Методы Рунге-Кутта численного решения задачи Коши для нормальных обыкновенных дифференциальных уравнений и систем

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-ого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \in [a;b]; \\ x(a) = c_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $c_0 \in \mathbb{R}$ – начальное условие и $x_0 \in C^{p+1}([a;b],\mathbb{R})$ - единственное решение этой задачи.

Согласно курсу «Обыкновенные дифференциальные уравнения», метод ломанных Эйлера вычисления решения задачи (1) является аналитически корректным и индуцирует схему сеточных аналогов задачи:

$$\begin{cases} k \in \mathbb{N}; \\ u_0 = c_0; \\ u_1 = u_0 + h \cdot f(\tau_0, u_0); \\ u_2 = u_1 + h \cdot f(\tau_1, u_1); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_k = u_{k-1} + h \cdot f(\tau_{k-1}, u_{k-1}), \end{cases} \tag{2}$$

где $A = \langle a = \tau_0, \tau_1, ..., \tau_k = b \rangle$ **—** равномерная сетка отрезка $[a;b]$ шага $h = \dfrac{b-a}{k} = \mathrm{stp}(A)$ и ${}^{>}\boldsymbol{u} = [u_0, u_1, ..., u_k\rangle$ – сеточное приближённое решение задачи (1).

Для построения этой схемы используется рабочая формула:

$$x_0(t+h) = x_0(t) + hf(t, x_0(t)) + O(h^2) \text{ при } h \to 0, \tag{3}$$

где $t \in [a;b)$ и x_0 - решение задачи (1).

Схема (2) определяет Метод Рунге-Кутта 1-го порядка.

Метод Рунге-Кутта m-го порядка определяется так называемой матрицей Бутчера $\boldsymbol{B} \in \mathrm{L}(\mathbb{R}; m)$ вида

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \cdots\cdots\cdots & & \gamma_m \\ \alpha_2 & \beta_2^1 & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3^1 & \beta_3^1 & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m-1} & \beta_{m-1}^1 & \beta_{m-1}^2 & \cdots\cdots & \beta_{m-1}^{m-2} & & 0 \\ \alpha_m & \beta_m^1 & \beta_m^2 & \cdots\cdots & \beta_m^{m-2} & & \beta_m^{m-1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

где ковектор ${}^{<}\boldsymbol{\gamma} = \langle \gamma_1, ..., \gamma_m] \in {}^{<}\mathbb{R}^m$ удовлетворяет условию:

$$\gamma_1 + ... + \gamma_m = 1. \tag{5}$$

Компоненты матрицы Бутчера $\boldsymbol{B} \in \mathrm{L}(\mathbb{R}; m)$ вида (4) определяют при достаточно малых h, $(\tau, y) \in [a;b] \times \mathbb{R}$ и функции $f(t,x)$ отображение ${}^{>}\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, ..., \omega_m\rangle \in C^{p+1}([a;b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, {}^{>}\mathbb{R}^m)$, которое имеет вид:

$$\begin{cases} \omega_1(\tau,y,h)=\omega_1= f(\tau,y); \\ \omega_2(\tau,y,h)=\omega_2= f(\tau+h\alpha_2, y+h\beta_2^1\omega_1); \\ \omega_3(\tau,y,h)=\omega_3= f(\tau+h\alpha_3, y+h(\beta_3^2\omega_1+\beta_3^2\omega_2)); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \omega_m(\tau,y,h)=\omega_m= f(\tau+h\alpha_m, y+h\sum_{i=1}^{m-1}\beta_m^i\omega_i), \end{cases} \tag{6}$$

Кроме того, матрица Бутчера (4) подбирается таким образом, чтобы для $t\in[a;b)$ и решения $x_0\in C^{p+1}([a;b],\mathbb{R})$ задачи (3) выполнялась рабочая формула метода Рунге-Кутта m-го порядка вида:

$$x_0(t+h)=x_0(t)+h\cdot {}^{<}\boldsymbol{\gamma}\cdot{}^{>}\boldsymbol{\omega}(t,x_0(t),h)+O(h^{m+1}),\ \text{при}\ h\to 0. \tag{7}$$

По аналогии с методом ломанных Эйлера рабочая формула (7) метода Рунге-Кутта порядка m индуцирует схему сеточных аналогов задачи (1) вида:

$$\begin{cases} k\in N; \\ u_0=c_0; \\ u_1=u_0+h{}^{<}\boldsymbol{\gamma}\cdot{}^{>}\boldsymbol{\omega}(\tau_0,u_0,h); \\ u_2=u_1+h{}^{<}\boldsymbol{\gamma}\cdot{}^{>}\boldsymbol{\omega}(\tau_1,u_1,h); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_k=u_{k-1}+h{}^{<}\boldsymbol{\gamma}\cdot{}^{>}\boldsymbol{\omega}(\tau_{k-1},u_{k-1},h); \end{cases} \tag{8}$$

где ${}^{>}\boldsymbol{u}=[u_0,u_1,\dots,u_k\rangle\in{}^{>}\mathbb{R}^{|A|}(A)$ – сеточное приближённое решение задачи (1), $u=\mathrm{spl}_1(A;{}^{>}u)$ - k-ое приближённое решение задачи (3) при каждом $k\in\mathbb{N}$, сходящееся к решению задачи (3) с m-ым порядком точности.

Число $m+1$ в рабочей формуле (6) метода Рунге-Кутта порядка m называется её (условным) порядком точности на одном шаге и число m - её условным порядком точности. Следовательно, метод ломаных Эйлера, являясь методом Рунге-Кутта порядка единица, имеет единичный условный порядок точности.

Поясним введённое понятие условного порядка точности рабочей формулы метода Рунге-Кутта порядка m. При (достаточно большом) фиксированном $k\in\mathbb{N}$ на одном шаге (длины $h=\dfrac{b-a}{k}=\mathrm{stp}(A)$) абсолютная погрешность рассматриваемого метода будет величиной порядка Ch^{m+1}, где $C>0$, что «приведёт» к погрешности $C\cdot h^{m+1}\cdot k=C\cdot h^{m+1}\cdot\dfrac{b-a}{h}=C(b-a)h^m$ за k шагов метода ($k=\dfrac{b-a}{h}$).

Пример 1

а) <u>Метод Рунге-Кутта 1-го порядка (метод ломаных Эйлера).</u>

При $m=1$ рабочая формула метода Рунге-Кутта имеет единственно возможный вид (см. (3)):

$$x_0(t+h)=x_0(t)+hf(t,x_0(t))+\varphi(h). \tag{9}$$

б) <u>Методы Рунге-Кутта 2-го порядка</u> (здесь $\underline{f}=f(t,x(t))$ и $x_0(t+h)=x_0(t)+\int_t^{t+h} f(\tau,x_0(\tau)d\tau$).

$$x_0(t+h)=x_0(t)+\frac{h}{2}(f(t,x(t))+f(t+h,x_0+h\cdot f(t,x(t)))+O(h^3) \tag{10}$$

Рабочая формула (10) является рабочей формулой Эйлера-Коши, в которой прогноз: $x_0(t) = x_0(t) + h \cdot \underline{f}$ - обеспечивается методом Эйлера и, затем, осуществляется корректировка с использованием формулы трапеций.

Если использовать формулу прямоугольника, то возникает рабочая формула:

$$x_0(t+h) = x_0(t) + hf(t + \frac{1}{2}h, x_0(t) + \frac{1}{2}hf(t, x_0(t))) + O(h^3)\ . \tag{11}$$

в) Методы Рунге-Кутта 3-го и 4-го порядков.

При $m = 3$,обычно используется рабочая формула вида:

$$\begin{cases} x_0(t+h) = x_0(t) + \dfrac{h}{6}(\omega_1 + 4\omega_2 + \omega_3) + O(h^4); \\ \omega_1 = \omega_1(t, x_0(t), h) = f(t, x_0(t)); \\ \omega_2 = \omega_2(t, x_0(t), h) = f(t + \dfrac{1}{2}h, x_0(t) + \dfrac{1}{2}h\omega_1); \\ \omega_3 = \omega_3(t, x_0(t), h) = f(t + h, x_0(t) - h\omega_1 + 2h\omega_2). \end{cases} \tag{12}$$

При $m = 4$, как правило, используется рабочая формула вида:

$$\begin{cases} x_0(t+h) = x_0(t) + \dfrac{h}{6}(\omega_1 + 2\omega_2 + 2\omega_3 + \omega_4) + O(h^5); \\ \omega_1 = \omega_1(t, x_0(t), h) = f(t, x_0(t)); \\ \omega_2 = \omega_2(t, x_0(t), h) = f(t + \dfrac{1}{2}h, x_0(t) + \dfrac{1}{2}h\omega_1); \\ \omega_3 = \omega_3(t, x_0(t), h) = f(t + \dfrac{1}{2}h, x_0(t) + \dfrac{1}{2}h\omega_2); \\ \omega_3 = \omega_3(t, x_0(t), h) = f(t + h, x_0(t) + h\omega_3). \end{cases} \tag{13}$$ ►

Замечание

а) С ростом порядка m метода Рунге-Кутта значительно возрастают вычислительные погрешности. Поэтому для $m > 4$ методы Рунге-Кутта практически не используются.

б) Способ практической оценки абсолютной погрешности метода Рунге-Кутта порядка m состоит в следующем:

1) находят при фиксированном (достаточно большом) $k \in N$ приближённое табличное решение $^{>}\underline{\boldsymbol{u}}_{(k)} = [u_0, u_1, ..., u_k\rangle$ на сетке $A_k = \langle a = \tau_0, \tau_1, ..., \tau_k = b\rangle$ отрезка $[a;b]$;

2) находят приближённое табличное решение $^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{*}_{(k)} = [u_0^*, u_1^*, ..., u_{2k}^*\rangle$ на сетке $\langle a = \tau_0, \dfrac{\tau_0 + \tau_1}{2}, \tau_1, \dfrac{\tau_1 + \tau_2}{2}, \tau_2, ..., \dfrac{\tau_{k-1} + \tau_k}{2}, \tau_k = b\rangle$ и, затем, составляют вектор $^{>}\underset{\sim}{\boldsymbol{u}}_{(k)} = [u_0^*, u_2^*, u_4^*, ..., u_{2k}^*\rangle$;

3) величину $\varepsilon = \dfrac{1}{2^m - 1}\left\| ^{>}\underset{\sim}{\boldsymbol{u}}_{(k)} - {}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}_{(k)} \right\|$ считают практической погрешностью метода.

г) Методы Рунге-Кутта для решения задачи Коши системы обыкновенных дифференциальных уравнений 1-ого порядка вида (3), где $^{>}\boldsymbol{x}$ и $^{>}\boldsymbol{f}$ – соответствующие векторные величины ($^{>}\boldsymbol{f}$ - векторная функция многих переменных, $^{>}\boldsymbol{x}_0$ - векторная функция одной переменной t), полностью аналогичны рассмотренным выше методам Рунге-Кутта для невекторных функций. Рабочие формулы таких векторных методов Рунге-Кутта, фактически, имеют ту же форму, что и формулы (10) и (11) ($m = 2$), (12) ($m = 3$) и (13) ($m = 4$). Как и ранее, при $m = 1$ метод Рунге-Кутта является векторным методом ломаных Эйлера.

Пример 2

Рассмотрим задачу Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения n-ого порядка ($n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$), разрешённого относительно старшей производной, вида:

$$\begin{cases} \dfrac{d^n y}{dt^n} = g(t, y, y', ..., y^{(n-1)}), \quad t \in [a; b]; \\ y(a) = c_{01}; \\ y'(a) = c_{02}; \\ .... \\ y^{(n-1)}(a) = c_{0n}, \end{cases} \tag{14}$$

где ${}^{>}\boldsymbol{c}_0 = [c_{01}, ..., c_{0n}\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^n$ - фиксированный вектор начальных условий и $g \in C^p([a; b] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ – достаточно гладкая функция.

Введя обозначения:

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t); \\ x_2(t) = y'(t); \\ .... \\ x_n(t) = y^{(n-1)}(t); \\ {}^{>}\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), ..., x_n(t)\rangle, \end{cases}$$

задачу (14) можно представить в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,{}^{>}\boldsymbol{x}}{dt} = {}^{>}\boldsymbol{f}(t, {}^{>}\boldsymbol{x}), \ t \in [a; b]; \\ {}^{>}\boldsymbol{x}(a) = {}^{>}\boldsymbol{c}_0, \end{cases} \tag{15}$$

где ${}^{>}\boldsymbol{c}_0 \in {}^{>}\mathbb{R}^n$ - фиксированные векторные начальные условия и функция ${}^{>}\boldsymbol{f}(t, {}^{>}\boldsymbol{x}(t))$ при любом $t \in [a; b]$ имеет вид:

$${}^{>}\boldsymbol{f}(t, {}^{>}x(t)) = [x_2(t), x_3(t), ..., x_n(t), g(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t), ..., x_n(t))\rangle .$$

Задачу (15) можно решать указанными ранее векторными методами Рунге-Кутта того или иного порядка m .►

Задача к ДЗ №3 (n – номер группы, N – номер фамилии студента в журнале группы)

Используя метод Рунге-Кутты порядка $m = 4$, четырёхшаговый метод Адамса-Башфорта и метод прогноза-коррекции (с четвёртым порядком точности) найти численные решения задачи Коши (шаг сетки $h = 0,05$):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2N+3}{N+(n-60)+1} \sin(\dfrac{2N+3}{(N+n-60) \cdot t} x), \quad t \in [0.5; 2.5]; \\ x(0.5) = \dfrac{N}{4}. \end{cases}$$

Графически проиллюстрировать сравнение приближённых решений. Используя практическое правило Рунге, оценить погрешность приближённого решения по методу Рунге-Кутты порядка $m = 4$.