Домашняя работа № 1

Метод коллокаций для численного решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным, гладким и аналитически заданным ядром

Рассмотрим на квадрате $[a;b]\times[a;b]$ интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с симметричным, гладким и аналитически заданным ядром:

$$x(s)-\lambda\int_a^b K(s,\tau)x(\tau)d\tau = y(s),\ s\in[a;b], \tag{1}$$

где $\lambda\in\mathbb{R}$ – фиксированное ненулевое число, не являющееся характеристическим числом интегрального оператора этого уравнения, $K\in\underline{\mathrm{C}}^{(1)}([a;b]\times[a;b],\underline{\mathbb{R}})$ – заданное симметричное ядро этого оператора и $y\in\underline{\mathrm{C}}^{(2)}([a;b],\underline{\mathbb{R}})$ – известная функция.

Уравнение (1) имеет единственное решение $x_*\in\underline{\mathrm{C}}^{(2)}([a;b],\underline{\mathbb{R}})$.

Для построения дискретного аналога, являющегося аппроксимацией уравнение (1), зададим на отрезке $[a;b]$ равномерную сетку $A=\langle\tau_0,\tau_1,\tau_2,...,\tau_n\rangle$ шага $h=\dfrac{b-a}{n}$ и индуцированную ей центрально-равномерную сетку $B=\langle s_1,s_2,...,s_n\rangle$, где $s_j=\dfrac{s_{j-1}+s_j}{2}$ для $j=\overline{1,n}$. Кроме того, в пространстве дефектных сплайнов нулевой степени $\underline{\mathrm{Spl}}_0(A)$, индуцированного сеткой A, выберем базис $H=(h_1,h_2,...,h_n)$ аппроксимации пространства $\underline{\mathrm{C}}([a;b],\underline{\mathbb{R}})$, где $h_j(\tau)=spl_0(A;{}^{>}e_j)(\tau)=\begin{cases}1, & \tau\in[\tau_{j-1};\tau_j);\\ 0, & [a;b]\setminus[\tau_{j-1};\tau_j);\end{cases}$ для $j=\overline{1,n}$. Этот базис порождает аппроксимацию $\hat{\mathrm{p}}\in\mathrm{Hom}_c(\underline{\mathrm{C}}([a;b],\underline{\mathbb{R}}),\underline{\mathrm{Spl}}_0(A))$ пространства $\underline{\mathrm{C}}([a;b],\underline{\mathbb{R}})$, для которой $\hat{\mathrm{p}}(x)=\sum_{j=1}^{n}x(s_j)h_j=\sum_{j=1}^{n}x(s_j)spl_0(A;{}^{>}\mathbf{e}_j)$, если $x\in\underline{\mathrm{C}}([a;b],\underline{\mathbb{R}})$, где $({}^{>}\mathbf{e}_1,{}^{>}\mathbf{e}_2,...,{}^{>}\mathbf{e}_n)$ – стандартный базис пространства ${}^{>}\mathbb{R}^n$.

Для любого узла $s_i\in B$ $(i=\overline{1,n})$ и функций K, x и y из уравнения (1) приняты обозначения:

$$K_j^i=\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j}K(s_i;\tau)d\tau\ \ (j=\overline{1,n});$$

$$K_i^i=\int_{\tau_{i-1}}^{s_i}K(s_i;\tau)d\tau+\int_{s_i}^{\tau_i}K(s_i;\tau)d\tau\ \text{ для } i=j\ ;$$

$$K_j^i=\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j}K(s_i;\tau)d\tau\ \text{ для } i\neq j;$$

$x^i=x(s_i)$ и $y^i=y(s_i)$.

Используя эти обозначения и приближённое равенство $x_*\approx\sum_{j=1}^{n}x_*(s_j)spl_0(A;{}^{>}\mathbf{e}_j)=\sum_{j=1}^{n}x_*{}^{j}h_j$, из уравнения (1) получаем его дискретный аналог, при $h\to0$ аппроксимирующий уравнение (1), в виде СЛАУ:

$$\begin{cases} x^i - \lambda \sum_{j=1}^{n} K_j^i \cdot x^j = y^i, \\ i = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{2}$$

Введём обозначения:

$$\begin{cases} {}^{>}\boldsymbol{x} = [x^1, \dots, x^n\rangle,\ {}^{>}\boldsymbol{y} = [y^1, \dots, y^n\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{F} = (\delta_j^i - \lambda K_j^i)_n^n = (f_j^i)_n^n \in \mathrm{L}(\mathbb{R}, n); \\ \delta_j^i = \begin{cases} 1, i = j; \\ 0, i \neq j. \end{cases} \end{cases} . \tag{3}$$

Используя эти обозначения (3), СЛАУ (2) перепишем в виде:

$$\boldsymbol{F} \cdot {}^{>}\boldsymbol{x} = {}^{>}\boldsymbol{y}\,. \tag{4}$$

Решая СЛАУ (4), получаем сеточную функцию ${}^{>}\boldsymbol{x} = [x^1, \dots, x^n\rangle \in {}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{|A|}(A)$, индуцирующую с помощью интерполяции приближённое решение уравнения (1). При $h \to 0$ ($n \to +\infty$) такое приближённое решение в чебышёвской норме сходится к решению уравнения (1).

ЗАДАНИЕ

Используя дискретный аналог уравнения (1), индуцированный методом коллокаций (количество узлов не менее 20), найти приближённое решение уравнения (1), которое имеет конкретный вид:

$$x(s) - \frac{1}{n-59} \cdot \int_0^{\frac{N+5}{N}} K(s,\tau)x(\tau)d\tau = \frac{N+5}{N}(s^2 + n - 59),\ \ s \in [0; \frac{N+5}{N}],$$

где N − номер фамилии студента в журнале, n − номер группы и

$$K(s,\tau) = \begin{cases} s(2\frac{N+5}{N} - \tau),\ 0 \le s \le \tau\ ; \\ \tau(2\frac{N+5}{N} - s),\ \tau \le s \le \frac{N+5}{N}. \end{cases}$$

Оценить абсолютную погрешность приближённого решения, сравнив его с аналитическим решением, полученным сведением уравнения (1) к краевой задаче для обыкновенного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.►