

## Домашнее задание №2 «СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ»

**Задача 2. Моделирование двумерного винеровского процесса****Алгоритм**

Пусть необходимо найти значения двумерного винеровского процесса  $\bar{W}_t = (W_t^{(1)}, W_t^{(2)})$  интенсивности  $\sigma$  в точках вида  $t_k = k \cdot h$ , причем  $t_0 = 0, t_N = T$ .

- 1) Полагаем  $\bar{W}_0 = (0,0)$
- 2) Для каждого  $k$  моделируем пару  $(\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)})$  независимых нормально распределенных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями  $\sigma^2 \cdot h$
- 3) Вычисляем  $(W_{(k+1)h}^{(1)}, W_{(k+1)h}^{(2)}) = (W_{kh}^{(1)}, W_{kh}^{(2)}) + (\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)})$
- 4) Результат – последовательность точек  $(W_{kh}^{(1)}, W_{kh}^{(2)})$ . Соединив эти точки для наглядности отрезками прямых, получим смоделированную траекторию.

**Задание**

1. На интервале  $[0, T]$  смоделируйте  $n$  траекторий двумерного винеровского процесса интенсивности  $\sigma$  с шагом  $h$ .
2. Выведите на печать 5-7 траекторий (мультимедийность приветствуется)
3. Для каждой траектории вычислите
  - 1) вариации компонент  $(\sum_k |W_{(k+1)h}^{(1)} - W_{kh}^{(1)}|, \sum_k |W_{(k+1)h}^{(2)} - W_{kh}^{(2)}|)$   
Найдите среднее значение вариации  $(Var^{(1)}(h), Var^{(2)}(h))$  по всем траекториям
  - 2) суммы квадратов приращений компонент  $(\sum_k |W_{(k+1)h}^{(1)} - W_{kh}^{(1)}|^2, \sum_k |W_{(k+1)h}^{(2)} - W_{kh}^{(2)}|^2)$   
Найдите среднее значение этих сумм  $(SqVar^{(1)}(h), SqVar^{(2)}(h))$
4. Уменьшите значение  $h$  в два раза и вычислите  $(Var^{(1)}(\frac{h}{2}), Var^{(2)}(\frac{h}{2}))$  и  $(SqVar^{(1)}(\frac{h}{2}), SqVar^{(2)}(\frac{h}{2}))$   
Сравните полученные значения для исходного и уменьшенного шага и объясните результат.
5. Вычислите теоретическую вероятность  $P(|\bar{W}_T| \geq z)$  и сравните ее с эмпирической вероятностью достижения указанного уровня  $z$  в момент  $T$ .

**Данные**

| Var | $T$ | $n$ | $\sigma$ | $h$  | $z$ | Var | $T$ | $n$ | $\sigma$ | $h$  | $z$ |
|-----|-----|-----|----------|------|-----|-----|-----|-----|----------|------|-----|
| 1   | 12  | 100 | 0.4      | 0.1  | 2   | 12  | 10  | 160 | 0.75     | 0.04 | 2.5 |
| 2   | 10  | 120 | 0.6      | 0.05 | 3   | 13  | 6   | 180 | 1        | 0.02 | 3.5 |
| 3   | 15  | 140 | 0.3      | 0.1  | 2   | 14  | 2   | 200 | 1.2      | 0.01 | 3.5 |
| 4   | 12  | 150 | 0.5      | 0.08 | 3   | 15  | 14  | 100 | 0.25     | 0.1  | 1.5 |
| 5   | 8   | 160 | 0.5      | 0.04 | 3   | 16  | 7   | 120 | 0.75     | 0.05 | 2   |
| 6   | 5   | 180 | 0.75     | 0.02 | 2   | 17  | 12  | 140 | 0.6      | 0.08 | 4   |
| 7   | 3   | 200 | 1        | 0.01 | 2.5 | 18  | 6   | 150 | 0.6      | 0.04 | 1.5 |
| 8   | 15  | 100 | 0.3      | 0.1  | 2.5 | 19  | 4   | 160 | 0.75     | 0.02 | 2.5 |
| 9   | 8   | 120 | 0.4      | 0.05 | 2   | 20  | 3   | 180 | 0.8      | 0.01 | 2.5 |
| 10  | 16  | 140 | 0.25     | 0.1  | 2   | 21  | 12  | 200 | 0.2      | 0.1  | 1.5 |
| 11  | 16  | 150 | 0.4      | 0.08 | 3.5 | 22  | 9   | 100 | 0.5      | 0.05 | 3   |