МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Домашнее задание №4 по основам сеточных методов

3 курс, группа ФН11-63Б
Вариант 3

Преподаватель
_____________ В. А. Кутыркин
«___» _______ 2020 г.

Москва, 2020 г.

Задание

Задание.

Используя конечные разностные явную и неявную схемы, индуцированные двумерной равномерной сеткой на квадрате $[0;1] \times [0;1]$ с шагом $h = \tau = 0.025$ найти численное решение задачи Коши для одномерного параболического уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2} = -2\beta + \frac{\alpha\beta\pi\left(x-x^2\right)}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 2\alpha\beta\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), \quad (t,x) \in (0;1)\times(0;1); \\ \varphi(0,x) = 2\beta, x \in [0;1] \quad \text{(начальное условие)}; \\ \varphi(t,0) = 2\beta(1-t) = \varphi(t,1), t \in [0;1] \quad \text{(краевые условия)}; \\ \beta = \frac{N}{2}, \alpha = \frac{1}{64-n}. \end{cases} \tag{1}$$

При решении СЛАУ в неявной схеме использовать метод «прогонки». Оценить абсолютные погрешности численных решений. Графически продемонстрировать аналитические и численные решения для моментов времени $t = 0.5$ и $t = 1$ (отдельно для явной схемы, отдельно для неявной схемы). Получившиеся результаты прокомментировать в выводах.

Решение

Для начала сразу заметим, что, используя данные из условия, не получится достигнуть условия аппроксимации схемы аналитического решения, а именно: $\frac{2D\tau}{h^2} < 1, \quad h, \tau \to 0$. Действительно, $\frac{2\cdot 1\cdot 0.025}{0.025^2} = 80 \gg 1$. Поступим следующим образом: изменим начальные данные до $h = 0.05, \quad \tau = 0.001$. Теперь $\frac{2\cdot 1\cdot 0.001}{0.05^2} = 0.8$, что дает выполнение условия аппроксимации схемы аналитическое решения.

Подставим начальные данные ($N = 63, n = 3$) в систему (1):

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2} = -3 + \frac{3\pi\left(x-x^2\right)}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), \quad (t,x) \in (0;1)\times(0;1); \\ \varphi(0,x) = 3, x \in [0;1] \quad \text{(начальное условие)}; \\ \varphi(t,0) = 3(1-t) = \varphi(t,1), t \in [0;1] \quad \text{(краевые условия)}; \\ \beta = \frac{3}{2}, \alpha = 1. \end{cases}$$

Аналитическое решение

Рассмотрим $\varphi(t,x) = u(t,x) + w(t,x)$, где $w(t,x) = a(t)x + b(t)$, причём $w(t,x)$ удовлетворяет граничным условиям. Тогда $w(t,x) = \frac{\varphi(t,1)-\varphi(t,0)}{1}x + \varphi(t,0) = 3 - 3t$.

Задача относительно $u(t,x)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2} = -3 + \frac{3\pi\left(x-x^2\right)}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ \varphi(0,x) = 0 \\ \varphi(t,0) = 0 \\ \varphi(t,1) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим решение в виде

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x)$$

и

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)X_k(x)$$

. Подставим данные выражения в уравнение для u, получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(T_k'(t)\cdot X_k(x) - T_k'(t)X_k''(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\cdot X_k(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_k'(t)}{T_k(t)} - \frac{f_k(t)}{T_k(t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k''(t)}{X_k(t)}$$

$$X_k''(x) + \lambda_k X_k(x) = 0$$

$$T_k'(t) + \lambda_k T_k(t) = f_k(t)$$

$$X_k(0) = X_k(1) = 0$$

$$T_k(t) = 0$$

Отсюда $X_k(x) = \sin(\pi k x), \quad \lambda_k = \pi^2 k^2$ и

$$T_k(t) = \int_0^t \mathbf{e}^{-\pi^2 k^2 (t-\tau)} f_k(\tau) \mathbf{d}\tau = \int_0^t 2\mathbf{e}^{-\pi^2 k^2 (t-\tau)} \int_0^1 f(\xi, \tau) \sin(k\pi\xi) \mathbf{d}\xi \mathbf{d}\tau$$

Чтобы построить график и сравнить полученное аналитическое решение с численным рассмотрим первые 100 слагаемых бесконечной суммы.

Построим графики:

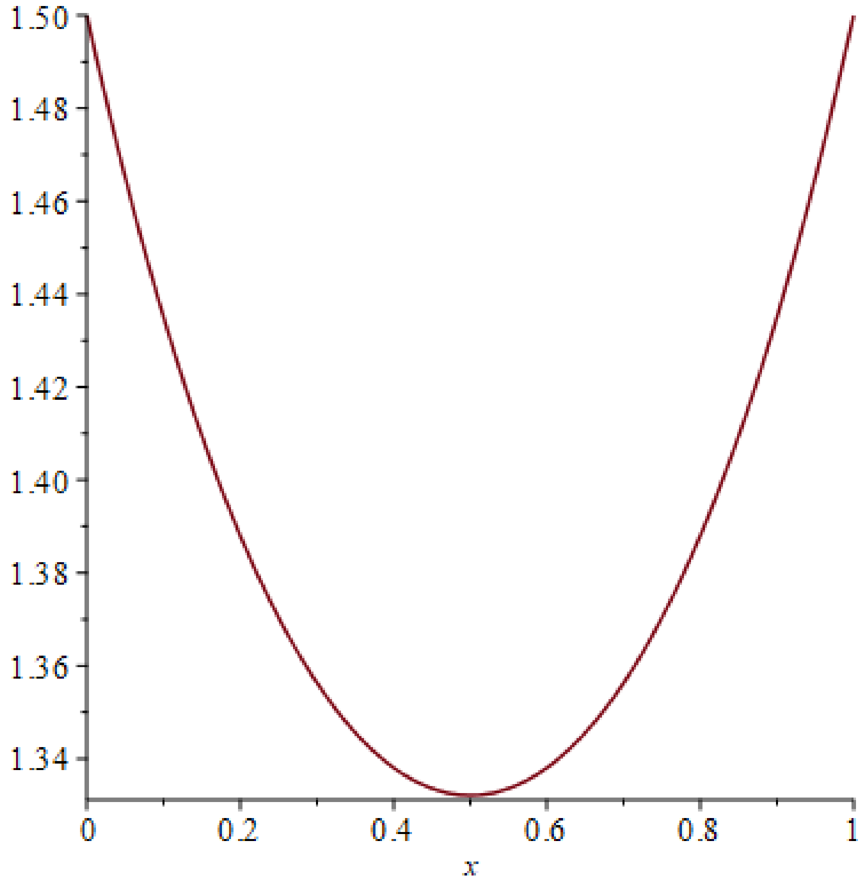

Рис. 1: График аналитического решения при $t = 0.5$

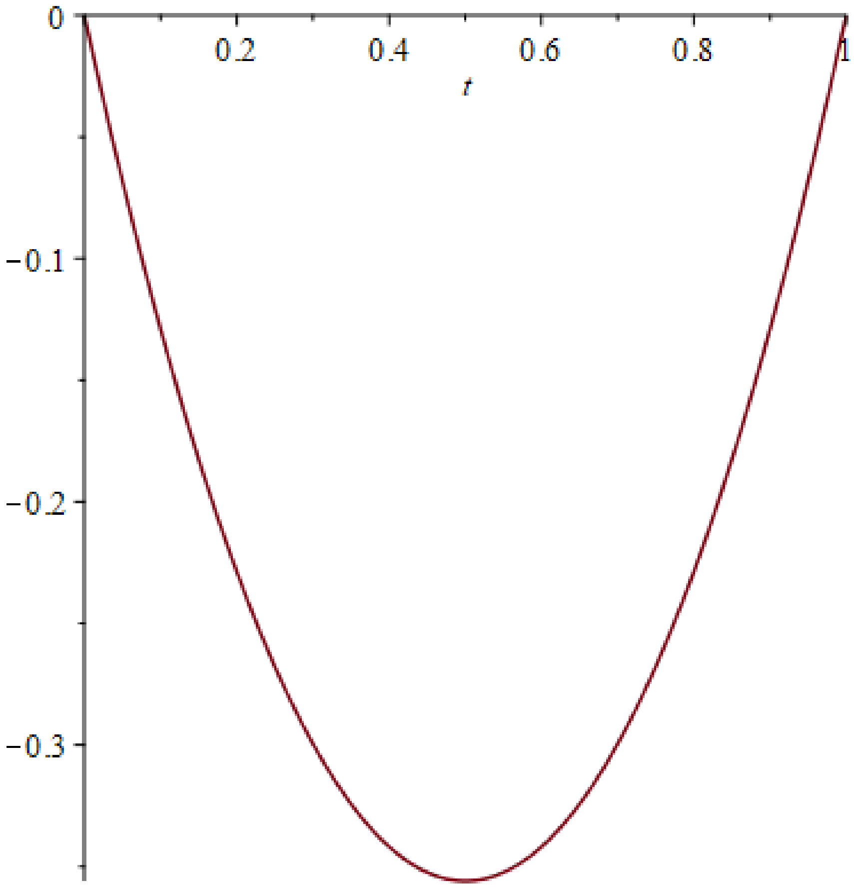

Рис. 2: График аналитического решения при $t = 1$

Численное решение. Явная разностная схема

Явная разностная схема имеет вид:

$$\begin{cases} {}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(0)} = {}^{>}\boldsymbol{\mu}\,; \\ {}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(1)} = \boldsymbol{G}\cdot{}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(0)} + {}^{>}\boldsymbol{\beta}^{(1)} + \tau\cdot{}^{>}\boldsymbol{f}^{(0)}; \\ {}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(2)} = \boldsymbol{G}\cdot{}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(1)} + {}^{>}\boldsymbol{\beta}^{(2)} + \tau\cdot{}^{>}\boldsymbol{f}^{(1)}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ {}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(n)} = \boldsymbol{G}\cdot{}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(n-1)} + {}^{>}\boldsymbol{\beta}^{(n)} + \tau\cdot{}^{>}\boldsymbol{f}^{(n-1)}, \\ n, m \to +\infty. \end{cases}$$

где использованы обозначения:

$$\begin{cases} p = \dfrac{D\tau}{h^2}, \quad q = 1 - \dfrac{2D\tau}{h^2}, \quad r = \dfrac{D\tau}{h^2}; \\ \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p & q & r & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & p & q & r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{L}(\mathbb{R}; m+1); \\ {}^{>}\boldsymbol{u}^{(0)} = [\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m\rangle = {}^{>}\boldsymbol{\mu},\ {}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(0)} = {}^{>}\boldsymbol{\mu} \in {}^{>}\mathbb{R}^{|B|}(B); \\ {}^{>}\boldsymbol{u}^{(j)} = [u_0^j, u_1^j, \dots, u_m^j\rangle,\ {}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(j)} = [\underline{u}_0^j, \underline{u}_1^j, \dots, \underline{u}_m^j\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{|B|}(B),\ j = \overline{0, n} \\ {}^{>}\boldsymbol{f}^{(j)} = [0, f_1^j, \dots, f_{m-1}^j, 0\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{|B|}(B),\ j = \overline{0, n-1}; \\ {}^{>}\boldsymbol{\beta}^{(j)} = [\beta_0^j, 0, \dots, 0, \beta_1^j\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{|B|}(B),\ j = \overline{1, n}; \\ {}^{>}\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = [0, 0, \dots, 0\rangle = {}^{>}0_{m+1} \in {}^{>}\mathbb{R}^{|B|}(B); \\ {}^{>}\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} = [0, \varepsilon_1^j, \varepsilon_2^j, \dots, \varepsilon_{m-1}^j, 0\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{|B|}(B),\ \ j = \overline{1, n}; \\ \|{}^{>}\boldsymbol{\varepsilon}^{(j)}\| \le \varepsilon = O(\tau, h^2) \text{ при } \tau, h \to 0\,(n, m \to +\infty), \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

$$u_i^j = u(t_j; x_i), \quad f_i^j = f(t_j; x_i), \quad \mu_i = \mu(x_i), \quad \beta_0^j = \beta_0(t_j), \quad \beta_1^j = \beta_1(t_j)$$

Тогда матрица **G** примет вид:

$$
G = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

Графики численного решения по явной схеме:

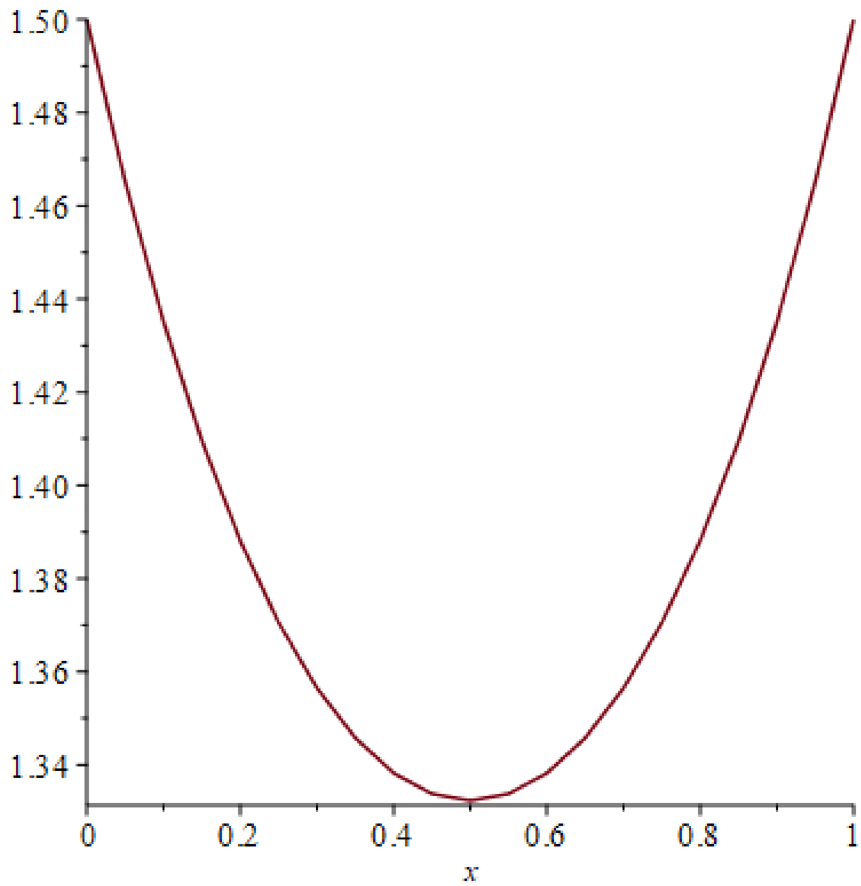

Рис. 3: График численного явного решения при $t = 0.5$

Точки:

$$[[0., 1.50000000000000], [0.5e-1, 1.46512014427974], [.10, 1.43510655875561], [.15, 1.40956508234055], [.20, 1.38814550245223], [.25, 1.37054248702328], [.30, 1.35649637688430], [.35, 1.34579384496598], [.40, 1.33826842788662], [.45, 1.33380093453720], [.50, 1.33231973530111], [.55, 1.33380093453719], [.60, 1.33826842788662], [.65, 1.34579384496598], [.70, 1.35649637688430], [.75, 1.37054248702328], [.80, 1.38814550245223], [.85, 1.40956508234055], [.90, 1.43510655875561], [.95, 1.46512014427974], [1.00, 1.50000000000000]]$$

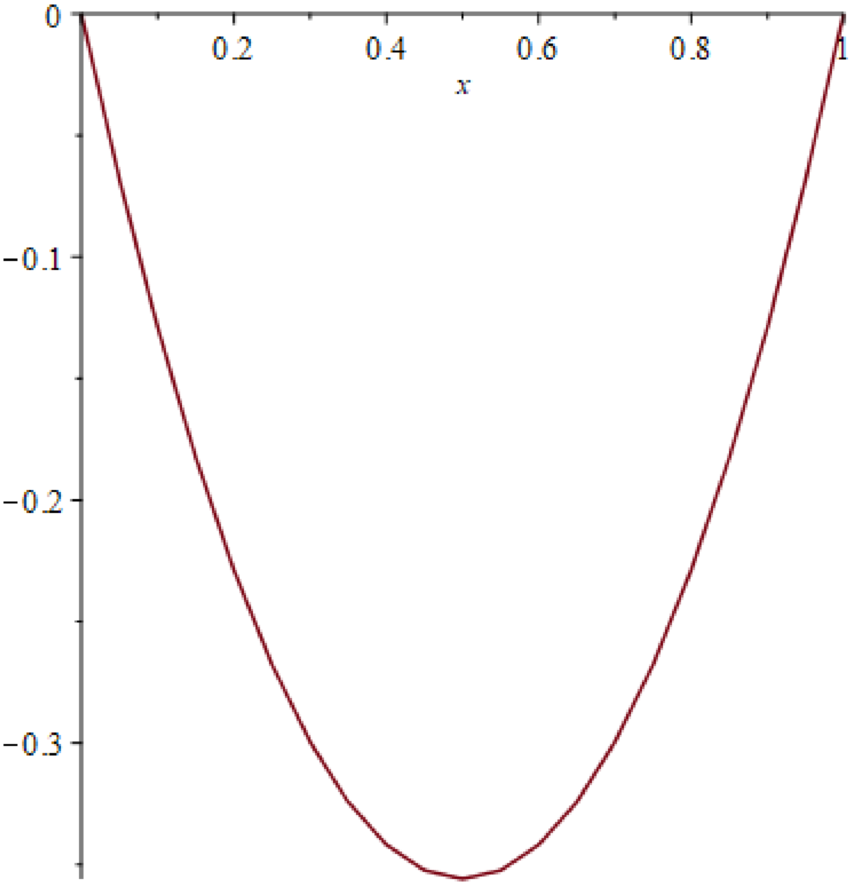

Рис. 4: График численного явного решения при $t = 1$

Точки:

$$[[0., 0.], [0.5e-1, -0.682498782974187e-1], [.10, -.129074568429754], [.15, -.182546754227427], [.20, -.228735070545019], [.25, -.267702411330733], [.30, -.299504465671840], [.35, -.324188480850184], [.40, -.341792251540464], [.45, -.352343334412606], [.50, -.355858487578648], [.55, -.352343334412606], [.60, -.341792251540464], [.65, -.324188480850184], [.70, -.299504465671840], [.75, -.267702411330733], [.80, -.228735070545019], [.85, -.182546754227427], [.90, -.129074568429754], [.95, -0.682498782974187e-1], [1.00, 0.]]$$

Абсолютная погрешность численного решения явной разностной схемы:

$$0.0003313756673828$$

Численное решение. Неявная разностная схема

Неявная разностная схема имеет вид:

$$\begin{cases} {}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(0)} = {}^{>}\boldsymbol{\mu}\,; \\ \boldsymbol{H}\cdot{}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(1)} = {}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(0)} - {}^{>}\boldsymbol{\beta}^{(0)} + {}^{>}\boldsymbol{\beta}^{(1)} + \tau\cdot{}^{>}\boldsymbol{f}^{(1)}; \\ \boldsymbol{H}\cdot{}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(2)} = {}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(1)} - {}^{>}\boldsymbol{\beta}^{(1)} + {}^{>}\boldsymbol{\beta}^{(2)} + \tau\cdot{}^{>}\boldsymbol{f}^{(2)}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{H}\cdot{}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(n)} = {}^{>}\underline{\boldsymbol{u}}^{(n-1)} - {}^{>}\boldsymbol{\beta}^{(n-1)} + {}^{>}\boldsymbol{\beta}^{(n)} + \tau\cdot{}^{>}\boldsymbol{f}^{(n)}. \end{cases}$$

где использованы обозначения:

$$\begin{cases} p = -\dfrac{D\tau}{h^2}, \quad q = 1 + \dfrac{2D\tau}{h^2}, \quad r = -\dfrac{D\tau}{h^2}; \\ \boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p & q & r & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & p & q & r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{L}(\mathbb{R}; m+1); \\ {}^{>}\boldsymbol{\delta u}^{(0)} = [0, 0, \dots, 0\rangle = {}^{>}0_{m+1} \in {}^{>}\mathbb{R}^{|B|}(B); \\ {}^{>}\boldsymbol{\delta u}^{(j)} = [0, \delta u_1^j, \delta u_2^j, \dots, \delta u_{m-1}^j, 0\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{|B|}(B),\ j = \overline{1,n}; \\ {}^{>}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(0)} = [0, 0, \dots, 0\rangle = {}^{>}0_{m+1} \in {}^{>}\mathbb{R}^{|B|}(B); \\ {}^{>}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(j)} = [0, \underline{\varepsilon}\,_1^j, \underline{\varepsilon}\,_2^j, \dots, \underline{\varepsilon}\,_{m-1}^j, 0\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{|B|}(B),\ \ j = \overline{1,n}; \\ \|\,{}^{>}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(j)}\| \le \underline{\varepsilon} = O(\tau, h^2)\ \text{(при } \tau, h \to 0\text{)}, \quad j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Тогда матрица $\mathbf{H}$ примет вид:

$$
\mathrm{H} = \begin{bmatrix}
1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.4 & 2.0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0.4 & 2.0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -0.4 & 2.0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0.4 & 2.0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 2.0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 2.0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 2.0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 2.0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 2.0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 2.0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 2.0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 2.0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 2.0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 2.0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 2.0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 2.0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 2.0 & -0.4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 2.0 & -0.4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 2.0 & -0.4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0
\end{bmatrix}
$$

Графики численного решения по неявной схеме:

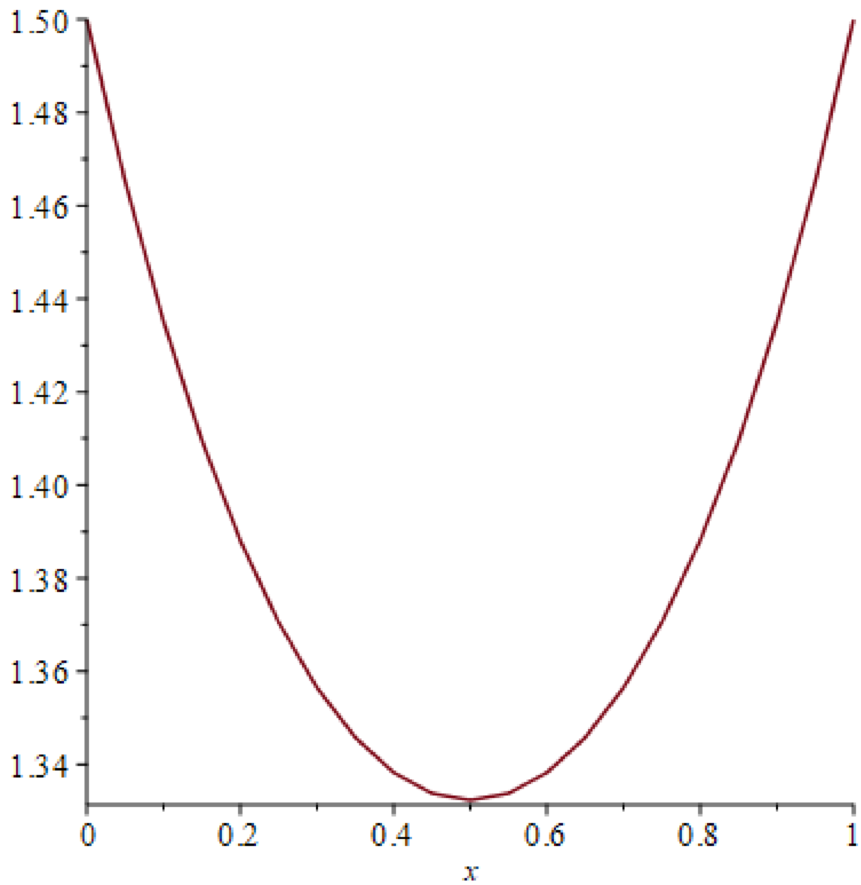

Рис. 5: График численного неявного решения при $t = 0.5$

Точки:

$$[[0., 1.50000000000000], [0.5e-1, 1.46511828754889], [.10, 1.43510284991246], [.15, 1.40955955422417], [.20, 1.38813823239132], [.25, 1.37053360884059], [.30, 1.35648608125871], [.35, 1.34578237854569], [.40, 1.33825608599867], [.45, 1.33378805052480], [.50, 1.33230666634649], [.55, 1.33378804582714], [.60, 1.33825607663055], [.65, 1.34578236496297], [.70, 1.35648606474227], [.75, 1.37053359110446], [.80, 1.38813821556771], [.85, 1.40955953917702], [.90, 1.43510283892470], [.95, 1.46511828181135], [1.00, 1.50000000000000]]$$

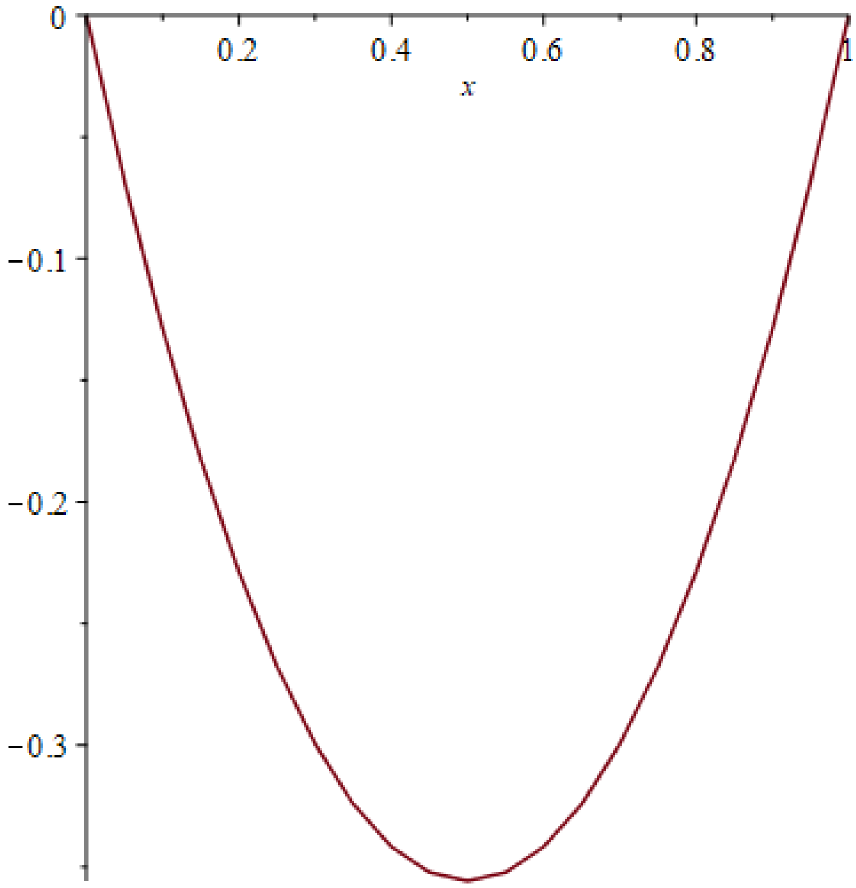

Рис. 6: График численного неявного решения при $t = 1$

Точки:

$$[[0., 0.], [0.5e-1, -0.682364359217568e-1], [.10, -.129048075377762], [.15, -.182507948748947], [.20, -.228684993436692], [.25, -.267642363435463], [.30, -.299435965635561], [.35, -.324113224489577], [.40, -.341712071696780], [.45, -.352260161487117], [.50, -.355774310310583], [.55, -.352260160919589], [.60, -.341712070536377], [.65, -.324113222788131], [.70, -.299435963606849], [.75, -.267642361352541], [.80, -.228684991603023], [.85, -.182507947202775], [.90, -.129048074320734], [.95, -0.682364354011660e-1], [1.00, 0.]]$$

Абсолютная погрешность численного решения неявной разностной схемы:

$$0.0002759265358915$$

Построим совмещенные графики полученных решений.

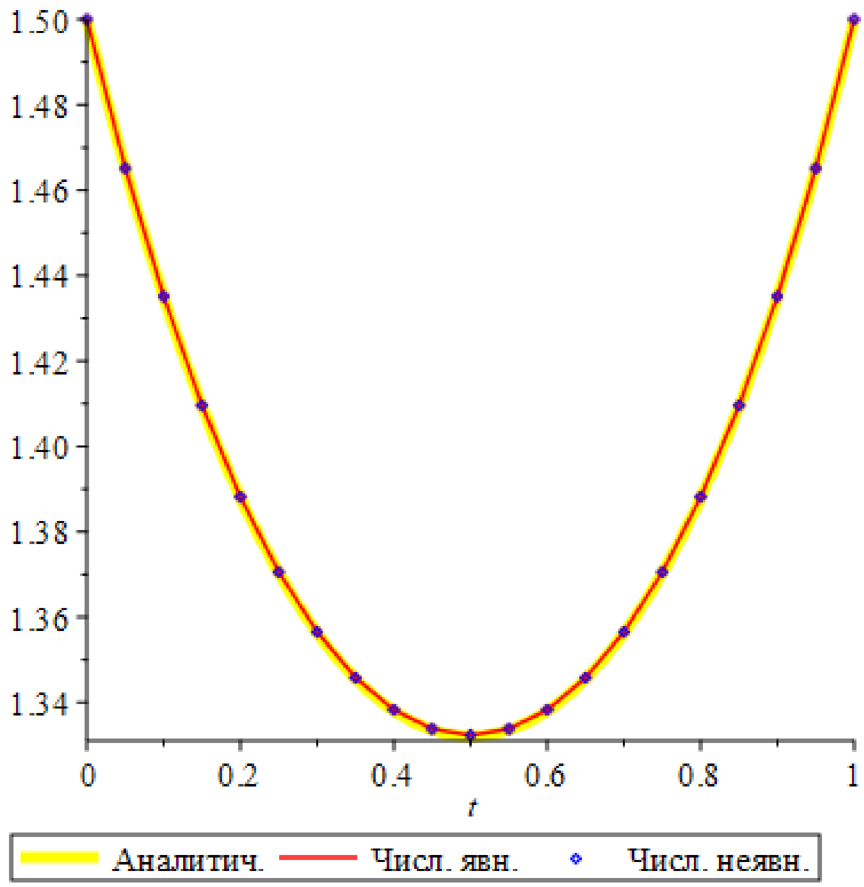

Рис. 7: Совмещённые графики при $t = 0.5$

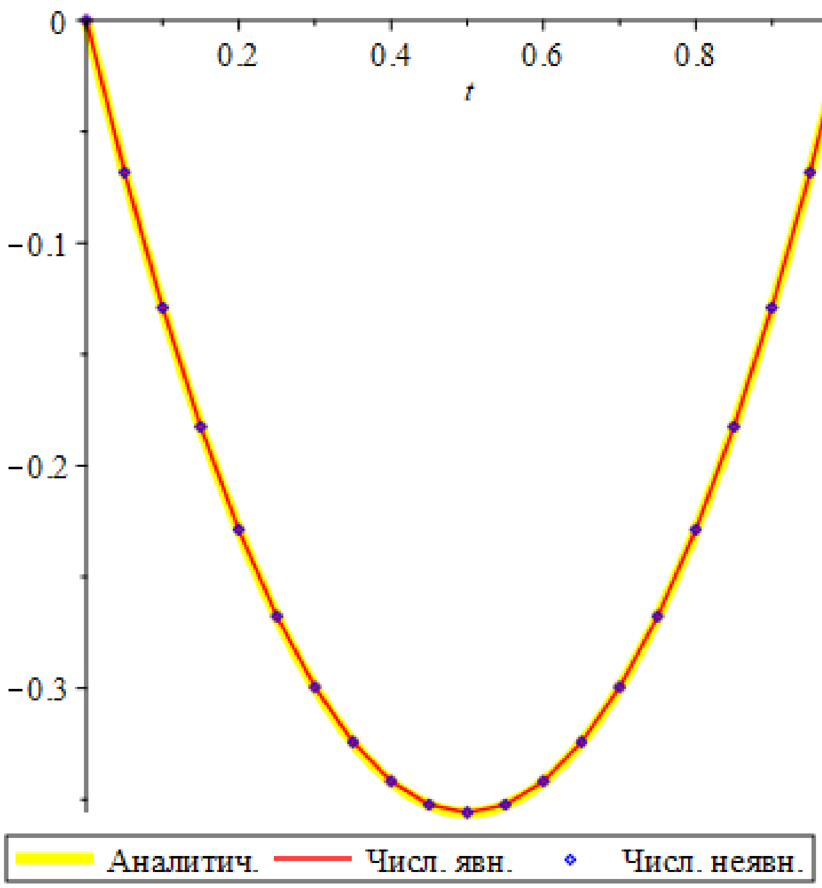

Рис. 8: Совмещённые графики при $t = 1$

Вывод. Проанализировав совмещённые графики, можно сделать вывод о том, что аналитическое, численное явное и численное неявное решения хорошо наложились друг на друга. Таким образом, разобранные конечноразностные схемы имеют достаточно высокую точность. Кроме того, нужно еще раз подчеркнуть о важности выполнения условия аппроксимации схемы аналитического решения, а именно: $\frac{2D\tau}{h^2} < 1, \quad h, \tau \to 0$