Véletlen fizikai folyamatok, ötödik házi feladat

Horváth Bendegúz

2018. március 19.

1. feladat

A feladat szövege

Vizsgáljuk az előadáson tárgyalt 2 Ising spinből álló rendszer relaxációjának problémáját! Az előadáson megkaptuk a rendszer dinamikai mátrixát, s meghatároztuk a sajátvektorokat és a megfelelő sajátértékeket (A számolás megtalálható a kurzus honlapján "Ising spinek dinamikája" cím alatt is).
(i) Ismerve az összes sajátvektort és sajátértékeket, határozzuk meg milyen valószínűséggel van a rendszer t időpontban az $s_1 = -1$, $s_2 = +1$ állapotban, ha a kezdeti állapot $s_1 = +1$,$s_2 = -1$ volt.
(ii) Számítsuk ki a rendszer átlagos mágnesezetségének $[M(t) = \langle (s_1 + s_2) \rangle]$időfejlődésést, ha a kezdeti állapotban az $s_1 = 1$, $s_2 = 1$ állapot és az $s_1 = -1$, $s_2 = +1$ állapot is 1/2 valószínűséggel van jelen.

A feladat megoldása

(i) A sajátvektorokat és a sajátértékeket ismerjük, ezzel a tudással egy állapot valószínűségét így számolhatjuk ki:

$$\vec{P}(t) = P^{(e)}(t) + \sum_{i=2}^{4} a_i e^{\lambda_i t} \vec{P^{(i)}}$$

az a_i együtthatókat a kezdeti feltételekből számolhatjuk, ami esetünkben $(\uparrow\downarrow)$ állapot. A sajátvektorok a következőek:

$$\vec{P}^{(e)} = \frac{1}{2(e^K + e^{-K})} \begin{pmatrix} e^K \\ e^{-K} \\ e^{-K} \\ e^K \end{pmatrix} \qquad \vec{P}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{P}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{P}^{(4)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A sajátértékek pedig $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2(1 + e^{-2K})$, $\lambda_3 = -2e^{-K}$ és $\lambda_4 = -2$. Itt a K értékek az előadáson használt jelölés, $K = \beta J$, $\beta = 1/k_b T$. A kezdeti feltétel:

$$\vec{P}(t = 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{P}^{(e)} + \sum_{i=2}^{4} a_i \vec{P}^i.$$

Ezeből a kövekező egyenleteket kapjuk az a_i együtthatókra:

$$\frac{e^K}{2(e^K+e^{-K})}+a_2+a_3=0 \tag{1}$$

$$\frac{e^{-K}}{2(e^K+e^{-K})}-a_2+a_4=0 \tag{2}$$

$$\frac{e^{-K}}{2(e^K+e^{-K})}-a_2-a_4=1 \tag{3}$$

$$\frac{e^K}{2(e^K+e^{-K})}+a_2-a_3=0 \tag{4}$$

Kivonva az (1)-ből a (4)-est, $a_3=0$. Ezt behelyettesítve az (1)-esbe, $a_2=-\frac{e^K}{2(e^K+e^{-K})}$. A (2)-ből a (3)-ast kivonva $a_4=-0.5$.
Most összegezzük fel a végeredményt, de mi a $\vec{P}$-nek csak a második komponensére vagyunk kíváncsiak:

$$\vec{P}(\downarrow\uparrow,t)=\frac{e^{-K}}{2(e^K+e^{-K})}+\frac{e^{-K}}{2(e^K+e^{-K})}\cdot e^{-2(1+e^{-2K})t}-\frac{1}{2}e^{-2t}$$

Így ez lett a keresett valószínűség.

(ii) Hasonló módon kell csinálni a mágnesezettséggel is:

$$M(t)=\langle(s_1+s_2)\rangle=\sum_{s_1=\pm1}\sum_{s_2=\pm1}(s_1+s_2)P(s_1,s_2,t)$$

A kezdeti feltétel most $\vec{P}(t=0)=(1/2,0,0,1/2)$. Erre a következő egyenletek adódnak:

$$\frac{e^K}{2(e^K+e^{-K})}+a_2+a_3=\frac{1}{2} \tag{5}$$

$$\frac{e^{-K}}{2(e^K+e^{-K})}-a_2+a_4=0 \tag{6}$$

$$\frac{e^{-K}}{2(e^K+e^{-K})}-a_2-a_4=0 \tag{7}$$

$$\frac{e^K}{2(e^K+e^{-K})}+a_2-a_3=\frac{1}{2} \tag{8}$$

Hasonlóan az előzőekhez, (5)-ből kivonva (6)-ost kapjuk, hogy $a_3=\frac{1}{2}$. visszahelyettesítve az (5)-be, $a_2=-\frac{e^K}{2(e^K+e^{-K})}$, a (6)-osból kivonva a (7)-est $a_4=0$-t kapunk. Így megkaphatjuk a $\vec{P}(t)$-t:

$$\vec{P}(t)=\frac{1}{2(e^K+e^{-K})}\begin{pmatrix}e^K\\e^{-K}\\e^{-K}\\e^K\end{pmatrix}+\frac{e^{-K}}{2(e^K+e^{-K})}\cdot e^{-2(1+e^{-2K})t}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}e^{-2e^{-K}t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Az $M(t)$-re felírt egyenletben az $s_1 + s_2 = 0$ résznél kiesnek az $\uparrow\downarrow$ és $\downarrow\uparrow$ állapotok, megmaradnak viszont az $\uparrow\uparrow$ és $\downarrow\downarrow$ állapotok. Így a mágnesezettség:

$$M(t) = 2 \cdot \big(\frac{1}{2(e^K + e^{-K})}e^K + \frac{e^{-K}}{2(e^K + e^{-K})} \cdot e^{-2(1+e^{-2K})t} + \frac{1}{2}e^{-2e^{-K}t}\big) - ...$$

a $\vec{P}(t)$-re kapott összegből az első kettő tagnak a vektorainak az első és negyedik komponens ugyanaz, így azok kiejtik egymást, marad az utolsó tag:

$$M(t) = 2 \cdot \frac{1}{2}e^{-2e^{-K}t} - (-2) \cdot \frac{1}{2}e^{-2e^{-K}t} = 2 \cdot e^{-2e^{-K}t}$$

2. feladat

A feladat szövege

Egy háromszögön egy részecske ugrál a szomszédos csúcsok között. Az ugás rátája w_1 az óramutatójárásával egy irányban és w_2 az ellenkezőirányban. Feladatok:

Írjuk fel a master egyenletet az i-edik csúcsban tartózkodás valószíűségére!
Határozzuk meg a stacionáris megoldást!
Határozzuk meg a rendszer rrelaxációs idejét (először próbáljuk megbecsülni az értékét)!

A feladat megoldása

$i\epsilon\{1, 2, 3\}$, így az egyenletrendszerünk a következő:

$$\partial_t P_1 = -(w_1 + w_2)P_1 + w_2 P_2 + w_1 P_3$$
$$\partial_t P_2 = -(w_1 + w_2)P_2 + w_2 P_3 + w_1 P_1$$
$$\partial_t P_3 = -(w_1 + w_2)P_3 + w_2 P_1 + w_1 P_2$$

A következő átmeneti mátrixot használom majd:

$$\underline{\underline{\alpha}} = \begin{pmatrix} -(w_1 + w_2) & w_2 & w_1 \\ w_1 & -(w_1 + w2) & w_2 \\ w_2 & w_1 & -(w_1 + w_2) \end{pmatrix}$$

Így a következő sajátértékegyenletet írhatjuk fel:

$$\partial_t \vec{P} = \underline{\underline{\alpha}} \vec{P},$$

$\vec{P} = (P_1, P_2, P_3)$ jelöléssel. Stacionárius állapotban az egyenlet baloldala nulla, a 0-ás sajátértékhez tartozó sajátvektor a megoldásunk.

$$0\vec{P} = \underline{\underline{\alpha}}_0 \vec{P}.$$

A homogén, lineáris egyenletrendszer túlhatározott, így kell mellékfeltételként: $\sum_{i=1}^{3} P_i = 1$ és $P_i > 0$. A következő vektor kielégíti az egyenleteket:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3(w_1+w_2)} \\ \frac{1}{3(w_1+w_2)} \\ \frac{1}{3(w_1+w_2)} \end{pmatrix}$$

A rendszer szimmetrikussága miatt nem meglepő a stacionárius állapotra kapott eredmény.($\vec{P} = 1/3(1, 1, 1)$), mert $w_1 + w_2 = 1$. Relaxációs idő számolásához ismét felírhatjuk a sajátérték egyenletet, de most általános esetben oldjuk meg:

$$\partial_t \vec{P}_\alpha = \lambda_\alpha \vec{P}_\alpha,$$

ahol λ_α az α-adik sajátértéke. A megoldást kereshetjük a következő alakban:

$$\vec{P}_\alpha(t) = a_\alpha e^{-\lambda \frac{t}{\tau}} \vec{P}_\alpha$$

A relaxációs idő pedig $\tau_{relax} = \frac{\tau}{|\lambda_{min}|}$, ha τ időközönként van átmenet. Megoldva a sajátértékegyenletet, a következő egyenletet kapjuk λ-ra:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3(w_1 + w_2) \pm \sqrt{12 \cdot w_1 w_2 - 3(w_1 + w_2)^2}}{2}$$

$$\lambda_{min} = \frac{-3(w_1 + w_2) - \sqrt{12 w_1 w_2 - 3(w_1 + w_2)^2)}}{2}$$

És így:

$$\tau_{relax} = \frac{2\tau}{3(w_1 + w_2) + \sqrt{12 w_1 w_2 - 3(w_1 + w_2)^2}}$$

. Esetünkben két felé léphet a részecske, $w_1 + w_2 = 1$, így kicsitt szebben is lehet írni:

$$\tau_{relax} \frac{2\tau}{3 + \sqrt{12 w_1 w_2 - 3}}$$

3. feladat

A feladat szövege

Meredek hegyoldalban függőegesen l távolságra vannak a kapaszkodók. A hegymászó w rátával lép felfelé, s w_0 annak a rátája, hogy lecsúszik egy szintet, s onnan folytatja a mászást.
Feladatok:
(i) Irjuk fel az egyenletet, amely meghatározza, hogy a hegymázó milyen P_n valószínűségel van nl magasságban!
(ii) Használjuk a generátorfüggvény formalizmust a stacionárius eloszlás kiszámítására!
(iii) Határozzuk meg, hogy átlagosan milyen magasra jut a hegymászó!

A feladat megoldása

A master egyenlet az nl magasságban tartózkodás valószínűsége a következőképpen néz ki:

$$\partial_t P_n = -(w+w_0)P_n + w_0 P_{n+1} + w P_{n-1},$$

$n = 0$ esetben viszont:

$$\partial_t P_0 = -wP_0 + w_0 P_1$$

Legyen

$$q = \frac{w}{w_0} \text{ és } \tau = \frac{1}{w_0}.$$

Így az egyenletek:

$$\tau\partial_t P_n = -(q+1)P_n + P_{n+1} + qP_{n-1}$$
$$\tau\partial_t P_0 = -qP_0 + P_1.$$

Alkalmazva a generátorfüggvény formalizmusát:

$$\tau\partial_t G(s,t) = \sum_{n=0} e^{-sn}P_n = -qP_0 + P_1 + \sum_{n=1}\big[-(1+q)e^{-sn}P_n + qe^{-sn}P_{n-1} + e^{-sn}P_{n+1}\big]$$

A jobboldali tagban a szummában lévő utolsó tagot a következő alakra lehet hozni:

$$\sum_{n=1} e^{-sn}P_{n+1} = e^s \sum_{n=1} e^{-s(n+1)}P_{n+1} = e^s \sum_{m=2} e^{-sm}P_m.$$

Az ultolsó előtti tagot:

$$q\sum_{n=1} e^{-sn}P_{n-1} = qe^{-s}\sum_{n=1} e^{-s(n-1)}P_{n-1} = qe^{-s}\sum_{m=0} P_m.$$

Kiegészítve a a P_0-s tagokkal a szummás részt átírva generátorfüggvényekre:

$$\tau\partial_t G(s,t) = (1-e^{-s})P_0 + \big[-1 - q + qe^{-s} + e^s\big]G(s,t)$$

A stacionárius megoldás kiszámításánál az időszerinti parciális derivált 0, így

$$G_e(s) = \frac{(1-e^s)P_0}{1-e^s+q-qe^-s} = \frac{P_0}{1-qe^{-s}}$$

$G(s=0)=1$ feltétel miatt $P_0 = 1-q$. Milyen magasra jut a hegymászó átlagosan? A várhatóértéket a generátor fügvényekkel a következő módon számolhatjuk:

$$\langle n\rangle = -\partial_s G_e|_{s=0}$$

Így a deriválás után:

$$\langle n\rangle = -\frac{(1-q)qe^{-s}}{(1-qe^{-s})^2}\bigg|_{s=0} = \frac{q}{1-q} = \frac{\frac{w}{w_0}}{1-\frac{w}{w_0}} = \frac{w}{w_0-w}.$$

ebből az látszik, hogy ahhoz, hogy $\langle n\rangle$ pozitív legyen w-nek kisebbnek kell lennie mint w_0, ami nem egyezik a fizikai képpel, felfelé jutási rátának nagyobbnak kéne lennie. Ez valószínűleg abból fakad, hogy egyenúlyi állapotra vonatkozik, a hegymászónak pedig az egyensúlyi állapot a hegy tetejn lenne, oda igyekszik. mászását pedig úgy képzelhetjük el, mint ahogy az előző házifeladatban a részecske beért a nullapontba. Ha a magasságot, amit átlagosan elér n lépés után a következő módon számoljuk:

$$\langle n\cdot l\rangle = l\cdot n(w-w_0),$$

fizikaibb képet kapunk.