En este documento resumiremos los axiomas y principales definiciones de la axiomatización de Hilbert de la geometría euclídea, considerando el caso restringido de la geometría plana.

I Nociones primitivas

El sistema axiomático de Hilbert parte de considerar cinco nociones primitivas: dos términos primitivos (puntos y líneas) y cuatro relaciones primitivas (orden, pertenencia, congruencia entre segmentos y congruencia entre ángulos).

- Denotaremos los *puntos* con letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$
- Denotaremos las *líneas* con letras minúsculas $a, b, c, \ldots$
- La relación de *incidencia* es una relación binaria entre puntos y rectas. Dado un punto A y una recta l escribiremos $A \sim l$ para denotar que A y l están relacionados mediante la relación de incidencia.
- La relación de *orden* es una relacion ternaria entre puntos. Para tres puntos A, B, C escribiremos $A \cdot B \cdot C$ para indicar que están relacionados mediante la relación de orden.
- La relación de *congruencia entre segmentos* es una relación binaria entre *segmentos* (noción definida más adelante). Denotaremos esta relacion con el símbolo $\cong$.
- La relación de *congruencia entre ángulos* es una relación binaria entre *ángulos* (noción definida más adelante). Para denotar esta relación usaremos el mismo símbolo que para la congruencia entre segmentos, $\cong$. Por el contexto quedará claro a que relación nos referimos.

II Axiomas

Axiomas de incidencia

Axioma I1. *Para cada par de puntos distintos A, B existe una única recta que los contiene. Denotraremos esta recta por AB.*

Axioma I2. *Cada línea contiene al menos dos puntos distintos.*

Axioma I3. *Existen tres puntos no colineares. Es decir, existen A, B y C tales que $AB \neq BC$.*

Definición. *Decimos que tres puntos distintos son* ***colineares*** *si existe una recta que los contiene.*

Axiomas de orden

Axioma B1. *Si un punto B está entre A y C ($A \cdot B \cdot C$) entonces A, B, C son distintos, están en una misma línea y $C \cdot B \cdot A$.*

Axioma B2. *Para cada dos puntos distintos A, B existe un punto C tal que $A \cdot B \cdot C$.*

Axioma B3. *Dados tres puntos distintos en una línea, uno y sólo uno de ellos está entre los otros dos.*

Axioma B4 (Pasch)**.** *Sean A, BC tres puntos no colineares y l una línea que no contenga a ninguno de estos puntos. Si l contiene un punto D que está entre A y B $(A \cdot D \cdot B)$ entonces también debe contener un punto entre A y C o un punto entre B y C.*

Definición. *Dados dos puntos distintos A, B definimos el **segmento** $\overline{AB}$ como el conjunto de puntos que contiene a A, B y a todos los puntos que están entre ellos. Diremos que A y B son los extremos del segmento AB.*

Definición. *Diremos que dos puntos **están del mismo lado del plano** respecto de una recta si el segmento que los une no contiene ningún punto de la recta.*
*Diremos que dos puntos están del mismo **lado de una recta** respecto de un punto si el segmento que los une no contiene a dicho punto.*

Definición. *Dados dos puntos distintos A, B, definimos el **rayo** $\overrightarrow{AB}$ como el conjunto que contiene a A y a todos los puntos de la línea AB tales que están del mismo lado de A que B. Dado un rayo $\overrightarrow{AB}$ llamaremos **vértice** del rayo al punto A.*

Definición. *Un **ángulo** es la unión de dos rayos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ con el mismo vértice y no contenidos en una misma recta. Denotaremos dicho ángulo por $\angle ABC$.*

Axiomas de congruencia

Para segmentos

Axioma C1. *Dados un segmento $\overline{AB}$ y un rayo r con vértice C, existe un único punto D en el rayo r tal que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.*

Axioma C2. *Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{AB} \cong \overline{EF}$ entonces $\overline{CD} \cong \overline{EF}$. Además cada segmento es congruente con sí mismo.*

Axioma C3 (Suma)**.** *Dados tres puntos A, B, C en una línea y tales que $A \cdot B \cdot C$ y otros tres puntos D, E, F en una línea tales que $D \cdot E \cdot F$, si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ entonces $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.*

Para ángulos

Axioma C4. *Dados un ángulo $\angle ABC$ y un rayo $\overrightarrow{DF}$, fijado un lado del plano de la línea DF, existe un único rayo $\overrightarrow{DE}$ en dicho lado tal que $\angle BAC \cong \angle EDF$.*

Axioma C5. *Para cada tres ángulos α, β, γ, si $\alpha \cong \beta$ y $\alpha \cong \gamma$ entonces $\beta \cong \gamma$. Además cada ángulo es congruente con sí mismo.*

Axioma C6 (SAS)**.** *Sean tres triángulos ABC y DEF tales que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\angle BAC \cong \angle EDF$. Entonces los dos triángulos son congruentes, es decir $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ y $\angle ACB \cong \angle DFE$.*

Planos de Hilbert

Definición. *Un **plano de Hilbert** es un modelo de la teoría formada por las anteriores nociones primitivas y axiomas de incidencia, orden y congruencia.*

En un plano de Hilbert se pueden recuperar bastantes de los resultados de la geometría plana de los elementos de Euclides, pero no todos.
Por ejemplo no se puede demostrar la primera proposición del libro primero, en la que se enuncia la construcción de un triángulo equilátero dado uno de sus lados. Para esto será necesario introducir otro axioma.

III Otros axiomas

Definición. *Dados dos puntos distintos O y A se define el **círculo** Γ de centro O y radio $\overline{OA}$ como el conjunto de los puntos B tales que $\overline{OA} \cong \overline{OB}$. El punto O se llama **centro** del círculo y el segmento $\overline{OA}$ es un **radio** del círculo.*
*Se dice que un punto C está en el **interior** de un círculo Γ si $B = O$ o $\overline{OB} < \overline{OA}$. Si $\overline{OA} < \overline{OC}$ el punto C es **exterior** a Γ.*

Axioma E. *Dados dos círculos Γ, Δ, si Δ contiene al menos un punto en el interior de Γ y otro en el exterior, entonces Γ y Δ se intersecan.*

Axioma P. *Para cada punto P y línea l existe como mucho una línea paralela a P y que pase por P.*