Соколов Арсений
ФН4-63Б
24.05.2020

# Семинар 6

1) Полная производная по времени от переменного векторного поля $a$

Всякая изменяющаяся во времени векторное поле $a(X,t)$, описывающее какой-либо физический процесс в сплошной среде с помощью закона движения можно представить в двух описаниях:

1. Лагранжевое
2. Эйлеровое

$$a(x,t) = a(x(X^i,t),t)$$

$$\left.\frac{\partial a}{\partial t}\right|_{X^i} = \left.\frac{\partial a}{\partial t}\right|_{x^i} + \frac{\partial a}{\partial x^i}\left.\frac{\partial x^i}{\partial t}\right|_{X^i} \qquad (1)$$

Опр Полной производной по времени от переменного вект. поля $a$ называют частную производную по $t$ при фиксир. знач. координат $X^i$

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} = \left.\frac{\partial a}{\partial t}\right|_{X^i} \qquad (2)$$

Соотношение (1) может быть записано в виде:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} + v \cdot \nabla \otimes a, \qquad (3)$$

где введено обозначение частной производной по времени:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial a}{\partial t}(x^i, t)\Big|_{x^i}$$

$\mathbf{v}$ – вектор скорости движения матер. частицы $M$ с лагранжевыми коорд. $X^i$

$$v(X^i, t) = \frac{\partial x}{\partial t}(X^i, t)\Big|_{X^i}$$

В соотнош. (3): а) полную производную $\frac{da}{dt}$ называют материальной, индивидуальной или субстанциональной производной по времени

б) $\frac{\partial a}{\partial t}$ наз-ют частной или локальной произв. по времени

в) $v \cdot \nabla \otimes a$ – конвективная производная

2) Аналогично соотнош. (3), определим полную производную по времени от тензора $\overset{n}{\Omega}$ – n-го ранга:

$$\frac{d}{dt}\overset{n}{\Omega} = \frac{\partial \overset{n}{\Omega}}{\partial t} + v \cdot \nabla \otimes \overset{n}{\Omega} \qquad (4)$$

3) Законы сохранения

а) $\boxed{\rho\, dV = \overset{\circ}{\rho}\, d\overset{\circ}{V}}$ – дифференц. форма ЗСМ (5)

$\rho$ – плотность вещ-ва в $K$

$\overset{\circ}{\rho}$ – плотность вещ-ва в $\overset{\circ}{K}$

$d\overset{\circ}{V}$ – элемент. объем в $\overset{\circ}{K}$

$dV$ – элемент. объем в $K$

б) Уравнение неразрывности в переменных Лагранжа:

$$\boxed{\frac{\overset{\circ}{\rho}}{\rho} = \sqrt{\frac{g}{\overset{\circ}{g}}} = \det F} \qquad (6)$$

Часто используют:

- соотношение эл-ых объемов в $K$ и $\overset{\circ}{K}$:

$$\frac{dV}{d\overset{\circ}{V}} = \sqrt{\frac{g}{\overset{\circ}{g}}} \qquad (7)$$

в) Ур-ие неразрывности в перем. Эйлера:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho V = 0 \qquad (8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot V = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot V \quad | : \rho$$

$$\underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} + V \cdot \nabla \rho}_{} = -\nabla \cdot V$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot V \qquad (9)$$

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \nabla \cdot V \qquad (10)$$

№ 1

Пусть имеется переменное тензорное поле n-го ранга $\overset{n}{\Omega}(x, t)$

непрерывн. дифф. в области $V(t)$ $\forall t \geq 0$

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{\overset{n}{\Omega}}{\rho}\right) - ?$$

Решение:

Воспользуемся формулой (4)

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{\overset{n}{\Omega}}{\rho}\right) = \underbrace{\rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overset{n}{\Omega}}{\rho}\right)}_{I} + \underbrace{\rho V \cdot \nabla \otimes \left(\frac{\overset{n}{\Omega}}{\rho}\right)}_{II},$$

Вычислим 1-е слагаемое I:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\overset{n}{\Omega} \cdot \frac{1}{\rho}\right) = \rho \cdot \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\left(\overset{n}{\Omega}\right) + \rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right)\overset{n}{\Omega} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} {}^{n}\Omega. + \rho\left(-\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t}\right){}^{n}\Omega. = \frac{\partial}{\partial t}{}^{n}\Omega. - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}{}^{n}\Omega.$$

Вычисл. произв. 2-го слагаем. $\Sigma$:

$$\rho V \cdot \nabla \otimes \left(\frac{{}^{n}\Omega.}{\rho}\right) = \rho V \cdot \nabla \otimes \left({}^{n}\Omega. \frac{1}{\rho}\right) =$$

$$= V \cdot \nabla \otimes {}^{n}\Omega. + \rho\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)\left(V \cdot \nabla \rho \otimes {}^{n}\Omega.\right) =$$

$$= V \cdot \nabla \otimes {}^{n}\Omega. - \frac{1}{\rho} V \cdot \nabla \rho \otimes {}^{n}\Omega.$$

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{{}^{n}\Omega.}{\rho}\right) = \frac{\partial {}^{n}\Omega.}{\partial t} + (\nabla \cdot V){}^{n}\Omega. + V \cdot \nabla \otimes {}^{n}\Omega. =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}{}^{n}\Omega. + \nabla \cdot (V \otimes {}^{n}\Omega.)$$

№2

Пусть имеется непрерывное тенз. поле ${}^{n}\Omega.(x,t)$, непр. дифф. в обл. $V(t)$, $t \geq 0$.

$$\rho \frac{d}{dt}({}^{n}\Omega.) - ?$$

Решение

Сделаем замену в зад. 1: ${}^{n}\Omega. \to \rho {}^{n}\Omega.$

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{{}^{n}\Omega.}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial t}{}^{n}\Omega + \nabla(V \otimes {}^{n}\Omega.)$$

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{\rho\, {}^{u}\Omega_{\cdot}}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\rho\, {}^{u}\Omega_{\cdot} + \nabla\cdot\left(V \otimes \rho\, {}^{u}\Omega_{\cdot}\right)$$

$$\rho \frac{d}{dt}\left({}^{u}\Omega_{\cdot}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\, {}^{u}\Omega_{\cdot}\right) + \nabla\cdot\left(\rho V \otimes {}^{u}\Omega_{\cdot}\right)$$

__Задача 5__

Показать, что ур-ие неразрывности в переменных Лагранжа можно записать в дифф-ой форме:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{\sqrt{g}}\frac{d\sqrt{g}}{dt}$$

__Реш-ие:__

Ур-ие неразр. в перем. Лагранжа:

$$\frac{\overset{\circ}{\rho}}{\rho} = \sqrt{\frac{g}{\overset{\circ}{g}}} \quad ; \qquad \frac{dV}{d\overset{\circ}{V}} = \sqrt{\frac{g}{\overset{\circ}{g}}}$$

$$\rho\, dV = \overset{\circ}{\rho}\, d\overset{\circ}{V} = const$$

$$\rho = \sqrt{\frac{\overset{\circ}{g}}{g}}\,\overset{\circ}{\rho}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{\overset{\circ}{g}}{g}}\,\overset{\circ}{\rho}\right) = \sqrt{\overset{\circ}{g}}\cdot\overset{\circ}{\rho}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\right) =$$

$$= \sqrt{\overset{\circ}{g}}\,\overset{\circ}{\rho}\left(-\frac{1}{(\sqrt{g})^2}\right)\frac{d\sqrt{g}}{dt} \quad \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt}\right]$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{\sqrt{g}}\,\frac{d\sqrt{g}}{dt}$$

$$\frac{\mathring{\rho}}{\rho} = \sqrt{\frac{g}{\mathring{g}}}\ , \quad \frac{dV}{d\mathring{V}} = \sqrt{\frac{g}{\mathring{g}}}\ ; \quad \rho\, dV = \mathring{\rho}\, d\mathring{V} = \mathrm{const}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \underbrace{\mathring{\rho}\sqrt{\mathring{g}}}_{\rho\sqrt{g}}\left(-\frac{1}{(\sqrt{g})^2}\right)\frac{d\sqrt{g}}{dt} = *$$

$$= -\rho\sqrt{g}\,\frac{1}{(\sqrt{g})^2}\,\frac{d\sqrt{g}}{dt} = -\frac{\rho}{\sqrt{g}}\,\frac{d\sqrt{g}}{dt} \quad \blacksquare$$