№4 Аттестация 1 Вар 3 Соколов Арсений ФН11-63Б

№1

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ |y-x| \leq 1,\ x^2+y^2 \geq a^2\}$$

a, т.ч. мн-во S выпукло?

Рассмотрим возможные ситуации:

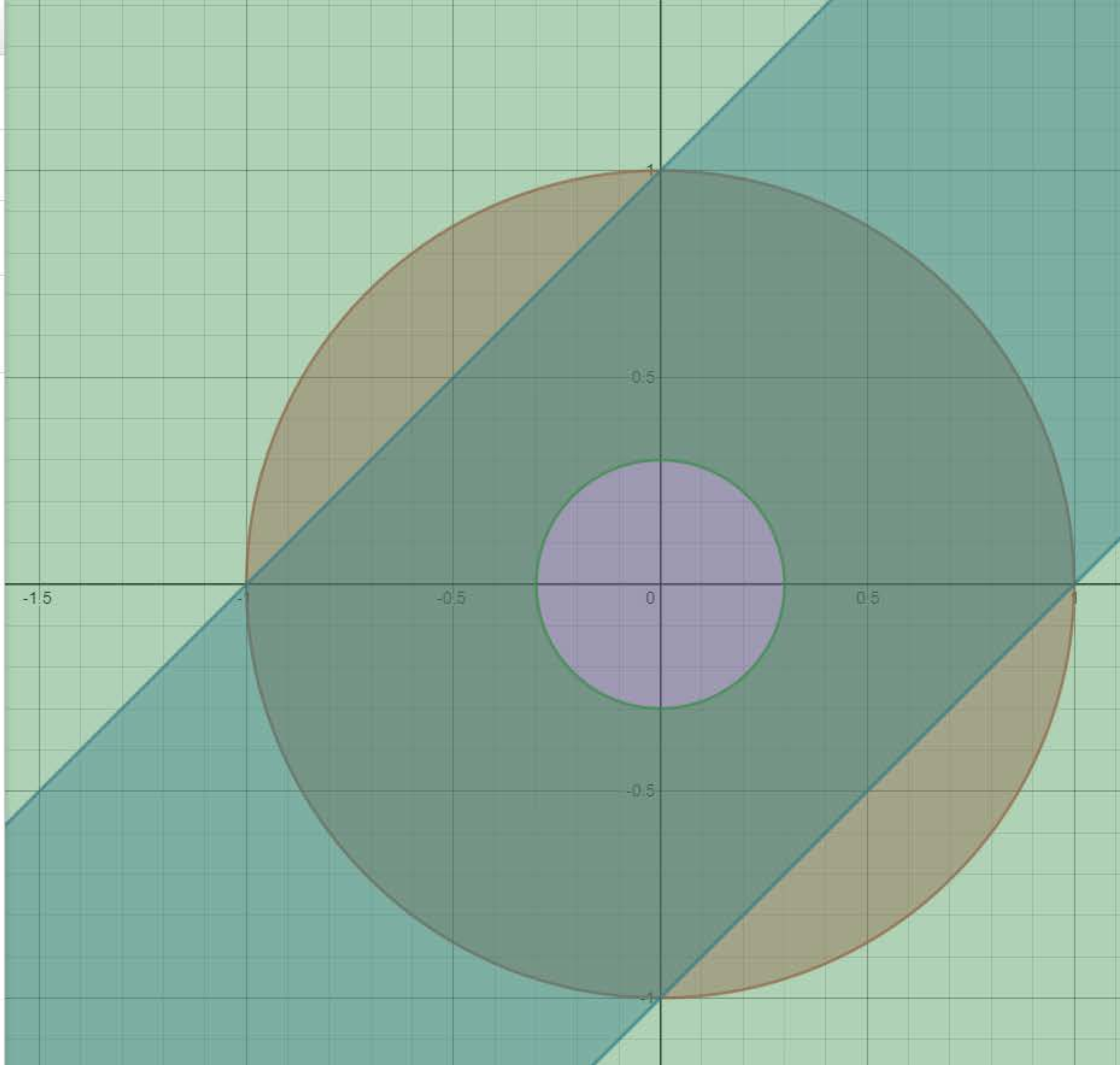
1. $a=0 \Rightarrow$ вырезка из круга $\Rightarrow$ мн-во выпукло
2. $|a|>1 \Rightarrow$ пустое мн-во $\Rightarrow$ выпукло
3. В иных случаях ($a \in (0,1]$) всегда можно найти такой отрезок, концы которого принадлежат S, а некоторые внутр. точки — нет.

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup \{0\} \cup (1; +\infty)$.

1. $x^2+y^2 \le 1$
2. $\operatorname{abs}(y-x) \le 1$
3. $x^2+y^2 \ge a^2$
4. $a = 0.3$

−10 10

при поддержке
desmos



Соколов Арсений ФН11-63
18.05.20
стр 3

№2

$f(x) = 2x - \sqrt{x}, \quad x \in [0;3]$

$f(0) = 0$

$f(1) = 1$

$f(2) = 4 - \sqrt{2} \approx 2.59$

$f(3) = 6 - \sqrt{3} \approx 4.27$

$y(x) = ax^2 + bx + c$

$$\delta(a,b,c) = \sum_i (f(x_i) - y(x_i))^2 = (0 - a\cdot 0 - b\cdot 0 - c)^2 +$$
$$+ (1-a-b-c)^2 + (2.59 - 4a - 2b - c)^2 + (4.27 - 9a - 3b - c)^2$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial a} = -2(1-a-b-c) - 8(2.59 - 4a - 2b - c) -$$
$$- 18(4.27 - 9a - 3b - c) = 196a + 72b + 28c - 99.58$$

$$\frac{\partial\delta(a,b,c)}{\partial b} = -2(1-a-b-c) - 4(2.59 - 4a - 2b - c) -$$
$$- 6(4.27 - 9a - 3b - c) = 72a + 28b + 12c - 37.98$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial c} = 2c - 2(1-a-b-c) - 2(2.59 - 4a - 2b - c) -$$
$$- 2(4.27 - 9a - 3b - c) = 28a + 12b + 8c - 15.72$$

Соколов Арсений ФН4-63
18.05.20

стр 3

Найдем a, в, c из системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \delta}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial \delta}{\partial b} = 0 \\ \dfrac{\partial \delta}{\partial c} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 96a + 72b + 28c = 99.58 \\ 72a + 28b + 12c = 37{,}98 \\ 28a + 12b + 8c = 15{,}72 \end{cases}$$

Решая полученную систему, имеем:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.17 \\ 0.94 \\ -0.03 \end{pmatrix}$$

Вывесть:

Ответ: $y(x) = 0.17x^2 + 0.94x - 0.03$

Соколов Арсений ФН11-63
18.05.20 стр 4

№3.

$f(x) = 2x - \sqrt{x}$; $x \in [\overset{a}{0}; \overset{b}{3}]$; $\delta = 0.1$

Метод деления отрезка пополам.

$u_1 = \frac{a+b-\delta}{2} = \frac{0+3-0.1}{2} = 1.45$; $f(u_1) \approx 1.7$

$u_2 = \frac{a+b+\delta}{2} = \frac{0+3+0.1}{2} = 1.55$; $f(u_2) \approx 1.86$

$f(u_1) < f(u_2) \Rightarrow a_1 = a = 0$, $b_1 = u_2 = 1.55$

$u_3 = \frac{a_1+b_1-\delta}{2} = \frac{0+1.55-0.1}{2} \approx 0.73$; $f(u_3) \approx 0.61$

$u_4 = \frac{a_1+b_1+\delta}{2} = \frac{0+1.55+0.1}{2} \approx 0.83$; $f(u_4) \approx 0.75$

$f(u_3) < f(u_4) \Rightarrow u_3 \approx 0.73$ - приближ. знач т. минимума

$\Downarrow$

$m_* \approx f(u_3) \approx 0.61$

Ответ: $x_{min} \approx 0.73$; $m_* \approx 0.61$.

№4.

Соколов Арсений ФИИ-63 18.05.20 стр 5

$g(u_1, u_2) = u_1^2 + 4u_1 + u_2^2$

Градиентный метод наискорейшего спуска

$x_0 = (1,2)$; $\delta = 0.1$

$g'(u) = (2u_1 + 4, 2u_2)$

$g'(x_0) = (6, 4)$

$\varphi_0(\alpha) = g(x_0 - \alpha g'(x_0)) = g((1,2) - \alpha(6,4)) =$
$= g((1-6\alpha), (2-4\alpha)) = (1-6\alpha)^2 + 4(1-6\alpha) +$
$+ (2-4\alpha)^2 = 52\alpha^2 - 52\alpha + 9$

Минимум ф-ии $\varphi_0(\alpha)$ достигается при
$\alpha = \frac{52}{2 \cdot 52} = 0.5$. Тогда:

$x_1 = x_0 - 0.5 g'(x_0) = (1,2) - \frac{1}{2}(6,4) = (-2; 0)$

$g(x_1) = (-2)^2 - 2 \cdot 4 = -4$

$g'(x_1) = (0, 0) \Rightarrow x_1$ – т. минимума.

Ответ: $x_{min} = (-2; 0)$; $m_* = -4$.