МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Семинар от 16.05.20
по основам сеточных методов

3 курс, группа ФН11-63Б
Вариант 3

Преподаватель
_____________ В. А. Кутыркин
«___» _______ 2020 г.

Москва, 2020 г.

Семинар от 17.05.2020, Основы сеточных методов , ФН11-63Б, вариант 3, Соколов Арсений Андреевич, Кутыркин Владимир Андреевич

Задачи для решения на семинаре

Задача 1.
Для ограниченной односвязной области с гладкой границей нарисовать равномерную сетку, выделив на ней «заштрихованный» 1-приграничный слой Γ_1 для сетки на этой области.

Решение.

Рассмотрим в качестве искомой области $\underline{G}$ круг $x^2+y^2<R^2$. Тогда гладкой границей γ будет окружность $x^2+y^2=R^2$. Двумерная равномерная сетка примет вид:

$$\underline{C}=\left\langle (x_k=kh, y_m=mh) : k, m=\overline{0, R\cdot N}\right\rangle,\ h=\frac{1}{N}.$$

Γ_1 – совокупность точек сетки $\underline{C}$, в которую входит совокупность узлов $\Gamma_0=\Gamma$, называемую 0-приграничным слоем, и все внутренние узлы, смежные с узлами из множества $\Gamma_0=\Gamma$. Саму совокупность Γ_1 будем называть 1-приграничным слоем. Тогда 1-приграничный слой примет вид:

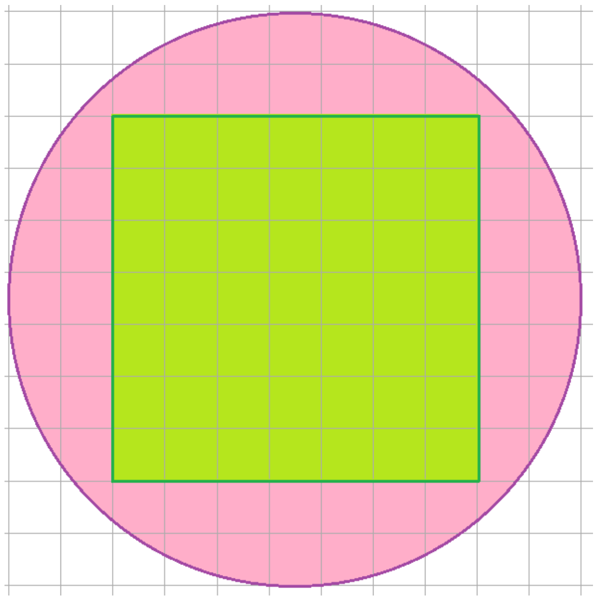

Рис. 1: Розовым цветом отмечен Γ_1, салатовым – $\underline{G}\backslash\Gamma_1$

Задача 2.

Для уравнения переноса $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ на равномерной сетке с шагами τ по t и h по x найти условие спектральной устойчивости схемы Лакса:

$$\frac{u_k^{n+1} - \frac{u_{k-1}^n + u_{k+1}^n}{2}}{\tau} + a\frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} = 0$$

Найти условие и порядок аппроксимирования этой схемой уравнения переноса.

Решение.

$$u_k^n = u(t_n, x_k)$$

Перепишем схему Лакса в другом виде:

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + a\frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} - \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{2\tau}$$

Найдём условие и порядок аппроксимирования данной схемы:

$$\frac{u(t+\tau,x) - u(t,x)}{\tau} = \frac{1}{\tau}\left(u(t,x) + \tau\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \mathrm{O}\left(\tau^3\right) - u(t,x)\right) =$$
$$= \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \mathrm{O}\left(\tau^2\right)$$

Воспользуемся следствием исходного выражения:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

Кроме того, известно, что:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \frac{u(t,x+h) - u(t,x-h)}{2h} + \mathrm{O}\left(h^2\right)$$ – центральная разностная производная

и

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = \frac{u(t,x+h) - 2u(t,x) + u(t,x-h)}{h^2} + \mathrm{O}\left(h^2\right)$$ – вторая разностная производна

Тогда

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + a\frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} - \frac{a^2h^2}{2\tau}\frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{h^2} = \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=t_n, x=x_k} + \left.\frac{\tau a^2}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right|_{t=t_n, x=x_k} + O\left(\tau^2\right) +$$
$$+ \left.a\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{t=t_n, x=x_k} + O\left(h^2\right) - \left.\frac{h^2a^2}{2\tau}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right|_{t=t_n, x=x_1} + \tau O\left(h^2\right)$$

Таким образом, схема будет аппроксимировать исходное уравнение при условии, что $h^2 = o(\tau)$ – это и будет условием аппроксимирования. Тогда уравнение представимо в виде:

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=t_n, x=x_k} + a\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{t=t_n, x=x_k} + O\left(\tau^2 + h^2\right) = 0$$

То есть схема аппроксимирует исходное уравнением со вторым порядком аппроксимирования по времени и протяжённости.

Согласно спектральному признаку, используем соотношения:

$$u_k^n = e^{i\varphi k}, u_k^{n+1} = \lambda u_k^n = \lambda e^{i\varphi k}$$

Имеем:

$$\frac{\lambda - \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}}{\tau} + a\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2h} = 0$$

Тогда

$$\lambda = \cos(\varphi) - ir\sin(\varphi),$$

где $r = \frac{a\tau}{h}$.

Условие спектральной устойчивости $|\lambda| = \cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi) \leq 1$ выполняется при $r^2 \leq 1 \Leftrightarrow |r| \leq 1$.

Задача 3.

Для уравнения переноса $\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ на равномерной сетке с шагами τ по t и h по x найти условие спектральной устойчивости схемы Лакса-Вендроффа:

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + a\frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} = \frac{a^2\tau}{2}\frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{h^2}$$

Найти условие и порядок аппроксимирования этой схемой уравнения переноса.

Решение.

Найдём порядок аппроксимирования:

$$\frac{u(t+\tau,x) - u(t,x)}{\tau} = \frac{1}{\tau}\left(u(t,x) + \tau\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \mathrm{O}\left(\tau^3\right) - u(t,x)\right) =$$
$$= \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \mathrm{O}\left(\tau^2\right).$$

Используем следствие исходного выражения:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}.$$

Тогда

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{u(t+\tau,x) - u(t,x)}{\tau} - \frac{a^2\tau}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \mathrm{O}\left(\tau^2\right),$$

Кроме того, известно, что:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \frac{u(t,x+h) - u(t,x-h)}{2h} + \mathrm{O}\left(h^2\right) \text{ – центральная разностная производная}$$

и

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = \frac{u(t,x+h) - 2u(t,x) + u(t,x-h)}{h^2} + \mathrm{O}\left(h^2\right) \text{ – вторая разностная производна}$$

Используя обозначение $u_k^n = u(t_n, x_k)$, получим:

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + a\frac{u_{k+1}^n - u_{k-1}^n}{2h} - \frac{a^2\tau}{2}\frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{h^2} = \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=t_n,x=x_k} + \left.\frac{\tau a^2}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right|_{t=t_n,x=x_k} +$$
$$+ O\left(\tau^2\right) + a\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{t=t_n,x=x_k} + \mathrm{O}\left(h^2\right) - \left.\frac{\tau a^2}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right|_{t=t_n,x=x_k} + \tau\mathrm{O}\left(h^2\right) =$$
$$= \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=t_n,x=x_k} + a\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{t=t_n,x=x_k} + \mathrm{O}\left(\tau^2 + h^2\right)$$

Схема Лакса-Вендроффа аппроксимирует уравнение переноса со вторым порядком по τ и h.

Проверим условие спектральной устойчивости. Согласно спектральному признаку, используем соотношения:

$$u_k^n = e^{i\varphi k}, u_k^{n+1} = \lambda u_k^n = \lambda e^{i\varphi k}$$

Тогда имеем:

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + a\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2h} = \frac{a\tau^2}{h^2}\frac{e^{i\varphi} - 2 + e^{-i\varphi}}{h^2}$$

Отсюда:

$$\lambda = 1 - ir\sin\varphi - 2r^2\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

и

$$|\lambda| = \left(1 - 2r^2\sin^2\tfrac{\varphi}{2}\right)^2 + r^2\sin^2\varphi = 1 - 4r^2\sin^2\tfrac{\varphi}{2} + 4r^4\sin^4\tfrac{\varphi}{2} + 4r^2\sin^2\tfrac{\varphi}{2}\left(1 - \sin^2\tfrac{\varphi}{2}\right) =$$
$$= 1 + 4r^4\sin^4\tfrac{\varphi}{2} - 4r^2\sin^4\tfrac{\varphi}{2} \leq 1$$

То есть $|r| \leq 1$.