

La Mecanica detras del OLS

Los "Betas"

Pensemos en la relación entre EDUCACION e INGRESO, "controlando por" AÑOS DE EXPERIENCIA LABORAL.

Supongamos que tenemos la siguiente base de datos:

| Nombre (i) | Ingreso (Y) | Educacion (X1) | Experiencia (X2) |
|------------|-------------|----------------|------------------|
| Pedro | 3 | 2 | 2 |
| Juan | 5 | 7 | 4 |
| Diego | 7 | 3 | 6 |

Hypotesis:

"A más educación, más ingreso, para el promedio de años de experiencia laboral"

- **Idea del "control"**: A que se refiere "para el promedio de años promedio"?

Cuánto sube mi ingreso si aumento mi educacion?

R: "Betas"

El modelo de regresion lineal esta dado por la siguiente formula

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + e_i$$

(1)

- **Lo que conocemos:** X e Y .
- **Lo que no conocemos, pero debemos estimar:** β y ϵ .

Volvamos a repensar la formula del modelo de regresion, pero en terminos de matrices:

Definamos lo que conocemos:

$$Y = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

...y veamos cómo se ve OLS pero con matrices:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \beta_0 + \beta_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + e_i$$

- Es fácil ver que:
 - Debemos multiplicar β_1 por X_1 y β_2 X_2 .

- $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ y ϵ son cantidades desconocidas, pero que debemos estimar.
- β_0, β_1 y β_2 son constantes.
- El único parametro que está indexado, es ϵ_i . Otra clase hablaremos de esto.

Adelanto: Pensemos el caso de "Pedro". Si por ejemplo $\beta_0 = -3, \beta_1 = 1$ y $\beta_2 = 2$, tendremos que $y_{\text{Pedro}} = -3 + 1(2) + 2(2) = 3$. Entonces:

$$Y_{\text{Pedro}} = 3 = -3 + 1(2) + 2(2) + 0$$

Aquí $\epsilon_{\text{Pedro}}=0$. En ese sentido, ϵ_i es la diferencia entre lo que estimamos y lo que observamos. "Filosoficamente", significa otra cosa.

Continuemos.

Formula para sacar β (el efecto de X sobre Y):

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

Recapitulemos lo observado, y hagamos el cálculo:

$$Y = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$X^T \times X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 12 \\ 12 & 62 & 50 \\ 12 & 50 & 56 \end{bmatrix}$$

$$(X^T \times X)^{-1} = \frac{1}{(X^T X)} = \frac{1}{\det(X^T X)} \times \text{Adj}(X^T X) = \begin{bmatrix} 3 & -0.22 & -0.44 \\ -0.22 & 0.074 & -0.0185 \\ -0.44 & -0.0185 & 0.129 \end{bmatrix}$$

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T Y = \begin{bmatrix} 3 & -0.22 & -0.44 \\ -0.22 & 0.074 & -0.0185 \\ -0.44 & -0.0185 & 0.129 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esto quiere decir que $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 = 1$. Volvamos a re-escribir nuestra formula:

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La formula que teniamos antes: $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \beta_0 + \beta_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + e_i$

Los resultados que tenemos ahora: $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 1 + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + e_i$