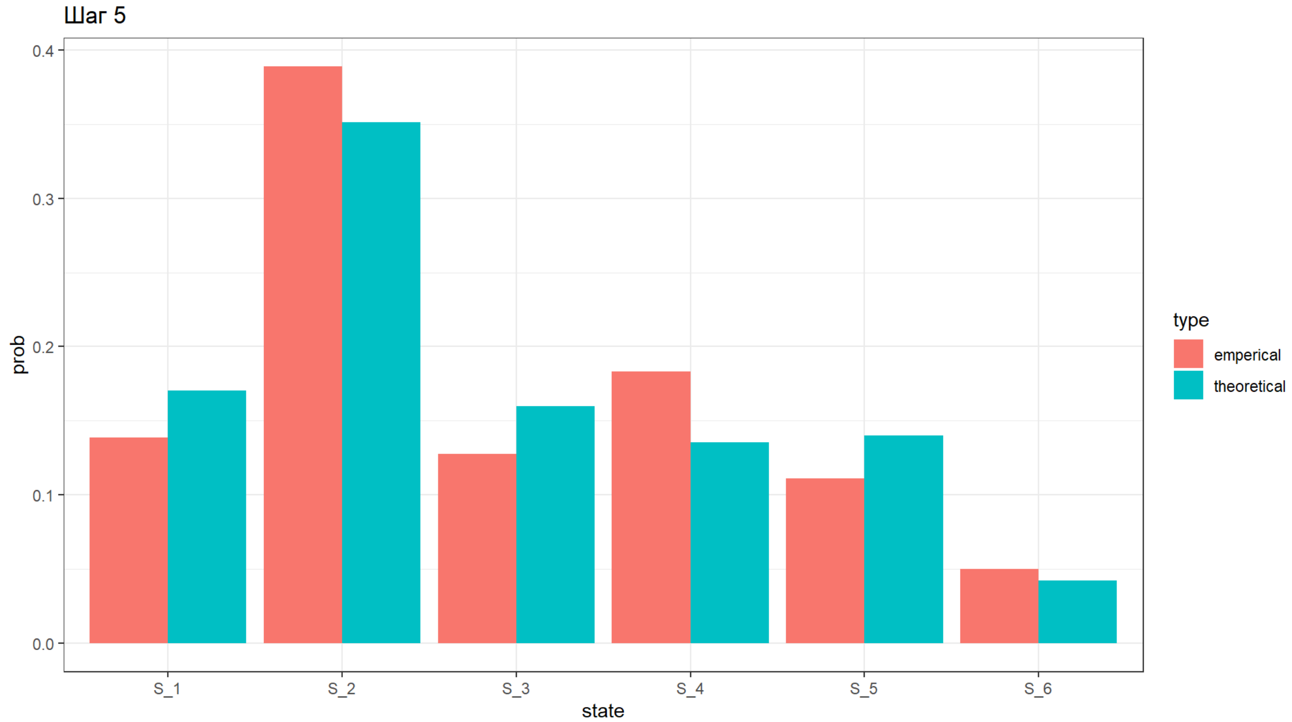
Вычислить эмпирические вероятности (относительные частоты) состояний цепи на k шаге.
Решение.

Рассмотрим $k-$ый шаг ($k = 5$). Посчитаем количество n_j смоделированных траекторий, находящихся в состоянии s_j на $k-$ом шаге. Поделив на общее число $n = 180$ траекторий, получим эмпирические вероятности.

```
> hist(tracs_array[,k+1], breaks =0:m)$counts
[1] 32 67 30 21 21  9
> emp <- hist(tracs_array[,k], breaks =0:m)$density
> emp
[1] 0.16666667 0.41111111 0.11666667 0.15555556 0.12222222 0.02777778
```

Сравним полученные эмпирические вероятности с вектором $\vec{p_k}$, полученным в 3 пункте. Для этого построим группированные bar-plots:

```
> plot_df <- data.frame(type = rep(c("theoretical", "emperical"), each=m),
+                       state = rep(paste("S",as.character(1:m),
+
+                       prob = c(theor, emp))
>
> png(filename = "../img/2.png",
+     width = 1920, height = 1080,
+     res = 96 * 2)
> ggplot(data=plot_df, aes(x=state, y=prob, fill=type)) +
+   geom_bar(stat="identity", position=position_dodge()) +
+   theme_bw() + ggtitle("Шаг 5")
> dev.off()
```



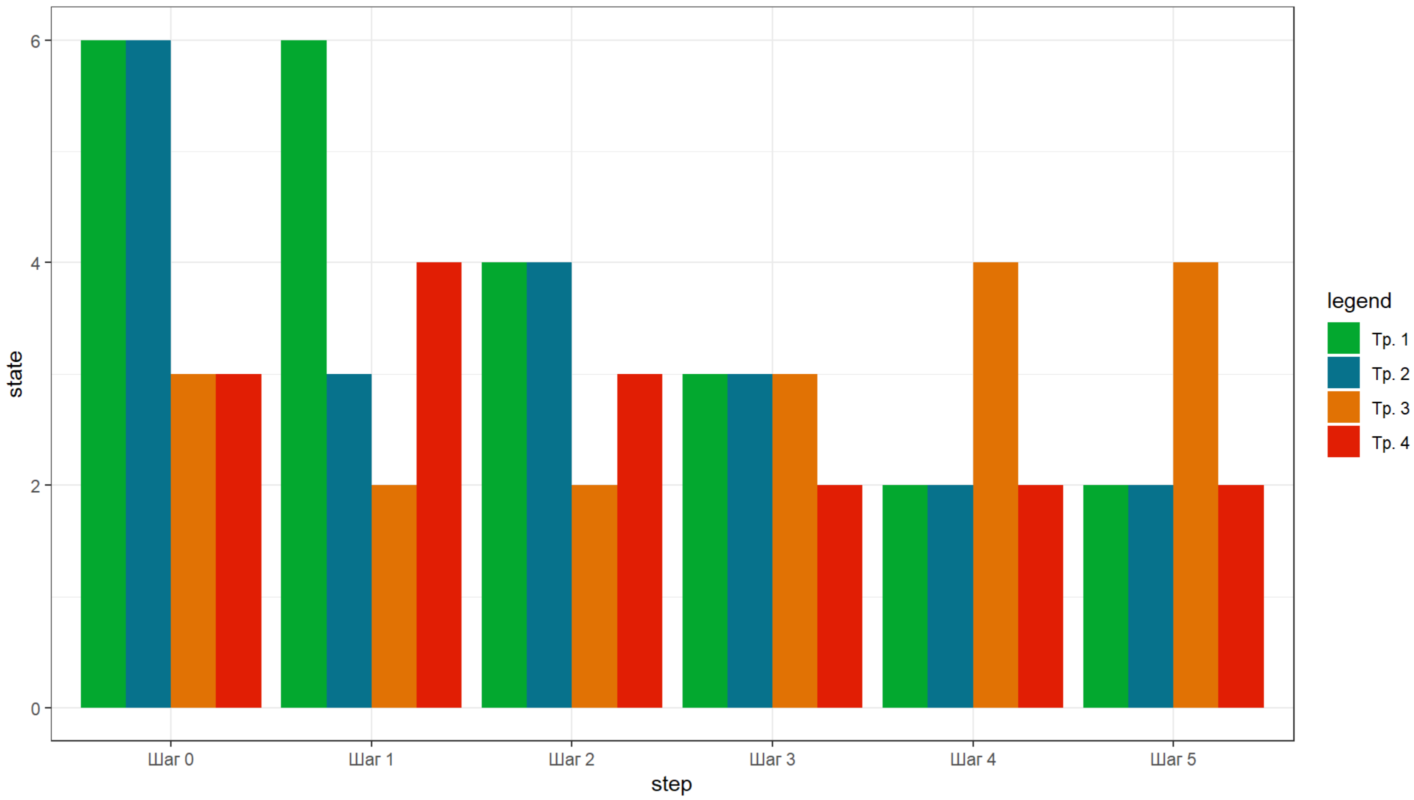
Рассмотрим разности соответствующих значений эмпирической и теоретической вероятностей, а также максимальное по модулю значение разности:

```
> emp
[1] 0.16666667 0.41111111 0.11666667 0.15555556 0.12222222 0.02777778
> theor
[1] 0.17056898 0.35142986 0.15966116 0.13567537 0.14020437 0.04246026
> prob_diff <- emp - theor
> signif(prob_diff,5)
[1] -0.0039023  0.0596810 -0.0429940  0.0198800 -0.0179820 -0.0146820
 # Округлено до 5 значащих знаков, чтобы влезало в страницу
> max(abs(prob_diff))
[1] 0.05968125
```

Дополнительно построим для первых 5-и траекторий группированный barplot. По оси абсцисс представлены шаги (от 0 до k), по оси ординат – состояния (от 1 до m).

```
> plot_df_obl <- data.frame(
+               type = rep(c("Тр. 1", "Тр. 2", "Тр. 3", "Тр. 4"), each=m),
+               step = rep(paste("Шаг",as.character(0:k),sep = " "), 2),
+               state = c(tracs_array[1,], tracs_array[2,],
+                         tracs_array[3,], tracs_array[4,]))
> png(filename = "../img/3.png",
+     width = 1920, height = 1080,
```

```
+     res = 96 * 2)
> ggplot(data=plot_df_obl, aes(x=step, y=state, fill=type)) +
+   geom_bar(stat="identity", position=position_dodge()) +
+   scale_fill_manual("legend",
+   values =
+        c("#03A82F", "#07728C", "#E17204", "#E11E04", "#EAD497")) +
+   theme_bw()
> dev.off()
```




```
> head(tracs_array,4)
      Шаг 0 Шаг 1 Шаг 2 Шаг 3 Шаг 4 Шаг 5
Тр. 1     6     6     4     3     2     2
Тр. 2     6     3     4     3     2     2
Тр. 3     3     2     2     3     4     4
Тр. 4     3     4     3     2     2     2
```

Задание 6

Вычислить финальные вероятности для марковской цепи и сравнить их вероятностями состояний на k шаге.
Решение.

Для нахождения финальных вероятностей марковской цепи рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \pi_i P_{i,j} = \pi_j \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \pi_i = 1 \end{cases}$$

Вычёркивая последнюю строчку транспонированной P, из которой вычтена единичная матрица, и дописывая балансное уравнение, получаем систему (округлено до 3 значащих знаков):

$$\begin{array}{lclclclclclcl}
-0.854 \cdot \pi 1 & + & 0.194 \cdot \pi 2 & + & 0.0252 \cdot \pi 3 & + & 0.0466 \cdot \pi 4 & + & 0.47 \cdot \pi 5 & + & 0.102 \cdot \pi 6 & = & 0 \\
0.0994 \cdot \pi 1 & - & 0.367 \cdot \pi 2 & + & 0.221 \cdot \pi 3 & + & 0.107 \cdot \pi 4 & + & 0.429 \cdot \pi 5 & + & 0.128 \cdot \pi 6 & = & 0 \\
0.0357 \cdot \pi 1 & + & 0.152 \cdot \pi 2 & - & 0.907 \cdot \pi 3 & + & 0.409 \cdot \pi 4 & + & 0.0332 \cdot \pi 5 & + & 0.51 \cdot \pi 6 & = & 0 \\
0.0502 \cdot \pi 1 & + & 0.0019 \cdot \pi 2 & + & 0.585 \cdot \pi 3 & - & 0.839 \cdot \pi 4 & + & 0.0497 \cdot \pi 5 & + & 0.0489 \cdot \pi 6 & = & 0 \\
0.616 \cdot \pi 1 & + & 0.0124 \cdot \pi 2 & + & 0.0486 \cdot \pi 3 & + & 0.125 \cdot \pi 4 & - & 0.986 \cdot \pi 5 & + & 0.11 \cdot \pi 6 & = & 0 \\
1 \cdot \pi 1 & + & 1 \cdot \pi 2 & + & 1 \cdot \pi 3 & + & 1 \cdot \pi 4 & + & 1 \cdot \pi 5 & + & 1 \cdot \pi 6 & = & 1
\end{array}$$

Решаем полученную систему:

```
> b <- c(rep(0,m-1),1)
> b
[1] 0 0 0 0 0 1
> maat <- rbind((t(P) - diag(m))[-m,],rep(1,m))
> round(maat,7) # Округлено до 7 знаков после запятой
           [,1]       [,2]       [,3]       [,4]       [,5]      [,6]
[1,] -0.8539564  0.1939823  0.0252286  0.0466180  0.4697933 0.1016177
[2,]  0.0993604 -0.3666236  0.2213508  0.1070602  0.4288217 0.1275028
[3,]  0.0357133  0.1520716 -0.9074397  0.4089160  0.0331593 0.5103369
[4,]  0.0502001  0.0018951  0.5846570 -0.8385060  0.0496515 0.0489077
[5,]  0.6163126  0.0123922  0.0485918  0.1250756 -0.9864176 0.1099095
[6,]  1.0000000  1.0000000  1.0000000  1.0000000  1.0000000 1.0000000
> res <- solve(maat,b)
> res
[1] 0.17655716 0.35894326 0.15277268 0.12870587 0.14311394 0.03990709
```

Сравниваем со значением $\vec{p_k}$:

```
> res
[1] 0.17655716 0.35894326 0.15277268 0.12870587 0.14311394 0.03990709
> as.numeric(p_k)
[1] 0.17056898 0.35142986 0.15966116 0.13567537 0.14020437 0.04246026
> res - as.numeric(p_k)
[1]  0.005988178  0.007513395 -0.006888475
[4] -0.006969505  0.002909572 -0.002553164
> max(abs(res-as.numeric(p_k)))
[1] 0.007513395
```