МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Домашнее задание №5 (задача 3)
по теории случайных процессов

3 курс, группа ФН11-63Б
Вариант 19

Преподаватель
_______________ Т. В. Облакова
«____» _________ 2020 г.

Москва, 2020 г.

Условие.

Задан случайный процесс $X(t)$. Найдите (не дифференцируя и не интегрируя $X(t)$):

1. Математическое ожидание $m_X(t) = M[X(t)]$, ковариационную функцию $K_X(t_1, T_2)$ и дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса $X(t)$;
2. Математическое ожидание, ковариационную функцию и дисперсию случайного процесса $T_1(t) = \frac{dX(t)}{dt}$;
3. Математическое ожидание, ковариационную функцию и дисперсию случайного процесса $Y_2(t) = X(t) + \frac{dX(t)}{dt}$;
4. Математическое ожидание, ковариационную функцию и дисперсию случайного процесса $Y_3(t) = \int_0^t X(s)ds$;
5. Взаимные ковариационные функции $R_{XX'}(t_1, t_2)$ и $R_{X'X}(t_1, t_2)$.

$$X(t) = U\cos(t) + Vt^3, \tag{1}$$

где U и V – некоррелированные случайные величины, $MU = MV = 0,\ DU = 2, DV = 1$.

Решение.

1

Математическое ожидание:

$$m_X(t) = M[X(t)] = MU\cos t + MVt^3 = 0 \tag{2}$$

Ковариационная функция:

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) = \operatorname{cov}\left(U\cos t_1 + Vt_1^3, \quad U\cos t_2 + Vt_2^3\right) = \cos t_1 \cos t_2 \operatorname{cov}(U,U) + \\ + t_2^3 \cos t_1 \operatorname{cov}(U,V) + t_1^3 \cos t_2 \operatorname{cov}(V,U) + t_1^3 t_2^3 \operatorname{cov}(V,V) \end{aligned} \tag{3}$$

Так как U и V – некоррелированные случайные величины, следовательно,

$$\operatorname{cov}(U,V) = \operatorname{cov}(V,U) = 0 \tag{4}$$

Получаем:

$$K_X(t_1, t_2) = 2\cos t_1 \cos t_2 + t_1^3 t_2^3 \tag{5}$$

Дисперсия:

$$D_X(t) = K_X(t,t) = 2\cos t \cos t + t^3 t^3 = 2\cos^2 t + t^6 \tag{6}$$

2

$$Y_1(t) = \frac{dX(t)}{dt} \tag{7}$$

Математическое ожидание:

$$m_{Y_1}(t) = \frac{d}{dt}M[X(t)] = \frac{d}{dt}0 = 0 \tag{8}$$

Ковариационная функция:

$$K_{Y_1}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} K_X(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}\left(2\cos t_1 \cos t_2 + t_1^3 t_2^3\right) = \frac{\partial}{\partial t_2}\left(-2\sin t_1 \cos t_2 + 3t_1^2 t_2^3\right) =$$
$$= 2\sin t_1 \sin t_2 + 9t_1^2 t_2^2$$

Дисперсия:

$$D_{Y_1}(t) = K_{Y_1}(t, t) = 2\sin t \sin t + 9t^2 t^2 = 2\sin^2 t + 9t^4 \tag{9}$$

3

$$Y_2(t) = X(t) + \frac{dX(t)}{dt} \tag{10}$$

Математическое ожидание:

$$m_{Y_2}(t) = \frac{d}{dt} M\left[X(t) + X'(t)\right] = M[X(t)] + M\left[X'(t)\right] = m_X(t) + (m_X(t))' = 0 \tag{11}$$

Ковариационная функция:

$$\begin{gathered} K_{Y_2}\left(t_1, t_2\right) = \operatorname{cov}\left(X\left(t_1\right) + X'\left(t_1\right), X\left(t_2\right) + X'\left(t_2\right)\right) = K_X\left(t_1, t_2\right) + R_{XX'}\left(t_1, t_2\right) + \\ + R_{X'X}\left(t_1, t_2\right) + K_{X'}\left(t_1, t_2\right) = K_X\left(t_1, t_2\right) + \tfrac{\partial}{\partial t_1} K_X\left(t_1, t_2\right) + \tfrac{\partial}{\partial t_2} K_X\left(t_1, t_2\right) + \tfrac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} K_X\left(t_1, t_2\right) = \\ = 2\cos t_1 \cos t_2 + t_1^3 t_2^3 - 2\sin t_1 \cos t_2 + 3t_1^2 t_2^3 - 2\cos t_1 \sin t_2 + 3t_1^3 t_2^2 + 2\sin t_1 \sin t_2 + 9t_1^2 t_2^2 = \\ = 2\cos\left(t_1 - t_2\right) - 2\sin\left(t_1 + t_2\right) + t_1^3 t_2^3 + 3t_1^2 t_2^3 + 3t_1^3 t_2^2 + 9t_1^2 t_2^2 \end{gathered} \tag{12}$$

Дисперсия:

$$\begin{gathered} D_{Y_2}(t) = K_{Y_2}(t,t) = 2\cos(t-t) - 2\sin(t+t) + t^3 t^3 + 3t^2 t^3 + 3t^3 t^2 + 9t^2 t^2 = 2\cos(0) - \\ -2\sin 2t + t^6 + 3t^5 + 3t^5 + 9t^4 = 2 - 2\sin 2t + t^6 + 6t^5 + 9t^4 = 2 - 2\sin 2t + \left(t^3 + 3t^2\right)^2 \end{gathered} \tag{13}$$

4

$$Y_3(t) = \int_0^t X(s)ds \tag{14}$$

Математическое ожидание:

$$m_{Y_3}(t) = M\left[Y_3(t)\right] = M\left[\int_0^t X(s)ds\right] = \int_0^t m_X(s)ds = \int_0^t 0ds = 0 \tag{15}$$

Ковариационная функция:

$$\begin{gathered} K_{Y_3}\left(t_1, t_2\right) = \int_0^{t_1 t_2} \int_0^{t_1} K_X\left(s_1, s_2\right) ds_1 ds_2 = \int_0^{t_1 t_2} \left(2\cos t_1 \cos t_2 + t_1^3 t_2^3\right) ds_1 ds_2 = \\ = \frac{1}{16} t_1^4 t_2^4 + 2\sin t_1 \sin t_2 \end{gathered} \tag{16}$$

Дисперсия:

$$D_{Y_3}(t) = K_{Y_3}(t,t) = \frac{1}{16} t^4 t^4 + 2\sin t \sin t = \frac{1}{16} t^8 + 2\sin^2 t \tag{17}$$

5

$$\begin{array}{l} R_{XX'}\left(t_1,t_2\right)=\frac{\partial K_X(t_1,t_2)}{\partial t_2}=\frac{\partial}{\partial t_2}\left(2\cos t_1\cos t_2+t_1^3t_2^3\right)=-2\cos t_1\sin t_2+3t_1^3t_2^2 \\ R_{X'X}\left(t_1,t_2\right)=\frac{\partial K_X(t_1,t_2)}{\partial t_1}=\frac{\partial}{\partial t_1}\left(2\cos t_1\cos t_2+t_1^3t_2^3\right)=-2\sin t_1\cos t_2+3t_1^2t_2^3 \end{array} \tag{18}$$