07 | 05 | 2020

где

$$\overset{\circ}{\hat{A}}_{\alpha} = \begin{pmatrix} (\rho/\overset{\circ}{\rho})\det F^{T} \\ \bar{\bar{\varepsilon}} \\ \psi \\ \bar{u} \\ F^{T} \\ \bar{x}\times\bar{v} \end{pmatrix}, \quad \overset{\circ}{\hat{B}}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ \overset{\circ}{P} \\ P\cdot\bar{v} - \bar{q} \\ -\bar{q}/\theta \\ \overset{\circ}{\rho}\cdot E\otimes\bar{v} \\ -P\times\bar{x} \end{pmatrix}, \quad \overset{\circ}{\hat{C}}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ \overset{\circ}{f} \\ f\cdot\bar{v}+q_m \\ \bar{v} \\ \overset{\circ}{x}\times f \end{pmatrix} \quad (32)$$

Лекция 16.

V Определяющие соотношения

1. Незамкнутость системы законов сохранения МСС

Рассмотрим Эйлерово описание в дивергентной форме

Она имеет вид:

$$\frac{\partial\rho A_\alpha}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\bar{v}\otimes A_\alpha - B_\alpha) = \rho C_\alpha \quad (1)$$

$$\alpha = \overline{1..6}$$

где $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha$ - коэф-ты столбцы

Сколько ур-ий в (1) и сколько неизв?

$\alpha = 1 \to 1$; $\alpha = 2 \to 3$; $\alpha = 3 \to 1$;

$\alpha = 4 \to 1$; $\alpha = 5 \to 3$; $\alpha = 6 \to 9$.

$\Rightarrow$ имеем 18 скалярн. ур-ий

Неизв. в сист. (1):

$$\underset{1}{\rho}, \ \underset{3}{\bar{v}}, \ \underset{1}{e}, \ \underset{1}{\psi}, \ \underset{3}{\bar{u}}, \ \underset{9}{F}, \ \underset{6}{T}, \ \underset{3}{\bar{q}}, \ \underset{1}{\theta}, \ \underset{1}{\bar{q}^*} \quad (3)$$

остальные величины: f, q_m — известны. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 29 неизв. $\Rightarrow$ система незамкнута

Т.о., должны быть привлечены дополнит. соотнош., которые:

1) ~~замкнути~~ замыкают систему (1)

2) конкретезируют (определяют) СС

Т.о. Такие соотнош. наз-ют определяющими (ОС)

2. Принципы построения ОС

ОС вводятся аксиоматически, т.е. формулируются в виде некоторых ограничений (принципов) на введение неизвестных (3)

Принципы, которые исп. для построения ОС:

1) принцип термодинамич. ~~...~~ согласов. деформ. (ТСД)
2) принцип локальности
3) принцип равноприсутствия
4) .. материальной индифферентности
5) .. материальной симметрии
6) .. Онзагера

Модель СС $\Leftrightarrow$ задается ОС для СС

3. Энергетические пары тензоров напряжения и деформ.

Рассмотрим мощность внутр. напряж.

$$w_{(i)} = T \cdot\cdot \nabla \otimes v^T \qquad (4)$$

мощность внутр. напряж.

$dA = w_{(i)}\, dt$ — элемент. работа внутр. напряж.

Можно ли представить (4) в виде $w_{(i)} = \overset{(n)}{T} \cdot\cdot \dfrac{d}{dt}\overset{(n)}{C}$?

или $d'A = \overset{(n)}{T} \cdot\cdot d\overset{(n)}{C}$ (5)

$n = \overline{I..V}$

$$ {}^4\overset{(n)}{E} = \sum_{\alpha,\beta=1} \overset{(n)}{E}_{\alpha\beta}\, \bar{p}_\alpha \otimes \bar{p}_\beta \otimes \mathring{\bar{p}}_\beta \otimes \mathring{\bar{p}}_\alpha , $$

где $\bar{p}_\alpha$ и $\mathring{\bar{p}}_\alpha$ – собств. вектора U и V

$$ F \cdot F^T = V^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^2\, \bar{p}_\alpha \otimes \bar{p}_\alpha \qquad (8) $$

$$ \overset{(n)}{T} = {}^4\overset{(n)}{E}{}^{-1} \cdot\cdot\, T \qquad (9) $$

С помощью левого тензора искажений V тоже можно построить энергетич. пары

$$ W_{(i)} = \overset{(n)}{S} \cdot\cdot \frac{d}{dt} \overset{(n)}{A}{}^{T} + \dot{S} \cdot\cdot \frac{d}{dt} O^T \;\#, \qquad \overset{(n)}{A} = \frac{1}{n-\text{III}} \left(V^{n-\text{III}} - E \right) \qquad (10) $$

$(\overset{(n)}{S}, \overset{(n)}{A})$ – квазиэнергетич. пары тензоров

4. Основные термодинамич. тождества (ОТТ)

Рассмотрим законы сохранения МСС в Эйлеровом описании в полных дифференц.

. в частности $\alpha = 3$ и $\alpha = 4$

Рассмотрим след. вид ур-ие энергии →

ур-ие притока тепла:

$$ \alpha = 3 \qquad \rho \frac{de}{dt} = T \cdot\cdot \nabla \otimes \bar{v}^T - \nabla \bar{q} + \rho q_m \qquad (11) $$

$\alpha = 4$ ур-ие баланса энтропии:

$$ \rho\, \theta \frac{d\eta}{dt} = -\nabla \cdot \bar{q} + \rho q_m + W^*, \qquad (12) $$

$W^* \geq 0$

Утверждение: $\exists$ по крайней мере 5 пар тензоров $[\overset{(n)}{T}, \overset{(n)}{C}]$, $n = \overline{I..V}$, которые наз-ся энергетич. пары тенз.

$\overset{(n)}{T}$ – энергет. тенз. напряж.

$\overset{(n)}{C}$ – энер. тенз. деформаций

при этом,

- $\overset{(n)}{T}$, $\overset{(n)}{C}$ – симметричны
- удовл. (5)

	$\overset{(n)}{T}$	$\overset{(n)}{C}$
$\underline{I}$	$\overset{I}{T} = F^T \cdot T \cdot F$	$\overset{I}{C} = \Lambda = \frac{1}{2}(E - U^{-2})$
$\underline{II}$	$\overset{II}{T} = \frac{1}{2}(F^T \cdot T \cdot O + O^T \cdot T \cdot F)$	$\overset{II}{C} = E - U^{-1}$
$\underline{III}$	$\overset{III}{T} = O^T \cdot T \cdot O$	$\overset{III}{C} = B$
$\underline{IV}$	$\overset{IV}{T} = \frac{1}{2}(F^{-1} \cdot T \cdot O + O^T \cdot T \cdot F^{-1T})$	$\overset{IV}{C} = U - E$
$\underline{V}$	$\overset{V}{T} = F^{-1} \cdot T \cdot F^{-1T}$	$\overset{V}{C} = C = \frac{1}{2}(U^2 - E)$

где $\frac{dB}{dt} = \frac{1}{2}\left(U^{-1} \frac{dU}{dt} + \frac{dU^{-1}}{dt} \cdot U\right)$

Все $\overset{(n)}{C}$ имеют вид: $\overset{(n)}{C} = \frac{1}{n - \underline{III}}\left(U^{n - \underline{III}} - E\right)$ (*)

т.е. при $n = \underline{I}$: $\overset{I}{C} = \frac{1}{\underline{I} - \underline{III}}\left(U^{\underline{I} - \underline{III}} - E\right) =$

$= \frac{1}{1-3}\left(U^{1-3} - E\right) = -\frac{1}{2}\left(U^{-2} - E\right) = \frac{1}{2}\left(E - U^{-2}\right)$ #

Для T можно записать след. ф-лу:

$$T = {}^4\overset{(n)}{E} \cdot\cdot \overset{(n)}{T}, \quad n = \underline{I}..\underline{V} \qquad (7)$$

где $\overset{(n)}{E}$ – тензоры энергетич. эквивалентности

(11) – (12):

$$\rho \frac{de}{dt} - \rho\theta\frac{d\eta}{dt} - T \cdot\cdot \nabla \otimes \bar{v}^T + w^* = 0 \quad (13)$$

умножим на dt:

$$\rho de - \rho\theta d\eta - T \cdot\cdot \nabla \otimes \bar{v}^T dt + w^* dt = 0 \quad (14)$$

используя (5) (теорема о ∃ энергетич. пар) и поделим на ρ:

$$de - \theta d\eta - \frac{\overset{(n)}{T}}{\rho} \cdot\cdot d\overset{(n)}{C} + \frac{w^*}{\rho} dt = 0 \quad (15)$$

Основное термодинамич. тождество в "e-форме"

Введем $\psi = e - \theta\eta$ (16)

– свободная энергия Гельмгольца

Вычислим $d\psi = de - \theta d\eta - \eta d\theta$

$$\Rightarrow de - \theta d\eta = d\psi + \eta d\theta \quad (17)$$

$$(17) \to (15): \ d\psi + \eta d\theta - \frac{\overset{(n)}{T}}{\rho} \cdot\cdot d\overset{(n)}{C} + \frac{w^*}{\rho} dt = 0 \quad (18)$$

ОТТ в ψ-форме.

5. Принцип термодинамич. согласованного детерминизма (ТСД)

Рассмотрим ОТТ (18) и разделим велич., которые входят в него на группы.

$$R = \{\theta, \overset{(n)}{C}, t\}, \quad \Lambda = \{\psi, \frac{\overset{(n)}{T}}{\rho}, \frac{w^*}{\rho}, \eta\}$$

реактивные переменн. — активные переменн.

Это и есть искомая ОС для идеальной с. с

Т. О, принцип ТСД $\longrightarrow$ ОС для идеальн. сред $w^*=0$, т.е. идеальные среды ~~[illegible]~~ недиссипативные

Реальные среды обладают диссипацией $w^* \neq 0$

Лекция 17

1. Принцип равноприсутствия и принцип локальности

Для идеальных сред из ОТТ $\Rightarrow$

$$\psi = \psi(\theta, \overset{(n)}{C}) \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \psi(t) = \psi(\theta(t), \overset{(n)}{C}(t)) \\ \overset{(n)}{T} = \rho \dfrac{\partial \psi}{\partial \overset{(n)}{C}} = f(\theta, \overset{(n)}{C}) \\ \eta = -\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ w^* = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$$\eta = \eta(\theta, \overset{(n)}{C})$$

$$\rho = \rho(F) = \rho(\overset{(n)}{C})$$

$$\overset{\circ}{\rho} = \rho \det F \Rightarrow \rho = \frac{\overset{\circ}{\rho}}{\det F}$$

Все активные переменные являются ф-ии одних и тех же реактивных переменн. (аргументов) Это и есть принцип равноправия

Принцип локальности: $\Lambda(t, x^i) = f(R(t, x^i))$, (3)

т. е. зависимость вида $\Lambda(t, x^i) = f(R(t, x^i), x^i)$ не допускается.

Аксиома II (Принцип ТСД)

Для $\forall$ СС $\Lambda = \check{f}(R)$ или (20)

$$\check{f}: X_R \to X_\Lambda \quad (21)$$

причем (20) должны тождественно удовл. (18)

Еще более общее соотнош: $\check{f}(R, \Lambda) = 0$ (23)

Пример 1: $\Lambda(t) = \check{f}(R(t))$ — это ф-ция, дифф в некотор. $V_R \subset X_R$

Пример 2: $\Lambda(t) = \mathop{f}\limits_{\tau=0}^{t}(R(\tau))$ — функционал от предыстории реактивного переменного $R(\tau)$, $0 \le \tau \le t$ (25)

Опр СС, для которых имеют место отношения (24) наз-ся идеальными (и не зависят от t)

Рассмотр. далее только идеальные С.С.

Тогда из (24) $\Rightarrow \psi = \psi(\theta, \overset{(n)}{C})$ (26)

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \psi}{\partial \overset{(n)}{C}} \cdot\cdot\, d\overset{(n)}{C} \quad (27)$$

Подставим (26) в ОТТ (18)

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \psi}{\partial \overset{(n)}{C}} \cdot\cdot\, d\overset{(n)}{C} + \eta\, d\theta - \frac{\overset{(n)}{T}}{\rho} \cdot\cdot\, d\overset{(n)}{C} + \frac{w^*}{\rho} dt = 0 \quad (28)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \overset{(n)}{C}} - \frac{\overset{(n)}{T}}{\rho}\right) \cdot\cdot\, d\overset{(n)}{C} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \eta\right) d\theta + \frac{w^*}{\rho} dt = 0 \quad (29)$$

$$\Rightarrow \overset{(n)}{T} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \overset{(n)}{C}}; \quad \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad \frac{w^*}{\rho} = 0 \quad (30)$$

Опр 1 Тензор 2-го ранга Ω и вектор $\bar{a}$ называют И-индифферентными, если при переходе у $\overset{\circ}{K}$ в $\overset{*}{K}$ их компоненты в базисе $\overset{\circ}{\bar{r}}_i$ и $\overset{*}{\bar{r}}_i$ не изменяются, т.е.

$$\text{в } \overset{\circ}{K}: \quad \overset{\circ}{\Omega} = \overset{\circ}{\Omega}{}^{ij}\, \overset{\circ}{\bar{r}}_i \otimes \overset{\circ}{\bar{r}}_j$$

$$\text{в } \overset{*}{K}: \quad \overset{*}{\Omega} = \overset{*}{\Omega}{}^{ij}\, \overset{*}{\bar{r}}_i \otimes \overset{*}{\bar{r}}_j \qquad (13)$$

$$\overset{\circ}{\Omega}{}^{ij} = \overset{*}{\Omega}{}^{ij}$$

Аналогично для вектора $\bar{a}$: $\overset{\circ}{\bar{a}} = \overset{\circ}{a}{}^i\, \overset{\circ}{\bar{r}}_i$; $\overset{\circ}{a}{}^i = \overset{*}{a}{}^i$

$\overset{*}{\bar{a}} = \overset{*}{a}{}^i\, \overset{*}{\bar{r}}_i$ (14)

$\overset{*}{\Omega}$, $\overset{*}{\bar{a}}$ строятся точно по ~~$\overset{\circ}{a}{}^i = \overset{*}{a}{}^i$~~ таким же правилам, что и Ω, и $\bar{a}$, но в $\overset{*}{K}$

Опр 2 Тензор Ω и вектор $\bar{a}$ наз-ют И-инвариантны, если при переходе $\overset{\circ}{K} \to \overset{*}{K}$, $\Omega = \overset{*}{\Omega}$, $\bar{a} = \overset{*}{\bar{a}}$ (15)

Пример 1 Вектори $\bar{r}_i$ и $\bar{r}^i$ в K не зависят от $\overset{\circ}{K}$ и от $\overset{*}{K}$, т.е. $\bar{r}_i$ и $\bar{r}^i$ — И-инв.

Пример 2 Вектори $\overset{\circ}{\bar{r}}_i$ в $\overset{\circ}{K}$ и $\overset{*}{\bar{r}}_i$ в $\overset{*}{K}$

$\overset{\circ}{\bar{r}} = \delta_i^j \cdot \overset{\circ}{\bar{r}}_j$ и $\overset{*}{\bar{r}}_i = \delta_i^j \overset{*}{\bar{r}}_j$, тогда

$\overset{\circ}{\bar{r}}_i$ — И-индифф.

Установим соотнош. между $\overset{*}{\bar{r}}_i$ и $\overset{\circ}{\bar{r}}_i$: $\overset{*}{\bar{r}}_i = H \cdot \overset{\circ}{\bar{r}}_i$ (16)

$$\overset{*}{\bar{r}}{}^i = H^{-1^T} \circ \overset{\circ}{\bar{r}}{}^i \qquad (17)$$

Рассмотр. И-индифф. вектор

$$\overset{*}{\bar{a}} = \overset{*}{a}{}^i\, \overset{*}{\bar{r}}_i = \overset{*}{a}{}^i\, \overset{\circ}{\bar{r}}_i \cdot H^T = \overset{\circ}{a}{}^i\, \overset{\circ}{\bar{r}}_i\, H^T = \bar{a}_i \cdot H^T$$

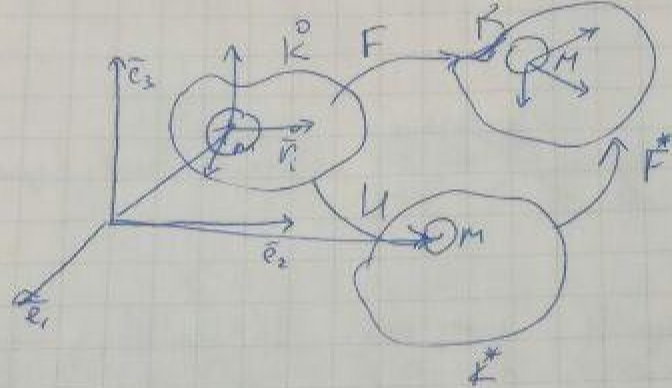
Неоднородные сплошные среды

$$\Lambda(t, x^i) = h_\alpha(R(t, x^i)), \quad x^i \in V_\alpha, \quad \alpha = 1..N$$

2. Принцип материальной симметрии

До сих пор выбор отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{K}$ был произволен. Выберем еще одну отсчетную конфигурацию $\overset{*}{K}$.

Будем рассматривать движения СС из $\overset{*}{K}$ в K, тогда:



$\overset{\circ}{x} = \overset{\circ}{x}(X^j)$ в $\overset{\circ}{K}$ (5)

$\overset{*}{x} = \overset{*}{x}(X^j)$ в $\overset{\circ}{K}$ (6)

Это введение крив. коорд.

$\overset{\circ}{x}{}^i = \overset{\circ}{x}{}^i(X^j)$ в $\overset{\circ}{K}$ (7)

$\overset{*}{x}{}^i = \overset{*}{x}{}^i(X^j)$ в $\overset{*}{K}$ (8)

из (5) и (6) $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} \overset{\circ}{r}_i &= \frac{\partial \overset{\circ}{x}}{\partial X^i} \text{ в } \overset{\circ}{K} \\ \overset{*}{r}_i &= \frac{\partial \overset{*}{x}}{\partial X^i} \text{ в } \overset{*}{K} \\ \bar r_i &= \frac{\partial x}{\partial X^i} \text{ в } K \end{aligned}\right\} (9)$$

Введем $\overset{\circ}{K} \to K$: $F = \bar r_i \otimes \overset{\circ}{r}{}^i$

$\overset{*}{K} \to K$: $F = \bar r_i \otimes \overset{*}{r}{}^i$ (10)

$\overset{\circ}{K} \to \overset{*}{K}$: $H = \overset{*}{r}_i \otimes \overset{\circ}{r}{}^i$

Эти тензоры связаны соотнош.: $F = \overset{*}{F} \cdot H$ (11)

$$\bar r_i \otimes \overset{\circ}{r}{}^i = \bar r_i \otimes \overset{*}{r}{}^i \cdot \overset{*}{r}_j \otimes \overset{\circ}{r}{}^j = \delta^i_j \, \bar r_i \otimes \overset{\circ}{r}{}^j = \bar r_i \otimes \overset{\circ}{r}{}^i = F$$

$\overset{*}{F} = F \cdot H^{-1}$ (12)

таким образом $\overset{*}{a} = \bar{a} \cdot H^T$ (18)

Аналогично для H- индифф. тензора $\overset{*}{\Omega} = H \Omega \cdot H^T$ (19)

3. Группы симметрий сплошной среды

Рассмотр. не одно H-преобр. $H: \overset{\circ}{K} \to \overset{*}{K}$, а множ-во с различн. H,

однако $\overset{\circ}{\rho} = \overset{*}{\rho}$ (отражение) (20)

$\parallel$ $\overset{\circ}{\rho} = \overset{*}{\rho} \det H \Rightarrow \det H = \pm 1$ (21)

Утвержд. мн-во H-преобр. для которых выполн. (20) или (21), не изменяют ОС., т.е. если $\overset{\circ}{K} \to K$ O^C, имеет вид

$$\begin{cases} \psi = \psi(\theta, \overset{(n)}{C}) \\ \overset{(n)}{T} = \rho \dfrac{\partial \psi}{\partial \overset{(n)}{C}} = F(\theta, \overset{(n)}{C}) \end{cases} \quad (22)$$

то для $\overset{*}{K} \to K$ ОС имеет вид

$$\begin{cases} \psi = (\theta, \overset{(n)}{C}{}^*) \\ \overset{(n)}{T}{}^* = \rho \dfrac{\partial \psi}{\partial \overset{(n)}{C}{}^*} = F(\theta, \overset{(n)}{C}{}^*) \end{cases} \quad (23)$$

такое мн-во H-преобразов. образует группу и эта группа наз-ся группой симметрии ОС

4. Формулировка принципа матер. симметр.

Аксиома Для $\forall$ С.С с ОС (22) для $\overset{\circ}{K} \to \overset{*}{K}$ с выбранной $\overset{\circ}{K}$ всегда $\exists$ некотор. группа симметр. G_s – группа H-преобр. $\overset{\circ}{K} \to \overset{*}{K}$, которая сохран. ОС (23) и выполн. услов. сохр. плотности (21)

5. Определение твердых и жидк. сред

<u>Ув.</u> Н-тензоры, сохраняющ. плотность наз-ся унимодулярн.

Множество всех унимодул. преобразов. образуют группу U

Группа симметрии С.С. G_s - всегда явл. унимодул.

$G_s \subset U$

<u>Опр</u> С.С. ~~для~~ которая $\forall \overset{\circ}{K}$ имеет G_s, совпад. с U, т.е. $G_s = U$ наз-ся жидкостью или жидкой средой

<u>Опр</u> С.С. для которой $\exists \hat{K}$ такая что G_s в этой конфигурации является подгруппой полной ортогон. группы I_o Н-преобразов., т.е.

$G_s \subset I_o \subset U$ наз-ся твердой средой

тогда "газ" - жидкости

I_o - полная ортогональная группа - это группа ортогон. Н-преобр., для котор. тензор Н-ортогон.

$H \cdot H^T = E \Leftrightarrow H^T = H^{-1}$

Покажем, что $I_o \subset U$:

если Н-ортогон., то $\det(H \cdot H^T) = \det H \cdot \det H^T = \det E = 1 \Rightarrow \det H = \pm 1 \Rightarrow H \in U$