

# Véletlen fizikai folyamatok, első házi feladat

Horváth Bendegúz

2018. február 18.

## 2. feladat

### A feladat szövege

Feldobott érme leesése után egyenlő valószínűséggel fej (F) vagy írás (I).

(a) Dobjuk fel az érmét kétszer. Milyen valószínűséggel kapunk két fejet (FF), illetve fej-írás (FI) sorrendet? Ugyanaz a két valószínűség?

(b) Játsszuk a következő játékot! Addig dobálunk, amíg vagy két fej (FF - én nyerek), vagy fej-írás (FI - te nyersz) jön ki. Igazságos ez a játék?

### A feladat megoldása

(a) Két kimenetelű rendszernek tekinthető a feldobott érme rendszere, egyforma valószínűségű végkimenetekkel, így  $P(F) = \frac{1}{2}$  a fej valószínűsége, és  $P(I) = \frac{1}{2}$  az írás valószínűsége. Két dobás kimenetele a valószínűségek szorzata:

$$P(F,F) = P(F) \cdot P(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(F,I) = P(F) \cdot P(I) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(I,I) = P(I) \cdot P(I) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(I,F) = P(I) \cdot P(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

A valószínűség  $P = \frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi események száma}}$  értelmezésével az elemi események  $FF, IF, FI, II$ , kijön az előbbi végeredmény, hogy a két valószínűség egyforma, értékük  $\frac{1}{4}$ .

(b) A dobások kimenetelei nem függenek az előző dobás végeredményétől. Az játékban az első fej kimenetel után a következő dobással valaki nyer, vagy FI vagy FF sorozat lesz belőle. Mind a kettőnek 0.5 a valószínűsége, mind a kettőnek ugyanannyi esélye van nyerni, így igazságos a játék.

### 3. feladat

#### A feladat szövege

Egydimenziós mozgást végző részecske  $\tau$  időközönként véletlen irányú erő hatására előző helyzetétől  $l$  távolságra ugrik (egyenlő  $p_+ = p_- = \frac{1}{2}$  valószínűséggel jobbra vagy balra). A részecske az  $x_0 = 0$  pontból indul. Határozzuk meg a  $t = N\tau$  idő alatti elmozdulás és az elmozdulás négyzetének átlagát,  $\langle x_t \rangle$ -t és  $\langle x_t^2 \rangle$ -t! Vizsgáljuk a fenti problémát  $p_+ = 3p_-$  esetre és számítsuk ki az  $\langle x_t \rangle$ ,  $\langle x_t^2 \rangle$ , és  $\langle x_t^2 \rangle - \langle x_t \rangle^2$  átlagokat!

#### A feladat megoldása

A lépések összessége egy  $N$  és  $p$ , paraméterű binominális eloszlást követ, ahol  $N$  az események száma,  $p$  pedig a valószínűsége az egyik eseménynek. Így kiszámolhatjuk, hogy mennyi a jobbra lépések számának várható értéke, mennyi a balra lépések számának várható értéke, és ebből számolható az  $x_t$  távolság várható értéke. A binominális eloszlás képlete általános esetre:

$$P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}.$$

Várható értéke:

$$\langle X \rangle = Np.$$

A mi feladatunkban  $N$  db ugrás van, egy ugrással  $\pm l$  távolságot tesz meg. A pozitív irányba történő ugrások számának várható értéke  $Np_+ = \frac{N}{2}$ , amivel  $\frac{Nl}{2}$  távolságot tesz meg jobbra. A negatív irányba való ugrásokkal számolva is ez jön ki, csak más előjellel. A kettő összege 0-t ad. Így:

$$\langle x_t \rangle = 0.$$

Az  $\langle x_t^2 \rangle$ -et a szórásból számolhatjuk,

$$\sigma = \sqrt{\langle x_t^2 \rangle - \langle x_t \rangle^2},$$

binominális eloszlásnál  $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ . A képletbe behelyettesítve  $\sigma_{\text{lépések}} = \sqrt{N}/2$  jön ki, ezt átírva távolságra  $\sigma_{x_t} = \sqrt{N} \cdot l/2$ , aminek a négyzete megegyezik  $\langle x_t^2 \rangle$ -vel.

$$\langle x_t^2 \rangle = \frac{N \cdot l^2}{4}.$$

A másik esetben, amikor  $p_+ = 3p_- = 0.75$  a számolási módszerek hasonlóak, az eredmények az új paraméterekkel:

$$\langle x_t \rangle = l \cdot N \cdot \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{N \cdot l}{2},$$

$$\sigma^2 = \langle x_t^2 \rangle - \langle x_t \rangle^2 = l^2 \cdot N \cdot \frac{3}{16},$$

$$\langle x_t^2 \rangle = \sigma^2 + \langle x_t \rangle^2 = l^2 \left( \frac{N^2}{4} + \frac{3N}{16} \right) = l^2 \frac{4N^2 + 3N}{16}$$

## 4. feladat

### A feladat szövege

Vizsgáljuk a Brown mozgás előadáson tárgyalt, Einstein féle leírását, s legyen sodródás is a rendszerben (szél fúj a víz felett). Ekkor a  $\tau$  időnként megtett ugrások hosszának ( $\Delta$ ) valószínűségi eloszlása nem szimmetrikus  $\Phi(-\Delta) \neq \Phi(\Delta)$ , s várhatóan  $\Delta = \Delta\Phi(\Delta)d\Delta \neq 0$ .

(a) Írjuk fel a Chapman-Kolmogorov egyenletet, s deriváljuk a részecske megtalálási valószínűségét,  $P(x, t)$ -t meghatározó Fokker-Planck egyenletet! Mennyiben különbözik ez az egyenlet az előadáson tárgyalt diffúziós egyenlettől?

(b) Írjuk fel az egyenlet megoldását arra az esetre, ha a virágporszem az origóból indul!

### A feladat megoldása

(a) A Chapman-Kolmogorov egyenlet a következőképpen néz ki:

$$P(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) P(x - \Delta, t) d\Delta.$$

Ez azon valószínűségek összege, hogy a részecske  $x - \Delta$ -ban volt  $t$  időpillanatban és pont  $\Delta$ -t ugrott. Sorba fejtve:

$$P(x, t) + \frac{\partial P(x, t)}{\partial t} \tau = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta P(x, t) - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) \Delta d\Delta \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) \Delta^2 d\Delta \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}.$$

A valószínűségeloszlás szimmetriája sérül, de az  $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) d\Delta$  integrál továbbra is egyet ad, így az egyenlet rövidebb lesz:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} \tau = - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) \Delta d\Delta \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\Delta) \Delta^2 d\Delta \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} \tau = -\overline{\Delta} \cdot \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} + \frac{\overline{\Delta^2}}{2} \cdot \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}$$

Az így kapott egyenlet annyiban különbözik az előadáson tárgyalt diffúziós egyenlettől, hogy benne maradt a  $\Delta$  várható értékével szorzódó, helyszerint egyszeresen derivált valószínűség, negatív előjellel.