Valószínűségszámítás

1. előadás — 2020. szeptember 10.

Alapfogalmak:

(Ezeket a II. éves valószínűségszámítás előadás már lényegében tartalmazza.)

Valószínűségi mező: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Ω – alaphalmaz, elemei az elemi események,

$\mathcal{A}$ – az események σ-algebrája

P – valószínűségi mérték: $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\omega) = 1$.

Feltételes valószínűség: $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$, feltéve, hogy $P(B) > 0$.

Teljes eseményrendszer: $A_1, A_2, \ldots, A_n$, ha $P(A_i \cap A_j) = 0$, ha $i \neq j$, továbbá $P(\cup_{i=1}^n A_i) = 1$.

Teljes valószínűség tétele

Ha az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak, melyben $P(A_j) > 0$, $j = 1, \ldots, n$, akkor

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A \mid A_j) P(A_j) \ .$$

Poincaré-formula

Ha $A_1, \ldots, A_n$ tetszőleges események, akkor

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} S_j^{(n)} \ ,$$

ahol

$$S_j^{(n)} = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j})$$

Mérhető terek szorzata. (Már szerepelt analízisben.)

Adott $\{(X_\gamma, \mathcal{B}_\gamma), \gamma \in \Gamma\}$.

Legyen $\mathcal{X} = \times \mathcal{X}_\gamma = \{f : \Gamma \to \cup_\gamma \mathcal{X}_\gamma \mid f(\gamma) \in \mathcal{X}_\gamma\}$. Cilinder(Henger)halmazok:

legyenek $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$, $B_1 \in \mathcal{B}_{\gamma_1}, \ldots, B_n \in \mathcal{B}_{\gamma_n}$.

ekkor $C_{\gamma_1, \ldots, \gamma_n}^{B_1, \ldots, B_n} = \{f \in \mathcal{X} : f(\gamma_i) \in B_i, i = 1, \ldots, n\}$.

$\mathcal{C}_0$ jelöli a cilinderhalmazok félgyűrűjét.

Legyen $\mathcal{B} = \otimes_\gamma \mathcal{B}_\gamma = \sigma(\mathcal{C}_0)$.

1. Megjegyzés. *A $\pi_\gamma : \mathcal{X} \to \mathcal{X}_\gamma$ projekciók mérhetőek. Sőt, $\otimes \mathcal{B}_\gamma$ a legszűkebb σ-algebra, melyre nézve a projekciók mérhetőek.*

Mérhető terek szorzata mellett mértékterek szorzata is értelmezhető.

2. Tétel. *Legyenek $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ valószínűségi mezők. A következő konstrukció adja ezen mezők szorzatterét:*

$$\begin{aligned} \Omega &= \times_{i=1}^{\infty} \Omega_i \ , \\ \mathcal{A} &= \otimes \mathcal{A}_i = \sigma(\mathcal{C}_0) \ , \end{aligned}$$

és definiáljuk a P halmazfüggvényt a <u>*kiterjesztett*</u> *cilinderhalmazokon a következőképpen:*
ha $B \in \otimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$, akkor

$$P(B \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \cdots) = (P_1 \otimes P_2 \otimes \cdots \otimes P_n)(B).$$

Ekkor P kiterjeszthető σ–additíven a generált σ–algebrára.

Kicsit általánosabban (de speciális esetben):

Generált mérték $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ mérhető téren:

Tegyük fel, hogy adottak az $\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, P_n)$ mértékterek, ahol P_n valószínűségi mérték, $n \geq 1$, melyekre teljesül, hogy

$$P_{n+1}(B \times \mathbb{R}) = P_n(B)\,, \text{ha } B \in \mathcal{B}_n\,.$$

Ekkor legyen

$$P(C_n^B) = P_n(B)\,, \text{ ha } B \in \mathcal{B}_n\,.$$

Ez jól definiált, additív halmazfüggvény lesz .

Létezik-e σ-additív kiterjesztés?

3. Tétel (Kolmogorov-alaptétel)**.** *P kiterjeszthető σ-additíven a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ σ-algebrára*

Bizonyítás:
Jelölések: $\underline{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots)$.
$B \in \mathcal{B}_n$ esetén legyen $C_n^B = \{\underline{x} \,|\, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B\}$.
Ekkor $C_n^B = C_{n+1}^{B \times \mathbb{R}}$.
Továbbá $C_{n+1}^A \subset C_n^B$ akkor és csak akkor, ha $A \subset B \times \mathbb{R}$.

Cilinderhalmazok algebrát alkotnak. Így σ-additív kiterjesztés pontosan akkor van, ha P σ-additív a $\mathcal{C}$ algebrán.
Azaz kell, hogy $A_1, A_2, \dots$ diszjunktak, $A_j \in \mathcal{C}$, $\cup A_j = A$, $A \in \mathcal{C}$ esetén

$$P(A) = \sum P(A_j)\,.$$

Módosítás: legyen $B_n = A \setminus \left(\cup_{j=1}^n A_j\right)$. $B_n \in \mathcal{C}$. Ekkor

$$B_1 \supset B_2 \supset \dots\,, \quad \cap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset\,.$$

Kell, hogy $P(B_n) \to 0$.
$B_n = C_{k_n}^{D_n}$. Feltehetjük, hogy $1 < k_1 < k_2 < \dots$.
Besűrítjük: Legyen $H_j = C_j^{\mathbb{R}^j}$, ha $j = 1, 2, , \dots k_1 - 1$.
Általánosabban: ha $k_n \leq j < k_{n+1}$, akkor $H_j = C_j^{F_j}$, ahol $F_j = D_n \times \mathbb{R}^{j-k_n}$.
Így ekkor $H_j = B_n$, és $F_j \in \mathcal{B}_j$.

Ezért $H_1 \supset H_2 \supset H_3 \supset \dots$, $\cap H_j = \emptyset$. És kell, hogy $P(H_j) \to 0$

Indirekt feltevés: létezik $\delta > 0$, melyre $P(H_j) > \delta$, minden $j \geq 1$ esetén.
Megmutatjuk, hogy ez nem lehet. Azaz van közös pont.
További módosítás:

Legyen $G_j \subset F_j$ kompakt, melyre $P_j(F_j \setminus G_j) \leq \frac{\delta}{2^{j+1}}$.
Illetve

$$V_j = \cap_{k=1}^j C_k^{G_k} = \cap_{k=1}^j C_j^{G_k \times \mathbb{R}^{j-k}} = C_j^{U_j}\,,$$

ahol $U_j = \cap_{k=1}^j \left(G_k \times \mathbb{R}^{j-k}\right)$ — kompakt. $U_j \subset F_j$.

Ekkor $P(H_j \setminus V_j) = P_j(F_j \setminus U_j) \leq \sum_{k=1}^j \frac{\delta}{2^{k+1}} \leq \frac{\delta}{2}$.

Így
$$V_1 \supset V_2 \supset \dots, \quad \cap V_j = \emptyset, \quad P(V_j) \geq \frac{\delta}{2}$$
és U_j kompakt, $j \geq 1$.

Legyen most $\underline{x}^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots) \in V_j$ tetszőleges, $j \geq 1$.

Ekkor $\underline{x}^{(j)} \in V_1$, ezért $x_1^{(j)} \in U_1$, $j \geq 1$.

U_1 kompakt, van torlódáspont, konvergens részsorozat.
$$x_1^{(j)} \longrightarrow_{j \in \mathbb{N}_1} x_1^0 \in U_1$$
Továbbá $\underline{x}^{(j)} \in V_2$, ha $j \geq 2$. Így $(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}) \in U_2$. Kompakt.

Létezik $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ részsorozat, hogy
$$(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}) \longrightarrow_{j \in \mathbb{N}_2} (x_1^0, x_2^0) \in U_2 \,.$$
Folytatva: létezik $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_j^0) \in U_j$.

Ekkor $\quad (x_1^0, x_2^0, \dots) \in \cap_{j=1}^{\infty} V_j$.

Valószínűségi változó:

$X : \Omega \to \mathcal{X}$ mérhető leképezés, ahol $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ mérhető tér.

Valószínűségi vektorváltozó: $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

Legyen $\pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \pi_j(\underline{x}) = x_j$.

És $X_j = \pi_j \circ X$. — marginális valószínűségi változó.

Állítás

Legyenek $X_\gamma : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{X}_\gamma, \mathcal{F}_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$

Legyen $\mathcal{X} = \times_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{X}_\gamma$, $\pi_\gamma : \mathcal{X} \to \mathcal{X}_\gamma$.

Továbbá $X = (X_\gamma, \gamma \in \Gamma)$.

Ekkor $X_\gamma = \pi_\gamma \circ X$.
$$X \quad \text{mérhető} \iff X_\gamma \quad \text{mérhető minden } \gamma \in \Gamma$$
Bizonyítás:

Ha X mérhető, akkor $X_\gamma = \pi_\gamma \circ X$ is az.

Megfordítva: Elegendő cilinder halmazok teljes inverz képét ellenőrizni.
$$\left\{\omega \mid X(\omega) \in C_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n}^{B_1, B_2, \dots, B_n}\right\} = \cap_{j=1}^n \left\{\omega \mid X_{\gamma_j} \in B_j\right\} \,.$$

4. Definíció. *Valószínűségi változó eloszlása – Q_X:*
$$Q_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right),$$
ahol $B \in \mathcal{B}$.

5. Megjegyzés. *Az X valószínűségi változó mértéktartó leképezés lesz.*
$$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B}, Q_X)$$

Állítás
Minden valószínűségi mérték egyben eloszlás is.

Bizonyítás: Legyen Q valószínűségi mérték az $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ mérhető téren.
Válasszuk $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (\mathcal{X}, \mathcal{F}, Q)$.
És legyen $X = \mathrm{id}_\Omega$.
Ekkor
$$Q_X(B) = P(X^{-1}(B)) = Q(B).$$
$\square$

Valószínűségi változók eloszlásfüggvénye.
1. eset. $X : \Omega \to \mathbb{R}$
$$F_X(x) = P(X < x) = Q_X((-\infty, x)), \qquad x \in \mathbb{R}$$

Tulajdonságai

- Monoton növekvő
- balról folytonos
- $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1.$

Ezek karakterizálják az eloszlásfüggvényt.
Valóban, legyen $Q(([a, b)) = F(b) - F(a)$. Kiterjeszthető valószínűségi mértékké. $\square$
2. eset. $X : \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
$$F_X(x) \quad = \quad P(X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n) = Q_X(\times_{i=1}^n(-\infty, x_i)), \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\,,$$
ha X n-dimenziós vektorértékű.

Tulajdonságok

(i) mindegyik változójában monoton nő

(ii) mindegyik változójában balról folytonos

(iii) $\lim_{\min x_j\to-\infty} F_X(x) = 0\,, \quad \lim_{\min x_j\to\infty} F_X(x) = 1$

(iv) $\sum_{\epsilon\in\{0,1\}^n}(-1)^{|\epsilon|}F_X(a\circ\epsilon + b\circ(\underline{1}-\epsilon)) \geq 0$ minden $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a_j \leq b_j$, $j = 1, \ldots, n$ esetén.

ahol $a \circ \epsilon = (a_1\epsilon_1, \ldots, a_n\epsilon_n)$ és $\underline{1} = (1, 1, \ldots, 1)$.
Bizonyítás:
(iv) Legyen $A_j = \{X_j < a_j\}$, $j = 1, \ldots, n$, $B = \cap_{j=1}^n \{X_j < b_j\}$.
Ekkor
$$\cap_{j=1}^n \{X_j \in [a_j, b_j)\} = B \cap \overline{(\cup_{j=1}^n A_j)}$$
Ezért
$$P(a_1 \leq X_1 < b_1, \ldots, a_n \leq X_n < b_n) = P(B) - P(B \cap (\cup_{j=1}^n A_j)) = P(B) - P(\cup_j(B \cap A_j))\,.$$

Alkalmazzuk a Poincaré-formulát:
$$S_k^{(n)} = \sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_k\leq n} P(B \cap A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k})$$

Legyen $\epsilon_{j_i} = 1$, $i = 1, \dots, k$, a többi nulla. Ekkor

$$B \cap A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k} = \cap_{i=1}^n \{X_i < a_i\epsilon_i + b_i(1 - \epsilon_i\}$$

Behelyettesítve:

$$P(a_1 \le X_1 < b_1, \dots, a_n \le X_n < b_n) = P(B) + \sum_{k=1}^n (-1)^k S_k^{(n)} =$$

$$= F_X(b) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n} F_X(a \circ \epsilon + b \circ (\underline{1} - \epsilon)) = \sum_{\epsilon \in \{0,1\}^n} (-1)^{|\epsilon|} F_X(a \circ \epsilon + b \circ (\underline{1} - \epsilon)) \, .$$

Állítás
Ha az $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény rendelkezik a fenti tulajdonságokkal, akkor eloszlásfüggvény.

Bizonyítás:
Ismét elég egy hozzátartozó eloszlást megkonstruálni.
Legyen

$$Q\left(\times_{j=1}^n [a_j, b_j)\right) = \sum_{\epsilon \in \{0,1\}^n} (-1)^{|\epsilon|} F(a \circ \epsilon + b \circ (\underline{1} - \epsilon)) \ge 0 \, .$$

Ez kiterjeszthető a generált σ-algebrára.

6. Megjegyzés. *F és Q kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást.*

2. előadás — 2020. szeptember 17.

Valószínűségi változók sűrűségfüggvénye

7. Definíció. *Legyen $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$ v.v., ahol μ σ-véges mérték. X abszolút folytonos eloszlású v.v., ha*

$$Q_X << \mu.$$

A Radon–Nikodym derivált az ún. sűrűségfüggvény.

$$f_X = \frac{dQ_X}{d\mu} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}.$$

Speciális esetek:

(a) Diszkrét eloszlású valószínűségi változó eloszlása abszolút folytonos a számlálómértékre nézve.

(b) Valós vagy vektorértékű valószínűségi változó esetén μ természetes választása a λ-val jelölt Lebesgue–mérték.

Valószínűségi változók függvényei

Ha $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mu)$ valószínűségi változó abszolút folytonos eloszlású, és $h : (\mathcal{X}, \mathcal{B}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{G})$ mérhető leképezés, akkor $h(X)$ olyan valószínűségi változó, melyre

$$Q_{h(X)} = Q_X \circ h^{-1}$$

és

$$Q_{h(X)} << \nu = \mu \circ h^{-1}.$$

Bizonyítás: Ha $B \in \mathcal{G}$ esetén $\nu(B) = 0$, akkor $\mu(h^{-1}(B)) = 0$, tehát $Q_{h\circ X}(B) = Q_X(h^{-1}(B)) = 0$. $\square$

Kérdés: hogyan lehet felírni a sűrűségfüggvényt?

Kellene tehát

$$\int_B f_{h\circ X}(y) d\nu(y) = Q_{h\circ X}(B) = P(h \circ X \in B) = P(X \in h^{-1}(B)) = \int_{h^{-1}(B)} f_X(x) d\mu(x)\,, B \in \mathcal{G}$$

megoldása.

Ez hasonlít az mértéktartó leképezésekre vonatkozó integráltranszformációs képletre. Eszerint valamilyen halmazokon valamilyen függvények ν illetve μ szerinti integráljai megegyeznek. Értelmes választás: $B \Longleftrightarrow h^{-1}(B)$ illetve $g \Longleftrightarrow g \circ h$. Eszerint

$$\int_B g d\nu = \int_{h^{-1}(B)} g \circ h d\mu\,.$$

Összehasonlítva: $\int_B f_{h\circ X}(y)d\nu(y) = \int_{h^{-1}(B)} f_X(x)d\mu(x)$, azaz, ha f_X a h függvénye, akkor a külső függvény éppen $f_{h\circ X}$. De erre általában semmi garancia nincsen.

Kivétel: h^{-1} létezik és mérhető. Ekkor $f = f \circ h^{-1} \circ h$, így $f_{h\circ X} = f \circ h^{-1}$.

Vegyük észre, hogy csak a $h^{-1}(B)$ alakú halmazokon kell használni az f_X sűrűségfüggvényt. Azaz az $\sigma(h)$ σ-algebrán. De az nem ugyanaz, mint az eredeti sűrűségfüggvény, az eredeti Radon–Nikodym-derivált? Nem, mert az R-N-derivált a definíció szerint mérhető kell legyen a megfelelő σ-algebrára.

Jelölje $Q_X|_{\sigma(h)}$ illetve $\mu|_{\sigma(h)}$ a $\sigma(h)$-ra megszorított mértékeket. Ekkor

$$\frac{Q_X|_{\sigma(h)}}{\mu|_{\sigma(h)}}$$

Radon–Nikodym-derivált mérhető lesz a $\sigma(h)$ σ-algebrára. De vajon ekkor függvénye lesz-e a h függvénynek?

8. Lemma (Doob (általános változat))**.** *Legyen $X : \Omega \to \mathcal{X}$, $Y : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Ha Y mérhető az X által generált σ–algebrára, azaz $\sigma(Y) \subset \sigma(X)$, akkor létezik olyan $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$ Borel–mérhető függvény, melyre*

$$Y = g \circ X.$$

Bizonyítás:

Nyilván elég $n = 1$ esetére.

- Tegyük fel, hogy $Y = \chi_B$, $B \in \sigma(X)$. Ekkor $B = X^{-1}(C)$, $C \subset \mathcal{X}$. Ezért $Y = \chi_C \circ X$.
- $Y = \sum_j a_j \chi_{B_j}$, $B_j \in \sigma(X)$, $j = 1, \ldots k$.
- $0 \le Y_1 \le Y_2 \le \ldots$ lépcsős függvények, $Y_j = g_j \circ X$, és $Y = \lim Y_j$. Ekkor X képterén g_j, $j \ge 1$ monoton függvénysorozat. Legyen

$$g = \begin{cases} \lim_{j\to\infty} g_j\,, & \text{ahol ez létezik} \\ 0\,, & \text{egyébként}\,. \end{cases}$$

- $Y = Y_1 - Y_2$, $Y_1 = g_1 \circ X$, $Y_2 = g_2 \circ X$.

9. Megjegyzés. *Nyilvánvalóan $Q_X \mid_{\sigma(h)} << \mu \mid_{\sigma(h)}$. Ekkor a Doob-lemma alapján*

$$\frac{dQ_X \mid_{\sigma(h)}}{d\mu \mid_{\sigma(h)}} = g \circ h \quad \textit{és} \quad g = \frac{dQ_{h(X)}}{d\nu}.$$

Lebesgue-mérték szerinti abszolút folytonosság

10. Tétel. *Legyenek $V, W \subset \mathbb{R}^k$ nyílt részhalmazok, $h : V \to W$ diffeomorfizmus (bijektív, differenciálható, a $\left(\dfrac{\partial h_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,k}$ Jacobi mátrix nemszinguláris).*

Legyen λ_V és λ_W a Lebesgue–mérték a V, illetve W halmazokon.

Ha $X : \Omega \to \mathbb{R}^k$, $P(X \in V) = 1$ abszolút folytonos eloszlású (a Lebesgue–mértékre nézve), akkor $h \circ X$ is abszolút folytonos eloszlású (a Lebesgue–mértékre nézve), és

$$f_{h(X)}(y) = f_X(h^{-1}(y)) \left| \det \frac{\partial h^{-1}}{\partial y} \right| .$$

Függetlenség

11. Definíció. Események függetlensége:

- *A, B függetlenek, ha $P(AB) = P(A)P(B)$.*
- *$A_1, \ldots, A_n$ függetlenek, ha $P(A_{i_1} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$, ha $k \leq n$ és $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$.*
- *végtelen sok esemény független, ha minden véges részrendszere független.*

12. Definíció (Eseményosztályok függetlensége)**.** *Legyenek $\{\mathcal{A}_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ eseményosztályok. Ezek függetlennek nevezzük, ha minden olyan $\{A_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ részrendszer független, ahol $A_\gamma \in \mathcal{A}_\gamma$.*

13. Definíció (Valószínűségi változók függetlensége)**.** *Legyenek $X_\gamma : \Omega \to \mathcal{X}_\gamma, \gamma \in \Gamma$ valószínűségi változók.. Ezeket függetlennek nevezzük, ha az $\mathcal{A}_\gamma = \sigma(X_\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ eseményosztályok függetlenek.*

Azaz

$$P(\cap_{j=1}^k \left\{X_{\gamma_j} \in B_j\right\}) = \prod_{j=1}^k P(X_{\gamma_j} \in B_j)\,,$$

minden $k \geq 1$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \Gamma$, $B_j \in \mathcal{F}_{\gamma_j}$, $j = 1, \ldots, k$ esetén.

Ez nem egészen ugyanaz, mint a diszkrét eloszlású v.v.-k esetén független megszokott definíciója:

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{j=1}^n P(X_j = x_j)\,.$$

14. Tétel. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ adott valószínűségi mező, és legyenek $\{\mathcal{R}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ ($\mathcal{R}_\gamma \subset \mathcal{A}$) metszetre zárt, egymástól független eseményosztályok. Ekkor az $\mathcal{F}_\gamma = \sigma(\mathcal{R}_\gamma)$ σ–algebrák is függetlenek.*

Bizonyítás:

(0) Feltehetjük, hogy $\emptyset, \Omega \in \mathcal{R}_\gamma$.

(1) Azt kell megmutatni, hogy minden $\gamma_1, \ldots \gamma_n \in \Gamma$, $A_j \in \mathcal{F}_{\gamma_j}$, $j = 1, \ldots n$ esetén

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \prod_{j=1}^n P(A_j)\,.$$

Azaz feltehetjük, hogy Γ véges halmaz.

Tegyük ezt fel, és legyen $\gamma_0 \in \Gamma$. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{F}_{\gamma_0}, \mathcal{R}_\gamma, \gamma \in \Gamma \setminus \gamma_0$ függetlenek.

(2) Legyen $\mathcal{A}_{\gamma_0} = \{C \in \mathcal{A} \,|\, C, \mathcal{R}_\gamma, \gamma \in \Gamma \setminus \gamma_0 \quad \text{függetlenek}\}$.
Ekkor $B, C \in \mathcal{A}_{\gamma_0}$ esetén
$B \cup C \in \mathcal{A}_{\gamma_0}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $B \cap C \in \mathcal{A}_{\gamma_0}$.
Valóban

$$P((B\cup C)\cap A_1\cap\cdots\cap A_n)+P((B\cap C)\cap A_1\cap\cdots\cap A_n) = P(B\cap A_1\cap\cdots\cap A_n)+P(C\cap A_1\cap\cdots\cap A_n) =$$
$$= (P(B)+P(C))\prod_{j=1}^{n} P(A_j) = (P(B\cup C)+P(B\cap C))\prod_{j=1}^{n} P(A_j)$$

(3) Továbbá, ha $B, C \in \mathcal{A}_{\gamma_0}$ és $C \subset B$, akkor $B \setminus C \in \mathcal{A}_{\gamma_0}$.
Valóban,

$$P((B\setminus C)\cap A_1\cap\cdots\cap A_n) = P(B\cap A_1\cap\cdots\cap A_n) - P(C\cap A_1\cap\cdots\cap A_n) =$$
$$= (P(B)-P(C))\prod_{j=1}^{n} P(A_j) = P(B\setminus C)\prod_{j=1}^{n} P(A_j)\,.$$

(4) Legyen
$$\mathcal{B}_{\gamma_0} = \left\{R_1 \cap \overline{R_2} \cap \cdots \cap \overline{R_k} \mid R_1, \ldots, R_k \in \mathcal{R}_{\gamma_0}, k \geq 1\right\}$$
Ez is metszetre zárt. Ekkor $\mathcal{B}_{\gamma_0} \subset \mathcal{A}_{\gamma_0}$.

Indukcióval. $k = 2$:

$$R_1 \cap \overline{R_2} = R_1 \setminus (R_1 \cap R_2) \in \mathcal{A}_{\gamma_0}\,.$$

$k \to k+1$:

$$R_1 \cap \overline{R_2} \cap \cdots \cap \overline{R_k} \cap \overline{R_{k+1}} = \left(R_1 \cap \overline{R_2} \cap \cdots \cap \overline{R_k}\right) \setminus \left((R_1 \cap R_{k+1}) \cap \overline{R_2} \cap \cdots \cap \overline{R_k}\right)$$

(5) Legyen
$$\mathcal{C}_{\gamma_0} = \{B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k \mid B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}_{\gamma_0}, k \geq 1\}\ .$$
Ekkor $\mathcal{C}_{\gamma_0} \subset \mathcal{A}_{\gamma_0}$.

Ismét indukcióval. $k = 1$: $\quad B_1 \in \mathcal{B}_{\gamma_0}$
$k \to k+1$
$(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k) \cup B_{k+1} \in \mathcal{A}_{\gamma_0}$, ha metszetük benn van.
Azaz, ha
$$(B_1 \cap B_{k+1}) \cup (B_2 \cap B_{k+1}) \cup \cdots \cup (B_k \cap B_{k+1}) \in \mathcal{A}_{\gamma_0}$$
De $B_j \cap B_{k+1} \in \mathcal{B}_{\gamma_0}$, $j = 1, \ldots, k$.

(6) A $\mathcal{C}_{\gamma_0}$ halmazrendszer algebra.
$\Omega \in \mathcal{C}_{\gamma_0}$ —- mert a (0) lépésben beleraktuk.
Az unióra zárt.
Komplementer:
Legyen $B_j = \cap_{i=1}^{h} R_{j,i}^{\epsilon_{j,i}}$, ahol $\epsilon_{j,i} = 0$, vagy 1, $j = 1, \ldots, k$. $\quad$ ($R^0 = R, R^1 = \overline{R}$.)

Ekkor
$$\overline{B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k} = \overline{\cup_{j=1}^{k} \cap_{i=1}^{h} R_{j,i}^{\epsilon_{j,i}}} = \cap_{j=1}^{k} \cup_{i=1}^{h} \overline{R_{j,i}^{\epsilon_{j,i}}} = \cup_f \cap_{j=1}^{k} \overline{R_{j,f(j)}^{\epsilon_{j,f(j)}}}\,,$$
ahol $f : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, h\}$.

(7) Legyenek most $A_j \in \mathcal{R}_{\gamma_j}$, $\gamma_j \in \Gamma \setminus \gamma_0$, $j = 1, \ldots, n$.
Továbbá

$$\begin{aligned} \mu(A) &= P(A \cap A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n), \quad A \in \mathcal{A} \\ \nu(A) &= P(A) \prod_{j=1}^{n} P(A_j), \quad A \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

A két mérték megegyezik a $\mathcal{C}_{\gamma_0}$ algebrán. Tehát a generált σ-algebrán is. Azaz $\mathcal{F}_{\gamma_0}$-n.
Ezért $\mathcal{F}_{\gamma_0}, \mathcal{R}_\gamma, \gamma \in \Gamma \setminus \gamma_0$ függetlenek. □.

15. Következmény. *Ha $\{\mathcal{A}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ független σ–algebrák, és $\Gamma = \cup_{\lambda \in \Lambda} \Gamma_\lambda$ partició, akkor a*

$$\mathcal{B}_\lambda = \sigma(\mathcal{A}_\gamma : \gamma \in \Gamma_\lambda)$$

σ–algebrák is függetlenek.

Bizonyítás:
Legyen $\mathcal{H}_\lambda = \{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \mid A_j \in \mathcal{A}_{\gamma_j}, \gamma_j \in \Gamma_\lambda, j = 1, \ldots, n, n \geq 1\}$.
Ekkor $\mathcal{H}_\lambda, \lambda \in \Lambda$ halmazrendszerek metszetre zártak, függetlenek.
Így a generált σ-algebrák is függetlenek. De $\sigma(\mathcal{H}_\lambda) = \mathcal{B}_\lambda$.

A Kolmogorov–féle 0–1 törvény

16. Tétel. *Legyenek $\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2, \ldots$ független σ–algebrák. Definiáljuk az $\mathcal{G}_n$ σ–algebrát a következőképpen:*

$$\mathcal{G}_n = \sigma(\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}, \ldots)$$

Ekkor tetszőleges

$$B \in \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$$

eseményre

$$P(B) = 0 \textit{ vagy } 1.$$

Bizonyítás:
Rögzített $n \geq 2$ tekintsük az indexek következő csoportosítását:

$$\{1, 2, \ldots n-1\}, \{n, n+1, \ldots\}.$$

Az előző tétel alapján $\sigma(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{n-1}), \mathcal{G}_n$ függetlenek egymástól.
Ha most $B \in \mathcal{G}_n$, akkor tehát B és $\sigma(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{n-1})$ függetlenek.

$n \to \infty$ esetén kapjuk, hogy B és $\cup_{n=2}^{\infty} \sigma(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_{n-1})$ is függetlenek.
Ez utóbbi metszetre zárt, tehát B és az ezáltal generált σ-algebra is függetlenek. Ez viszont éppen $\mathcal{G}_1$.

Azonban $B \in \mathcal{G}_1$. Tehát $P(B) = P(B)^2$.
Azaz, $P(B) = 0$ vagy 1. □

Valószínűségi változók függetlensége

17. Állítás. *Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ valós értékű valószínűségi változók. Jelölje*

$$X = (X_1, \ldots, X_n)$$

a belőlük képzett vektorváltozót. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

1. $X_1, \ldots, X_n$ függetlenek,

2. $Q_X = \times_{i=1}^n Q_{X_i}$,

3. $F_X(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$.

Bizonyítás:

(1) $\Rightarrow$ (2) Legyen $B = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n$. Ekkor

$$Q_X(B) = P(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = \prod P(X_j \in B_j) = \prod_j Q_{X_j}(B_j) = (Q_{X_1} \times \cdots \times Q_{X_n})(B).$$

(2) $\Rightarrow$ (3)

$$F_X(x_1, \ldots, x_n) = Q_X((-\infty, x_1), \times \cdots \times (-\infty, x_n)) = (Q_{X_1} \times \cdots \times Q_{X_n})((-\infty, x-1), \times \cdots \times (-\infty, x_n)) = \\ = \prod_j Q_{X_j}((-\infty, x_j)) = \prod F_{X_j}(x_j).$$

(3) $\Rightarrow$ (1)

Legyen $\mathcal{R}_j = \{\{X_j < x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$. Rögzített j mellett ez metszetre zárt halmazrendszer.

$j = 1, \ldots, n$ -re függetlenek egymástól.

Így a generált σ-algebrák is függetlenek. Azaz $X_1, \ldots, X_n$ független valószínűségi változók.

Diszkrét ill. abszolút folytonos eloszlás esetén

Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ diszkrét eloszlású v.v.-k. Akkor és csak akkor függetlenek, ha

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_j P(X_j = x_j).$$

Bizonyítás. $\Rightarrow$ azonnal látszik.

Visszafelé: Legyen $\mathcal{R}_j = \{\{X_j = x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$. Ez metszetre zárt, és $j = 1, \ldots, n$ mellett függetlenek. Ezért a generált σ-algebrák is azok. $\square$.

18. Állítás. *Abszolút folytonos esetben a függetlenség az alábbi módon karakterizálható. Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ valószínűségi változók. Ekkor,*

- *ha $X = (X_1, \ldots, X_n)$ abszolút folytonos, akkor $X_1, \ldots, X_n$ akkor és csak akkor függetlenek, ha*

$$f_X(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$$

- *ha $X_1, \ldots, X_n$ függetlenek és abszolút folytonos eloszlásúak, akkor $X = (X_1, \ldots, X_n)$ eloszlása is abszolút folytonos.*

Bizonyítás: Ha X eloszlása abszolút folytonos, akkor a marginális változóknak is létezik sűrűségfüggvényük.

Ekkor írhatjuk, hogy

$$P(X_1 \in B_1, \ldots X_n \in B_n) = \int_{B_1 \times \cdots \times B_n} f_X(x_1, \ldots x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

Másrészt

$$\prod_j P(X_j \in B_j) = \prod \int_{B_j} f_{X_j}(x_j) dx_j = \int_{B_1 \times \cdots \times B_n} \prod_j f_{X_j}(x_j) dx_1 \ldots dx_n.$$

Ha $X_1, \ldots, X_n$ függetlenek, akkor az első tagok egyeznek meg, így az utolsó tagok is. Az egyértelmű mértékkiterjesztés miatt tehát $f_X(x_1, \ldots, x_n) = \prod_j f_{X_j}(x_j)$.

Ha az utolsó tagok egyeznek meg, akkor az első tagok is, tehát $X_1, \ldots, X_n$ függetlenek.

3. előadás — 2020. szeptember 24.

Várható érték

19. Definíció. *Legyen X valós értékű valószínűségi változó. Ekkor várható értéke:*

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP.$$

A várható érték kiszámítása.

- Legyen $X : \Omega \to \mathcal{X}$ v.v. , $h : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ mérhető függvény. Ekkor
$$E(h \circ X) = \int_{\mathcal{X}} h dQ_X.$$
- ha $Q_X << \mu$, μ σ–véges, akkor
$$E(h \circ X) = \int_{\mathcal{X}} h \frac{dQ_X}{d\mu} d\mu.$$
- ha X diszkrét eloszlású, $x_1, x_2, \ldots$ az értékei, akkor
$$E(h \circ X) = \sum_i h(x_i) P(X = x_i)$$

20. Tétel. *Összetett valószínűségi változók várható értékének kiszámítása.*

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$*, ha a jobboldal létezik és jól definiált.*
- $E(AX) = AE(X)$ *, ha X véges várható értékű (esetleg mátrixértékű) valószínűségi változó, és A pedig konstans (mátrix). (Ha $X = (X_{i,j})_{i=1,,\ldots m, j=1,\ldots n}$ akkor $E(X) = (E(X_{i,j}))_{i=1,,\ldots m, j=1,\ldots n}$.)*
- *Ha X és Y függetlenek és várható értékük véges, akkor*
$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Az első két állítás adódik azonnal az integrál tulajdonságaiból.
Bizonyítás: (harmadik állítás)
Elég skalár értékű valószínűségi változóra bizonyítani.
Fubini-tételt szeretnénk alkalmazni.
1. lépés

$$E(|XY|) = \int_{\mathbb{R}^2} |xy| dQ_{X,Y} = \int_{\mathbb{R}} |x| \left(\int_{\mathbb{R}} |y| dQ_Y \right) dQ_X = \int_{\mathbb{R}} |x| dQ_X \int_{\mathbb{R}} |y| dQ_Y \,.$$

Nemnegatív függvény esetén alkalmazható a Fubini-tétel.
2. lépés

$$E(XY) = \int_{\mathbb{R}^2} xy dQ_{X,Y} == \int_{\mathbb{R}} x \left(\int_{\mathbb{R}} y dQ_Y \right) dQ_X = \int_{\mathbb{R}} x dQ_X \int_{\mathbb{R}} y dQ_Y = E(X)E(Y) \,.$$

Az abszolút érték integrálja véges, tehát alkalmazható a Fubini-tétel.

A várható értékre vonatkozó egyenlőtlenségek

21. Lemma. *(A várható érték pozitivitása.)*

- *(i) Ha* $X \geq 0$*, akkor* $E(X) \geq 0$.
- *(ii) Legyen* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $K \subset \mathbb{R}^n$*, konvex zárt halmaz. Tegyük fel, hogy* $P(X \in K) = 1$*. Ekkor* $EX \in K$*, feltéve, hogy a várható érték véges.*

Bizonyítás: Tetszőleges $y \in \mathbb{R}^n$ esetén létezik olyan $\varphi(y) \in K$, melyre

$$\|y - \varphi(y)\| = \inf \{\|y - x\| \mid x \in K\} .$$

Megmutatható, hogy

$$y^T(y - \varphi(y)) \geq \varphi(y)^T(y - \varphi(y)) \geq x(y - \varphi(y))$$

tetszőleges $x \in K$ esetén.

Tekintsük ugyanis a $t \to |y - ((1-t)\varphi(y) + tx)|^2$ függvényt, $0 \leq t \leq 1$ esetén. ennek $t = 0$ helyen minimuma van. Ezért az ottani jobboldali derivált értéke nemnegatív. Így

$$(y - \varphi(y))^T (\varphi(y) - x) \geq 0 .$$

Alkalmazzuk ezt a $x = X$, $y = EX$ választással.

$$EX^T(EX - \varphi(EX)) \geq \varphi(E(X))^T(EX - \varphi(EX)) \geq X^T(EX - \varphi(EX)).$$

Várható érteket véve mindhárom kifejezésben adódik, hogy

$$EX^T(EX - \varphi(EX)) \geq \varphi(E(X))^T(EX - \varphi(EX)) \geq EX^T(EX - \varphi(EX)).$$

Tehát egyenlőség kell, hogy teljesüljön. Azaz

$$EX = \varphi(EX).$$

22. Következmény (Jensen-egyenlőtlenség)**.** *Ha* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *valószínűségi változó,* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *konvex függvény. tegyük fel, hogy* X *és* $f \circ X$ *véges várható értékűek. Ekkor*

$$E(f \circ X) \geq f(EX).$$

Bizonyítás: Legyen $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$K = \{(x, y)) \mid x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, y \geq f(x)\} .$$

Ez konvex, zárt. Továbbá $(X, f \circ X) \in K$.

Ezért $E[(X, f \circ X)] = (EX, E(f \circ X)) \in K$. Azaz

$$E(f \circ X) \geq f(EX) .$$

□

23. Lemma. *Legyen* $X \geq 0$*. Továbbá* φ *olyan függvény, melyre* $\varphi(t) \geq 0$*, ha* $t \geq 0$*. Legyen*

$$\varphi(z) = \int_0^z \varphi(t)dt.$$

Ekkor

$$E\varphi(X) = \int_0^\infty \varphi(t)(1 - F(t))dt,$$

ahol F *az* X *eloszlásfüggvénye.*

Bizonyítás:

$$E\varphi(X) = \int \varphi(X)dP = \int_\Omega \int_0^X \varphi(t)dtdP = \int_\Omega \int_0^\infty \varphi(t)\chi_{\{t\le X\}}dtdP = \int_0^\infty \varphi(t) \int \chi_{\{t\le X\}}dPdt =$$
$$= \int_0^\infty \varphi(t)P(X\ge t)dt\,.$$

24. Következmény. *Ha $X \ge 0$, akkor $EX = \int_0^\infty (1-F(t))dt$.*
Továbbá,

$$\begin{aligned} EX &\le \sum_{n=0}^\infty P(X\ge n) = 1 + \sum_{n=1}^\infty P(X \ge n) \\ &\ge \sum_{n=1}^\infty P(X\ge n) \end{aligned}$$

Szórás, kovariancia, korreláció

25. Definíció.

- *Tetszőleges $X:\Omega\to\mathbb{R}$ Valószínűségi változó esetén a $D^2(X) = E\left((X-EX)^2\right) = EX^2 - (EX)^2$ mennyiség az X szórásnégyzete.*
- *$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ esetén, feltéve, hogy $D^2(X) < \infty$ és $D^2(Y) < \infty$*

$$cov(X,Y) = E\left((X-EX)(Y-EY)\right)$$

  az X és Y kovarianciája.
- *Ugyancsak a fenti esetben, de feltéve, hogy $0 < D^2(X) < \infty$ és $0 < D^2(Y) < \infty$*

$$corr(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D^2(X)D^2(Y)}}$$

  az X és Y közötti korrelációs együttható.

Megjegyzés
Ha X és Y független valószínűségi változók, akkor $D^2(X+Y) = D^2(X) + D^2(Y)$.

26. Definíció. *Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ vektorértékű valószínűségi változó. Ekkor*

$$D^2(X) = Var(X) = E\left((X-EX)(X-EX)^T\right)$$

az ún. szórásmátrix, vagy kovariancia-mátrix.

Főátlóbeli elemei a szórásnégyzetek, a főátlón kívüli elemei a kovarianciák.

27. Állítás.

- *Markov-egyenlőtlenség: Legyen $X \ge 0$ valószínűségi változó és $\lambda > 0$ szám. Ekkor*

$$P(X\ge\lambda) \le \frac{EX}{\lambda}\,,$$

- *Csebisev-egyenlőtlenség: Legyen X valószínűségi változó, melyre $D^2(X) < \infty$, $\epsilon > 0$. Ekkor*

$$P\left(|X-EX| \ge \epsilon\right) \le \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Borel–Cantelli-lemma Erdős–Rényi-féle kiterjesztése.
Legyenek $A_1, A_2, \ldots$ események.

$$\limsup A_n = \{\omega \in \Omega \,|\, \omega \text{ az } \ A_n, n \geq 1 \text{ sorozatból végtelen soknak eleme}\}$$

28. Állítás. *Tegyük fel, hogy* $\sum P(A_n) = \infty$ *és*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P(A_i \cap A_j)}{\left(\sum_{i=1}^n P(A_i)\right)^2} = 1\,.$$

Ekkor $P(\limsup A_n) = 1$.

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy

$$\limsup A_n = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_n} = \infty \right\}.$$

Alkalmazzuk a Csebisev-egyenlőtlenséget:

$$P\left(\left|\sum_{j=1}^n \chi_{A_j} - \sum_{j=1}^n P(A_j)\right| \geq \epsilon \sum_{j=1}^n P(A_j)\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P(A_i \cap A_j) - \left(\sum_{i=1}^n P(A_i)\right)^2}{\epsilon^2 \left(\sum_{i=1}^n P(A_i)\right)^2}$$

A jobboldal liminf-je nulla. Ezért van olyan n_k, $k \geq 1$ részsorozat, hogy az összege véges. Azaz ekkor (legyen mondjuk $\epsilon = \frac{1}{4}$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\left|\sum_{j=1}^{n_k} \chi_{A_j} - \sum_{j=1}^{n_k} P(A_j)\right| \geq \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n_k} P(A_j)\right) < \infty\,.$$

Ekkor *ezekre az eseményekre* alkalmazható az eredeti Borel–Cantelli-lemma. Azaz *limsup-juk* valószínűsége nulla. Vegyük a komplementer eseményt:

$$P\left(\left\{\omega \,|\, \text{létezik } K(\omega), \text{ hogy ha } k \geq K(\omega), \text{ akkor } \quad \sum_{j=1}^{n_k} \chi_{A_j}(\omega) \geq \frac{3}{4} \sum_{j=1}^{n_k} P(A_j)\right\}\right) = 1\,.$$

De

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} P(A_j) = \infty\,.$$

A χ_{A_n} összeadandók nemnegatívak, ezért

$$P(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n} = \infty) = 1\,. \quad \square$$

Konvergenciafajták

1 vsz-ű konvergencia
Ez a majdnem mindenütt való konvergencia megfelelője. **Sztochasztikus konvergencia**

29. Definíció. $X_n \to X$ *sztochasztikusan, ha tetszőleges* $\epsilon > 0$ *esetén*

$$P\left(|X_n - X| > \epsilon\right) \to 0.$$

30. Állítás. *Az 1 vsz-ű konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia.*

Valóban
$$P\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = E\left(\chi_{\{|X_n - X|>\epsilon\}}\right) \to 0$$
mert Lebesgue-tétele alkalmazható.

31. Állítás. *A sztochasztikus konvergencia metrizálható.*
Nevezetesen, legyen
$$\kappa(X,Y) = \inf\left\{\epsilon > 0 \mid P\left(|X - Y| > \epsilon\right) \le \epsilon\right\}.$$
Ekkor

- *κ metrikát definiál a valószínűségi változók ekvivalenciaosztályain. (X és Y ekvivalensek, ha $P(X = Y) = 1$.)*
- *$X_n \to X$ sztochasztikusan $\Leftrightarrow \kappa(X_n, X) \to 0$.*
- *κ teljes metrikus teret határoz meg.*

Bizonyítás:
Megjegyzés: κ definíciójában akár min is írható. Valóban, legyen $\epsilon_n \to \kappa(X,Y)$ szigorúan monoton csökkenően. Ekkor $\cup_n \{|X - Y| > \epsilon_n\} = \{|X - Y| > \kappa(X,Y)\}$ (monoton növekvően), így
$$\lim_n P(|X - Y| > \epsilon_n) = P(|X - Y| > \kappa(X,Y)).$$
Ezért $P(|X - Y| > \kappa(X,Y)) \le \kappa(X,Y)$.
Háromszög egyenlőtlenség:
Mivel $|X - Z| \le |X - Y| + |Y - Z|$, ezért
$$P(|X - Z| > \kappa(X,Y) + \kappa(Y,Z)) \le P(|X - Y| + |Y - Z| > \kappa(X,Y) + \kappa(Y,Z)) \le$$
$$\le P(|X - Y| > \kappa(X,Y)) + P(|Y - Z| > \kappa(Y,Z)) \le \kappa(X,Y) + \kappa(Y,Z).$$
Ezért $\kappa(X,Z) \le \kappa(X,Y) + \kappa(Y,Z)$.
Tegyük fel, hogy $\kappa(X_n, X) \to 0$. Legyen $\epsilon > 0$. Ekkor, ha n elég nagy: $\kappa(X_n, X) < \epsilon$. Ezért
$$P(|X_n - X| \ge \epsilon) \le P\left(|X_n - X| \ge \kappa(X_n, X)\right) \to 0.$$
Megfordítva, tegyük fel, hogy $X_n \to X$ sztochasztikusan. Ha $\epsilon > 0$, akkor elég nagy n esetén $P(|X_n - X| > \epsilon) \le \epsilon$, ezért ekkor $\kappa(X_n, X) \le \epsilon$. Teljesség:

Tegyük fel, hogy $\kappa(X_n, X_m) \to 0$, ha $n, m \to \infty$. Válasszunk $n_1 < n_2 < \dots$ részsorozatot, hogy $\kappa(X_{n_j}, X_{n_{j+1}}) \le \frac{1}{2^{j+1}}$.
Ekkor $\sum_{j=1}^{\infty} P(\left|X_{n_{j+1}} - X_{n_j}\right| > \frac{1}{2^{j+1}}) \le \sum_j \frac{1}{2^{j+1}} < \infty$.
Borel–Cantelli-lemma adja, hogy $\sum_j (X_{n_{j+1}} - X_{n_j})$ konvergens 1-valószínűséggel, azaz létezik X, hogy $X_{n_j} \to X$ 1-valószínűséggel, így sztochasztikusan is.

Cauchy-konvergens plusz van konvergens részsorozat $\Rightarrow X_n \to X$.

32. Következmény. *Ha $X_n \to X$ sztochasztikusan, akkor létezik olyan részsorozat, melyre $X_{n_k} \to X$ 1 vsz-gel.*

33. Lemma (Riesz-lemma)**.** *Eléggé "gyors" sztochasztikus konvergencia esetén az 1 vsz.-ű konvergencia is teljesül. Pontosabban,*

- *a $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_n - X| > \epsilon_n\right) < \infty$, ahol $\epsilon_n \to 0$ feltételekből következik, hogy $X_n \to X$ 1 vsz.-gel;*
- *ha tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_n - X| > \epsilon\right) < \infty$, akkor $X_n \to X$ 1 vsz.-gel.*

L_p–konvergencia

Legyen $p \geq 1$. Ekkor $X_n \to X$ L_p-ben, ha $E(|X_n - X|^p) \to 0$, ha $n \to \infty$.

Megjegyzés: L_p-beli konvergenciából következik a sztochasztikus konvergencia.

$P(|X_n - X| > \epsilon) = P(|X_n - X|^p > \epsilon^p) \leq \frac{E(|X_n - X|^p}{\epsilon^p}$.

A fordított irányhoz szükség van a következő definícióra.

34. Definíció. *A $\mathcal{H} \subset L_1(P)$ egyenletesen integrálható, ha*

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{X\in\mathcal{H}} \left\{ \int\limits_{\{|X|>c\}} |X|dP \right\} = 0.$$

Rögtön látszik, hogy ha $\mathcal{H} \subset L_1$ véges halmaz, akkor egyenletesen integrálható.

35. Állítás. *$\mathcal{H} \subset L_1$ egyenletesen integrálható akkor és csak akkor, ha*

- $\sup_{X\in\mathcal{H}} E(|X|) < \infty$ *és*
- *tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy bármely A eseményre, ha $P(A) < \delta$, akkor*

$$\sup_{X\in\mathcal{H}} \int_A |X|dP \leq \epsilon.$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ egyenletesen integrálható. Ekkor

$$E(|X|) = \int\limits_{\{|X|\leq c\}} |X|dP + \int\limits_{\{|X|>c\}} |X|dP \leq c + \sup_{X\in\mathcal{H}} \int\limits_{\{|X|>c\}} |X|dP < \infty\,.$$

Továbbá

$$\int_A |X|dP = \int\limits_{A\cap\{|X|>c\}} |X|dP + \int\limits_{A\cap\{|X|\leq c\}} |X|dP \leq \int\limits_{\{|X|>c\}} |X|dP + cP(A)$$

Adott ϵ mellett legyen c olyan, hogy $\int\limits_{\{|X|>c\}} |X|dP \leq \frac{\epsilon}{2}$, majd $\delta = \frac{\epsilon}{2c}$. Ez jó. Megfordítva: Legyen $\epsilon > 0$. válasszuk meg ehhez δ értékét a feltétel szerint. $P(|X| > c) \leq \frac{E(|X|)}{c} < \delta$, ha c elég nagy. Így $\int\limits_{\{|X|>c\}} |X|dP \leq \epsilon$.

36. Következmény.

- *Ha $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ egyenletesen integrálhatóak, akkor $\{X + Y \mid X \in \mathcal{H}_1, Y \in \mathcal{H}_2\}$ is egyenletesen integrálható.*
- *Ha $E|X| < \infty$, akkor $\{Y \mid |Y| \leq |X|\}$ egyenletesen integrálható.*

37. Lemma (de la Vallée Poussin)**.** *A $\mathcal{H} \subset L_1$ akkor és csak akkor egyenletesen integrálható, ha létezik olyan $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ függvény, melyre*

$$\frac{f(x)}{x} \to \infty \text{ és } \sup_{X\in\mathcal{H}} Ef(|X|) < \infty.$$

Így L_p terek véges sugarú gömbjei egyenletesen integrálhatóak, ha $p > 1$.

38. Tétel. *$X_n \to X$ L_p-ben ($p \geq 1$) akkor és csak akkor, ha $X_n \to X$ sztochasztikusan és emellett még $\{|X_n|^p, n \geq 1\}$ egyenletesen integrálható.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $X_n \to X$, L_p-ben.

Mivel $\left|\frac{a+b}{2}\right| \leq \sqrt[p]{\frac{|a|^p+|b|^p}{2}}$, ezért $|a+b|^p \leq 2^{p-1}\left(|a|^p+|b|^p\right)$. Tehát $|X_n|^p \leq 2^{p-1}\left(|X_n - X|^p + |X| + p\right)$.
Használjuk az ekvivalens megfogalmazását az egyenletes integrálhatóságnak.
$\sup E|X_n|^p < \infty$, mivel L_p-ben konvergens, így korlátos is.
Továbbá $\int_A |X_n|^p dP \leq 2^{p-1}\left(\int_A |X_n - X|^p dP + \int_A |X|^p dP\right)$. Ha $\epsilon > 0$, akkor elég nagy n esetén $E|X_n - X|^p \leq \frac{\epsilon}{2^p}$.

Az elején véges sok kimarad, de azokhoz és X-hez megválasztható δ úgy, hogy $P(A) < \delta$ esetén a hozadék legfeljebb $\epsilon/2$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $X_n \to X$ sztochasztikusan és $|X_n|^p, n \geq 1$ egyenletesen integrálható. Ekkor van 1 valószínűséggel konvergens részsorozat: $n_j, j \geq 1$.

Fatou-lemma adja, hogy $E|X|^p \leq \liminf E|X_{n_j}|^p < \infty$.

Továbbá $|X_n - X|^p \leq 2^{p-1}\left(|X_n|^p + |X|^p\right)$, így $|X_n - X|^p$, $n \geq 1$ egyenletesen integrálható.

$E|X_n - X|^p = \int\limits_{\{|X_n - X| > \epsilon\}} |X_n - X|^p dP + \int\limits_{\{|X_n - X| \leq \epsilon\}} |X_n - X|^p dP$.

Legyen most $\eta > 0$. Ehhez $\epsilon^p \leq \frac{\eta}{2}$.

Létezik $\delta > 0$, hogy $\int_A |X_n - X|^p dP \leq \frac{\eta}{2}$, ha $P(A) \leq \delta$.

Mivel $P(|X_n - X| > \epsilon) \to 0$, ezért elég nagy n esetén értéke legfeljebb δ. De ekkor az első integrál értéke is legfeljebb $\frac{\eta}{2}$.

Ezért elég nagy n mellett $E|X_n - X|^p \leq \eta$. □

4. előadás — 2020. október 1.

Várható értékkel nem rendelkező valószínűségi változók esetén centrálásra a medián használható.

39. Definíció (Medián)**.** *Legyen X valós értékű valószínűségi változó. Ekkor X mediánja – $m(X)$ – minden olyan szám, melyre*

$$P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}, \quad P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$$

teljesülnek.

Példa: Legyen $P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{2}$. Ekkor $-1 \leq m \leq 1$ a lehetséges mediánok.
Könnyen megmutatható, hogy a lehetséges mediánok halmaza a

$$\left[\sup\left\{t : F(t) < \frac{1}{2}\right\}, \sup\left\{t : F(t) \leq \frac{1}{2}\right\}\right]$$

zárt intervallum.
Megjegyzés:
Ha $P(X \notin [a,b]) < \frac{1}{2}$, akkor $a \leq m(X) \leq b$.

40. Lemma (Lévy– egyenlőtlenség)**.** *Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független valószínűségi változók. Jelölje $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$. Ekkor*

- $P\left(\max\limits_{1 \leq j \leq n} (S_j + m(S_n - S_j)) > \epsilon\right) \leq 2P(S_n > \epsilon)$
- $P\left(\max\limits_{1 \leq j \leq n} |S_j + m(S_n - S_j)| > \epsilon\right) \leq 2P(|S_n| > \epsilon)$

Bizonyítás: Legyen

$$\nu = \begin{cases} \inf\{j \mid S_j + m(S_n - S_j) > \epsilon\}\,, & \text{ha van ilyen } 1 \le j \le n \\ n+1 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Továbbá $B_j = \{S_n - S_j \ge m(S_n - S_j)\}$, $j = 1, \ldots, n$.

Ekkor $\cup_{j=1}^{n} (B_j \cap \{\nu = j\}) \subset \{S_n > \epsilon\}$. Ezért

$$P(S_n > \epsilon) \ge \sum_{j=1}^{n} P(B_j \cap \{\nu = j\}) = \sum_{j=1}^{n} P(B_j) P(\nu = j) \ge\ge \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} P(\nu = j) = \frac{1}{2} P(\nu \le n)\,.$$

Az abszolút érték esetén: Vegyük észre, hogy ha $Z = -X$, akkor $-m(X) = m(Z)$ jó. Legyen $Z_j = -X_j$, $T_k = \sum_{j=1}^{k} Z_j$. Ekkor

$$P\left(\max_{1\le j\le n} |S_j + m(S_n - S_j)| > \epsilon\right) \le$$

$$P\left(\max_{1\le j\le n} (S_j + m(S_n - S_j)) > \epsilon\right) + P\left(\max_{1\le j\le n} (-S_j - m(S_n - S_j)) > \epsilon\right) =$$

$$= P\left(\max_{1\le j\le n} (S_j + m(S_n - S_j)) > \epsilon\right) + P\left(\max_{1\le j\le n} (T_j + m(T_n - T_j)) > \epsilon\right)$$

$$\le 2P(S_n > \epsilon) + 2P(T_n > \epsilon)\,.$$

Mivel $T_n = -S_n$, ezért $\{S_n > \epsilon\}$ és $\{T_n > \epsilon\}$ diszjunktak. Így

$$P\left(\max_{1\le j\le n} |S_j + m(S_n - S_j)| > \epsilon\right) \le 2P(|S_n| > \epsilon)\,. \quad \square$$

41. Tétel (Lévy-tétel)**.** *Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók. Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{\infty} X_i \textit{ sztochasztikusan konvergens} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} X_i \textit{ 1 vsz-gel konvergens}$$

Bizonyítás: A visszafele irány általánosan is igaz.

Tegyük fel a sor sztochasztikus konvergenciáját. Legyen $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$. Megmutatjuk, hogy

Mivel az $Y_k = \sup_{n,m\ge k} |S_n - S_m|$ monoton csökken, tehát biztosan konvergens. Elég azonosítani a határértéket. Ehhez pedig elég a sztochasztikus konvergencia.

Tudjuk, hogy S_n, $n \ge 1$ sztochasztikusan Cauchy-konvergens is. Legyen $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Elég nagy n, m esetén $P(|S_n - S_m| > \epsilon) \le \epsilon$, ezért ekkor $|m(S_n - S_m)| \le \epsilon$.

Lévy-egyenlőtlenség alapján:

$$P(\max_{m<k\le n} |S_k - S_m| > 2\epsilon) \le P(\max_{m<k\le n} |S_k - S_m + m(S_n - S_k)| > \epsilon) \le 2P(|S_n - S_m| > \epsilon) \le 2\epsilon\,.$$

$n \to \infty$ esetén adódik, hogy $P(\sup_{m<k} |S_k - S_m| > 2\epsilon) \le 2\epsilon$. Ugyanakkor $|S_k - S_j| \le |S_k - S_m| + |S_k - S_m|$.

Így $P(\sup_{k,j>m} |S_k - S_j| > 4\epsilon) \le 2P(\sup_{k>m} |S_k - S_m| > 2\epsilon) \le 4\epsilon$.

Nagy számok gyenge törvényei

42. Definíció. *Az* $X_1, X_2, \ldots$ *valószínűségi változó sorozatra teljesül a nagy számok gyenge törvénye, ha léteznek olyan* $b_n > 0$ $b_n \to \infty$, $a_n \in \mathbb{R}$ *sorozatok, melyekre teljesül a*

$$\frac{X_1 + \ldots X_n - a_n}{b_n} \to 0 \qquad \textit{sztochasztikusan}$$

konvergencia.

43. Tétel. *Ha* $X_1, X_2, \ldots$ *páronként korrelálatlan valószínűségi változók sorozata, melyre*

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} D^2(X_i) \to 0,$$

akkor

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - E(X_i)) \to 0\,, \quad \textit{sztochasztikusan}\,.$$

Bizonyítás:

$$P(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - E(X_i))\right| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} D^2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - E(X_i))\right) = = \frac{1}{\epsilon^2} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} D^2(X_i)\,. \quad \square$$

44. Tétel (Hincsin-féle gyenge törvény, bizonyítás nélkül)**.** *Legyenek* $X_1, X_2, \ldots$ *páronként független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy*

$$EX_i = m$$

véges. Ekkor

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \to m$$

sztochasztikusan.

45. Tétel (Feller – féle gyenge törvény)**.** *Legyenek* $X_1, X_2, \ldots$ *független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Ekkor*

$$\exists a_n,\ n \geq 1 \textit{ sorozat, hogy } \frac{S_n - a_n}{n} \to 0 \Leftrightarrow nP(|X_1| > n) \to 0.$$

Továbbá, $a_n = n \left(\int_{|X_1| \leq n} X_1 dP + o(1) \right)$ *definiálja a lehetséges "jó"* a_n *sorozatokat.*

46. Megjegyzés.

Ha $X_1 \in L_1$*, akkor* $nP(|X_1| > n) \leq E\left(|X_1| \chi_{\{|X_1| > n\}}\right) \to 0$*. és* $EX_1 - E\left(X_1 \chi_{\{|X_1| \leq n\}}\right) \to 0$*, tehát — megelőlegezve, hogy igaz a tétel — következik, hogy*

$$\frac{S_n}{n} \to EX_1$$

sztochasztikusan.

Tegyük fel először, hogy teljesül az $nP(|X_1| > n) \to 0$ feltétel.
Rögzített n mellett legyenek $X_j^{(n)} = X_j \chi_{\{|X_j| \leq n\}}$ és $S_n^* = \sum_{j=1}^{n} X_j^{(n)}$.
Ekkor $P(S_n \neq S_n^*) \leq \sum_{j=1}^{n} P(X_j \neq X_j^{(n)}) = nP(|X_1| > n) \to 0$.
Megmutatjuk, hogy $\frac{S_n^* - ES_n^*}{n} \to 0$, sztochasztikusan.
Ez elég, mert ekkor

$$P\left(\left|\frac{S_n - ES_n^*}{n}\right| > \epsilon\right) \leq P(S_n \neq S_n^*) + P\left(\left|\frac{S_n^* - ES_n^*}{n}\right| > \epsilon\right)$$

Csebisev-egyenlőtlenség:

$$P\left(\left|\frac{S_n^*-ES_n^*}{n}\right|>\epsilon\right)\le\frac{1}{\epsilon^2}\frac{1}{n^2}D^2(S_n^*)=\frac{D^2(X_1^{(n)})}{n\epsilon^2}\le\frac{1}{n\epsilon^2}E\left(\left(X_1^{(n)}\right)^2\right)$$

Alkalmazzuk a $\varphi(t)=2t$ függvényre a korábbi azonosságot. Ekkor $\varphi(z)=z^2$. Ezért

$$\frac{1}{n}E\left(\left(X_1^{(n)}\right)^2\right)=\frac{1}{n}\int_0^\infty 2tP\left(\left|X_1^{(n)}\right|>t\right)dt=\frac{2}{n}\int_0^n tP\left(\left|X_1^{(n)}\right|>t\right)dt\le\frac{2}{n}\int_0^n tP\left(|X_1|>t\right)dt\le$$
$$\le\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)P(|X_1|>k)\to 0$$

Megfordítva, tegyük fel, hogy alkalmas a_n, $n\ge 1$ mellett $\frac{S_n-a_n}{n}\to 0$. Legyen $\delta_1=a_1$, $\delta_n=a_n-a_{n-1}$, ha $n\ge 2$. Ekkor $a_n=\sum_{k=1}^n\delta_k$.

Módosítsunk: legyen $Z_k=X_k-\delta_k$, $k\ge 1$, és $T_k=\sum_{k=1}^n Z_k=S_n-a_n$.

Ekkor tehát $\frac{T_n}{n}\to 0$ a feltevés.

Ugyanakkor, $Z_n=T_n-T_{n-1}$. Ezért

$$\frac{Z_n}{n}=\frac{T_n}{n}-\frac{n-1}{n}\frac{T_{n-1}}{n-1}\to 0\,,\quad\text{sztochasztikusan}\,.$$

Tehát $P\left(\left|\frac{Z_n}{n}\right|>\epsilon\right)=\to 0$.

De $Z_n=X_n-\delta_n$ és $X_1-\delta_n$ azonos eloszlásúak, ezért $\frac{X_1-\delta_n}{n}\to 0$.

Tehát $\frac{\delta_n}{n}\to 0$. Adódik, hogy

$$\frac{\max_{1\le k\le n}|\delta_k|}{n}\to 0\,.$$

Azaz bármely $\varepsilon>0$ esetén elég nagy n mellett minden $1\le j\le n$ értékre $|\delta_j|\le n\varepsilon$.

Megmutatjuk, hogy hasonló állítás teljesül a T_n és így a Z_n sorozatra is.

Ehhez a Lévy-egyenlőtlenséget fogjuk használni. Ehhez az $m(T_n-T_j)$ mediánokat kellene először becsülni.

Elég nagy n-re, de akkor már minden $1\le j\le n$ esetén.

$$\max_{1\le j\le n}P(|T_n-T_j|>n\varepsilon)\le\max_{1\le j\le n}\left(P(|T_n|>\frac{n}{2}\varepsilon)+P(|T_j|>\frac{n}{2}\varepsilon)\right)\le$$
$$\le P\left(\left|\frac{T_n}{n}\right|>\frac{1}{2}\varepsilon\right)+\max_{j_0\le j\le n}P\left(\left|\frac{T_j}{j}\right|>\frac{1}{2}\varepsilon\right)+\max_{1\le j<j_0}P\left(\left|\frac{T_j}{n}\right|>\frac{1}{2}\varepsilon\right)$$

ahol j_0 olyan, hogy $j\ge j_0$ esetén $P\left(\left|\frac{T_j}{j}\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)<\frac{1}{6}$. Továbbá elég nagy n esetén $\max_{1\le j<j_0}P\left(\left|\frac{T_j}{n}\right|>\frac{1}{2}\varepsilon\right)<\frac{1}{6}$.

Ezért tehát elég nagy n esetén

$$\max_{1\le j\le n}P(|T_n-T_j|>n\varepsilon)<\frac{1}{2}\,,$$

azaz $|m(T_n-T_j)|\le n\varepsilon$, ha n elég nagy, minden $1\le j\le n$ mellett.

Lévy-egyenlőtlenség:

$$P\left(\max_{1\le j\le n}|T_j|>2n\varepsilon\right)\le P\left(\max_{1\le j\le n}|T_j+m(T_n-T_j)|>n\varepsilon\right)\le 2P(|T_n|>n\varepsilon)\to_{n\to\infty}0\,.$$

Így $\frac{\max_{1\le j\le n}|T_j|}{n}\to 0$ sztochasztikusan. Mivel $Z_j=T_j-T_{j-1}$, ezért $\frac{\max_{1\le j\le n}|Z_j|}{n}\to 0$

Ezért $P\left(\frac{\max\limits_{1\le j\le n}|Z_j|}{n}\le\varepsilon\right)\to 1$.

Azonban

$$P\left(\frac{\max\limits_{1\le j\le n}|Z_j|}{n}\le\varepsilon\right)=\prod_{j=1}^{n}P(|Z_j|\le n\varepsilon)=\prod_{j=1}^{n}(1-P(|Z_j|>n\varepsilon))\le e^{-\sum_{j=1}^{n}P(|Z_j|>n\varepsilon)}\le 1\,.$$

Így $\sum_{j=1}^{n}P(|Z_j|>n\varepsilon)\to 0$.

Végül

$$\sum_{1\le j\le n}P(|X_j|>2n\varepsilon)=\sum_{j=1}^{n}P(|Z_j+\delta_j|>2n\varepsilon)\le\sum_{j=1}^{n}P(|Z_j|>n\varepsilon)\,.$$

Tehát $nP(|X_1|>2n\varepsilon)\to 0$.

A Kolmogorov–féle 0–1 törvény alkalmazása

47. Definíció. *Az $A\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mérhető halmaz ún. aszimptotikus halmaz, ha tetszőleges $x,y\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ esetén, ha létezik olyan n, melyre $x_i=y_i$ tetszőleges $i\ge n$ esetén, akkor*

$$x\in A\quad\Leftrightarrow\quad y\in A$$

Könnyen megmutatható, hogy ha A aszimptotikus halmaz, akkor

$$A=\mathbb{R}^{n-1}\times A_n,$$

ahol

$$A_n=\left\{z\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\mid\exists x_1,x_2,\dots,x_{n-1}\text{ , hogy }(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},z)\in A\right\}.$$

48. Következmény. *Ha $X_1,X_2,\dots$ független valószínűségi változók, és A aszimptotikus halmaz, akkor*

$$P\left((X_1,X_2,\dots)\in A\right)=0\text{ vagy }1.$$

Példák

- Tegyük fel, hogy $b_n\to\infty$ rögzített sorozat. Legyen $A=\left\{x\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\mid\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n}x_j}{b_n}\quad\text{létezik}\right\}$,
- $A_c=\left\{x\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\mid\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n}x_j}{b_n}<c\right\}$,
- $A=\left\{x\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\mid\sum_{j=1}^{\infty}x_j\quad\text{véges}\right\}$,

Kiegészítő állítások — bizonyítás nélkül.

49. Tétel. *Legyenek $X_1,X_2,\dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy X_1 nem elfajult eloszlású.*

Ha valamely $a_j,\ j\ge 1$ együtthatósorozat esetén

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_iX_i$$

konvergens 1 vsz-gel, akkor $\sum_{j=1}^{\infty}a_j^2<\infty$.

50. Tétel (Marczinkiewicz - Zygmund)**.** *Legyen* $0 < p < 2$.
Ha $X_1, X_2, \ldots$ *független, azonos eloszlású valószínűségi változók, akkor*

$$E|X_1|^p < \infty \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{X_i}{i^{\frac{1}{p}}} - EY_i \right) \text{ konvergens 1 vsz-gel}$$

ahol $Y_i = \frac{X_i}{i^{\frac{1}{p}}} \chi_{\{|X_i|^p \leq i\}}$.

51. Tétel (Marczinkiewicz - Zygmund)**.** *Legyen* $0 < p < 2$.
Ha $X_1, X_2, \ldots$ *független, azonos eloszlású valószínűségi változók, akkor*

$$E|X_1|^p < \infty \Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - nc}{n^{\frac{1}{p}}} \text{ konvergens 1 vsz-gel}$$

alkalmas c *esetén.*

Itt $c = 0$, *ha* $p < 1$, *illetve* $c = E(X_1)$, *ha* $1 \leq p < 2$.

Mi történik $p = 2$ **esetén**
Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók, $P(X_j = 1) = P(X_j = -1) = \frac{1}{2}$.

Legyen $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$. Szimmetrikus bolyongás. $E(X_j) = 0$.

Tekintsük az

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}}, \quad \text{sorozatot}.$$

Azaz $p = 2$.
De erről szól a Moivre–Laplace-tétel.

$$P\left(a < \frac{S_n}{\sqrt{n}} < b \right) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Milyen fajta konvergencia ez? Még *sztochasztikus konvergencia sem lehet.*

5. **előadás** — 2020. október 8.

Valószínűségi mértékek gyenge konvergenciája
Eloszlásbeli konvergencia

52. Definíció. *Legyen* $(\mathcal{X}, \rho)$ *teljes, szeparábilis, metrikus tér (melyen* ρ *jelöli a metrikát). Jelölje* $\mathcal{B}$ *a Borel-halmazokat.*

A $Q_n, n \geq 1$ *valószínűségi mértékek sorozata* **gyengén** *tart* Q*-hoz, ha tetszőleges* $f \in C_b(\mathcal{X})$ *folytonos, korlátos függvény esetén*

$$\int f dQ_n \to \int f dQ.$$

53. Definíció. *Legyenek* $X_n : \Omega \to \mathcal{X}$ *véletlen mennyiségek,* $X : \Omega \to \mathcal{X}$ *adott véletlen mennyiség. Ekkor*

$$X_n \to X \text{ eloszlásban, ha } Q_{X_n} \to Q_X \text{ gyengén.}$$

Megjegyzés Tetszőleges $f \in C_b(\mathcal{X})$ esetén legyen M_f az $|f|$ egy felső korlátja. Ekkor a

$$Q \to \left(\int f dQ \right)_{f \in C_b(\mathcal{X})}$$

leképezés beágyazás (?), mely a valószínűségi mértékek terét beleképezi a

$$\prod_{f \in C_b(\mathcal{X})} [-M_f, M_f]$$

térbe.

Ezen szorzattéren vett szorzattopológia éppen a gyenge konvergenciát indukálja.

Mivel ezen tér kompakt, ezért tetszőleges végtelen részhalmazának van torlódási pontja. Tehát a valószínűségi mértékek tetszőleges végtelen részhalmazának mint ezen szorzattér részhalmazának van torlódási pontja.

Azonban ezen torlódási pont nem feltétlenül áll elő

$$\int f dQ, \quad f \in C_b(\mathcal{X})$$

alakban.

Megjegyzés
Ha $\mathcal{X}$ kompakt, akkor tetszőleges folytonos lineáris funckcionál előáll a fenti alakban. (Riesz-tétel)

54. Tétel. *Az alábbi állítások ekvivalensek.*

(1) $Q_n \to Q$ *gyengén,*

(2) $\limsup Q_n(F) \leq Q(F)$ *tetszőleges* F *zárt halmaz esetén,*

(3) $\liminf Q_n(G) \geq Q(G)$ *tetszőleges* G *nyílt halmaz esetén,*

(4) $\lim Q_n(A) = Q(A)$ *tetszőleges* A *halmaz esetén, melyre* $Q(\delta A) = 0$.

Bizonyítás:
(2) $\Leftrightarrow$ (3)
(2) $\Rightarrow$ (4)
$\mathrm{int}A \subset A \subset \overline{A}$. Ezért

$$\begin{aligned} \limsup Q_n(A) &\leq \limsup Q_n(\overline{A}) \leq Q(\overline{A}) \\ \liminf Q_n(A) &\geq \liminf Q_n(\mathrm{int}A) \geq Q(\mathrm{int}A) . \end{aligned}$$

Ha $Q(\delta A) = 0$, akkor $Q(\overline{A}) = Q(\mathrm{int}A) = Q(A)$.
Ezért $\lim_{n\to\infty} Q_n(A) = Q(A)$.
(1) $\Rightarrow$ (2)
Vezessük a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} F_\epsilon &= \{x \in \mathcal{X} \mid \rho(x, F) \leq \epsilon\} \\ h(z) &= 1 - z, \quad \text{ha } \ 0 \leq z \leq 1 , \text{ egyébként } \ 0 , \\ f_\epsilon(x) &= h\left(\frac{1}{\epsilon}\rho(x, F)\right) . \end{aligned}$$

Ekkor $\chi_F \leq f_\epsilon \leq \chi_{F_\epsilon}$. Így

$$\limsup Q_n(F) \leq \limsup \int f_\epsilon dQ_n = \int f_\epsilon dQ \leq Q(F_\epsilon) .$$

$\epsilon \to 0$ esetén, mivel $\cap_\epsilon F_\epsilon = F$, (hiszen F zárt halmaz) ezért adódik, hogy $\limsup Q_n(F) \le Q(F)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Legyen f folytonos korlátos függvény. $|f| < M$. Ekkor $g = \frac{1}{2M} f + \frac{1}{2}$ esetén $0 < g < 1$.

Legyen $k \ge 1$ rögztett:

$$F_{j,k} = \left\{ x \in \mathcal{X} \mid g(x) \ge \frac{j}{k} \right\}, j = 0, \ldots, k\,.$$

Ha valamely x esetén $\frac{i}{k} \le g(x) < \frac{i+1}{k}$, akkor $x \in F_{j,k}$, ha $j = 0, 1, \ldots i$. Tehát

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \chi_{F_{j,k}}(x) = \frac{i}{k} \le g(x) < \frac{i+1}{k} = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k} \chi_{F_{j,k}}(x) = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \chi_{F_{j,k}}(x)\,.$$

Tehát

$$\limsup_{n\to\infty} \int g dQ_n \le \limsup \int \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k} \chi_{F_{j,k}} dQ_n \le \frac{1}{k} + \int \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \chi_{F_{j,k}} dQ \le \frac{1}{k} + \int g dQ\,.$$

$k \to \infty$: adódik, hogy $\limsup \int g dQ_n \le \int g dQ$.

Ezért $\limsup \int f dQ_n \le \int f dQ$.

Ugyanezt alkalmazhatjuk a $-f$ függvényre. Tehát $\limsup \int -f dQ_n \le \int -f dQ$.

Azaz $\liminf \int f dQ_n \ge \int f dQ$. Tehát $\lim \int g dQ_n = \int g dQ$.

(4) $\Rightarrow$ (2). Legyen F zárt halmaz. Tekintsük az F_ϵ halmazok határpontjait. Ezek diszjunktak. Így legfeljebb megszámlálhatóan végtelen lehet közülük pozitív mértékű. Ezért létezik $\epsilon_k \to 0$ sorozat, hogy $Q(\delta F_{\epsilon_k}) = 0$.

$$\limsup Q_n(F) \le \limsup Q_n(F_{\epsilon_k}) = Q(F_{\epsilon_k})\,.$$

$k \to \infty$ mellett adódik (2). □

Megjegyzés

Ha $Q(\delta A) = 0$, akkor χ_A indikátorfüggvény Q majdnem mindenütt folytonos függvény. Ennek általánosítása: ha $Q_n \to Q$, és h a Q mérték szerint majdnem mindenütt folytonos függvény, akkor $\int h dQ_n \to \int h dQ$.

55. Lemma. *Legyen* $\left(\mathcal{X}', \rho'\right)$ *teljes, szeparábilis metrikus tér.* $h : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ *mérhető leképezés. Jelölje* $c(h)$ *a* h *folytonossági pontjainak halmazát. Tegyük fel, hogy* $X_n \to X$ *eloszlásban, továbbá* $Q_X(c(h)) = 1$. *Ekkor*

$$h(X_n) \to h(X) \text{ eloszlásban.}$$

Bizonyítás:

Legyen $F \subset \mathcal{X}'$ zárt. Ekkor $\overline{h^{-1}(F)} \subset h^{-1}(F) \cup (\mathcal{X} \setminus c(h))$.

Ezért

$$\limsup Q_{h\circ X_n}(F) = \limsup Q_{X_n}(h^{-1}(F)) \le \limsup Q_{X_n}(\overline{h^{-1}(F)}) \le Q_X(\overline{h^{-1}(F)}) =$$
$$= Q_X(h^{-1}(F)) = Q_{h\circ X}(F)$$

Kapcsolat más konvergenciafajtákkal

56. Lemma. *Ha* $\rho(X_n, X) \to 0$ *sztochasztikusan, akkor* $X_n \to X$ *eloszlásban.*

Bizonyítás: Legyen F zárt halmaz és $\varepsilon > 0$. Ekkor

$$\limsup Q_{X_n}(F) = \limsup P(X_n \in F) \le$$
$$\le \limsup \left(P(\{X_n \in F\} \cap \{\rho(X_n, X) \le \varepsilon\}) + P(\{X_n \in F\} \cap \{\rho(X_n, X) > \varepsilon\})\right) \le$$
$$\le P(X \in F_\varepsilon) = Q_X(F_\varepsilon)\,.$$

$\varepsilon \to 0$ mellett kapjuk, hogy $\limsup Q_{X_n}(F) \le Q_X(F)$. □

- Ha $X_n \to X$ eloszlásban, akkor $E|X| \le \liminf E|X_n|$.
- Ha $X_n \to X$ eloszlásban, és az $\{X_n,\ n \ge 1\}$ halmaz egyenletesen integrálható, akkor $EX_n \to EX$.
- Ha $X_n \to X$ eloszlásban, továbbá $X_n \ge 0$ és $EX_n \to EX$, akkor az $\{X_n\ n \ge 1\}$ halmaz egyenletesen integrálható.

57. Definíció. *Legyen $\mathcal{Q}$ valószínűségi mértékek családja az $(\mathcal{X}, \rho)$ téren. Ekkor*

- *$\mathcal{Q}$ feszes, ha tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén létezik olyan K_ϵ kompakt halmaz, melyre*

$$Q(K_\epsilon) \ge 1 - \epsilon, \text{ bármely } Q \in \mathcal{Q} \text{ esetén.}$$

- *$\mathcal{Q}$ relatív kompakt, ha tetszőleges $\mathcal{Q}$-beli végtelen sorozatból kiválasztható konvergens részsorozat.*

Nyilvánvalóan, ha $\mathcal{X}$ maga kompakt, akkor tetszőleges rajta értelmezett mértékcsalád feszes.

58. Tétel (Prohorov). *Teljes, szeparábilis metrikus téren értelmezett valószínűségi mértékcsalád esetén a feszesség és relatív kompaktság ekvivalensek.*

Bizonyítás:
Tegyük fel, hogy az $(\mathcal{X}, \rho)$ téren értelmezett $\mathcal{Q}$ mértékcsalád *relatív kompakt.*
Megmutatjuk, hogy ekkor feszes is. Ehhez, rögzített $\varepsilon > 0$ mellett alkalmas kompakt halmazt kell konstruálni.
A teljes szeparábilis metrikus tér kompakt részhalmazai a zárt, teljesen korlátos halmazok.
Legyen $\{x_1, x_2 \dots\} \subset \mathcal{X}$ sűrű részhalmaz. Jelölje $G_{j,k} = B(x_j, \frac{1}{k})$ nyílt gömböket.
Ekkor az

$$\cap_{k\ge1} \cup_{j=1}^{i_k} G(j,k)$$

teljesen korlátos. Sőt, $\overline{\cap_{k\ge1} \cup_{j=1}^{i_k} G(j,k)}$ kompakt lesz.

Úgy kellene az $i_1, i_2, \dots$ értékeket megválasztani, hogy ennek mértéke minden $Q \in \mathcal{Q}$ esetén legalább $1 - \varepsilon$ legyen.

Ha minden $k \ge 1$ mellett létezik i_k, hogy minden $Q \in \mathcal{Q}$ esetén

$$Q(\cup_{j=1}^{i_k} G(j,k)) \ge 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}$$

akkor a

$$K_\varepsilon = \overline{\cap_{k\ge1} \cup_{j=1}^{i_k} G(j,k)}$$

megfelelő halmaz lesz.
Indirekt: tegyük fel, hogy ezt nem lehet megcsinálni, megmutatjuk, hogy ekkor $\mathcal{Q}$ nem lehet relatív kompakt.

Azaz, tegyük fel, hogy létezik $\varepsilon > 0$ továbbá $k \ge 1$, hogy bármely $i \ge 1$ esetén van „rossz" mérték: azaz létezik $Q_i \in \mathcal{Q}$, hogy

$$Q_i(\cup_{j=1}^{i} G_{j,k}) < 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}\,.$$

A relatív kompaktság miatt van gyengén konvergens részsorozat. Legyen ez i_h, $h \ge 1$, és $Q = \lim_{h\to\infty} Q_{i_h}$.
Legyen most i rögzített szám. Ekkor elég nagy h mellett $i_h \ge i$. Ezért

$$Q(\cup_{j=1}^{i} G_{j,k}) \le \liminf_{h\to\infty} Q_{i_h}(\cup_{j=1}^{i} G_{j,k}) \le \liminf_{h\to\infty} Q_{i_h}(\cup_{j=1}^{i_h} G_{j,k}) \le 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}\,.$$

Mivel $\cup_{j=1}^{\infty} G_{j,k} = \mathcal{X}$, ezért $Q(\mathcal{X}) \le 1 - \frac{\varepsilon}{2^k} < 1$. Ez nem lehet.
Tehát a relatív kompaktságból következik a feszesség.

6. előadás — 2020. október 15.

A visszafele irányt csak $\mathbb{R}^n$-n.

Ebben az alábbi két lemma játszik fontos szerepet.

59. Lemma. *Legyenek Q_n, $n \geq 1$ az $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$-n értelmezett eloszlások, F_n jelölje a megfelelő eloszlásfüggvényeket. Ekkor*

$$Q_n \to Q \text{ gyengén } \Leftrightarrow \quad F_n(x) \to F(x)\ , \text{ tetszőleges } x \in c(F) \text{ esetén.}$$

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy $Q_n \to Q$ gyengén, és legyen $x \in c(F)$. Ekkor $Q(\delta(-\infty, x)) = 0$. Tehát

$$F_n(x) = Q_n((-\infty, x)) \to Q((-\infty, x)) = F(x)\,.$$

Megfordítva, tegyük fel, hogy $F_n(x) \to F(x)$ tetszőleges $x \in c(F)$ esetén. Azaz bizonyos félegyenes indikátor függvények integráljai konvergálnak. Közelítsünk ilyenek lineáris kombinációjával tetszőleges folytonos, korlátos függvényt. Ezt az egész számegyenesen egyenletesen nem lehet. Ezért „levágjuk" a végeket.

Legyen $\varepsilon > 0$, $a, -a$ az F folytossági pontjai, melyekre $F(-a) < \varepsilon$, $1 - F(a) < \varepsilon$.

f folytonos, korlátos függvény, $|f| < M$. Ekkor létezik $g = \sum_{j=1}^{J} c_j \chi_{(-\infty, x_j)}$, hogy $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$, ha $|x| \leq a$, $|g| < M$ és $x_1, x_2, \ldots, x_J \in c(F)$.

Ekkor

$$\left|\int f dQ_n - \int f dQ\right| \leq \left|\int\limits_{|x|>a} f dQ_n\right| + \left|\int\limits_{|x|>a} f dQ\right| + \left|\int\limits_{|x|\leq a} f dQ_n - \int\limits_{|x|\leq a} f dQ\right| \leq$$

$$\leq M\left|\int\limits_{|x|>a} 1 dQ_n\right| + M\left|\int\limits_{|x|>a} 1 dQ\right| + \left|\int\limits_{|x|\leq a} f dQ_n - \int\limits_{|x|\leq a} g dQ_n\right| + \left|\int\limits_{|x|\leq a} f dQ - \int\limits_{|x|\leq a} g dQ\right| + \left|\int\limits_{|x|\leq a} g dQ_n - \int\limits_{|x|\leq a} g dQ\right| \leq$$

$$\leq M\left|\int\limits_{|x|>a} 1 dQ_n\right| + M\left|\int\limits_{|x|>a} 1 dQ\right| + 2\varepsilon + \left|\int g dQ_n - \int g dQ\right| + \left|\int\limits_{|x|>a} g dQ_n\right| + \left|\int\limits_{|x|>a} g dQ\right|$$

Ezért

$$\limsup \left|\int f dQ_n - \int f dQ\right| \leq 4MQ(\{x \,|\, |x| > a\}) + 2\varepsilon \leq 8M\varepsilon + 2\varepsilon$$

Mivel ε akármilyen kicsiny lehet, kapjuk, hogy $\int f dQ_n \to \int f dQ$. □

60. Lemma (Helly-Bray)**.** *Eloszlásfüggvények tetszőleges F_n sorozatának van olyan részsorozata, melyre*

$$F_{n_j}(x) \to G(x)\ , \quad x \in c(G),$$

ahol G monoton növő, balról folytonos függvény.

Bizonyítás:

Az $F_n(x), n \geq 1$ korlátos halmaz, így van konvergens részsorozat.

Sorban véve $\mathbb{Q}$ pontjait kaphatunk $n_k, k \geq 1$ részsorozatot, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} F_{n_k}(r) = H(r)$, $r \in \mathbb{Q}$.

Legyen most $G(x) = \sup\{H(r) \,|\, r < x\}$. Ez balról folytonos, monoton növekvő.

Ekkor $H(r) \geq G(r), r \in \mathbb{Q}$.Legyen $x \in c(G)$

Válasszunk $r_2 > r_1 > x > r_3$ racionális számokat.

$$\begin{aligned}\limsup F_{n_k}(x) &\leq \limsup F_{n_k}(r_1) = H(r_1) \leq G(r_2)\,, \\ \liminf F_{n_k}(x) &\geq \liminf F_{n_k}(r_3) = H(r_3) \geq G(r_3)\,.\end{aligned}$$

$r_2 \to x$, $r_3 \to x$. Adódik, hogy $F_{n_k}(x) \to G(x)$.

61. Megjegyzés. *Az előző két lemma állításának bizonyítása kis körültekintéssel és az indexek gondos alkalmazásával könnyen átvihető véges-dimenziós euklidészi téren értelmezett valószínűségi mértékekre is.*

Prohorov-tétel — visszafele irány

Tegyük fel tehát, hogy az $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$-n értelmezett $\{Q_n, n \geq 1\}$ mértékcsalád *feszes.* Ekkor egyben *relatív kompakt* is.

Bizonyítás:

Legyen $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ tetszőleges részsorozat. A Helly–Bray-féle kiválasztási tétel alapján van $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ újabb részsorozat és G monoton növekvő, balról folytonos függvény, hogy $\lim\limits_{n\to\infty, n\in\mathbb{N}_2} F_n(x) = G(x)$, ha $x \in c(G)$.

Ha G egyben eloszlásfüggvény, akkor a másik lemma alapján a kiválasztott $\mathbb{N}_2$ részsorozat mentén Q_n tart a G által meghatározott mértékhez.

Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel $Q_n, n \geq 1$ feszes, így létezik $c < \infty$, hogy $Q_n(\mathbb{R} \setminus [-c, c]) < \varepsilon$. Legyen $a < -c$, $b > c$, $a, b \in c(G)$. Ekkor

$$G(a) = \lim_{n\to\infty, n\in\mathbb{N}_2} F_n(a) < \varepsilon \,, 1 - G(b) = \lim_{n\to\infty, n\in\mathbb{N}_2} (1 - F_n(b)) < \varepsilon$$

Tehát $\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0, \lim_{x\to\infty} G(x) = 1.$ □

62. Megjegyzés. *A Prohorov-tétel általános bizonyítása a Stone-féle reprezentációs tétel felhasználásával is történhet.*

Láttuk, hogy a mértékcsalád beágyazható egy alkalmas kompakt térbe, továbbá, hogy tetszőleges torlódási pont lineáris funkcionált határoz meg a folytonos, korlátos függvények terén.

Ezen funkcionál nyilvánvalóan pozitív, azaz nemnegatív függvényhez nemnegatív értéket rendel.

A Stone-tétel értelmében, ha ezen felül még monoton is, akkor létezik olyan mérték, amely szerinti integrál éppen az adott funkcionált adja meg.

A monotonitás azt jelenti, hogy ha $f_n \in C_b(\mathcal{X})$, $n \geq 1$ és $f_1 \geq \cdots \geq f_n \geq f_{n+1} \geq \cdots$, továbbá $f_n \to 0$, akkor az f_n sorozat mentén a funkcionál értéke is tart nullához.

Megjegyzés (folytatás)

Könnyen látható, hogyha a függvények monoton konvergenciája helyett egyenletes konvergenciát is tudnánk, akkor teljesülne ez a feltétel.

Ismert azonban, hogy kompakt halmazon a folytonos függvények monoton konvergenciájából (ha a határérték folytonos függvény) következik az egyenletes konvergencia.

A mértékek *feszességének* feltétele éppen azt biztosítja, hogy létezzék olyan kompakt halmaz, amelyen kívül mindegyik szóbanforgó mérték egyszerre kicsi, tehát azon korlátos függvény integrálja is kicsi marad.

A gyenge konvergencia metrizálása

63. Tétel. *Teljes, szeparábilis metrikus téren értelmezett valószínűségi mértékek gyenge konvergenciája metrizálható. Speciálisan,*

- *[Lévy-metrika] $\mathbb{R}$ esetén legyen*

  $$L(F, G) = \inf \{\varepsilon > 0 : F(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq G(x) \leq F(x + \varepsilon) + \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}\} \,,$$

  ahol F, G eloszlásfüggvények.

- *[Lévy-Prohorov-metrika] tetszőleges teljes, szeparábilis metrikus téren legyen*

  $$\pi(R, Q) = \inf \{\varepsilon > 0 : R(A) \leq Q(A_\varepsilon) + \varepsilon, Q(A) \leq R(A_\varepsilon) + \varepsilon, \; \forall \; A \in \mathcal{B}\}$$

Ezek a gyenge konvergenciát metrizálják, és az így keletkező metrikus tér teljes.

Megjegyzés. A π metrika az alábbi módon is megkapható. Legyenek X, Y olyan $\mathcal{X}$-értékű valószínűségi változók, melyek eloszlása rendre R, illetve Q. Legyen ekkor

$$\kappa(X,Y) = \inf\{\epsilon \geq 0 \mid P(\rho(X,Y) > \epsilon) \leq \epsilon\} \ .$$

Ekkor

$$\pi(R,Q) = \inf\{\kappa(X,Y) \mid X \text{ eloszlása } R, \quad Y \text{ eloszlása } Q\}$$

Kérdés
Hogyan lehet független valószínűségi változók összegének eloszlásbeli konvergenciáját kezelni?

$$\int f dQ_{X+Y} = Ef(X+Y)$$

Ha f multiplikatív függvény, akkor szorzatra bomlik a várható érték.

Az eloszlások karakterisztikus függvénye

64. Definíció. *Legyen X valós értékű valószínűségi változó. Legyen*

$$\varphi_X(t) = E\left(e^{itx}\right) = E(\cos tX) + iE(\sin tX),$$

ahol $i = \sqrt{-1}$

65. Állítás. *Teljesülnek az alábbi tulajdonságok:*

- $\varphi_X(0) = 1$, $|\varphi_X(t)| \leq 1$, $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$
- φ_X *egyenletesen folytonos,*
- φ_X *pozitív szemidefinit függvény. Azaz* $\sum\limits_{j,k=1}^{n} \varphi_X(t_j - t_k) z_j \overline{z_k} \geq 0$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$, $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.
- $\varphi_{aX+b}(t) = \varphi_X(at)e^{itb}$,
- *ha X, Y függetlenek, akkor* $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$

Bizonyítás:

- $|\varphi_X(t)| = |E(e^{itX})| \leq E|e^{itX}| = 1$
- $|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| = |E\left(e^{itX}(e^{ihX} - 1)\right)| \leq E(|e^{ihX} - 1| \to 0$, ha $h \to 0$.
- $$\sum_{j,k=1}^{n} \varphi_X(t_j - t_k) z_j \overline{z_k} = E\left(\sum_{j,k=1}^{n} e^{i(t_j - t_k)X} z_j \overline{z_k}\right) = E\left(\sum_{j=1}^{n} e^{it_jX} z_j \sum_{k=1}^{n} \overline{e^{it_kX} z_k}\right) \geq 0\,.$$
- $\varphi_{aX+b}(t) = E\left(e^{it(aX+b)}\right) = e^{itb}E\left(e^{itaX}\right) = e^{itb}\varphi_X(at)$
- $\varphi_{X+Y} = E\left(e^{it(X+Y)}\right) = E\left(e^{itX}\right)E\left(e^{itY}\right) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$

66. Állítás. *Legyen $n \geq 1$, egész. Ha $E|X|^n < \infty$, akkor φ n-szer folytonosan deriválható függvény, és*

$$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k E\left(X^k e^{itX}\right) \quad 1 \leq k \leq n$$

Emellett

$$\varphi_X(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{i^j E(X^j)}{j!} t^j + R_n(t),$$

ahol $R_n(t) = o\left(|t|^n\right)$, ha $t \to 0$.

Továbbá, ha valamely $0 < \delta \leq 1$ esetén $E(|X|^{n+\delta}) < \infty$, akkor

$$|R_n(t)| \leq \frac{2^{1-\delta} E|X|^{n+\delta}}{(1+\delta)(2+\delta)\cdots(n+\delta)} |t|^{n+\delta}.$$

Bizonyítás: Folytonosság: $\left|\varphi_X^{(n)}(t+h) - \varphi_X^{(n)}(t)\right| \leq E\left(|X|^n \left|e^{ihX} - 1\right| \left|e^{itX} i^n\right|\right) \to 0\,.$

Deriválhatóság és előállítás: Indukcióval. $n = 0$ esetén a definíció.

Használni fogjuk, hogy $\left|e^{it} - 1\right| = \left|2 \sin \frac{t}{2}\right|$, ezért $\left|e^{it} - 1\right| \leq |t|$. $\left|\frac{e^{ihX}-1}{h}\right| \leq |X|$.Tegyük fel most, hogy $E(|X|^{n+1}) < \infty$.

$$\frac{\varphi_X^{(n)}(t+h) - \varphi_X^{(n)}(t)}{h} = E\left(X^n \frac{e^{ihX} - 1}{h} e^{itX} i^n\right) \to E\left(X^{n+1} e^{itX}\right) i^{n+1}\,.$$

Maradéktagos Taylor-formula.

$\left|e^{it} - 1\right| = \left|2 \sin \frac{t}{2}\right| \leq 2\left|\frac{t}{2}\right|^{\delta} = 2^{1-\delta}|t|^{\delta}$. Ezért

$$e^{it} - \sum_{j=0}^{n} \frac{(it)^j}{j!} = e^{it} - 1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{(it)^j}{j!} = i \int_0^t \left(e^{is} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(is)^j}{j!}\right) ds$$

$$\left|e^{it} - \sum_{j=0}^{n} \frac{(it)^j}{j!}\right| \leq \int_0^{|t|} \frac{2^{1-\delta} s^{n-1+\delta}}{(1+\delta)\cdots(n-1+\delta)}\, ds = \frac{2^{1-\delta}|t|^{n+\delta}}{(1+\delta)\cdots(n+\delta)}$$

Ezért

$$\left|\varphi_X(t) - \sum_{j=0}^{n} \frac{(it)^j E(X^j)}{j!}\right| \leq E\left|e^{itX} - \sum_{j=0}^{n} \frac{(it)^j X^j}{j!}\right| \leq E\Big(\frac{2^{1-\delta}|tX|^{n+\delta}}{(1+\delta)\cdots(n+\delta)}\Big)$$

Speciális eset:

- $n = 1$, $\delta = 1$: $\left|e^{it} - 1 - it\right| \leq \frac{1}{2}|t|^2$
- $n = 2$, $\delta = 1$: $\left|e^{it} - 1 - it + \frac{1}{2}t^2\right| \leq \frac{1}{6}|t|^3$

Inverziós formulák

67. Tétel (Lévy-inverziós képlet)**.** *Legyen $a < b$. Ekkor*

$$\lim_{c\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{c} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t) dt = P(a < X < b) + \frac{1}{2}\left[P(X = a) + P(X = b)\right].$$

Bizonyítás:
Vegyük észre, hogy $\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it} = \int_a^b e^{-its}ds$. Ezért

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi_X(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\int_a^b e^{-its}ds\int_\Omega e^{itX}dPdt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_\Omega\int_a^b\int_{-c}^{c}\Big(\cos(t(X-s))+i\sin(t(X-s))\Big)dtdsdP =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Omega\int_a^b\int_{-c}^{c}\Big(\cos(t(X-s))\Big)dtdsdP = \frac{1}{2\pi}\int_\Omega 2\int_0^c\int_a^b\cos(t(X-s))dsdtdP = \frac{1}{2\pi}\int_\Omega 2\int_0^c\left[\frac{\sin t(X-s)}{-t}\right]_a^b dtdP =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_\Omega\int_0^c\left[\frac{\sin t(X-a)}{t}-\frac{\sin t(X-b)}{t}\right]dtdP = \int_\Omega\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{c(X-a)}\frac{\sin u}{u}-\int_0^{c(X-b)}\frac{\sin u}{u}du\right]dP$$

az $u = t(X-a)$ illetve $u = t(X-b)$ cserével.

Röviden d -t írva $(X-a)$ illetve $(X-b)$ helyébe, szükség lenne a

$$\lim_{c\to\infty}\int_0^{cd}\frac{\sin u}{u}du$$

értékére.De ez $d>0$ esetén $\frac{\pi}{2}$, $d<0$ esetén ennek ellentetje, $d=0$ mellett 0.

Továbbá $\left|\int_0^c\frac{\sin u}{u}du\right| \le \int_0^\pi\frac{\sin u}{u}du \le \pi$. Ezért Lebesgue-tétel alkalmazható. Szükség van a belső interandus határértékére. $\lim\limits_{c\to\infty}\left[\int_0^{c(X-a)}\frac{\sin u}{u}-\int_0^{c(X-b)}\frac{\sin u}{u}du\right] = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } X>b\\ \frac{\pi}{2}\,, & \text{ha } X=b\\ \pi\,, & \text{ha } a<X<b\\ \frac{\pi}{2}\,, & \text{ha } X=a\\ 0\,, & \text{ha } X<a\end{cases}$

Adódik tehát, hogy

$$\lim_{c\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi_X(t)dt = \int_\Omega\Big(\frac{1}{2}\chi_{\{X=b\}}+\chi_{\{a<X<b\}}+\frac{1}{2}\chi_{\{X=a\}}\Big)dP$$

68. Következmény. *Az eloszlásfüggvény és a karakterisztikus függvény kölcsönösen meghatározzák egymást.*

Bizonyítás: Legyen a,b folytonossági pont. Ekkor $P(a<X<b)$ meghatározott.$a\to-\infty$ esetén kapjuk $F_X(b)$, $b\in c(F_X)$ értékét. $b\nearrow x$ esetén pedig $F_X(x)$. □

7. előadás — 2020. október 22.

69. Következmény. *Ha $\varphi_X\in L_1$, akkor létezik sűrűségfüggvény, amely folytonos, és értéke*

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi_X(t)dt.$$

Bizonyítás: Ha $\varphi_X\in L_1$, akkor elvégezhető a $c\to\infty$ határátmenet. Adódik tehát

$$P(a<X<b)+\frac{1}{2}\left(P(X=a)+P(X=b)\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_a^b e^{-itx}dx\varphi_X(t)dt = \int_a^b\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi_X(t)dt\Big)dx$$

Az $a=b$ választás adja, hogy $P(X=a)=0$. Ezért $P(a<X<b)=Q_X(\chi_{(a,b)})=\int_a^b\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\varphi_X(t)dt\Big)dx$.

Lebesgue-tétele adja, hogy folytonos az fenti f függvény. □

70. Megjegyzés. *Vektorváltozó esetén a Lévy-féle inverziós formula a következő alakban írható fel: Legyen $X=(X_1,\ldots,X_n)$ n-dimenziós vektorváltozó. Jelölje*

$$\varphi_X(t_1,\ldots,t_n)=E(e^{i\sum_{j=1}^n t_jX_j})$$

az együttes karakterisztikus függvényt.Ekkor

$$\lim_{c\to\infty}\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\{|t_j|<c,j=1,\ldots,n\}}\prod_{j=1}^n\frac{e^{-it_ja_j}-e^{-it_jb_j}}{it_j}\varphi_X(t_1,\ldots,t_n)dt_1\ldots dt_n=$$

$$=E\left[\prod_{j=1}^n\left(\chi_{(a_j,b_j)}+\frac{1}{2}\chi_{\{a_j\}}+\frac{1}{2}\chi_{\{b_j\}}\right)(X_j)\right]$$

71. Lemma (Doob-lemma)**.** *Legyen φ_X az X valószínűségi változó karakterisztikus függvénye. Ekkor*

$$P(|X|>c)\le K(cd)\frac{1}{2d}\int_{-d}^{d}(1-\varphi_X(t))\,dt,$$

ahol $K(x)=\max_{t\ge x}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)^{-1}$.

Bizonyítás:

$$\frac{1}{2d}\int_{-d}^{d}(1-\varphi_X(t))\,dt=E\Big(\frac{1}{2d}\int_{-d}^{d}(1-\cos(tX)-i\sin(tX))\,dt\Big)=$$

$$=E\Big(\frac{1}{2d}\int_{-d}^{d}(1-\cos(tX))\,dt\Big)=E\Big(1-\frac{1}{d}\frac{\sin(dX)}{X}\Big)\ge$$

$$\ge\int\limits_{\{|X|>c\}}\Big(1-\frac{\sin dX}{dX}\Big)dP\ge\inf_{t\ge cd}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)P\left(|X|>c\right).\quad\square$$

72. Tétel (Folytonossági tétel)**.** *Legyenek F_n, $n\ge1$ eloszlásfüggvények, φ_n a megfelelő karakterisztikus függvények. Ekkor,*

(i) ha $F_n(t)\to F(t)$, $t\in c(F)$, akkor $\varphi_n\to\varphi$ véges intervallumon egyenletesen, ahol φ az F-hez tartozó karakterisztikus függvény,

(ii) ha $\varphi_n\to\psi$ pontonként, ahol ψ a nullában folytonos függvény, akkor létezik olyan F eloszlásfüggvény, melyre $F_n(t)\to F(t)$, $t\in c(F)$.

Bizonyítás:
(i) Mivel e^{itx} folytonos, ezért a pontonként konvergencia adódik.
Egyenletesség:
Legyen $\varepsilon>0$. Létezik olyan $-a,a\in c(F)$, melyre $F(-a)+(1-F(a))\le\varepsilon$.

$$|\varphi_n(t)-\varphi(t)|=\left|\int e^{itx}d\left(F_n(x)-F(x)\right)\right|\le$$

$$\le\left|\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-a,a)}e^{itx}dF_n(x)\right|+\left|\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-a,a)}e^{itx}dF(x)\right|+\left|\int\limits_{[-a,a)}e^{itx}d\left(F_n(x)-F(x)\right)\right|$$

Első tag

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-a,a)} e^{itx} dF_n(x)\right| \leq (F_n(-a) + (1 - F_n(a))) \to (F(-a) + (1 - F(a)) \leq \varepsilon\,.$$

Második tag: $\left|\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-a,a)} e^{itx} dF(x)\right| \leq (F(-a) + (1 - F(a)) \leq \varepsilon\,.$

Utolsó összeadanadó:

$$\int\limits_{[-a,a)} e^{itx} d\left(F_n(x) - F(x)\right) = \left[(F_n(x) - F(x))\, e^{itx}\right]_{-a}^{a} - \int\limits_{[-a,a)} (F_n(x) - F(x)) ite^{itx}\, dx$$

Itt $(F_n(a) - F(a))\, e^{ita} \to 0$, és $(F_n(-a) - F(-a))\, e^{-ita} \to 0$.

Ugyanakkor $\sup\limits_{|t|\leq T} \left|\int\limits_{[-a,a)} (F_n(x) - F(x)) ite^{itx}\, dx\right| \leq T \int\limits_{[-a,a)} |F_n(x) - F(x)|\, dx \to 0\,.$

Tehát $\limsup\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{|t|\leq T} |\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq 2\varepsilon\,.$

(ii) Megmutatjuk, hogy az $F_n, n \geq 1$ eloszlásfüggvények által meghatározott $Q_n, n \geq 1$ mértékcsalád feszes.

Ehhez Doob-lemma: ($cd = 1$ választással)

$$Q_n\left(\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{d}, \frac{1}{d}\right]\right) \leq K(1)\frac{1}{2d}\int_{-d}^{d}(1 - \varphi_n(t))\, dt \longrightarrow K(1)\frac{1}{2d}\int_{-d}^{d}(1 - \psi(t))\, dt$$

Mivel $\frac{1}{2d}\int_{-d}^{d}(1 - \psi(t))\, dt \to 0$, ha $d \to 0$ (ψ folytonos a nulla pontban), ezért adott $\varepsilon > 0$ esetén létezik d, hogy a fenti határérték kisebb, mint $\frac{\varepsilon}{2}$. Ezért elég nagy n mellett

$$Q_n\left(\mathbb{R} \setminus \left[-\frac{1}{d}, \frac{1}{d}\right]\right) \leq \varepsilon\,.$$

Adott ε mellett véges sok mérték marad ki. Azokhoz külön-külön beállítható a keresett kompakt halmaz. Ezek uniója már minden n esetén jó.

Mivel feszes, ezért realatív kompakt. Ezért van konvergens részsorozata. $Q_{n_k} \to Q$. Ekkor (i) alapján φ_{n_k} konvergál Q karakterisztikus függvényéhez. Jelölje ezt φ. De $\lim \varphi_n = \psi$. Ezért $\psi = \varphi$, azaz ψ karakterisztikus függvény.

Tegyük fel, hogy a teljes sorozat nem konvergál Q-hoz (gyengén). Ekkor létezik $f \in C_b(\mathbb{R})$, $\eta > 0$ és $m_j, j \geq 1$ részsorozat, hogy

$$\left|\int f dQ_{m_j} - \int f dQ\right| \geq \eta\,,\ j \geq 1\,.$$

De relatív kompakt: létezik $\mathbb{J} \subset \mathbb{N}$ részsorozat, hogy Q_{m_j} konvergál valahova. Legyen a határérték R. Ekkor $\varphi_{m_j}, j \in \mathbb{J}$ is konvergens. Ugyanakkor ez csak $\psi = \varphi$-hez tarthat. Tehát R karakterisztikus függvénye φ. Az egyértelműség miatt ekkor $R = Q$. Tehát

$$\int f\, dQ_{m_j} \longrightarrow_{j\in\mathbb{J}} \int f\, dQ\,.$$

Ez ellentmond az $Q_{m_j}, j \geq 1$ mértékek megválasztásának.

73. Tétel (Lévy)**.** *Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók. Az $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ sorozat akkor és csak akkor konvergál eloszlásban, ha 1 vsz.-gel konvergál.*

Bizonyítás: Legyen φ_n az S_n karakterisztikus függvénye. Tegyük fel, hogy $\varphi_n \to \varphi$ véges intervallumon egyenletesen. Elég a sztochasztikus Cauchy-konvergenciát igazolni. Legyen $n > m$. Ekkor $S_n = (S_n - S_m) + S_m$. Tehát $\varphi_n(t) = \varphi_{S_n - S_m}(t)\varphi_m(t)$. Ha ez utóbbi nem nulla, akkor megkapjuk $S_n - S_m$ karakterisztikus függvényének értékét az adott t helyen. Doob-lemma alkalmazásával

$$P\left(|S_n - S_m| > \varepsilon\right) \leq K(\varepsilon d)\frac{1}{2d}\int_{-d}^{d}\left(1 - \frac{\varphi_n(t)}{\varphi_m(t)}\right)\, dt \leq K(\varepsilon d)\frac{1}{2d}\int_{-d}^{d}\frac{|\varphi_n(t) - \varphi(t)| + |\varphi_m(t) - \varphi(t)|}{|\varphi_m(t)|}dt$$

$$P\left(|S_n - S_m| > \varepsilon\right) \leq K(\varepsilon d)\frac{1}{2d}\int_{-d}^{d}\frac{|\varphi_n(t) - \varphi(t)| + |\varphi_m(t) - \varphi(t)|}{|\varphi(t)| - |\varphi(t) - \varphi_m(t)|}dt\,.$$

Legyen d olyan, hogy $|\varphi(t)| > \frac{1}{2}$, ha $|t| \leq d$. Mivel ezen a halmazon $\varphi_m(t)$ egyenletesen tart φ-hez, ezért elég nagy m esetén itt φ_m sem nulla. Kapjuk

$$P\left(|S_n - S_m| > \varepsilon\right) \leq K(\varepsilon d)\frac{1}{2d}\int_{-d}^{d}\frac{|\varphi_n(t) - \varphi(t)| + |\varphi_m(t) - \varphi(t)|}{\frac{1}{2} - |\varphi(t) - \varphi_m(t)|}dt \to 0\,.$$

Centrális határeloszlás tétel és általánosításai

74. Tétel (centrális határeloszlástétel)**.** *Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre $D^2(X_1) < \infty$. Ekkor*

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(X_i - E(X_i)\right)}{\sqrt{nD^2(X_1)}} \to N(0,1)$$

eloszlásban

Bizonyítás: Legyen φ az $X_i - EX_i$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye, továbbá $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$, $\sigma^2 = D^2(X_1)$.

Ekkor

$$\varphi_{\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{n}\sigma}}(t) = \left(\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n\sigma^2}D^2(X_1) + o(\frac{1}{n})\right)^n \to e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

□

Legyen most $X_{n,j},\ j = 1, \ldots k_n,\ n \geq 1$ valószínűségi változók független szériasorozata, azaz tetszőleges rögzített n mellett $X_{n,1}, \ldots X_{n,k_n}$ függetlenek.

Tegyük fel, hogy $\sigma_{n,j}^2 = E(X_{n,j}^2) < \infty$ és

$$E(X_{n,j}) = 0, \quad \sum_{j=1}^{k_n}\sigma_{n,j}^2 = 1.$$

Jelölje

$$b_n^2 = \max_{1 \leq j \leq k_n} \sigma_{n,j}^2$$

és

$$L(n,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{k_n} E\left(X_{n,j}^2 \chi_{\{|X_{n,j}| > \varepsilon\}}\right)$$

75. Tétel (Lindeberg-Feller)**.** *Az alábbi állítások ekvivalensek.*

- *tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén $L(n,\varepsilon) \to 0 \quad (L)$*

- $b_n^2 \to 0$, *(AK)* *és* $S_n = \sum_{j=1}^{k_n} X_{nj} \to N(0,1)$ *(CHT) eloszlásban.*

Bizonyítás: Karakterisztikus függvények konvergiáját vizsgáljuk.Jelölje $\varphi_{n,j} = \varphi_{X_{n,j}}$ $\varphi_{S_n} = \prod_{j=1}^{n_j} \varphi_{X_{n,j}}$.
Alapötlet: logaritmust veszünk, hogy szorzat helyett összeg legyen. Majd sorba fejtünk. Logaritmust lineárisan, a karakterisztikus függvényt négyzetes polinommal közelítve.

Maradéktagok becsléséhez kellenek:

- Ha $z \in \mathbb{C}$, és $|z-1| \leq \frac{1}{2}$, akkor $|log z + 1 - z| \leq |z-1|^2$.
- Legyen $x \in \mathbb{R}$ esetén $e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}Q(x)$. Ekkor $|1-Q(x)| \leq 1$, $|Q(x)| \leq \frac{|x|}{3}$ és $Re\, Q(x) \geq \frac{3}{4}\chi_{\{|x|\geq 4\}}$

Ezek igazolása:
Legyen $u = 1-z$. Ekkor $\log(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \dots$ ..Ezért

$$\|\log(1-u) + u| \leq \frac{|u^2|}{2}\left(1 + \frac{2|u|}{3} + \frac{2|u|^2}{4} + \dots\right) \leq$$
$$\leq \frac{|u^2|}{2}\left(1 + |u| + |u|^2 + |u|^3 + \dots\right) = \frac{|u^2|}{2(1-|u|)} \leq |u|^2\,,$$

ha $|u| \leq \frac{1}{2}$.

Az $|e^{ix} - 1 - ix| \leq \frac{x^2}{2}$, illetve $|e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2}| \leq \frac{|x|^3}{6}$ adják az első két egyenlőtlenséget. Speciálisan $|Q(x)| \leq 2$ és $Re\, Q(x) \geq 0$.

Ha most $x \neq 0$, akkor $Q(x) = 1 - 2\frac{1-e^{ix}}{x^2} - i\frac{2}{x}$. Tehát

$$Re\, Q(x) = 1 - \frac{2(1-\cos x)}{x^2} \geq \frac{3}{4}\,, \quad \text{ha}\, |x| \geq 4\,.$$

1. lépés.(L) $\to$ (AK)

$$\sigma_{n,j}^2 = E(X_{n,j}^2) = \int\limits_{\{|X_{n,j}|\leq\varepsilon\}} X_{n,j}^2 dP + \int\limits_{\{|X_{n,j}|>\varepsilon\}} X_{n,j}^2 dP \leq \varepsilon^2 + L(n,\varepsilon)\,,$$

tehát $b_n^2 \leq \varepsilon^2 + L(n,\varepsilon) \to \varepsilon^2$. Ezért $b_n^2 \to 0$.

2. lépés. Megmutatjuk, hogy (AK) mellett (L) és (CHT) ekvivalensek egymással.

Tegyük fel tehát, hogy $b_n \to 0$.

Ahhoz, hogy a logaritmus közelítését használni tudjuk, ellenőrizni kell a $|z-1| \leq \frac{1}{2}$ feltételt.

$$|\varphi_{n,j}(t) - 1| = \left|E\left(e^{itX_{n,j}} - 1\right)\right| = \left|E\left(e^{itX_{n,j}} - 1 - itX_{n,j}\right)\right| \leq \frac{t^2}{2}E\left(X_{n,j}^2\right) \leq b_n^2\frac{t^2}{2}$$

Rögzített t mellett, ha n elég nagy, teljesül a $b_n t^2 \leq 1$ feltétel.

Ekkor — a $\varphi_{n,j}(t)$ esetén a logaritmus főértékét véve, és ezek összege adja majd φ_{S_n} logaritmusát: $\log\varphi_{S_n}(t) = \sum_{j=1}^{k_n}\log\varphi_{n,j}(t)$— kapjuk, hogy

$$\left|\sum_{j=1}^{k_n}\log\varphi_{n,j}(t) - \sum_{j=1}^{k_n}(\varphi_{n,j}(t) - 1)\right| \leq \sum_{j=1}^{k_n}|\varphi_{n,j}(t) - 1|^2 \leq \sum_{j=1}^{k_n}\frac{t^4}{4}\sigma_{n,j}^4 \leq \frac{t^4}{4}b_n^2\sum_{j=1}^{k_n}\sigma_{n,j}^2 = \frac{t^4}{4}b_n^2 \to 0\,.$$

Továbbá

$$\sum_{j=1}^{k_n} (\varphi_{n,j}(t) - 1) - \left(-\frac{t^2}{2}\right) = \sum_{j=1}^{k_n} (\varphi_{n,j}(t) - 1) + \sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{n,j}^2 \frac{t^2}{2} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k_n} E\left(e^{itX_{n,j}} - 1 - itX_{n,j} + \frac{t^2}{2} X_{n,j}^2\right) = \sum_{j=1}^{k_n} E\left(\frac{t^2 X_{n,j}^2}{2} Q(tX_{n,j})\right)$$

Ha ez utóbbi nullához tart, akkor tehát $\sum_{j=1}^{k_n} \log \varphi_{n,j}(t) \to -\frac{t^2}{2}$, így $\varphi_{S_n}(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$, teljesül (függetlenül attól, hogy $\varphi_{S_n}(t)$ logaritmusának melyik ágát tekintettük.

Megfordítva, ha teljesül (CHT), akkor a folytonossági tétel alapján $\varphi_{S_n}(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}$ (véges intervallumon egyenletesen), ezért ekkor $\log \varphi_{S_n}(t)$ főértékét véve lesz igaz, hogy $\log \varphi_{S_n}(t) \to -\frac{t^2}{2}$. Szükség lenne tehát arra, hogy adott t esetén elég nagy n mellett mindenütt a logaritmusok főértékét véve teljesül, hogy $\log \varphi_{S_n}(t) = \sum_{j=1}^{k_n} \log \varphi_{n,j}(t)$.

Legyen $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} e^{-\frac{t^2}{2}}$. Ekkor — kihasználva az egyenletes konvergenciát — $|s| \leq |t|$ esetén elég nagy n esetén $|\varphi_{S_n}(s) - e^{-\frac{s^2}{2}}| \leq \varepsilon$, így ekkor Re $\varphi_{S_n}(s) > \varepsilon$. Ezen a tartományon a logaritmus főértéke folytonos függvény. Tekintsük most a $\log \varphi_{S_n}(s) - \sum_{j=1}^{k_n} \log \varphi_{n,j}(s)$ függvényt az $|s| \leq |t|$ tartományon. (Mindegyik tagban a logaritmus főértékét véve.) Ez folytonos függvény, ugyanakkor értéke bármely helyen $2\pi i$ egész számú többszöröse. Azaz konstans kell legyen. Mivel $s = 0$ helyen értéke 0, ezért adódik, hogy $\log \varphi_{S_n}(t) = \sum_{j=1}^{k_n} \log \varphi_{n,j}(t)$.

8. előadás — 2020. november 5.

Összefoglalva: (AK) mellett (CHT) ekvivalens azzal, hogy $\sum_{j=1}^{k_n} E\left(\frac{t^2 X_{n,j}^2}{2} Q(tX_{n,j})\right) \to 0$.

$$\left|\sum_{j=1}^{k_n} E\left(\frac{t^2 X_{n,j}^2}{2} Q(tX_{n,j})\right)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k_n} \left(\int\limits_{\{|X_{n,j}| \leq \varepsilon\}} \frac{t^2 X_{n,j}^2}{2} |Q(tX_{n,j})| \, dP + \int\limits_{\{|X_{n,j}| > \varepsilon\}} \frac{t^2 X_{n,j}^2}{2} |Q(tX_{n,j})| \, dP \right) \leq$$

$$\leq \frac{|t|^3}{6} \sum_{j=1}^{k_n} \varepsilon E(X_{n,j}^2) + \frac{|t|^2}{2} 2 \sum_{j=1}^{k_n} E(X_{n,j}^2 \chi_{\{|X_{n,j}| > \varepsilon\}}) = \frac{|t|^3}{6} \varepsilon + \frac{|t|^2}{2} 2L(n, \varepsilon)$$

Tehát, ha $L(n, \varepsilon) \to 0$, akkor (CHT) teljesül.

Másfelől, tegyük fel, hogy (CHT) teljesül. Ekkor

$$Re \sum_{j=1}^{k_n} E\left(\frac{t^2 X_{n,j}^2}{2} Q(tX_{n,j})\right) \to 0\,.$$

De

$$Re \sum_{j=1}^{k_n} E\left(\frac{t^2 X_{n,j}^2}{2} Q(tX_{n,j})\right) \geq \sum_{j=1}^{k_n} \frac{3}{4} \frac{t^2}{2} E\left(X_{n,j}^2 \chi_{\{|tX_{n,j}| > 4\}}\right)\,.$$

Adott $\varepsilon > 0$ értékhez választható t úgy, hogy $\frac{4}{|t|} \leq \varepsilon$. Tehát $L(n, \varepsilon) \to 0$. $\square$

76. Következmény. (Ljapunov) *Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $EX_i = 0$, és*

$$\Gamma_n^{2+\delta} = \sum_{j=1}^{n} E|X_j|^{2+\delta} < \infty$$

valamely $\delta > 0$ esetén. Ekkor,

$$\text{ha } \frac{\Gamma_n}{s_n} \to 0, \text{ akkor } \frac{S_n}{s_n} \to N(0,1),$$

ahol $s_n^2 = \sum_{j=1}^{n} E(X_j^2)$.

Bizonyítás: Legyen $k_n = n$, és $X_{n,j} = \frac{X_j}{s_n}$. Ekkor $D^2\left(\sum_{j=1}^{n} X_{n,j}\right) = 1$.
Továbbá

$$L(n,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} E\left(X_{n,j}^2 \chi_{\{|X_{n,j}|>\varepsilon\}}\right) = \sum_{j=1}^{n} E\left(\left(\frac{X_j}{s_n}\right)^2 \chi_{\{|X_j|>s_n\varepsilon\}}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s_n^2} \int\limits_{\{|X_j|>s_n\varepsilon\}} X_j^2 \, dP \le \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s_n^2} \int\limits_{\{|X_j|>s_n\varepsilon\}} X_j^2 \left|\frac{X_j}{s_n\varepsilon}\right|^{\delta} dP \le \frac{1}{\varepsilon^{\delta}} \left(\frac{\Gamma_n}{s_n}\right)^{2+\delta}.$$

□

Konvergenciagyorsaság

77. Tétel (Berry-Esseén)**.** *Legyen $X_{n,j},\ j = 1, \ldots k_n,\ n \ge 1$ független, nulla várható értékű szériasorozat. Tegyük fel, hogy $\sum_{j=1}^{k_n} \sigma_{n,j}^2 = 1$ és valamely $0 < \delta \le 1$ esetén $\Gamma_n \to 0$. (Itt most $\Gamma_n^{2+\delta} = \sum_{j=1}^{k_n} E\left(|X_{n,j}|^{2+\delta}\right)$.) Ekkor*

$$\sup_x |P(S_n < x) - \Phi(x)| \le C_\delta \Gamma_n^{2+\delta}$$

A bizonyítás lelke a következő becslés.

78. Lemma. *Legyenek X_1, X_2 valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy X_2 abszolút folytonos. Jelölje φ_1, φ_2 a megfelelő karakterisztikus függvényeket, f_2 a sűrűségfüggvényt. Ekkor $T > 0$ esetén*

$$\sup_x |F_1(x) - F_2(x)| \le \frac{1}{\pi} \int_{-T}^{T} \left|\frac{\varphi_1(t) - \varphi_2(t)}{t}\right| dt + \frac{24}{\pi T} \sup_x f_2(x).$$

Speciálisan, ha $X_1, X_2, \ldots$ azonos eloszlású, független v.v-k, $E(X_i) = \mu$, $D^2(X_i) = \sigma^2$ és $E|X_1 - \mu|^{2+\delta} < \infty$, ahol $0 < \delta \le 1$ rögzített szám, akkor

$$\sup_x \left|P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) - \Phi(x)\right| \le C_\delta \frac{E|X_1 - \mu|^{2+\delta}}{\sigma^{2+\delta}} n^{-\frac{\delta}{2}}$$

Ha $E|X_1|^3 < \infty$, akkor a konvergenciasebesség $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Ez nem javítható.

A határeloszlástétel néhány általánosítása

Néhány fontos tétel — bizonyítás nélkül.

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek közös eloszlásfüggvénye F. Ekkor

$$\frac{x^2\left(F(-x) + 1 - F(x)\right)}{\int_{-x}^{x} t^2 dF(t)} \to 0 \Leftrightarrow \exists a_n, b_n \text{ melyre } \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} X_k - b_n \to N(0,1)$$

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyre $E(X_i) = 0$, $E(X_i^2) = \sigma^2 < \infty$, $E|X_1|^3 < \infty$. Ekkor

$$\left| P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sigma\sqrt{n}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{cE|X_1|^3}{\sigma^3\sqrt{n}\,(1+|x|)^3}$$

alkalmas c konstans mellett.

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyre $EX_i = 0$, $EX_1^2 = \sigma^2$, $E|X_1|^3 < \infty$. Ekkor

$$\sup_x \left| P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sigma\sqrt{n}} < x \right) - \Phi(x) - \frac{EX_1^3}{6\sigma^3\sqrt{n}}(1-x^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \right| = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Legyenek $X_{n,j}$, $j = 1, \dots k_n$, $n \geq 1$ független szériasorozat elemei. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

- tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén $\max_j P(|X_{n,j}| > \epsilon) \to 0$

  és $\sum_{j=1}^{k_n} X_{n,j} \to N(a, \sigma)$
- tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén $\sum_j P|X_{n,j}| > \epsilon) \to 0$ és

  létezik $\tau > 0$, melyre $\sum_j D^2(X_{n,j}^\tau) \to \sigma^2$, $\sum_j E(X_{n,j}^\tau) \to a$,

  ahol $X_{n,j}^\tau = X_{n,j}\chi_{\{|X_{n,j}|<\tau\}}$.

Feltételes várható érték

Legyenek $A_1, A_2, \dots$ pozitív valószínűségű események, melyek particiót alkotnak. Jelölje $\mathcal{F}$ az általuk generált σ-algebrát.

Ez tehát atomos σ-algebra. Így $B \in \mathcal{F}$ esetén $B = \cup\{A_i \mid A_i \subset B\}$.

Legyen X tetszőleges, véges várható értékű valószínűségi változó. Ekkor

$$E(X|A_i) = \frac{1}{P(A_i)} \int_{A_i} X \, dP$$

. Ezért

$$\sum_{A_i \subset B} E(X|A_i)P(A_i) = \sum_{A_i \subset B} \int_{A_i} X \, dP = \int_B X dP$$

ha $B \in \mathcal{F}$.

Jelölje $Z = \sum_i E(X|A_i)\chi_{A_i}$. Ekkor Z mérhető az $\mathcal{F}$ σ-algebrára és

$$\int_B X dP = \int_B Z dP.$$

79. Definíció. *Legyen $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ tetszőleges σ-algebra, $X \in L_1$. Az X valószínűségi változó $\mathcal{F}$-re vonatkozó feltételes várható értéke – jelölje ezt $E(X|\mathcal{F})$ – tetszőleges olyan valószínűségi változó, mely*

- *$\mathcal{F}$–mérhető*
- *$\int_B E(X|\mathcal{F})dP = \int_B X dP$, ha $B \in \mathcal{F}$*

Tulajdonságok

(1) $E(X|\mathcal{F})$ létezik és m.m. egyértelmű,

(2) Ha $X \geq 0$, akkor $E(X|\mathcal{F}) \geq 0$,

(3) $|E(X|\mathcal{F})| \leq E(|X||\mathcal{F})$,

(4) $E(E(X|\mathcal{F})) = E(X)$,

(5) Ha Y $\mathcal{F}$-mérhető, $X, XY \in L_1$, akkor $E(XY|\mathcal{F}) = YE(X|\mathcal{F})$,

(6) Ha $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, akkor $E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{F}) = E(X|\mathcal{F})$,

(7) Ha X független $\mathcal{F}$-től, $X \in L_1$, akkor $E(X|\mathcal{F}) = E(X)$.

(1) Legyen μ mérték, amely az $\mathcal{F}$ σ-algebrán definiált:

$$\mu(B) = \int_B X \; dP \,,$$

és jelölje $P_{|\mathcal{F}}$ a P mérték megszorítását erre a σ-algebrára. Ekkor $\mu << P_{|\mathcal{F}}$. A

$$\frac{d\mu}{P_{|\mathcal{F}}}$$

Radon-Nikodym derivált rendelkezik a megkívánt tulajdonságokkal.

(2) Ha $\mu \geq 0$, akkor a Radon-Nikodym derivált is ilyen.

(3) Mivel $|X| + X \geq 0$ és $|X| - X \geq 0$, ezért (2)-ből adódik, hogy

$$E(|X| \,|\, \mathcal{F}) \geq -E(X \,|\, \mathcal{F}) \quad s \; E(|X| \,|\, \mathcal{F}) \geq E(X \,|\, \mathcal{F}) \,.$$

(4) Mivel $\Omega \in \mathcal{F}$ ezért $\int_\Omega X \; dP = \int_\Omega E(X \,|\, \mathcal{F}) \; dP$.

(5) Megmutatjuk, hogy az $YE(X \,|\, \mathcal{F})$ eleget tesz a feltételes várható tulajdonságainak. Nyilván $\mathcal{F}$ mérhető.

Legyen ν az $\mathcal{A}$-n értelmezett mérték. $\nu(A) = \int_A X \; dP$. (Ekkor $\mu = \nu_{|\mathcal{F}}$.)

Legyen most $B \in \mathcal{F}$.

$$\int_B XY \; dP = \int_B Y d\nu = \int_B Y d\nu_{|\mathcal{F}} = \int_B Y d\mu = \int_B YE(X \,|\, \mathcal{F}) \; dP_{|\mathcal{F}} = \int_B YE(X \,|\, \mathcal{F}) \; dP \,.$$

(6) Megmutatjuk, hogy az $E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{F})$ valószínűségi változó eleget tesz az $E(X|\mathcal{F})$ feltételes várható értéket definiáló követelményeknek. Nyilván $\mathcal{F}$-mérhető. Továbbá, $B \in \mathcal{F}$ esetén

$$\int_B E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{F}) \; dP = \int_B E(X|\mathcal{G}) \; dP = \int_B X \; dP \,,$$

mivel $B \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

(7) Ismét: megmutatjuk, hogy a konstans $E(X)$ értékű valószínűségi változó eleget tesz a feltételes várható érték követelményeinek.

A mérhetőség teljesül. Legyen most $B \in \mathcal{F}$. Ekkor B és X függetlenek egymástól. Ezért χ_B és X is azok.

$$\int_B X \; dP = \int_\Omega X\chi_B \; dP = E(X\chi_B) = E(X)E(\chi_B) = \int_B E(X) \; dP \,.$$

$\square$.

Többdimenziós valószínűségi változó esetén a feltételes várható értéket koordinátánként definiáljuk.

80. Lemma. • *Ha $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, zárt, $P(X \in K) = 1$, $X \in L_1$, akkor*

$$P\left(E(X|\mathcal{F}) \in K\right) = 1.$$

• *Ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, X n-dimenziós, véges várható értékű valószínűségi változó és $f \circ X \in L_1$, akkor*

$$E(f(X)|\mathcal{F}) \geq f\left(E(X|\mathcal{F})\right) \quad m.m..$$

Bizonyítás: Láttuk már korábban, hogy tetszőleges $y \in \mathbb{R}^n$ esetén létezik olyan $\varphi(y) \in K$, melyre

$$\|y - \varphi(y)\| = \inf\left\{\|y - x\| \mid x \in K\right\}.$$

Ekkor

$$y^T(y - \varphi(y)) \geq \varphi(y)^T(y - \varphi(y)) \geq x^T(y - \varphi(y))$$

tetszőleges $x \in K$ esetén.

x helyébe X-t, y helyébe $E(X|\mathcal{F})$-et akarjuk behelyettesíteni. De kell ekkor, hogy φ mérhető függvény. Ennél többet mutatunk meg: folytonos függvény.

Legyen $z \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges. Ekkor (megcserélve a kétoldalt)

$$\varphi(z)^T(y - \varphi(y)) \leq \varphi(y)^T(y - \varphi(y)),$$

így

$$\left(\varphi(y) - \varphi(z)\right)^T \varphi(y) \leq \left(\varphi(y) - \varphi(z)\right)^T y$$

Felcserélve y és z szerepét:

$$\left(\varphi(z) - \varphi(y)\right)^T \varphi(z) \leq \left(\varphi(z) - \varphi(y)\right)^T z$$

Összeadva ezeket

$$\left(\varphi(y) - \varphi(z)\right)^T \left(\varphi(y) - \varphi(z)\right) \leq \left(\varphi(y) - \varphi(z)\right)^T (y - z) \leq \|\varphi(y) - \varphi(z)\|\|y - z\|.$$

Tehát $\quad \|\varphi(y) - \varphi(z)\| \leq \|y - z\|$.

Legyen $M < \infty$ és alkalmazzuk az eredeti egyenlőtlenséget $x = X$, $y = E(X \mid \mathcal{F})$ választással.

$$\begin{aligned}
&\chi_{\{|E(X \mid \mathcal{F})| \leq M\}} E(X \mid \mathcal{F})^T(E(X \mid \mathcal{F}) - \varphi(E(X \mid \mathcal{F}))) \geq \\
&\qquad \geq \chi_{\{|E(X \mid \mathcal{F})| \leq M\}} \varphi(E(X \mid \mathcal{F}))^T(E(X \mid \mathcal{F}) - \varphi(E(X \mid \mathcal{F}))) \geq \\
&\qquad\qquad \geq \chi_{\{|E(X \mid \mathcal{F})| \leq M\}} X^T(E(X \mid \mathcal{F}) - \varphi(E(X \mid \mathcal{F}))).
\end{aligned}$$

Feltételes várható érteket véve — és kihasználva hogy az egyenlőtlenségsorozat utolsó tagjában az $\mathcal{F}$-mérhető tényező kiemelhető — a legnagyobb és legkisebb elem megegyeznek.

Tehát — egy oldalra rendezve az első két elemet:

$$\chi_{\{|E(X \mid \mathcal{F})| \leq M\}} \left\|E(X \mid \mathcal{F}) - \varphi(E(X \mid \mathcal{F}))\right\|^2 = 0.$$

$M \to \infty$ esetén adódik, hogy

$$E(X \mid \mathcal{F}) = \varphi(E(X \mid \mathcal{F})) \in K \text{. m.m..}$$

Jensen-egyenlőtlenség

Bizonyítás: Legyen $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$K = \{(x, y)) \,|\, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, y \geq f(x)\} \ .$$

Ez konvex, zárt. Továbbá $(X, f \circ X) \in K$.

Ezért $E\left((X, f \circ X) \,|\, \mathcal{F}\right) = (E(X|\mathcal{F}), E(f \circ X|\mathcal{F})) \in K$. Azaz

$$E\left(f \circ X|\mathcal{F}\right) \geq f\left(E(X|\mathcal{F})\right) . \quad \square$$

Állítás

Monoton konvergencia tétel, Fatou-lemma, Lebesgue-tétel érvényben maradnak a feltételes várható értékre is.

Bizonyítás:

Monoton konvergencia tétel: Legyen $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \ldots, X_n \to X$. Tegyük fel, hogy $E(X)$ véges. Ekkor $E(X_n|\mathcal{F}) \to E(X|\mathcal{F})$.

Tudjuk, hogy $0 \leq E(X_1|\mathcal{F}) \leq E(X_2|\mathcal{F}) \leq \cdots \leq E(X|\mathcal{F})$.

Jelölje $Y = \lim E(X_n|\mathcal{F})$. Ekkor $Y \leq E(X|\mathcal{F})$.

Ugyanakkor $E(X_n) \to E(X)$ és $E(X_n) = E\Big(E(X_n|\mathcal{F})\Big) \to E(Y)$.

Tehát $E(Y) = E(X) = E\left(E(X|\mathcal{F})\right)$.

Azaz $Y = E(X|\mathcal{F})$ 1-valószínűséggel.

Fatou-lemma: Legyenek $0 \leq X_n$. Ekkor

$$\liminf E(X_n|\mathcal{F}) \geq E\left(\liminf X_n|\mathcal{F}\right) .$$

Valóban, legyen $Y_k = \inf\limits_{n \geq k} X_n$. Ekkor $E(Y_k|\mathcal{F}) \leq E(X_n|\mathcal{F})$, ha $n \geq k$. Így $E(Y_k|\mathcal{F}) \leq \inf\limits_{n \geq k} E(X_n|\mathcal{F})$.

Továbbá $0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots$. Alkalmazható a monoton konvergencia tétel. Ezért

$$E\left(\liminf X_n|\mathcal{F}\right) = E\left(\lim_{k \to \infty} Y_k|\mathcal{F}\right) = \lim_{k \to \infty} E(Y_k|\mathcal{F}) \leq \lim_{k \to \infty} \inf_{n \geq k} E(X_n|\mathcal{F}) = \liminf E(X_n|\mathcal{F}) .$$

Lebesgue-tétel: Legyen $X_n, n \geq 1$ valószínűségi változó sorozat, melyre $|X_n| \leq Y$, ahol $E(Y) < \infty$. Tegyük fel, hogy $X_n \to X$ m.m. . Ekkor

$$E(X_n|\mathcal{F}) \to E(X|\mathcal{F}) .$$

Valóban: Alkalmazzuk a Fatou-lemmát az $Y + X_n \geq 0$ és az $Y - X_n \geq 0$ sorozatokra.

Kapjuk, hogy

$$\liminf E(Y + X_n|\mathcal{F}) = E(Y|\mathcal{F}) + \liminf E(X_n|\mathcal{F}) \geq E(\liminf(Y + X_n)|\mathcal{F}) = E(Y|\mathcal{F}) + E(X|\mathcal{F})$$

$$\liminf E(Y - X_n|\mathcal{F}) = E(Y|\mathcal{F}) - \limsup E(X_n|\mathcal{F}) \geq E(\liminf(Y - X_n)|\mathcal{F}) = E(Y|\mathcal{F}) - E(X|\mathcal{F})$$

Tehát

$$E(X|\mathcal{F}) \leq \liminf E(X_n|\mathcal{F}) \leq \limsup E(X_n|\mathcal{F}) \leq E(X|\mathcal{F}) \quad \square$$

9. előadás — 2020. november 12

Megjegyzés
L_2-térben a feltételes várható érték ortogonális projekció.

Valóban: legyen $X \in L_2$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebra. Jelölje $L_2(\mathcal{F})$ az $\mathcal{F}$-mérhető, L_2-beli valószínűségi változók alterét. Ekkor $Z \in L_2(\mathcal{F})$ esetén $E(XZ \mid \mathcal{F}) = ZE(X \mid \mathcal{F})$. Ezért

$$E\left[(X - E(X \mid \mathcal{F}))\, Z\right] = E(XZ) - E(E(X \mid \mathcal{F})Z) = E(XZ) - E(XZ) = 0\,. \quad \square$$

Állítás
Legyenek $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ σ-algebrák, $X \in L_1$. Tegyük fel, hogy $X, \mathcal{F}$ függetlenek $\mathcal{G}$-től. Ekkor

$$E(X \mid \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{G})) = E(X \mid \mathcal{F})\,.$$

Bizonyítás:
Megmutatjuk, hogy $E(X \mid \mathcal{F})$ a feltételes várható érték $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{G})$-re. Mérhetőség teljesül.
Legyen most $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{G}$. Ekkor

$$\int_{A\cap B} X\, dP = E(X\chi_A\chi_B) = E(X\chi_A)E(\chi_B) = \left(\int_A X\, dP\right) E(\chi_B) =$$
$$= \left(\int_A E(X \mid \mathcal{F})\, dP\right) E(\chi_B) = E(E(X \mid \mathcal{F})\chi_A)E(\chi_B) =$$
$$= E\left(E(X \mid \mathcal{F})\chi_A\chi_B\right) = \int_{A\cap B} E(X \mid \mathcal{F}) dP\,.$$

Ilyenek diszjunkt unióján is megegyezik a két integrál.Legyen

$$\mathcal{C} = \big\{\cup_{j=1}^n (A_j \cap B_j) \,:\, A_j \in \mathcal{F}, B_j \in \mathcal{G}, j = 1, \dots, n,$$
$$B_1, B_2, \dots, B_n \text{ partíció}, n \geq 1\}$$

Továbbá legyen $\mu(D) = \int_D X\, dP$, illetve $\nu(D) = \int_D E(X \mid \mathcal{F})\, dP$.
Ekkor $\mu_{|\mathcal{C}} = \nu_{|\mathcal{C}}$.
De $\mathcal{C}$ algebra.
Metszetre zárt: $C_1 = \cup_{j=1}^n (A_j \cap B_j)$, $C_2 = \cup_{i=1}^m \left(\tilde{A}_i \cap \tilde{B}_i\right)$ esetén

$$C_1 \cap C_2 = \cup_{j=1}^n \cup_{i=1}^m \left((A_j \cap \tilde{A}_i) \cap (B_j \cap \tilde{B}_i)\right)\,.$$

Továbbá $C = \cup_{j=1}^n (A_j \cap B_j)$ esetén

$$\Omega \setminus C = \cup_{j=1}^n \left((\Omega \setminus A_j) \cap B_j\right)\,.$$

Így $\mu_{|\sigma(\mathcal{C})} = \nu_{|\sigma(\mathcal{C})}$, és $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. $\square$

Jelölés:
Ha Y valószínűségi változó, akkor $E(X|Y)$ jelöli az $E(X|\sigma(Y))$ feltételes várható értéket.

Mivel $E(X|Y)$ mérhető $\sigma(Y)$-ra, ezért létezik olyan g függvény, melyre $E(X|Y) = g(Y)$. Jelölje ezt a g függvényt

$$E(X|Y = y).$$

Legyen $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{G})$. Ekkor a fenti g függvény megadható a következőképpen. Legyen

$$\mu(B) = \int_{Y^{-1}(B)} X dP,$$

ahol $B \in \mathcal{G}$. Ekkor $\mu \ll Q_Y$ és

$$E(X|Y = y) = \frac{d\mu}{dQ_Y}.$$

Valóban,

$$\int\limits_{Y^{-1}(B)} \frac{d\mu}{dQ_Y}(Y) dP = \int\limits_{B} \frac{d\mu}{dQ_Y} dQ_Y = \mu(B) = \int\limits_{Y^{-1}(B)} X dP\,. \quad \square$$

81. Állítás. *Legyenek X, Y valószínűségi változók, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebra. Tegyük fel, hogy Y $\mathcal{F}$-mérhető, és X független $\mathcal{F}$-től. Legyen $h(x, y)$mérhető függvény, melyre $E\left(h(X, Y)\right)$ véges.*

Jelölje $g(y) = E\left(h(X, y)\right)$ tetszőleges y esetén. Ekkor

$$E\left(h(X, Y)|\mathcal{F}\right) = g(Y) \quad P - m.m.$$

Bizonyítás:
$g(Y)$ mérhető az Y által generált σ-algebrára, így $\mathcal{F}$ mérhető is.
Legyen most $B \in \mathcal{F}$. Ekkor

$$\int_B h(X, Y) dP = E(h(X, Y)\chi_B) = \int h(x, y) z dQ_{(X,Y,\chi_B)} =$$
$$= \int h(x, y) z\, d(Q_X \times Q_{(Y,\chi_B)}) = \int z \left(\int h(x, y) dQ_X \right) dQ_{(Y,\chi_B)} =$$
$$= \int z\, g(y) dQ_{(Y,\chi_B)} = E\left(\chi_B g(Y)\right) = \int_B g(Y) dP\,.$$

82. Definíció (Feltételes valószínűség)**.** *Legyen $A \in \mathcal{A}$. Ekkor*

$$P(A|\mathcal{F}) = E(\chi_A|\mathcal{F}).$$

83. Tétel (Feltételes sűrűségfüggvény)**.** *Ha X, Y együttes eloszlása abszolút folytonos, $f(x, y)$ jelöli a sűtűségfüggvényt, akkor*

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} & ha\ f_Y(y) > 0 \\ \\ f_X(x) & ha\ f_Y(y) = 0 \end{cases}$$

a feltételes sűrűségfüggvény, melyre tetszőleges $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ esetén, ha $\varphi(X, Y) \in L_1$, akkor

$$\int \varphi(x, y) f_{X|Y}(x|y) dx = E(\varphi(X, Y)|Y = y).$$

Jelölje $g(y) = \int \varphi(x, y) f_{X|Y}(x|y) dx$.
Ellenőrizzük a feltételes várható értékre előírt integrálokat.

$$\int_{Y^{-1}(B)} \varphi(X, Y) dP = \int_{\mathbb{R}\times B} \varphi(x, y) dQ_{(X,Y)} = \int_{\mathbb{R}\times B} \varphi(x, y) f_{(X,Y)}(x, y)\, dx\, dy =$$
$$= \int_{B\cap\{f_Y(y)>0\}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(x, y) f_{X|Y}(x|y) dx \right) f_Y(y) dy = \int_{B\cap\{f_Y(y)>0\}} g(y) f_Y(y) dy = \int_B g(Y)\, dP$$

Azaz $g(Y) = E(\varphi(X,Y) \mid Y)$. $\square$

Speciálisan, ha $\varphi(x) = \chi_{(a,b)}(x)$, akkor

$$\int_a^b f_{X|Y}(x|y)dx = P(a < X < b|Y = y)\,, \text{ adódik.}$$

Állítás
Legyen $X \in L_1$. Ekkor a

$$\{E(X \mid \mathcal{F}) \,:\, \mathcal{F} \subset \mathcal{A} \quad \sigma\text{-algebra}\}$$

halmaz egyenletesen integrálható.

Bizonyítás:

$$\int\limits_{\{|E(X \mid \mathcal{F})|>c\}} |E(X \mid \mathcal{F})|\, dP \le \int\limits_{\{|E(X \mid \mathcal{F})|>c\}} E(|X| \mid \mathcal{F})\, dP = \int\limits_{\{|E(X \mid \mathcal{F})|>c\}} |X|\, dP \le \int\limits_{\{E(|X| \mid \mathcal{F})>c\}} |X|\, dP$$

Továbbá

$$P\left(E(|X| \mid \mathcal{F}) > c\right) \le \frac{1}{c} E\left(E(|X| \mid \mathcal{F})\right) = \frac{E(|X|)}{c}\,.$$

84. Definíció (Martingál)**.** *Az $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ sorozatot, ahol $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változó, $\mathcal{F}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1} \subset \ldots$ σ-algebák, martingálnak nevezzük, ha*

- *X_n mérhető $\mathcal{F}_n$-re,*
- *$X_n \in L_1$, $n \ge 1$,*
- *$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$, $n \ge 1$ esetén.*

Megjegyzés A martingál definíciójából azonnal adódik, hogy

$$E(X_n|\mathcal{F}_k) = E\left(E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \mid \mathcal{F}_k\right) = E(X_{n-1} \mid \mathcal{F}_k) = \cdots = X_k$$

ha $n \ge k$.

Legyenek

$$d_1 = X_1, \quad d_k = X_k - X_{k-1}$$

martingáldifferenciák. Ekkor $E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$ ekvivalens azzal, hogy $E(d_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 0$.

Megjegyzés
Ha martingál definiciójában az $=$ helyett $\ge$ teljesül, akkor *szubmartingálról*, ha $\le$, akkor szupermartingálról beszélünk.

H
a $(X_n, \mathcal{F}_n)$ martingál, f konvex függvény, $E(f(X_n))$ véges, akkor $f(X_n), \mathcal{F}_n, \ge 1$ szubmartingál.

Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)$ szubmartingál, f konvex, monoton növő függvény, $E(f(X_n))$ véges, akkor $f(X_n), \mathcal{F}_n, \ge 1$ szubmartingál.

Bizonyítás: Jensen-egyenlőtlenséget alkalmazzuk.

$$E(f(X_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}) \ge f\left(E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})\right) = f(X_{n-1})\,.$$

A második esetben

$$E(f(X_n) \mid \mathcal{F}_{n-1}) \ge f\left(E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})\right) \ge f(X_{n-1})\,.$$

a monotonitás miatt.

Speciális martingálok

- $X_1, X_2 \dots$ független valószínűségi változók, $E(X_j) = 0$. Legyen $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Ekkor $(S_n, \mathcal{F}_n), n \geq 1$ martingál.

  $E(S_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = S_n + E(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = S_n + E(X_{n+1}) = S_n$

- $X_1, X_2 \dots$ független valószínűségi változók, $E(X_j) = 1$. Legyen $S_n = \prod_{j=1}^n X_j$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Ekkor $(S_n, \mathcal{F}_n), n \geq 1$ martingál.

  $E(S_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = S_n \cdot E(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = S_n \cdot E(X_{n+1}) = S_n$

- $E(X)$ véges, $X_n = E\left(X \,|\, \mathcal{F}_n\right)$. *reguláris martingál*

Megjegyzés
Ha $(X_n, \mathcal{F}_n), n \geq 1$ martingál, és $\mathcal{G}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$, akkor $(X_n, \mathcal{G}_n), n \geq 1$ is martingál.

Valóban, $E\left(X_{n+1} \,|\, \mathcal{G}_n\right) = E\left(E(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) \,|\, \mathcal{G}_n\right) = (X_n \,|\, \mathcal{G}_n) = X_n$, mivel $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$.

Maximálegyenlőtlenségek
Jelölés $X_n^* = \max_{1 \leq k \leq n} X_k$.

85. Állítás (Doob)**.** *Legyen* $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ *szubmartingál.Ekkor* $\lambda \geq 0$ *esetén*

$$\lambda P(X_n^* \geq \lambda) \leq \int_{\{X_n^* \geq \lambda\}} X_n dP.$$

Legyen $\nu = \begin{cases} \min\{k \leq n \,|\, X_k \geq \lambda\}\,, & \text{ha van ilyen,} \\ n+1\,, & \text{ha } X_n^* < \lambda\,. \end{cases}$ Ekkor

$$\int\limits_{\{X_n^* \geq \lambda\}} X_n dP = \sum_{k=1}^n \int\limits_{\{\nu = k\}} X_n dP = \sum_{k=1}^n \int\limits_{\{\nu = k\}} E(X_n \,|\, \mathcal{F}_k) dP \geq \sum_{k=1}^n \int\limits_{\{\nu = k\}} X_k dP \geq \lambda P(\nu \leq n)\,.$$

86. Állítás (Doob)**.** *Ha* $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$, $X_n \geq 0$, *szubmartingál, akkor* $p > 1$ *esetén*

$$\|X_n^*\|_{L_p} \leq \frac{p}{p-1} \|X_n\|_{L_p}.$$

Használjuk, hogy $x^p = \int_0^x p u^{p-1}\, du$.
Ezért

$$\int X_n^{*p}\, dP = \int_0^\infty p x^{p-1} P(X_n^* \geq x)\, dx \leq \int_0^\infty p x^{p-1} \frac{1}{x} \int\limits_{\{X_n^* \geq x\}} X_n dP\, dx =$$

$$= \int_0^\infty p x^{p-2} \int\limits_\Omega \chi_{\{X_n^* \geq x\}} X_n dP\, dx = \int_\Omega p \frac{1}{p-1} X_n^{*(p-1)} X_n dP \leq$$

$$\leq \frac{p}{p-1} \left(\int X_n^p dP \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int \left(X_n^{*(p-1)} \right)^{\frac{p}{p-1}} dP \right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Osztva a második tényezővel kapjuk, hogy

$$\|X_n^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|X_n\|_p\,. \quad \square$$

87. Következmény (Kolmogorov)**.** *Ha $Y_1, Y_2, \dots$ független valószínűségi változók, $EY_i = 0$, akkor*

$$P(S_n^* \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda^2} D^2(S_n),$$

ahol $S_n = \sum_{k=1}^n Y_i$, és $S_n^* = \max_{1 \leq k \leq n} |S_k|$.

Ugyanis $S_n, n \geq 1$ martingál, ezért $S_n^2, n \geq 1$ szubmartingál. Doob-egyenlőtlenség alapján

$$P(S_n^* \geq \lambda) = P(S_n^{*2} \geq \lambda^2) \leq \frac{1}{\lambda^2} \int\limits_{\{S_n^{*2} \geq \lambda^2\}} S_n^2 dP \leq \frac{1}{\lambda^2} E(S_n^2)\,.$$

10. előadás — 2020. november 19.

Megállási idő

88. Definíció. *Legyen $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots$ σ-algebra sorozat. A $\tau : \Omega \to \{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ valószínűségi változó* **megállási idő**, *ha $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$, $k \geq 1$.*

Ekkor $\{\tau \leq k\} \in \mathcal{F}_k$, és $\{\tau \geq k\} \in \mathcal{F}_{k-1}$.

89. Állítás. *Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n \geq 1$ (szub)martingál, τ megállási idő.Legyen $Y_n(\omega) = X_{\min(n,\tau(\omega))}(\omega)$. Ekkor $(Y_n, \mathcal{F}_n), n \geq 1$ is (szub)martingál.*

Valóban, legyen $d_1, d_2, \dots$ a (szub)martingál differencia sorozat.
Ekkor

$$Y_n = X_{n \wedge \tau} = \sum_{j=1}^{n \wedge \tau} d_j = \sum_{j=1}^{n} d_j \chi_{\{\tau \geq j\}}\,.$$

Ennek differenciasorozata $d_j \chi_{\{\tau \geq j\}}$, $j \geq 2$. Azonban $E(d_j \chi_{\{\tau \geq j\}} \,|\, \mathcal{F}_{j-1}) = \chi_{\{\tau \geq j\}} E(d_j \,|\, \mathcal{F}_{j-1}) = 0 \ (\geq 0)\,.$

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független valószínűségi változók, $P(X_j = 1) = P(X_j = -1) = 1/2$.
$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $S_0 = 0$.
Legyen $a, b > 0$. A két játékos kezdeti tőkéje.
$X_k = 1$ esetén a $''b''$ kezdeti tőkéjű pénze növekszik 1-gyel, $X_k = -1$ esetén az $''a''$ kezdeti tőkéjűé.
Legyen $\tau = \inf\{n \,|\, S_n = a \text{ vagy } S_n = -b\}$. Ez megállási idő, és $P(\tau < \infty) = 1$. Így $P(S_\tau = a) + P(S_\tau = -b) = 1$.

Másfelől $S_{n \wedge \tau}$, $n \geq 0$ is martingál. Ezért

$$E(S_{n \wedge \tau}) = E(S_0) = 0\,,$$

és $S_{n \wedge \tau} \to S_\tau$ 1-valószínűséggel, mivel $P(\tau < \infty) = 1$.
De $|S_{n \wedge \tau}| \leq \max(a, b)$, így

$$E(S_\tau) = 0 = aP(S_\tau = a) - bP(S_\tau = -b)\,.$$

Tehát $P(S_\tau = a) = \frac{b}{a+b}$.
Jelölje Z_n az n-dik játékban feltett összeget. Ekkor a tőkeváltozás n játék alatt

$$S_n = \sum_{k=1}^n Z_k X_k\,.$$

Feltevések: $1 \leq Z_n \leq \min(a - S_{n-1}, S_{n-1} - b)$, egész értékű.
Továbbá Z_n mérhető az $\mathcal{F}_{n-1} = \sigma(S_1, S_2, \dots S_{n-1})$ σ-algebrára. („Nem látunk a jövőbe”.)
Ekkor legyen ismét $\tau = \inf\{n \,:\, S_n = a \text{ vagy } S_n = -b\}$.
τ megállási idő. $S_n, n \geq 0$ martingál. Valóban

$$E(S_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = S_n + E(Z_{n+1} X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = S_n + Z_{n+1} E(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = S_n\,.$$

Így, ha $P(\tau < \infty) = 1$, akkor az előző gondolatmenet megismételhető.
Röviden: $P(S_\tau = a \text{ vagy } -b) = 1$, és $0 = E(S_0) = E(S_{\min(n,\tau)})$, így $n \to \infty$ mellett $E(S_\tau) = 0$.

Martingálok 1 valószínűségű konvergenciája.

Ha $X_1, X_2, \ldots$ tetszőleges sorozata valószínűségi változóknak, akkor az 1 valószínűségi konvergenciához a $\{\liminf X_n < \limsup X_n\}$ halmaz mértéke kell 0 legyen.

Legyen $C_{a,b} = \{\liminf X_n < a < b < \limsup X_n\}$.

Ekkor

$$\{\liminf X_n < \limsup X_n\} = \bigcup_{a<b, a,b\in\mathbb{Q}} C_{a,b}\,.$$

Kell tehát $P(C_{a,b}) = 0$.

Ha $\limsup z_n > b$, akkor végtelen sokszor van a sorozat $''b''$ felett, ha $\liminf z_n < a$, akkor végtelen sokszor van $''a''$ alatt. Tehát végtelen sokszor $''a''$ alulról $''b''$ felülre megy át.

90. Definíció (Átmetszési szám)**.** *Tetszőleges $z_1, z_2, \ldots, z_n$ számsorozat és $a < b$ esetén jelölje $N_n[a,b]$ az $[a,b]$ intervallum átmetszéseinek számát, azaz*

$$N_n^z[a,b] = N_n[a,b] = \max\left\{k \mid \textit{létezik} \quad 1 \le s_1 < t_1 < \ldots s_k < t_k \le n, \quad \textit{melyre} \quad z_{s_j} \le a,\ z_{t_j} \ge b\right\}$$

Hasonlóan lehetne a *felülről-lefelé való átmetszéseket* tekinteni.

91. Definíció (Átmetszési szám)**.** *Tetszőleges $z_1, z_2, \ldots, z_n$ számsorozat és $a < b$ esetén jelölje $N_n[b,a]$ az $[a,b]$ intervallum* **felülről-lefelé való átmetszéseinek** *számát, azaz*

$$N_n^z[b,a] = N_n[b,a] = \max\left\{k \mid \textit{létezik} \quad 1 \le s_1 < t_1 < \ldots s_k < t_k \le n, \quad \textit{melyre} \quad z_{s_j} \ge b,\ z_{t_j} \le a\right\}$$

Vegyük észre, hogy ha $y_k = z_{n+1-k}$, akkor $N_n^y[a,b] = N_n^z[b,a]$.

Legyen most $X_1, X_2, \ldots$ valószínűségi változó sorozat.

$\sigma_1 = \inf\{n : X_n \le a\} \quad \nu_1 = \inf\{n > \sigma_1 : X_n \ge b\}$.

Általában $\sigma_k = \inf\{n > \nu_{k-1} : X_n \le a\} \quad \nu_k = \inf\{n > \sigma_k : X_n \ge b\}$.

És $\quad N_n^X[a,b] = \max\{k : \nu_k \le n\}$.

Adódik, hogy $\qquad C_{a,b} \subset \left\{N_\infty^X[a,b] = \infty\right\}$.

92. Lemma (Átmetszési lemma)**.** *Ha $a < b$, akkor tetszőleges $(X_n, \mathcal{F}_n), n \ge 1$ szubmartingál átmetszési számaira teljesül az*

$$E\left(N_n^X[a,b]\right) \le \frac{E(X_n - a)^+}{b-a}$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás

Legyen $Y_n = (X_n - a)^+$. Ez is szubmartingál. Ekkor $N_n^X[a,b] = N_n^Y[0, b-a]$.

Jelölje $d_1 = Y_1$, $d_j = Y_j - Y_{j-1}$, ha $j \ge 2$. Ekkor

$$\sum_{j=1}^{N_n^Y[0,b-a]} \sum_{\sigma_j < i \le \nu_j} (Y_i - Y_{i-1}) = \sum_{i=2}^{n} d_i \sum_{j=1}^{N_n^Y[0,b-a]} \chi_{\{\sigma_j < i \le \nu_j\}} \ge N_n^Y[0, b-a](b-a)$$

Legyen $H_i = \sum_{j=1}^{N_n^Y[0,b-a]} \chi_{\{\sigma_j < i \le \nu_j\}}$, mivel $\sigma_j, \nu_j,\ j \ge 1$ megállási idők, ezért H_i $\mathcal{F}_{i-1}$ mérhető.

Továbbá $0 \le H_i \le 1$.

Vegyük észre, hogy

$$E(d_i(1 - H_i)) = E\left(E(d_i(1-H_i) \mid \mathcal{F}_{i-1})\right) = E\left((1-H_i)E(d_i \mid \mathcal{F}_{i-1})\right) \ge 0\,.$$

Ezért

$$E(N_n^Y[0,b-a](b-a)) \le E(\sum_{i=2}^n d_i H_i) \le E(\sum_{i=2}^n d_i) = E(Y_n) - E(Y_1)\,.$$

Tehát

$$E\left(N_n^Y[0,b-a]\right) \le \frac{1}{b-a}\left(E(Y_n) - E(Y_1)\right) \le \frac{E(X_n-a)^+}{b-a}\,.$$

$\square$

93. Tétel. *Ha $(X_n, \mathcal{F}_n)$ L_1-ben korlátos szubmartingál, akkor 1 vsz-gel konvergens.*

Bizonyítás: Az átmetszési lemma alapján:

$$E\left(N_n^X[a,b]\right) \le \frac{E(X_n-a)^+}{b-a} \le \frac{E(X_n^+)+|a|}{b-a}\,.$$

Ha $n \to \infty$, akkor $N_n^X[a,b] \to N_\infty^X[a,b]$.

Ezért

$$E\left(N_\infty^X[a,b]\right) \le \frac{\sup_n E|X_n| + |a|}{b-a}\,.$$

Tehát $P(N_\infty^X[a,b] = \infty) = 0$. Tehát $P(C_{a,b}) = 0$

Így

$$P\left(\liminf X_n < \limsup X_n\right) = P\left(\bigcup_{a,b\in\mathbb{Q},a<b} C_{a,b}\right) = 0\,.$$

$\square$

Megjegyzés

$X_n^+ \le |X_n|$ és $|X_n| = X_n^+ + X_n^- = X_n^+ + (X_n^+ - X_n) = 2X_n^+ - X_n$.

Ezért $EX_n^+ \le E|X_n|$ és $E|X_n| = 2EX_n^+ - EX_n \le 2E_n^+ - EX_1$

Tehát $\quad \sup E(X_n^+) < \infty \Leftrightarrow \sup E|X_n| < \infty$.

Megjegyzés.

Legyenek $Y_1, Y_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre

$$P(Y_i = 4) = P(Y_i = 0) = P(Y_i = -1) = \frac{1}{3}.$$

Ekkor $X_n = \prod_{i=1}^n Y_i$ martingál, melyre

$$E(|X_n|) = \left(\frac{5}{3}\right)^n \to \infty \quad \text{és} \quad P(X_n \ne 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$$

emiatt

$$X_n \to 0 \quad 1-\text{valószínűséggel},$$

de X_n L_1-ben nem korlátos martingál.

94. Tétel (Reguláris martingálok konvergenciája)**.** *Legyen $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots$, és $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\cup_{n\ge1}\mathcal{F}_n\right)$.*

$X \in L_1$ esetén legyen

$$X_n = E(X|\mathcal{F}_n)\,.$$

Ekkor $\quad X_n \to E(X\,|\,\mathcal{F}_\infty)$ *L_1-ben is.*

Sőt, a L_1-beli konvergenciából adódik a martingál regularitása.

Bizonyítás:

Az $E(X|\mathcal{F}_n)$, $n \geq 1$ halmaz egyenletesen integrálható.

Ezért az X_n sorozat 1 vsz-ű konvergenciájából következik az L_1-beli konvergencia is.

Jelölje X_∞ a határértéket. Megmutatjuk, hogy

$$X_\infty = E(X|\mathcal{F}_\infty),$$

ahol $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\cup_{n\geq 1}\mathcal{F}_n\right)$. Ehhez a várható érték tulajdonságait ellenőrizzük.

Nyilvánvalóan $\lim_{n\to\infty} X_n$ mérhető az $\mathcal{F}_\infty$ σ-algebrára.

Meg kell mutatnunk, hogy tetszőleges $\mathcal{F}_\infty$-beli esemény esetén X integrálja megegyezik X_∞ integráljával.

Mivel $\cup_{n\geq 1}\mathcal{F}_n$ algebrát alkot, a mértékkiterjesztés egyértelműsége miatt elég ezen az algebrán ellenőrizni.

Legyen tehát $A \in \mathcal{F}_n$ valamely $n \geq 1$ esetén. Ekkor

$$\begin{aligned}
\int_A X_\infty dP &= \lim_{k\to\infty}\int_A X_k dP = \lim_{k\to\infty}\int_A E(X_k|\mathcal{F}_n)dP \\
&= \lim_{k\to\infty}\int_A X_n dP = \int_A X dP,
\end{aligned}$$

ahol az utolsó két egyenlőségben a martingáltulajdonságot használtuk $k \geq n$ esetén.

Megfordítva, legyen most $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n \geq 1$ L_1-ben konvergens martingál, $X_n \to X_\infty$. Ekkor $A \in \mathcal{F}_k$ esetén, $n \geq k$ $\int_A X_k dP = \int_A X_n\, dP \to_n \int_A X_\infty\, dP$. Így $X_k = E(X_\infty \,|\, \mathcal{F}_k)$. □

Fordított martingál

95. Definíció. *Az $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n \geq 1$ sorozat* **fordított martingál**, *ha $\mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2 \supset \ldots$ monoton csökkenő, X_n $\mathcal{F}_n$ mérhető, $E(X_n)$ véges, és*

$$E(X_n \,|\, \mathcal{F}_{n+1}) = X_{n+1}\,.$$

Ekkor $\quad X_n = E(X_1 \,|\, \mathcal{F}_n)$.

Ha $(X_k, \mathcal{F}_k)$, $1 \leq k \leq n$ fordított martingál, akkor az $Y_k = X_{n+1-k}$, $\mathcal{G}_k = \mathcal{F}_{n+1-k}$, $1 \leq k \leq n$ martingál. Valóban,

$$E(Y_{k+1} \,|\, \mathcal{G}_k) = E(X_{n+1-k-1} \,|\, \mathcal{F}_{n+1-k}) = X_{n+1-k} = Y_k\,.$$

Ezért

$$E\left(N_n^X[b,a]\right) \leq \frac{E(X_1 - a)^+)}{b-a} \leq \frac{E(X_1^+) + |a|}{b-a}\,.$$

96. Következmény. *Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n \geq 1$ sorozat fordított martingál.*

Ekkor X_n 1-valószínűséggel és L_1-ben is konvergens.

Bizonyítás:

Adódik, hogy

$$E\left(N_\infty^X[b,a]\right) \leq \frac{E(X_1 - a)^+)}{b-a} \leq \frac{E(X_1^+) + |a|}{b-a}$$

Így $P\left(N_\infty^X[b,a] = \infty\right) = 0$. Ugyanakkor

$C_{a,b} \subset \left\{N_\infty^X[b,a] = \infty\right\}$. □

97. Következmény. *Legyenek $Y_1, Y_2, \ldots,$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $E(Y_1)$ véges. Ekkor*

$$\frac{\sum_{k=1}^n Y_k}{n} \to E(Y_1)\,,\ 1 \text{ valószínűséggel}\,.$$

Bizonyítás:
Legyen $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, $X_n = \frac{S_n}{n}$ és $\mathcal{F}_n = \sigma(S_n, Y_{n+1}, Y_{n+2}, \dots)$.
Ekkor $(X_n, \mathcal{F}_n), n \geq 1$ *fordított martingál.*
Mérhetőség teljesül. Feltételes várható érték:

$$E(X_n \ , | \, \mathcal{F}_{n+1}) = E(X_n \,|\, S_{n+1}, Y_{n+2}, Y_{n+3}, \dots) = E(X_n \,|\, S_{n+1}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} E(Y_j \,|\, S_{n+1})$$

Jelölje f: $f(S_{n+1}) = E(Y_1 \,|\, S_{n+1})$. Ekkor $B \subset \mathbb{R}$ esetén

$$\int\limits_{S_{n+1}^{-1}(B)} Y_1 \, dP = \int\limits_{\{\sum_{j=1}^{n+1} y_j \in B\}} y_1 \, d \otimes_{j=1}^{n+1} Q_{Y_j}(y_j) =$$

$$= \int\limits_{S_{n+1}^{-1}(B)} f(S_{n+1}) \ dP = \int\limits_{\{\sum_{j=1}^{n+1} y_j \in B\}} f(\sum_{j=1}^{n+1} y_j) \, d \otimes_{j=1}^{n+1} Q_{Y_j}(y_j) \, .$$

De ez utóbbi nem függ az $y_1, y_2, \dots, y_n$ változók sorrendjétől. Felcserélve az y_1 és y_i változókat kapjuk, hogy

$$\int\limits_{S_{n+1}^{-1}(B)} f(S_{n+1}) \ dP = \int\limits_{\{\sum_{j=1}^{n+1} y_j \in B\}} f(\sum_{j=1}^{n+1} y_j) \, d \otimes_{j=1}^{n+1} Q_{Y_j}(y_j) =$$

$$= \int\limits_{\{\sum_{j=1}^{n+1} y_j \in B\}} y_i \, d \otimes_{j=1}^{n+1} Q_{Y_j}(y_j) == \int\limits_{S_{n+1}^{-1}(B)} Y_i \, dP$$

Azaz $E(Y_i \,|\, S_{n+1}) = E(Y_1 \,|\, S_{n+1})$ minden $i = 1, 2, \dots, n+1$ esetén.
De $\sum_{i=1}^{n+1} Y_i = S_{n+1}$. Ezért $E(Y_i \,|\, S_{n+1}) = \frac{1}{n+1} S_{n+1}$.

Tehát $E(X_n \,|\, \mathcal{F}_{n+1}) = E(X_n \,|\, S_{n+1}) = \frac{1}{n} \frac{n}{n+1} S_{n+1} = X_{n+1}$.
Mivel tehát fordított martingál, ezért 1 valószínűséggel és L_1-ben is konvergens. Határérték csak konstans lehet. (Kolmogorov $0-1$ törvény.) Várható értéke is konvergál. De $E(X_n) = E(Y_1)$. □

Nagy számok erős törvényei

98. Tétel (Kolmogorov-féle erős törvény)**.** *Legyenek $Y_1, Y_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók. Ekkor,*

- *ha létezik $E(Y_1)$ – akár véges, akár végtelen –, akkor*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} \to E(Y_1) \quad m.m.,$$

- *ha $\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ 1 vsz-gel konvergál valamely véges számhoz, akkor $E(Y_1)$ is véges.*

Bizonyítás: Ha $E(Y_1)$ véges, akkor már láttuk.
Legyen most $E(Y_1^-)$ véges, de $E(Y_1^+) = \infty$.
Ekkor $0 < c < \infty$ mellett legyen $Y_j^c = \min(Y_j, c)$.

$$\liminf \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} \geq \liminf \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i^c}{n} = E(Y_1^c) \to_{c \to \infty} \infty \, . \quad \square$$

Megfordítva, ha most $\lim \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = c$, akkor

$$\frac{Y_n}{n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n}\frac{S_{n-1}}{n-1} \to 0\,.$$

Tehát az $\left\{\left|\frac{Y_n}{n}\right| \geq 1\right\}$ független események $\limsup$-ja nullmértékű. Így

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|Y_1| \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|Y_n| \geq n) < \infty\,.$$

De $\quad E(|Y_1|) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(|Y_1| \geq n) < \infty.$ $\square$

11. előadás — 2020. november 26.

Nagy számok erős törvénye nem azonos eloszlású esetben

Ekkor a számtani közép már nem lesz fordított martingál.

99. Lemma (Kronecker-lemma)**.** *Tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergens, és $0 < q_1 \leq q_2 < \dots,\ q_n \to \infty$. Ekkor*

$$\frac{1}{q_n}\sum_{i=1}^{n} a_i q_i \to 0.$$

Bizonyítás:
Legyen $R_n = \sum_{i=n}^{\infty} a_i$. Ekkor $a_n = R_n - R_{n+1}$.
Legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor van olyan N, hogy $n \geq N$ esetén már $|R_n| \leq \varepsilon$.
Ekkor $n > N$ mellett

$$\sum_{i=1}^{n} a_i q_i = \sum_{i=1}^{n}(R_i - R_{i+1})q_i = \sum_{i=1}^{n} R_i q_i - \sum_{i=1}^{n} R_{i+1} q_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} R_i q_i - \sum_{i=2}^{n+1} R_i q_{i-1} = R_1 q_1 + \sum_{i=2}^{n} R_i(q_i - q_{i-1}) + R_{n+1} q_n$$

Ezért

$$\left|\frac{1}{q_n}\sum_{i=1}^{n} a_i q_i\right| \leq \frac{|R_1|q_1 + \sum_{i=2}^{N}|R_i|(q_i - q_{i-1})}{q_n} + \sum_{i=N+1}^{n}|R_i|\frac{q_i - q_{i-1}}{q_n} + |R_{n+1}|$$

Az első tag nullához tart. a másik kettőben használjuk az $|R_i| \leq \varepsilon$ becslést. Ezért

$$\limsup\left|\frac{1}{q_n}\sum_{i=1}^{n} a_i q_i\right| \leq 2\varepsilon\,. \quad \square$$

Speciálisan: ha $q_n = n$, akkor $\sum_i a_i$ konvergenciájából adódik, hogy $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i a_i \to 0$.

100. Lemma. *Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)$ martingál, melyre $\sum \frac{E(d_n^2)}{n^2} < \infty$, ahol $d_1 = X_1$, $d_k = X_k - X_{k-1}$, $k \geq 2$. Ekkor*

$$\frac{X_n}{n} \to 0 \quad \textit{1 vsz.-gel.}$$

Bizonyítás:
Legyen $Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{k}$. Ez is martingál.
Továbbá $E(Y_n^2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{E(d_k^2)}{k^2}$.
Így $\sup E(Y_n^2) < \infty$. Azaz Y_n, $n \to \infty$ esetén konvergens. (1-valószínűséggel.)
Mivel $X_n = \sum_{k=1}^{n} k \frac{d_k}{k}$, ezért Kronecker-lemma adja, hogy $\frac{1}{n} X_n \to 0$. $\square$

101. Következmény. *Legyenek $Y_1, Y_2, \dots$ független valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^2(Y_k)}{k^2} < \infty$. Ekkor*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (Y_k - E(Y_k)) \to 0 \quad m.m.$$

Bizonyítás:

Legyen $X_n = \sum_{j=1}^{n} (Y_j - EY_j)$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$.

Ez martingál. Továbbá $d_j = Y_j - EY_j$, ha $j \geq 2$.

Feltettük, hogy $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{E(d_k^2)}{k^2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{D^2(Y_k)}{k^2} < \infty$. $\square$

Független tagú sorok

102. Tétel. *Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy*

$$E(X_i) = 0\,, \quad \textit{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} D^2(X_n) < \infty$$

Ekkor

$$\sum X_n \quad \textit{1 vsz-gel konv.}$$

Bizonyítás:
$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ martingál az $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $n \geq 1$ σ-algebra sorozatra. Továbbá

$$\sup_n E|S_n| \leq \sup \sqrt{E(S_n^2)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} D^2(X_k)} < \infty\,.$$

Tehát S_n, $n \to \infty$ esetén 1 valószínűséggel konvergens.

Következmény
Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(X_i)\,, \quad \text{konvergens és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} D^2(X_n) < \infty$$

Ekkor

$$\sum X_n \quad \text{1 vsz-gel konv.}$$

Bizonyítás: Az előző tétel alapján $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (X_n - EX_n)$ konvergens 1-valószínűséggel.

Mivel $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E(X_i)$ konvergens, tehát az összegük is konvergens. $\square$

103. Tétel. *Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy*

$$E(X_i) = 0\,, \quad \textit{és} \quad |X_i| < c\,.$$

Ekkor

$$\sum X_n \quad \textit{1 vsz-gel konv.} \Leftrightarrow \sum D^2(X_n) < \infty.$$

Az $\Rightarrow$ irány bizonyításához az alábbi egyenlőtlenség szükséges.

104. Lemma. *Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n$ független valószínűségi változók, melyekre $E(X_i) = 0$, és alkalmas c esetén $|X_i| < c$ teljesül. Legyen $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Ekkor $0 < d < \infty$ esetén*

$$E\left(S_n\right)^2 \le d^2 + \frac{P(\max_{k=1}^n |S_k| \ge d)}{P(\max_{k=1}^n |S_k| < d)}(c+d)^2.$$

Bizonyítás: (Lemma) Legyen $\nu = \begin{cases} \min\{k \,|\, |S_k| \ge d\}\,, & \text{ha } \max\limits_{1 \le k \le n} |S_k| \ge d \\ n+1\,, & \text{egyébként}\,. \end{cases}$

Ekkor

$$E(S_n^2) = E\left(S_n^2 \chi_{\{\nu \le n\}}\right) + E\left(S_n^2 \chi_{\{\nu > n\}}\right) = \sum_{k=1}^n E\left(S_n^2 \chi_{\{\nu = k\}}\right) + E\left(S_n^2 \chi_{\{\nu > n\}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^n E\left((S_n - S_k)^2 \chi_{\{\nu = k\}}\right) + \sum_{k=1}^n E\left(S_k^2 \chi_{\{\nu = k\}}\right) + \sum_{k=1}^n 2E\left((S_n - S_k) S_k \chi_{\{\nu = k\}}\right) + E\left(S_n^2 \chi_{\{\nu > n\}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^n E\left((S_n - S_k)^2\right) P(\nu = k) + \sum_{k=1}^n E\left(S_k^2 \chi_{\{\nu = k\}}\right) + \sum_{k=1}^n 2E(S_n - S_k) E\left(S_k \chi_{\{\nu = k\}}\right) + E\left(S_n^2 \chi_{\{\nu > n\}}\right)\,.$$

mivel $S_n - S_k$ és $S_k \chi_{\{\nu = k\}}$ függetlenek.
$E(S_n - S_k) = 0$.
A $\{\nu = k\}$ eseményen $|S_k| \le c + d$.
Továbbá $E\left((S_n - S_k)^2\right) \le ES_n^2$, végül a $\{\nu > n\}$ eseményen $|S_n| \le d$.
Ezért

$$E(S_n^2) \le E(S_n^2) P(\nu \le n) + (c+d)^2 P(\nu \le n) + d^2 P(\nu > n)$$

Átrendezve

$$E(S_n^2)\left(1 - P(\nu \le n)\right) \le (c+d)^2 P(\nu \le n) + d^2 P(\nu > n)$$

Átosztva

$$E(S_n^2) \le d^2 + \frac{(c+d)^2 P(\nu \le n)}{P(\nu > n)}\,. \quad \square$$

A tétel bizonyítása:

Ha $\sum X_n$ 1 valószínűséggel konvergens, akkor tehát $\lim_{n\to\infty} S_n$ határérték 1 valószínűséggel létezik, tehát

$$P\left(\sup_n |S_n| < \infty\right) = 1\,.$$

Ezért létezik olyan $0 < d < \infty$ szám, hogy $P\left(\sup_n |S_n| < d\right) > 0$.

Ekkor $P\left(\max_{k=1}^n |S_k| < d\right) > P\left(\sup_n |S_n| < d\right)$ és $P\left(\max_{k=1}^n |S_k| \ge d\right) < P\left(\sup_n |S_n| \ge d\right)$.

Ezért

$$\sum_{k=1}^{n} D^2(X_k) = D^2(S_n) = E(S_n^2) \le d^2 + \frac{P(\max_{k=1}^{n} |S_k| \ge d)}{P(\max_{k=1}^{n} |S_k| < d)}(c+d)^2 \le$$

$$\le d^2 + \frac{P(\sup_j |S_j| \ge d)}{P(\sup_j |S_j| < d)}(c+d)^2 < \infty$$

Tehát

$$\sum_{k=1}^{\infty} D^2(X_k) < d^2 + \frac{P(\sup_j |S_j| \ge d)}{P(\sup_j |S_j| < d)}(c+d)^2 . \quad \square$$

105. Tétel. *Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független valószínűségi változók. Tegyük fel, $|X_n| < c$. Ekkor*

$$\sum X_n \quad \text{1 vsz-gel konv.} \Leftrightarrow \sum E(X_n) \text{ konvergens, és } \sum D^2(X_n) < \infty.$$

Bizonyítás:
Az $\Rightarrow$ esetet visszavezetjük a nulla várható értékű esetre.

Legyenek $Y_1, Y_2, \dots$ független valószínűségi változók, melyek együttes eloszlása megegyezik az $X_1, X_2, \dots$ sorozat együttes eloszlásával, és egyben független azoktól.

Mivel ugyanaz az együttes eloszlás, ezért $\sum Y_n$ 1-valószínűséggel konvergens.
Legyen $Z_n = X_n - Y_n$, $n \ge 1$. Ezek független valószínűségi változók, melyekre
$E(Z_n) = 0$ és $D^2(Z_n) = D^2(X_n) + D^2(Y_n) = 2D^2(X_n)$.
Továbbá $|Z_n| \le 2c$.

Egyben $\sum Z_n$ is konvergens 1-valószínűséggel.

Ezért alkalmazható az előző tétel.
Adódik, hogy $\sum D^2(Z_n) < \infty$. Így $\sum D^2(X_n) < \infty$.

De ekkor $\sum (X_n - E(X_n))$ is 1-valószínűséggel konvergens.
Tehát $\sum E(X_n)$ konvergenciája is adódik.

A visszafele irányt már korábban igazoltuk.

Vajon mindig *létezik* ilyen „extra” valószínűségi változó sorozat?

Sajnos nem. Ha $\mathcal{A} = \sigma(X_1, X_2, \dots)$, akkor *nincsen* ilyen.
Hogyan menthető meg a bizonyítás?
A konvergencia csak az együttes eloszlástól függ. Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ hármastól nem.
Ezért vegyük Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt még egy példányban — legyen ez — $(\Xi, \mathcal{G}, Q)$ ennek elemeit majd θ jelöli, és rajta az eredeti $X_1, X_2, \dots$ sorozattal megegyező együttes eloszlású valószínűségi változó sorozatot — legyenek ezek $Y_1, Y_2, \dots$.

Ekkor $\sum Y_n$ Q szerint 1-valószínűséggel konvergens.

Legyen most $\tilde{\Omega} = \Omega \times \Xi$, $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{G}$, $\tilde{P} = P \otimes Q$.

Továbbá $\tilde{X}_n(\omega, \theta) = X_n(\omega)$, $\tilde{Y}_n(\omega, \theta) = Y_n(\theta)$, $n \ge 1$

Ekkor az $\tilde{X}_n, n \ge 1$ és a $\tilde{Y}_n, n \ge 1$ sorozat a $\tilde{P}$ mérték szerint függetlenek egymástól, és $\tilde{P}$ szerint vett eloszlásuk megegyezik az $X_1, X_2, \dots$ sorozat P szerinti eloszlásával.

Legyen $\tilde{Z}_n = \tilde{X}_n - \tilde{Y}_n$.

Így $\sum \tilde{Z}_n$ a $\tilde{P}$ mérték szerint 1-valószínűséggel konvergens.
Továbbá $|\tilde{Z}_n| \le 2c$, $\tilde{E}(\tilde{Z}_n) = 0$.

Alkalmazhatjuk erre a sorozatra az előző tételt. Adódik, hogy

$$\sum \tilde{D}^2(\tilde{Z}_n) < \infty\,.$$

De $\tilde{D}^2(\tilde{Z}_n) = \tilde{D}^2(\tilde{X}_n) + \tilde{D}^2(\tilde{Y}_n) = D^2(X_n) + D^2_Q(Y_n) = 2D^2(X_n)$. □

106. Tétel (Kolmogorov-féle 3-sor tétel)**.** *Legyenek* $X_1, X_2, \ldots$ *független valószínűségi változók. Tetszőleges* $c > 0$ *esetén jelölje* $X_n^c = X_n\ \chi_{\{|X_n| \le c\}}$*. Ekkor, ha valamely* $c > 0$ *esetén*

- $\sum P(|X_n| > c) < \infty$,
- $\sum E(X_n^c)$ *konvergens,*
- $\sum D^2(X_n^c) < \infty$,

akkor

$$\sum X_n \quad \text{1 vsz-gel konvergens.}$$

Megfordítva, ha $\sum X_n$ *1 vsz-gel konvergens, akkor a fenti három sor tetszőleges* $c > 0$ *esetén konvergens.*

Bizonyítás:

Vegyük észre, hogy $\{X_n \ne X_n^c\} = \{|X_n| > c\}$.

Tegyük fel a 3 sor konvergenciáját.

Mivel $\sum P(|X_n| > c) < \infty$, alkalmazható a Borel–Cantelli-lemma. Azaz $P\left(\limsup\{X_n \ne X_n^c\}\right) = 0$.

Ezért az

$$\{\omega \,|\, \text{létezik } N(\omega),\ \text{hogy minden } n \ge N(\omega) \text{ esetén } X_n(\omega) = X_n^c(\omega)\}$$

halmaz mértéke 1.

Ezen a halmazon viszont $\sum X_n$ és $\sum X_n^c$ ekvikonvergens.

A második két sor konvergenciája biztosítja $\sum X_n^c$ 1-valószínűségű konvergenciáját.

Tehát $\sum X_n$ 1-valószínűséggel konvergens.

Fordított irány. Tegyük fel, hogy $\sum X_n$ 1-valószínűséggel konvergens.

Legyen $c > 0$.

Adódik, hogy $X_n \to 0$ 1-valószínűséggel, tehát a $\{|X_n| > c\}$ (független) események közül egy 1-valószínűségű halmazon csak véges sok „következik” be.

Borel–Cantelli-lemma másik változata adja, hogy $\sum P(|X_n| > c) < \infty$.

És mellesleg azt is, hogy $\sum X_n$ és $\sum X_n^c$ egy 1-valószínűségi halmazon ekvikonvergensek.

$\sum X_n$ konvergens m.m., ezért tehát $\sum X_n^c$ is az. De $|X_n^c| \le c$, tehát alkalmazhatjuk az előző tételt.

Ez adja a másik két sor konvergenciáját. □.

Független tagú sor L_p konvergenciája

107. Tétel. *Legyenek* $X_1, X_2, \ldots$ *független valószínűségi változók és* $p \ge 1$ *rögzített szám. Tegyük fel, hogy* $\sum X_n$ *1-valószínűséggel konvergens. Legyen* $X = \sum X_n$*.*

Ekkor, ha $E|X|^p < \infty$*, akkor a konvergencia* L_p*-ben is teljesül.*

Bizonyítás: Ehhez egy segédlemma.

108. Lemma. *Legyen* $Y \in L_p$*,* $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots$ *monoton növő* σ*-algebra sorozat.* $Y_n = E(Y \,|\, \mathcal{F}_n)$ *reguláris martingál.*

Ekkor az Y_n *sorozat* $n \to \infty$ *esetén* L_p*-ben is konvergens.*

Valóban, a Jensen-egyenlőtlenség adja, hogy $|Y_n|^p = |E(Y \mid \mathcal{F}_n)|^p \le E(|Y|^p \mid \mathcal{F}_n)$. Ez utóbbi egyenletesen integrálható halmaz, tehát $|Y_n|^p, n \ge 1$ is az.

Továbbá Y_n, $n \to \infty$ esetén 1-valószínűséggel konvergens. Az egyenletes integrálhatóság miatt tehát L_p-ben is az.

Visszatérve a tétel bizonyításához legyen most $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Ekkor $\sum_{k=n+1}^{\infty} X_k$ független $\mathcal{F}_n$-től. Tehát

$$E(X \mid \mathcal{F}_n) = \sum_{k=1}^{n} X_k + E\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} X_k\right).$$

Mivel X mérhető az $\mathcal{F}_\infty$ σ-algebrára, ezért $E(X \mid \mathcal{F}_n) \to X$ 1-valószínűséggel.

De $\sum_{k=1}^{n} X_k \to X$ szintén 1-valószínűséggel.

Ezért $E\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} X_k\right) \to 0$.

Azonban, $E(X \mid \mathcal{F}_n) \to X$ L_p-ben is — a lemma miatt.

Tehát $X_n \to X$ L_p-ben. □.

Martingálok L_p konvergenciája

109. Tétel. *Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \ge 1}$ martingál és $p > 1$. Tegyük fel, hogy*

$$\sup E(|X_n|^p) < \infty.$$

Ekkor X_n $n \to \infty$ esetén L_p-ben is konvergens.

Bizonyítás:

Alkalmazzuk a Doob–maximálegyenlőtlenséget az $|X_n|^p$ szubmartingálra. Ekkor

$$E\left(\sup_{n \ge 1} |X_n|^p\right) = \lim_{n \to \infty} E\left(\max_{1 \le k \le n} |X_k|^p\right) \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \lim_{n \to \infty} E(|X_n|^p) < \infty.$$

Ezért az $|X_n|^p, n \ge 1$ halmaz egyenletesen integrálható. De egyben 1-valószínűséggel is konvergens.

Tehát L_p-ben is az.

Marcinkiewicz–Zygmund-tétel

Független összegre.

110. Tétel. *Legyen $0 < p < 2$ rögzített szám és $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyekre $E(|X_1|^p) < \infty$. Ekkor*

$$\sum \left(\frac{X_n}{n^{1/p}} - E(Y_n)\right) \quad 1 - \textit{valószínűséggel konvergens},$$

ahol $Y_n = \frac{X_n}{n^{1/p}} \chi_{\left\{|X_n| < n^{1/p}\right\}}$.

Bizonyítás:

$$E(|X_1|^p) \ge \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1|^p \ge n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \ge n^{1/p}).$$

Ez utóbbiak független események. Tehát

$$P\left(\limsup \left\{|X_n| \ge n^{1/p}\right\}\right) = 0.$$

Tehát

$$\sum \left(\frac{X_n}{n^{1/p}} - Y_n \right)$$

konvergens.

Tekintsük tehát az $\sum (Y_n - E(Y_n))$ sort.

Megmutatjuk, hogy $\sum E(Y_n^2) < \infty$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(Y_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\frac{X_n^2}{n^{2/p}} \chi_{\{|X_n| < n^{1/p}\}}) = \sum_{j=1}^{\infty} E\left(X_1^2 \chi_{\{(j-1)^{1/p} \le |X_n| < j^{1/p}\}} \right) \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{n^{2/p}}$$

Becsüljük meg az $\sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{n^{2/p}}$ összeg nagyságát.

Legyen $\alpha < 0$. Az x^{α} függvény $x > 0$ halmazon konvex, monoton csökkenő. Ezért

$$n^{\alpha} - (n-1)^{\alpha} \le \alpha n^{\alpha - 1} .$$

(A $x^{-\alpha}$ függvény abszolút értékben jobban csökken $n-1$ és n között, mint az $x = n$ pontban vett érintője.) Átrendezve

$$n^{\alpha-1} \le \frac{1}{\alpha} \left(n^{\alpha} - (n-1)^{\alpha} \right) = \frac{1}{-\alpha} \left((n-1)^{\alpha} - n^{\alpha} \right) .$$

Legyen $1 - \alpha = \frac{2}{p} > 1$. Ekkor tehát

$$n^{-2/p} \le \frac{1}{\frac{2}{p} - 1} \left[(n-1)^{1-2/p} - n^{1-2/p} \right] .$$

Tehát — leválasztva az első összeadandót —

$$\sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{n^{2/p}} \le \frac{1}{\frac{2}{p} - 1} \frac{1}{j^{\frac{2}{p}-1}} + \frac{1}{j^{2/p}} .$$

Visszahelyettesítve

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(Y_n^2) \le \sum_{j=1}^{\infty} E\left(X_1^2 \chi_{\{(j-1)^{1/p} \le |X_n| < j^{1/p}\}} \right) \left(\frac{1}{j^{2/p}} + \frac{1}{\frac{2}{p} - 1} \frac{1}{j^{\frac{2}{p}-1}} \right) \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} E\left(|X_1|^p \chi_{\{(j-1)^{1/p} \le |X_n| < j^{1/p}\}} \right) j^{\frac{2-p}{p}} \left(\frac{1}{j^{2/p}} + \frac{1}{\frac{2}{p} - 1} \frac{1}{j^{\frac{2}{p}-1}} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} E\left(|X_1|^p \chi_{\{(j-1)^{1/p} \le |X_n| < j^{1/p}\}} \right) \left(\frac{1}{j} + \frac{p}{2-p} \right) \le$$

$$\le \left(1 + \frac{p}{2-p} \right) E(|X_1|^p) \infty .$$

Ezért $\sum (Y_n - E(Y_n))$ konvergens 1-valószínűséggel. □

12. előadás — 2020. december 3.

Hiánypótlás:

Legyenek Y, Z független valószínűségi változók, és $p \ge 1$. Tegyük fel, hogy $E|Y + Z|^p < \infty$. Ekkor $E|Y|^p < \infty$, és $E|Z|^p < \infty$.

Valóban

$$E|Y+Z|^p = \int\limits_{\mathbb{R}^2} |y+z|^p \, dQ_{Y,Z}(y,z) = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} |y+z|^p \, dQ_Y(y) \, dQ_Z(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} E\left(|Y+z|^p\right) \, dQ_Z(z)$$

Tehát létezik olyan $z \in \mathbb{R}$, melyre $\|Y+z\|_{L_p}$ véges.

De

$$\|Y\|_{L_p} \leq \|Y+z\|_{L_p} + |z| \, .$$

$\square$

Kiegészítés:

Megmutattuk tehát, hogy ha $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, és $E(|X_1|^p) < \infty$, ahol $0 < p < 2$, akkor

$$\sum \left(\frac{X_n}{n^{1/p}} - E(Y_n) \right) \; 1 - \text{valószínűséggel konvergens} \, ,$$

ahol $Y_n = \frac{X_n}{n^{1/p}} \chi_{\left\{|X_n| < n^{1/p}\right\}}$.

Lehet-e valamit mondani a $\sum E(Y_n)$ sor konvergenciájáról?

Állítás

Ha $0 < p < 1$, akkor $\sum E|Y_n| < \infty$.

Ha pedig $1 < p < 2$, és $EX_1 = 0$, akkor $\sum |EY_n| < \infty$.

Bizonyítás: Az első állítás bizonyításának „lelke” ismét az

$$\sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{n^{2/p}} \leq \frac{1}{\frac{2}{p} - 1} \frac{1}{j^{\frac{2}{p}-1}} + \frac{1}{j^{2/p}} \, .$$

becslés, de most p helyett $2p$-re alkalmazva.

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(|Y_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} E(\frac{|X_n|}{n^{1/p}} \chi_{\left\{|X_n| < n^{1/p}\right\}}) = \sum_{j=1}^{\infty} E\left(|X_1| \chi_{\left\{(j-1)^{1/p} \leq |X_1| < j^{1/p}\right\}} \right) \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{n^{1/p}} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} E\left(|X_1| \chi_{\left\{(j-1)^{1/p} \leq |X_1| < j^{1/p}\right\}} \right) \left(\frac{1}{j^{1/p}} + \frac{1}{\frac{1}{p} - 1} \frac{1}{j^{\frac{1}{p}-1}} \right) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} E\left(|X_1|^p \chi_{\left\{(j-1)^{1/p} \leq |X_1| < j^{1/p}\right\}} \right) j^{\frac{1-p}{p}} \left(\frac{1}{j^{1/p}} + \frac{1}{\frac{1}{p} - 1} \frac{1}{j^{\frac{1}{p}-1}} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} E\left(|X_1|^p \chi_{\left\{(j-1)^{1/p} \leq |X_1| < j^{1/p}\right\}} \right) \left(\frac{1}{j} + \frac{p}{1-p} \right) \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{p}{1-p} \right) E(|X_1|^p) < \infty \, .$$

Második állítás:

$$E(Y_n) = \frac{1}{n^{1/p}} \int\limits_{\left\{|X_n| < n^{1/p}\right\}} X_n \, dP = -\frac{1}{n^{1/p}} \int\limits_{\left\{|X_n| \geq n^{1/p}\right\}} X_n \, dP = -\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/p}} \int\limits_{\left\{(j-1)^{1/p} \leq |X_n| < j^{1/p}\right\}} X_n \, dP$$

kihasználva, hogy $EX_n = 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |E(Y_n)| \le \sum_{j=2}^{\infty} E\left(|X_1| \chi_{\{(j-1)^{1/p} \le |X_1| < j^{1/p}\}}\right) \sum_{n=1}^{j-1} \frac{1}{n^{1/p}} \le$$

$$\le \sum_{j=2}^{\infty} E\left(|X_1| \chi_{\{(j-1)^{1/p} \le |X_1| < j^{1/p}\}}\right) \int_0^{j-1} x^{-1/p}\, dx\,.$$

Ezért — mivel $1 - 1/p > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |E(Y_n)| \le \sum_{j=2}^{\infty} E\left(|X_1| \chi_{\{(j-1)^{1/p} \le |X_1| < j^{1/p}\}}\right) \frac{1}{1-\frac{1}{p}} (j-1)^{1-\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \sum_{j=2}^{\infty} E\left(|X_1|^p \chi_{\{(j-1)^{1/p} \le |X_1| < j^{1/p}\}}\right) \frac{1}{(j-1)^{\frac{p-1}{p}}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} (j-1)^{1-\frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{p}{p-1} E(|X_1|^p) < \infty\,.$$

□

Tehát $0 < p < 1$, illetve $1 < p < 2$ és $E(X_1) = 0$ esetén az $\sum \frac{X_n}{n^{1/p}}$ sor 1-valószínűséggel konvergens.

Az $n^{1/p}$ számsorozat monoton növekedve végtelenhez tart. Kíséreljük meg alkalmazni a Kronecker-lemmát.

Állítás
Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, továbbá $0 < p < 2$ rögzített érték. Legyen $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Ekkor a következő két állítás ekvivalens:

- Létezik c, hogy $\frac{S_n - nc}{n^{1/p}} \to 0$ 1-valószínűséggel,
- $E(|X_1|^p)$ véges.

Ekkor $c = \begin{cases} E(X_1)\,, & \text{ha } 1 \le p < 2 \\ \text{tetszőleges}, & \text{ha } 0 < p < 1\,. \end{cases}$

Bizonyítás: Tegyük fel az 1-valószínűségű konvergenciát. Ekkor

$$\frac{X_n}{n^{1/p}} = \frac{S_n - nc}{n^{1/p}} - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/p} \frac{S_{n-1} - nc}{(n-1)^{1/p}} \to 0\,.$$

Borel–Cantelli-lemmából $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1|^p \ge n) < \infty$, így $E(|X_1|^p)$ véges.

Legyen most $E|X_1|^p$ véges.

Ha $0 < p < 1$, akkor $\sum \frac{X_n}{n^{1/p}}$ 1-valószínűséggel konvergens. Ezért — $q_n = n^{1/p}$ választással — a Kronecker-lemma adja, hogy

$$\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{k=1}^{n} X_k \to 0\,.$$

Ha $1 < p < 2$, akkor $X_n - EX_1$ várható értéke már 0. Ismét alkalmazható a Kronecker-lemma:

$$\frac{1}{n^{1/p}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - EX_1) \to 0\,.$$

A $p = 1$ eset pedig a Kolmogorov-féle nagy számok erős törvénye. □

Kiegészítés [Kesten]
$X_1, X_2, \ldots$ függetlenek, azonos eloszlásúak. Tegyük fel, hogy $EX_1^+ = EX_1^- = \infty$. Ekkor

$$\lim \frac{S_n}{n} = \infty\,, \text{ vagy } \lim \frac{S_n}{n} = -\infty\,, \text{ vagy}$$
$$\limsup \frac{S_n}{n} = \infty \text{ és } \liminf \frac{S_n}{n} = -\infty$$

1-valószínűséggel.

Tétel
Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ martingál. Tegyük fel, hogy

$$E\left(\sup_{n\geq 2} |X_n - X_{n-1}|\right) < \infty\,.$$

Ekkor $\{\limsup X_n < \infty\} = \{\liminf X_n > -\infty\} = \{X_n \text{ konvergens}\}$

Legyen $0 < c$ és $\tau_c = \inf\{n\,:\, X_n > c\}$. Ez megállási idő, ezért $X_{\min(\tau_c, n)}$ is martingál.

Továbbá $EX^+_{\min(\tau_c,n)} \leq E\left(c + \sup_{n\geq 2}|X_n - X_{n-1}|\right) < \infty$.

Ezért $X_{\min(\tau_c,n)}$ konvergens 1-valószínűséggel, ha $n \to \infty$.

Az $\{\tau_c = \infty\} = \{\sup X_n \leq c\}$ halmazon maga az $X_n, n \geq 1$ sorozat konvergens.
Tehát $\{\limsup X_n < \infty\} \subset \{X_n \text{ konvergens}\}$. De a fordított irányban mindig teljesül.
A $-X_n$ sorozatra alkalmazva kapjuk az állítás másik részét. □
Alkalmazás:

Állítás (Borel–Cantelli-lemma általánosítása)
Legyenek $A_1, \ldots$ tetszőleges események. $\mathcal{F}_n = \sigma(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Ekkor

$$\limsup A_n = \left\{\sum_n \chi_{A_n} = \infty\right\} = \left\{\sum_n P(A_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) = \infty\right\}$$

Bizonyítás:
Legyen $X_n = \sum_{j=2}^n \left(\chi_{A_j} - P(A_j\,|\,\mathcal{F}_{j-1})\right)$. Ez martingál, korlátos differenciával.

Ahol $X_n, n \geq 2$ konvergens, ott a két sor egyszerre véges illetve egyszerre tart ∞-hez.
Ahol $X_n, n \geq 2$ divergens, ott $\limsup X_n = \infty$, azaz $\sum_n \chi_{A_n} = \infty$, továbbá $\liminf X_n = -\infty$, tehát ott $\sum_n P(A_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) = \infty$. □

Apróságok martingálokkal

Doob-felbontás
Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ szubmartingál. Ekkor előáll

$$X_n = M_n + A_n \text{ alakban, ahol } M_n \text{ martingál } 0 \leq A_n \leq A_{n+1} \leq$$

és A_n $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhető.

Bizonyítás:
Legyen $A_1 = 0$, és $A_n = A_{n-1} + E\left(X_n - X_{n-1}\,|\,\mathcal{F}_{n-1}\right)$
Ez monoton növekvő, és a megfelelő mérhetőség is teljesül.

Továbbá $M_n = X_n - A_n$. Ekkor

$$E\left(M_n - M_{n-1}\,|\,\mathcal{F}_{n-1}\right) = E\left(X_n - X_{n-1}\,|\,\mathcal{F}_{n-1}\right) - (A_n - A_{n-1}) = 0\,.$$

$\square$

Megjegyzés: $A_n, n \geq 1$ ún. *jósolható* folyamat.

Krickeberg-felbontás
Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ martingál, melyre $\sup E|X_n| < \infty$. Ekkor

$$X_n = Y_n - Z_n \text{ ahol } Y_n, n \geq 1 \text{ és } Z_n, n \geq 1 \text{ martingál, } Y_n \geq 0, Z_n \geq 0\,.$$

Bizonyítás:
Ötlet: $Y_n \geq X_n^+$. Feltételes várható értéket véve: $\quad Y_k \geq E(X_n^+ \,|\, \mathcal{F}_k)$.

Legyen $Y_k = \sup_n E(X_n^+ \,|\, \mathcal{F}_k) = \lim_n E(X_n^+ \,|\, \mathcal{F}_k)$.

Ugyanis X_n^+ szubmartingál, ezért $E(X_{n+1}^+ \,|\, \mathcal{F}_k) \geq E(X_n^+ \,|\, \mathcal{F}_k)$ és mivel $E\left(E(X_n^+ \,|\, \mathcal{F}_k)\right) = E(X_n^+) \leq \sup E|X_n| < \infty$, ezért Y_k véges várható értékű lesz.

$E(Y_{k+1} \,|\, \mathcal{F}_k) = \lim_n E\left(E(X_n^+ \,|\, \mathcal{F}_{k+1}) \,|\, \mathcal{F}_k\right) = Y_k$. Azaz martingál.

Ekkor $Z_k = Y_k - X_k = \lim E(X_n^+ \,|\, \mathcal{F}_k) - X_k = \lim E(X_n^+ - X_n \,|\, \mathcal{F}_k) =$
$= \lim E(X_n^- \,|\, \mathcal{F}_k) \geq 0.$ $\square$

Ez a két felbontás másik lehetőséget ad a martingál konvergencia tétel bizonyítására.

Ennek vázlata a következő lehetne:

1. Első lépésként nemnegatív, L_2-ben korlátos szubmartingál konvergenciáját igazolni a Doob-féle maximálegyenlőtlenség segítségével.
2. Majd nemnegatív martingálok konvergenciáját, kihasználva azt, hogy az e^{-x} függvénybe behelyettesítve korlátos szubmartingált kapunk.
3. Végül a Krickeberg-felbontással L_1-ben korlátos martingálok konvergenciája megmutatható.
4. A Doob-felbontás segít visszavezetni szubmartingálok konvergenciáját a martingálokéra.

Martingál-tulajdonság kiterjesztése megállási időkre

Megállási időhöz tartozó σ-algebra
Legyen $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset$ adott σ-algebra sorozat, $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\cup_n \mathcal{F}_n\right)$, $\tau : \Omega \to \{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ megállási idő.
Ekkor

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty \,|\, A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n\,,\ n \geq 1\}$$

Azaz a $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ eseményen éppen $\mathcal{F}_n$.

Állítás
Legyen $X \in L_1$. Ekkor

$$E(X \,|\, \mathcal{F}_\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X \,|\, \mathcal{F}_n)\chi_{\{\tau=n\}} + E(X \,|\, \mathcal{F}_\infty)\chi_{\{\tau=\infty\}}$$

Megmutatjuk, hogy a jobboldal megfelel X feltételes várható értékének.
Mivel $E(X \,|\, \mathcal{F}_n)$ mérhető az $\mathcal{F}_n$ σ-algebrára, ezért a jobboldal $\mathcal{F}_\tau$-mérhető.

Legyen most $A \in \mathcal{F}_\tau$. Ekkor

$$\int\limits_A \left(\sum_{n=1}^{\infty} E(X \,|\, \mathcal{F}_n)\chi_{\{\tau=n\}} + E(X \,|\, \mathcal{F}_\infty)\chi_{\{\tau=\infty\}} \right) dP =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A\cap\{\tau=n\}} E(X \,|\, \mathcal{F}_n)\, dP + \int\limits_{A\cap\{\tau=\infty\}} E(X \,|\, \mathcal{F}_\infty)\, dP =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A\cap\{\tau=n\}} X\, dP + \int\limits_{A\cap\{\tau=\infty\}} X\, dP = \int\limits_A X\, dP\,. \quad \square$$

Legyen most $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ martingál és $1 \leq \tau \leq \nu$ két megállási idő. Igaz-e hogy $E(X_\nu \,|\, \mathcal{F}_\tau) = X_\tau$? Azaz, a martingál tulajdonság kiterjeszthető-e tetszőleges megállási időkre?

Ez nem igaz.
Vegyük pl. a szimmetrikus bolyongásban a $\nu = \inf\{n \,|\, S_n = 1\}$ megállási időt.
Ekkor $E(S_\nu) = 1$, de $E(S_n) = 0$.

Állítás
Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ martingál és $1 \leq \tau \leq \nu \leq M < \infty$ két korlátos megállási idő.
Ekkor
$$E(X_\nu \,|\, \mathcal{F}_\tau) = X_\tau\,.$$

Először megmutatjuk, hogy $E(X_\nu \,|\, \mathcal{F}_n) = X_{\min(\nu,n)}$.

Indukcióval: Tudjuk, hogy $\nu \leq M$.
Ezért $\{\nu \leq M-1\}$ és $\{\nu = M\} \in \mathcal{F}_{M-1}$. Ekkor

$$E(X_\nu \,|\, \mathcal{F}_{M-1}) = E(X_\nu\chi_{\{\nu=M\}} + X_\nu\chi_{\{\nu\leq M-1\}} \,|\, \mathcal{F}_{M-1}) =$$
$$= \chi_{\{\nu=M\}}E(X_M \,|\, \mathcal{F}_{M-1}) + X_\nu\chi_{\{\nu\leq M-1\}} =$$
$$= \chi_{\{\nu=M\}}X_{M-1} + X_\nu\chi_{\{\nu\leq M-1\}} = X_{\min(\nu,M-1)}\,,$$

kihasználva martingáltulajdonságot, és hogy $X_\nu\chi_{\{\nu\leq M-1\}}$ mérhető az $\mathcal{F}_{M-1}$ σ-algebrára.

Most viszont $\nu' = \min(\nu, M-1) \leq M-1$. Erre alkalmazható ismét az előző gondolatmenet. Adódik, hogy $E(X_\nu \,|\, \mathcal{F}_{M-2}) = X_{\min(\nu,M-2)}$. És így tovább.

$$E(X_\nu \,|\, \mathcal{F}_\tau) = \sum_{n=1}^{M} E(X_\nu \,|\, \mathcal{F}_n)\chi_{\{\tau=n\}} = \sum_{n=1}^{M} X_{\min(\nu,n)}\chi_{\{\tau=n\}} = X_\tau\,. \quad \square$$

Optimális megállítás
Legyen $X_0, X_1, \ldots, X_n$ valószínűségi változó sorozat, $E(X_k)$ véges, $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n$ σ-algebrák, ahol X_k $\mathcal{F}_k$-mérhető, $0 \leq k \leq n$. Keresendő olyan τ megállási idő, melyre $E(X_\tau)$ maximális.

Konstrukció:

Legyen $Z_n = X_n$, és $Z_k = \max\left(X_k, E(Z_{k+1} \,|\, \mathcal{F}_k)\right)$, $0 \leq k \leq n-1$.
Ekkor $\tau = \min\{k \,|\, X_k = Z_k\}$ optimális.

Igazolás: $E(Z_{k+1} \,|\, \mathcal{F}_k) \leq Z_k$, azaz $Z_k, 1 \leq k \leq n$ szupermartingál. Továbbá $Z_k \geq X_k$, azaz majoráló szupermartingál.

Ezért tetszőleges ν megállási idő esetén

$$E(X_\nu) \leq E(Z_\nu) \leq E(Z_0)\,.$$

Azonban $Z_{\min(\tau,k)}$, $0 \le k \le n$ martingál. Valóban: $E\left(Z_{\min(\tau,(k+1))} \,|\, \mathcal{F}_k\right) = E\left(Z_\tau \chi_{\{\tau \le k\}} + Z_{k+1}\chi_{\{\tau > k\}} \,|\, \mathcal{F}_k\right) =$
$= Z_\tau \chi_{\{\tau \le k\}} + Z_k \chi_{\{\tau > k\}} = Z_{\min(\tau,k)}$.

Ezért

$$E(X_\tau) = E(Z_\tau) = E(Z_0)\,. \quad \square$$

13. előadás — 2020. december 10.

Feltételes valószínűség

A feltételes valószínűségre a σ-additívitásból a következő marad meg:

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|\mathcal{F}) = P(A|\mathcal{F}) \qquad \text{m.m,}$$

tetszőleges $A_1, A_2, \ldots$ diszjunkt események esetén, ahol $A = \cup A_i$.

111. Definíció (Feltételes valószínűség reguláris változata). *Legyenek $\mathcal{A}_1, \mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ rész σ- algebrák. Az $\mathcal{A}_1$ σ-algebra $\mathcal{F}$-re vonatkozó feltételes valószínűségének reguláris változata a következő tulajdonságokkal rendelkező*

$$P(A, \omega) \in \mathbb{R} \quad A \in \mathcal{A}_1, \omega \in \Omega$$

függvény:

(1) $P(A, \omega)$ rögzített ω esetén vsz-i mérték $\mathcal{A}_1$-en, (Jel.: P_ω)

(2) Rögzített $A \in \mathcal{A}_1$ esetén $\mathcal{F}$-mérhető

(3) $\int_B P(A,\omega) dP(\omega) = \int_B \chi_A dP = P(A \cap B)$, midőn $B \in \mathcal{F}$.

Állítás

Ha létezik reguláris változat, akkor tetszőleges véges várható értékű, $\mathcal{A}_1$ mérhető X valószínűségi változó esetén

$$E(X \,|\, \mathcal{F})(\omega) = \int_\Omega X dP_\omega\,,\ P \text{ m.m. } \omega \text{ esetén}\,.$$

Bizonyítás: Ha $X = \chi_A$, akkor $\int X dP_\omega = P(A, \omega)$, tehát a (3) tulajdonság éppen a fenti összefüggést jelenti.

Továbbá X-ben mindkét oldal lineáris, így lineáris kombinációra is kiterjeszthető az azonosság.

A feltételes várható értékre is teljesül a monoton konvergencia tétel, tehát $X \ge 0$ esetére is öröklődik az egyenlőség.

Végezetül: $X = X^+ - X^-$. $\square$

Megjegyzés. Megmutatható, hogy ha Ω teljes, szeparábilis metrikus tér, $\mathcal{A}$ a Borel-halmazok σ-algebrája, akkor tetszőleges $\mathcal{F}$ esetén létezik reguláris változat.

Speciális eset

112. Definíció. *Legyen $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ valószínűségi változó. Ekkor a $Q_X(B, \omega)$ a feltételes eloszlás reguláris változata, ha*

- *rögzített ω esetén $B \in \mathcal{B}_n$ szerint vsz. mérték;*
- *rögzített $B \in \mathcal{B}_n$ esetén ω szerint $\mathcal{F}$ -mérhető;*

- $P(X \in B|\mathcal{F})(\omega) = Q_X(B, \omega) \quad P - m.m..$

Megjegyzés: Ez lényegében azt az esetet jelenti, amikor $\mathcal{A}_1 = \sigma(X)$. Ugyanis ekkor $A \in \mathcal{A}_1$ esetén létezik $B \in \mathcal{B}$, hogy $A = X^{-1}(B)$. Legyen tehát

$$P(A, \omega) = Q_X(B, \omega)\,.$$

Ez a feltételes valószínűség reguláris változata mindhárom tulajdonságával rendelkezik.

Mivel vektorértékű valószínűségi változó esetén az eloszlás és az eloszlásfüggvény meghatározzák egymást, ezért elég a feltételes eloszlásfüggvény reguláris változatát vizsgálni.

113. Definíció (Feltételes eloszlásfüggvény reguláris változata). *A valós értékű X valószínűségi változó feltételes eloszlásfüggvényének reguláris változata az $F(x, \omega)$ függvény, ha*

- *$F(x, \omega)$ rögzített $x \in \mathbb{R}$ esetén $\mathcal{F}$ mérhető,*
- *rögzített $\omega \in \Omega$ esetén x szerint eloszlásfüggvény,*
- *$\int_B F(x, \omega) dP = \int_B \chi_{\{X<x\}} dP$ tetszőleges $B \in \mathcal{F}$ esetén.*

114. Tétel (Doob)**.** *Tetszőleges X vektorértékű valószínűségi változó esetén létezik a feltételes eloszlásfüggvény reguláris változata.*

Bizonyítás: Csak $n = 1$ esetén. (Az általános eset hasonlóan megy.)
Minden rögzített $x \in \mathbb{Q}$ esetén vegyük a $P(X < x \,|\, \mathcal{F})$ egy változatát. (Nullmértékű szabadságunk van.) Jelölje ezt $F(x, \omega)$.
Rögzített ω mellett ez nem feltétlen monoton növekvő x-ben. De $x < y$ esetén

$$P(X < x \,|\, \mathcal{F}) \leq P(X < y \,|\, \mathcal{F})\,,\ \text{1-valószínűséggel}\,.$$

Legyen tehát $x < y$, $x, y \in \mathbb{Q}$ esetén

$$N_{x,y} = \{\omega \,|\, F(x, \omega) > F(y, \omega)\}\ .\ \text{Ekkor } P(N_{x,y}) = 0\,.$$

Legyen $N_{\text{mon}} = \bigcup_{x,y\in\mathbb{Q},x<y} N_{x,y}$. $P(N_{\text{mon}}) = 0$.
Balról folytonosság: (a racionális számokon). $\omega \notin N_{\text{mon}}$ esetén már monoton növekvő. Legyen $x \in \mathbb{Q}$ esetén

$$N_x = \left\{\omega \notin N_{\text{mon}} \,|\, F(x, \omega) > \lim_{y\nearrow x, y\in\mathbb{Q}} F(y, \omega)\right\}$$

A feltételes várható értékre általánosított monoton konvergencia tétel adja, hogy $P(N_x) = 0$. Legyen $N_b = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} N_x$. Ekkor $P(N_{\text{mon}} \cup N_b) = 0$.
Hasonlóan

$$N_\infty = \left\{\omega \notin N_{\text{mon}} \,|\, \lim_{x\to\infty, x\in\mathbb{Q}} F(x, \omega) \neq 1\right\}$$

Illetve

$$N_{-\infty} = \left\{\omega \notin N_{\text{mon}} \,|\, \lim_{x\to-\infty, x\in\mathbb{Q}} F(x, \omega) \neq 0\right\}$$

Ekkor $P(N_\infty) = 0$ és $P(N_{-\infty}) = 0$
Legyen végül $N = N_{\text{mon}} \cup N_b \cup N_\infty \cup N_{-\infty}$.
Erre is teljesül, hogy $P(N) = 0$.
Vegyük észre, hogy $\omega \notin N$ esetén a racionális számokon az $F(x, \omega)$ függvénycsalád rendelkezik (x-ben) az eloszlásfüggvény összes tulajdonságával.

Kiterjesztjük: Legyen
$$F(x,\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{r\nearrow x, r\in\mathbb{Q}} F(r,\omega)\,, & \text{ha } \omega \notin N\,, \\ F_X(x)\,, & \text{ha } \omega \in N\,. \end{cases}$$

Ez jó, mert $\mathcal{F}$-mérhető ω-ban, eloszlásfüggvény x-ben és az $\int_B F(x,\omega)dP = \int_B \chi_{\{X<x\}}dP$ tetszőleges $B \in \mathcal{F}$ esetén teljesül minden $x \in \mathbb{Q}$ esetén (csak nullmértékű halmazon módosítottunk), és $r \nearrow x$, $r \in \mathbb{Q}$ esetén mindkét integrálra alkalmazható a monoton konvergencia tétel. $\square$

115. Következmény (Doob)**.** *A fenti tétel feltételei mellett létezik a feltételes eloszlásnak reguláris változata.*

Kolmogorov 3-sor tétel újabb alkalmazása
Legyen $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek közös eloszlása nem elfajult, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$ tetszőleges számsorozat. Ekkor
$$\sum_n a_n X_n \text{ konvergens} \Longrightarrow \sum_n a_n^2 < \infty\,.$$

Bizonyítás: Ekkor $a_n X_n \to 0$ 1-valószínűséggel, így $\varepsilon > 0$ esetén $P(|a_n X_n| \geq \varepsilon) \to 0$. Azonos eloszlásúak, ezért $P(|a_n X_1| \geq \varepsilon) \to 0$, tehát $|a_n| \to 0$. A 3-sor tétel adja, hogy
$$\sum D^2\left(a_n X_n \chi\left\{|a_n X_n| \leq 1\right\}\right) = \sum a_n^2 D^2\left(X_n \chi_{\{|a_n X_n| \leq 1\}}\right) < \infty$$

Ha $\inf D^2\left(X_n \chi\left\{|a_n X_n| \leq 1\right\}\right) > 0$, akkor $\sum a_n^2 < \infty$.

Tegyük fel, hogy létezik olyan $n_j, j \geq 1$ részsorozat, melyre
$$\lim_{j\to\infty} D^2\left(X_{n_j} \chi_{\left\{|a_{n_j} X_{n_j}| \leq 1\right\}}\right) \to 0\,.$$

Megmutatjuk, hogy ez ellentmondásra vezet.

Legyen $b_j = E\left(X_{n_j} \chi_{\left\{|a_{n_j} X_{n_j}| \leq 1\right\}}\right)$. Adódik, hogy $X_{n_j} \chi_{\left\{|a_{n_j} X_{n_j}| \leq 1\right\}} - b_j \to 0$ sztochasztikusan.

Legyen $\delta > 0$. Ekkor elég nagy j esetén (azonos eloszlásúak):
$$P\left(\left|X_1 \chi_{\left\{|a_{n_j} X_1| \leq 1\right\}} - b_j\right| > \epsilon\right) < \delta\,.$$

De
$$\left\{\left|X_1 \chi_{\left\{|a_{n_j} X_1| \leq 1\right\}} - b_j\right| > \epsilon\right\} \supset \left\{|X_1 - b_j| > \varepsilon\right\} \cap \left\{|X_1| \leq \frac{1}{a_{n_j}}\right\}$$

Elég nagy j esetén tehát $P(|X_1 - b_j| > \varepsilon) < 2\delta$, így $X_1 - b_j \to 0$ sztochasztikusan. Tehát b_j, $j \to \infty$ esetén konvergens: $b = \lim b_j$ és $X_1 = b$ 1-valószínűséggel.

De feltettük, hogy X_1 eloszlása nem elfajult eloszlás.

$\square$