Véletlen fizikai folyamatok, hatodik házi feladat

Horváth Bendegúz

2018. március 23.

1. feladat

A feladat szövege

Lokalizált mágneses momentum (μ) z-tengely irányú B mágneses térben van. A mágneses momentum (μ) a tér irányában $\pm\mu B$ értéket vehet fel, s ezekben az állapotokban energiája $\mp\mu BB$. A mágneses momentum T hőmérsékletű könyezettel van egyensúlyban, s kölcsönhatás eredményeképpen μ billeg a $-\mu B$ és $+\mu B$ állapotok között ($-\mu B \leftrightarrow +\mu B$).
(i) Írjuk fel a folyamat master egyenletét!
(ii) Válasszunk olyan átmeneti rátákat, amelyek kielégítik a részletes egyensúly elvét!
(iii) Határozzuk meg az átlagos mágneses momentum $\langle\mu(t)\rangle$ időfejlődését, ha kezdetben (t = 0) a mágneses momentum a z-tengely pozitív irányába mutatott.

A feladat mgoldása

(i) A rendszer két állpot között változik, így ezekre az állapotokra felírva a master egyenlet:

$$\partial_t P_{-\mu}(t) = -w_0 P_{-\mu}(t) + w P_{mu}(t)$$

$$\partial_t P_{\mu}(t) = w_0 P_{-\mu}(t) - w P_{\mu}(t)$$

Az egyenletekben $P_{\pm\mu}(t)$ a $\pm\mu$ állapotban tartózkodás valószínűségét jelöli.
(ii) Először próbáljuk meg megoldani a sajátértékegyenletet:

$$\partial_t \begin{pmatrix} P_{-\mu}(t) \\ p_{+\mu}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_0 & w_0 \\ w_0 & -w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{-\mu}(t) \\ p_{+\mu}(t) \end{pmatrix}$$

Az Ising-spinrendszerhez hasonlóan, a $P_{\pm\mu}^{(e)} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(\mp\mu B)}$.

2. feladat

A feladat szövege

Legyen egy egész értékeket felvevő stochasztikus vátozó, n, momentum-generátor fuüggvénye G(s). A normalizációból következik, hogy G(0) = 1, s n momentumai G deriváltján keresztül kifejezhetők:

$$\langle n \rangle = -\frac{dG(s)}{ds}\bigg|_{s=0} \quad , ..., \quad \langle n^k \rangle = (-1)^k \frac{d^k G(s)}{ds^k}\bigg|_{s=0}$$

A kumuláns generátor függvény a momentum-generáor függvény logaritmusa,

$$\Phi(s) = \ln G(s)$$

s a kumulánsokat a következőképpen kapjuk:

$$\langle \kappa_1 \rangle = \frac{d\Phi(s)}{ds}\bigg|_{s=0} \quad , ..., \quad \langle \kappa_k \rangle = (-1)^k \frac{d^k \Phi}{ds^k}\bigg|_{s=0}$$

Az első kumulánsokat könnyű kiszámolni, s egyszerű értelműk van

$$\langle \kappa_1 \rangle = \langle n \rangle, \quad \langle \kappa_2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2,$$

Feladatok:
(i) Határozzuk meg a kumulánsgeneráló függvényt az előadáson tárgyalt sorbanaállási problémára, s számítsuk ki az első két kumulánst! Vegyük észre, hogy az átlagos sorhossz és annak szórása lényegesen egyszerűbben kapható meg így, mint ha a momentumgeneráló fuüggvényen keresztül számoltuk volna.
(ii)Számítsuk ki a 3. kumulánst (κ_3) a momentumokon keresztül! Mi lesz κ_3 értéke, ha n eloszlásfüggvénye szimmetrikus ($P_n = P_{-n}$)?

A feladat megoldása

3. feladat

A feladat szövege

Meredek hegyoldalban függőlegesen l távolságra vannak a kapaszkodoók. A hegymászó w rátával lép felfelé, s w_0 annak a rátaája, hogy visszacsűszik az $nl = 0$ szintre, s onnan folytatja a mászaást [ez a probléma példája az ún. újjrakezdési (reset) folyamatoknak].
Feladatok:
(i)Írjuk fel az egyenletet, amely meghatározza, hogy a hegymászó milyen P_n valószínűséggel van nl magasságban!
(ii) Határozzuk meg, hogy átlagosan milyen magasra jut a hegymászó!

A feladat megoldása