МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Домашнее задания №3 по теории случайных процессов

3 курс, группа ФН11-63Б
Вариант 19

Преподаватель
_____________ Т. В. Облакова
«___» _______ 2020 г.

Москва, 2020 г.

Моделирование гауссовского процесса с данной автоковариационной функцией

На отрезке $[0, T]$ с шагом h смоделировать n траекторий гауссовского процесса с заданным математическим ожиданием $m(t)$ и заданной автоковариационной функцией $K(t_1, t_2)$. Вывести на печать две-три траектории.
Выбрать несколько пар сечений построенного процесса (для далёких значений t_1 и t_2, для близких, для соседних). Построить для выбранных пар сечений диаграммы рассеяния, вычислить выборочные коэффициенты корреляции, построить 95% доверительные интервалы и сравнить с теоретическими значениями соответствующих коэффициентов корреляции.Сформулировать выводы.
Начальные данные.

1. Интервал – $[0; 10]$
2. Шаг – 0.05
3. Число траекторий – 160
4. Математическое ожидание – $m(t) = 1 + \mathrm{e}^{-t}$
5. Автоковариационная функция – $K(t_1, t_2) = 2\mathrm{e}^{-\frac{|t_2 - t_1|}{2}}$

Решение.
Введём начальные данные:

```
> set.seed(1337)
> Tt <- 10
> Hh <- 0.05
> N <- 160
> Mm <- function(t) {1 + exp(-t)}
> covar <- function(t_1,t_2) {2*exp(-abs(t_2 - t_1)/2)}
```

Моделирование траектории

Следуя алгоритму предложенному в условии:

1. Находим размерность $N+1$ случайного вектора $\xi_0, \xi_h, \ldots, \xi_{Nh}, \quad N = \frac{T}{h}$:

```
# С учётом индекса начала отсчёта:
> Nn <- Tt/Hh
> Nn
[1] 200
```

2. Вычисляем вектор математических ожиданий:

```
> kh <- seq(0,Tt,Hh) # Формуруем равномерную сетку
> head(kh,10)
[1] 0.00 0.05 0.10 0.15 0.20 0.25 0.30 0.35 0.40 0.45

> vect_expected <- Mm(kh)
> head(vect_expected,5)
[1] 2.000000 1.951229 1.904837 1.860708 1.818731
```

А также матрицу ковариаций:

```
> Sigma_mat <- outer(kh,kh, FUN = covar)
> Sigma_mat[1:5,1:5]
[,1]     [,2]     [,3]     [,4]     [,5]
[1,] 2.000000 1.950620 1.902459 1.855487 1.809675
[2,] 1.950620 2.000000 1.950620 1.902459 1.855487
[3,] 1.902459 1.950620 2.000000 1.950620 1.902459
[4,] 1.855487 1.902459 1.950620 2.000000 1.950620
[5,] 1.809675 1.855487 1.902459 1.950620 2.000000
```

Где элементы (σ_{ij}) матрицы Σ получены как внешнее произведение вектора сетки на себя (ниже приведено общее определение внешнего произведения)

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \ldots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \ldots & u_2v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_mv_1 & u_mv_2 & \ldots & u_mv_n \end{bmatrix},$$

а стандартная операция умножения заменена на автоковариационную функцию.

3. Генерируем с помощью встроенного датчика случайных чисел базовую последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин
$$\overrightarrow{\varepsilon}^T = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$$

```
> eps <- rnorm(Nn+1, mean = 0, sd = 1)
> head(eps,5)
[1]  0.1924919 -1.4467018 -0.3231805  1.6222961 -0.6890241
> tail(eps,5)
[1]  0.3135906  0.1310152 -0.9432088  2.9289056  1.1622098
```

4. Представим полученную выше матрицу ковариаций в разложении Холецкого, то есть
$$\Sigma = LL^T$$

```
L <- t(chol(Sigma_mat))
# Верхние 7*7 элементов, округленные до 4 знаков
> round(L[1:7,1:7],4)
       [,1]   [,2]   [,3]   [,4]   [,5]   [,6]   [,7]
[1,] 1.4142 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
[2,] 1.3793 0.3123 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
[3,] 1.3452 0.3046 0.3123 0.0000 0.0000 0.0000 0.0000
[4,] 1.3120 0.2971 0.3046 0.3123 0.0000 0.0000 0.0000
[5,] 1.2796 0.2897 0.2971 0.3046 0.3123 0.0000 0.0000
[6,] 1.2480 0.2826 0.2897 0.2971 0.3046 0.3123 0.0000
[7,] 1.2172 0.2756 0.2826 0.2897 0.2971 0.3046 0.3123
```

Тогда вектор $\overrightarrow{\eta} = L\overrightarrow{\varepsilon}$ будет иметь многомерное нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей Σ.

```
> eta <- as.numeric(L %*% eps)
> head(eta,5)
[1]  0.27222466 -0.18632440 -0.28265842  0.23098913  0.01009288
> tail(eta,5)
[1] 1.0266623 1.0422321 0.7219203 1.6188395 1.9418466
```

5. Для получения искомого вектора $\overrightarrow{\xi}$ добавляем к каждому элементу $\overrightarrow{\eta}$ соответствующее математическое ожидание $\xi_{kh} = \eta_k + m(kh)$:

```
> ksi <- vect_expected + eta
> head(ksi,5)
[1] 2.272225 1.764905 1.622179 2.091697 1.828824
> tail(ksi,5)
[1] 2.026718 2.042285 1.721970 2.618887 2.941892
```

Формирование общего вида функции

Описанные в предыдущем пункте действия позволяют смоделировать одну траекторию. Для формирования $N = 160$ траекторий, оформим описанный выше алгоритм в обособленную функцию и реплицируем результат N раз. Тогда функция имеет вид:

```
### Функция моделирования одной траектории
trajectories <- function(Tt, Hh)
{
  Nn <- Tt/Hh
  kh <- seq(0,Tt,Hh)
  vect_expected <- Mm(kh)
  Sigma_mat <- outer(kh,kh, FUN = covar)
  eps <- rnorm(Nn+1, mean = 0, sd = 1)
  L <- t(chol(Sigma_mat))
  eta <- as.numeric(L %*% eps)
  ksi <- vect_expected + eta
  return(ksi)
}
```

Тогда можем получить лист из $N = 160$ траекторий:

Распечатаем несколько траекторий целиком (округлив до 3 знаков после запятой на печати):

```
> round(traj_list[[1]], 3)
[1] 2.272 1.765 1.622 2.092 1.829 2.426 2.667 3.258 3.784
[10] 3.570 3.814 3.205 3.186 3.584 3.484 3.808 3.928 4.095
[19] 4.590 4.321 4.423 4.368 4.029 3.791 3.203 3.699 3.719
[28] 3.880 3.467 3.420 3.749 4.020 3.589 4.597 4.278 4.091
[37] 3.845 3.934 3.521 3.438 4.061 3.428 3.385 3.528 3.240
[46] 3.501 3.634 3.706 3.783 3.494 3.419 3.706 3.419 3.006
[55] 2.764 3.035 2.251 2.403 2.467 2.648 2.176 2.243 2.562
[64] 2.669 2.979 3.141 3.559 4.139 3.857 3.372 3.519 3.387
[73] 3.027 3.035 2.987 3.160 2.871 2.836 3.158 3.057 2.955
[82] 3.362 3.931 3.834 4.187 3.787 3.393 3.061 3.276 3.025
[91] 3.355 2.790 2.724 2.662 2.956 3.261 3.345 3.303 3.207
[100] 3.437 3.442 3.262 3.634 3.619 3.490 3.162 2.856 2.976
[109] 2.949 2.671 2.483 2.235 1.974 2.323 2.409 2.460 2.141
[118] 2.239 2.134 2.441 2.308 2.308 2.107 1.622 1.564 1.954
[127] 1.790 1.574 1.378 0.644 0.451 0.558 0.433 0.316 0.866
[136] 0.997 1.398 1.840 2.788 2.927 2.799 2.471 2.470 2.106
[145] 2.167 2.200 2.092 2.376 2.309 2.966 2.392 2.111 2.269
```

```
[154] 2.197 2.612 2.467 2.378 1.912 1.799 1.468 1.336 1.075
[163] 0.802 1.026 0.973 0.738 0.728 0.535 0.498 1.001 1.376
[172] 1.101 1.379 1.368 1.104 1.233 1.403 1.797 1.614 2.069
[181] 2.215 2.153 2.109 1.309 1.098 0.735 1.226 1.363 0.998
[190] 1.201 1.130 1.276 0.814 1.377 1.326 1.952 2.027 2.042
[199] 1.722 2.619 2.942

> round(traj_list[[98]], 3)
[1]  2.300  2.050  2.101  2.339  1.822  1.623  1.531  1.049
[9]  1.059  1.225  1.200  1.637  1.926  1.177  1.729  1.638
[17]  1.606  1.356  1.489  1.612  1.946  1.315  1.371  1.600
[25]  1.928  1.862  1.993  2.279  1.774  1.192  0.888  0.928
[33]  1.355  1.566  1.427  0.790  0.914  0.697 -0.068 -0.118
[41] -0.325 -0.338 -0.515 -0.684 -0.860 -0.460 -0.157 -0.620
[49] -0.593 -0.664 -0.373  0.105  0.381  0.791  1.203  1.286
[57]  1.006  0.545  0.347  0.120  0.908  0.778  1.051  0.853
[65]  1.285  1.127  1.106  1.129  1.143  0.597  0.675  0.504
[73]  0.541 -0.137  0.367  0.357  0.516  0.449  0.817  1.325
[81]  1.688  1.611  1.797  1.937  1.153  1.708  1.478  1.240
[89]  1.489  1.174  0.738  0.076 -0.039 -0.029  0.241  0.300
[97]  0.209  0.109  0.032  0.123  0.586  0.719  0.633  0.608
[105]  0.900  1.777  1.837  1.852  1.697  2.312  2.324  2.434
[113]  1.801  1.984  1.538  1.366  1.185  1.249  0.671  1.356
[121]  1.480  1.242  0.931  0.782  0.950  0.613  0.710  0.918
[129]  0.764  0.823  1.149  0.889  1.206  1.136  1.456  1.244
[137]  1.436  0.868  0.751  0.650  0.359  0.480  0.121  0.193
[145]  0.073  0.552  0.425  0.580  0.263 -0.050  0.006 -0.037
[153] -0.094 -0.083  0.085 -0.302 -0.178 -0.574 -0.782 -0.384
[161] -1.190 -1.070 -0.170 -0.609  0.000  0.066  0.394  0.245
[169]  0.072  0.422  0.250  0.232 -0.285 -0.707 -1.422 -1.730
[177] -1.635 -0.937 -1.214 -1.618 -1.135 -1.548 -1.442 -1.148
[185] -1.003 -1.125 -0.979 -0.789 -0.536  0.083 -0.060 -0.494
[193] -0.224 -0.490 -0.303  0.303  0.504  0.481  0.877  1.274
[201]  1.377

> round(traj_list[[155]], 3)
[1]  1.085  0.856  0.640  1.093  0.824  0.683  0.967  0.648
[9]  0.669  0.331  0.147  0.294  0.350  0.499  0.233  0.269
[17]  0.318  0.071  0.336  0.496  0.661  0.803  0.375  0.145
[25] -0.134 -0.035 -0.248  0.184  0.161  0.396  0.416  0.997
[33]  1.022  0.840  0.781  0.742  0.769  1.040  0.762  0.670
[41]  0.534  0.514  0.068  0.482  0.055  0.371  0.248  0.458
```

```
[49]  0.296  0.014 -0.148 -0.411 -0.136  0.271  0.837  0.615
[57]  0.682  0.788  1.071  0.582  0.127  0.354  0.421  0.641
[65]  0.509  0.749  0.644  0.534  0.239  0.061  0.147 -0.147
[73]  0.016 -0.397 -0.787 -0.521 -0.660 -0.774 -0.706 -0.707
[81] -0.559 -0.622 -0.166 -0.451 -0.750 -0.801 -0.496 -0.636
[89] -0.085  0.308  0.496  0.823  0.514  0.985  0.852  0.647
[97]  0.685  1.105  1.425  1.282  1.377  0.988  1.231  1.275
[105]  1.116  0.940  0.700  0.656  0.585  0.776  0.600  1.015
[113]  0.812  0.507  0.343  0.587  0.759  0.991  0.458  0.030
[121]  0.264  0.071  0.312  0.403  0.237  0.724  0.890  0.918
[129]  0.754  0.354  0.033  0.649  0.571  0.669  0.309 -0.243
[137] -0.353 -0.731 -1.049 -0.980 -1.208 -0.535  0.119  0.484
[145]  0.063  0.032  0.297  0.765  0.661  0.955  0.920  0.615
[153]  0.882  0.842  0.726  0.830  0.932  0.509  0.314  0.534
[161]  0.854  0.839  1.247  1.484  1.439  1.075  0.682 -0.158
[169] -0.023  0.076 -0.481 -0.348 -0.687 -0.489  0.093  0.329
[177]  0.401 -0.018  0.229  0.124  0.142 -0.102  0.122 -0.232
[185]  0.406  0.244  0.053 -0.089 -0.124  0.388  0.269  0.720
[193]  1.234  1.042  1.199  0.900  1.141  0.958  1.474  2.047
[201]  1.912
```

Рассмотрение сечений

Выберем несколько пар сечений (для далёких значений t_1 и t_2, для близких, для соседних). Рассмотрим такие пары:

$$\begin{cases} t_1 = 1; \\ t_2 = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1 = 20; \\ t_2 = 150; \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1 = 130; \\ t_2 = 155; \end{cases}$$

Построим для выбранных пар сечений диаграммы рассеяния, вычислим выборочные коэффициенты корреляции и найдём 95% доверительные интервалы.

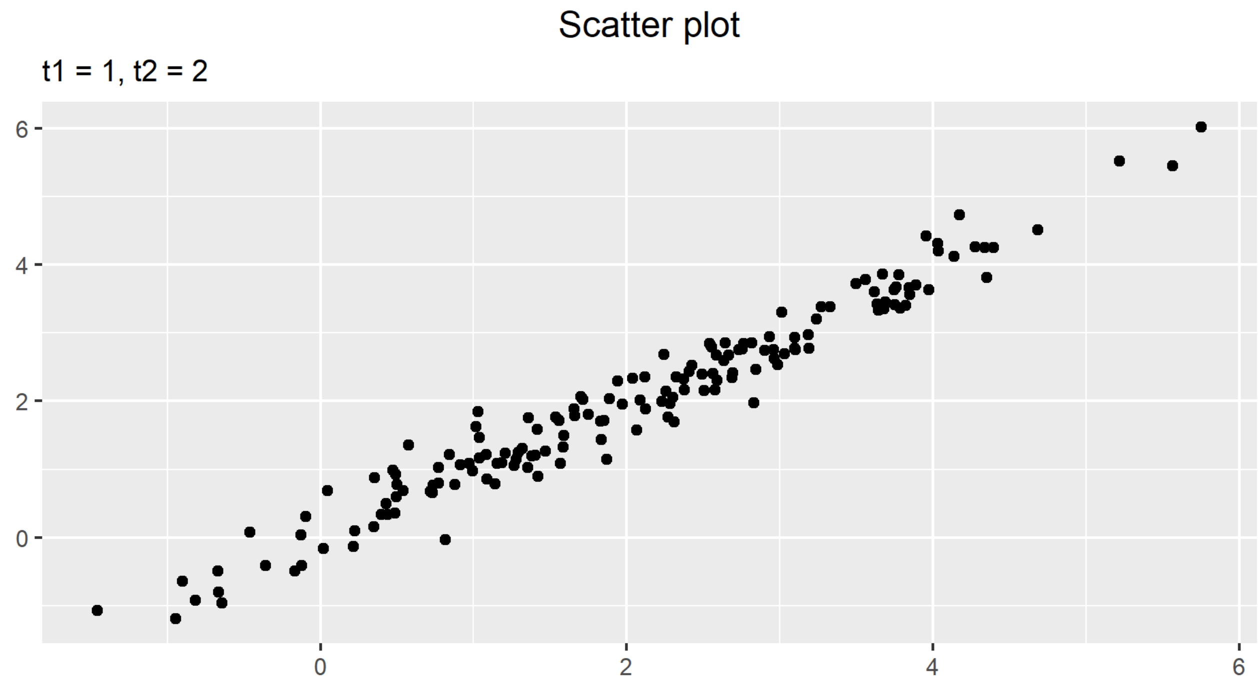
Первый случай: $t_1 = 1, \ t_2 = 2$

Получим сечение:

```
> t1 <- 1
> t2 <- 2
> selected_cut <- as.data.frame(matrix(c(sapply(traj_list, `[[`, t1),
+                                        sapply(traj_list, `[[`, t2)),
+                                      ncol = 2, byrow = F))
> colnames(selected_cut) <- c("t1","t2")
> head(selected_cut)
         V1        V2
1 2.2722247 1.7649050
2 2.5048647 2.1493222
3 1.1405835 0.7866049
4 1.2777371 1.1495950
5 0.4894897 0.9261547
6 0.3540884 0.8774490
```

Построим диаграмму рассеяния для полученной пары сечений:

```
> png(filename = "../img/1.png",
+     width = 1920, height = 1080,
+     res = 96 * 3)
> ggplot(selected_cut, aes(x = t1, y = t2)) + geom_point() +
+   labs(title = "Scatter plot",
+        subtitle = "t1 = 1, t2 = 2",
+        x = "", y = "") +
+   theme(plot.title = element_text(hjust=0.5))
> dev.off()
```



Вычислим выборочный коэффициент r корреляции Пирсона. Согласно формуле:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}$$

В коде это выглядит:

```
> r <- (sum((selected_cut$t1 - mean(selected_cut$t1))*
+              (selected_cut$t2 - mean(selected_cut$t2))))/
+   (sqrt(sum((selected_cut$t1 - mean(selected_cut$t1))^2) *
+           sum((selected_cut$t2 - mean(selected_cut$t2))^2)))
> r
[1] 0.9779025
```

и занимает 4 строчки. Очевидно, что такого рода вычисления бессмысленно выполнять вручную.

Поэтому имеем вместе с доверительными интервалами, формулировкой альтернативной гипотезы и $p-$уровнем значимости для этой гипотезы:

```
> cor_test <- cor.test(selected_cut$t1, selected_cut$t2)
> cor_test

        Pearson`s product-moment correlation

        data:  selected_cut$t1 and selected_cut$t2
        t = 58.796, df = 158, p-value < 2.2e-16
        alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
        95 percent confidence interval:
        0.9699081 0.9837906
        sample estimates:
        cor
        0.9779025
```

То есть:

$$r = 0.9779025$$
$$r_{LB} = 0.9699081$$
$$r_{UB} = 0.9837906$$
$$0.9699081 < 0.9779025 < 0.9837906$$

Можем сделать вывод о том, что с 95% доверительной вероятностью нет оснований принимать нулевую гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции.

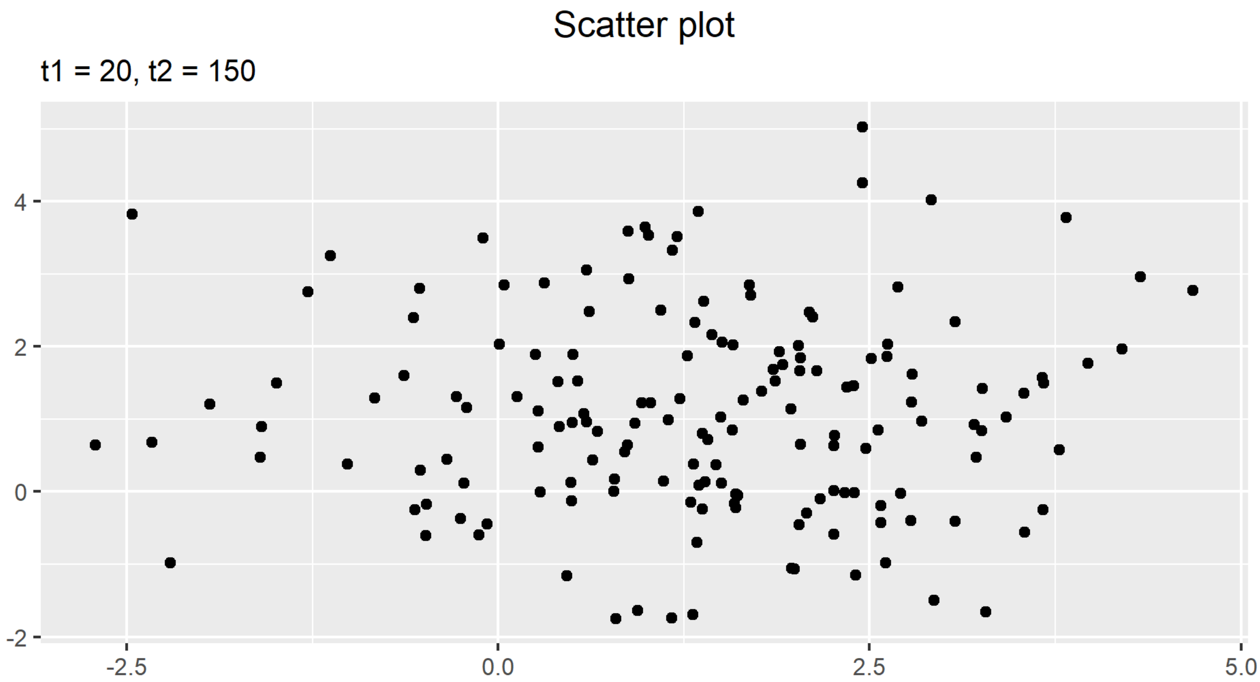
Второй случай: $t_1 = 20,\ t_2 = 150$

Получим сечение:

```
> t1 <- 20
> t2 <- 150
> selected_cut <- as.data.frame(matrix(c(sapply(traj_list, `[[`, t1),
+                                        sapply(traj_list, `[[`, t2)),
+                                      ncol = 2, byrow = F))
> colnames(selected_cut) <- c("t1","t2")
> head(selected_cut)
t1          t2
1  4.321029147  2.96629306
2 -0.482835214 -0.17319608
3  1.204216338  3.51484731
4  1.971526428  1.13883326
5  0.007253878  2.03409005
6  1.351975832  0.08824699
```

Построим диаграмму рассеяния для полученной пары сечений:

```
> png(filename = "../img/2.png",
+     width = 1920, height = 1080,
+     res = 96 * 3)
> ggplot(selected_cut, aes(x = t1, y = t2)) + geom_point() +
+   labs(title = "Scatter plot",
+        subtitle = "t1 = 1, t2 = 2",
+        x = "", y = "") +
+   theme(plot.title = element_text(hjust=0.5))
> dev.off()
```




```
> cor_test <- cor.test(selected_cut$t1, selected_cut$t2)
> cor_test

        Pearson`s product-moment correlation

        data:  selected_cut$t1 and selected_cut$t2
        t = 0.13647, df = 158, p-value = 0.8916
        alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
        95 percent confidence interval:
        -0.1445461  0.1657357
        sample estimates:
        cor
        0.01085617
```

То есть:

$$r = 0.01085617$$
$$r_{LB} = -0.1445461$$
$$r_{UB} = 0.1657357$$
$$-0.1445461 < 0.01085617 < 0.1657357$$

Можем сделать вывод о том, что с 95% доверительной вероятностью нет оснований отвергать нулевую гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции.

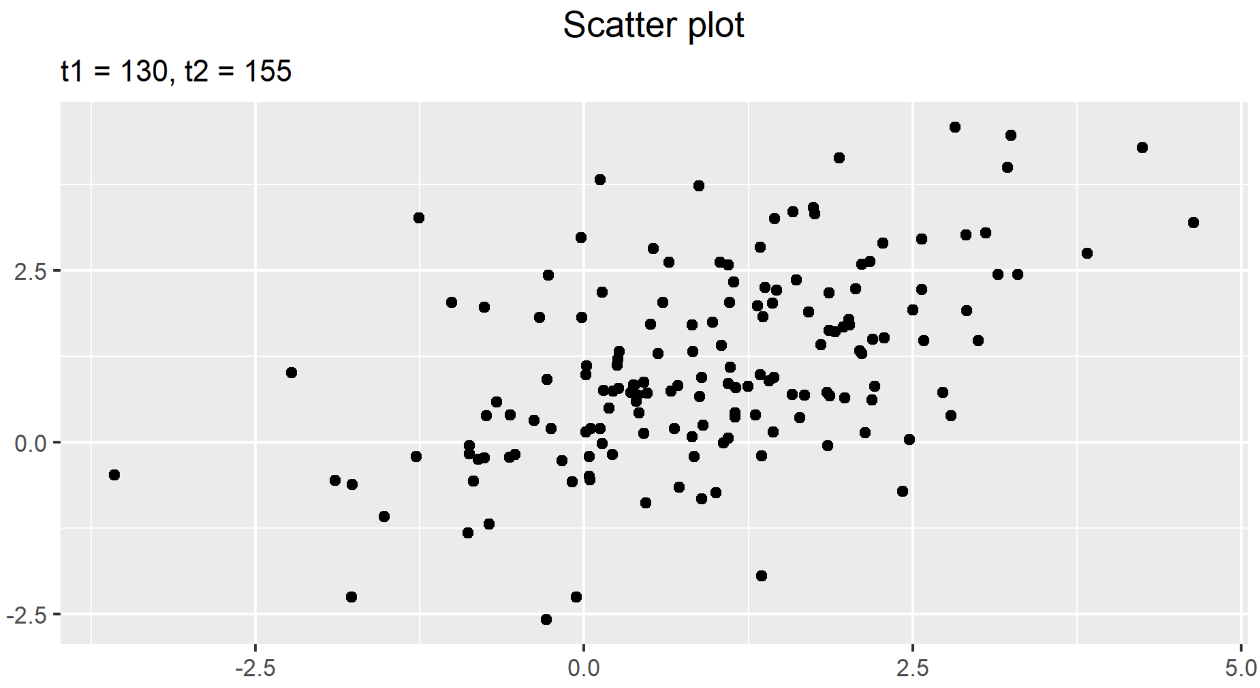
Второй случай: $t_1 = 130, \ t_2 = 155$

Получим сечение:

```
> t1 <- 130
> t2 <- 155
> selected_cut <- as.data.frame(matrix(c(sapply(traj_list, `[[`, t1),
+                                        sapply(traj_list, `[[`, t2)),
+                                      ncol = 2, byrow = F))
> colnames(selected_cut) <- c("t1","t2")
> head(selected_cut)
          t1         t2
1 0.64440246  2.6117555
2 0.89216541 -0.8263974
3 1.44862880  3.2505777
4 0.05134677  0.1976001
5 1.61543339  2.3632578
6 1.44139309  0.9403346
```

Построим диаграмму рассеяния для полученной пары сечений:

```
> png(filename = "../img/3.png",
+     width = 1920, height = 1080,
+     res = 96 * 3)
> ggplot(selected_cut, aes(x = t1, y = t2)) + geom_point() +
+   labs(title = "Scatter plot",
+        subtitle = "t1 = 130, t2 = 155",
+        x = "", y = "") +
+   theme(plot.title = element_text(hjust=0.5))
> dev.off()
```




```
> cor_test <- cor.test(selected_cut$t1, selected_cut$t2)
> cor_test

        Pearson`s product-moment correlation

        data:  selected_cut$t1 and selected_cut$t2
        t = 7.6924, df = 158, p-value = 1.457e-12
        alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
        95 percent confidence interval:
        0.3991569 0.6264126
        sample estimates:
        cor
        0.5219876
```

То есть:

$$r = 0.5219876$$
$$r_{LB} = 0.3991569$$
$$r_{UB} = 0.6264126$$
$$0.3991569 < 0.5219876 < 0.6264126$$

Можем сделать вывод о том, что с 95% доверительной вероятностью нет оснований принимать нулевую гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции.

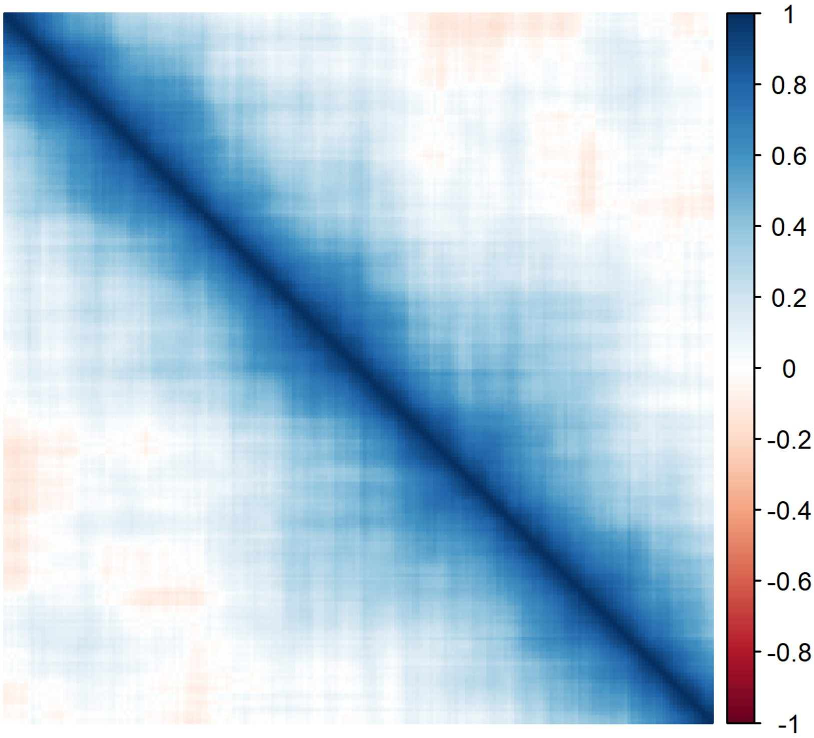
Построение коррелограммы

Рассмотрим корреляционную матрицу по всем парам сечений (округляем до 2 знаков после запятой):

```
> traj_list_tr <- as.data.frame(t(simplify2array(traj_list)))
> M<-round(cor(traj_list_tr),2)
> dim(M)
[1] 201 201
# Верхние 10*10 элементов корреляционой матрицы
> M[1:10,1:10]
      V1   V2   V3   V4   V5   V6   V7   V8   V9  V10
V1  1.00 0.98 0.96 0.94 0.92 0.90 0.87 0.85 0.83 0.80
V2  0.98 1.00 0.98 0.96 0.94 0.92 0.89 0.87 0.85 0.82
V3  0.96 0.98 1.00 0.98 0.96 0.94 0.91 0.89 0.86 0.84
V4  0.94 0.96 0.98 1.00 0.98 0.95 0.93 0.91 0.88 0.85
V5  0.92 0.94 0.96 0.98 1.00 0.97 0.95 0.92 0.90 0.87
V6  0.90 0.92 0.94 0.95 0.97 1.00 0.97 0.95 0.92 0.89
V7  0.87 0.89 0.91 0.93 0.95 0.97 1.00 0.98 0.94 0.91
V8  0.85 0.87 0.89 0.91 0.92 0.95 0.98 1.00 0.97 0.94
V9  0.83 0.85 0.86 0.88 0.90 0.92 0.94 0.97 1.00 0.97
V10 0.80 0.82 0.84 0.85 0.87 0.89 0.91 0.94 0.97 1.00
```

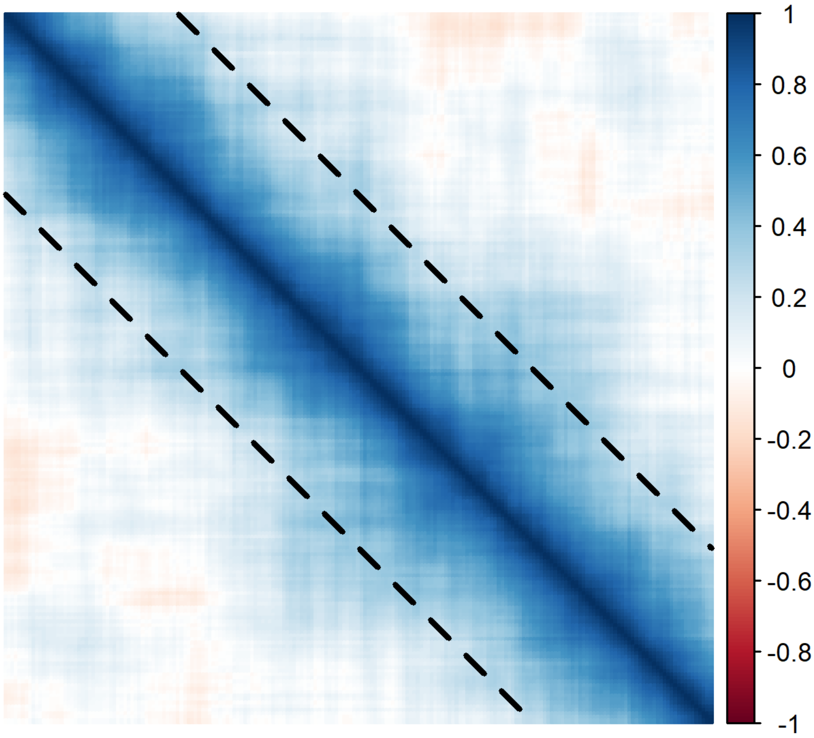
Построим коррелограмму наших сечений:

```
> library(corrplot)
> corrplot(M, method="color", tl.pos='n')
```



Коррелограмма сечений

Анализируя полученную диаграмму, делаем вывод о существовании двух принципиальных кластеров: 1) вдоль главной диагонали, 2) вдали от главной диагонали. Им соответствует 3 области на коррелограмме:



Кластеризованная коррелограмма сечений

Таким образом, можем заключить, что соседние значения t_1 и t_2 имеют наибольшие коэффициенты корреляции и при удалении друг от друга (при увеличении модуля разности t_1 и t_2) происходит уменьшение коэффициента корреляции до нуля. Кроме того, можно заметить, что отрицательных значений коэффициента корреляции существенно меньше неотрицательных. Действительно:

```
> M_negative <- length(M[M<0])
> M_negative # Число отрицательных коэффициентов корреляции
[1] 4310
> length(M) # Количество элементов в корреляционной матрице (201*201)
[1] 40401
> M_negative_perc <- M_negative / length(M)
> M_negative_perc # Процент отрицательных элементов
[1] 0.1066805
```

Выводы

В результате проделанной работы были:

- Смоделированы $N = 160$ траекторий гауссовского процесса на отрезке $[0; T] = [0; 10]$ с заданным математическим ожиданием $m(t) = 1 + \exp(-t)$ и заданной автоковариационной функцией $K(t_1, t_2) = 2\exp(-\frac{t_2 - t_1}{2})$;
- Рассмотрено в ближайшем приближение 3 пары сечений построенного процесса (для близких значений t_1 и t_2, для далёких, для соседних)
- Для рассмотренных пар сечений были:

  построены диаграммы рассеяния,

  рассчитаны выборочные коэффициенты корреляции,

  построены 95% доверительные интервалы,

  сделаны выводы относительно нулевой гипотезы о равенстве нулю коэффициента корреляции;
- Построена и кластеризована коррелограмма сечений
- Сделаны выводы относительно зависимости коэффициента корреляции между парами сечений в зависимости от «удалённости» между рассматриваемыми парами t_1 и t_2.