Véletlen fizikai folyamatok, első házi feladat

Horváth Bendegúz

2018. február 18.

1. feladat

A feladat szövege

Véletlen és valóság.
(a) Próbéljunk emlékezni arra az eseményre, amivel kapcsolatban először gondoltunk véletlenszerűségre. Miért tekintettük az eseméenyt véletlennek, s mit gondoltunk a jelenség hátteréről?
(b) Emlékezzünk olyan, az életuünkben megtörtént eseméenyre, amikor kiszámoltunk valóoszínuűségeket (az adott ismereteinkből kiindulva), s ezek a valóoszínűségek határozták meg a tetteinket!

A feladat megoldása

(a) Emlékeim szerint legelőször valamilyen társasjáték során, a dobokockával való dobás miatt gondoltam véletlenszerűségre. Azért tekintettem véletlenszerűnek, mert sehogy sem tudtam befolyásolni a kimeenetelét a dobásnak. A jelenség hátteréről nem gondolkodtam komolyan, de sejtettem, hogy a kocka szimmetriái miatt nincsen kitüntetett irány, amit jobban "kedvelne" a kocka, így mindegyik számnak ugyanakkora az esélye, hogy kijön.
(b) Középiskolában -például történelemórán- a felelőt úgy választotta a tanár, hogy az felelt, akinél kinyílt a napló. Körülbelüli valószínűséget számoltam minden óra után, hogy mekkora a valószínűsége, hogy legközelebb én felelek, és ez alapján készültem fel az órára. Számításaimban figyelembe vettem, hogy a napló elején és végén sokkal kisebb valószínűséggel nyílik ki. Amikor $P \approx 1/13$-ad volt a valószínűség, elkezdtem alaposabban készülni.

2. feladat

A feladat szövege

Feldobott érme leesése után egyenlő valószínűséggel fej (F) vagy írás (I).
(a) Dobjuk fel az érmét kétszer. Milyen valószínűséggel kapunk két fejet (FF), illetve fej-írás (FI) sorrendet? Ugyanaz a két valószínűség?
(b) Játsszuk a következő játékot! Addig dobálunk, amíg vagy két fej (FF - én nyerek), vagy fej-írás (FI - te nyersz) jön ki. Igazságos ez a játék?

A feladat megoldása

(a) Két kimenetelű rendszernek tekinthető a feldobott érme rendszere, egyforma valószínűségű végkimenetelekkel, így $P(\mathrm{F}) = \frac{1}{2}$ a fej valószínűsége, és $P(\mathrm{I}) = \frac{1}{2}$ az írás valószínűsége. Két dobás kimenetele a valószínűségek szorzata:

$$P(\mathrm{F{,}F}) = P(\mathrm{F}) \cdot P(\mathrm{F}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(\mathrm{F{,}I}) = P(\mathrm{F}) \cdot P(\mathrm{I}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(\mathrm{I{,}I}) = P(\mathrm{I}) \cdot P(\mathrm{I}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(\mathrm{I{,}F}) = P(\mathrm{I}) \cdot P(\mathrm{F}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

A valószínűség $P = \frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi események száma}}$ értelmezésével az elemi események FF, IF, FI, II, kijön az előbbi végeredmény, hogy a két valószínűség egyforma, értékük $\frac{1}{4}$.
(b) A dobások kimenetelei nem függnek az előző dobás végeredményétől. Az játékban az első fej kimenetel után a következő dobással valaki nyer, vagy FI vagy FF sorozat lesz belőle. Mind a kettőnek 0.5 a valószínűsége,mind a kettőnknek ugyanannyi esélye van nyerni, így igazságos a játék. Ha a sorrend nem számít, tehát FI és IF esetén is én nyerek, akkor a játék nem igazságos, egy I után 1 a valószínűsége, hogy én nyerek, hiszen folyamatosan dobva ameddig I-t dobunk, én nem nyerek és ellenfelem se nyerhet, amennyiben fej azonnal nyerek.

3. feladat

A feladat szövege

Egydimenziós mozgást végző részecske τ időközönként véletlen irányú erő hatására előző helyzetétől l távolságra ugrik (egyenlő $p_+ = p_- = \frac{1}{2}$ valószínűséggel jobbra vagy balra). A részecske az $x_0 = 0$ pontból indul. Határozzuk meg a $t = N\tau$ idő alatti elmozdulás és az elmozdulás négyzetének átlagát, $\langle x_t \rangle$-t és $\langle x_t^2 \rangle$-t! Vizsgáljuk a fenti problémát $p_+ = 3p_-$ esetre és számítsuk ki az $\langle x_t \rangle$, $\langle x_t^2 \rangle$, és $\langle x_t^2 \rangle - \langle x_t \rangle^2$ átlagokat!

A feladat megoldása

A lépések összessége egy N és p, paraméterű binominális eloszlást követ,ahol N az események száma, p pedig a valószínűsége az egyik eseménynek. Így kiszámolhatjuk, hogy mennyi a jobbra lépések számának várható értéke, mennyi a balra lépések számának várható értéke, és ebből számolható az x_t távolság várható értéke. A binominális eloszlás képlete általános esetre:

$$P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}.$$

Várható értéke:

$$\langle X \rangle = Np.$$

A mi feladatunkban N db ugrás van, egy ugrással $\pm l$ távolságot tesz meg. A pozitív irányba történő ugrások számának várható értéke $Np_+ = \frac{N}{2}$, amivel $\frac{Nl}{2}$ távolságot tesz meg jobbra. A negatív irányba való ugrásokkal számolva is ez jön ki, csak más előjellel. A kettő összege 0-t ad. Így:

$$\langle x_t \rangle = 0.$$

Az $\langle x_t^2 \rangle$-et a szórásból számolhatjuk,

$$\sigma = \sqrt{\langle x_t^2 \rangle - \langle x_t \rangle^2},$$

binominális eloszlásnál $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. A képletbe behelyettesítve $\sigma_{\text{lépések}} = \sqrt{N}/2$ jön ki, ezt átírva távolságra $\sigma_{x_t} = \sqrt{N} \cdot l/2$, aminek a négyzete megegyezik $\langle x_t^2 \rangle$-vel.

$$\langle x_t^2 \rangle = \frac{N \cdot l^2}{4}.$$

A másik esetben, amikor $p_+ = 3p_- = 0.75$ a számolási módszerek hasonlóak, az eredmények az új paraméterekkel:

$$\langle x_t \rangle = l \cdot N \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{N \cdot l}{2},$$

$$\sigma^2 = \langle x_t^2 \rangle - \langle x_t \rangle^2 = l^2 \cdot N \cdot \frac{3}{16},$$

$$\langle x_t^2 \rangle = \sigma^2 + \langle x_t \rangle^2 = l^2 \left(\frac{N^2}{4} + \frac{3N}{16} \right) = l^2 \frac{4N^2 + 3N}{16}$$

4. feladat

A feladat szövege

Vizsgáljuk a Brown mozgás előadáson tárgyalt, Einstein féle leírását, s legyen sodródás is a rendszerben (szél fúj a víz felett). Ekkor a τ időnként megtett ugrások hosszának (Δ) valószínűséegi eloszlása nem szimmetrikus $\Phi(-\Delta) \neq \Phi(\Delta)$, s várhatóan $\Delta = \Delta\Phi(\Delta)d\Delta \neq 0$.
(a) Írjuk fel a Chapman-Kolmogorov egyenletet, s deriváljuk a részecske megtalálási valószínűségét, $P(x,t)$-t meghatározó Fokker-Planck egyenletet! Mennyiben különbözik ez az egyenlet az előadáson tárgyalt diffúziós egyenlettől?
(b) Írjuk fel az egyenlet megoldását arra az esetre, ha a virágporszem az origóból indul!

A feladat megoldása

(a) A Chapman-Kolmogorov egyenlet a következőképpen néz ki:

$$P(x,t+\tau) = \int_{\infty}^{\infty} \Phi(\Delta)P(x-\Delta,t)d\Delta.$$

Ez azon valószínűségek összege, hogy a részecske $x-\Delta$-ban volt t időpilanatban és pont Δ-t ugrott. Sorba fejtve:

$$P(x,t)+\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}\tau = \int_{\infty}^{\infty} \Phi(\Delta)d\Delta P(x,t) - \int_{\infty}^{\infty} \Phi(\Delta)\Delta d\Delta \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}\int_{\infty}^{\infty} \Phi(\Delta)\Delta^2 d\Delta \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}.$$

A valószínűségeloszlás függvény nem szimmetrikus, de az $\int_{\infty}^{\infty} \Phi(\Delta)d\Delta$ integrál továbbra is egyet ad, így az egyenlet rövidebb lesz:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}\tau = -\int_{\infty}^{\infty} \Phi(\Delta)\Delta d\Delta \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{2}\int_{\infty}^{\infty} \Phi(\Delta)\Delta^2 d\Delta \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t}\tau = -\overline{\Delta}\cdot\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + \frac{\overline{\Delta^2}}{2}\cdot\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}$$

Az így kapott egyenlet annyiban különbözik az előadáson tárgyalt diffúziós egyenlettől, hogy benne maradt a Δ várható értékével szorzódó, helyszerint egyszeresen derivált valószínűség, negatív előjellel.
(b) A Fokker-Planck egyenelet megoldható, ha ismerjük a kezdeti elsozlásfüggvényt[1], ami esetünkben, ha a részecske az origóból indul:

$$P(x,t=0) = \delta(x)$$

Vezessünk be egy új jelölést, $\frac{\overline{\Delta}}{\tau} \equiv v$, ahol v az átlagos sebességnek felel meg. Ezzel az egyenlet:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -v\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + D\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2},$$

D az előadáson is használt diffúziós együttható. Valamilyen ügyes transzformácóval a v-s tagot ki kell ejteni, hogy megoldhatóbb legyen az egyenlet. Legyen egy változó transzformáció, a koordinátarendszer mozogjon v sebességgel:

$$P(x,t) = W(x-vt,t) = W(y,t)$$

Ekkor az egyenletünk a következőre módosul:

$$\frac{\partial W(y,t)}{\partial t} - v\frac{\partial W(y,t)}{\partial y} = -v\frac{\partial W(y,t)}{\partial y} + D\frac{\partial^2 W(y,t)}{\partial y^2}$$

Így kiesnek a v-s tagok, és az egyenlet az előadáson megoldott egyenletre egyszerűsödik, aminek megoldása:

$$W(y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{y^2}{4Dt}}$$

Ebből a P-t az y visszatranszformálásával kaphatjuk meg:

$$P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}$$

A megoldás kielégíti a kezdeti feltételt is, $\lim_{t\to 0} P(x,0) = \delta(x)$.

Hivatkozások

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Fokker-Planck_equation