Лекция 12

Второй закон термодинамики

1. Нулевой закон термодинамики

Аксиома 0. (Аксиома о $\exists$ абс. темп.)

Для всякой м.т. M всякой С.С. $V(t)$ в K для $\forall t>0$ $\exists$ скалярная положит. ф-ия $\theta(x^i, t) = \theta(x^i, t) > 0$ (1), наз-ая абсол. темп.

Замеч.: Нулевой з-н термодинамики, в отличии от остальных законов сохр МСС, является локальным

1. $\exists M > 0$
2. $\exists \vec{F}$ $\qquad \dfrac{d\vec{I}}{dt} = \vec{F} \qquad \dfrac{dM}{dt} = 0$
3. $\exists \vec{K}'', \vec{\mu}''$ $\qquad \dfrac{d\vec{K}}{dt} = \vec{\mu} \qquad \vec{K} = \vec{K}' + \vec{K}''$
4. $\exists W, Q$

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}' + \vec{\mu}''$$

$$\frac{dE}{dt} = W + Q \qquad E = K + U$$

$\exists\, \theta(x^i, t) > 0$

$\theta > 0$ Абсолютная темп.

$$\exists\, \theta_{min} = 0, \quad \theta_{min} < \theta$$

Опр. Производство энтропии за счёт внешних массовых источников:

$$\bar{Q}_m = \int_V \frac{q_m}{\theta}\, dm = \int_V \frac{\rho q_m}{\theta}\, dV \qquad (2)$$

Производство энтропии за счёт внешних поверхн. источников:

$$\bar{Q}_\Sigma = \int_\Sigma \frac{q_\Sigma}{\theta}\, d\Sigma = -\int_\Sigma \frac{\vec{n}\cdot\vec{q}}{\theta}\, d\Sigma \qquad (3)$$

Смысл:

$\dfrac{dQ}{\theta}$ – „эффективность нагрева“

Аксиома 9 (Второй з-н термодинамики)

Для всяких СС в Ж. имеют обл. $V(t)$, $\forall t \geq 0$ $\exists$ 2 скалярн. аддитивн. ф-ции:

- $H(V,t)$ - энтропия СС
- $\bar{Q}^*(V,t)$ - производство энтропии за счет внутр. нагр.,

такие, что:

$$\frac{dH}{dt} = \bar{Q} + \bar{Q}^* \quad (4),$$ причем:

$$\bar{Q}^* \geq 0 \quad (5)$$ - нер-во Планка

$$(4)-(5) \Longrightarrow \frac{dH}{dt} \geq \bar{Q} \quad (6)$$

Неравенство Клаузиуса

Интегральная формулировка

Рассмотрим dV, dm. Согласно 2-му з-ну термодин. для dV $\exists\, dH$ - энтропия dV; $d\bar{Q}^*$ - производство энтропии за счет внутр. напряжений в dV.

Тогда введем: $\eta = \frac{dH}{dm}$ - плотность энтропии;

$$\frac{q^*}{\theta} = \frac{d\bar{Q}^*}{dm} \quad (7)$$ = плотность внутр. произв. энтропии

Тогда в силу аддитивности:

$$H = \int_{V(t)} dH = \int_{V(t)} \eta\, dm = \int_{V(t)} \rho\eta\, dV \quad (8)$$

$$\bar{Q}^* = \int_V d\bar{Q}^* = \int_V \frac{q^*}{\theta} dm = \int \frac{\rho q^*}{\theta} dV \quad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в (4) получим:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\eta\, dV = \int_V \frac{\rho q_m}{\theta} dV - \int_\Sigma \frac{\bar{n}\cdot\bar{q}}{\theta} d\Sigma + \int_V \frac{\rho q^*}{\theta} dV \quad (10)$$

или

$$\frac{d}{dt}\int \rho \eta\, dV = \int_V \frac{\rho(q_m + q^*)}{\theta} dV - \int_\Sigma \frac{\vec{n}\cdot\vec{q}}{\theta} d\Sigma \qquad (11)$$

Дифф-ая формулировка:

С учетом формулы дифф. интегр. по подвижному объему

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho \frac{d\eta}{dt} dV \qquad (12)$$

По ф-ле Гаусса-Остроградского:

$$\int_\Sigma \vec{n}\cdot\left(\frac{\vec{q}}{\theta}\right) d\Sigma = \int_V \nabla\cdot\left(\frac{\vec{q}}{\theta}\right) dV \qquad (13)$$

Получим: $\int_V \left(\rho\frac{d\eta}{dt} - \frac{\rho(q_m - q^*)}{\theta} + \nabla\cdot\left(\frac{\vec{q}}{\theta}\right)\right) dV = 0 \qquad (14)$

В силу произвольности V, имеем:

$$\rho\frac{d\eta}{dt} = -\nabla\cdot\left(\frac{\vec{q}}{\theta}\right) + \rho\left(\frac{q_m + q^*}{\theta}\right) \qquad (15)$$

дифф. ф-ма в эйлеровом описании

$$\rho\frac{d\eta}{dt} = \rho\frac{d\eta}{dt} + \rho\vec{v}\cdot\nabla\eta + \eta\left(\frac{\partial\rho}{dt} + \nabla\cdot(\rho\vec{v})\right) = \frac{\partial\rho\eta}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{v}\eta) \qquad (16)$$

дивергентная форма

$$(16)\to(15): \frac{\partial\rho\eta}{\partial t} + \nabla\left(\rho\vec{v}\eta + \frac{\vec{q}}{\theta}\right) = \rho(q_m + q^*)/\theta \qquad (17)$$

дивергентная форма в эйлеровом описании

(15) и (17) „Уравнение баланса энтропии"

Рассмотрим (15): $\nabla\cdot\left(\frac{\bar q}{\theta}\right) = \frac{\nabla\cdot\bar q}{\theta} + \bar q\cdot\nabla\left(\frac{1}{\theta}\right) = \frac{\nabla\cdot\bar q}{\theta} - \frac{1}{\theta^2}\bar q\cdot\nabla\theta$,

тогда (15) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\nabla\bar q}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\bar q\cdot\nabla\theta + \rho\frac{q_m}{\theta} + \rho\frac{q^*}{\theta} \qquad (19)$$

Домножим (19) на θ:

$$\rho\theta\frac{d\psi}{dt} = -\nabla\bar q + \rho q_m + \omega^* \quad (20), \text{ где}$$

$$\omega^* = \rho q^* + \frac{1}{\theta}\bar q\cdot\nabla\theta \qquad (21)$$

ф-ия рассеивания энергии (ф-ия диссипации)

(21): $\rho q^* = \omega^* - \frac{1}{\theta}\bar q\cdot\nabla\theta \geqslant 0 \qquad (22)$

неравенство Фурье: $-\bar q\cdot\nabla\theta \geqslant 0 \qquad (23)$

Равномерный однородный нагрев $\theta(t)$

$\nabla\theta \equiv 0$, тогда $\bar q\cdot\nabla\theta = 0 \quad \forall x\in V$ и

$\Rightarrow \rho q^* = \omega^*$

Дифф-ая формулировка 2-го з-на термодин. в Лагранж. описан:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\psi\, dV = \int_V \rho\frac{d\psi}{dt}\, dV = \int_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\rho}\frac{d\psi}{dt}\, d\overset{\circ}{V}$$

$$\int_V \rho\frac{q^*}{\theta}\, dV = \int_{\overset{\circ}{V}} \frac{\overset{\circ}{\rho} q^*}{\theta}\, d\overset{\circ}{V}; \qquad \int_\Sigma \frac{\bar n\cdot\bar q}{\theta}\, d\Sigma = \int_{\overset{\circ}{\Sigma}} \frac{\overset{\circ}{\bar n}\cdot\overset{\circ}{\bar q}}{\theta}\, d\overset{\circ}{\Sigma}$$

Тогда:

$$\int_{\overset{\circ}{V}} \left(\overset{\circ}{\rho}\frac{d\psi}{dt} + \rho\overset{\circ}{\nabla}\cdot\left(\frac{\overset{\circ}{\bar q}}{\theta}\right) - \frac{\overset{\circ}{\rho}(q^* - q_m)}{\theta}\right) d\overset{\circ}{V} = 0 \qquad (28)$$

В силу произвольности $\mathring{V}$

$$\mathring{\rho}\frac{d\eta}{dt} = -\mathring{\nabla}\cdot\left(\frac{\bar{q}}{\theta}\right) + \mathring{\rho}\left(\frac{q_m + q^*}{\theta}\right) \qquad (29)$$

Диверг : дифференцируем (она не дивергентн.)

т.к. $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{d\eta}{dt}$ в лагранж. описании

$$\mathring{\rho}\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\mathring{\nabla}\cdot\bar{q}}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\bar{q}\cdot\mathring{\nabla}\theta + \mathring{\rho}\frac{q_m}{\theta} + \frac{\mathring{\rho}q^*}{\theta}$$

$$\mathring{\rho}\theta\frac{d\eta}{dt} = -\mathring{\nabla}\cdot\bar{q} + \mathring{\rho}q_m + \mathring{w}^*, \qquad (30)$$

где $\mathring{w}^*$ - ф-ция диссипации в $\mathring{K}$

$$\mathring{w}^* = \mathring{\rho}q^* + \frac{1}{\theta}\bar{q}\cdot\mathring{\nabla}\theta \geq 0$$

Лекция 13.

Уравнения совместности деформаций

Основные законы сохранения:

1. ЗСМ
2. ЗИКД
3. ЗИМКД
4. I-й з-н термодин. (ЗСЭ)
5. II-й з-н термодин. (з-н баланса энтропии)

1. Определение условий совместности

требование: $\bar{x} = \bar{x}(X^i, t)$ (1)

Первая форма УСД

Выберем в (3) в качестве $\overline{\mathrm{II}}$ радиус-вектор $\overline{x}$,

тогда $d\overline{x} = \frac{\partial \overline{x}}{\partial x^i} dx^i$ (6)

или $d\overline{x} = \overline{r}_i\, dx^i$ (7)

Посмотрим на (7) с такой точки зрения:

Если известен з-н движ. мат. т. $\overline{x} = \overline{x}(x^i, t)$, то $\exists!$ ДСК Ox, в котор. $\exists\, \overline{x}$, как однозначная ф-ция координат и времени: $\overline{x} = \overline{x}(x^i, t)$ (8).

т. е. $\exists$ лок. вектор базиса $\overline{r}_i$

Пусть известно, что $\exists$ поле векторов $\overline{r}_i(x^j)$, а про $\overline{x}$ не известно, что $\exists$ этот вектор, как однозн. ф-ция координат

Вопрос: каким условиям должны удовл. $\overline{r}_i(x^i)$, чтобы $\exists\, \overline{x}(x^i, t)$?

Для того, чтобы $\exists\, \overline{x}$ как однознач. ф-ция x^i, векторы $\overline{r}_i$ должны удовл. интегр. усл. (7).

Эти усл. имеют вид:

$$\frac{\partial \overline{r}_\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial \overline{r}_\beta}{\partial x^\alpha}, \quad \alpha, \beta = 1,2,3 \quad (8)$$

Если $\overline{r}_\alpha(x^i)$ удовл. (8), то форма (7) имеет полн. дифф-ал, т.е. $\exists\, \overline{x}(x^i, t)$ $d\overline{x} = \overline{r}_i dx^i$ (10)

т. е. $\overline{x}$ явл. радиус-вектором, т.к. из (10) $\overline{r}_i = \frac{\partial \overline{x}}{\partial x^i}$ (11)

<u>Теорема 1.</u> УСД выполн. $\Leftrightarrow$ в К $\exists\, \overline{r}_i$, которые

- явл. базисом
- однозначн. и гладкими
- обладают вект. потенц.,

т. е. $\exists\, \overline{x}$: $\overline{r}_i = \frac{\partial \overline{x}}{\partial x^i}$

Опр Необх. и достат. условие $\exists$ однозн. ф-ии $\bar{u}(x^i,t)$ наз-ся условием совместности деформаций с.с V

$$\bar{u}(x^i,t) = \bar{x}(x^i,t) - \mathring{\bar{x}}(x^i,t) \qquad (2)$$

УСД - определяют такие движ. с.с, при которых не допуск. несплошность в К

Появление несплошности в К обусловлено разрушением с.с

Если $\bar{x}(x^i,t)$ - не явл. однознач. ф-ией коорд. x^i, то это означает, что пр-во E^a_n не явл. евклидовым, т.к. если E^a_n $\forall t \ge 0$ явл. евклид., то $\forall M$ СС $\exists\, \bar{x}(M) = \bar{x}(x^i,t)$, которое явл. однозначн. для $\forall$ Oe.

Т.о. УСД эквивалентн. условию того, что с.с принадлежит пр-ву E^a_n

Условие интегрируемости
дифф-ой формы.

Рассмотрим дифф. ф-му $\sum\limits_{\alpha=1}^{3} A_\alpha dx^\alpha$ (3),
где $A_\alpha = A_\alpha(x^i)$ - гладкие ф-ии от x^i

Задача: При каких условиях $\exists$ полный дифференц.?
т.е. $\exists\, A(x^\alpha)$: $dA = \sum\limits_{\alpha=1}^{3} A_\alpha dx^\alpha$ (4)

Дифф. форма (3) имеет полный дифф-л, т.е. ~~имеет полный дифф-л т.е.~~ выполн. (4) тогда и только тогда, когда A_α удовл. усл. $\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha}$ (5)

$$\frac{\partial \bar{r}_\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x^\alpha}\right) = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \frac{\partial \bar{r}_\beta}{\partial x^\alpha}$$

Вторая ф-ма УСА

Выберем в кач-ве A $\frac{\partial \bar{r}_\alpha}{\partial x^\beta}$ т.е. рассмотр:

$$\partial \bar{r}_\alpha = \left(\frac{\partial \bar{r}_\alpha}{\partial x^i}\right) dx^i \quad (12)$$

Если изв. зак движ. $\bar{x} = \bar{x}(x^i, t)$, то

$$\bar{r}_i = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x^i}$$

Преобразуем (12) $\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^m \bar{r}_m \quad (13)$

Это определ символов кристоффеля

$$\Rightarrow d\bar{r}_i = (\Gamma_{ij}^m \bar{r}_m)\, dx^j \quad (14)$$

Пусть известен набор $\Gamma_{ij}^m(x^i)$ – полей симв Кристоф.

Вопрос: при каких условиях будет $\exists\ \bar{r}_i$, что (14), что означает $\exists$ полного дифф.

$$d\bar{r}_i = (\Gamma_{ij}^m \bar{r}_m)\, dx^j$$

Полный дифф. (14) $\exists$ тогда и только тогда, когда поля Γ_{ij}^m удовл. усл. интегр.:

$$\frac{\partial(\Gamma_{ij}^m \bar{r}_m)}{\partial x^n} = \frac{\partial(\Gamma_{in}^m \bar{r}_m)}{\partial x^j} \quad (15)$$

Преобразуем (15): $0 = \frac{\partial \Gamma_{ij}^m}{\partial x^n} \bar{r}_m + \Gamma_{ij}^m \frac{\partial \bar{r}_m}{\partial x^n} - \frac{\partial \Gamma_{in}^m}{\partial x^j} \bar{r}_m -$

$- \Gamma_{in}^m \frac{\partial \bar{r}_m}{\partial x^j}$

Используя разложение $\frac{\partial \bar{r}_m}{\partial x^n} = \Gamma^k_{mn} \bar{r}_k$, $\frac{\partial \bar{r}_m}{\partial x^j} = \Gamma^k_{mj} \bar{r}_k$ (14)

Тогда: $\left(\frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^n} - \frac{\partial \Gamma^k_{in}}{\partial x^j} + \Gamma^m_{ij}\Gamma^k_{mn} - \Gamma^m_{in}\Gamma^k_{mj}\right)\bar{r}_k = R^k_{nji}\, \bar{r}_k$,

где R^k_{nji} — это лишь просто формула [illegible]

$$R_{nji}{}^k \bar{r}_k = 0 \qquad (19)$$

$$\Leftrightarrow R^k_{nji} = 0 \qquad (20)$$

Теорема 2 УСД спл. среды вып. $\Leftrightarrow$ в K $\exists$ симв. Кристоффеля $\Gamma^m_{ij}(x^i)$, удовл. (20)

Док-во:

1) Если $\exists \Gamma^m_{ij}(x^i)$, котор. удовл. (20), то вып. услов. (15) и (14) имеет решение, т.е. $\exists \bar{r}_i$, котор. удовл. (14) и явл. однозн. ф. коорд.

Но тогда по т.1. $\exists \bar{x}(x^i, t) \Rightarrow$ выполн. УСД.

2) Если вып. УСД, то $\exists \bar{x}(x^i, t)$, то приходим к (20) #

Заметим, что если $K = \overset{\circ}{K}$, то (20) тоже выполн. $\Gamma^m_{ij} \to \overset{\circ}{\Gamma}{}^m_{ij}$

$$\overset{\circ}{R}{}^k_{nji} = \frac{\partial \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{ij}}{\partial x^n} - \frac{\partial \overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{in}}{\partial x^j} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^m_{ij}\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{mn} - \overset{\circ}{\Gamma}{}^m_{in}\overset{\circ}{\Gamma}{}^k_{mj} \qquad (21)$$

R^k_{nji} и $\overset{\circ}{R}{}^k_{nji}$ — компоненты тензора Римана-Кристоффеля

Тензорная форма УСД

Введены символы Кристоффеля 1-го рода:

$\Gamma_{ijk} = g_{km}\Gamma^m_{ij}$, Γ^m_{ij} -2-го рода (23)

Γ_{ijk} удовл.: $\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$ (24)

(24) $\Rightarrow \Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$ (25)

Введем:

$$R_{njik} = R^m_{nji} g_{mk} = g_{mk}\left(\frac{\partial(\Gamma_{ijl} g^{ml})}{\partial x^k} - \frac{\partial(\Gamma_{ikl} g^{ml})}{\partial x^l} + \right.$$

$$\left. + g^{sl}(\Gamma_{ijl}\Gamma_{snk} - \Gamma_{inl}\Gamma_{sjk})\right) \ldots (26)$$

$$g_{mk}\frac{\partial g^{ml}}{\partial x^k} = -g^{ml}\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^k} = -g^{ml}(\Gamma_{mkk} + \Gamma_{kkm}) \quad (27)$$

$$\Rightarrow R_{njik} = \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ink}}{\partial x^j} - \Gamma_{ijl}(\Gamma_{mnk} + \Gamma_{knm})g^{ml} +$$

$$+ \Gamma_{inl}(\Gamma_{mjk} + \Gamma_{kjm})g^{ml} + g^{sl}(\Gamma_{ijl}\Gamma_{snk} - \Gamma_{inl}\Gamma_{sjk}) \quad (28)$$

$$R_{njik} = \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ink}}{\partial x^j} + g^{ml}(\Gamma_{inl}\Gamma_{kjm} - \Gamma_{ijl}\Gamma_{knm}) \quad (29)$$

(24) $\longrightarrow$ (29):

$$R_{njik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{in}}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{kn}}{\partial x^i \partial x^j}\right) +$$

$$+ g^{ml}(\Gamma_{inl}\Gamma_{kjm} - \Gamma_{ijl}\Gamma_{knm}) = 0 \quad (30)$$

Теорема 13) УСД выполн. $\Leftrightarrow$ в R $\exists g_{ij}(x^k)$, сотв. удовл. (30)