A kozmológiai távolságszámítás alapjai

Dobos László
Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék
dobos@complex.elte.hu
É 5.60

2015. február 17.

A vöröseltolódás

Spektrumvonalak abszorpciós és emissziós vonalaiból.

$$1 + z = \frac{\lambda_{\text{megfigyelt}}}{\lambda_{\text{kibocsátott}}}$$

Ha relatív mozgásból adódik, akkor a neve Doppler-eltolódás:

$$z \approx \frac{v}{c}$$

Relativisztikusan:

$$1 + z = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}, \quad \frac{v}{c} = \frac{(1 + z)^2 - 1}{(1 + z)^2 + 1}$$

A homogén, izotróp Univerzum modellje

Einstein-egyenletek:

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker-metrika (FLRW):

$$-c^2 \,\mathrm{d}\tau^2 = -c^2 \,\mathrm{d}t^2 + a(t)^2 \cdot \left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1 - kr^2} + r^2 \left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \,\mathrm{d}\phi^2 \right) \right]$$

- homogén, izotróp univerzum
- $a(t)$: skálaparaméter, mai értéke $a(t_0) = a_0$
- $k \in \{-1, 0, +1\}$: görbület, ami
  hiperbolikus, sík vagy gömbi geometriát jelent.
- r dimenziótlan, $a(t)$ hosszúság dimenziójú

A Friedmann-egyenletek

Termodinamikai egyensúlyban az Einstein-egyenletek jobb oldalán szereplő $T_{\mu\nu}$ alakja:

$$T^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^\alpha u^\beta + p g^{\alpha\beta}$$

Ez a táguló koordinátákkal együtt mozgó inerciális rendszerben diagonális.

A FLRW-metrikát az Einstein-egyenletekbe helyettesítve kapjuk a Friedmann-egyenleteket:

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho + \Lambda c^2}{3}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

A Hubble-paraméter és a sűrűségparaméter

A Hubble-paraméter a skálaparaméterből definiálható: $H = \frac{\dot{a}}{a}$
Mai értéke H_0, amit történeti okokból hívunk állandónak.

Nézzük $k = 0$ és $\Lambda = 0$ esetre az első Friedmann-egyenletet, és vezessük be a ρ_c kritikus sűrűséget: ($\rho_c \approx 3$ H atom m^{-3})

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} \quad \Rightarrow \quad \rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}$$

Bevezetjük az Ω sűrűségparamétereket:

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}$$

A különböző sűrűségparaméterek

További sűrűségparaméterek a különböző komponensekre:

$$\Omega_\mathrm{M} = \frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}$$

A görbületre vonatkozó Ω_k paramétert az $1 = \Omega_\mathrm{M} + \Omega_\Lambda + \Omega_k$ összefüggés definiálja. Sík Univerzum: $\Omega_k = 0$, egyébként lehet gömbi ($k = +1$) vagy hiperbolikus ($k = -1$) geometriájú.

Az első Friedmann-egyenlet átírható:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_\mathrm{M} a^{-3} + \Omega_k a^{-2} + \Omega_\Lambda$$

ΛCDM paraméterei (Planck-űrtávcső):

$$H_0 = 67 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad \Omega_M = 0.32 \quad \Omega_\Lambda = 0.68$$

A kozmológiai vöröseltolódás és az együtt mozgó távolság

Az ún. szuperluminális sebességeket az általános relativitás megengedi. A látszólagos sebesség nem mozgásból származik (a lokális inerciarendszerben a sebesség lehet akár 0 is), hanem a tér metrikájának változásából, ami FRLW esetben a skálaparaméter változását jelenti:

$$1 + z = \frac{a_{\text{megfigyeléskor}}}{a_{\text{kibocsátáskor}}}$$

Vegyünk két porszemcsét, amelyek a lokális incerciális rendszerben nyugalomban vannak. Ezeket a Hubble-áramlattal együtt mozgónak nevezzük. A távolságuk a skálaparaméterrel skálázik, így kifejezhető z függvényében is. Ez lesz a δD_{C} együtt mozgó távolság.

Az együtt mozgó távolság kifejezése

Az együtt mozgó távolság időben folyamatosan nő, ezért ha egy galaxist z vöröseltolódáson látunk, fel kell integrálnunk ezt a változást z-ig.

Az első Friedmann-egyenlet korábbi átírásából definiálunk egy új kifejezést:

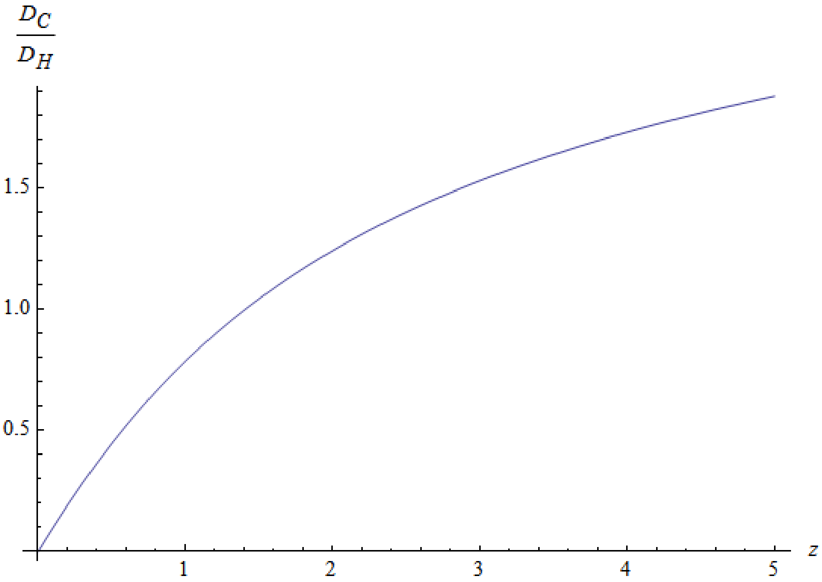
$$E(z) \equiv \sqrt{\Omega_\mathrm{M}(z+1)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda} = \frac{H(z)}{H_0(z)}$$

Rövid számolás után belátható, hogy van értelme egy galaxis együtt mozgó távolságát a

$$D_\mathrm{C} = D_H \int_0^z \frac{\mathrm{d}z'}{E(z')}$$

alakban definiálni. $D_H = \frac{c}{H_0} \approx 4500$ Mpc a Hubble-távolság.

Együtt mozgó távolság



Még két további távolság

Az égen két, egymástól $\delta\vartheta$ szögtávolságra levő, de azonos vöröseltolódású objektum együtt mozgó távolságát a *transzverzális együtt mozgó távolság*ból számolhatjuk $\delta\vartheta D_\mathrm{M}$ módon; ez definiálja a D_M mennyiséget. Sík téridőben ($\Omega_k = 0$) fennáll, hogy $D_\mathrm{M} = D_\mathrm{C}$.

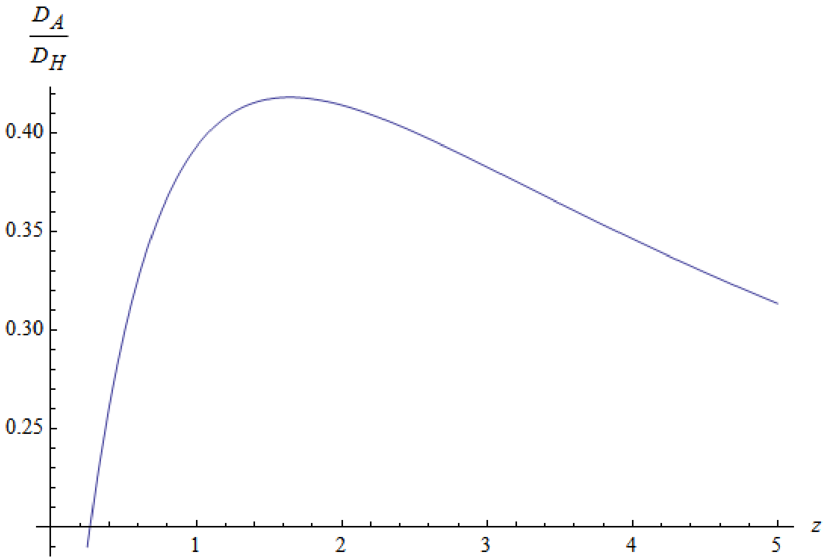
Fontos: míg két, a Hubble-áramlattal együtt mozgó galaxis távolsága a tágulás miatt folyamatosan nő, a galaxisok fizikai mérete nem változik, hiszen azok gravitációsan kötött rendszerek, nem tágulnak.

Ezért van értelme a szögátmérő-távolság bevezetésének, ami a fizikai átmérő és a látszólagos szögátmérő aránya, kis számolás után történetesen:

$$D_A = \frac{D_M}{1+z}$$

A szögátmérő-távolság egysége a Mpc/rad, de szokás kpc/”-ben is kifejezni.

Szögátmérő-távolság



A kozmológiai luminozitástávolság

Korábban már felírtuk a fluxust:

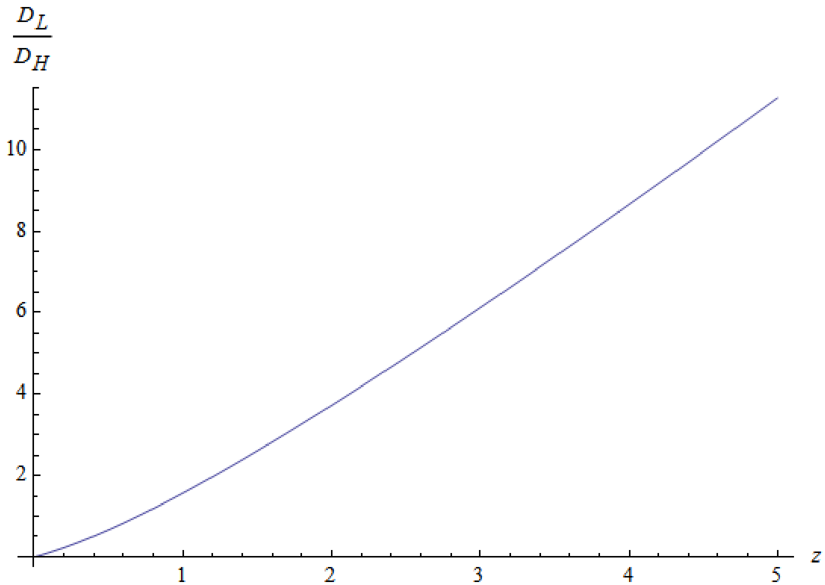
$$F = \frac{L}{4\pi D_L^2}$$

- A fotonok vörösödnek, azaz az energiájuk $1+z$-ed részre csökken
- Relativitáselméletben fellép az idődilatáció, azaz a fotonok „ritkábban érkeznek”, mint amilyen gyakran kibocsátódnak; ez egy újabb $1+z$ faktort okoz:

$$F = \frac{L}{4\pi D_M^2 (1+z)^2}$$

$$\Rightarrow \quad D_L = (1+z) D_M = (1+z)^2 D_A$$

Luminozitástávolság



Hubble első mérései

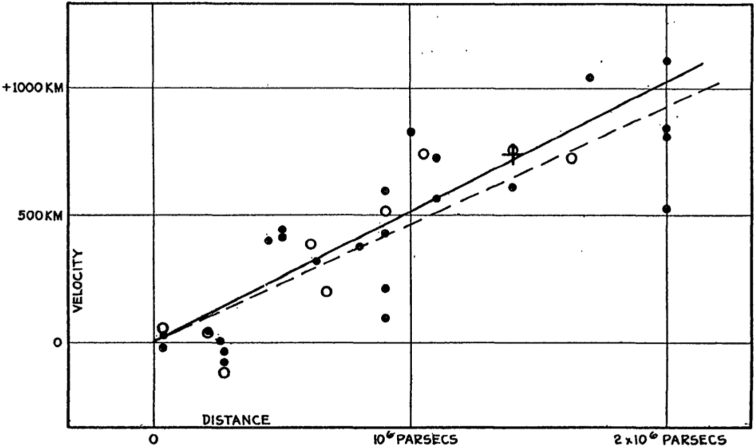


FIGURE 1

Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae.

A Hubble-törvény

A törvény csak egy kis távolságokon (kis z-n) érvényes lineáris közelítés:

$$v = H_0 \cdot D_L$$

Kozmológiai távolságokon már az egzakt formulákat kell használni.

Pl.: az Ia típusú szupernóva mérések kiértékelésekor a $D_L(z, \Omega_M, \Omega_\Lambda)$ összefüggésben illesztik az Ω paramétereket.

Távolságmodulusz

Abszolút magnitúdó:

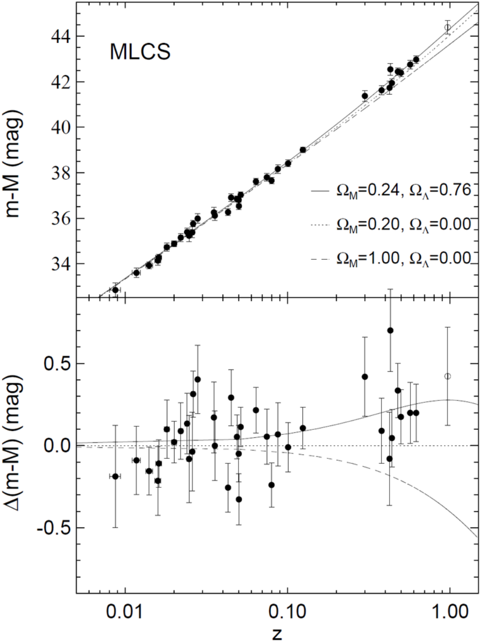
$$\begin{aligned} M &= m - DM = -2.5 \log_{10} F - DM \\ &= -2.5 \log_{10} \left[\frac{L}{4\pi (10 \text{ pc})^2} \right] \\ &= -2.5 \log_{10} \left[\frac{L}{4\pi D_L^2} \cdot \frac{D_L^2}{(10 \text{ pc})^2} \right] \\ &= -2.5 \log_{10} \left[\frac{L}{4\pi D_L^2} \right] - 5 \log_{10} \left[\frac{D_L}{10 \text{ pc}} \right] \end{aligned}$$

A távolságmodulusz:

$$DM = 5 \cdot \log_{10} D_L - 5$$

A fenti formulákban $[D_L] = \text{pc}$, kozmológiában általában $[D_L] = \text{Mpc}$!

Standard gyertya távolságmodulusza

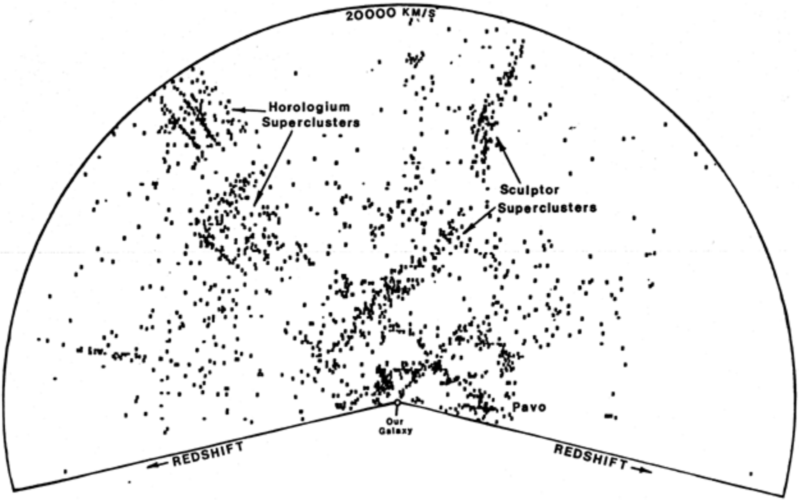


A pekuliáris sebesség és a vöröseltolódás

Az objektumok saját sebessége Doppler-eltolódásként jelenik meg. Ez hozzáadódik (pozitív vagy negatív előjellel) a kozmológiai vöröseltolódáshoz.

- Galaxishalmazokban a pekuliáris sebesség egész nagy lehet: $v_{\mathrm{pec}} \lesssim 1000$ km s^{-1}
- „Isten ujjai"-effektus (fingers of god)
  A klaszterek radiális (z) irányban elnyúltan jelennek meg, mint ha felénk mutatnának.
- A galaxishalmaz pontos felépítését ezért nem is tudjuk kimérni!

„Isten ujjai”-effektus



A gravitációs vöröseltolódás

A teljes vöröseltolódás:

$$z = z_{\text{Hubble}} + z_{\text{Doppler}} + z_{\text{Gravitációs}}$$

A gravitációs vöröseltolódás nem kapcsolódik mozgáshoz:

- Szemléletesen: A mély gravitációs potenciálból érkező foton energiát veszít, ezért vörösödik.
- GR magyarázat: szerinte alapján a mély potenciálban levő órák lassabban járnak.
- Fontos kozmológiai következménye a Sachs–Wolfe-effektus