Véletlen fizikai folyamatok, második házi feladat

Horváth Bendegúz

2018. március 4.

1. feladat

A feladat szövege

Egy szobában T=20 °C hőmérsékletű ideális gáznak tekinthető levegő van. Számítsuk ki mennyi idő alatt jut el egy vízmolekula a szoba egyik végéből a másikba tisztán diffúziv mozgással.
Segítség: A kinetikus elmélet a gázok diffúziós együtthatójára a következő kifejezést adja (és az eredményt érthetjük is a Brown mozgásról tanultak alapján):

$$D = \frac{1}{3}l\overline{v} \qquad \left(= \frac{l^2}{3l/\overline{v}} \approx \frac{(\Delta x)^2}{2\tau} \right)$$

ahol l a molekulák szabad úthossza, v pedig átlagos sebességük. A szabad úthosszt megbecsülhetjük a $l = 1/(n\pi d^2)$ kifejezésből, ahol n a molekulák koncentrációja és d a molekulák átmérője. Az átlagos sebességet pedig az ekvipartíció tételéből számolhatjuk. A valóságban a szagok sokkal gyorsabban terjednek egy szobában, annak ellenére, hogy a megfelelő molekulák lényegesen nagyobbak és súlyosabbak a vízmolekulánál. Értjük ezt?

A feladat megoldása

Felírva az ekvipartíció tételét megkaphatjuk a v sebességet:

$$E = \frac{1}{2}m\big(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\big) = \frac{3}{2}k_B T.$$

A kéletbe behelyettesítve $T = 293$, a levegő moláris tömege 18.015 g/mol, amiből egy mlekula tömege $\approx 18.015/8.31/10^3$ kg.

$$\overline{v} = \sqrt{293 \cdot 10^3 \frac{3}{2.16}} \approx 638 \ \frac{m}{s}$$

A vízmolekula szabad úthossza kell még, hogy a diffúziós együtthatóját megkaphassuk. A víz molekula átmérőjét $2.75 \cdot 10^{-10}$ m-nek vettem[1]. A levegő koncentrációját pedig $55 mol/l$-nek [2]. Így a szabad úthossza:

$$l = \frac{1}{55\pi \cdot 2.75^2 \cdot 10^{-20} \cdot 6 \cdot 10^{23} \cdot 10^3} = \approx 1.27 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

A diffúziós együttható:

$$D = \frac{1}{3} \cdot 1.27 \cdot 10^{-10} \cdot 638 = 2.7 \cdot 10^{-8}\ \frac{m^2}{s}.$$

Felhasználva az előző órákról a diffúziós összefüggést:

$$R(t) = 2Dt,$$

ahol a képletben $R(t)$ a távolság, t az idő és D a diffúziós együttható. A szobát egy $7 \times 5 \times 3\ m^3$ téglatestnek tekintem, így az egyik sarkából $\sqrt{49 + 25 + 9} = 9.1m$ utat kell megtennie, hogy átérjen a legtávolabb lévő sarkába. Behelyettesítve a fenti képlet átalakított verziójába :

$$t = \frac{9.11 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 1.27} = 3.58 \cdot 10^{10}\ \text{s}$$

A kapott végeredmény nagyságrendekkel nagyobb a tapasztaltaknál, tisztán diffúzióval nagyon sok idő lenne, hogy a szagok eljussanak hozzánk. Valóságban apró szellők, nehezebb molekulák, áramlatok gyorsabban

2. feladat

A feladat szövege

Írjuk fel az évfolyam évről-évre változó létszámát meghatározó master egyenletet. Gondolkozzunk el azon, hogy mi határozza meg az átmeneti rátákat!

A feladat megoldása

3. feladat

A feladat szövege

Egy m tömeű részecske a rácsállandójú, egydimenziós rácson τ időközönként valamelyik szomszédos rácspontba ugrik. A részecske az origóhoz van kötve egy rugalmas, tömeg nélküli gumiszállal, amelynek rugóállandója k, s a környezet hőmérséklete T.
(a) Írjuk fel a részecske stochasztikus mozgását leíró master egyenletet!
(b) Használjuk a részletes egyensúly elvét konkrét, egyensúlyhoz vezető átmeneti ráták meghatározására!

A feladat megoldása

Hivatkozások

[1] https://www.researchgate.net/post/what_is_the_size_of_water_moleculeH2O

[2] https://www.quora.com/What-is-the-molar-concentration-of-water-in-1-liter-of-pure-wat