TU Dresden Sommersemester 2015
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften – Fachrichtung Mathematik
Dr. A. Linke

2. Übungsblatt zur Vorlesung Ma-PDENMW

Nehmen Sie im Folgenden an, dass alle beteiligten Funktionen glatt im Gebiet Ω sind:

Aufgabe 2.1

Rechnen Sie nach:

a)
$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}),$$

b)
$$\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v}\nabla \cdot \mathbf{w} - \mathbf{w}\nabla \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w}.$$

Aufgabe 2.2

Man definiert $\omega := \nabla \times \mathbf{v}$. Zeigen Sie, dass aus den inkompressiblen Navier–Stokes-Gleichungen
$$\mathbf{u}_t - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$
bei genügender Glattheit die Vorticity-Gleichung
$$\boldsymbol{\omega}_t - \nu\Delta\boldsymbol{\omega} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{f}$$
folgt.
Was vereinfacht sich an der Vorticity-Gleichung für zweidimensionale Strömungen $\mathbf{v} = (v_1(x,y), v_2(x,y), 0)^T$?

Aufgabe 2.3

Zeigen Sie, dass sich die inkompressiblen Navier–Stokes-Gleichungen
$$\partial_t\mathbf{v} - 2\nu\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla\left(\frac{P}{\rho}\right) = \frac{\mathbf{f}_{\text{ext}}}{\rho}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$
durch die Transformationen $x = \frac{x'}{L}$, $\mathbf{u} = \frac{v}{U}$, $t = \frac{t'}{T^*}$ in die dimensionslosen Gleichungen
$$\mathrm{St}\partial_t\mathbf{u} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$
mit $\mathrm{St} = \frac{L}{UT^*}$, $\mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu}$, $p = \frac{P}{\rho U^2}$, $\mathbf{f} = \frac{L}{\rho U^2}\mathbf{f}_{\text{ext}}$ überführen lassen.

Aufgabe 2.4

Seien A eine invertierbare $n_v \times n_v$-Matrix und B eine $n_p \times n_v$-Matrix mit $\operatorname{rank} B = n_p$. Für die (somit invertierbare) Matrix $K = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}$ wurde in der Vorlesung eine Inverse K^{-1} angegeben. Überprüfen Sie die Korrektheit dieser Inversen, indem Sie das Matrixprodukt $K^{-1} \cdot K$ berechnen.