TU Dresden — Sommersemester 2015
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften – Fachrichtung Mathematik
Dr. A. Linke

4. Übungsblatt zur Vorlesung Ma-PDENMW

Aufgabe 4.1 (Potentialströmungen)

Sei φ eine harmonische Funktion, die $\Delta\varphi = 0$ erfüllt.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{u} = \nabla\varphi$ und der (zu findende) Druck p die stationären inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \nabla\psi, \qquad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$

erfüllen, wobei ψ ein Potential einer äußeren Kraft ist.

b) Sei $\psi = 0$ und φ ein Polynom $k+1$-ten Grads. Wie sieht dann p aus?

c) Interpretieren Sie die Bernoulli-Relation

$$p + \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{u}^2) - \psi = \mathrm{const}$$

in Bezug auf die Umströmung eines Körpers.

Aufgabe 4.2

Sei $\Omega = \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \times [0, L]$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{u} = (u, v, w)^T = (0, 0, 1 - (x^2 + y^2))^T$ und $p = 4\nu(\frac{L}{2} - z)$ die inkompressiblen Navier–Stokes-Gleichungen

$$\mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$

erfüllen.

b) Vergleichen Sie die Impulsbilanz aus den Aufgaben 4.1 und 4.2. Was sind die jeweils vorherrschenden Terme? Was passiert für $\nu \to 0$?

Aufgabe 4.3

a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{u} = (-y, x)^T$ und ein zu findender Druck p die inkompressiblen Navier–Stokes-Gleichungen

$$\mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$

erfüllen.

b) Vergleichen Sie die Impulsbilanz aus den Aufgaben 4.1 und 4.3.

c) Ist die Lösung $\mathbf{u}$ aus Aufgabe 4.3 eine Potentialströmung?

Aufgabe 4.4

a) Man betrachte nun ein Rohr mit dem Querschnitt eines gleichseitigen Dreiecks. Finden Sie eine zur Strömungslösung in Aufgabe 4.2 analoge polynomiale Lösung dritter Ordnung $(\mathbf{u}, p) = ((0, 0, w(x, y)^T), p(z))$ der inkompressiblen Navier–Stokes-Gleichungen in 3D, die auf dem Rand des Querschnitts verschwindet, und in der Mitte den Wert $(0, 0, 1)^T$ hat.

b) Ist es möglich analoge Lösungen für beliebige Rohrquerschnitte zu konstruieren?