

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН

Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Домашнее задание №5 (задача 4)
по теории случайных процессов

3 курс, группа ФН11-63Б
Вариант 19

Преподаватель

_____ Т. В. Облакова
« ____ » _____ 2020 г.

Москва, 2020 г.

Условие.

Задана ковариационная функция стационарного случайного процесса $X(t)$. Найдите:

1. ковариационную функцию, дисперсию и нормированную ковариационную функцию случайного процесса $Y(t) = X'(t)$,
2. взаимную ковариационную функцию $R_{XX'}$,
3. ковариационную функцию, дисперсию и нормированную ковариационную функцию случайного процесса $Z(t) = X(t) + X'(t)$.

$$K_X(\tau) = (1 + |\sin 3\tau|)e^{-2|\tau|} \quad (1)$$

Решение.

1

$$K_X(t_1, t_2) = K_X(t_2 - t_1) = K_X(\tau) = (1 + |\sin 3\tau|)e^{-2|\tau|} \quad (2)$$

$$Y(t) = X'(t) \quad (3)$$

$$K_Y(t_1, t_2) = K_Y(t_2 - t_1) = K_Y(\tau) \quad (4)$$

Ковариационная функция:

$$\begin{aligned} K_Y(\tau) &= K_{X'}(\tau) = -K_X''(\tau) = -(3|\cos 3\tau|e^{-2|\tau|} - 2(1 + |\sin 3\tau|)e^{-2|\tau|})' = \\ &= -(e^{-2|\tau|}(3|\cos 3\tau| - 2 - 2|\sin 3\tau|))' = -(-2e^{-2|\tau|}(3|\cos 3\tau| - 2 - 2|\sin 3\tau|) + \\ &+ e^{-2|\tau|}(-9|\sin 3\tau| - 6|\cos 3\tau|)) = -(e^{-2|\tau|}(-12|\cos 3\tau| - 5|\sin 3\tau| + 4)) = \\ &+ e^{-2|\tau|}(-9|\sin 3\tau| - 6|\cos 3\tau|) = e^{-2|\tau|}(12|\cos 3\tau| + 5|\sin 3\tau| - 4) \end{aligned} \quad (5)$$

Дисперсия:

$$D_Y(t) = K_Y(0) = e^{-2(0)}(12|\cos 0| + 5|\sin 0| - 4) = 12 - 4 = 8 \quad (6)$$

\Updownarrow

$$D_Y(t) = K_Y(t, t) = e^{-2|t-t|}(12|\cos 3(t-t)| + 5|\sin 3(t-t)| - 4) = 8 \quad (7)$$

Нормированная ковариационная функция:

$$\rho_Y(\tau) = \frac{K_Y(\tau)}{K_Y(0)} = \frac{e^{-2|\tau|}(12|\cos 3\tau| + 5|\sin 3\tau| - 4)}{8} \quad (8)$$

2

Взаимная ковариационная функция:

$$R_{XX'}(\tau) = K'_X(\tau) = \left((1 + |\sin 3\tau|) e^{-2|\tau|} \right)' = e^{-2|\tau|} (3|\cos 3\tau| - 2 - 2|\sin 3\tau|) \quad (9)$$

3

$$Z(t) = X(t) + X'(t) \quad (10)$$

Ковариационная функция:

$$\begin{aligned} K_Z(\tau) &= \text{cov}(X(t_1) + X'(t_1), X(t_2) + X'(t_2)) = K_X(\tau) + R_{XX'}(\tau) + R_{X'X}(\tau) + K_{X'}(\tau) = \\ &= K_X(\tau) + K_X'(\tau) - K_X'(\tau) - K_X''(\tau) = K_X(\tau) - K_X''(\tau) = (1 + |\sin 3\tau|)e^{-2|\tau|} + \\ &+ e^{-2|\tau|}(12|\cos 3\tau| + 5|\sin 3\tau| - 4) = e^{-2|\tau|}(-3 + 6|\sin 3\tau| + 12|\cos 3\tau|) \end{aligned} \quad (11)$$

Дисперсия:

$$D_Z(t) = K_Z(0) = e^{-2(0)}(-3 + 6|\sin 0| + 12|\cos 0|) = -3 + 12 = 9 \quad (12)$$

Нормированная ковариационная функция:

$$\rho_Z(\tau) = \frac{K_Z(\tau)}{K_Z(0)} = \frac{e^{-2|\tau|}(-3 + 6|\sin 3\tau| + 12|\cos 3\tau|)}{9} = \frac{e^{-2|\tau|}(-3 + 2|\sin 3\tau| + 4|\cos 3\tau|)}{3} \quad (13)$$