**Вариант 3.** $g(u_1, u_2) = u_1^2 + 5u_2^2$

# 1 Градиентный метод дробления шага.

$$x_0 = (1, 2); \quad \tilde{\alpha} = \varepsilon = \delta = 0.1$$

$$g(x_0) = 1^2 + 5^2 \cdot 2^2 = 21$$

$$g'(u_1, u_2) = (2u_1, 10u_2)$$

$$g'(x_0) = (2, 20) \neq (0, 0)$$

$$x_1 = (1, 2) - 0.1(2, 20) = (0.8, 0)$$

$$g(x_1) = 0.64 + 0 = 0.64$$

Получаем, что

$$g(x_1) = (1.6, 0) \neq (0, 0)$$

Далее

$$g'(x_1) = (1.6, 0) \neq (0, 0)$$

$$x_2 = (0.8, 0) - 0.1(1.6, 0) = (0.64, 0)$$

$$g(x_2) = 0.4096 + 0 = 0.4906$$

$$g(x_2) = 0.4096 < 0.64 = g(x_1)$$

Приближенное значение точки минимума возьмём $(0.4096, 0)$, тогда минимум функции $m_* \approx 0.4096$.

## 2 Градиентный метод наискорейшего спуска

$$x_0 = (1, 2); \quad \delta = 0.1$$

$$\varphi_0(\alpha) = g(x_0 - \alpha g'(x_0))$$

$$g'(u_1, u_2) = (2u_1, 10u_2)$$

$$g'(x_0) = (2, 20) \neq (0, 0)$$

$$\varphi_0(\alpha) = g((1,2) - \alpha(2u_1, 10u_2)) = g(1-2\alpha, 2-2\alpha) = (1-2\alpha)^2 + 5(2-2\alpha)^2 = 2004\alpha^2 - 404\alpha + 21$$

Минимум функции $\varphi_0(\alpha)$ достигается при $\alpha = \frac{404}{2 \cdot 2004} \approx 0.1$. Тогда:

$$x_1 = (1, 2) - 0.1(2, 20) = (0.8, 0)$$

$$g(x_1) = 0.64$$

$$g'(x_1) = (1.6, 0)$$

Далее

$$\varphi_1(\alpha) = g(x_1 - \alpha g'(x_1)) = g((0.8, 0) - \alpha(1.6, 0)) = (0.8 - 1.6\alpha)^2 = 2.56\alpha^2 - 2.56\alpha + 0.64$$

Минимум $\varphi_1(\alpha)$ Достигается при $\alpha = \frac{1}{2}$. Тогда минимум функции $m_* = 0$.

# 3 Метод сопряжённых направлений

$$u_0 = (1, 2)$$

$$Q(u) = Q(u_1, u_2) = u_1^2 + 5u_2^2$$

$$Q(u) = Q(u_1, u_2) = \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle b, u\rangle$$

$$Q'(u) = Q'(u_1, u_2) = Au - b,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_0 = Q'(u_1, u_2) = Au - b = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Положим $u_1 = u_0 - \alpha_0 p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \alpha_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix}$,

$$\alpha_0 = \frac{\langle Q'(u_0), p_0\rangle}{\langle Ap_0, p_0\rangle} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix} \right\rangle} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 200 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix} \right\rangle} = \frac{404}{4008} \approx 0.1$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 0.1 \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q'(u_1) = Au_1 - b = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_1 = Q'(u_1) - \beta_0 p_0 = \begin{pmatrix} 1.6 \\ 0 \end{pmatrix} - \beta_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\beta_0 = \frac{\langle Ap_0, Q'(u_1)\rangle}{\langle Ap_0, p_0\rangle} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 200 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 200 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix} \right\rangle} = \frac{3.2}{4008} \approx 0.0008$$

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1.6 \\ 0 \end{pmatrix} - 0.0008 \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5984 \\ -0.016 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = u_1 - \alpha_1 p_1 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \end{pmatrix} - \alpha_1 \begin{pmatrix} 1.5984 \\ -0.016 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_1 = \frac{\langle Q'(u_1), p_1 \rangle}{\langle A p_1, p_1 \rangle} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1.6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5984 \\ -0.016 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 3.1968 \\ -0.016 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5984 \\ -0.016 \end{pmatrix} \right\rangle} = \frac{2.5574}{5.1100} \approx 0.5$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0 \end{pmatrix} - 0.5 \begin{pmatrix} 1.5984 \\ -0.016 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0008 \\ 0.008 \end{pmatrix}$$

Тогда приблизительная точка минимума $(0.0008, 0.008)$, $m_* = 0.04$.