Véletlen fizikai folyamatok, hatodik házi feladat

Horváth Bendegúz

2018. március 24.

1. feladat

A feladat szövege

Lokalizált mágneses momentum (μ) z-tengely irányú B mágneses térben van. A mágneses momentum (μ) a tér irányában $\pm\mu B$ értéket vehet fel, s ezekben az állapotokban energiája $\mp\mu_B B$. A mágneses momentum T hőmérsékletű könyezettel van egyensúlyban, s kölcsönhatás eredményeképpen μ billeg a $-\mu B$ és $+\mu B$ állapotok között ($-\mu B \leftrightarrow +\mu B$).
(i) Írjuk fel a folyamat master egyenletét!
(ii) Válasszunk olyan átmeneti rátákat, amelyek kielégítik a részletes egyensúly elvét!
(iii) Határozzuk meg az átlagos mágneses momentum $\langle\mu(t)\rangle$ időfejlődését, ha kezdetben (t = 0) a mágneses momentum a z-tengely pozitív irányába mutatott.

A feladat megoldása

(i) A rendszer két állpot között változik, így ezekre az állapotokra felírva a master egyenlet:

$$\partial_t P_{-\mu}(t) = -w_0 P_{-\mu}(t) + w P_{mu}(t)$$

$$\partial_t P_{\mu}(t) = w_0 P_{-\mu}(t) - w P_{\mu}(t)$$

Az egyenletekben $P_{\pm\mu}(t)$ a $\pm\mu$ állapotban tartózkodás valószínűségét jelöli.
(ii) Először próbáljuk meg megoldani a sajátértékegyenletet:

$$\partial_t \begin{pmatrix} P_{-\mu}(t) \\ p_{+\mu}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_0 & w \\ w_0 & -w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{-\mu}(t) \\ p_{+\mu}(t) \end{pmatrix}$$

Az Ising-spinrendszerhez hasonlóan, a $P^{(e)}_{\pm\mu} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(\mp\mu B)}$. A sajátértékek a számolás után a következőknek adódnak: $\lambda_1 = 0$, ez az egyensúlyi állapothoz tarozik, és $\lambda_2 = -(w_0 + w)$. Ezek után a részletes egyensúlyi elvét kielégítő átmeneti rátákat kell meghatározni. Legyen

$$\frac{w_{n,n'}}{w_{n',n}} = e^{-\beta(E_{n'} - E_n)}$$

Ha $\Delta E = (E_{n'} - E_n) > 0$, akkor az átmeneti ráta

$$w_{n',n} = \frac{1}{\tau} e^{-\beta(E_{n'} - E_n)}.$$

A $\Delta E = \pm 2\mu_B B$ és pozitív, ha felfelé álló állapotból lefelé álló állapotba ugrott a mágneses momentum. Ha $\Delta E < 0$, akkor $w_{n',n} = \frac{1}{\tau}$, τ az urgások közti idő. Így

$$w_0 = \frac{1}{\tau}$$

$$w = \frac{1}{\tau} e^{-\beta 2\mu_B B}$$

megkaptuk az átmeneti rátákat.
(iii) Az előző feladatrészben kiszámoltuk a sajátértékeket, így az állapotban tartózkodás valószínűségét leíró vektort a következő módon kaphatjuk meg:

$$\vec{P}(t) = \vec{P}^{(e)} + e^{\lambda_2 t} a_2 \vec{P}_2$$

Az a_2 együtthatót a kezdeti feltételből határozhatjuk meg, ami esetünkben

$$\vec{P}(0) = (0,1)^T = \vec{P}^{(e)} + a_2 \vec{P}_2.$$

$\vec{P}_2 = (1,-1)^T$ sajátvektor, így behelyettesítve az egyenletbe

$$a_2 = -\frac{1}{Z} e^{-\beta\mu_B B}$$

Tehát

$$\vec{P}(t) = \frac{1}{Z}\begin{pmatrix} e^{-\beta\mu_B B} \\ e^{+\beta\mu_B B} \end{pmatrix} - \frac{1}{Z} e^{-\beta\mu_B B} e^{-\frac{1+\frac{1}{\tau}e^{-\beta 2\mu_B B}}{\tau} t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nekünk viszont a feladat teljes megoldásához a mágnesezettség várható értéke kell, amit a következő módon kaphtaunk meg:

$$\langle \mu(t) \rangle = (-1,1)^T \vec{P}(t).$$

$$\langle \mu(t) \rangle = \frac{1}{Z}\Big[- e^{-\beta\mu_B B} + 2e^{-\beta\mu_B B} \cdot e^{-\frac{1+\frac{1}{\tau}e^{-\beta 2\mu_B B}}{\tau} t} + e^{\beta\mu_B B} \Big]$$

2. feladat

A feladat szövege

Legyen egy egész értékeket felvevő stochasztikus vátozó, n, momentum-generátor fuüggvénye G(s). A normalizációból következik, hogy G(0) = 1, s n momentumai G deriváltján keresztül kifejezhetők:

$$\langle n\rangle = -\frac{dG(s)}{ds}\Big|_{s=0} \qquad ,..., \qquad \langle n^k\rangle = (-1)^k \frac{d^kG(s)}{ds^k}\Big|_{s=0}$$

A kumuláns generátor függvény a momentum-generáor függvény logaritmusa,

$$\Phi(s) = \ln G(s)$$

s a kumulánsokat a következőképpen kapjuk:

$$\langle\kappa_1\rangle = \frac{d\Phi(s)}{ds}\Big|_{s=0} \qquad ,..., \qquad \langle\kappa_k\rangle = (-1)^k \frac{d^k\Phi}{ds^k}\Big|_{s=0}$$

Az első kumulánsokat könnyű kiszámolni, s egyszerű értelműk van

$$\langle\kappa_1\rangle = \langle n\rangle, \qquad \langle\kappa_2\rangle = \langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2,$$

Feladatok:
(i) Határozzuk meg a kumulánsgeneráló függvényt az előadáson tárgyalt sorbanaállási problémára, s számítsuk ki az első két kumulánst! Vegyük észre, hogy az átlagos sorhossz és annak szórása lényegesen egyszerűbben kapható meg így, mint ha a momentumgeneráló fuüggvényen keresztül számoltuk volna.
(ii)Számítsuk ki a 3. kumulánst (κ_3) a momentumokon keresztül! Mi lesz κ_3 értéke, ha n eloszlásfüggvénye szimmetrikus ($P_n = P_{-n}$)?

A feladat megoldása

A momentum-generátor függvényünk a következő alakú:

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} P_n$$

P_n-et tudjuk az órán felírt megoldásból,

$$P_n = \frac{\lambda_n\lambda_{n-1}...\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}...\mu_1} P_0$$

$$P_{-n} = \frac{\mu_0\mu_{-1}...\mu_{-(n+1)}}{\lambda_{-1}\lambda_{-2}...\lambda_{-n}} P_0$$

Esetünkben a momentum-generátor függvény csak 0-tól megy a szummázás, így onnantól fog kelleni a P_n. Számoljuk ki az első kumulánst:

$$\langle\kappa_1\rangle = -\frac{d\Phi(s)}{ds}\Big|_{s=0} = -\frac{d\ln(G(s))}{ds}\Big|_{s=0} = -\Big(\frac{1}{G(s)}\frac{dG(s)}{ds}\Big)\Big|_{s=0} = -\frac{dG(s)}{ds}\Big|_{s=0} = -(-n)P_0 + \sum_{n=1}^{\infty} P_n =$$

$$= nP_0 + (1 - P_0) = P_0(n-1) + 1$$

A második kumuláns:

$$\langle\kappa_2\rangle = \frac{d}{ds}\frac{d}{ds}\ln(G(s))\Big|_{s=0} = \Big(\frac{d}{ds}\frac{1}{G(s)} + \frac{d^2G(s)}{ds^2}\Big)\Big|_{s=0} = \Big(-\frac{1}{G^2(s)}\frac{dG(s)}{ds} + \frac{d^2G(s)}{ds^2}\Big)\Big|_{s=0} =$$

$$= \langle n\rangle + n^2P_1 + (1 - P_1 - P_0)$$

3. feladat

A feladat szövege

Meredek hegyoldalban függőlegesen l távolságra vannak a kapaszkodoók. A hegymászó w rátával lép felfelé, s w_0 annak a rátaája, hogy visszacsúszik az $nl = 0$ szintre, s onnan folytatja a mászaást [ez a probléma példája az ún. újjrakezdési (reset) folyamatoknak].
Feladatok:
(i)Írjuk fel az egyenletet, amely meghatározza, hogy a hegymászó milyen P_n valószínűséggel van nl magasságban!
(ii) Határozzuk meg, hogy átlagosan milyen magasra jut a hegymászó!

A feladat megoldása