МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Домашнее задания №1 по механике сплошной среды

3 курс, группа ФН11-63Б
Вариант 19

Преподаватель
_____________ Е. А. Губарева
«___» _______ 2020 г.

Москва, 2020 г.

Задание

Рассмотрим сплошную среду B, которая в $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$ представляет собой прямоугольный параллелепипед (брус), который при переходе в $\mathcal{K}$ изменяет свои линейные размеры без изменения углов и поворачивается на угол $\varphi(t)$ в плоскости $O\mathrm{x}^1\mathrm{x}^2$ вокруг точки O. Закон движения такого тела называют вращением бруса с растяжением. Соотношения для него имеют вид:

$$\mathrm{x^i = F^i_{0j} X^i}, \quad \mathrm{\dot{x}^i = X^i},$$

где матрица F^i_{0j} представляет собой произведение двух матриц (матрица вращения O_0 и матрицы растяжения U_0):

$$O^i_{0j} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \qquad U^i_0 = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix},$$

$$F^i_{0j} = \begin{pmatrix} k_1\cos\varphi & -k_1\sin\varphi & 0 \\ k_2\sin\varphi & k_2\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}^T;$$

$k_\alpha(t)\frac{h_\alpha(t)}{h^0_\alpha}$ – функции пропорциональности, характеризующие отношения длин бруса в $\mathcal{K}$ и $\overset{\circ}{\mathcal{K}}$.

Вводя тензоры поворота O_0 и растяжения U_0:

$$0_0 = 0^i_{0j}\bar{e}_i \otimes \bar{e}^i, \quad U_0 = \sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha \bar{e}_\alpha \otimes \bar{e}_\alpha$$

закон движения бруса можно записать в тензорной форме:

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}_0 \cdot \dot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{F}_0 = \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{0}_0$$

1 Локальные векторы базиса

Найдём локальные векторы базиса в отсчетной и актуальной конфигурациях. Учитывая, что матрица Якоби $Q_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial X^i}$ совпадает с матрицей F_{0i}^j, имеем:

$$\mathring{\bar{R}}_i = \frac{\partial \mathring{\bar{R}}_i}{\partial X^i} = \frac{\partial \mathring{x}^j}{\partial X^i}\overline{e_j} = \frac{X^j}{X^i}\overline{e_j} = \delta_i^j \overline{e_j} = \overline{e_i}$$

$$\bar{R}_i = \frac{\partial \bar{x}}{\partial X^i} = \frac{\partial x^j}{\partial X^i}\overline{e_j} = \frac{\partial \left(F_{0k}^j X^k\right)}{\partial X^i}\overline{e_j} = \delta_i^k F_{0k}^j \overline{e_j} = F_{0i}^j \overline{e_j}$$

$$\bar{R}_1 = k_1 \cos\varphi \bar{e}_1 - k_1 \sin\varphi \bar{e}_2$$

$$\bar{R}_2 = k_2 \sin\varphi \bar{e}_1 + k_2 \cos\varphi \bar{e}_2$$

$$\bar{R}_3 = k_3 \bar{e}_3$$

2 Метрические матрицы

$$\mathring{g}_{ij} = \mathring{\bar{R}}_i \cdot \mathring{\bar{R}}_j = \delta_{ij}$$

$$g_{ij} = \bar{R}_i \cdot \bar{R}_j = F_{0i}^k \overline{e_k} \cdot F_{0j}^l \overline{e_l} = F_{0i}^k F_{0j}^l \delta_{kl}$$

$$g_{11} = \bar{R}_1 \cdot \bar{R}_1 = k_1^2 \cos^2\varphi + k_1^2 \sin^2\varphi = k_1^2$$

$$g_{12} = g_{21} = \bar{R}_1 \cdot \bar{R}_2 = k_1 k_2 \cos\varphi \sin\varphi - k_1 k_2 \cos\varphi \sin\varphi = 0$$

$$g_{13} = g_{31} = \bar{R}_1 \cdot \bar{R}_3 = 0$$

$$g_{23} = g_{32} = \bar{R}_2 \cdot \bar{R}_3 = 0$$

$$g_{33} = k_3^2$$

То есть метрическая матрица имеет вид:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} k_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3^2 \end{pmatrix}$$

А обратная метрическая матрица:

$$\left(g^{ij}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3^2} \end{pmatrix}$$

3 Градиент деформации

Для расчёта градиента деформации найдём векторы взаимного базиса в отсчетной

$$\overline{\overset{\circ}{R}{}^i} = \overset{\circ}{g}{}^{ij}\overline{\overset{\circ}{R}}_j = \overline{e_i}$$

и актуальной конфигурации:

$$\bar{R}^i = g^{ij}\bar{R}_j$$

$$\bar{R}^1 = g^{1j}\bar{R}_j = g^{11}\bar{R}_1 = \frac{1}{k_1}\cos\varphi\bar{e}_1 - \frac{1}{k_1}\sin\varphi\bar{e}_2$$

$$\bar{R}^2 = g^{2j}\bar{R}_j = g^{22}\bar{R}_2 = \frac{1}{k_2}\sin\varphi\bar{e}_1 + \frac{1}{k_2}\cos\varphi\bar{e}_2$$

$$\bar{R}^3 = g^{3j}\bar{R}_j = g^{33}\bar{R}_3 = \frac{1}{k_3}\bar{e}_3$$

Тогда градиент деформации имеет вид:

$$\begin{aligned} F &= \bar{R}_i \otimes \overline{\overset{\circ}{R}{}^i} = \bar{R}_1 \otimes \overline{\overset{\circ}{R}{}^1} + \bar{R}_2 \otimes \overline{\overset{\circ}{R}{}^2} + \bar{R}_3 \otimes \overline{\overset{\circ}{R}{}^3} = \\ &= (k_1\cos\varphi\overline{e_1} - k_1\sin\varphi\overline{e_2}) \otimes \bar{e}_1 + (k_2\sin\varphi\overline{e_1} + k_2\cos\varphi\overline{e_2}) \otimes \bar{e}_2 + k_3\bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 = \\ &= k_1\cos\varphi\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 + k_2\cos\varphi\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_2 + k_3\bar{e}_3 \otimes \bar{e}_3 - k_1\sin\varphi\bar{e}_2 \otimes \bar{e}_1 + k_2\sin\varphi\bar{e}_1 \otimes \bar{e}_2 \end{aligned}$$

В матричном виде:

$$\left(F^{ij}\right) = \begin{pmatrix} k_1\cos\varphi & k_2\sin\varphi & 0 \\ -k_1\sin\varphi & k_2\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}; \qquad \det(F) = k_1k_2k_3$$

$$\left(F^{ij}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\cos\varphi}{k_1} & -\frac{\sin\varphi}{k_1} & 0 \\ \frac{\sin\varphi}{k_2} & \frac{\cos\varphi}{k_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3} \end{pmatrix}$$

4 Тензоры деформации Коши-Грина и Альманси

1 Тензоры Коши-Грина

Правый тензор Коши-Грина

$$C = \frac{1}{2}\left(F^T F - E\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} k_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} k_1^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_3^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Левый тензор Коши-Грина

$J = \frac{1}{2}\left(F \cdot F^T - E\right) =$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} k_1^2\cos^2\varphi + k_2^2\sin^2\varphi & -k_1^2\cos\varphi\sin\varphi + k_2^2\sin\varphi\cos\varphi & 0 \\ -k_1^2\cos\varphi\sin\varphi + k_2^2\sin\varphi\cos\varphi & k_1^2\sin^2\varphi + k_2^2\cos^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & k_3^2 \end{pmatrix} - E\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} k_1^2\cos^2\varphi + k_2^2\sin^2\varphi - 1 & -k_1^2\cos\varphi\sin\varphi + k_2^2\sin\varphi\cos\varphi & 0 \\ -k_1^2\cos\varphi\sin\varphi + k_2^2\sin\varphi\cos\varphi & k_1^2\sin^2\varphi + k_2^2\cos^2\varphi - 1 & 0 \\ 0 & 0 & k_3^2 - 1 \end{pmatrix}$$

2 Тензоры Альманзи

Правый тензор альманзи

$$\Lambda = \left(E - F^{-1}\left(F^{-1}\right)^T\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3^2} \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{k_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{k_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{k_3^2} \end{pmatrix}$$

Левый тензор Альманзи

$$A = \left(E - \left(F^{-1}\right)^T F^{-1}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\cos^2\varphi}{k_1^2} + \frac{\sin^2\varphi}{k_2^2} & -\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{k_1^2} + \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{k_2^2} & 0 \\ -\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{k_1^2} + \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{k_2^2} & \frac{\sin^2\varphi}{k_1^2} + \frac{\cos^2\varphi}{k_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k_3^2} \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - \frac{\cos^2\varphi}{k_1^2} - \frac{\sin^2\varphi}{k_2^2} & \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{k_1^2} - \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{k_2^2} & 0 \\ \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{k_1^2} - \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{k_2^2} & 1 - \frac{\sin^2\varphi}{k_1^2} - \frac{\cos^2\varphi}{k_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{k_3^2} \end{pmatrix}$$