Trabajo de Fin de Grado

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

Formalización de las matemáticas con Lean. Un caso de estudio: Geometría euclídea plana.

Adrián Lattes Grassi

Septiembre de 2023

Facultad de Ciencias Matemáticas.
Trabajo dirigido por Jorge Carmona Ruber.

Resumen

Este trabajo explora el uso del asistente de demostración *Lean*, un lenguaje de programación que implementa una teoría de tipos útil para verificar formalmente demostraciones matemáticas, para formalizar enunciados y resultados de la axiomática de Hilbert de la geometría euclídea plana. Esta teoría servirá de guía para introducir el uso del asistente y exponer cómo puede ser utilizado para construir relaciones de equivalencia, modelos de una teoría y demostrar la independencia entre axiomas.

Abstract

Resumen traducido al inglés.

Índice

1. Objetivos y metodología

El objetivo principal de este trabajo es aprender los fundamentos del lenguaje de programación y asistente de demostración *Lean*. Sin entrar en detalles sobre cómo funciona y está implementado el lenguaje, nos hemos propuesto aprender a utilizarlo como podría usarlo un estudiante o investigador de matemáticas. Es decir, formalizando resultados matemáticos.

Para esto hemos elegido la geometría euclídea plana, en particular la axiomatización de *David Hilbert* realizada a inicios del siglo pasado. La idea es que esta teoría sirva de guión para formalizar resultados y durante el proceso de formalización de axiomas y proposiciones aprender las características y nociones necesarias de Lean para poder formalizarlos.

Otro objetivo más ambicioso, que trasciende las posibilidades de este trabajo, es el de formalizar la independencia del *axioma de las paralelas* del resto de axiomas de la geometría. Aún no teniendo el tiempo suficiente para abordar esta tarea, hemos propuesto una formalización del enunciado de la independencia y propuesto un plan de trabajo para formalizar su demostración.

Pendiente:

- Cursos y aprendiendo Lean. Formalising maths y curso María Inés
- Aprendizaje básico sobre teoría de tipos. HOTT
- Aprendiendo geometria, libros
- Lectura de trabajos similares
- Implementación de los resultados, evitando el uso de la teoría de conjuntos.
- Referenciar apéndice A en el que se explica cómo está organizado el repositorio de código

2. Matemáticas y geometría formales.

La formalización matemática es el proceso de representar enunciados y demostraciones matemáticas utilizando un lenguaje formal y un conjunto de reglas lógicas bien definidas. En este contexto, se establece un conjunto de proposiciones fundamentales, conocidas como axiomas, que se aceptan sin requerir justificación. Estos axiomas transforman mediante la aplicación sistemática de las reglas lógicas para derivar nuevas proposiciones matemáticas. El proceso de aplicar secuencialmente estas reglas lógicas para obtener una conclusión a partir de proposiciones más básicas es conocido como demostración.

En la historia de las matemáticas los *Elementos* de *Euclides*, tratado matemático compuesto de trece libros escrito en el siglo III a.C., son el ejemplo más antiguo de proyecto de formalización matemática. En la obra se trata rigurosamente una extensa variedad de temas, como la geometría plana y espacial o la teoría de números. Euclides es el primer autor en presentar los conocimientos matemáticos siguiendo un método formal. En los tratados se presentan los argumentos a partir de una serie de postulados, definiciones y nociones comunes a partir de los cuales se demuestran proposiciones y teoremas mediante razonamientos deductivos.

La obra de Euclides ha tenido una profunda influencia en las matemáticas, la lógica y la filosofía. Los *Elementos* se mantuvieron como la principal referencia en geometría durante casi dos milenios. Las pruebas rigurosas, apoyadas en el razonamiento lógico y la estructura del tratado establecieron un estándar para la argumentación y la exposición matemática que todavía se conserva en la actualidad.

A lo largo de la historia, se ha evidenciado que los *Elementos* de *Euclides* no se ciñen estrictamente al método axiomático. En el tratado se encuentran razonamientos sustentados en intuiciones geométricas y construcciones con regla y compás, en lugar de en deducciones estrictamente lógicas derivadas de los postulados.

Durante siglos, matemáticos y filósofos han examinado y escrutado la obra de Euclides, identificando errores y omisiones y planteando cuestiones sobre la relación entre los postulados. El quinto postulado de Euclides, también conocido como postulado de las paralelas, ha sido sometido a un análisis riguroso. Este postulado afirma que, dada una línea recta y un punto fuera de ella, existe únicamente una línea recta paralela a la línea dada que pasa por el punto en cuestión. Por siglos, numerosos matemáticos, intuyendo la innecesariedad del postulado, intentaron demostrarlo a partir de los otros cuatro, pero sin éxito. El problema fue resuelto en el siglo XIX con la concepción de nuevas geometrías, como la hiperbólica y la elíptica, en las cuales el postulado de las paralelas no se verifica. Quedó así demostrada la independencia del quinto postulado respecto a los primeros cuatro, y por tanto su necesidad para la construcción de la geometría euclídea.

Durante el siglo XIX se dieron avances trascendentales en el desarrollo de las matemáticas y la lógica formales. Ejemplos notables son la formulación del álgebra de Boole, la lógica de predicados propuesta por *Gottlob Frege* o el desarrollo de la *aritmética de Peano*. En este contexto el matemático alemán *David Hilbert* publicó su obra *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos de Geometría), en la cual se lleva a cabo una revisión exhaustiva de los *Elementos*, planteando una nueva axiomatización para formalizar correctamente los resultados de la geometría euclídea, eliminando por completo el recurso a la intuición y razonamientos geométricos en la presentación de los resultados.

3. Formalización asistida por computadores

En la docencia e investigación en matemáticas es usual escribir las demostraciones utilizando el lenguaje natural. Se asume que cada paso podría escribirse mediante fórmulas lógicas, en cuyo caso podría comprobarse que cada paso deriva de los anteriores y la aplicación de las reglas lógicas. Este trabajo es demasiado tedioso para los matemáticos, y el exceso de detalles puede restar protagonismo a las ideas que se quieren exponer.

Sin embargo esta es una tarea perfecta para ser realizada de forma automática por máquinas. Los asistentes de demostración nos permiten formalizar definiciones, enunciados de teoremas, sus demostraciones, y verficar la corrección de estas demostraciones. Algunos de estos sistemas son *Coq*, *Isabelle/HOL*, *Agda*, *Metamath*, *Mizar* y *Lean*.

Además de un lenguaje, estos sistemas suelen constar de un entorno de desarrollo que aporta información contextual útil en el proceso de demostración. *Lean* es especialmente popular debido a la calidad y facilidad de uso de este entorno y a la existencia de *mathlib*, una amplia librería de matemáticas formalizadas.

Formalizar matemáticas con la ayuda de un asistente de demostraciones consiste en digitalizar enunciados y resultados escribiéndolos en un lenguaje de programación que garantiza, mediante una correspondencia entre una teoría de tipos y la lógica con el lenguaje de la teoría de conjuntos, la validez de cada paso.

En lo que sigue de esta sección expondremos algunos beneficios y aplicaciones de los asistentes de demostración. La conferencia *¿Por qué formalizar matemáticas?* impartida por *María Inés de Frutos* en la facultad de Ciencias Matemáticas de la UCM ha sido la principal referencia a la hora de elaborar esta lista [1].

Comprobación mecanizada de demostraciones. Estos sistemas pueden verificar la corrección de demostraciones largas y técnicas, reduciéndolas a las aplicaciones fundamentales de las reglas del sistema formal utilizado, como una teoría de tipos.

Un ejemplo en el que se ha conseguido formalizar un resultado muy avanzado es el del *Liquid Tensor Experiment*. En el año 2020 el medallista Fields *Peter Scholze* lanzó a la comunidad de formalización matemática el reto de verificar un importante teorema publicado por él y *Dustin Clausen* [2]. Peter explica que, antes de que se formalizara el resultado, no estaba totalmente seguro de la corrección de una parte técnica de la demostración, que contenía muchos detalles técnicos que la comunidad no estaba estudiando.

La guía de esta demostración, que se terminó de formalizar en el año 2022, se encuentra en formato web [3] y es un buen ejemplo de un documento que presenta resultados paralelamente en un formato textual, legible por matemáticos, y su formalización en el lenguaje *Lean*.

Una de las visiones a futuro de los impulsores de *Lean*, como *Kevin Buzzard*, es la idea de a cada artículo matemático se le asocie su formalización y por tanto el

papel de los revisores pase a enfocarse en el interés de los resultados, puesto que su corrección estaría garantizada por el asistente de demostración. Actualmente este objetivo está muy lejos de ser alcanzado.

Digitalización de definiciones y enunciados. La creación de una base de datos digital puede mejorar la capacidad de búsqueda de resultados matemáticos previos, convirtiéndose en un gran apoyo en el proceso de investigación. El proyecto *Formal Abstracts* [4] se propone realizar una enciclopedia matemática digital utilizando el lenguaje *Lean*, con el objetivo de formalizar la mayor cantidad posible de teoremas publicados en un formato entendible a la vez por humanos y máquinas. Además se quieren enlazar los términos utilizados en dichos enunciados con sus definiciones precisas.

El proyecto todavía se encuentra en fase de diseño y queda bastante trabajo para que alcance sus objetivos, pero muestra una dirección de trabajo muy interesante.

Uso en docencia. En ciertos centros universitarios ya se imparten cursos apoyándose en el uso del asistente *Lean*. El principal impulsor del uso de estas herramientas en la docencia es *Kevin Buzzard*, que desde el año 2021 imparte el curso *Formalising mathematics* en el *Imperial College* [5].

El uso de asistentes de demostración en la docencia fija una referencia objetiva sobre qué es una demostración correcta de un resultado, obligando a los estudiantes a ser precisos en sus razonamientos. Además los estudiantes pueden aprovechar el entorno interactivo para comprobar autónomamente si sus razonamientos son correctos, sin necesidad de esperar la corrección del profesor.

El principal problema actual en este ámbito es que la barrera de entrada al uso de estos asistentes es alta, puesto que la instalación de las herramientas y librerías no es simple y es necesaria cierta comodidad para escribir código.

Demostración automatizada. Se espera que en un futuro se puedan incorporar a estos sistemas téncicas de inteligencia artificial que proporcionen indicaciones y ayuda a los matemáticos en el proceso de demostración. Actualmente uno de los mayores avances en este campo ha sido realizado por la empresa *OpenAI*, que ha conseguido automatizar algunas demostraciones de olimpíadas de matemáticas [6].

4. Introducción a Lean

4.1. Teoría de tipos informal

Lo primero que se necesita en matemáticas para poder formalizar afirmaciones es un lenguaje formal con el cual expresarlas. Normalmente se utiliza la lógica de

primer orden con los axiomas de la teoría de conjuntos. *Lean*[1], sin embargo, utiliza un sistema deductivo diferente, el de la teoría de tipos *Cálculo de construcciones inductivas* (*Calculus of Inductive Constructions* en inglés).

En lógica de primer orden se tiene una aserción fundamental, *que una proposición dada tenga una prueba*. Es decir, cada proposición P da lugar a la aserción correspondiente *P tiene una prueba*. Mediante ciertas reglas de transformación, y a veces una serie de axiomas, se pueden construir nuevas pruebas. Por ejemplo, dada la regla de inferencia *de A se deduce A o B* y la aserción *A tiene una prueba*, se obtiene la aserción *A o B tiene una prueba*.

En una teoría de tipos la aserción fundamental es *que un término tenga un tipo*[2]. Dados un término a y un tipo A, si *a tiene tipo A* escribRmos $a : A$. Esta es misma notación es la utilizada en *Lean*, en el que por ejemplo podemos expresar la aserción *3 es un número natural* con el código `3 : ℕ`.

Es importante no confundir esta notación con la de una relación interna a nuestro lenguaje. Mientras que en teoría de conjuntos utilizamos la relación de pertenencia $\in$ para expresar que un elemento primitivo (un conjunto) está contenido en otro, en las teorías de tipos no podemos considerar los términos o los tipos por separado. La noción fundamental es la pertenencia de tipos y cada término tiene que estar siempre acompañado por su tipo. En las teorías de tipos además existen otras aserciones, como la de igualdad entre términos de un mismo tipo. Dados $a : A$ y $b : A$, se tiene la aserción *a y b son dos términos de tipo A iguales por definición*, y escribimos $a \equiv b : A$ [3].

Las teorías de tipos también pueden utilizarse para expresar afirmaciones y demostraciones matemáticas. Las afirmaciones se codifican mediante los tipos y las demostraciones mediante construcciones de términos de un tipo dado. Es decir, se puede interpretar la aserción $a : A$ como *a es una demostración de A*. Esta interpretación da lugar a una analogía entre la lógica proposicional y una teoría de tipos, llamada correspondencia de Curry-Howard. Sin entrar en detalles, a cada proposición lógica se le puede asignar un tipo, y a cada demostración de un enunciado un término del tipo correspondiente al enunciado.

Existen distintas elecciones de reglas de transformación que considerar en teoría de tipos, que dan lugares a distintas versiones de la teoría de tipos. Lean implementa una una versión de la teoría de tipos dependiente conocida como el *Calculus of Constructions*.

[1] En este trabajo hemos utilizado a la versión 3 del lenguaje *Lean*. La versión más actual del lenguaje es la 4, que incorpora muchos cambios. Gran parte de la comunidad sin embargo continúa utilizando la versión 3, mientras que se terminan de migrar los resultados ya formalizados a la nueva versión.

[2] La referencia que hemos seguido en esta introducción a la teoría de tipos es el primer capítulo del libro *Homotopy Type Theory* [7].

[3] En *Lean* existe más de un tipo de igualdad entre términos. La mencionada aquí es la llamada igualdad *sintáctica*, que se representa con el símbolo `=`. Tamibién existen las igualdades *definicionales* y *proposicionales*.

La base de muchas teorías de tipos es el lambda cálculo tipado. El lambda cálculo es un modelo universal de computación introducido por *Alonzo Church* en los años treinta. Sin entrar en su formalización, en el lambda cálculo se consideran dos operaciones fundamentales para tratar con funciones, la abstracción y la evaluación.

- **Abstracción**. Es el mecanismo de definición de funciones mediante la introducción de parámetros. Dado un término `x + 1 : ℕ`, mediante la sintaxis `λ x : ℕ, (x + 1 : ℕ)` se convierte la variable libre `x` en una variable ligada por la abstracción, a la que llamamos parámetro de la función.

  Es importante recordar que cada término tiene que ir acompañado del tipo al que pertenece. En esta expresión estamos indicando que tanto el parámetro `x` como el resultado de la función, `x+1`, son de tipo `ℕ`. Es decir, tenemos una función que dado un número natural devuelve otro número natural. Esto también puede escribirse como `(λ x, x + 1) : ℕ → ℕ`.

  Lean además incluye notación para definir funciones que devuelven otras funciones, lo cual es muy útil para tratar funciones que reciben más de un parámetro[4]. Las siguientes líneas de código definen expresiones equivalentes

```
λ a : α, λ b : β, a
λ (a : α) (b : β), a
```

  que representan el mismo término, de tipo $\alpha \to \beta \to \alpha$.

- **Evaluación**. Consiste en aplicar funciones, pasándoles los valores de los argumentos que evaluar. Por ejemplo la expresión `(λ x : ℕ, (x + 1) : ℕ) (1 : ℕ)` indica que estamos evaluando la función `(λ x, x + 1) : ℕ → ℕ` con el parámetro `x` sustituido por el término `1 : ℕ` (para que la sustitución pueda realizarse los tipos deben coincidir). Mediante un proceso de reducción se obtiene el término `2 : ℕ`.

La teoría de tipos que implementa *Lean*, el *Cálculo de las construcciones inductivas*, introduce una serie de reglas y formas de construir tipos adicionales, como los *tipos inductivos* o los *tipos dependientes*, útiles para formalizar definiciones inductivas y cuantificadores lógicos.

Referencia: Theorem proving in Lean [8]

Como se ve en los ejemplos, el código fuente de Lean se pueden incluir caracteres unicode, como λ, → o ℕ. En el apéndice B explicamos cómo introducir estos caracteres desde el entorno de desarrollo.

Esta característica del lenguaje es muy útil a la hora de escribir código lo más cercano posible a las notaciones a las que estamos acostumbrados a usar en matemáticas. La inclusión de estos caracteres está facilitada en el entorno de desarrollo, escribiendo comandos que empiecen por \ estos se reemplazarán por el caracter correspondiente.

[4] La transformación de funciones de varios parámetros en funciones de orden superior se denomina *currificación*.

Por ejemplo al escribir `\to` este comando se reemplazará automáticamente por el caracter →, `\lambda` por λ y `\N` por ℕ.

Pendiente: Incluir en algún lugar explicación sobre entorno de desarrollo (plugin vscode) y sus características (¿Apéndice?).

Que cada término sea siempre considerado junto a su tipo no significa que sea siempre necesario explicitar dicho tipo. Lean tiene un mecanismo llamado *inferencia de tipos* que le permite deducir automáticamente el tipo de un término cuando no ha sido explicitado pero el contexto aporta información suficiente. Por ejemplo, cuando definimos la función `λ x : ℕ, (x + 1 : ℕ)` no es necesario incluir la segunda anotación de tipo. Dada la expresión `x + 1` y sabiendo por contexto que `x : ℕ` el sistema de inferencia de tipos deduce que la suma de dos números naturales también es un número natural, por lo que se infiere el tipo ℕ.

4.2. Introducción de términos

En lean existen distintas formas de introducir nuevos términos en el entorno actual.

Constantes

Mediante los comandos `constant` y `constants` se pueden introducir términos en el entorno, postulando su existencia. Este comando equivale por tanto a considerar nuevos axiomas sobre la existencia de los términos que introduce.

```
constant a : ℕ
constants (b : ℤ) (c : ℂ)
```

Definiciones

Si no queremos introducir nuevos axiomas podemos definir nuevos términos mediante el comando `def`. Como estamos definiendo un símbolo, es necesario proporcionar el tipo y término que queremos asignar al símbolo:

```
def succ : ℕ → ℕ := λ n, n + 1
def succ' (n : ℕ) : ℕ := n + 1 -- Otra forma de definir succ
```

Para introducir parámetros de funciones se puede omitir la notación λ, incluyendo las variables parametrizadas antes de los dos puntos que anotan el tipo de la definición.

Esta notación de introducción de parámetros es muy útil y simple, pero puede resultar demasiado explícita. Veamos por ejemplo cómo se puede definir la función identidad, que dado un término de un tipo devuelve el mismo término. Si queremos que la identidad definida sea sea general y se le puedan aplicar términos de cualquier tipo necesitaremos introducir el tipo del término como un parámetro adicional.

```
def id1 (α : Type*) (e : α) := e
```

El problema de esta definición es que cada vez que se quiera utilizar será necesario proporcionarle como primer argumento el tipo del término que se le quiere pasar, por ejemplo `id1 ℕ 0`. Pero la función identidad que queremos considerar recibe un solo argumento. Como a cada término acompaña siempre su tipo, dado el término `e : α`, el sistema de inferencia de tipos de Lean es capaz de deducir automáticamente el tipo `α`. Solo falta indicar en la definición cuál es el parámetro cuya identificación queremos delegar al sistema de inferencia de tipos.

```
def id2 {α : Type*} (e : α) := e
```

Así los parámetros indicados entre llaves, llamados *parámetros implícitos*, serán deducidos automaticamente.

Pendiente: Explicar comando `variable`

4.3. Proposiciones

En Lean se tiene el tipo `Prop` para expresar las proposiciones mediante la analogía de *proposiciones como tipos* dada por la correspondencia de Curry-Howard.

La correspondencia de Curry-Howard afirma que estas funciones de la teoría de tipos se comportan de la misma forma que la implicación en lógica. Por tanto en Lean utilizaremos el símbolo $\to$ para referirnos tanto a funciones como a implicaciones dentro de una proposición. Dadas dos proposiciones `p q : Prop` podemos construir la proposición `p → q : Prop`, que se interpreta como `p` *implica* `q`.

Pendiente: Explicar cómo se expresan las proposiciones. or, and, neg, forall, exists, neq, etc

4.4. Demostraciones

Pendiente: Explicar qué es una demostración en teoría de tipos (term mode). Explicar qué son las tácticas y cómo funciona el modo táctico.

Pendiente: Incluir anexo hablando sobre el entorno de desarrollo y el modo táctico, con captura de pantalla.

4.5. Mathlib

Pendiente: Contar alguna cosa básica. Explicar cómo utilizar la web para encontrar cosas.

5. Formalizando la geometría de Hilbert en Lean

En esta sección se presentan algunos axiomas y resultados elementales de la axiomática de Hilbert, comparando los enunciados y demostraciones expresados de forma natural con sus correspondientes formalizaciones en Lean.

En 1899 Hilbert empezó a desarrollar su propuesta de nueva fundamentación de la geometría euclídea, mediante una serie de apuntes de conferencias que más tarde se convertirían en el tratado *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos de Geometría). Este trabajo hace énfasis en los problemas de clasificación de nociones primitivas, grupos de axiomas, interdependencias entre las distintas partes de la teoría y minimalidad de los axiomas considerados.

Esta nueva teoría geométrica parte de postular ciertas nociones primitivas y una serie de axiomas que establecen cómo se relacionan estas nociones. En este trabajo se ha seguido una versión modernizada de los axiomas y los resultadas, basada en las presentaciones de los libros de *Hartshorne* [9] y *Greenberg* [10], en las que se considera el caso restringido de la geometría plana.

Consideraremos por tanto cinco nociones primitivas: dos términos primitivos (*puntos* y *líneas*) y cuatro relaciones primitivas (*incidencia*, *orden*, *congruencia de segmentos* y *congruencia de ángulos*).

Se tratarán los axiomas y definiciones correspondientes a estas nociones primitivas, siguiendo la estructura del tratado, mencionando alguna cuestión sobre el axioma de las paralelas, pero sin entrar en cuestiones de continuidad. Además se incluirá alguna formalización de resultados demostrables con las nociones presentadas.

5.1. Geometría de incidencia

El primer grupo de axiomas establece propiedades de la relación de *incidencia*, una relación binaria entre *puntos* y *líneas*. Dado un punto A y una recta l escribiremos $A \sim l$ para denotar que A y l están relacionados mediante la relación de incidencia. Los tres *axiomas de incidencia* son los siguientes:

Axioma I1. *Para cada par de puntos distintos A y B existe una única recta que los contiene.*

Axioma I2. *Cada línea contiene al menos dos puntos distintos.*

Axioma I3. *Existen tres puntos no colineares. Es decir, existen A, B y C tales que $AB \neq BC$.*

Para formalizar estos axiomas en Lean podríamos utilizar el comando `constant` o `axiom`, pero existen otras construcciones que permiten explicitar mejor y tener más control sobre qué axiomas se están usando en cada momento. En lugar de enunciar un axioma y a partir de entonces darlo siempre por válido, definiremos un objeto (un nuevo tipo) en el que agruparemos nociones primitivas y axiomas sobre estas.

Se procederá de forma análoga a la definición usual de un *grupo*, en el se consideran un conjunto (en *Lean* trabajaremos con tipos) con una operación, un elemento distinguido y unos axiomas. Para definir la *geometría de incidencia* se toman dos tipos (uno para los puntos y otro para las líneas), una relación entre estos tipos (la incidencia) y los axiomas.

Para hacer esto *Lean* consta de dos construcciones muy similares, las *estructuras* y las *clases*, mediante las cuales se pueden agrupar tipos y proposiciones sobre estos tipos. **Pendiente:** Explicar brevemente diferencia entre estructuras y clases. Esta es la definición de clase mediante la que hemos digitalizado las nociones y conceptos de la *geometría de incidencia*:

```
17  class incidence_geometry (Point Line : Type*) :=
18    (lies_on : Point → Line → Prop)
19    (infix ` ~ ` : 50 := lies_on)
20    (I1 {A B : Point} (h : A ≠ B) : ∃! l : Line, A ~ l ∧ B ~ l)
21    (I2 (l : Line) : ∃ A B : Point, A ≠ B ∧ A ~ l ∧ B ~ l)
22    (I3 : ∃ A B C : Point, neq3 A B C ∧ ¬ ∃ l : Line,  A ~ l ∧ B ~ l ∧ C ~ l)
```

src/incidence_geometry/basic.lean

Como se puede intuir leyendo el código, los tipos `Point` y `Line` son parámetros de la clase. Las siguientes líneas explicitan términos que tienen que existir y tener el tipo especificado después de los dos puntos.

La relación de incidencia se ha formalizado como una función que dados un punto y una línea devuelve la proposición que determina si el punto está en la línea. En la línea 19 se introduce la notación mencionada anteriormente, mediante el comando `infix`. En los axiomas, siguiendo el estilo de la libería *mathlib*, se ha evitado el uso de cuantificadores universales, y en su lugar se han incluido los términos correspondientes como parámetros, lo que es equivalente en teoría de tipos pero más cómodo de leer.

Es interesante observar lo cercano que es el código en *Lean* a la forma en la que escribiríamos los axiomas utilizando los símbolos usuales de la lógica. No es necesario tener conocimientos de *Lean* para entender la mayoría de los enunciados (no se da el mismo caso con las demostraciones).

Pendiente: Explicar cómo se usan las clases. Parámetros con corchetes e instancias.

5.1.1. Definiciones

Las siguientes definiciones son útiles para tratar con puntos y líneas y continuar el desarrollo de la teoría.

En las demostraciones es útil tenér una forma de, dados dos puntos distintos, construir el término de la línea que pasa por ellos, aprovechando el axioma I1.

```
30 noncomputable def line
31   {Point : Type*} (Line : Type*) [incidence_geometry Point Line]
32   {A B : Point} (h : A ≠ B) :
33   { l : Line // A ~ l ∧  B ~ l } :=
34 begin
35   let hAB := I1 h,
36   rw exists_unique at hAB,
37   let P := λ l : Line, A ~ l ∧  B ~ l,
38   have hlP : ∃ l : Line, P l, { tauto },
39   exact classical.indefinite_description P hlP,
40 end
```

src/incidence_geometry/basic.lean

El tipo de esta definición (línea 33) es un *tipo dependiente*: al tipo `Line` se le asocia la propiedad de que los puntos pertenezcan al término correspondiente. En el código fuente completo hemos desarrollado también una versión de esta función, `line_unique`, que también devuelve la propiedad de unicidad dada por el axioma I2.

Definición (Colinearidad)**.** Decimos que tres puntos distintos son **colineares** si existe una línea que los contiene (todos los puntos inciden en la línea).

```
60 def collinear {Point : Type*} (Line: Type*) [incidence_geometry Point Line]
61   (A B C : Point) : Prop := ∃ l : Line, A ~ l ∧ B ~ l ∧ C ~ l
```

src/incidence_geometry/basic.lean

En esta definición el parámetro del tipo `Point : Type*` es implícito, puesto que se puede inferir a partir de los términos `A B C : Point`. `Line : Type*` sin embargo tiene que ser explícito ya que los demás parámetros no proporcionan información suficiente para inferirlo automáticamente.

Definición (Puntos comunes)**.** Decimos que un punto es **común** a dos líneas si está en ambas líneas. Si dadas dos líneas existe un punto común, decimos que las líneas **tienen** un punto en común.

```
173 def is_common_point
174   {Point Line : Type*} [incidence_geometry Point Line]
175   (A : Point) (l m : Line) :=
176   A ~ l ∧ A ~ m
```

src/incidence_geometry/basic.lean

En este caso los parámetros `Point Line : Type*` son ambos implícitos porque los argumentos `A : Point` y `l m : Line` proporcionan la información necesaria para la inferencia automática.

```
179 def have_common_point
180   (Point : Type*) {Line : Type*} [incidence_geometry Point Line]
181   (l m : Line) :=
182   ∃ A : Point, is_common_point A l m
```

src/incidence_geometry/basic.lean

5.1.2. Resultados

Uno de los primeros resultados que se pueden demostrar, utilizando sólamente los axiomas de incidencia es el siguiente:

Proposición 1. *Dos líneas distintas pueden tener como mucho un punto en común.*

Demostración. Sean l y m dos líneas. Supongamos que ambas contienen los puntos A y B con $A \neq B$. Por el axioma I1, existe una única línea que pasa por A y B, por lo que l y m deben ser iguales. □

Esta demostración, que sigue la presentación del libro de *Hartshorne* [9], puede interpretarse como una demostración por reducción al absurdo sobre la condición de que las dos líneas sean iguales, o como una demostración por contraposición: si asumimos que no se cumple la conclusión (que las dos lineas no tengan más de un punto en común), entonces tampoco se cumple la premisa (que las dos líneas sean iguales).

Al implementar estas ideas en Lean nos damos cuenta de que hay bastantes detalles que necesitamos tener en cuenta.

```
21 lemma neq_lines_have_at_most_one_common_point
22   (Point : Type*) {Line : Type*} [ig : incidence_geometry Point Line] :
23   ∀ l m : Line, l ≠ m →
24     (∃! A : Point, is_common_point A l m)
25     ∨ (¬ have_common_point Point l m) :=
26 begin
27   intros l m,
28   contrapose,
29   push_neg,
30   rintro ⟨not_unique, hlm⟩,
31   rw exists_unique at not_unique,
32   push_neg at not_unique,
33   cases hlm with A hA,
34   rcases not_unique A hA with ⟨B, ⟨hB, hAB⟩⟩,
35   rw ne_comm at hAB,
36   exact unique_of_exists_unique (ig.I1 hAB) ⟨hA.1, hB.1⟩ ⟨hA.2, hB.2⟩
37 end
```

src/incidence_geometry/propositions.lean

Analicemos la demostración línea por línea:

L.26 El estado táctico inicial incluye los parámetros del lema. En este caso los tipos `Point` y `Line` e `ig`, la instancia de la clase `incidence_geometry`. Esta instancia representa el hecho de que los tipos `Point` y `Line` cumplen los axiomas de la geometría de incidencia.

La meta se corresponde con el enunciado del lema, es decir lo que queremos demostrar.

L.27 `intros l m,` La aplicación de la táctica `intros` introduce las hipótesis `l` y `m`. Es decir, saca el cuantificador universal de la meta e introduce las variables cuantificadas en el estado táctico, pasando a tener ahora dos nuevos términos `l : Line` y `m : Line`. La nueva meta es

```
l ≠ m → (∃! (A : Point), is_common_point A l m) ∨ ¬have_common_point Point l m
```

Esto equivale a decir en lenguaje natural "sean l y m dos líneas"

L.28 `contrapose,` La táctica `contrapose` permite realizar una demostración por contraposición. Es decir, si nuestra meta es de la forma `A → B`, la reemplaza por `¬B → ¬A`. En este caso la meta resultante es

```
⊢ ¬((∃! (A : Point), is_common_point A l m) ∨ ¬have_common_point Point l m)
  → ¬l ≠ m
```

L.29 `push_neg,` La táctica `push_neg` utiliza equivalencias lógicas para «empujar»las negaciones dentro de la fórmula. En este caso, al no haber especificado una hipótesis concreta, se aplica sobre la meta.

En la primera parte de la implicación se aplica una ley de De Morgan para introducir la negación dentro de una disjunción, convirtiéndola en una conjunción de negaciones. En la segunda, negar una desigualdad equivale a una igualdad. Por tanto la meta resultante es

```
⊢ (¬∃! (A : Point), is_common_point A l m)
  ∧ have_common_point Point l m → l = m
```

Es interesante notar que `push_neg` no consigue 'empujar' la negación todo lo que podríamos desear.

Esto es así porque no está reescribiendo las definiciones previas y de `∃!`. Esto lo tendremos que hacer manualmente, como se verá enseguida.

L.30 `rintro ⟨not_unique, hlm⟩,` La táctica `rintro` funciona como `intro`, en este caso aplicada para asumir la hipótesis de la implicación que queremos demostrar. La variante `rintro` nos permite entrar en definiciones recursivas, en este caso en la del operador `∧`, y mediante el uso de los paréntesis `⟨⟩` introducir los dos lados

de la conjunción como hipótesis separadas. Por tanto después de aplicar esta táctica obtendremos dos hipótesis adicionales:

```
not_unique: ¬∃! (A : Point), is_common_point A l m
hlm: have_common_point Point l m
```

y la meta resultante es el segundo lado de la implicación, es decir `⊢ l = m`.

L.31 `rw exists_unique at not_unique`, La táctica `rw` (abreviación de `rewrite`) nos permite reescribir ocurrencias de fórmulas utilizando definiciones o lemas de la forma `A ↔ B`. Al escribir `at` indicamos dónde queremos realizar dicha reescritura, en este caso en la hipótesis `not_unique`.

En este caso utilizamos la definición de `∃!`, con lo que se modifica la hipótesis

```
not_unique : ¬∃ (x : Point),
is_common_point x l m ∧ ∀ (y : Point), is_common_point y l m → y = x
```

L.32 `push_neg at not_unique`, **Pendiente:** revisar

L.33 `cases hlm with A hA`, La táctica `cases` nos permite, entre otras cosas, dada una hipótesis de existencia, obtener un término del tipo cuantificado por el existe y la correspondiente hipótesis particularizada para el nuevo término.

En nuestro caso tenemos la hipótesis `hlm: have_common_point Point l m` y la definición `have_common_point Point l m := ∃ A : Point, is_common_point A l m`.

Por tanto al aplicar la táctica, la hipótesis hlm se convierte en dos nuevas hipótesis

```
A : Point
hA: is_common_point A l m
```

L.34 `rcases not_unique A hA with ⟨B, ⟨hB, hAB⟩⟩`, En esta línea están ocurriendo distintas cosas:

- Recordemos que en el estado táctico actual tenemos la hipótesis

```
not_unique: ∀ (x : Point), is_common_point x l m
→ (∃ (y : Point), is_common_point y l m ∧ y ≠ x)
```

Primero se está construyendo el término `not_unique A hA`, al que posteriormente se le aplicará la táctica rcases.

En Lean los cuantificadores universales y las implicaciones pueden tratarse como funciones. Al pasar el primer argumento `A` estamos particularizando la cuantificación sobre el punto `x`, proporcionando el término `A : Point` que tenemos entre nuestras hipótesis. Por tanto el término `not_unique A` es igual a

```
is_common_point A l m → (∃ (y : Point), is_common_point y l m ∧ y ≠ A)
```

Ahora podemos observar que tenemos entre nuestras hipótesis la condición de esta implicación, `hA: is_common_point A l m` Al pasar este término como segundo argumento obtenemos la conclusión de la implicación, y por tanto el término `not_unique A hA` es igual a

```
∃ (y : Point), is_common_point y l m ∧ y ≠ x
```

- La aplicación de la táctica `rcases` nos permite, como anteriormente, obtener un término concreto del cuantificador existencial y además profundizar en la definición recursiva del ∧, generando así dos hipótesis separadas. Obtenemos por tanto las nuevas hipótesis

```
B: Point
hB: is_common_point B l m
hAB: B ≠ A
```

L.35 `rw ne_comm at hAB,` Para tener la hipótesis `hAB: B ≠ A` en el mismo orden que el utilizado en los axiomas y poder utilizarlos correctamente, reescribimos la hipótesis `hAB` utilizando la propiedad conmutativa de la desigualdad, obteniendo así la hipóteis `hAB: A ≠ B`.

L.36 `exact unique_of_exists_unique (ig.I1 hAB) ⟨hA.left,hB.left⟩ ⟨hA.right,hB.right⟩,`

La táctica `exact` se utiliza para concluir la demostración proporcionando un término igual a la meta. Recordemos que la meta actual es `⊢ l = m`.

Analicemos entonces el término que estamos proporcionando a la táctica.

El lema `unique_of_exists_unique`, definido en la librería estándar de Lean, sirve para extrer la parte de unicidad del cuantificador `∃!`. Dadas una fórmula de la forma `∃! x, px` y dos fórmulas `p a` y `p b` , devuelve la fórmula que aserta la igualdad entre los términos que cumplen la propiedad `p`: `a = b`.

Como primer argumento le estamos pasando el primer axioma de incidencia, particularizado con la hipóteis `hAB : A ≠ B`. Es decir `ig.I1 hAB` es igual a `∃! l : Line, A ~ l ∧ B ~`

Ahora queremos pasar en los otros dos argumentos términos `A ~ l ∧ B ~ l` y `A ~ m ∧ B ~ m`, para obtener la igualdad `l = m`. Para esto tenemos que recombinar las hipótesis `hA` y `hB`.

`hA.left` es igual a `A ~ l` y `hB.left` a `B ~ l`, y mediante los paréntesis ⟨⟩ combinamos estos términos en la conjunción `⟨hA.left,hB.left⟩`, obteniendo `A ~ l ∧ B ~ l`.

El uso de los paréntesis nos permite construir una conjunción sin tener que especificar esplícitamente que queremos construir una conjunción, pero el sistema de tipos de Lean permite inferir que el término esperado es una conjunción.

Análogamente para el segundo argumento.

Pendiente: Mencionar que el código del modo táctico no se parece tanto a la forma usual de escribir matemáticas, pero la experiencia dada por el entorno sí que se acerca más.

De las siguientes proposiciones incluiremos sólo los enunciados. El desarrollo de las demostraciones se encuentra en el repositorio de código.

Proposición 2. *Tres puntos no colineares determinan tres líneas distintas.*

```
40 lemma non_collinear_ne_lines
41   {Point : Type*} (Line : Type*) [ig: incidence_geometry Point Line]
42   (A B C: Point)
43   (h_noncollinear : ¬ collinear Line A B C)
44   -- Las hipótesis de que los puntos son distintos son innecesarias puesto que
45   -- podrían derivarse de `non_collinear_neq`. Están incluidas para darles un
46   -- nombre y poder construir las líneas correspondientes en el enunciado.
47   (hAB : A ≠ B) (hAC : A ≠ C) (hBC : B ≠ C) :
48   (line Line hAB).val ≠ (line Line hAC).val
49   ∧ (line Line hAB).val ≠ (line Line hBC).val
50   ∧ (line Line hAC).val ≠ (line Line hBC).val :=
51  begin
```

src/incidence_geometry/propositions.lean

Proposición 3. *Existen tres líneas distintas que no pasan por un punto común, es decir tales que no existe un punto que está en todas ellas.*

```
76 lemma exist_neq_lines_not_concurrent
77   {Point Line : Type*} [ig : incidence_geometry Point Line] :
78   ∃ l m n: Line,
79     (l ≠ m ∧ l ≠ n ∧ m ≠ n)
80     ∧ ¬ ∃ P : Point, is_common_point P l m
81     ∧ is_common_point P l n
82     ∧ is_common_point P m n
83   :=
84 begin
```

src/incidence_geometry/propositions.lean

Proposición 4. *Para cada línea existe un punto que no está ella.*

```
107 lemma line_has_external_point
108   {Point Line : Type*} [ig : incidence_geometry Point Line] :
109   ∀ l : Line, ∃ A : Point, ¬ A ~ l :=
110 begin
```

src/incidence_geometry/propositions.lean

Proposición 5. *Para cada punto existe una línea que no pasa por él.*

```
124 lemma point_has_external_line
125   {Point Line : Type*} [ig : incidence_geometry Point Line] :
126   ∀ A: Point, ∃ l: Line, ¬ A ~ l :=
127 begin
```

src/incidence_geometry/propositions.lean

5.2. Geometría del orden

El segundo grupo de axiomas establece propiedades de la relación de *orden*, una relación ternaria entre puntos. Dados tres puntos A, B, C escribiremos $A * B * C$ para indicar que están relacionados mediante la relación de orden.

Así empieza por tanto la definición de la clase que engloba los axiomas de orden:

```
21 class order_geometry (Point Line : Type*)
22   extends incidence_geometry Point Line :=
23   (between: Point → Point → Point →  Prop)
24   (notation A `*` B `*` C := between A B C)
```

src/order_geometry/basic.lean

Se puede ver en la línea 22 que esta definición de clase *extiende* la de la clase `incidence_geometry` definida anteriormente. Es decir, seguimos considerando la relación de incidencia y los axiomas relativos a ella.

Los cuatro *axiomas de orden* son los siguientes:

Axioma B1. *Si un punto B está entre A y C $(A * B * C)$ entonces A, B, C son distintos, están en una misma línea y $C * B * A$.*

```
25   (B11 {A B C: Point} (h : A * B * C) :
26     neq3 A B C ∧ collinear Line A B C ∧ C * B * A)
27   (B12 {A B C: Point} (h : A * B * C) : C * B * A)
```

src/order_geometry/basic.lean

Axioma B2. *Para cada dos puntos distintos A, B existe un punto C tal que $A*B*C$.*

```
28   (B2 {A B : Point} (h : A ≠ B) : ∃ C : Point, A * B * C)
```

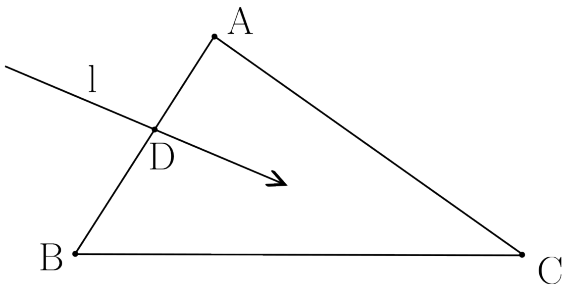
src/order_geometry/basic.lean

Axioma B3. *Dados tres puntos distintos en una línea, uno y sólo uno de ellos está entre los otros dos.*

```
29    (B3 {A B C : Point} (h : collinear Line A B C) :
30      xor3 (A * B * C) (B * A * C) (A * C * B))
```

src/order_geometry/basic.lean

Axioma B4 (Pasch)**.** *Sean A, B, C tres puntos no colineares y l una línea que no contenga a ninguno de estos puntos. Si l contiene un punto D que está entre A y B $(A * D * B)$ entonces también debe contener un punto entre A y C o un punto entre B y C.*




```
31    (B4 {A B C D : Point} {l : Line} (h_non_collinear : ¬ collinear Line A B C)
32        (hlABC : ¬ (A ~ l ∨ B ~ l ∨ C ~ l)) (hlD : D ~ l) (hADB : A * D * B)
33        : xor (∃ E ,  E ~ l ∧ (A * E * C)) (∃ E, E ~ l ∧ (B * E * C)))
```

src/order_geometry/basic.lean

5.2.1. Definiciones

La definición usual de segmentos es la siguiente:

Definición (Segmentos)**.** Dados dos puntos distintos A, B definimos el **segmento** $\overline{AB}$ como el conjunto de puntos que contiene a A, B y a todos los puntos que están entre ellos.

Pero en nuestro caso no queremos utilizar teoría de conjuntos y por tanto queremos evitar nociones como «conjunto de puntos ». Por tanto decimos simplemente que

Definición (Segmentos)**.** Dos puntos distintos A, B determinan el **segmento** $\overline{AB}$. Diremos que A y B son los **extremos** del segmento $\overline{AB}$.

Esta definición es suficiente para determinar un segmento, pero para establecer la relación de pertenencia de puntos a segmentos tendremos que complementarla con otra definición. Para formalizar esta noción utilizamos una estructura:

```
52  structure Seg (Point : Type*) := {A B : Point} (neq : A ≠ B)
```

src/order_geometry/basic.lean

Cuando se define una estructura en *Lean* se genera de forma automática un constructor, una función útil para crear términos con tipo la estructura definida. Dicha función se llamará como la estrucura más la notación `.mk` adjuntada: en este caso se tiene la función `Seg.mk : (neq : A ≠ B) → Seg Point` (observemos cómo los términos `A B : Point` son implícitos en la definición de la estructura).

Definición (Pertenencia de puntos a segmentos)**.** Decimos que un punto A pertenece a un segmento $\overline{BC}$ si A es igual a uno de los extremos del segmento (B o C) o está entre ellos ($B * A * C$).

```
56 def Seg.in (seg : Seg Point) (Line : Type*)
57   [og : order_geometry Point Line]  (P : Point) : Prop :=
58   P = seg.A ∨ P = seg.B ∨ (og.between seg.A P seg.B)
```

src/order_geometry/basic.lean

Esta función `Seg.in` está dentro del espacio de nombres definido en la estructura `Seg`. Gracias a esto, si tenemos un término de la estructura `seg : Seg Point`, podremos llamar a la función utilizando la notación de punto `seg.in Line P`, en la que el segmento `seg` es pasado como primer argumento a la función `seg`. Por tanto con esta definición y la notación del punto estamos escribiendo la pertenencia de puntos a segmentos en el orden contrario al usual: `seg.in Line P` significa que el punto `P` pertenece al segmento `seg`. Esta notación del punto también permite acceder a los elementos de una estructura (si consideramos la estructura como un producto cartesiano de los tipos que la forman, este acceso se puede ver como una proyección): En la definición de `Seg.in` se puede ver como accedemos a los extremos mediante la notación `seg.A`, `seg.B`.

Además es importante observar que A pertenece a $\overline{BC}$ si y sólo si pertenece a $\overline{CB}$, lo que si consideráramos la definición basada en conjuntos de puntos equivaldría a decir que los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{BC}$ son iguales. Dicho de otra forma, el orden de los extremos de un segmento no determina la relación de pertenencia de puntos a dichos segmentos.

```
73 lemma seg_mem_symm
74   {Point : Type*} (Line : Type*) [og : order_geometry Point Line]
75   {A B : Point} (P : Point) (hAB : A ≠ B):
76   P ∈ Seg.mk hAB ↔ P ∈ Seg.mk hAB.symm:=
77 begin
```

src/order_geometry/basic.lean

Como en el caso de los segmentos, las siguientes definiciones hacen referencia a nociones propias de la teoría de conjuntos. En nuestra formalización hemos evitado dichas nociones, por lo que daremos las definiciones adaptadas, utilizando sólamente los tipos definidos anteriormente.

Definición (Triángulos)**.** Tres puntos no colineares (por tanto distintos) A, B y

C, determinan el **triángulo** $\triangle ABC$. Los puntos A, B y C se llaman **vértices** del triángulo.

```
110 structure Tri (Point Line: Type*) [order_geometry Point Line] :=
111   {A B C : Point}
112   (non_collinear : ¬ collinear Line A B C)
```

src/order_geometry/basic.lean

En este caso también podemos definir funciones mediante la notación de punto que nos permitan recuperar propiedades sobre una estructura, como por ejemplo la propiedad de que los vértices del triángulo son distintos:

```
135 lemma Tri.neq
136   {Point Line: Type*} [order_geometry Point Line] (T : Tri Point Line) :
137   neq3 T.A T.B T.C :=
138 by exact non_collinear_neq Line T.non_collinear
```

src/order_geometry/basic.lean

Definición (Pertenencia de puntos a triángulos)**.** Decimos que un punto P pertenece al triángulo $\triangle ABC$ si pertenece a alguno de los segmentos determinados por sus vértices.

```
142 def Tri.in {Point Line: Type*} [order_geometry Point Line]
143   (T: Tri Point Line) (P : Point) : Prop :=
144   (Seg.mk T.neq.1).in Line P
145   ∨ (Seg.mk T.neq.2.1).in Line P
146   ∨ (Seg.mk T.neq.2.2).in Line P
```

src/order_geometry/basic.lean

Como esta definición se basa en la pertenencia de puntos a segmentos, el orden en el que consideremos los puntos del triángulo tampoco será determinante para establecer esta relación de pertenencia.

Definición (Rayos)**.** Decimos que dos puntos distintos A, B definen el **rayo** $\overrightarrow{AB}$. Dado un rayo $\overrightarrow{AB}$ llamaremos **vértice** del rayo al punto A.

```
150 structure Ray (Point : Type*) := {A B: Point} (neq : A ≠ B)
```

src/order_geometry/basic.lean

Decimos que un punto P **pertenece** a un rayo $\overrightarrow{AB}$ si coincide con su vértice A o si $A * B * P$.

```
154 def Ray.in (ray : Ray Point) (Line : Type*)
155   [og : order_geometry Point Line] (P : Point) : Prop :=
```

```
156    P = ray.A ∨ (ray.A * ray.B * P)
```

src/order_geometry/basic.lean

En este caso el orden de los puntos que determinan un rayo sí que es imporante. No se tiene como antes que P pertenece a $\overrightarrow{AB}$ si y sólo si pertenece a $\overrightarrow{BA}$. En términos conjuntistas tendríamos que los rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ son distintos.

Definición (Ángulos)**.** Dos rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ con el mismo vértice y tales que A, B y C no están alineados determinan un ángulo. El vértice de los rayos que determinan el ángulo se llama **vértice** del ángulo. Denotaremos dicho ángulo por $\angle ABC$.

```
160 structure Ang (Point Line: Type*) [order_geometry Point Line] :=
161   (r1 r2 : Ray Point)
162   (vertex : r1.A = r2.A)
163   (non_collinear : ¬ collinear Line r1.A r1.B r2.B)
```

src/order_geometry/basic.lean

Como en la definición de ángulo estamos considerando dos rayos con un punto en común, se puede observar que tres puntos no alineados determinan un ángulo. Podemos definir de esta manera un otro constructor para ángulos:

```
184 def Ang.mk_from_points [order_geometry Point Line] (B A C : Point)
185   (h : ¬ collinear Line A B C) : Ang Point Line :=
186 begin
187   let neq := non_collinear_neq Line h,
188   let r1 := Ray.mk neq.left,
189   let r2 := Ray.mk neq.right.left,
190   have vertex : r1.A = r2.A, { refl },
191   exact ⟨r1, r2, vertex, h⟩
192 end
```

src/order_geometry/basic.lean

Observemos que en esta definición hemos utilizado el modo táctico en una definición, lo cual es un recurso útil para construir términos complejos.

Definición. Decimos que dos puntos **están del mismo lado del plano** respecto de una recta si el segmento que los une no contiene ningún punto de la recta.

```
198 def same_side_line (l: Line) (A B : Point) :=
199   A = B ∨ (∃ h : A ≠ B, ¬ @seg_intersect_line Point Line og (Seg.mk h) l)
```

src/order_geometry/basic.lean

Definición (Lados de una línea)**.** Decimos que dos puntos están del mismo **lado de una línea** respecto de un punto si los tres puntos están alineados y el segmento que los une no contiene a dicho punto.

```
226 def same_side_point {Point : Type*} (Line : Type*) [order_geometry Point Line]
227   (A B C : Point) (hBC : B ≠ C) :=
228   collinear Line A B C ∧ A ∉ (Seg.mk hBC)
```

src/order_geometry/basic.lean

5.2.2. Resultados

Los teoremas que se pueden deducir de este segundo grupo de axiomas son considerablemente más complicados de demostrar que los del primer grupo. En particular son demostraciones que tienen detalles técnicos difíciles de formalizar. *Meikle* y *Fleuriot* han formalizado [11] resultados de esta sección utilizando el asistente de demostración *Isabelle/Isar*. En el artículo exponen que la demostración del *Teorema 3* del libro de Hilbert [12] incluye pasos que se apoyan en intuiciones proporcionadas por un dibujo y no están completamente justificados desde el punto de vista lógico formal.

El teorema tiene el siguiente enunciado:

Teorema 3. *Dados dos puntos distintos A y C existe un tercer punto B que se encuentra entre ellos: $A * B * C$.*

Y esta es su formalización en *Lean*.

```
17 lemma point_between_given {A C : Point} (hAC : A ≠ C): ∃ B : Point, A * B * C :=
```

src/order_geometry/propositions.lean

Debido a la complejidad de la demostración, explicada en detalle en el artículo [11], y a la falta de tiempo, no hemos formalizado la demostración de este resultado. Pero nos ha resultado particularmente interesante la lectura de este trabajo, que nos ha descubierto una aplicación más de la formalización asistida por computadores: estos métodos formales permiten estudiar resultados publicados en todo su detalle, no sólo verificando su corrección sino además aportando información sobre la forma de trabajar y pensar de grandes matemáticos como Hilbert. Citando al artículo:

> Es interesante señalar que la suposición predominante en matemáticas es que las demostraciones de Hilbert parecen menos intuitivas, pero tienen un rigor aumentado. La prueba Isar muestra que el trabajo de Hilbert puede hacerse aún más riguroso con la ayuda de máquinas. Hilbert claramente utilizó un diagrama para ayudar a la intuición geométrica y hacer muchas suposiciones. Esto parece estar en desacuerdo con su afirmación de que no se necesitaba intuición geométrica para derivar los teoremas presentados en el Grundlagen.

El resultado de esta sección que sí hemos formalizado se refiere a la relación de *estar del mismo lado del plano respecto de una línea*.

Proposición 6. *La relación de estar del mismo lado del plano respecto de una línea es una relación de equivalencia.*

La librería *mathlib* contiene definiciones sobre relaciones de equivalencia que podemos utilizar: las definiciónes de reflexividad, simetría y transitividad. Por tanto se tienen tres resultados referentes a estas tres propiedades. Hemos incluido las demostraciones de las dos primeras propiedades, pero debido a su extensión no la de la transitividad, que se puede consultar en el repositorio. **Pendiente:** citar repositorio o anexo **Pendiente:** ¿Está terminada la demo de la transitividad?

```
25 lemma same_side_line_refl (l : Line) :
26   reflexive (@same_side_line Point Line og l) :=
27 begin
28   intro P,
29   left,
30   refl,
31 end
```

src/order_geometry/propositions.lean

```
34 lemma same_side_line_symm (l : Line) :
35   symmetric (@same_side_line Point Line og l) :=
36 begin
37   intros P Q h,
38   cases h with h1 h2,
39   { left, rw h1 },
40   { cases h2 with h h2,
41     right,
42     use h.symm,
43     rw seg_intersect_line at h2 ⊢,
44     push_neg at h2 ⊢,
45     intros A hA,
46     apply h2 A,
47     rw seg_mem_symm,
48     exact hA,
49   },
50 end
```

src/order_geometry/propositions.lean

```
59 lemma same_side_line_trans (l : Line) :
60   transitive (@same_side_line Point Line og l) :=
61 begin
```

src/order_geometry/propositions.lean

Con esto, en *mathlib*, las relaciones de equivalencia se definen como estructuras que contienen las demostraciones de estas tres propiedades:

```
201 theorem same_side_line_equiv (l : Line) :
202   equivalence (@same_side_line Point Line og l) :=
203   ⟨same_side_line_refl Point l,
204     same_side_line_symm Point l,
```

```
205      same_side_line_trans Point l⟩
```

src/order_geometry/propositions.lean

5.3. El axioma de las paralelas

Definición (Líneas paralelas)**.** Se dice que dos líneas l y m son **paralelas** si no tienen ningún punto en común.

```
6  def parallel (Point : Type*) {Line : Type*} [ig : incidence_geometry Point Line]
7    (l m : Line) : Prop := ¬ ∃ P : Point, is_common_point P l m
```

src/parallels_independence.lean

Axioma P. *Dada una línea l y un punto A existe una única línea m que pasa por A y es paralela a l.*

```
11 def P (Point Line : Type*) [ig : incidence_geometry Point Line] :=
12   ∀ (l : Line) (A : Point), ¬ A ~ l → ∃! m : Line, A ~ m ∧ parallel Point l m
```

src/parallels_independence.lean

6. Conclusiones

- No todo el trabajo está en Lean. A veces no es inmediato cómo formalizar una proposición en Lean. Hay que tener claros los conceptos y conocer muy bien qué es lo que se está formalizando.

- Enunciados aparente muy simples pueden ser difíciles y largos de demostrar.

- No se ha pretendido alcanzar una síntesis y claridad en las demostraciones, sino conseguir que el sistema las acepte. Probablemente muchos de los resultados pueden ser

- Lean es muy avanzado y en diversas ocasiones nos hemos encontrado con errores o comportamientos que no hemos sabido interpretar, debido a

- Las mayores dificultades han surgido a la hora de intentar formalizar ejemplos concretos, como modelos de los distintos grupos de axiomas que se consideran. Por ejemplo no he conseguido terminar de formalizar el modelo más simple que he encontrado de una geometría de incidencia en el que no se cumple el axioma de las paralelas.

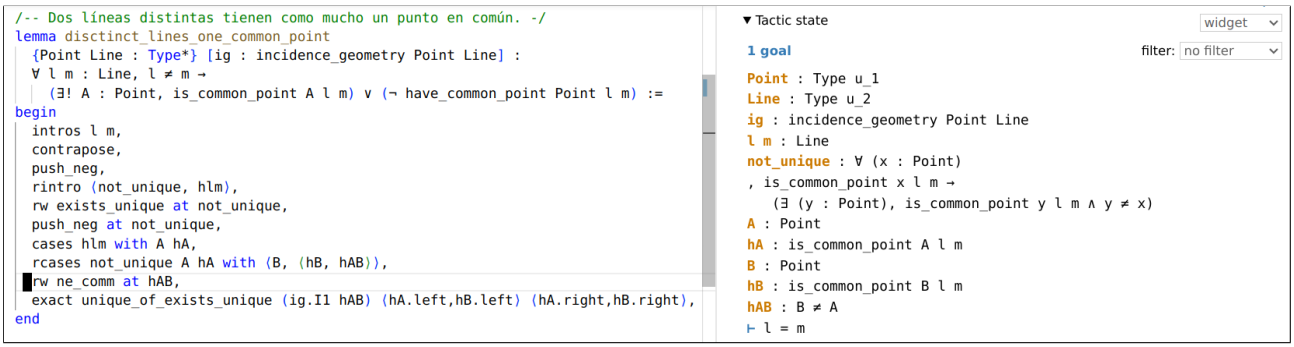
En parte atribuyo estas dificultades a la falta de una documentación más accesible de la librería *mathlib* y cómo están implementados ciertos objetos matemáticos en ella.

Para usar Lean a un nivel un poco más avanzado que el de este trabajo es inevitable entrar en ciertos detalles de la teoría de tipos *Calculus of Inductive Constructions* y cómo está implementada en *Lean*.

Pendiente: Redactar

A. Repositorio de código

B. Entorno de desarrollo



Captura de pantalla del entorno de dearrollo en el editor *Visual Studio Code*.

Referencias

[1] María Inés de Frutos. «¿Por Qué Formalizar Matemáticas?» (Facultad de Matemáticas - Universidad Complutense de Madrid). 14 de mar. de 2023. URL: https://www.youtube.com/watch?v=4QXWyadT03I (visitado 03-09-2023).

[2] Peter Scholze. «Liquid Tensor Experiment». En: *Experimental Mathematics* 31.2 (3 de abr. de 2022), págs. 349-354. ISSN: 1058-6458, 1944-950X. DOI: 10.1080/10586458.2021.1926016.

[3] Peter Scholze. *Blueprint for the Liquid Tensor Experiment*. URL: https://leanprover-community.github.io/liquid/ (visitado 03-09-2023).

[4] Thomas Hales. *Formal Abstracts*. Formal Abstracts. URL: https://formalabstracts.github.io/ (visitado 03-09-2023).

[5] Kevin Buzzard. *Formalising Mathematics — Formalising Mathematics 0.1 Documentation*. URL: https://www.ma.imperial.ac.uk/~%20buzzard/xena/formalising-mathematics-2023/ (visitado 03-09-2023).

[6] Stanislas Polu, Jesse Michael Han e Ilya Sutskever. *Solving (Some) Formal Math Olympiad Problems*. URL: https://openai.com/research/formal-math (visitado 03-09-2023).

[7] «Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics». En: ().

[8] Jeremy Avigad y Floris van Doorn. «The Lean Theorem Prover and Homotopy Type Theory». En: ().

[9] Robin Hartshorne. *Geometry: Euclid and Beyond*. Red. de S. Axler, F. W. Gehring y K. A. Ribet. Undergraduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer New York, 2000. ISBN: 978-1-4419-3145-0 978-0-387-22676-7. DOI: 10.1007/978-0-387-22676-7. URL: http://link.springer.com/10.1007/978-0-387-22676-7 (visitado 27-03-2023).

[10] Marvin J. Greenberg. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. 3rd ed. New York: W.H. Freeman, 1993. 483 págs. ISBN: 978-0-7167-2446-9.

[11] Laura I. Meikle y Jacques D. Fleuriot. «Formalizing Hilbert's Grundlagen in Isabelle/Isar». En: *Theorem Proving in Higher Order Logics*. Ed. por David Basin y Burkhart Wolff. Red. de Gerhard Goos, Juris Hartmanis y Jan van Leeuwen. Vol. 2758. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003, págs. 319-334. ISBN: 978-3-540-40664-8 978-3-540-45130-3. DOI: 10.1007/10930755_21. URL: http://link.springer.com/10.1007/10930755_21 (visitado 27-03-2023).

[12] David Hilbert. *Foundations of Geometry*.