МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Семинар от 18.04.20
по основам сеточных методов

3 курс, группа ФН11-63Б
Вариант 3

Преподаватель
_____________ В. А. Кутыркин
«___» _______ 2020 г.

Москва, 2020 г.

Задачи для решения на семинаре

Методом матричной прогонки найти решение СЛАУ (k – номер группы, N – номер фамилии студента в журнале группы), сделав проверку:

$$\mathbf{D} \cdot^{>} \mathbf{x}_{(\cdot)} =^{>} \mathbf{f}_{(\cdot)}, \tag{1}$$

где ${}^{>}\mathbf{f}_{(\cdot)} = \left[{}^{>}\mathbf{f}_{(1)}, {}^{>}\mathbf{f}_{(2)}, {}^{>}\mathbf{f}_{(3)}, {}^{>}\mathbf{f}_{(4)}\right\rangle \in^{>} \left({}^{>}\mathbb{R}^{3}\right)^{4}$, ${}^{>}\mathbf{x}_{(\cdot)} = \left[{}^{>}\mathbf{x}_{(1)}, {}^{>}\mathbf{x}_{(2)}, {}^{>}\mathbf{x}_{(3)}, {}^{>}\mathbf{x}_{(4)}\right\rangle \in^{>} \left({}^{>}\mathbb{R}^{k}\right)^{n}$ и матрица $\mathbf{D} \in \mathrm{L}(\mathbb{R}; m \cdot n)$ имеет матрично трёхдиагональный вид:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

если

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathrm{L}(\mathbb{R}, 3) \quad \text{и} \quad \mathbf{O} \in \mathrm{L}(\mathbb{R}, 3)\text{– нулевая матрица}$$

$$A = (1 - (k - 63)) \begin{pmatrix} N+2 & 1 & 0 \\ 1 & N+2 & 1 \\ 0 & 1 & N+2 \end{pmatrix}, B = (64 - k) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = (-1)^{k} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$${}^{>}\mathbf{f}_{(1)} =^{>} \mathbf{f}_{(2)} =^{>} \mathbf{f}_{(3)} =^{>} \mathbf{f}_{(4)} = [N, N-k, N+k\rangle \in^{>} \mathbb{R}^{3}$$

Решение

Начальные значения по условию: $k = 63, \quad N = 3$. Подставляя данные k и N имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, C = (-1) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$^{>}\mathbf{f}_{(1)} =^{>} \mathbf{f}_{(2)} =^{>} \mathbf{f}_{(3)} =^{>} \mathbf{f}_{(4)} = [3, -60, 66\rangle \in^{>} \mathbb{R}^3$$

Рассмотрим прямой ход метода матричной прогонки:

$$^{>}x_k = L_k^{>} x_{k+1} +^{>} M_k, k = \overline{1, n-1}, \quad L_k \in L(\mathbb{R}, m), \quad > M_k \in^{>} \mathbb{R}^m \qquad (3)$$

$$^{>}x_n =^{>} M_n,^{>} M_n \in \mathbb{R}^m$$

$$L_1 = -B_1^{-1} \cdot C_1,^{>} M_1 = B_1^{-1} \cdot^{>} f_1$$

$$L_k = -\left(L_{k-1}A_k + B_k\right)^{-1} \cdot C_k,^{>} M_k = \left(L_{k-1}A_k + B_k\right)^{-1} \cdot \left(^{>}f_k - A_k^{>} M_{k-1}\right), k = \overline{2, n-1}$$

$$^{>}M_n = \left(L_{n-1}A_n + B_n\right)^{-1} \cdot \left(^{>}f_n -^{>} M_{n-1}A_n\right) =^{>} x_n$$

Будем выполнять работу в языке программирования R.
Введём начальные данные:

```
> N <- 3
> N
[1] 3
> k <- 63
> k
[1] 63

> f <- matrix(c(N,N-k,N+k), nrow = 3, ncol = 1, byrow = TRUE)
> f
     [,1]
[1,]    3
[2,]  -60
[3,]   66
```

Введём $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathrm{L}(\mathbb{R}, 3)$:

```
> A <- (1 - (k - 63)) *
+   matrix(c(N + 2, 1, 0, 1, N + 2, 1, 0, 1, N + 2),
+          nrow = 3, ncol = 3, byrow = TRUE)
> A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    5    1    0
[2,]    1    5    1
[3,]    0    1    5
```

```
> B <- (64 - k) *
+   matrix(c(4, 1, 0, 1, 4, 1, 0, 1, 4),
+          nrow = 3, ncol = 3, byrow = TRUE)
> B
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    4    1    0
[2,]    1    4    1
[3,]    0    1    4
```

```
> C <- (-1)^k *
+   matrix(c(3, 1, 0, 1, 3, 1, 0, 1, 3),
+          nrow = 3, ncol = 3, byrow = TRUE)
> C
     [,1] [,2] [,3]
[1,]   -3   -1    0
[2,]   -1   -3   -1
[3,]    0   -1   -3
```

Тогда получим $L_1, L_2, L_3, M_1, M_2, M_3, M_4$:

```
> L1 <- solve(-B) %*% C
> L1
            [,1]       [,2]        [,3]
[1,]  0.73214286 0.07142857 -0.01785714
[2,]  0.07142857 0.71428571  0.07142857
[3,] -0.01785714 0.07142857  0.73214286
> M1<-solve(B) %*% f
> M1
          [,1]
[1,]   6.267857
[2,] -22.071429
[3,]  22.017857
```

```
> L2 <- -(solve(L1 %*% A + B)) %*% C
> L2
            [,1]       [,2]         [,3]
[1,]  0.380084151 0.02945302 -0.007012623
[2,]  0.029453015 0.37307153  0.029453015
[3,] -0.007012623 0.02945302  0.380084151

> M2 <- (solve(L1 %*% A + B)) %*% (f - A %*% M1)
> M2
          [,1]
[1,] -2.023843
[2,]  4.493689
[3,] -4.056101

> L3 <- -(solve(L2 %*% A + B)) %*% C
> L3
            [,1]      [,2]        [,3]
[1,]  0.49443315 0.0447349 -0.01100163
[2,]  0.04473490 0.4834315  0.04473490
[3,] -0.01100163 0.0447349  0.49443315

> M3 <- (solve(L2 %*% A + B)) %*% (f - A %*% M2)
> M3
           [,1]
[1,]   6.436183
[2,] -19.360825
[3,]  18.762270

> M4 <- (solve(L3 %*% A + B)) %*% (f - A %*% M3)
> M4
          [,1]
[1,] -2.275742
[2,]  2.922765
[3,] -2.065917
```

Теперь рассмотрим обратный ход метода прогонки. Согласно прямому ходу метода прогонки, в равенствах (3) для $k = \overline{1, n-1}$ вычислены все коэффициента L_k и ${}^{>}M_k$ и последняя компонента ${}^{>}x_n ={}^{>} M_n$ вектора неизвестных СЛАУ (1) с матрицей вида (2). Эти найденные матрицы и векторы позволяются последовательно найти все остальные компоненты вектора неизвестных СЛАУ (1) с матрицей вида (2):

$$
\begin{aligned}
&{}^{>}x_{n-1} = L_{n-1}\,{}^{>}x_n +{}^{>} M_{n-1};\\
&{}^{>}x_{n-2} = L_{n-2}\,{}^{>}x_{n-2} +{}^{>} M_{n-2};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
&{}^{>}x_1 = L_1\,{}^{>}x_2 +{}^{>} M_1.
\end{aligned}
$$

Тогда имеем:

```
> x4 <- M4
> x4
          [,1]
[1,] -2.275742
[2,]  2.922765
[3,] -2.065917
> x3 <- L3 %*% x4 + M3
> x3
          [,1]
[1,]   5.464459
[2,] -18.142092
[3,]  17.896599
> x2 <- L2 %*% x3 + M2
> x2
          [,1]
[1,] -0.606730
[2,] -1.586556
[3,]  2.173453
> x1 <- L1 %*% x2 + M1
> x1
          [,1]
[1,]   5.671507
[2,] -23.092774
[3,]  23.506644
```

Сделаем проверку, что $\mathbf{D} \cdot^{>} \mathbf{x}_{(\cdot)} =^{>} \mathbf{f}_{(\cdot)}$:

Умножаемые в левой части уравнения имеют вид:

```
> D
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5] [,6] [,7] [,8] [,9] [,10] [,11] [,12]
[1,]     4    1    0   -3   -1    0    0    0    0     0     0     0
[2,]     1    4    1   -1   -3   -1    0    0    0     0     0     0
[3,]     0    1    4    0   -1   -3    0    0    0     0     0     0
[4,]     5    1    0    4    1    0   -3   -1    0     0     0     0
[5,]     1    5    1    1    4    1   -1   -3   -1     0     0     0
[6,]     0    1    5    0    1    4    0   -1   -3     0     0     0
[7,]     0    0    0    5    1    0    4    1    0    -3    -1     0
[8,]     0    0    0    1    5    1    1    4    1    -1    -3    -1
[9,]     0    0    0    0    1    5    0    1    4     0    -1    -3
[10,]    0    0    0    0    0    0    5    1    0     4     1     0
[11,]    0    0    0    0    0    0    1    5    1     1     4     1
[12,]    0    0    0    0    0    0    0    1    5     0     1     4
```

```
> x
          [,1]
[1,]   5.671507
[2,] -23.092774
[3,]  23.506644
[4,]  -0.606730
[5,]  -1.586556
[6,]   2.173453
[7,]   5.464459
[8,] -18.142092
[9,]  17.896599
[10,]  -2.275742
[11,]   2.922765
[12,]  -2.065917
```

Тогда:

```
> D%*%x
      [,1]
[1,]     3
[2,]   -60
[3,]    66
[4,]     3
[5,]   -60
[6,]    66
[7,]     3
[8,]   -60
[9,]    66
[10,]     3
[11,]   -60
[12,]    66
```

Что в точности равняется ${}^{>}\mathbf{f}_{(\cdot)}$:

```
> f1 < -matrix(c(f, f, f, f), nrow=12, ncol=1, byrow=TRUE)
> f1
      [,1]
[1,]     3
[2,]   -60
[3,]    66
[4,]     3
[5,]   -60
[6,]    66
[7,]     3
[8,]   -60
[9,]    66
[10,]     3
[11,]   -60
[12,]    66
```

Видим, что проверка сошлась.