TU Dresden Sommersemester 2015
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften – Fachrichtung Mathematik
Dr. A. Linke

3. Übungsblatt zur Vorlesung Ma-PDENMW

Aufgabe 3.1

Sei $v \in H^1(0,1)$ gegeben. Schreiben Sie dann explizit einen Spuroperator für $v(0)$ und $v(1)$ hin, der mit Hilfe von Integralen über v und v' geschrieben wird.

Aufgabe 3.2

Sei $v \in H_0^1(a,b)$ gegeben. Beweisen Sie, dass eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass die folgende Poincaré-Ungleichung gilt:

$$\|v\|_{L^2(a,b)} \leq C\|v'\|_{L^2(a,b)}.$$

Aufgabe 3.3

a) Sei $\varphi \in C^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\nabla \times \nabla\varphi = \mathbf{0}.$$

b) Sei $\boldsymbol{\psi} \in C^2(\Omega)^3$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\psi}) = \mathbf{0}.$$

Aufgabe 3.4

Für ein Vektorfeld $\mathbf{f} \in L^1(\Omega)^3$ sei die distributionelle Rotation definiert durch:

$$\boldsymbol{\psi} \in C_0^\infty(\Omega)^3 \to \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\psi}\, dx.$$

Existiert $\boldsymbol{\vartheta} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)^3$, so dass für alle $\boldsymbol{\psi} \in C_0^\infty(\Omega)^3$ gilt:

$$\int_\Omega \mathbf{f} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\psi}\, dx = \int_\Omega \boldsymbol{\vartheta} \cdot \boldsymbol{\psi}\, dx,$$

so besitzt $\mathbf{f}$ im schwachen Sinn die Rotation $\boldsymbol{\vartheta}$.
Zeigen Sie: Für alle $\varphi \in H^1(\Omega)$ gilt: $\nabla\varphi$ ist in schwachem Sinne rotationsfrei.