Profesor: Héctor Bahamonde.
e:hector.bahamonde@uoh.cl
w:www.hectorbahamonde.com
Curso: OLS.

La Mecánica detras del OLS
Los "Betas"
Pensemos en la relación entre EDUCACION e INGRESO, "controlando por" AÑOS DE EXPERIENCIA LABORAL.
Supongamos que tenemos la siguiente base de datos:

Nombre (i)	**Ingreso (X)**	**Educacion (X1)**	**Experiencia (X2)**
Pedro	3	2	2
Juan	5	7	4
Diego	7	3	6

Hypotesis:
"A más educación, más ingreso, para el promedio de años de experiencia laboral"

- **Idea del "control"**: A que se refiere "para el promedio de años promedio"?

Cuánto sube mi ingreso si aumento mi educacion?
R: "Betas"

El modelo de regresion lineal esta dado por la siguiente formula

$$Y_i \;=\; \beta 0 + \beta 1 X1_i \;+\; \beta 2 X2_i + e_i$$

- **Lo que conocemos:** X e Y.
- **Lo que no conocemos, pero debemos estimar**: β y ϵ.

Volvamos a repensar la formula del modelo de regresion, pero en terminos de matrices:

Definamos lo que conocemos:

$$Y \ = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

...y veamos cómo se ve OLS pero con matrices:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \ = \ \beta 0 + \beta 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \ + \ \beta 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + e_i$$

- Es fácil ver que:
- Debemos multiplicar $\beta 1$ por $X1$ y $\beta 2$ $X2$.
- $\beta 0$, $\beta 1$, $\beta 2$ y ϵ son cantidades desconocidas, pero que debemos estimar.
- $\beta 0$, $\beta 1$y $\beta 2$ son constantes.
- El Ãºnico parametro que está indexado, es ϵ_i. Otra clase hablaremos de esto. **Adelanto**: Pensemos el caso de "Pedro". Si por ejemplo $\beta 0 \ = \ -3$, $\beta 1 \ = \ 1$ y $\beta 2 \ = \ 2$, tendremos que $y_{\text{Pedro}} - 3 \ + \ 1(2) + 2(2) = 3$. Entonces:

$$Y_{\text{Pedro}} \ = \ 3 \ = \ -3 \ + 1(2) \ + 2(2) \ + \ 0$$

Aqui ϵ_{Pedro}=0. En ese sentido, e_i es la diferencia entre lo que estimamos y lo que observamos. "Filosoficamente", significa otra cosa.

Continuemos.

Formula para sacar β (el efecto de X sobre Y):

$\beta \ = \ \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$

Recapitulemos lo observado, y hagamos el cálculo:

$$Y = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$X^T \times X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 12 \\ 12 & 62 & 50 \\ 12 & 50 & 56 \end{bmatrix}$$

$$\left(X^T \times X\right)^{-1} = \frac{1}{(X^T X)} = \frac{1}{\det\left(X^T X\right)} \times \operatorname{Adj}\left(X^T X\right) = \begin{bmatrix} 3 & -0.22 & -0.44 \\ -0.22 & 0.074 & -0.0185 \\ -0.44 & -0.0185 & 0.129 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y = \begin{bmatrix} 3 & -0.22 & -0.44 \\ -0.22 & 0.074 & -0.0185 \\ -0.44 & -0.0185 & 0.129 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esto quiere decir que $\beta 0 = 1$, $\beta 1 = 0$ y $\beta 2 = 1$. Volvamos a re-escribir nuestra formula:

$$\beta \;=\; \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y \;=\; \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

La formula que teniamos antes: $\begin{bmatrix}3\\5\\7\end{bmatrix} \;=\; \beta 0 + \beta 1 \begin{bmatrix}2\\7\\3\end{bmatrix} \;+\; \beta 2 \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix} + e_i$

Los resultados que tenemos ahora: $\begin{bmatrix}3\\5\\7\end{bmatrix} \;=\; 1 + 0 \begin{bmatrix}2\\7\\3\end{bmatrix} \;+\; 1 \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix} + e_i$