

Véletlen fizikai folyamatok, hatodik házi feladat

Horváth Bendegúz

2018. március 26.

1. feladat

A feladat szövege

Lokalizált mágneses momentum (μ) z-tengely irányú B mágneses térben van. A mágneses momentum (μ) a tér irányában $\pm\mu B$ értéket vehet fel, s ezekben az állapotokban energiája $\mp\mu_B B$. A mágneses momentum T hőmérsékletű közeggel van egyensúlyban, s kölcsönhatás eredményeképpen μ billeg a $-\mu B$ és $+\mu B$ állapotok között ($-\mu B \leftrightarrow +\mu B$).

(i) Írjuk fel a folyamat master egyenletét!

(ii) Válasszunk olyan átmeneti rátákat, amelyek kielégítik a részletes egyensúly elvét!

(iii) Határozzuk meg az átlagos mágneses momentum $\langle\mu(t)\rangle$ időfejlődését, ha kezdetben ($t = 0$) a mágneses momentum a z-tengely pozitív irányába mutatott.

A feladat megoldása

(i) A rendszer két állapot között változik, így ezekre az állapotokra felírva a master egyenlet:

$$\partial_t P_{-\mu}(t) = -w_0 P_{-\mu}(t) + w P_{\mu}(t)$$

$$\partial_t P_{\mu}(t) = w_0 P_{-\mu}(t) - w P_{\mu}(t)$$

Az egyenletekben $P_{\pm\mu}(t)$ a $\pm\mu$ állapotban tartózkodás valószínűségét jelöli.

(ii) Először próbáljuk meg megoldani a sajátértékegyenletet:

$$\partial_t \begin{pmatrix} P_{-\mu}(t) \\ P_{\mu}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_0 & w \\ w_0 & -w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{-\mu}(t) \\ P_{\mu}(t) \end{pmatrix}$$

Az Ising-spinrendszerhez hasonlóan, a $P_{\pm\mu}^{(e)} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(\mp\mu B)}$. A sajátértékek a számolás után a következőknek adódnak: $\lambda_1 = 0$, ez az egyensúlyi állapothoz tartozik, és $\lambda_2 = -(w_0 + w)$. Ezek után a részletes egyensúlyi elvét kielégítő átmeneti rátákat kell meghatározni. Legyen

$$\frac{w_{n,n'}}{w_{n',n}} = e^{-\beta(E_{n'} - E_n)}$$

Ha $\Delta E = (E_{n'} - E_n) > 0$, akkor az átmeneti ráta

$$w_{n',n} = \frac{1}{\tau} e^{-\beta(E_{n'} - E_n)}.$$

A $\Delta E = \pm 2\mu_B B$ és pozitív, ha felfelé álló állapotból lefelé álló állapotba ugrott a mágneses momentum. Ha $\Delta E < 0$, akkor $w_{n',n} = \frac{1}{\tau}$, τ az ugrások közti idő. Így

$$w_0 = \frac{1}{\tau}$$

$$w = \frac{1}{\tau} e^{-\beta 2\mu_B B}$$

megkaptuk az átmeneti rátákat.

(iii) Az előző feladatrészben kiszámoltuk a sajátértékeket, így az állapotban tartózkodás valószínűségét leíró vektort a következő módon kaphatjuk meg:

$$\vec{P}(t) = \vec{P}^{(e)} + e^{\lambda_2 t} a_2 \vec{P}_2$$

Az a_2 együtthatót a kezdeti feltételből határozhatjuk meg, ami esetünkben

$$\vec{P}(0) = (0, 1)^T = \vec{P}^{(e)} + a_2 \vec{P}_2.$$

$\vec{P}_2 = (1, -1)^T$ sajátvektor¹, így behelyettesítve az egyenletbe

$$a_2 = -\frac{1}{Z} e^{-\beta \mu_B B}$$

Tehát

$$\vec{P}(t) = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} e^{-\beta \mu_B B} \\ e^{+\beta \mu_B B} \end{pmatrix} - \frac{1}{Z} e^{-\beta \mu_B B} e^{-\frac{1+\frac{1}{\tau} e^{-\beta 2\mu_B B}}{\tau} t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nekünk viszont a feladat teljes megoldásához a mágnesezettség várható értéke kell, amit a következő módon kaptaunk meg:

$$\langle \mu(t) \rangle = (-1, 1)^T \vec{P}(t).$$

$$\langle \mu(t) \rangle = \frac{1}{Z} \left[-e^{-\beta \mu_B B} + 2e^{-\beta \mu_B B} \cdot e^{-\frac{1+\frac{1}{\tau} e^{-\beta 2\mu_B B}}{\tau} t} + e^{\beta \mu_B B} \right]$$

¹Megjegyzés: T -vel a transzponálást jelöltem.

2. feladat

A feladat szövege

Legyen egy egész értékeket felvevő stochasztikus változó, n , momentum-generátor függvénye $G(s)$. A normalizációból következik, hogy $G(0) = 1$, s n momentumai G deriváltján keresztül kifejezhetők:

$$\langle n \rangle = - \frac{dG(s)}{ds} \Big|_{s=0}, \dots, \quad \langle n^k \rangle = (-1)^k \frac{d^k G(s)}{ds^k} \Big|_{s=0}$$

A kumuláns generátor függvény a momentum-generátor függvény logaritmus, a

$$\Phi(s) = \ln G(s)$$

s a kumulánsokat a következőképpen kapjuk:

$$\langle \kappa_1 \rangle = \frac{d\Phi(s)}{ds} \Big|_{s=0}, \dots, \quad \langle \kappa_k \rangle = (-1)^k \frac{d^k \Phi}{ds^k} \Big|_{s=0}$$

Az első kumulánsokat könnyű kiszámolni, s egyszerű értelműk van

$$\langle \kappa_1 \rangle = \langle n \rangle, \quad \langle \kappa_2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2,$$

Feladatok:

(i) Határozzuk meg a kumuláns-generáló függvényt az előadáson tárgyalt sorbanaállási problémára, s számítsuk ki az első két kumuláns! Vegyük észre, hogy az átlagos sorhossz és annak szórása lényegesen egyszerűbben kapható meg így, mint ha a momentum-generáló függvényen keresztül számoltuk volna.

(ii) Számítsuk ki a 3. kumuláns (κ_3) a momentumokon keresztül! Mi lesz κ_3 értéke, ha n eloszlásfüggvénye szimmetrikus ($P_n = P_{-n}$)?

A feladat megoldása

A momentum-generátor függvényünk a következő alakú:

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} P_n$$

P_n -et tudjuk az órán felírt megoldásból, Esetünkben a momentum-generátor függvényénél csak 0-tól megy a szummázás, így onnantól fog kelleni a P_n . Számoljuk ki az első kumuláns:

$$\langle \kappa_1 \rangle = - \frac{d\Phi(s)}{ds} \Big|_{s=0} = - \frac{d \ln(G(s))}{ds} \Big|_{s=0} = - \left(\frac{1}{G(s)} \frac{dG(s)}{ds} \right) \Big|_{s=0} = - \frac{dG(s)}{ds} \Big|_{s=0} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n$$

A második kumuláns:

$$\langle \kappa_2 \rangle = \frac{d}{ds} \frac{d}{ds} \ln(G(s)) \Big|_{s=0} = \left(\frac{d}{ds} \frac{1}{G(s)} \frac{dG(s)}{ds} + \frac{1}{G(s)} \frac{d^2 G(s)}{ds^2} \right) \Big|_{s=0} = \left(- \frac{1}{G^2(s)} \frac{dG(s)}{ds} + \frac{1}{G(s)} \frac{d^2 G(s)}{ds^2} \right) \Big|_{s=0} =$$

$$= -\langle n \rangle^2 + \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n = -\langle n \rangle^2 + \langle n^2 \rangle$$

A sorbanállási problémánál, ahol $\lambda_n = \lambda$ és $\mu_n = \mu$ volt, a momentum-generátor függvény egyensúlyi alakjára a következőt kaptuk:

$$G_e(s) = \frac{(1 - e^s)P_0}{1 - e^s + qe^{-s}} = \frac{P_0}{1 - qe^{-s}}$$

ahol $q = \frac{\lambda}{\mu}$. Ennek vége a logaritmusát:

$$\Phi(s) = \ln G(s) = \ln P_0 - \ln(1 - qe^{-s})$$

Ezt deriváljuk s szerint, majd kiértékeljük az $s = 0$ helyen:

$$\langle \kappa_1 \rangle = \left. \frac{d\Phi(s)}{ds} \right|_{s=0} = \left. \frac{1}{1 - qe^{-s}} qe^{-s} \right|_{s=0} = \frac{q}{1 - q} = \langle n \rangle$$

Tényleg azt kaptuk, mint a momentum-generátor függvény deriválásával. Megnézem a második deriváltat:

$$\begin{aligned} \langle \kappa_2 \rangle &= -\left. \frac{d^2\Phi(s)}{ds^2} \right|_{s=0} = -\left. \frac{d}{ds} \frac{qe^{-s}}{1 - qe^{-s}} \right|_{s=0} = -\left. \left(\frac{-qe^{-s}}{1 - qe^{-s}} + \frac{q^2e^{-2s}}{(1 - qe^{-s})^2} \right) \right|_{s=0} = \\ &= \frac{q}{1 - q} - \frac{q^2}{(1 - q)^2} = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 \end{aligned}$$

És megint ugyanazt kaptuk.

(ii) Számítsuk ki $\langle \kappa_3 \rangle$ -at:

$$\begin{aligned} \langle \kappa_3 \rangle &= \left. \frac{d}{ds} \left(\frac{-qe^{-s}}{1 - qe^{-s}} + \frac{q^2e^{-2s}}{(1 - qe^{-s})^2} \right) \right|_{s=0} = \left. \left(\frac{+qe^{-s}}{1 - qe^{-s}} - \frac{q^2e^{-2s}}{(1 - qe^{-s})^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2q^2e^{-2s}}{(1 - qe^{-s})^3} + \frac{qe^{-s}}{(1 - qe^{-s})^2} \right) \right|_{s=0} = \frac{q}{1 - q} \left(1 - \frac{q}{1 - q} - \frac{q^2}{1 - q} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2q^2}{(1 - q)^2} + \frac{1}{(1 - q)^2} \right) = \end{aligned}$$

Ha az eloszlásfüggvény szimmetrikus, $\kappa_3 = 0$, mert akkor a várható értéknek is 0-nak kell lennie, és azzal kiemeltünk a κ_3 számításánál.

3. feladat

A feladat szövege

Meredek hegyoldalban függőlegesen l távolságra vannak a kapaszkodók. A hegymászó w rátával lép felfelé, s w_0 annak a rátája, hogy visszacsúszik az $nl = 0$ szintre, s onnan folytatja a mászást [ez a probléma példája az ún. újratekés (reset) folyamatoknak].

Feladatok:

(i) Írjuk fel az egyenletet, amely meghatározza, hogy a hegymászó milyen P_n valószínűséggel van nl magasságban!

(ii) Határozzuk meg, hogy átlagosan milyen magasra jut a hegymászó!

A feladat megoldása

A master-egyenlet:

$$\partial_t P_n(t) = -(w + w_0)P_n(t) + wP_{n-1}(t)$$

$$\partial_t P_0(t) = -(w)P_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} w_0 P_n(t)$$

Így $P_0(t)$ -ra kapunk egy differenciálegyenletet:

$$\partial_t P_0(t) = -(w + w_0)P_0(t) + w_0$$

Megoldása:

$$P_0(t) = A \cdot e^{-(w+w_0)t} + w_0 \cdot t$$

$$\partial_t P_1(t) = -(w + w_0)P_1(t) + w \cdot \left[A \cdot e^{-(w+w_0)t} + w_0 \cdot t \right]$$

De itt már nagyon elbonyolódik a differenciálegyenlet, így más megoldási módot kell keresni. Használjuk a generátor-függvény formalizmust:

$$G(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} P_n(t)$$

Legyen

$$q = \frac{w}{w_0} \text{ és } \tau = \frac{1}{w_0}$$

Így felírva a master egyenletet:

$$\begin{aligned} \tau \partial_t G(s, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-sn} P_n = -qP_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s} P_n + \sum_{n=1}^{\infty} -(1+q)e^{-sn} P_n + qe^{-sn} P_{n-1} = \\ &= -qP_0 + \left[-(1+q) + qe^{-s} + e^{-s} \right] G(s, t) \end{aligned}$$

Stacionárius megoldás esetén a baloldala nulla, így felírható $G_e(s, t)$:

$$G_e(s) = \frac{qP_0}{-(1+q) + qe^{-s} + e^{-s}}$$

Az előző feladatban láthattuk, hogy logaritmusát véve $G(s)$ -nek és utána s szerint deriváljuk, kiértékeljük az $s = 0$ helyen, megkaphatjuk a várható értéket. tegyük meg:

$$\ln G_e(s) = \ln(qP_0) - \ln(-(1+q) + qe^{-s} + e^{-s})$$

$$\frac{d}{ds} \ln G_e(s) = -\frac{1}{(-(1+q) + qe^{-s} + e^{-s})}(-q-1) = \frac{q+1}{(-(1+q) + qe^{-s} + e^{-s})}$$

Ezt kiértékeljük a 0 helyen:

$$\left. \frac{d}{ds} \ln G_e(s) \right|_{s=0} = \frac{-P_0}{qP_0 - 1} + \frac{q}{q - (1+q)}$$

P_0 értékét megkaphatjuk a $G(s=0) = 1$ feltételből: