

Véletlen fizikai folyamatok, első házi feladat

Horváth Bendegúz

2018. február 24.

1. feladat

A feladat szövege

Véletlen és valóság.

(a) Próbéljunk emlékezni arra az eseményre, amivel kapcsolatban először gondoltunk véletlenszerűsége. Miért tekintettük az eseményt véletlennek, s mit gondoltunk a jelenség háttéréről?

(b) Emlékezzünk olyan, az életünkben megtörtént eseményre, amikor kiszámoltunk valószínűségeket (az adott ismereteinkből kiindulva), s ezek a valószínűségek határozták meg a tetteinket!

A feladat megoldása

(a) Emlékeim szerint legelőször valamilyen társasjáték során, a dobokockával való dobás miatt gondoltam véletlenszerűsége. Azért tekintettem véletlenszerűnek, mert sehogy sem tudtam befolyásolni a kimenetelét a dobásnak. A jelenség háttéréről nem gondolkodtam komolyan, de sejtettem, hogy a kocka szimmetriái miatt nincsen kitüntetett irány, amit jobban "kedvelne" a kocka, így mindegyik számnak ugyanakkora az esélye, hogy kijön.

(b) Középiskolában -például történelemórán- a felelőt úgy választotta a tanár, hogy az felelt, akinél kinyílt a napló. Körülbelüli valószínűséget számoltam minden óra után, hogy mekkora a valószínűsége, hogy legközelebb én felelek, és ez alapján készültem fel az órára. Számításaimban figyelembe vettem, hogy a napló elején és végén sokkal kisebb valószínűséggel nyílik ki. Amikor $P \approx 1/13$ -ad volt a valószínűség, elkezdtem alaposabban készülni.

2. feladat

A feladat szövege

Feldobott érme leesése után egyenlő valószínűséggel fej (F) vagy írás (I).

(a) Dobjuk fel az érmét kétszer. Milyen valószínűséggel kapunk két fejet (FF), illetve fej-írás (FI) sorrendet? Ugyanaz a két valószínűség?

(b) Játsszuk a következő játékot! Addig dobálunk, amíg vagy két fej (FF - én nyerek), vagy fej-írás (FI - te nyersz) jön ki. Igazságos ez a játék?

A feladat megoldása

(a) Két kimenetelű rendszernek tekinthető a feldobott érme rendszere, egyforma valószínűségű végkimenetekkel, így $P(F) = \frac{1}{2}$ a fej valószínűsége, és $P(I) = \frac{1}{2}$ az írás valószínűsége. Két dobás kimenetele a valószínűségek szorzata:

$$P(F,F) = P(F) \cdot P(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(F,I) = P(F) \cdot P(I) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(I,I) = P(I) \cdot P(I) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(I,F) = P(I) \cdot P(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

A valószínűség $P = \frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi események száma}}$ értelmezésével az elemi események FF, IF, FI, II , kijön az előbbi végeredmény, hogy a két valószínűség egyforma, értékük $\frac{1}{4}$.

(b) A dobások kimenetelei nem függenek az előző dobás végeredményétől. Az játékban az első fej kimenetel után a következő dobással valaki nyer, vagy FI vagy FF sorozat lesz belőle. Mind a kettőnek 0.5 a valószínűsége, mind a kettőnek ugyanannyi esélye van nyerni, így igazságos a játék. Ha a sorrend nem számít, tehát FI és IF esetén is én nyerek, akkor a játék nem igazságos, egy I után 1 a valószínűsége, hogy én nyerek, hiszen folyamatosan dobva ameddig I -t dobunk, én nem nyerek és ellenfelem se nyerhet, amennyiben fej azonnal nyerek.

3. feladat

A feladat szövege

Egydimenziós mozgást végző részecske τ időközönként véletlen irányú erő hatására előző helyzetétől l távolságra ugrik (egyenlő $p_+ = p_- = \frac{1}{2}$ valószínűséggel jobbra vagy balra). A részecske az $x_0 = 0$ pontból indul. Határozzuk meg a $t = N\tau$ idő alatti elmozdulás és az elmozdulás négyzetének átlagát, $\langle x_t \rangle$ -t és $\langle x_t^2 \rangle$ -t! Vizsgáljuk a fenti problémát $p_+ = 3p_-$ esetre és számítsuk ki az $\langle x_t \rangle$, $\langle x_t^2 \rangle$, és $\langle x_t^2 \rangle - \langle x_t \rangle^2$ átlagokat!

A feladat megoldása

A lépések összessége egy N és p , paraméterű binominális eloszlást követ, ahol N az események száma, p pedig a valószínűsége az egyik eseménynek. Így kiszámolhatjuk, hogy mennyi a jobbra lépések számának várható értéke, mennyi a balra lépések számának várható értéke, és ebből számolható az x_t távolság várható értéke. A binominális eloszlás képlete általános esetre:

$$P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}.$$

Várható értéke:

$$\langle X \rangle = Np.$$

A mi feladatunkban N db ugrás van, egy ugrással $\pm l$ távolságot tesz meg. A pozitív irányba történő ugrások számának várható értéke $Np_+ = \frac{N}{2}$, amivel $\frac{Nl}{2}$ távolságot tesz meg jobbra. A negatív irányba való ugrásokkal számolva is ez jön ki, csak más előjellel. A kettő összege 0-t ad. Így:

$$\langle x_t \rangle = 0.$$

Az $\langle x_t^2 \rangle$ -et a szórásból számolhatjuk,

$$\sigma = \sqrt{\langle x_t^2 \rangle - \langle x_t \rangle^2},$$

binominális eloszlásnál $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. A képletbe behelyettesítve $\sigma_{\text{lépések}} = \sqrt{N}/2$ jön ki, ezt átírva távolságra $\sigma_{x_t} = \sqrt{N} \cdot l/2$, aminek a négyzete megegyezik $\langle x_t^2 \rangle$ -vel.

$$\langle x_t^2 \rangle = \frac{N \cdot l^2}{4}.$$

A másik esetben, amikor $p_+ = 3p_- = 0.75$ a számolási módszerek hasonlóak, az eredmények az új paraméterekkel:

$$\langle x_t \rangle = l \cdot N \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{N \cdot l}{2},$$

$$\sigma^2 = \langle x_t^2 \rangle - \langle x_t \rangle^2 = l^2 \cdot N \cdot \frac{3}{16},$$

$$\langle x_t^2 \rangle = \sigma^2 + \langle x_t \rangle^2 = l^2 \left(\frac{N^2}{4} + \frac{3N}{16} \right) = l^2 \frac{4N^2 + 3N}{16}$$

4. feladat

A feladat szövege

Vizsgáljuk a Brown mozgás előadáson tárgyalt, Einstein féle leírását, s legyen sodródás is a rendszerben (szél fúj a víz felett). Ekkor a τ időnként megtett ugrások hosszának (Δ) valószínűségi eloszlása nem szimmetrikus $\Phi(-\Delta) \neq \Phi(\Delta)$, s várhatóan $\Delta = \Delta\Phi(\Delta)d\Delta \neq 0$.

(a) Írjuk fel a Chapman-Kolmogorov egyenletet, s deriváljuk a részecske megtalálási valószínűségét, $P(x, t)$ -t meghatározó Fokker-Planck egyenletet! Mennyiben különbözik ez az egyenlet az előadáson tárgyalt diffúziós egyenlettől?

(b) Írjuk fel az egyenlet megoldását arra az esetre, ha a virágporszem az origóból indul!

A feladat megoldása

(a) A Chapman-Kolmogorov egyenlet a következőképpen néz ki:

$$P(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) P(x - \Delta, t) d\Delta.$$

Ez azon valószínűségek összege, hogy a részecske $x - \Delta$ -ban volt t időpillanatban és pont Δ -t ugrott. Sorba fejtvé:

$$P(x, t) + \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} \tau = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta P(x, t) - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) \Delta d\Delta \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) \Delta^2 d\Delta \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}.$$

A valószínűségeloszlás függvény nem szimmetrikus, de az $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta$ integrál továbbra is egyet ad, így az egyenlet rövidebb lesz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} \tau &= - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) \Delta d\Delta \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) \Delta^2 d\Delta \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} \tau &= -\bar{\Delta} \cdot \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{\overline{\Delta^2}}{2} \cdot \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Az így kapott egyenlet annyiban különbözik az előadáson tárgyalt diffúziós egyenlettől, hogy benne maradt a Δ várható értékével szorozódó, helyszerint egyszerűen derivált valószínűség, negatív előjellel.

(b) A Fokker-Planck egyenlet megoldható, ha ismerjük a kezdeti eloszlásfüggvényt[?], ami esetünkben, ha a részecske az origóból indul:

$$P(x, t = 0) = \delta(x)$$

Vezessünk be egy új jelölést, $\frac{\bar{\Delta}}{\tau} \equiv v$, ahol v az átlagos sebességnek felel meg. Ezzel az egyenlet:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -v \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2},$$

D az előadáson is használt diffúziós együttható. Valamilyen ügyes transzformációval a v -s tagot ki kell ejteni, hogy megoldhatóbb legyen az egyenlet. Legyen egy változó transzformáció, a koordináta-rendszer mozogjon v sebességgel:

$$P(x, t) = W(x - vt, t) = W(y, t)$$

Ekkor az egyenletünk a következőre módosul:

$$\frac{\partial W(y, t)}{\partial t} - v \frac{\partial W(y, t)}{\partial y} = -v \frac{\partial W(y, t)}{\partial y} + D \frac{\partial^2 W(y, t)}{\partial y^2}$$

Így kiesnek a v -s tagok, és az egyenlet az előadáson megoldott egyenletre egyszerűsödik, aminek megoldása:

$$W(y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{y^2}{4Dt}}$$

Ebből a P -t az y visszatranszformálásával kaphatjuk meg:

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}$$

A megoldás kielégíti a kezdeti feltételt is, $\lim_{t \rightarrow 0} P(x, 0) = \delta(x)$.

Hivatkozások

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Fokker-Planck_equation