

Numerik partieller Differentialgleichungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen

15th June 2015

Dr. Alexander Linke
L^AT_EX von Susanne Stimpert

- Prüfung 20 Minuten
- siehe Homepage für Übungsaufgaben, Informationen etc.
- Mittwoch und Donnerstag in DD (Büro von Herrn Schopf)

1 Die Navier-Stokes-Gleichungen als Modell für inkompressible Strömungen

► *Bemerkung 1.1.* Grundprinzipien und Variablen

Die Grundgleichungen der Fluidodynamik werden **Navier-Stokes-Gleichungen** genannt. Im isothermen Fall, das heißt, eine Strömung konstanter Temperatur, betrachten wir zwei physikalische Bilanzgleichungen: die Masseerhaltung und die Impulsbilanz /Impulserhaltung. Es gibt verschiedene Wege, diese Gleichungen herzuleiten. Im Folgenden wird ein klassischer Zugang aus der Kontinuumsmechanik präsentiert. In der Herleitung sind einige Schritte phänomenologisch/heuristisch begründet.

Die Strömung wird durch folgende Variablen beschrieben:

- $\rho(t, x)$: Dichte [kg/m³]
- $v(t, x)$: Geschwindigkeit [m/s]
- $p(t, x)$: Druck [Pascal: Pa = N/m²].

Diese werden als genügend glatte Funktionen angenommen. Das **Gebiet** wird $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ genannt. Die zeitliche Evolution wird im Zeitintervall $[0, T]$ modelliert.

1.1 Die Massenerhaltung

► *Bemerkung 1.2.* Ein Erhaltungssatz

Sei ω ein beliebiges, offenes Teilgebiet von Ω mit genügend glatter Oberfläche $\partial\omega$, das konstant in der Zeit ist. Dann ist die Gesamtmasse in ω gegeben durch

$$m(t) = \int_{\omega} \rho(t, x) dx$$

(in [kg]).

Wenn die Masse in der zeitlichen Evolution in ω erhalten bleibt, so muss die zeitliche Rate der Massenänderung mit dem Massenfluss $\rho v(t, x)$ [kg/m³s] über die Oberfläche von $\partial\omega$ übereinstimmen. Das heißt, die Änderung der Masse beträgt

$$\frac{d}{dt}m(t) = \frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho(t, x) dx = - \int_{\partial\omega} \rho v(t, x) \cdot n ds, \quad (1.1)$$

wobei $n(s)$ eine äußere Einheitsnormale bei $s \in \partial\omega$ ist. Da alle Funktionen als genügend glatt angenommen werden, kann der Gauß'sche Satz angewendet werden.

Mit (1.1) führt dies auf

$$\int_{\omega} \partial_t \rho(t, x) + \nabla \cdot (\rho v) dx = 0.$$

Da ω ein beliebiges Kontrollvolumen ist, folgt

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0, \quad \forall t \in [0, T], x \in \Omega \quad (1.2)$$

(schöne Integralgleichung). Diese Erhaltungsgleichung ist die erste Grundgleichung der Fluidodynamik., die (Massen-)Kontinuitätsgleichung.

► *Bemerkung 1.3.* Inkompressible, homogene Fluide

Wenn das Fluid inkompressibel ist (Flüssigkeit) und homogen, das heißt, es besteht aus einer Komponente, dann, wird angenommen, gilt approximativ

$$\rho(t, x) = \rho = c$$

und (1.2) reduziert sich auf

$$0 = \rho_t + \nabla \cdot (\rho v) = \rho \cdot \nabla v + v \cdot \nabla \rho = \rho \nabla \cdot v \\ \Rightarrow \nabla \cdot v = 0.$$

Es wird angenommen, dass

$$v(t, x) = \begin{pmatrix} v_1(t, x) \\ v_2(t, x) \\ v_3(t, x) \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\nabla \cdot v = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3.$$

Daher reduziert sich im inkompressiblen Fall die Massenerhaltung in einem homogenen, inkompressiblen Fluid auf eine (geometrische) Zwangsbedingung an das Geschwindigkeitsfeld.

1.2 Die Bilanzgleichung / Erhaltungsgleichungen für den Impuls

► *Bemerkung 1.4.* Newtons zweite Bewegungsgleichung

Die Bilanzgleichung für den Impuls folgt aus Newtons Bewegungsgleichung

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}. \quad (1.3)$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die Änderungsrate des Impulses gleich der Gesamtkraft auf die Fluidpartikel in einem Kontrollvolumen ist.

► *Bemerkung 1.5.* Beschleunigung

Man betrachtet ein Fluidpartikel zur Zeit t am Ort x mit Geschwindigkeit $v(t, x)$ in einem Zeitintervall Δt . Eine lineare Extrapolation des Partikelpfades ergibt, dass sich das Teilchen zur Zeit $(t + \Delta t)$ sich am Ort $(x + \Delta t v)$ befindet.

Die Beschleunigung des Teilchens ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \frac{Dv}{Dt}(t, x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t, x + \Delta t v(t, x)) - v(t, x)}{\Delta t} \\ &\approx \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t, x) + \Delta t \cdot \partial_t v(t, x) + \nabla v(t, x)(\Delta t \cdot v) - v(t, x)}{\Delta t} \\ &= \partial_t v(t, x) + \nabla v(t, x) \cdot v(t, x) \end{aligned}$$

Hier wird mit ∇v bezeichnet:

$$\nabla v = \begin{pmatrix} \partial_x v_1 & \partial_y v_1 & \partial_z v_1 \\ \partial_x v_2 & \partial_y v_2 & \partial_z v_2 \\ \partial_x v_3 & \partial_y v_3 & \partial_z v_3 \end{pmatrix}.$$

In der Fluidodynamik wird der Term $(\nabla v) \cdot v$ oft geschrieben als $(v \cdot \nabla)v$ oder $v \cdot \nabla v$. Gemeint ist jedenfalls immer

$$(v \cdot \nabla) \cdot v = \begin{pmatrix} v_1 \partial_x v_1 & v_2 \partial_y v_1 & v_3 \partial_z v_1 \\ v_1 \partial_x v_2 & v_2 \partial_y v_2 & v_3 \partial_z v_2 \\ v_1 \partial_x v_3 & v_2 \partial_y v_3 & v_3 \partial_z v_3 \end{pmatrix}.$$

Bei der Notation $(v \cdot \nabla) = v_1 \partial_x + v_2 \partial_y + v_3 \partial_z$ denkt man an einen Operator, der auf jede einzelne Komponente von v wirkt.

Der Gradient der Geschwindigkeit wird auch gerne als Tensor geschrieben:

$$(\nabla v)_{ij} = \partial_j v_i, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Letztendlich wird eine Approximation erster Ordnung benutzt, um die Beziehung 'Masse · Beschleunigung' in beliebigen Kontrollvolumen zu modellieren.

$$\text{'Masse · Beschleunigung'} = \int_{\omega} \rho(t, x) (\partial_t v + (v \cdot \nabla) v(t, x)) v(t, x) dx$$

(in [N]). Dieser Ausdruck muss noch mit der Gesamtkraft bilanziert werden, die auf ω wirkt, gemäß der zweiten Bewegungsgleichung von Newton.

► *Bemerkung 1.6.* Alternative Ableitung: Der Impuls im Kontrollvolumen ω ist gegeben durch

$$\int_{\omega} \rho v(t, x) dx \quad [Ns].$$

Dann kann die Bilanzgleichung für den Impuls analog formuliert werden wie die Masseerhaltungen (1.1):

$$\int_{\omega} (\rho v)_t dx = \frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho v(t, x) dx = - \int_{\partial\omega} (\rho v)(v \cdot n)(t, s) ds + \int_{\omega} f_{net}(t, x) dx \quad [N]$$

Hierbei bezeichnet $\frac{d}{dt} \int_{\omega} \rho v(t, x) dx$ die Änderungsrate des Impulses und der erste Term auf der rechten Seite modelliert den Impulsfluss über die Oberfläche von ω (im Strömungsfeld v). f_{net} [N/m³] bezeichnet eine sogenannte Kraftdichte. $\int_{\omega} f_{net}(t, x) dx$ bezeichnet dann die Gesamtkraft auf das Kontrollvolumen ω . Weiter gilt:

$$v(v \cdot n) = vv^T n.$$

Partielle Integration und Vertauschen von Integration und Differentiation ergibt

$$\int_{\omega} \frac{d}{dt} (\rho v) + \nabla \cdot (\rho v v^T)(t, x) dx = \int_{\omega} f_{net}(t, x) dx.$$

Dabei wird Folgendes verwendet:

- Das dyadische Produkt ist

$$vv^T = \begin{pmatrix} v_1 v_1 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_2 v_1 & v_2 v_2 & v_2 v_3 \\ v_3 v_1 & v_3 v_2 & v_3 v_3 \end{pmatrix} =: v \otimes v.$$

- Die Tensordivergenz

$$\nabla \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} \\ \nabla \cdot \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} \\ \nabla \cdot \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Die Produktregel ergibt

$$\int_{\omega} ((\partial_t \rho)v + \rho \partial_t v + vv^T \nabla \rho + \rho(\nabla \cdot v)v + \rho(v \cdot \nabla)v) dx = \int_{\omega} f_{net}(t, x) dx.$$

Es gilt nun

$$(\partial_t \rho)v + vv^T \nabla \rho + \rho(\nabla v)v = v(\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot v) = v \underbrace{(\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v))}_{=0}$$

$$\int_{\omega} (\rho \partial_t v + \rho(v \cdot \nabla)v)(t, x) dx = \int_{\omega} f_{net}(t, x) dx.$$

Da ω als beliebig angenommen wurde, gilt die Bilanzgleichung

$$\rho \partial_t v + \rho(v \cdot \nabla)v = f_{net} \quad \forall t \in [0, T], x \in \Omega.$$

► *Bemerkung 1.7. Äußere Kräfte*

Die Kräfte, die auf ω wirken, sind zusammengesetzt aus sogenannten **Volumen-/äußeren Kräften** und **inneren Kräften**. Äußere Kräfte sind zum Beispiel Schwerkraft, elektromagnetische Kräfte (in Flüssigmetallen), Corioliskraft. Diese Kräfte werden modelliert durch die Volumenkraft

$$\int_{\omega} f_{ext}(t, x), \quad f_{ext} : [N/m^3].$$

► *Bemerkung 1.8. Cauchy'sche Spannungsprinzip und der Spannungstensor*

Innere Kräfte sind Kräfte, die das Fluid auf sich selbst ausübt. Diese Kräfte beinhalten den Druck und den Reibungswiderstand, den ein Flächenelement auf ein benachbartes Flächenelement auswirkt. Nach dem Cauchy'schen Spannungsprinzip werden die inneren Kräfte des Fluids als Kontraktionskräfte axiomatisch modelliert. Das bedeutet, es wird angenommen, dass sie an der Oberfläche $\partial\omega$ des Fluidelements angreifen. Es bezeichne \vec{t} [N/m²] diesen inneren Kraftvektor, der **Cauchy'sche Spannungsvektor** oder **Schnittspannungsvektor**. Dann ist der Beitrag der inneren Kräfte gegeben durch

$$\int_{\partial\omega} \vec{t}(t, s) ds$$

Addiert man die äußeren und inneren Kräfte, so erhält man als Bilanzgleichung für den Impuls für ein beliebiges, in der Zeit konstantes Kontrollvolumen

$$\int_{\omega} \rho(\partial_t v) + (v \cdot \nabla)v dx = \int_{\omega} f_{ext} dx + \int_{\partial\omega} \vec{t}(t, s) ds. \quad (1.4)$$

Um eine partielle Differentialgleichung herleiten zu können, muss man $\int_{\partial\omega} \vec{t}(t, s) ds$ als **Volumenintegral** ausdrücken können. Dies wird im Folgenden hergeleitet. Dabei bezeichnet die rechte Seite von (1.4) die Gesamtkraft, die auf ω und $\partial\omega$ angreift.

Grundlage ist das Cauchy'sche Spannungsprinzip, das innere Kräfte als Kontaktkräfte via

$$\int_{\partial\omega} \vec{t}(t, s) ds$$

modelliert. An jeder gedachten Ebene an $\partial\omega$ greift eine Kraft an, die *geometrisch* nur von der Orientierung der Ebene, dem Ort $x \in \partial\omega$ und dem Zeitpunkt t abhängt. Es gilt also $\vec{t} = \vec{t}(t, x, n)$. Der Schnittspannungsvektor hängt also zum Beispiel von der Krümmung von $\partial\omega$ ab oder von Kräften, die außerhalb von $\partial\omega$ liegen, zum Beispiel Fernwirkung wie bei elektrischen Ladungen. Dabei bezeichnet n eine äußere Normale der Tangentialebene an $\partial\omega$.

Im Folgenden wird die grundlegende Überlegung von Cauchy modelliert. In jedem Punkt $x \in \partial\omega$ sind die Spannungsvektoren zu verschiedenen gedachten Ebenen Linearkombinationen von einigen ausgezeichneten Richtungen, das heißt, sie lassen sich beschreiben als

$$\vec{t} = \sigma^T \cdot n.$$

Der Spannungstensor σ^T ist eine Matrix und ist von der Orientierung der Schnittflächen unabhängig. Manchmal schreibt man, dass σ eine lineare Abbildung vermittelt. Allerdings ist die Abbildung $\vec{t} = \vec{t}(n)$ natürlich nicht linear, da die Summe zweier Normalen normal ist. Die Überlegungen fußen auf Cauchy's Tetraederargument:

Sei ω ein Tetraeder mit Eckpunkten $p_0 = (0, 0, 0)^T$, $p_1 = (x_1, 0, 0)^T$, $p_2 = (0, y_2, 0)$, $p_3 = (0, 0, z_3)$. Die Ebene, die von p_1, p_2, p_3 aufgespannt wird, wird mit $\partial\omega^{(n)}$ bezeichnet. Die äußere Normale von $\partial\omega^{(n)}$ ist gegeben durch

$$n = \frac{(p_2 - p_1) \times (p_3 - p_1)}{\|(p_2 - p_1) \times (p_3 - p_1)\|},$$

und es gilt

$$(p_2 - p_1) \times (p_3 - p_1) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 z_3 \\ x_1 z_3 \\ x_1 y_2 \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor zeigt von p_0 weg, n ist also eine äußere Normale von $n = (n_1, n_2, n_3)^T$.

► *Bemerkung 1.14.*

$$\mathbb{V} = a\mathbb{D}(v) + b(\nabla \cdot v)I$$

Diese lineare Beziehung ist nur eine Approximation an ein reelles Fluid. Im Allgemeinen wird die Bedingung nichtlinear sein. Nur für kleine Spannungen kann eine lineare Spannungs-Deformations-Beziehung verwendet werden. In solchen Fällen spricht man von **Newtonischen Fluiden**. (Nicht-Newtonische Fluide: z.B. Zahnpasta, Blut)

► *Bemerkung 1.15.* Normal- und Scherspannung, Spur des Spannungstensors.

Die Diagonalkomponenten $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ des Spannungstensors werden **Normalspannung** und die Nebendiagonalelemente **Scherspannung** genannt. Für inkompressible Fluide gilt:

$$\sigma = 2\mu\mathbb{D}(v) - PI. \tag{1.5}$$

Die Spur des Spannungstensors ist die Summe der Normalspannung

$$\begin{aligned} \text{spur}(\sigma) &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\ &= 2\mu(\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3) + 3\left(\zeta - \frac{2\mu}{3}\right)(\nabla \cdot v) - 3P \\ &= 3\zeta(\nabla \cdot v) - 3P. \end{aligned}$$

Für inkompressible Fluide gilt:

$$P(t, x) = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}).$$

$$(\mathbb{V} = 2\mu\mathbb{D}(v) + \left(\zeta - \frac{2\mu}{3}\right)I)$$

► *Bemerkung 1.16.* Die Navier-Stokes-Gleichungen

$$\rho(\partial_t v + (v \cdot \nabla)v - 2\nabla \cdot (\mu \mathbb{D}(v))) - \nabla \cdot ((\zeta - \frac{2\mu}{3})(\nabla \cdot v)I) + \nabla p = f_{\text{ext}} \quad (0, T] \times \Omega \quad (1.6)$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (0, T] \times \Omega \quad (1.7)$$

Wenn das Fluid inkompressibel und homogen ist mit positiven Konstanten μ und ρ , erhält man die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

$$\partial_t v - 2\nu \nabla \cdot (\mathbb{D}(v)) + (v \cdot \nabla)v + \nabla \left(\frac{p}{\zeta} \right) = \frac{f_{\text{ext}}}{\rho} \quad (0, T] \times \Omega \quad (1.8)$$

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (0, T] \times \Omega \quad (1.9)$$

Hier ist $\nu = \frac{\mu}{\rho} [m^2/s]$ die sogenannte kinematische Viskosität des Fluids.

1.3 Die entdimensionalisierten Navier-Stokes-Gleichungen

► *Bemerkung 1.17.* Charakteristische Skalen

Die mathematische Analysis und numerische Simulation basieren auf entdimensionalisierten (dimensionslosen) Gleichungen, die aus (1.8) hergeleitet werden. Dazu werden folgende Größen eingeführt:

- $L[m]$: eine charakteristische Längenskala des Problems
- $U[m/s]$: eine charakteristische Geschwindigkeit
- $T^*[s]$: eine charakteristische Zeitskala

► *Bemerkung 1.18.* Die Navier-Stokes-Gleichung in entdimensionalisierter Form

Bezeichne $(t', x')[s, m]$ die alten Variablen. Wende die Transformation

$$x = \frac{x'}{L}, \quad u = \frac{v}{U}, \quad t = \frac{t'}{T^*} \quad (1.10)$$

an, und man erhält aus (1.8) und einer Reskalierung

$$\frac{L}{UT^*} \partial_t u - \frac{2\nu}{u \cdot L} \nabla \cdot (\mathbb{D}(u)) + (u \cdot \nabla)u + \nabla \left(\frac{P}{\zeta U^2} \right) = \frac{L}{\rho U^2} f_{\text{ext}} \quad (0, T] \times \Omega$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (0, T] \times \Omega$$

Auch das Gebiet und das Zeitintervall sind entdimensionalisiert. mit der Definition

$$p = \frac{P}{\rho U^2}, \quad \text{Re} = \frac{U \cdot L}{\nu}, \quad \text{St} = \frac{L}{UT^*}, \quad f = \frac{L}{\rho U^2} f_{\text{ext}} \quad (1.11)$$

erhält man die Navier-Stokes-Gleichungen in entdimensionalisierter Form

$$\text{St} \partial_t u - \frac{2}{\text{Re}} \nabla \cdot (\mathbb{D}(u)) + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f \quad (0, T] \times \Omega \quad (1.12)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (0, T] \times \Omega \quad (1.13)$$

Die Konstanten Re und St werden Reynoldszahl und Strouhalszahl genannt. Die Zahlen erlauben die Klassifizierung und den Vergleich und Strömungen.

► *Bemerkung 1.19.* Inhärente Schwierigkeiten der Navier-Stokes-Gleichungen

Um die Notation zu vereinfachen, setzt man die charakteristische Zeit auf $T^* = \frac{L}{U}$, sodass sich (1.12) vereinfacht zu

$$\partial_t u - 2\nu \nabla \cdot (\mathbb{D}(v)) + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, \quad (0, T] \times \Omega \quad (1.14)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (0, T] \times \Omega \quad (1.15)$$

mit der dimensionslosen Konstante $\nu = \frac{1}{\text{Re}}$. (1.14) enthält folgende Schwierigkeiten:

- die Koppelung von Geschwindigkeit und Druck (zweite Gleichung definiert Druck wesentlich),
- die Nichtlinearität des konvektiven Terms $(u \cdot \nabla)u$,
- die Dominanz des konvektiven Terms gegenüber dem viskosen Terms, wenn ν klein ist.

► *Bemerkung 1.20.* Verschiedene Formen der Terme in (1.14)

Mithilfe von $\nabla \cdot u = 0$ wird der Reibungsterm vereinfacht:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla u &= \Delta u, \quad \nabla \cdot (\nabla u^T) = \nabla \cdot \begin{pmatrix} \partial_x u_1 & \partial_x u_2 & \partial_x u_3 \\ \partial_y u_1 & \partial_y u_2 & \partial_y u_3 \\ \partial_z u_1 & \partial_z u_2 & \partial_z u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x (\nabla \cdot u) \\ \partial_y (\nabla \cdot u) \\ \partial_z (\nabla \cdot u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \implies -2\nu \nabla \cdot (\mathbb{D}(v)) &= -2\nu \nabla \cdot \left(\frac{1}{2}(\nabla u) + \frac{1}{2}(\nabla u)^T \right) = -\nu \Delta u. \end{aligned}$$

Weiter gilt $(u \cdot \nabla)u = \nabla \cdot (u \otimes u)$, wenn $\nabla \cdot u = 0$. In vielen Diskretisierungen wird die Divergenzbedingung relaxiert, Vorsicht!

► *Bemerkung 1.21.* In einer stationären Strömung ändern sich Geschwindigkeit und Druck nicht in der Zeit. Dann gilt $\partial_t u = 0$. Das ergibt die stationären Navier-Stokes-Gleichungen:

$$-\nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, \quad \Omega \quad (1.16)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad \Omega. \quad (1.17)$$

Notwendig für die Stationarität der Lösung ist, dass die Daten der Zeit (rechte Seite, Randbedingung) zeitunabhängig sind. Diese Bedingung ist aber nicht hinreichend (z.B. Kanalströmung mit großer Reynoldszahl).

- Wenn in einer stationären Strömung der viskose Impulstransport dem Konvektiven überwiegt (im Falle sehr kleiner Reynoldszahlen), dann kann der nichtlineare Term $(u \cdot \nabla)u$ vernachlässigt werden. Dies ergibt das lineare Stokes-Modell

$$-\Delta u + \nabla p = f, \quad \Omega \quad (1.18)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad \Omega \quad (1.19)$$

per Division durch ν und Neudefinition von p und f .

- In der Numerik werden oft die Oseen-Gleichungen betrachtet. Dazu sei u_0 gegeben mit $\nabla \cdot u_0 = 0$. Dann

$$\begin{aligned} -\nu \Delta u + (u_0 \cdot \nabla)u + c \cdot u + \nabla p &= f, \quad \Omega \\ \nabla \cdot u &= 0, \quad \Omega \end{aligned}$$

mit einer positiven Konstanten $c > 0$. $c \cdot u$ kommt von einer Zeitdiskretisierung von u_t , $u_t = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t}$.

1.4 Anfangs- und Randwertbedingungen

► *Bemerkung 1.22.* Die Navier-Stokes-Gleichungen sind partielle Differentialgleichungen erster Ordnung in der Zeit und zweiter Ordnung im Ort. Deshalb benötigt man Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ und Randbedingungen für $\Gamma = \partial\Omega$, wenn Ω ein beschränktes Gebiet ist. Nur eindimensionalisierte Randbedingungen werden betrachtet.

► *Bemerkung 1.23.* Anfangsbedingungen:

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \nabla \cdot u_0 = 0 \text{ in } \Omega$$

► *Bemerkung 1.24.* Dirichlet-Randbedingung, No-Slip-Bedingung, wesentliche Randbedingung. Oft benutzt man

$$u(t, x) = g(t, x) \quad \text{in } (0, T] \times \Gamma_{dir}$$

mit $\Gamma_{dir} \subset \Gamma$. Diese Randbedingungen werden **Dirichlet-Randbedingungen** genannt. Insbesondere Ein- und Ausströmungen können damit modelliert werden. Im Spezialfall $g(t, x) = 0$ spricht man von **No-Slip-Randbedingungen**. Sei n eine Einheitsnormale an $x \in \Gamma_{nosl} \subset \Gamma_{dir}$ und seien (t_1, t_2) Einheitstangentialektoren. Dann kann die No-Slip-Bedingung zerlegt werden in

$$u(t, x) \cdot n = 0, \quad u(t, x) \cdot t_1 = 0, \quad u(t, x) \cdot t_2 = 0$$

(‘keine Durchdringung der Wand’, ‘No-Slip’, ‘No-Slip’). Sind auf dem ganzen Rand Dirichlet-Randbedingungen gegeben, dann sind zwei Dinge zu beachten:

- Der Druck ist nur auf einer additiven Konstanten bestimmt, die man festlegen muss, z.B.:

$$\int_{\Omega} p(t, x) dx = 0, \quad t \in (0, T]$$

$$u_t - \nu \nabla u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = 0$$

- Kompatibilitätsbedingung:

$$0 = \int_{\Omega} \nabla \cdot u dx = \int_{\Gamma} u \cdot n dS = \int_{\Gamma} g \cdot n dS$$

Dirichlet-Randbedingungen sind für Stokes und Navier-Stokes sogenannte **wesentliche Randbedingungen**, die in die Definition des zu wählenden Funktionenraumes eingehen müssen.

► *Bemerkung 1.25.* Free-Slip-Randbedingungen, Slip mit Reibung

Die **Free-Slip-Bedingung** wird angewendet für Ränder ohne Reibung, z.B. freie Oberfläche (Meeresoberfläche). Sie haben die Form

$$u \cdot n = g \quad \text{in } (0, T] \times \Gamma_{slip},$$

$$n^T \cdot \sigma \cdot t_K = 0 \quad \text{in } (0, T] \times \Gamma_{slip}, 1 \leq K \leq d-1 \quad (1.20)$$

Für $g = 0$ gibt es keine Durchdringung der Wand. ‘Slip mit linearer Reibung, keine Durchdringung’:

$$u \cdot n = 0 \quad \text{in } (0, T] \times \Gamma_{slfr} \subset \Gamma,$$

$$u \cdot t_n + \beta^{-1} n^T \sigma t_n = 0 \quad \text{in } (0, T] \times \Gamma_{slfr}, 1 \leq k \leq d-1 \quad (1.21)$$

Dies bedeutet ‘keine Durchdringung’ und Reibung proportional und entgegengesetzt zur Tangentialgeschwindigkeit. Für $\beta^{-1} \rightarrow 0$ erhält man No-Slip-Bedingungen, für $\beta^{-1} \rightarrow \infty$ erhält man Free-Slip-Bedingungen. Die Schwierigkeit besteht in der experimentellen Bestimmung von β .

Da n und t_k orthogonale Vektoren sind, sind (1.20) und (1.21) druck-unabhängig. Man braucht eine additive Konstante für den Druck.

► *Bemerkung 1.26.* Ausströmungs- und 'Do-Nothing'-Randbedingungen, natürliche Randbedingungen

$$\sigma \cdot n = 0 \quad \text{in } (0, T] \times \Gamma_{\text{auf}} \subset \Gamma \quad (1.22)$$

Mathematisch sind dies sogenannte **natürliche Randbedingungen**, da die Oberflächenintegrale am Rand verschwinden. (1.22) fixiert den Druck.

► *Bemerkung 1.27.* Bedingungen für unendliche Gebiete und periodische Randbedingungen .
Der Fall $\Omega = \mathbb{R}^3$ wird mathematisch oft betrachtet. Zwei Fälle kommen vor:

- (a) Vorschreiben des Abfalls des Geschwindigkeitsfeldes in Unendlichen für $\|x\|_2 \rightarrow \infty$.
- (b) Periodische Randbedingungen, z.B. Würfel $(0, l)^d$ und

$$u(t, x + l \cdot e_i) = u(t, x), \quad \forall (t, x) \in (0, T] \times \Gamma.$$

2 Funktionalanalysis für die inkompressible Navier-Stokes-Gleichung, elementare Einblicke

► *Bemerkung 2.1.* Dieses Kapitel behandelt die erste Schwierigkeit, die die inkompressible NSG aufweisen, nämlich die Koppelung von Geschwindigkeit und Druck. Charakteristische Eigenschaft dafür ist das Fehlen eines Druckbeitrages in der Massenerhaltung. Die Massenerhaltung ist eine geometrische Zwangsbedingung an die Geschwindigkeit und der *Druck in der Impulsgleichung ist der zugehörige Lagrange-Multiplikator!* Diese Art der Koppelung nennt man Sattelpunktproblem. Alle Modelle (inkompressible Navier-Stokes-Gleichung, Stokes-Gleichung, inkompressible Oseengleichung) weisen dieselbe Art der Druck-Geschwindigkeits-Kopplung auf.

Die Theorie der linearen Sattelpunktprobleme wird hier elementar präsentiert. Wir werden Begriffe einführen wie

- inf-sup-Stabilität, Divergenzstabilität, Sattelpunktproblem
- geeignete Funktionenräume für das Stokes-Problem
- geeignete Finite-Elemente-Räume-Kombinationen (Druck-Geschwindigkeit); Divergenzstabilität entspricht hier der diskreten inf-sup-Stabilität

2.1 Ein konkretes Sattelpunktproblem

Stokes:

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f \\ -\nabla \cdot u &= 0 \end{aligned}$$

ist 'gleichschwierig' wie

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f \\ -\nabla \cdot u &= g \end{aligned}$$

Diskretisierung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}}_K \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

mit einer symmetrischen, aber nicht positiv definiten Systemmatrix. Seien eine invertierbare $n_v \times n_v$ -Matrix A und eine $n_p \times n_v$ -Matrix B mit $\text{rg}(B) = n_p$ gegeben. Wir stellen uns die Frage, ob die Gleichung

$$K \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung hat.

$$\begin{aligned} Au + B^T p &= f \\ Bu &= g \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$Au = f - B^T p, \quad u = A^{-1}(f - B^T p)$$

und aus der zweiten mit dieser

$$g = Bu = B(A^{-1}(f - B^T p)) = BA^{-1}f - \underbrace{BA^{-1}B^T}_{S, \text{ Schurkomplement}} p$$

$$\iff Sp = BA^{-1}f - g$$

S ist eine $n_p \times n_p$ -Matrix. B ist eine $n_p \times n_v$ -Matrix. Eine notwendige Bedingung ist, dass B nur dann vollen Rang haben kann, wenn $n_p \leq n_v$.

Wenn B vollen Rang hat, dann ist auch $B^T p$ injektiv. K ist also genau dann invertierbar, wenn B vollen Rang hat. Aus $\text{rg}(B) = n_p$ folgt $S = BA^{-1}B^T$ ist injektiv, und da S eine $n_p \times n_p$ -Matrix ist, ist S auch bijektiv.

$$p = S^{-1}(BA^{-1}f - g)$$

$$u = A^{-1}(f - B^T S^{-1}(BA^{-1}f - g))$$

$$\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A^{-1}(I_v - B^T S^{-1}(BA^{-1})) & A^{-1}B^T S^{-1} \\ S^{-1}BA^{-1} & -S^{-1} \end{pmatrix}}_{K^{-1}} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

Entscheidend für die Lösbarkeit des Sattelpunktproblems sind:

- A ist invertierbar
- $\text{rg}(B) = n_p$

'Zu jedem g muss man ein u finden können.'

Sei $K = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}$, $A : n_\nu \times n_\nu$ invertierbar, $B : n_p \times n_\nu$ hat vollen Rang, $n_p \leq n_\nu$, $S = BA^{-1}B^T$ bijektiv, B^T injektiv. Zu zeigen: S ist injektiv, also $\text{Ker}(Sp) = \{0\}$. Angenommen, es sei $\text{Ker}(Sp) \neq \{0\}$. Dann gibt es ein $q \in \mathbb{R}^{n_p}$ mit $q \neq 0$ und es gilt:

$$Sq = BA^{-1}B^T q = 0 \implies q^T Sq = 0$$

$$q^T BA^{-1}B^T q = v^T A^{-1}v = 0 \implies v = 0$$

$$\implies q = 0$$

mit $v = B^T q$. Also ist S bijektiv.

Entscheidend für die Lösbarkeit des Sattelpunktproblems

$$K \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

ist, dass A invertierbar ist und $\text{rg}(B) = n_p$ gilt.

► *Bemerkung.* Dies sind hinreichende Bedingungen, die bei den Navier-Stokes-Gleichungen immer erfüllt sind. Von besonderer Bedeutung ist

$$\text{rg}(B) = n_p$$

Dies bedeutet insbesondere, dass für alle $q \in \mathbb{R}^{n_p}$ ein $v_q \in \mathbb{R}^{n_\nu}$ existiert, sodass B surjektiv ist, also

$$Bv_q = q.$$

Diese Bedingung ist äquivalent zu der folgenden **inf-sup-Bedingung**:

$$\inf_{0 \neq q \in \mathbb{R}^{n_p}} \sup_{0 \neq v \in \mathbb{R}^{n_\nu}} \frac{q^T Bv}{\|v\|_2 \cdot \|q\|_2} \geq \beta > 0. \quad (2.1)$$

Beweis. der Äquivalenz:

1. Angenommen, es gilt (2.1) und $\text{rg}(B) < n_p$. Dann gibt es einen Vektor $q \in \mathbb{R}^{n_p}$, $q \neq 0$ mit $B^T q = 0$, $0 \neq q \in \text{Ker}(B^T)$. Dann gilt für alle $v \in \mathbb{R}^{n_\nu}$ $0 = v^T B^T q = q^T B v$, also ist $\beta = 0$. Widerspruch.
2. Es gelte nun $\text{rg}(B) = n_p$. Für alle $q \in \mathbb{R}^{n_p}$, $q \neq 0$ gilt $B^T q \neq 0$ mit $B^T q \in \mathbb{R}^{n_\nu}$. Wähle nun $v = B^T q$:

$$\begin{aligned} \inf_{0 \neq q \in \mathbb{R}^{n_p}} \sup_{0 \neq v \in \mathbb{R}^{n_\nu}} \frac{v^T B q}{\|v\|_2 \cdot \|q\|_2} &\geq \inf_{0 \neq q \in \mathbb{R}^{n_p}} \frac{q^T B B^T q}{\|B^T q\|_2 \cdot \|q\|_2} \\ &= \inf_{0 \neq q \in \mathbb{R}^{n_p}} \frac{\|B^T q\|_2^2}{\|q\|_2^2} \geq \sqrt{\lambda_{\min}(B B^T)} > 0. \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\frac{\|B^T q\|_2^2}{\|q\|_2^2} = \frac{q^T B B^T q}{q^T q}$ ist der Rayleighquotient von $B B^T$ und es gilt

$$\inf_{0 \neq q \in \mathbb{R}^{n_p}} \frac{q^T B B^T q}{q^T q} = \lambda_{\min}(B B^T).$$

Falls $\lambda_{\min}(B B^T) = 0$ gilt, so gibt es ein $q \neq 0$, $q \in \mathbb{R}^{n_p}$, sodass $B B^T q = 0$. Ferner

$$0 = q^T B B^T q = (B^T q)^T \cdot (B^T q),$$

also ist $q = 0$, da B^T injektiv ist. Widerspruch! Also $\lambda_{\min} > 0$.

□

2.2 Funktionenräume für stationäre, inkompressible Stokes-Probleme

Das inkompressible Stokes-Problem

$$-\Delta u + \nabla p = f, \quad x \in \Omega \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad x \in \Omega \tag{2.3}$$

$$u = 0, \quad x \in \Omega \tag{2.4}$$

besitzt die folgende (formale) schwache Formulierung

$$\int_{\Omega} \nabla u : \nabla w dx - \int_{\Omega} p \cdot \nabla \cdot w dx = \int_{\Omega} f \cdot w dx \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega)^d \tag{2.5}$$

$$- \int_{\Omega} q \nabla \cdot n dx = 0 \quad \forall q \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.6}$$

Dazu benötigt man die Übungsaufgabe 1.1, Integration über Ω und Übungsaufgabe 1.3. Mit Einführung der Bilinearformen

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v dx$$

$$b(u, q) := - \int_{\Omega} (\nabla \cdot u) q dx$$

und der Linearform

$$l(v) := \int_{\Omega} f \cdot v dx$$

ergibt sich formal

$$a(u, w) + b(w, p) = l(w), \quad \forall w \in C_0^\infty(\Omega)^d \quad (2.7)$$

$$b(u, q) = 0, \quad \forall q \in C_0^\infty(\Omega) \quad (2.8)$$

► *Bemerkung.* Funktionenräume für Geschwindigkeit und Druck im Fall homogener Dirichlet-Randbedingungen
Sei Ω ein beschränktes und zusammenhängendes Gebiet in \mathbb{R}^d , $d \in \{2, 3\}$, und sei $\partial\Omega$ Lipschitzstetig. Zur Vereinfachung der Situation werden nur Dirichlet-Randbedingungen behandelt. Diese wesentlichen Randbedingungen führen zur Definition des Geschwindigkeitsraumes

$$V = H_0^1(\Omega)^d = \left\{ v \in H^1(\Omega)^d : v = 0 \text{ auf } \Gamma \right\},$$

wobei die Randwerte im Spursinn zu verstehen sind.

Der Druckraum ist gegeben durch

$$Q = L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2 : \int_{\Omega} q(x) dx = 0 \right\}.$$

Beide Räume sind Hilberträume. Das innere Produkt und die induzierte Norm von V ist gegeben durch

$$\begin{aligned} (v, w)_V &= \int_{\Omega} \nabla v : \nabla w dx, \\ \|v\|_V &= \|\nabla v\|_{L^2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Die Poincare-Ungleichung zeigt, dass (2.9) wirklich eine Norm und $(v, w)_V$ ein Skalarprodukt ist.

Das innere Produkt und die induzierte Norm in Q sind gegeben durch

$$(q, v)_Q = \int_{\Omega} q(x) \cdot v(x) dx, \quad \|q\|_Q = \|q\|_{L^2(\Omega)}$$

Der Dualraum von V ist $V' = (H^{-1})(\Omega)^d$, und der Dualraum des Druckes ist $Q' = Q$. Für $v \in V$ folgt ∇v in $L^2(\Omega)^{d \times d}$ und mit der Übungsaufgabe 1.4 gilt

$$\nabla \cdot v \in L^2(\Omega)$$

für $v \in H^1(\Omega)^d$. Weiter gilt noch für $v \in H_0^1(\Omega)^d$:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot v &= \int_{\Omega} v \cdot n dS = 0 \\ \implies \nabla \cdot v &\in Q = L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

Somit sind $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $b : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ zwei wohldefinierte Bilinearformen mit

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v dx, \\ b(u, q) &= - \int_{\Omega} (\nabla \cdot u) q dx. \end{aligned}$$

► *Bemerkung.* Aus der obigen Überlegung folgt:

$$\text{div} : V \rightarrow Q, \quad v \mapsto \nabla \cdot v$$

ist ein linearer, beschränkter Operator, der V in Q abbildet.

Er ist linear, außerdem gilt

$$v \in V \implies \|\operatorname{div} v\|_Q = \|\nabla \cdot v\|_{L^2} \leq \|\nabla v\|_{L^2} = \|v\|_V$$

und schließlich

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot v dx = \int_{\Omega} v \cdot n dS = 0 \implies \nabla \cdot v \in Q.$$

► *Definition.* Distributionelle und schwache Divergenz
Für ein Vektorfeld $v \in L^2(\Omega)^d$ wird die Abbildung

$$C_0^\infty \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } \psi \mapsto - \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot v dx$$

die distributionelle Divergenz von v genannt. Falls für ein Vektorfeld $v \in L^p(\Omega)^d$ mit $p \geq 1$ eine Funktion $\theta \in L_{loc}^1(\Omega)$ existiert mit

$$- \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot v dx = \int_{\Omega} \psi \cdot \theta dx \quad \forall \theta \in C_0^\infty(\Omega),$$

so wird θ die schwache Divergenz von v genannt. (Insbesondere wurden anfangs keine Glattheitsbedingungen an ψ gestellt!)

► *Bemerkung 2.2.* Der Funktionenraum der Funktionen mit schwacher Divergenz in L^2
Für inkompressible Strömungen ist der Raum der Vektorfelder $L^2(\Omega)^d$ mit schwacher Divergenz in L^2 wichtig:

$$H(\operatorname{div}, \Omega) := \{v \in L^2 : \nabla \cdot v \in L^2(\Omega)\}.$$

(Es existiert obiges θ !) Dieser Raum ist ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(u, v)_{H(\operatorname{div}, \Omega)} = \int_{\Omega} (u \cdot v + (\nabla \cdot u) \cdot (\nabla \cdot v)) dx.$$

► *Definition 2.3.* Divergenzfreies Vektorfeld in $L^2(\Omega)^d$
Im Sinne der Definition 2.1 wird ein Vektorfeld $v \in L^p(\Omega)^d$, $p \geq 1$ **schwach divergenzfrei** genannt, falls für alle $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \nabla \psi \cdot v dx = 0$$

(‘ v ist orthogonal zu allen Gradienten’, ganz wichtig!).

Damit wird der folgende Raum einführbar:

$$H_{\operatorname{div}}(\Omega) = \{v \in L^2 : \nabla \cdot v \in L^2, \nabla \cdot v \wedge = v \cdot n = 0 \text{ auf } \Gamma\}.$$

Die Spur der Normalkomponenten von schwach divergenzbehafteten Vektorfeldern liegt in $H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)$
Ein weiterer wichtiger Raum ist

$$V_0 = V_{\operatorname{div}} = \{v \in V : \nabla \cdot v = 0\}.$$

Weiterhin wird eingeführt: $V^\perp = \{v \in V : (v, w)_V = 0 \forall w \in V_0\} = \{v \in V : \int_{\Omega} \nabla v : \nabla w dx = 0, \forall w \in V_0\}$

► *Lemma 2.4.* Wichtige Aussage:

Sei $\varphi \in H^1(\Omega)^d$. Dann gilt:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \varphi) = 0$$

im schwachen Sinn.

Beweis. Sei $\varphi \in H^1(\Omega)^d$. Dann existieren $\varphi_i \in C^\infty(\Omega)^d$ mit $\varphi_i \rightarrow \varphi$ in $(H^1)^d$. Daraus folgt

$$\nabla \times \varphi_i \rightarrow \nabla \times \varphi.$$

Weiter gilt für alle $w \in C_0^\infty(\Omega)$:

$$-\int_{\Omega} \nabla w \cdot (\nabla \times \varphi_i) dx \rightarrow -\int_{\Omega} \nabla w \cdot (\nabla \times \varphi) dx.$$

Mittels partieller Integration erhalten wir

$$\int_{\Omega} \omega \cdot \nabla \cdot (\nabla \times \varphi_i) dx.$$

(Nachrechnen! $(\nabla \times \varphi_i) = 0$ für glattes φ_i) □

► *Satz 2.5.* Sei Ω ein beschränktes Gebiet, dessen Rand Lipschitz-stetig ist. Dann existiert zu jedem $q \in L_0^2(\Omega)$ ein $v \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\nabla \cdot v = q \quad \wedge \quad \|\nabla v\|_{L^2} = \|v\|_V \leq C_\beta \cdot \|q\|_Q.$$

Die zweite Aussage nennt man **Divergenzstabilität**.

Beweis. Die einzige Schwierigkeit: H_0^1 (sonst 'einfache Aufgabe'). Hier nur eine Skizze, für den vollständigen Beweis benötigt man weitere Räume etc. Wir nehmen an, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ($d = 3$ ähnlich) und entweder konvex oder glatt im Sinne $\partial\Omega \subset C^2$. man löst zunächst das folgende Problem im schwachen Sinn (d.h. in $H^1(\Omega)$):

$$\nabla \cdot (-\nabla \psi) = q, \quad \nabla \psi \cdot n = 0$$

in $\partial\Omega$. Die schwache Formulierung hierzu lautet:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \cdot (-\nabla \psi) w dx &= \int_{\Omega} q \cdot w dx, \quad \forall w \in C^\infty(\Omega) \\ \iff \int_{\Omega} \nabla \cdot (w(-\nabla \psi)) + \nabla \psi \cdot \nabla w dx &= \int_{\Omega} q \cdot w dx \\ &= \int_{\partial\Omega} w(-\nabla \psi) \cdot n dS + \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla w dx. \end{aligned}$$

Aufgrund der Randbedingung haben wir für alle $x \in C^\infty(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \nabla \psi \cdot \nabla w dx = \int_{\Omega} q \cdot w dx$$

Neumann-Problem erfordert Kompatibilitätsbedingung

$$\int_{\Omega} q dx = \int_{\Omega} \nabla \psi \cdot n dS = 0,$$

die erfüllt ist. Also gibt es ein $\psi \in H^1$, das dieses Problem erfüllt. Aufgrund der Anforderungen an $\partial\Omega$ (Glattheit des Randes oder Konvexität) folgt sogar $\psi \in H^2(\Omega)$ (Konvexität liefert Differenzierbarkeit, $H(\text{div}) \cap H(\text{curl})$ ist fast L^1 , Maxwell-Gleichungen, sowas). Wir erhalten

$$v = -\nabla\psi \in H^1, \quad \nabla \cdot (-\nabla\psi) = g.$$

Weiter ist $\nabla\psi \cdot n = 0$, das heißt $v \cdot n = 0$. Weiter gilt

$$\|v\|_V = \|\nabla\psi\|_V = \|\psi\|_{H^2} \leq C_\Omega \cdot \|q\|_{N^2}.$$

Für $v = -\nabla\psi$ stimmt im Allgemeinen $v \cdot t = 0$ nicht. Wir wenden einen Spursatz für H^2 -Funktionen an. Es existiert ein $\varphi \in H^2(\Omega)$ mit $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ und $\nabla\varphi \cdot n = v \cdot t$ und $\|\varphi\|_{H^2} \leq C'_\Omega \|v\|_V$ (Biharmonische

Gleichungen). Sei $\tilde{v} = \nabla \times \varphi = \nabla \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_y \\ -\varphi_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_y \\ -\varphi_x \end{pmatrix} = -(\nabla\varphi)^\perp$$

mit

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}^\perp = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

Für \tilde{v} gilt: $\nabla \cdot \tilde{v} = 0$. $\tilde{v} \cdot n = -(\nabla\varphi)^\perp \cdot n = \begin{pmatrix} \varphi_y & -\varphi_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ -t_1 \end{pmatrix} = \varphi_y t_2 + \varphi_x t_1 = \nabla\varphi \cdot t$.

$$\begin{aligned} \tilde{v} \cdot t &= (\nabla\varphi)^\perp \cdot t = \begin{pmatrix} \varphi_y \\ -\varphi_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \\ &= t_1 \cdot \varphi_y - \varphi_x \cdot t_2 = -\nabla\varphi \cdot n = -\begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_2 \\ -t_1 \end{pmatrix} \\ &= v \cdot t \\ v_q &= v + \tilde{v} \Rightarrow v_q|_{\partial\Omega} = 0 \end{aligned}$$

□

► *Lemma 2.6.* Die Abbildung $\text{div} : V^\perp \rightarrow Q$ ist stetig und bijektiv.

Beweis. Noch zu zeigen: Injektivität von $\text{div} : V^\perp \rightarrow Q$. Seien $v_1, v_2 \in V^\perp$ mit $\text{div}(v_1) = \text{div}(v_2)$ und $v_1 \neq v_2$. Dann ist $w = v_1 - v_2 \in V_0$ und $w \in V^\perp$. Daraus folgt $w = 0$, Widerspruch! □

► *Bemerkung 2.7.* Mithilfe der Funktionalanalysis sieht man ein, dass die Divergenzstabilität schon aus der Surjektivität und des Divergenzoperators folgt. Nach dem Satz der offenen Abbildung ist die Inverse eines beschränkten bijektiven linearen Operators wieder beschränkt und damit stetig.

► *Lemma 2.8.* Obere Schranke für die inf-sup-Bedingung
Es gilt $\beta \leq 1$.

Beweis.

$$\frac{(\nabla \cdot v, q)}{\|v\|_V \cdot \|q\|_Q} \leq \frac{\|\nabla \cdot v\|_Q \cdot \|q\|_Q}{\|v\|_Q \cdot \|q\|_Q} \leq 1.$$

□

► *Definition 2.9.* Klassische **konforme** gemischte Finite Elemente für das Stokes Problem
Für $V_h \subset V$, $q_h \subset Q$ ist die FEM-Diskretisierung gegeben durch: Gesucht ist (u_h, p) mit

$$v(\nabla u_h, \nabla v_h) - (p_h, \nabla \cdot v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.10)$$

$$- (\nabla \cdot u_h, q_h) = (g, q_h), \quad \forall q_h \in q_h. \quad (2.11)$$

► *Bemerkung 2.10.* Man führt zunächst den Raum der diskret-divergenzfreien Funktionen ein mit

$$V_{\text{div}}^h = \{v_h \in V_h : (\nabla \cdot v_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in q_h\}.$$

Elemente $v_h \in V_{\text{div}}^h$ sind im Allgemeinen nicht divergenzfrei (nicht einmal im schwachen Sinne), obwohl man in der Literatur oft geschrieben sieht, dass dies eine schwache Vorschreibung der Divergenzfreiheit sei.

In der Tat ist dies jedoch eine diskrete Divergenzfreiheit. Ein Element $v_h \in V_{\text{div}}^h$ ist diskret divergenzfrei, falls

$$\mathbb{P}_n^{q_h}(\nabla \cdot v_h) = 0$$

gilt. Hier ist $\Pi_n^{Q_h}$ der L^2 -Projektor auf den diskreten Druckraum. Die Qualität des diskreten Divergenzbegriffes ist also relativ zum diskreten Druckraum zu betrachten. Der diskrete Druckraum ist definiert als

$$\begin{aligned} \text{div}_h : V_h &\rightarrow Q_h \\ v_h &\mapsto \Pi_n^Q(\nabla \cdot v_h) \end{aligned}$$

für alle $v_h \in V_h$.

► *Bemerkung 2.11.* Der diskreten inf-sup-Bedingung kommen zwei wesentliche Bedingungen hinzu:

1. Der diskrete Divergonzoperator $\text{div}_h : V_h \rightarrow q_h$ ist surjektiv. Dies garantiert, dass das diskrete Problem (2.10) überhaupt eindeutig lösbar ist. Mehrdeutigkeiten können im Druck entstehen (Druckmodem?). Dies sind diskrete Drücke, sodass

$$(q_h, \nabla \cdot v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h$$

gilt. Hierfür reicht:

$$\inf_{0 \neq q_h \in q_h} \sup_{0 \neq v_h \in V_h} \frac{(\nabla \cdot v_h, q_h)}{\|v_h\|_V \cdot \|q_h\|_Q} > 0, \quad \forall h > 0. \quad (2.12)$$

2. Die diskrete inf-sup-Bedingung

$$\inf_{0 \neq q_h \in q_h} \sup_{0 \neq v_h \in V_h} \frac{(\nabla \cdot v_h, q_h)}{\|v_h\|_V \cdot \|q_h\|_Q} \geq \beta_h \geq C > 0 \quad (2.13)$$

uniform für eine Gittersequenz $h \rightarrow 0$ sichert dagegen, dass der Raum V_h^{div} gewisse optimale Approximationseigenschaften hat.

Die notwendigen Approximationseigenschaften sind:

1. Aus $\forall v \in V \cap H^{k-1}(\Omega)^d$ folgt:

$$\exists w_h \in V_h : \|v - w_h\|_V \leq C \cdot h^k |v|_{k+1}, \quad \|v - w_h\|_{L^2} \leq C \cdot h^{k+1} |v|_{k+1},$$

für $k \geq 1$,

2. und aus (2.13) folgt

$$\begin{aligned} \forall v \in V_{\text{div}} \cap H^k(\Omega)^d : \exists w_h \in V_{\text{div}}^h : \|v - w_h\|_V &\leq C \cdot h^k |v|_{k+1}, \\ &: \|v - w_h\|_{L^2} \leq C \cdot h^{k+1} |v|_{k+1}, \end{aligned}$$

► *Bemerkung 2.12.* Der Fortin-Interpolator

Seien $V_h \subset V$, $Q_h \subset Q$. Dann erfüllen V_h und Q_h die diskrete inf-sup-Bedingung genau dann, wenn ein Fortin-Interpolator $\Pi_f : V \rightarrow V_h$ existiert, der folgende Eigenschaften erfüllt:

$$(\nabla \cdot (\Pi_f v), q_h) = (\nabla \cdot v, q_h), \quad \forall q_h \in q_h, \quad (2.14)$$

$$\|\Pi_f v\|_V \leq C_F \|v\|_V. \quad (2.15)$$

Beweis. Angenommen, es gilt (2.14). Sei $q_h \in q_h$ beliebig. Aus $v \in V \implies \Pi_f v \in V_h$ folgt

$$\begin{aligned} \sup_{0 \neq v_h \in V_h} \frac{(\nabla \cdot v_h, q_h)}{\|v_h\|_V} &\geq \sup_{0 \neq v \in V} \frac{(\nabla \cdot \Pi_f v, q_h)}{\|\Pi_f v\|_V} \\ &= \sup_{0 \neq v \in V} \frac{(\nabla \cdot v, q_h)}{\|\Pi_f v\|_V} \\ &\geq \frac{1}{C_F} \sup_{0 \neq v \in V} \frac{(\nabla \cdot v, q_h)}{\|v\|_V} \geq \frac{\beta}{C_F} \|q\|_V \\ &\implies \beta_h \geq \frac{\beta}{C_F} \end{aligned}$$

Es gelte nun (2.13) mit einem Wert $\beta_h \geq C > 0$ uniform bezüglich der Gitterweite h . Sei $v \in V$

gegeben. Dann setzt man $q_h := \Pi_h^{q_h}(\nabla \cdot v)$. Aufgrund der diskreten inf-sup-Bedingung existiert ein v_h mit

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot v_h, v_h) &= (q_h, r_n), \quad \forall r_n \in q_h, \\ \|v_h\|_V &\leq \frac{1}{\beta_h} \|q_h\|_Q \end{aligned}$$

Deshalb gilt weiter

$$\begin{aligned} \|v_h\|_V &\leq \frac{1}{\beta_h} \|q_h\|_Q \\ &= \frac{1}{\beta_h} \|\Pi_h^{q_h}(\nabla \cdot v)\|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{\beta_h} \|\nabla \cdot v\|_{L^2} \leq \frac{1}{\beta_h} \|v\|_V. \end{aligned}$$

□

► *Bemerkung.* In gemischter FEM wird oft die Konstante $\frac{1}{\beta_h}$ verwendet, wo man eigentlich auch die Konstante $\frac{1}{C_F}$ verwenden könnte. Die Konstante $\frac{1}{\beta_h}$ ist oft sehr pessimistisch. Man beachte, dass die diskrete inf-sup-Konstante umgekehrt proportional zum Längenverhältnis des Gebiets Ω ist. Deshalb sind klassische gemischte FEM-Abschätzungen, die die inf-sup-Bedingungen enthalten, oft zu pessimistisch auf praxis-relevanten Gebieten, wie bei Kanalströmungen.

Die inf-sup-Bedingung ist zwingend nur in Fehlerabschätzungen für die L^2 -Norm von p_h . Im Folgenden werden Abschätzungen mit $\frac{1}{C_F}$ soweit möglich vorgezogen. Man beachte, dass es nicht einen einzigen Fortin-Interpolator gibt, sondern dass viele existieren. Die diskrete inf-sup-Bedingung garantiert, dass mindestens einer existiert.

► *Lemma 2.13.* Erfüllen die FEM-Räume $V_h \subset V$, $Q_h \subset Q$ die diskrete inf-sup-Bedingung (2.13), dann gilt für alle $w \in V$ mit

$$w \in V_{\text{div}}(g) = \{v \in V : -\nabla \cdot v = g \in L_0^2(\Omega)\},$$

dass

$$\inf_{0 \neq w_h \in V_h, -\text{div}_h w_h = \Pi_h^{Q_h}(g)} \|w - w_h\|_V \leq (1 + C_F) \inf_{v_h \in V_h} \|w - v_h\|_V.$$

Beweis. Sei $v_h \in V_h$ beliebig. Definiere $z_h := \Pi f(w - v_h) \in V_h$. Aufgrund der Eigenschaften des Fortin-Interpolators gilt

$$\|z_h\|_V \leq C_F \|w - v_h\|_V$$

und

$$(\nabla \cdot z_h, q_h) = (\nabla \cdot (w - v_h), q_h)$$

für alle $q_h \in Q_h$. Weiterhin gilt für $w_n := z_h + v_h$:

$$-\text{div } w_h = \Pi_h^{Q_h} g,$$

dass

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot w_h, q_h) &= (\nabla \cdot z_h, q_h) + (\nabla \cdot v_h, q_h) \\ &= (\nabla \cdot (w - v_h), q_h) + (\nabla \cdot v_h, q_h) \\ &= (\nabla \cdot w, q_h) \\ &= -\Pi_h^{Q_h} g, q_h \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \|w - w_n\|_V &\leq \|w - v_h\| + \|v_h\|_V \\ &\leq (1 + C_F) \|w - v_h\|_V. \end{aligned}$$

□

► *Bemerkung 2.14.* Seien V_h und Q_h so gewählt, dass $\nabla \cdot [V_h] \subset Q_h$. Dann gilt $V_{\text{div}}^h \subset V_{\text{div}}$.

Beweis.

$$V_{\text{div}}^h = \{v_h \in V_h : (\nabla \cdot v_h, q_h) = 0, \forall q_h \in Q_h\}.$$

Aus $\nabla \cdot [V_h] \subset Q_h$ folgt, dass man in $(\nabla \cdot v_h, q_h)$ die spezielle Testfunktion $q_h := \nabla \cdot v_h$ wählen kann. Daraus erhalten wir

$$V_{\text{div}}^h = \{v_h \in V_h : (\nabla \cdot v_h, \nabla \cdot v_h) = 0\} = \{v_h \in V_h : \nabla \cdot v_h = 0\}.$$

Daraus folgt $V_{\text{div}}^h \subset V_{\text{div}}$.

□

Für den diskreten Divergenzoperator $\text{div}_h : V_h \rightarrow Q_h$ mit $\text{div}_h(v_h) = \Pi_h^{Q_h}(\nabla \cdot v_h) = \nabla \cdot v_h$ für $\nabla \cdot [V_h] \subset Q_h$.

► *Definition 2.15.*

$$V_h^\perp := \left\{ v_h \in V_h : (\nabla \cdot v_h, \nabla \cdot w_h) = 0, \forall w_h \in V_{\text{div}}^h \right\}.$$

► *Lemma 2.16.* Es gelte die diskrete Inf-Sup-Bedingung (2.13). Dann gelten für die eindeutige Lösung des diskreten Problems

$$\begin{aligned} \nu(\nabla u_h, \nabla v_h) - (p_h, \nabla \cdot v_h) &= (f, v_h), \quad v_h \in V_h, \\ -(\nabla \cdot u_h, q_h) &= (g, q_h) \quad \forall q_h \in Q_h \end{aligned}$$

mit $h \in L^2(\Omega)^d$, $g \in L_0^2(\Omega)$ folgende Stabilitätsabschätzungen:

1. $\nabla \cdot [V_h] \subset Q_h \implies$

$$\begin{aligned} \|u_h\|_V &\geq \frac{Cp}{\nu} \|\mathbb{P}(f)\|_{L^2} + \frac{1}{\beta_h} \|g\|_{L^2} \\ \|p_h\|_Q &\geq \frac{Cp}{\beta_h} \|f\|_{L^2} + \frac{\nu}{\beta_h^2} \|g\|_{L^2}. \end{aligned}$$

2. $V \cdot [V_h] \not\subset Q_h \implies$

$$\begin{aligned} \|u_h\|_V &\geq \frac{Cp}{\nu} \|f\|_{L^2} + \frac{1}{\beta_h} \|g\|_{L^2} \\ \|p_h\|_Q &\geq \frac{Cp}{\beta} \|f\|_{L^2} + \frac{\nu}{\beta_h^2} \|g\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Beweis. Man setzt an $u_h = u_h^0 + u_h^\perp$ mit $u_h^0 \in V_{\text{div}}^h$, $u_h^\perp \in V_h^\perp$. Es gilt

$$-\text{div } u_h = -\text{div}_h u_h^\perp \stackrel{!}{=} \Pi_h^{Q_h}(g).$$

Mit Lemma 2.22 existiert ein $u_h^\perp \in V_h^\perp$ mit

$$\|u_h^\perp\|_V \leq \frac{1}{\beta_h} \|\Pi_h^{Q_h} g\|_Q \leq \frac{1}{\beta_h} \|g\|_Q.$$

Testen mit u_h^0 ergibt

$$\begin{aligned} \nu(\nabla \underbrace{u_h}_{u_h = u_h^0 + u_h^\perp}, \nabla u_h^0) - \underbrace{(p_h, \nabla \cdot u_h^0)}_{=0} &= (f, u_h^0) \iff \\ \nu \|\nabla u_h^0\|^2 &= (f, u_h^0). \end{aligned}$$

1. Sei $\nabla \cdot [V_h] \subset Q_h$, dann gilt $\nabla \cdot u_h^0 = 0$ und daraus folgt

$$\begin{aligned} \nu \|\nabla u_h^0\|^2 &= (\mathbb{P}(f), u_h^0) \\ \implies \nu \|\nabla u_h^0\|^2 &\leq C_p \|\mathbb{P}(f)\|_{L^2} \cdot \|u_h^0\|_V \\ \implies \|\nabla u_h^0\| &\leq \frac{C_p}{\nu} \|\mathbb{P}(f)\|_{L^2} \end{aligned}$$

Die Dreiecksungleichung liefert die Abschätzung für $u_h = u_h^0 + u_h^\perp$. Im Fall $[\nabla \cdot V_h] \not\subset Q_h$ ist $\mathbb{P}(f)$ in der Abschätzung durch f zu ersetzen, da $|(f, u_h^0)|$ nur durch $\|f\|_{L^2} \cdot \|u_h^0\|_{L^2}$ abgeschätzt werden kann.

□

Druckabschätzung: Testen mit beliebigen $w_h \in V_h^\perp$ ergibt

$$\begin{aligned}(p_h, \nabla \cdot w_h) &= \nu(\nabla u_h, \nabla w_h) - (f, w_h) \\ &= \nu(\nabla u_h^\perp, \nabla w_h) - (f, w_h) \\ &\leq \left\| \nabla u_h^\perp \right\|_{L^2} \|\nabla w_h\|_{L^2} + C_p \|f\|_{L^2} \cdot \|\nabla w_h\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Setze $w_h \in V_h^\perp$ so, dass gilt:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot w_h &= p_h, \quad \|\nabla w_h\|_{L^2} \leq \frac{1}{\beta_h} \|p_h\|_Q \\ \implies \|p_h\|_Q^2 &\leq \frac{1}{\beta_h} \left\| \nabla u_h^\perp \right\|_{L^2} \cdot \|p_h\|_Q + \frac{C_p}{\beta_h} \|f\|_{L^2} \cdot \|p_h\|_{L^2} \\ \implies \|p_h\|_Q &\leq \frac{\nu}{\beta_h^2} \|g\|_Q + \frac{C_p}{\beta_h} \|f\|_{L^2}.\end{aligned}$$

► *Definition 2.17.* Für $g \in L_0^2(\Omega)$ ist

$$V_{\text{div}}^h(g) = \left\{ v_h \in V_h : \text{div}_h v_h = \Pi_h^{\text{div}} g \right\}.$$

► *Lemma 2.18.* Es gelte wieder (2.13) (diskrete Inf-Sup-Bedingung). Seien $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ die eindeutige Lösung des diskreten Problems für $f \in L^2(\Omega)^d, g \in L_0^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\nu(\nabla u_h, \nabla v_h) - (p_h, \nabla \cdot v_h) &= (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \\ -(\nabla \cdot u_h, q_h) &= (g, q_h), \quad \forall q_h \in Q_h.\end{aligned}$$

Dann gelten:

1. $\|u - u_h\|_V \leq 2 \inf_{w_h \in V_{\text{div}}^h(g)} \|u - w_h\|_V + \frac{1}{\nu} \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q,$
2. $\|p - p_h\|_Q \leq (1 + \frac{1}{\beta_h}) \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q + \frac{\nu}{\beta_h} \|u - u_h\|_V,$
3. $\|u - u_h\|_V \leq 2(1 + C_F) \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_V + \frac{1}{\nu} \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q.$

Beweis. 1. Wegen $u_h \in V_{\text{div}}^h(g)$ folgt für alle $w_h \in V_{\text{div}}^h(g)$ dass $v_h^0 := u_h + w_h \in V_{\text{div}}^h(g)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\nu \|\nabla v_h^0\| &= \nu(\nabla u_h, \nabla v_h^0) - \nu(\nabla w_h, \nabla v_h^0) \\ &= (f, v_h^0) + \underbrace{(p_h, \nabla \cdot v_h^0)}_{=0} - \nu(\nabla w_h, \nabla v_h^0) \\ &= \nu(\nabla u, \nabla v_h^0) - (p, \nabla \cdot v_h^0) - \nu(\nabla w_h, \nabla v_h^0) \\ &= \nu(\nabla u - \nabla w_h, \nabla v_h^0) - (p - q_h, \nabla \cdot v_h^0) \\ &\leq \nu \|\nabla u - \nabla w_h\| \cdot \|\nabla v_h^0\| + \|p - q_h\|_Q \cdot \|\nabla \cdot v_h^0\| \\ \implies \|\nabla v_h^0\| &\leq \|\nabla u - \nabla w_h\|_{L^2} + \frac{1}{\nu} \|p - q_h\|_Q\end{aligned}$$

(($q_h, \nabla \cdot v_h^0$) = 0). Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}\|u - u_h\| &\leq \|u - w_h\|_V + \underbrace{\|w_h - u_h\|_V}_{=v_h^0} \\ &\leq \|u - w_h\|_V + \|v_h^0\|_V \\ &\leq 2 \|u - w_h\|_V + \frac{1}{\nu} \|p - q_h\|_Q \\ \implies \|u - u_h\| &\leq 2 \inf_{w_h \in V_{\text{div}}^h(g)} \|u - w_h\|_V + \frac{1}{\nu} \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q\end{aligned}$$

2.

$$\|p - p_h\|_Q \leq \|p - q_h\|_Q + \|p_h - q_h\|_Q.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \|p_h - q_h\|_Q &\leq \frac{1}{\beta_h} \sup_{0 \neq v_h \in V_h} \frac{(\nabla \cdot v_h, p_h - q_h)}{\|v_h\|_V} \\ &= \frac{1}{\beta_h} \sup_{0 \neq v_h \in V_h} \frac{-\nu(\nabla u - \nabla u_h, \nabla v_h) + (\nabla \cdot v_h, p - q_h)}{\|v_h\|_V} \\ &= \frac{1}{\beta_h} \nu \|u - u_h\|_V + \|p - q_h\|_Q \\ \|p - p_h\| &\leq \left(1 + \frac{1}{\beta_h}\right) \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q + \frac{\nu}{\beta_h} \|u - u_h\|_V \end{aligned}$$

3. Folgt mit (i) und Lemma 2.21?.

□

► *Lemma 2.19.* Seien V_h und Q_h so gewählt, dass $\nabla \cdot [V_h] \subset Q_h$ gilt. Dann gelten die Fehlerabschätzungen

1. $\|u - u_h\|_V \leq 2 \inf_{w_h \in V_{\text{div}}(g)} \|u - w_h\|_V$
2. $\|p - \Pi_h p\|_Q \leq \frac{\nu}{\beta_h} \|u - u_h\|_V$ (hängt nur von u/u_h ab!)
3. $\|p - p_h\|_Q \leq \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q + \frac{\nu}{\beta_h} \|u - u_h\|_V$
4. Sei $g = 0$: $\|u - u_h\|_V \leq \inf_{w_h \in V_{\text{div}}^h} \|u - w_h\|_V$
5. $\|u - u_h\|_V \leq 2(1 + C_p) \inf_{w_h \in V_h} \|u - w_h\|_V$.

Dabei seien (u_h, p_h) Lösungen des entsprechenden Stokes-Problems wie in Lemma 2.18.

Beweis. Zunächst gilt $V_{\text{div}}^h \subset V_{\text{div}}$.

1. $v_h^0 := v_h - w_h \in V_{\text{div}}^h$, wenn $w_h \in V_{\text{div}}^h(g)$ beliebig gewählt ist.

$$\begin{aligned} \nu \|v_h^0\|_V^2 &= \nu(\nabla v_h, \nabla v_h^0) - \nu(\nabla w_h, \nabla v_h^0) \\ &= (f, v_h^0) - \underbrace{(p_h, \nabla \cdot v_h^0)}_{=0} - \nu(\nabla w_h, \nabla v_h^0) \\ &= \nu(\nabla u, \nabla v_h^0) - \underbrace{(p, \nabla \cdot v_h^0)}_{=0, \text{ da } V_{\text{div}}^h \subset V_{\text{div}}} - \nu(\nabla w_h, \nabla v_h^0) \\ &= \nu(\nabla(u - w_h), \nabla v_h^0) \\ &\leq \nu \|\nabla u - \nabla w_h\|_{L^2} \cdot \|\nabla v_h^0\| \\ \implies \|\nabla v_h^0\|_V &\leq \|u - w_h\|_V \end{aligned}$$

Dreiecksungleichung:

$$\|u - u_h\|_V \leq \|u - w_h\|_V + \|v_h^0\|_V \leq 2 \|u - w_h\|_V.$$

2.

$$\begin{aligned}
(\Pi_h p - p_h, \nabla \cdot v_h) &= (\Pi_h p, \nabla \cdot v_h) + (f, v_h) - \nu(\nabla u_h, \nabla v_h) \\
&= (\Pi_h p, \nabla \cdot v_h) + \nu(\nabla u, \nabla v_h) - \underbrace{(p, \nabla \cdot v_h)}_{=(\Pi_h p, \nabla \cdot v_h), [\nabla \cdot V_h] \subset Q_h} - \nu(\nabla u_h, \nabla v_h) \\
&= \nu(\nabla u, \nabla v_h) - \nu(\nabla u_h, \nabla v_h) \\
\Rightarrow \|\Pi_h p - p_h\|_Q &\leq \frac{\nu}{\beta_h} \sup_{0 \neq v_h \in V_h} \frac{\nu(\nabla u - \nabla u_h, \nabla v_h)}{\|\nabla v_h\|_{L^2}} \\
&\leq \frac{\nu}{\beta_h} \|u - u_h\|_V
\end{aligned}$$

3.

$$\|p - p_h\|_Q \leq \underbrace{\|p - \Pi_h p\|_Q}_{\inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|} + \|\Pi_h p - q_h\| + \frac{\nu}{\beta_h} \|u - u_h\|_V$$

4. Sei $g = 0$: Für alle $v_h^0 \in V_{\text{div}}^h$ gilt:

$$\begin{aligned}
\nu(\nabla u_h, \nabla v_h^0) - \underbrace{(p_h, \nabla \cdot v_h^0)}_{=0} &= (f, v_h^0) \\
&= \nu(\nabla u_h, \nabla v_h^0) - \underbrace{(p, \nabla \cdot v_h^0)}_{=0} \\
\Rightarrow (\nabla u - \nabla u_h, \nabla v_h^0) &= 0 \quad \forall v_h^0 \in V_{\text{div}}^0 \\
\|u - u_h\|_V^2 &= (\nabla u - \nabla u_h, \nabla u - \nabla u_h) \\
&= (\nabla u - \nabla u_h, \nabla u - \nabla(\underbrace{u_h^0}_{=: w_h})) \\
&= (\nabla u - \nabla u_h, \nabla u - \nabla w_h) \\
&\leq \|u - u_h\|_V \cdot \|u - w_h\|_V \\
\Rightarrow \|u - u_h\| &\leq \inf_{w_h \in V_{\text{div}}^h} \|u - w_h\|_V.
\end{aligned}$$

5. klar, Fortin-Interpolator.

□

► *Beispiel 2.20.* Beispiele von Paaren (V_h, Q_h) von Räumen, die die diskrete Inf-Sup-Bedingung verletzen.

► *Bemerkung 2.21.* Einfache Paare von FEM-Räumen

Die einfachsten und gebräuchlichsten FEM-Räume sind stetige, stückweise affine Polynome (P_1 -Funktionen) auf Simplizes oder bilineare Funktionen Q_1 auf Vierecken bzw. trilineare Funktionen (Q_1) auf Hexaedern in 3D. Der einfachste konforme Druckraum ist P_0 , die Untersuchung der diskreten Inf-Sup-Konstanten für das P_1 - P_1 oder P_1 - P_0 oder Q_1 - P_0 -Element (jeweils V_h - Q_h) zeigt aber, dass diese Räume nicht Inf-Sup-stabil sind.

► *Beispiel.* $P_1 - P_1$ -Element

Ein Element, das man gerne verwenden würde, wäre das (unstabilisierte) $P_1 - P_1$ -Element. Aber $P_1 - P_1$ ist im Allgemeinen nicht inf-sup-stabil. Sei K ein Druck, und seien $q_{1,k}^l$, $q_{2,k}^l$ und $q_{3,k}^l$ die Druckwerte in den Knoten von K . Dann kann das Integral

$$\int_K q_K dx = \frac{1}{3} |K| (q_{1,k}^l + q_{2,k}^l + q_{3,k}^l)$$

exakt ausgewertet werden. Die Integralmittelwertbedingung $q_K \in L_0^2(\Omega)$ für die diskreten Drücke lautet

$$0 = \int_{\Omega} q_K dx = \sum_K \int_K dx = \sum_K \frac{|K|}{3} (q_{1,k}^l + q_{2,k}^l + q_{3,k}^l). \quad (2.16)$$

Es wird nun eine Druckmode $q_h \in Q_h$ konstruiert, sodass $(\nabla \cdot v_h, q_h) = 0$ für alle $v_h \in V_h$. Auf jedem Dreieck gilt

$$\begin{aligned} v_h|_K &= \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + \gamma_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + \gamma_2 \end{pmatrix} \\ \implies \nabla \cdot v_h &= a_{11} + a_{22} = c_K \\ \implies - \int_{\Omega} (\nabla \cdot v_h) q_h dx &= - \sum_K \int_K (\nabla \cdot v_h) q_h dx \\ &= - \sum_K c_K \int_K q_h dx = - \sum_K \frac{|K|}{3} c_K \underbrace{(q_{1,k}^l + q_{2,k}^l + q_{3,k}^l)}_{\stackrel{!}{=} 0} \\ &\stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Man konstruiert also eine Druckmode, indem man q_h so wählt, dass $q_{1,k}^l + q_{2,k}^l + q_{3,k}^l = 0$ für alle $K \in \mathcal{T}_h$ gilt. Dann ist auch automatisch die Untegralmitteleigenschaft (2.16) erfüllt. Zwei solche Druckmoden sind gegeben durch:

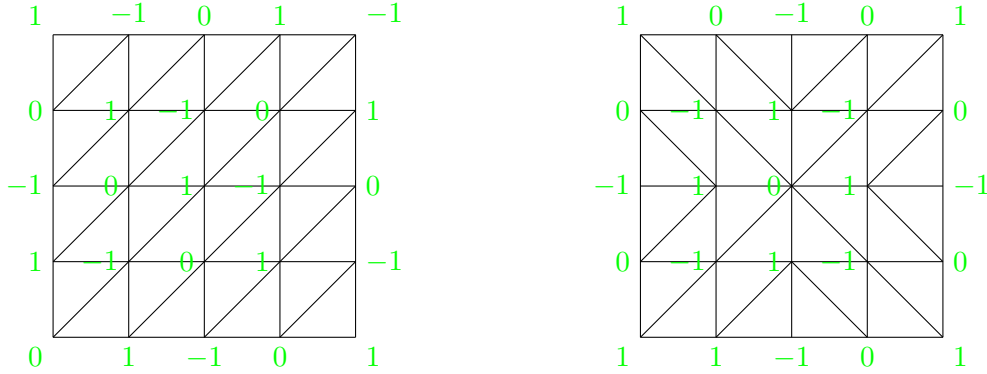


Figure 1: Schachbrettinstabilitäten, $n = 4$

Diese Druckmoden heißen **Schachbrettinstabilitäten**.

► *Beispiel 2.22.* Das $P_1 - P_0$ -Element

Die diskrete Inf-Sup-Bedingung erzwingt, dass der diskrete Druckraum genügend klein ist. Für das $P_1 - P_1$ -Element gilt das nicht. Beim $P_1 - P_0$ -Element versucht man, dies mit Funktionen niedrigerer Ordnung für den Druck. Für $P_1 - P_0$ gilt $\nabla \cdot [P_1] \subset P_0$, das heißt, diskret divergenzfreie Funktionen sind divergenzfrei im schwachen Sinn.

$$\begin{aligned} u_h \in V_{\text{div}}^h : \int_{\Omega} (\nabla \cdot u_h) q_h dx &= 0 \quad \forall q_h \in Q_h \\ q_h &= \nabla \cdot [P_1] \subset P_0 \\ \implies \int_{\Omega} (\nabla \cdot u_h)^2 dx &= 0 \implies \nabla \cdot u_h = 0 \end{aligned}$$

Das $P_1 - P_0$ Element erfüllt jedoch im Allgemeinen die diskrete Inf-Sup-Bedingung nicht. Auf dem obigen Gitter haben ein P_1 -Druck (25-1) Freiheitsgrade und P_0 (32-1) Freiheitsgrade. Deshalb sind Druckmoden zu erwarten. Darüberhinaus kann es zu einem sogenannten *Locking* kommen. Um zu zeigen, dass störende Druckmoden (spurious oscillations) auftreten können, betrachten wir ein strukturiertes Gitter vom obigen Typ mit $2n^2$ Dreiecken, $n > 1$. Dann

$$\dim V_h = 2(n-1)^2$$

(Anzahl der inneren Knoten, mit zwei Geschwindigkeitskomponenten). Weiter gilt

$$Q_h = 2n^2 - 1.$$

Es folgt

$$\dim V_h - \dim Q_h = \dim V_{\text{div}}^h = 2n^2 - 4n + 2 - 2n^2 + 1 = -4n + 3 < 0,$$

für $n \geq 1$. Folglich ist die notwendige Bedingung $\dim(V_h) \geq \dim(Q_h)$ nicht gegeben. Deshalb sind mindestens $(4n-3)$ Zeilen von B_h abhängig. Deshalb gibt es einen Unterraum der Dimension $4n-3$, sodass für alle q_n aus diesem Unterraum gilt $-(\nabla \cdot v_h, q_h)$ für alle $v_h \in V_h$. Man kann dieses einfache Beispiel auf komplexe Gebiete und Triangulierungen verallgemeinern.

Nun zum Locking-Phänomen: Betrachte $\Omega = (0,1)^2$ mit der gezeichneten Triangulierung. Die

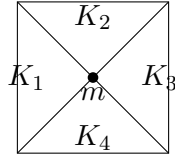


Figure 2: Triangulierung

stückweise konstanten Drücke auf K_i , $i = 1, \dots, 4$, seien mit q_h^1, \dots, q_h^4 bezeichnet. Aus $q_h = q_n^1 + q_n^2 + q_n^3 + q_n^4 \in L_0^2(\Omega_h)$ folgt

$$\int_{\Omega} q_h dx = 0 \iff q_n^1 + q_n^2 + q_n^3 + q_n^4 = 0,$$

da alle Dreiecke K die gleiche Fläche haben. Es gibt also drei unabhängige Druckfreiheitsgrade. Eine Funktion $v_h \in V_{\text{div}}^h$ muss also drei unabhängige Bedingungen erfüllen. Eine Funktion $u_h \in V_h$ hat jedoch nur zwei unabhängige Freiheitsgrade (im Mittelpunkt des Gitters).

Sei $v_h = (u_h^1, u_h^2)^T$, dann gilt

$$\begin{aligned} \nabla \cdot v_h|_{K_1} &= \frac{u_h^1(m)}{\frac{1}{2}} = -\nabla \cdot v_h|_{K_3} \\ \nabla \cdot v_h|_{K_4} &= \frac{u_h^2(m)}{\frac{1}{2}} = -\nabla \cdot v_h|_{K_2}. \end{aligned}$$

Falls $v_h \in V_{\text{div}}^h$ sein soll, muss gelten

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla \cdot v_h, q_h) = |K_1| (q_h^1 \nabla \cdot v_h|_{K_1} + q_h^2 \nabla \cdot v_h|_{K_2} + q_h^3 \nabla \cdot v_h|_{K_3} + q_h^4 \nabla \cdot v_h|_{K_4}) \\ &= |K_1| (2u_h^1(m)q_h^1 - 2u_h^1(m)q_h^3 - 2u_h^2(m)q_h^2 + 2q_h^2(m)(-q_h^1 - q_h^2 - q_h^3)) \\ &= |K_1| (2u_h^1(m)(q_h^1 q_h^3) - 2u_h^2(m)(2q_h^2 + q_h^1 + q_h^3)) \end{aligned}$$

für beliebige q_h^1, q_h^2, q_h^3 . Setze $q_h^1 = 1, q_h^3 = 0$, dann folgt $u_h^2 = 0$. Setze $q_h^3 = 0, q_h^2 = 0$, dann folgt $u_h^1 = u_h^2 = 0$. Schließlich folgt $V_{\text{div}}^h = \{0\}$.