МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МГТУ им Н.Э.Баумана

Факультет ФН
Кафедра вычислительной математики и математической физики

Соколов Арсений Андреевич

Домашнее задания №2 по теории случайных процессов

3 курс, группа ФН11-63Б
Вариант 19

Преподаватель
______________ Т. В. Облакова
«___» ________ 2020 г.

Москва, 2020 г.

Задание 3

Процесс изменения состояний системы S-однородный марковский процесс, заданный размеченным графом. Запишите систему уравнений Колмогорова для вероятностей состояний системы и найдите их предельные значения, если начальные условия имеют вид: $p_2(0) = 1$.
Решение.

Размеченный граф состояний системы S, процесс изменения состояния которой представляет собой однородный марковский процесс с дискретными состояниями изображён на рис. 1.

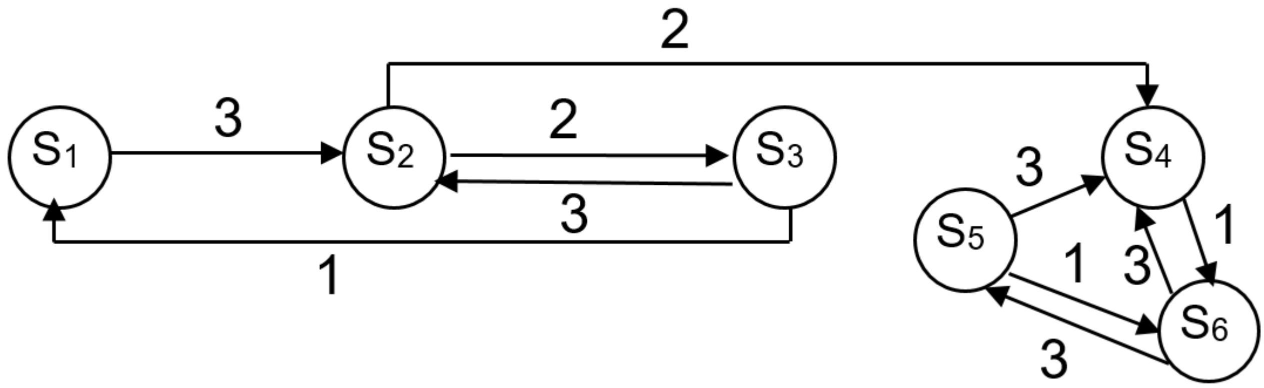

Рис. 1: Размеченный граф состояний системы S

Сформулируем задачу Коши для системы уравнений Колмогорова (1), если $T = [0, \infty)$ и в начальный момент времени $t = 0$ система находится в состоянии (2)

$$\begin{cases} p(t)' = \lambda(t)p(t), \quad t > 0; \\ p(0) = p_0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\lambda(t) = \lambda$, так как рассматривается однородный марковский процесс, а сама матрица λ вводится как указано далее. Пусть

$$I = (1 \ \dots \ 1) \in M_{1n}(\mathbb{R});$$

$$\lambda_k^0 = (\lambda_{k1} \ \dots \ \lambda_{k,k-1} \ 0 \ \lambda_{k,k+1} \ \dots \ \lambda_{kn})^T,$$

где λ_{ki} для $i = \{\overline{1,n}\} \backslash \{k\}$ – плотности вероятностей переходов системы S из состояния S_k во все иные возможные состояния, а

$$\lambda_{kk} = -I\lambda_k^0 = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \lambda_{ki} -$$

суммарная плотность вероятности перехода системы и состояния s_k взятая со знаком "минус".

$$p(0) = (0\ 1\ 0\ 0\ 0)^T \tag{2}$$

Согласно заданному размеченному графу состояний, имеем

$$\lambda(t) = \lambda = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Таким образом, вектор $p(t)$ вероятностей состояний изучаемой системы S является решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} p_1(t)' = -3p_1(t) + p_3(t); \\ p_2(t)' = 3p_1(t) - 4p_2(t) + 3p_3(t); \\ p_3(t)' = 2p_2(t) - 4p_3(t); \\ p_4(t)' = 2p_2(t) - p_4(t) + 3p_5(t) + 3p_6(t); \\ p_5(t)' = -4p_5(t) + 3p_6(t); \\ p_6(t)' = p_4(t) + p_5(t) - 6p_6(t); \\ p_2(0) = 1; \\ p_k(0) = 0, \qquad k = \{1, 3, 4, 5, 6\}. \end{cases}$$

Перепишем систему в изображениях:

$$\begin{cases} s\widetilde{p_1}(s) - p_1(0) = -\widetilde{p_1}(s) + \widetilde{p_3}(s); \\ s\widetilde{p_2}(s) - p_2(0) = 3\widetilde{p_1}(s) - 4\widetilde{p_2}(s) + 3\widetilde{p_3}(s); \\ s\widetilde{p_3}(s) - p_3(0) = 2\widetilde{p_2}(s) - 4\widetilde{p_3}(s); \\ s\widetilde{p_4}(s) - p_4(0) = 2\widetilde{p_2}(s) - 4\widetilde{p_4}(s) + 3\widetilde{p_5}(s) + 3\widetilde{p_6}(s); \\ s\widetilde{p_5}(s) - p_5(0) = -4\widetilde{p_5}(s) + 3\widetilde{p_6}(s); \\ s\widetilde{p_6}(s) - p_6(0) = \widetilde{p_4}(s) + \widetilde{p_5}(s) - 6\widetilde{p_6}(s); \\ \widetilde{p_1}(s) + \widetilde{p_2}(s) + \widetilde{p_3}(s) + \widetilde{p_4}(s) + \widetilde{p_5}(s) + \widetilde{p_6}(s) = \frac{1}{s}. \end{cases}$$

Подставляя (2) получим:

$$\begin{cases} s\widetilde{p_1}(s) = -\widetilde{p_1}(s) + \widetilde{p_3}(s); \\ s\widetilde{p_2}(s) - 1 = 3\widetilde{p_1}(s) - 4\widetilde{p_2}(s) + 3\widetilde{p_3}(s); \\ s\widetilde{p_3}(s) = 2\widetilde{p_2}(s) - 4\widetilde{p_3}(s); \\ s\widetilde{p_4}(s) = 2\widetilde{p_2}(s) - 4\widetilde{p_4}(s) + 3\widetilde{p_5}(s) + 3\widetilde{p_6}(s); \\ s\widetilde{p_5}(s) = -4\widetilde{p_5}(s) + 3\widetilde{p_6}(s); \\ s\widetilde{p_6}(s) = \widetilde{p_4}(s) + \widetilde{p_5}(s) - 6\widetilde{p_6}(s); \\ \widetilde{p_1}(s) + \widetilde{p_2}(s) + \widetilde{p_3}(s) + \widetilde{p_4}(s) + \widetilde{p_5}(s) + \widetilde{p_6}(s) = \frac{1}{s}. \end{cases}$$

Решая полученную систему, имеем:

$$\begin{cases} \widetilde{p_1}(s) = \frac{2}{s^3+9s^2+18s+4}; \\ \widetilde{p_2}(s) = \frac{s^2+5s+4}{s^3+9s^2+18s+4}; \\ \widetilde{p_3}(s) = \frac{2(s+1)}{s^3+9s^2+18s+4}; \\ \widetilde{p_4}(s) = \frac{2(s+3)\left(s^2+5s+2\right)}{(s+4)s(s^3+9s^2+18s+4)}; \\ \widetilde{p_5}(s) = \frac{6\left(s^2+5s+2\right)}{s(s^4+16s^3+81s^2+130s+28)(s+4)}; \\ \widetilde{p_6}(s) = \frac{2\left(s^2+5s+2\right)}{s(s^4+16s^3+81s^2+130s+28)}; \end{cases}$$

Найдём предельные вероятности:

$$\Pi_k = \lim_{t \to +\infty} p_k(t) = \lim_{s \to 0} s\widetilde{p_k}(s), \quad k = \overline{1, n}.$$

$$\begin{cases} \Pi_1 = 0; \\ \Pi_2 = 0; \\ \Pi_3 = 0; \\ \Pi_4 = \frac{3}{4}; \\ \Pi_5 = \frac{3}{28}; \\ \Pi_6 = \frac{1}{7}. \end{cases}$$

Вектор финальных вероятностей:

$$\Pi = (0\ 0\ 0\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{28}\ \frac{1}{7}); \quad \frac{3}{4} + \frac{3}{28} + \frac{1}{7} = \frac{21}{28} + \frac{3}{28} + \frac{4}{28} = 1$$

Вывод.

Полученный вектор финальных вероятностей соответствует очевидным соображениям о том, что изначальный граф состояний системы S, изображённый на рис. 1, состоит из двух подсистем: $S_A = S_1, S_2, S_3$ и $S_B = S_4, S_5, S_6$, причём при выходе из подсистемы A обратно вернуться уже не получится. Поэтому значения Π_1, Π_2, Π_3 равны нулю.

Задание 4

Требуется найти закон распределения времени пребывания марковского процесса в подмножестве состояний $U = \{S_2, S_3\}$, а также найти среднее время пребывания системы в U.

Решение.

Закон распределения времени пребывания Марковского процесса в подмножестве состояний $U = \{S_2, S_3\}$ имеет вид:

$$P_{T_U}(t) = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{l} \lambda_{i_k j} \right) p_{i_k}(t) = 2p_2(t) + p_3(t)$$

Так как подмножество U не замкнуто, найдём $p_2(t)$ и $p_3(t)$, решив систему:

$$\begin{cases} p_2(t)' = -4p_2(t) + 3p_3(t); \\ p_3(t)' = -4p_3(t) + 2p_2(t). \end{cases}$$

Переходя к изображениями:

$$\begin{cases} s\widetilde{p_2}(s) - 1 = -4\widetilde{p_2}(s) + 3\widetilde{p_3}(s); \\ s\widetilde{p_3}(s) = -4\widetilde{p_3}(s) + 2\widetilde{p_2}(s); \end{cases}$$

Получаем:

$$\begin{cases} \widetilde{p_2}(s) = \frac{s+4}{s^2+8s+10}; \\ \widetilde{p_3}(s) = \frac{2}{s^2+8s+10} \end{cases}$$

Возвращаясь к оригиналам:

$$\begin{cases} p_2(t) = \mathrm{e}^{-4\,t} \cosh\left(t\sqrt{6}\right); \\ p_3(t) = 1/3\,\sqrt{6}\mathrm{e}^{-4\,t} \sinh\left(t\sqrt{6}\right). \end{cases}$$

Тогда закон распределения времени пребывания Марковского процесса в подмножестве состояний $U = \{S_2, S_3\}$ имеет вид:

$$P_{T_U}(t) = 2p_2(t) + p_3(t) = \frac{\mathrm{e}^{-4t}(\sqrt{6}\sinh(t\sqrt{6}) + 6\cosh(t\sqrt{6}))}{3}$$

Найдём среднее время пребывания:

$$M\xi = \int\limits_0^{+\infty} x p_\xi(x) dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-4x}(\sqrt{3}\sinh(2t\sqrt{3}) + 6\cosh(2x\sqrt{3}))}{3} dx = \frac{3}{5}$$