Véletlen fizikai folyamatok, hatodik házi feladat

Horváth Bendegúz

2018. március 27.

1. feladat

A feladat szövege

Lokalizált mágneses momentum (μ) z-tengely irányú B mágneses térben van. A mágneses momentum (μ) a tér irányában $\pm\mu B$ értéket vehet fel, s ezekben az állapotokban energiája $\mp\mu_B B$. A mágneses momentum T hőmérsékletű könyezettel van egyensúlyban, s kölcsönhatás eredményeképpen μ billeg a $-\mu B$ és $+\mu B$ állapotok között ($-\mu B \leftrightarrow +\mu B$).
(i) Írjuk fel a folyamat master egyenletét!
(ii) Válasszunk olyan átmeneti rátákat, amelyek kielégítik a részletes egyensúly elvét!
(iii) Határozzuk meg az átlagos mágneses momentum $\langle\mu(t)\rangle$ időfejlődését, ha kezdetben (t = 0) a mágneses momentum a z-tengely pozitív irányába mutatott.

A feladat megoldása

(i) A rendszer két állpot között változik, így ezekre az állapotokra felírva a master egyenlet:

$$\partial_t P_{-\mu}(t) = -w_0 P_{-\mu}(t) + w P_{mu}(t)$$

$$\partial_t P_{\mu}(t) = w_0 P_{-\mu}(t) - w P_{\mu}(t)$$

Az egyenletekben $P_{\pm\mu}(t)$ a $\pm\mu$ állapotban tartózkodás valószínűségét jelöli.
(ii) Először próbáljuk meg megoldani a sajátértékegyenletet:

$$\partial_t \begin{pmatrix} P_{-\mu}(t) \\ p_{+\mu}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_0 & w \\ w_0 & -w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{-\mu}(t) \\ p_{+\mu}(t) \end{pmatrix}$$

Az Ising-spinrendszerhez hasonlóan, a $P^{(e)}_{\pm\mu} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(\mp\mu B)}$. A sajátértékek a számolás után a következőknek adódnak: $\lambda_1 = 0$, ez az egyensúlyi állapothoz tarozik, és $\lambda_2 = -(w_0 + w)$. Ezek után a részletes egyensúlyi elvét kielégítő átmeneti rátákat kell meghatározni. Legyen

$$\frac{w_{n,n'}}{w_{n',n}} = e^{-\beta(E_{n'} - E_n)}$$

Ha $\Delta E = (E_{n'} - E_n) > 0$, akkor az átmeneti ráta

$$w_{n',n} = \frac{1}{\tau} e^{-\beta(E_{n'} - E_n)}.$$

A $\Delta E = \pm 2\mu_B B$ és pozitív, ha felfelé álló állapotból lefelé álló állapotba ugrott a mágneses momentum. Ha $\Delta E < 0$, akkor $w_{n',n} = \frac{1}{\tau}$, τ az urgások közti idő. Így

$$w_0 = \frac{1}{\tau}$$

$$w = \frac{1}{\tau} e^{-\beta 2\mu_B B}$$

megkaptuk az átmeneti rátákat.
(iii) Az előző feladatrészben kiszámoltuk a sajátértékeket, így az állapotban tartózkodás valószínűségét leíró vektort a következő módon kaphatjuk meg:

$$\vec{P}(t) = \vec{P}^{(e)} + e^{\lambda_2 t} a_2 \vec{P}_2$$

Az a_2 együtthatót a kezdeti feltételből határozhatjuk meg, ami esetünkben

$$\vec{P}(0) = (0,1)^T = \vec{P}^{(e)} + a_2 \vec{P}_2.$$

$\vec{P}_2 = (1,-1)^T$ sajátvektor[1], így behelyettesítve az egyenletbe

$$a_2 = -\frac{1}{Z} e^{-\beta\mu_B B}$$

Tehát

$$\vec{P}(t) = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} e^{-\beta\mu_B B} \\ e^{+\beta\mu_B B} \end{pmatrix} - \frac{1}{Z} e^{-\beta\mu_B B} e^{-\frac{1+\frac{1}{\tau}e^{-\beta 2\mu_B B}}{\tau} t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nekünk viszont a feladat teljes megoldásához a mágnesezettség várható értéke kell, amit a következő módon kaphtaunk meg:

$$\langle \mu(t) \rangle = (-1,1)^T \vec{P}(t).$$

$$\langle \mu(t) \rangle = \frac{1}{Z} \Big[-e^{-\beta\mu_B B} + 2e^{-\beta\mu_B B} \cdot e^{-\frac{1+\frac{1}{\tau}e^{-\beta 2\mu_B B}}{\tau} t} + e^{\beta\mu_B B} \Big]$$

[1]Megjegyzés: T-vel a transzponálást jelöltem.

2. feladat

A feladat szövege

Legyen egy egész értékeket felvevő stochasztikus vátozó, n, momentum-generátor fuüggvénye G(s). A normalizációból következik, hogy G(0) = 1, s n momentumai G deriváltján keresztül kifejezhetők:

$$\langle n \rangle = -\left.\frac{dG(s)}{ds}\right|_{s=0} \qquad , ..., \qquad \langle n^k \rangle = (-1)^k \left.\frac{d^k G(s)}{ds^k}\right|_{s=0}$$

A kumuláns generátor függvény a momentum-generáor függvény logaritmusa,

$$\Phi(s) = \ln G(s)$$

s a kumulánsokat a következőképpen kapjuk:

$$\langle \kappa_1 \rangle = \left.\frac{d\Phi(s)}{ds}\right|_{s=0} \qquad , ..., \qquad \langle \kappa_k \rangle = (-1)^k \left.\frac{d^k \Phi}{ds^k}\right|_{s=0}$$

Az első kumulánsokat könnyű kiszámolni, s egyszerű értelműk van

$$\langle \kappa_1 \rangle = \langle n \rangle, \qquad \langle \kappa_2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2,$$

Feladatok:
(i) Határozzuk meg a kumulánsgeneráló függvényt az előadáson tárgyalt sorbanaállási problémára, s számítsuk ki az első két kumulánst! Vegyük észre, hogy az átlagos sorhossz és annak szórása lényegesen egyszerűbben kapható meg így, mint ha a momentumgeneráló fuüggvényen keresztül számoltuk volna.
(ii)Számítsuk ki a 3. kumulánst (κ_3) a momentumokon keresztül! Mi lesz κ_3 értéke, ha n eloszlásfüggvénye szimmetrikus ($P_n = P_{-n}$)?

A feladat megoldása

A momentum-generátor függvényünk a következő alakú:

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} P_n$$

P_n-et tudjuk az órán felírt megoldásból, Esetünkben a momentum-generátor függvénynél csak 0-tól megy a szummázás, így onnantól fog kelleni a P_n. Számoljuk ki az első kumulánst:

$$\langle \kappa_1 \rangle = -\left.\frac{d\Phi(s)}{ds}\right|_{s=0} = -\left.\frac{d\ln(G(s))}{ds}\right|_{s=0} = -\left.\left(\frac{1}{G(s)}\frac{dG(s)}{ds}\right)\right|_{s=0} = -\left.\frac{dG(s)}{ds}\right|_{s=0} = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$$

A második kumuláns:

$$\langle \kappa_2 \rangle = \left.\frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\ln(G(s))\right|_{s=0} = \left.\left(\frac{d}{ds}\frac{1}{G(s)}\frac{dG(s)}{ds} + \frac{1}{G(s)}\frac{d^2G(s)}{ds^2}\right)\right|_{s=0} = \left.\left(-\frac{1}{G^2(s)}\frac{dG(s)}{ds} + \frac{1}{G(s)}\frac{d^2G(s)}{ds^2}\right)\right|_{s=0} =$$

$$= -\langle n\rangle^2 + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n = -\langle n\rangle^2 + \langle n^2\rangle$$

A sorbanállási problémánal, ahol $\lambda_n = \lambda$ és $\mu_n = \mu$ volt, a momentum-generátor függvény egyensúlyi alakjára a következőt kaptuk:

$$G_e(s) = \frac{(1-e^s)P_0}{1 - e^s + q_q e^{-s}} = \frac{P_0}{1 - qe^{-s}}$$

ahol $q = \frac{\lambda}{mu}$. Ennek véve a logaritmusát:

$$\Phi(s) = \ln G(s) = \ln P_0 - \ln\left(1 - qe^{-s}\right)$$

Ezt deriváljuk s szerint, majd kiértékeljuük az $s = 0$ helyen:

$$\langle\kappa_1\rangle = \left.\frac{d\Phi(s)}{ds}\right|_{s=0} = \left.\frac{1}{1-qe^{-s}} qe^{-s}\right|_{s=0} = \frac{q}{1-q} = \langle n\rangle$$

Tényleg azt kaptuk, mint a momentum-generátor függvény deriválásával. Megnézem a második deriváltat:

$$\langle\kappa_2\rangle = -\left.\frac{d^2\Phi(s)}{ds^2}\right|_{s=0} = -\frac{d}{ds}\left.\frac{qe^{-s}}{1-qe^{-s}}\right|_{s=0} = -\left.\left(\frac{-qe^{-s}}{1-qe^{-s}} + \frac{q^2e^{-2s}}{(1-qe^{-s})^2}\right)\right|_{s=0} =$$

$$= \frac{q}{1-q} - \frac{q^2}{(1-q)^2} = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2$$

És megint ugyanazt kaptuk.
(ii) Számítsuk ki $\langle\kappa_3\rangle$-at:

$$\langle\kappa_3\rangle = \frac{d}{ds}\left.\left(\frac{-qe^{-s}}{1-qe^{-s}} + \frac{q^2e^{-2s}}{(1-qe^{-s})^2}\right)\right|_{s=0} = \left(\frac{+qe^{-s}}{1-qe^{-s}} - \frac{q^2e^{-2s}}{(1-qe^{-s})^2} +\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2q^2e^{-2s}}{(1-qe^{-s})^3} + \frac{qe^{-s}}{(1-qe^{-s})^2}\right)\right|_{s=0} = \frac{q}{1-q}\left(1 - \frac{q}{1-q} - \frac{q^2}{1-q} + \right.$$

$$\left. + \frac{2q^2}{(1-q)^2} + \frac{1}{(1-q)^2}\right) =$$

Ha az eloszlásfüggvény szimmetrikus, $\kappa_3 = 0$, mert akkor a várható értéknek is 0-nak kell lennie, és azzal kiemeltünk a κ_3 számításánál.

3. feladat

A feladat szövege

Meredek hegyoldalban függőlegesen l távolságra vannak a kapaszkodoók. A hegymászó w rátával lép felfelé, s w_0 annak a rátaája, hogy visszacsűszik az $nl = 0$ szintre, s onnan folytatja a mászást [ez a probléma példája az ún. újrakezdési (reset) folyamatoknak].
Feladatok:
(i)Írjuk fel az egyenletet, amely meghatározza, hogy a hegymászó milyen P_n valószínűséggel van nl magasságban!
(ii) Határozzuk meg, hogy átlagosan milyen magasra jut a hegymászó!

A feladat megoldása

A master-egyenlet:

$$\partial_t P_n(t) = -(w + w_0)P_n(t) + wP_{n-1}(t)$$

$$\partial_t P_0(t) = -(w)P_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} w_0 P_n(t)$$

Így $P_0(t)$-ra kapunk egy differenciálegynelet:

$$\partial_t P_0(t) = -(w + w_0)P_0(t) + w_0$$

Megoldása:

$$P_0(t) = A \cdot e^{-(w+w_0)t} + w_0 \cdot t$$

$$\partial_t P_1(t) = -(w + w_0)P_1(t) + w \cdot \Big[A \cdot e^{-(w+w_0)t} + w_0 \cdot t\Big]$$

De itt már nagyon elbonyolódik a differenciálegyenlet, így más megoldási módot kell keresni. Használjuk a generátor-függvény formalizmust:

$$G(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} P_n(t)$$

Legyen

$$q = \frac{w}{w_0} \text{ és } \tau = \frac{1}{w_0}$$

Így felírva a master egyenletet:

$$\tau \partial_t G(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} P_n = -qP_0 + (1 - P_0) + (1 + q)P_0 - (1 + q)G(s,t) + qe^{-s}G(s,t) =$$

$$= 1 + \Big[- (1 + q) + qe^{-s}\Big] G(s,t)$$

Stacionárius megoldás esetén a baloldala nulla, így felírható $G_e(s,t)$:

$$G_e(s) = \frac{1}{(1 + q) - qe^{-s}}$$

Az előző feladatban láthattuk, hogy logaritmusát véve $G_(s)$-nek és utána s szerint deriváljuk, kiértékeljük az $s = 0$ helyen, megkaphatjuk a várható értéket. Tegyük meg:

$$\ln G_e(s) = \ln 1 - \ln\left((1+q) - qe^{-s}\right)$$

$$\frac{d}{ds}\ln G_e(s) = \frac{q}{(1+q) - qe^{-s}}$$

Ezt kiértékeljük a 0 helyen:

$$\frac{d}{ds}\ln G_e(s)\Big|_{s=0} = \frac{q}{1} = q$$

Tehát a várható érték:

$$\langle nl \rangle = l \cdot \frac{w}{w_0}$$