МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Домашнее задание №1 по основам сеточных методов

3 курс, группа ФН11-63Б
Вариант 3

Преподаватель
_____________ В. А. Кутыркин
«___» _______ 2020 г.

Москва, 2020 г.

Задание 1

Задание.
Используя дискретный аналог уравнения (1) Фредгольма 2-го рода с симметричным, непрерывным и аналитически заданным ядром

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s,\tau)x(\tau)d\tau = y(s), \quad s \in [a;b] \tag{1}$$

индуцированный методом конечных сумм с квадратурными формулами прямоугольников (количество узлов в квадратурной формуле не менее 20), найти приближённое решение уравнения (1), которое имеет конкретный вид:

$$x(s) - \frac{1}{n-59}\int_0^{\frac{N+5}{\mu}} K(s,\tau)x(\tau)d\tau = \frac{N+5}{N}\left(s^2+n-59\right), \quad s \in \left[0; \frac{N+5}{N}\right]$$

(N – номер студента в журнале, n – номер группы) И

$$K(s,\tau) = \begin{cases} s\left(2\frac{N+5}{N} - \tau\right), & 0 \le s \le \tau \\ \tau\left(2\frac{N+5}{N} - s\right), & \tau \le s \le \frac{N+5}{N} \end{cases}$$

Оценить абсолютную погрешность приближённого решения, сравнив его с аналитическим решением, полученным сведением уравнения (1) к краевой задаче для обыкновенного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Исходные данные.
$N = 3, n = 63$
Решение.
Вычисления будем производить в системе Maple 18. Будем использовать 20 узлов центрально-равномерной сетки. Тогда с учётом исходных данных имеем:

$$K(s,\tau) = \begin{cases} s\left(\frac{16}{3} - \tau\right), & 0 \le s \le \tau \\ \tau\left(\frac{16}{3} - s\right), & \tau \le s \le \frac{8}{3} \end{cases}$$

Для любого узла $s_i \in B \quad (i = \overline{1,20})$ и функций K, x, y из уравнения (1) приняты обозначения:

$$K_j^i = \int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} K(s_i;\tau)d\tau \ \ (j=\overline{1,n});$$

$$K_i^i = \int\limits_{\tau_{i-1}}^{s_i} K(s_i;\tau)d\tau + \int\limits_{s_i}^{\tau_i} K(s_i;\tau)d\tau \ \text{ для } i=j \ ;$$

$$K_j^i = \int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} K(s_i;\tau)d\tau \ \text{ для } i \neq j;$$

$$x^i = x(s_i) \ \text{ и } \ y^i = y(s_i).$$

Используя эти обозначения и приближенное равенство $x_* \approx \sum_{j=1}^{n} x_*(s_j)\,\mathrm{spl}_0(A;^{>}\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_*^j h_j$, из уравнения (1) получаем его дискретный аналог, аппроксимирующий уравнение (1) при $h,\tau \to 0$, в виде СЛАУ

$$\left\{ \begin{array}{l} x^i - \lambda \sum\limits_{j=1}^{20} K_j^i \cdot x^j = y^i \\ i = \overline{1,20} \end{array} \right. \tag{2}$$

Введём обозначения:

$$^{>}x = \left[x^1,\ldots,x^{20}\right\rangle, ^{>}y = \left[y^1,\ldots,y^{20}\right\rangle \in^{>} \mathbb{R}^n, F = \left(\delta_j^i - \lambda K_j^i \cdot h\right)_{20}^{20} = \left(f_j^i\right)_{20}^{20} \in L(\mathbb{R},20), \tag{3}$$

где

$$\delta_j^i = \left\{ \begin{array}{l} 1, i=j \\ 0, i\neq j \end{array} \right.$$

Используя эти обозначения, СЛАУ перепишем в виде

$$F \cdot^{>} x =^{>} y \tag{4}$$

Решая СЛАУ (4), получаем сеточную функцию $^{>}x = \left[x^1,\ldots,x^{20}\right\rangle \in^{>} \underline{\mathbb{R}}^{|A|}(A)$, индуцирующую с помощью интерполяции приближенное решение уравнения (1). При $h \longrightarrow 0 (n \longrightarrow +\infty)$ такое приближенное решение в чебышёвской норме сходится к решению уравнения (1).

С помощью СЛАУ (4) находим численное решение интегрального уравнения.

$$^{>}x = [8.822711767, 5.060213014, 1.272657527, -2.450440825, -6.021091536, -9.354906997, -12.37309689, -15.00433028, -17.18642144, -18.86779955, -20.00872744, -20.58224080, -20.57478540, -19.98653743, -18.83139936, -17.13667135, -14.94240606, -12.30046204, -9.273278150, -5.932397878]$$

Приводим интегральное уравнение к краевой задаче для дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Имеем:

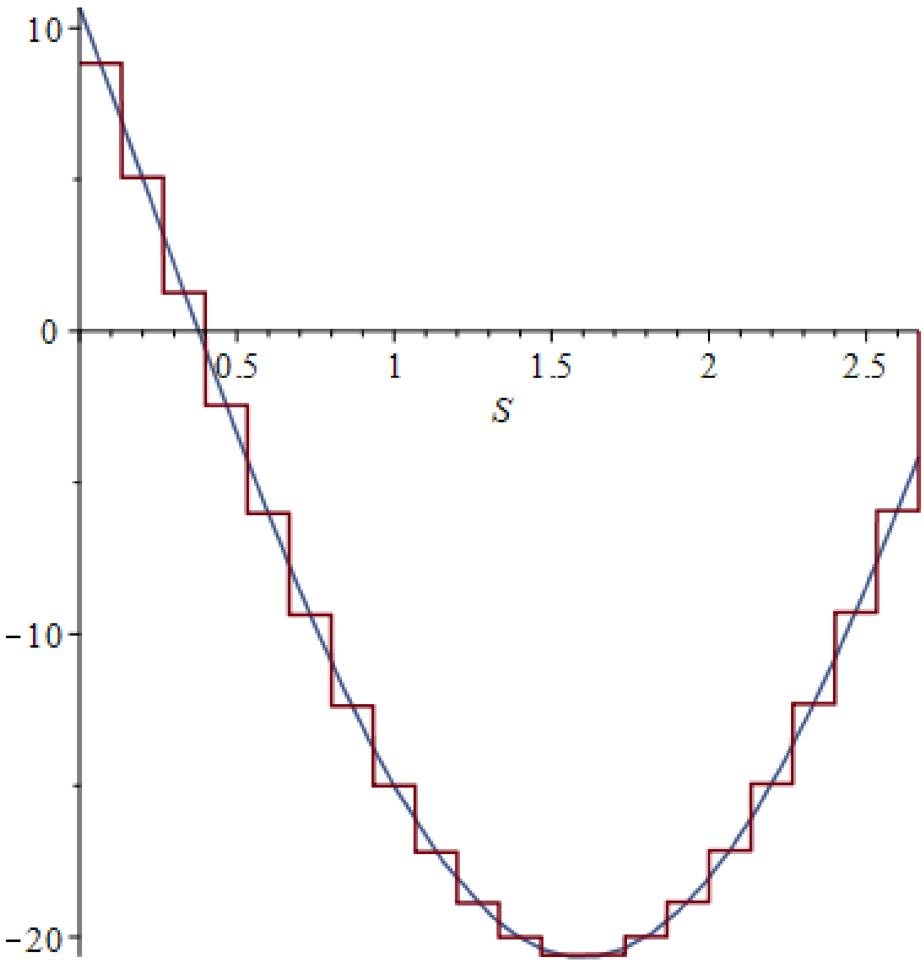
$$\begin{cases} x''(s) + \frac{2}{n-59}\frac{N+5}{N}x(s) = 2\frac{N+5}{N} \\ x(0) = \frac{1}{n-59}\int\limits_0^0 K(0,\tau)\cdot x(\tau)d\tau + y(0) = y(0) \\ x\left(\frac{N+5}{N}\right) = \frac{1}{n-59}\int\limits_0^{\frac{N+5}{N}} K\left(\frac{N+5}{N},\tau\right)\cdot x(\tau)d\tau + y\left(\frac{N+5}{N}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''(s) + \frac{4}{3}x(s) = \frac{16}{3} \\ x(0) = \frac{32}{3} \\ x(\frac{8}{3}) = -4.134137784 \end{cases}$$

Тогда аналитическое решение:

$$\begin{cases} x(s) = c_1\sin\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot s\right) + c_2\cos\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot s\right) + 4 \\ c_1 = -23.74378078 \\ c_2 = 6.666666667 \end{cases}$$

Построим совмещённые графики:



Максимальная абсолютная погрешность: 1.886427814

Проверим:

$$X(0) = evalf\left(subs\left(S=0, \frac{1}{n-59}\cdot\int_0^S T\cdot\left(\frac{2\cdot(N+5)}{N} - S\right)\cdot X(T)\,dT - \frac{1}{n-59}\cdot\int_S^{\frac{(N+5)}{N}} S\cdot\left(\frac{2\cdot(N+5)}{N} - T\right)\cdot X(T)\,dT + y(S)\right)\right), evalf\left(X\left(\frac{N+5}{N}\right)\right)$$

$$= evalf\left(subs\left(S=\frac{(N+5)}{N}, \frac{1}{n-59}\cdot\int_0^S T\cdot\left(\frac{2\cdot(N+5)}{N} - S\right)\cdot X(T)\,dT - \frac{1}{n-59}\cdot\int_S^{\frac{(N+5)}{N}} S\cdot\left(\frac{2\cdot(N+5)}{N} - T\right)\cdot X(T)\,dT + y(S)\right)\right)$$

$$10.66666667 = 10.66666667,\ -4.134137815 = -4.134137741$$

Вывод.

Применение метода коллокаций для приближенного решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным, непрерывным, аналитически заданным ядром допустимо и даёт хорошую точность численного решения.