Facultad de Matemática y Computación (UH)

Ciencia de la Computación

Matemática Numérica

Curso 2021

Conferencia # 1.0000000000000002:

Esta conferencia contiene "spoilers" sobre algunos ejercicios de la clase práctica pasada. Por eso se recomienda que si se quiere tener la experiencia completa de la clase práctica anterior (y de esta conferencia), se deben hacer todos los ejercicios antes de leerla `;-)`.

1 Preámbulo

Cuando comienzas a leer todo se pone negro y escuchas una voz muy grave que dice:

—Previously en Matemática Numérica... —*y a continuación pasan muchas imágenes por delante de ti:*

—Las computadoras se equivocan sacando cuentas.

—¿Cómo que 0.4*3 es mayor que 1.2?

—Profe, disculpa que la rectifique, error no lleva h.

—¡Quiero un canal de numérica!

—¿$10^{100} + 10^{50}$ es 10^{100}? ¡Eso no puede ser!

—¡El profesor Arnel me dijo boba! ¿A alguien más le ha pasado?

—No, no vamos a explicar por qué pasa... ese es el tema de la próxima conferencia.

Mientras tanto, a unos metros del aula 6, los profesores de clase práctica conversan mientras esperan al de conferencia

Carlos: ¿Qué vamos a hacer en la clase de hoy?

Camila: Creo que va dar la misma conferencia que les dio a ustedes el año pasado.

Sheila: ¡No! ¿Con los mismos ejemplos y las mismas historias?

Arnel: ¿Y los mismos chistes?

Camila: Sí, creo que sí, eso fue lo que me dijo.

Rocio: ¿Y no hay forma de convencerlo para que no haga eso? ¿Por favor?

Camila: Yo se lo he dicho, pero él insiste. Dice que así se desarrolla la imaginación de los alumnos. —se encoge de hombros.

Sheila: Sí, sí... Es sarcasmo por a si alguien no le quedó claro. Y además de la imaginación se pierde cantidad de tiempo por gusto. Eso último no fue sarcasmo, por si a alguien no le quedó claro.

Arnel: ¡Tengo una idea! Yo voy a hablar con los alumnos antes de que llegue el profesor. Creo que sé como ganar tiempo. Ustedes hablen con él para que no haga los chistes, ¡por favor! Solo necesito 5 minutos para explicarles.

Arnel se aleja hacia el aula 6 al mismo tiempo que el profesor aparece en el pasillo y se acerca a los profesores de clase práctica.

Carlos: Profe, un momentico. Necestiamos hablar una cosita con usted, antes de que empiece la clase.

Mientras ellos hablan con el profesor de conferencia, Arnel llega al aula 6, le dice a los alumnos que están afuera que por favor entren. Se para frente al aula y dice:

Arnel: Atiendan acá. Tengo que decirle dos cosas...

Cuando los demás profesores entran al aula ya Arnel está sentado al fondo. Justo antes de que el profesor empiece a hablar le hace un gesto de OK a los demás, Todos se sientan y el profesor comienza a hablar.

2 Título

—Hola, buenas tardes. En la clase práctica había unos cuantos ejercicios raros, que hacen que uno se ponga muy nervioso cuando trabaja con la computadora. No se preocupen. No hay motivos para ponerse nerviosos... Bueno, sí. Sí los hay, pero no son esos. —sonríe. —Algunos de las cosas que vieron en la clase práctica fueron. . . —comienza a escribir en la pizarra:

```
0.4*3 > 1.2

10e100 + 10e50 = 10e100

1.000000000000001e100
```

—Ese último número está ahí porque es imposible hacer que el valor de una suma sea ese.

—La explicación de todos esos fenómenos es sencilla y se resume en una frase —*hace una pausa y pasea la vista de un lado al otro del aula. Cuando termina de mirar a todos los alumnos... (¡uno por uno!* `:-o`*) se vira y escribe en la pizarra.*

Durante unos segundos solo se escucha la tiza sobre la pizarra, tac, tac, suúuj, tac, tac, tac... y como él está en el medio no se ve qué está escribiendo `:-/`*. Cuando termina, se mueve hacia la derecha y señala lo que está escrito mientras lo lee:*

`Los números no existen`

—Los números no existen. Y ese es presicamente el título de la conferencia de hoy. —sonríe orgulloso de su idea.

Camila:
A él le gusta ser dramático y rimbombante con los nombres. Tenemos suerte que ya cambió el título de hace unos años que era: "EL INCREÍBLE CASO DE LAS COMPUTADORAS QUE SE EQUIVOCAN SACANDO CUENTAS, EXPLICADO EN 4 PALABRAS: LOS NÚMEROS NO EXISTEN". No entiendo por qué no acaba de ponerle: "Representación de los números reales en las computadoras", como hacen en todos los libros de numérica. Así, por lo menos, las personas que no entiendan la conferencia sabrían de qué está hablando y qué buscar en los libros de la bibliografía.

3 Por qué los números no existen

—Y para entender por qué los números no existen...

Rocio:

Fíjense, para tranquilidad mental de todos los que los oigan hablar de numérica, yo les recomiendo que cada vez que el profe diga "Lo números no existen" ustedes agreguen mentalmente "en la computadora". Es que si de pronto alguien los oye decir esa frase... Bueno, no van a pensar bien de ustedes. Por eso es mejor acostumbrarse a decirla completa: los números no existen la computadora.

Por cierto, recuerden que si quieren pueden participar en esta conferencia, de la manera usual. Esta es la conferencia *"que pudiera haber sido"k*, pero viajar en el tiempo y modificarlo no es tan complicado si se tienen las herramientas correctas, como sabrían si hubieran leído La Bella Durmiente de Sheri Topera `;-)`.

—solo hace falta ponerse en el lugar de las personas que diseñaron las primeras computadoras.

Carlos:

La asignatura tiene una característica curiosa. Los algoritmos y las ideas que se ven aquí no se llaman Método de Sheila, o Factorización de Carlos, solo porque nacimos 100 años tarde. Si hubiéramos estado vivos en el momento adecuado, hubiéramos podido inventar todo eso sin ningún problema. Y en algunos casos, es posible que hubiésemos podido hacer algunas cosas un poquito mejor. Por eso, no tengan ningún tipo de reparos en participar en todo lo que puedan.

—Por ejemplo, imagínense que ustedes están ahí, en el momento que acaban de inventar las computadoras (en cualquiera de las épocas: en 1830 con la máquina analítica de Babage, en 1936 con Turing y sus máquinas, o en la década de los 40 cuando empezaron a construirse las versiones electrónicas). Ustedes están ahí, y de pronto alguien les pregunta: Oye, ¿cómo representamos aquí los números reales? ¿Qué hubieran respondido?

En ese momento, todos los alumnos recuerdan lo primero que dijo Arnel antes de que el profesor llegara al aula:

Arnel:

Fíjense, cuando el profe pregunte qué se les ocurre hacer para representar los números reales en la computadora, respondan que usarían la idea de la notación científica. El problema es que si se dice cualquier otra cosa, el profesor va a inventarse un sistema numérico con eso, para usarlo en las computadoras y se pone a analizar todas las ventajas y desventajas que tengan, y 20 minutos después, cuando ya nos tiene convencidos de que así es como funcionan las computadoras, dice que no, que nada de eso se hizo, porque hay una solución mejor: la notación científica. Entonces, para no perder ese tiempo y que esta conferencia no sea MÁS larga por oír al profesor hablar bobería, vamos directamente a lo que es. Ah, y no basta solo con que alguien mencione la notación científica, porque si es una sola persona él la ignora y empieza a hablar sobre cualquier otra idea que alguien haya mencionado. Por eso, que todo el mundo proponga la notación científica. Va a ser mucho mejor para todos. Ya la conferencia es lo bastante larga sin que él se ponga a hablar de boberías que no vienen al caso `:-(`.

Varios estudiantes levantan la mano y el profesor señala a uno.

—Yo usaría algo parecido a la notación científica.

—Muy bien. ¿Alguna otra idea? —*y señala a otra muchacha.*

—Sí, profe, notación científica.

—Muy bien... ¿tú?

—Notación científica.

El profesor hace una pausa.

—Y... ¿a nadie se le ocurre otra idea?

—Profe, es que la idea de la notación científica es muy natural e intuitiva.

El profesor mira a los de clase práctica, que se encogen de hombros con cara de "yo no sé" y "¿qué se le va hacer?", "A los alumnos no se les ocurre más nada". Mira a los alumnos, se lleva la mano a la barbilla, pero sigue hablando.

—Bueno, pues sí. En la computadoras se usa una idea similar a la notación científica... —*se vira y sigue hablando mientras escribe en la pizarra* —Se tiene un número, y además un exponente... —*de pronto deja de escribir y se vira hacia los alumnos* —¿De verdad a nadie se le ocurre otra cosa que no sea notación científica?

Los alumnos dicen que no. Algunos incluso ponen cara de pena mientras encogen los hombros.

—¡Qué raro!... Bueno, no importa. De todas formas, lo que se usa en las computadoras es precisamente una idea muy similar a la de la notación científica.

—*se mueve a un lado y señala la pizarra, donde está escrito:*

$$\texttt{0.321} \times \texttt{10}^4$$

—La notación científica es una forma conveniente de representar, de manera compacta, números que pueden ser muy grandes o muy pequeños. Estamos asumiendo que todo el mundo sabe que ese número en realidad es tres mil doscientos diez —*agrega algo a lo que ya está escrito.*

$$\texttt{0.321} \times \texttt{10}^4 \texttt{ = 3210}$$

—Y que, del mismo modo... —*se vira y escribe un número en la pizarra:*

$$\texttt{0.321} \times \texttt{10}^{-2}$$

—... es el número 0.00321.

$$\texttt{0.321} \times \texttt{10}^{-2} \texttt{ = 0.00321}$$

—¿Alguna duda hasta aquí?

Por suerte, todo el mundo niega con la cabeza.

—En las computadoras los números se representa de una manera similar, solo que hay una cantidad fija de dígitos para el número y otra para el exponente... —*comienza a escribir y cuando se vira, se puede ver lo que escribió:*

. ___ ___ ___ E ___ ___

—En este caso, la E representa el exponente. Así que tendríamos tres dígitos para el número y 2 para el exponente. Fíjense que el punto está al principio del número. —*señala al puntico que está delante de la primera rayita.* —De esa forma, el 3210 se representaría...

Se queda esperando a que alguien le diga la respuesta, lo cual hacen varios estudiantes, que dicen: punto tres dos uno E cero cuatro.

—¡Exacto!

```
._3_ _2_ _1_ E _0_ _4_
```

—¿Y el 0.00321?

```
0 . 0 0 3 2 1
```

Varias personas también dicen a coro: punto tres dos uno E menos 2.

—Bieeeeéen— *dice mientras escribe con alegría:*

```
._3_ _2_ _1_ E _-_ _2_
```

—Perfecto. Ya están listos para saber por qué los números no existen[1].

Se vira hacia la pizarra y escribe nuevamente:

```
.  ___ ___ ___ E ___ ___
```

—Representen ahí —*señala lo que acaba de escribir* — el número 3214.

Se hace un silencio en el aula... Un estudiante empieza a decir:

— Punto tres —*cuando empieza a hablar los demás estudiantes lo miran con cara de "A ver mijo, ¿cómo vas a meter el 4?", pero él no se entera y sigue hablando* —dos, uno... ¡Eh! ¿No se puede?

[1] En la computadora... Siempre recuerden que es en las computadoras.

El profesor recorre la vista por todos los estudiantes, y pregunta:

—¿Y entonces?

—Bueno profe, se supone que eso lo tiene que decir usted.

—No. No me han entendido. Si fuera una evaluación estarían suspensos... todavía. No han hecho lo que les pidió. Recuerden, ustedes están ahí con una pila de gente "dura" (porque ustedes también son gente "dura") y uno de ellos les dice: ¿cómo metemos aquí el número 3214? A esa hora hay que dar una respuesta...

Los alumnos lo siguen mirando en silencio.

—Les voy a soplar una pista... Resuelvan con lo que hay, aunque "esté mal" —*y mientras dice "esté mal" hace el gesto de entrecomillado con los dedos.*

En este momento una estudiante piensa ¿qué es lo peor que puede pasar? y dice:

—Profe, yo lo representaría como punto 3 2 1 E 0 4.

El profesor se queda mirándola sin decir nada. Se da media vuelta y escribe en la pizarra:

$$. \underline{\ 3\ }\ \underline{\ 2\ }\ \underline{\ 1\ }\ \mathtt{E}\ \underline{\ 0\ }\ \underline{\ 4\ }$$

y se vira hacia la persona que habló:

—¿Así?

—Sí, así.

El profesor hace un silencio, mira el número y le dice:

—Pero eso no es el 3214. Eso es el 3210. Ustedes mismos los dijeron hace un momento.

—Bueno profe, pero usted dijo...

El profesor la interrumpe.

—Na, no importa. Esa es la respuesta correcta. Bueno, la correcta no. Porque eso es tremenda chapucería... Pero eso lo que hay —*se encoge de hombros.* —Y además, esa es la misma respuesta que dieron las personas que decidieron el futuro de los cálculos en la computadora. Igualitos de chapuceros que ustedes, o nosotros. Y por esa decisión, o por esa chapucería, como se quiera ver, es que los números no existen[2].

—Aquí hay otro ejemplo más interesante, ¿cómo se representarían el número 3218?

Varios alumnos dicen a coro

—Punto 3 2 2 E 4.

—Exacto...

`. 3 2 2 E 0 4`

—pero ¿qué pasaría yo decido representar el número de esta manera?

`. 3 2 1 E 0 4`

Se hace un silencio en el que se puede escuchar, con toda claridad, la voz mental de los estudiantes:

—¿Cómo que 3 2 1?

—¿Cómo que no va a redondear al 3 2 2?

—¿Cómo que él aprobó cuarto grado?

[2]En la computadora. No existen en la computadora. No me voy a cansar de decirlo.

Sin embargo, la única voz que realmente se escucha es la de varón sentado en la segunda fila:

—Profe, es que 8 es mayor que 5, y cuando el último número es mayor que 5 se redondea por exceso.

El profesor lo mira durante unos instantes, antes de decir.

—Y ahora mismo tu profesor de matemática de cuarto grado está muy orgulloso de ti... pero tu profesor de matemática de cuarto grado no diseñó la forma en que se aproximan los números en la computadora, porque en las computadoras, muchas veces se aproxima así —señala al punto 3 2 1 E 04.

El silencio que había en el aula se convierte en el silencio previo al momento en que se van a freír varios huevos mentalmente, pero antes de que eso ocurra, el profesor sigue hablando.

—Cada una de esas formas de redondear tiene un nombre. La segunda se llama redondeo por truncamiento, porque truncas el número en la cantidad de dígitos que puedes representar. La primera, o la "tradicional", se llama redondeo al más cercano, porque redondeas al número más cercano... aunque realmente quisiera pensar que el nombre no hacía falta explicarlo. Ninguna es mejor o peor que la otra, pero es importante saber qué es lo que está pasando y qué nombre tiene.

—Y aquí tienen la explicación de por qué el ejercicio 12 no se podía hacer con la computadora. En las computadoras, al número

```
1.000000000000001e100
```

—le pasa lo mismo que al 3214 en este ejemplo. No "cabe" en el espacio que la máquina tiene para representarlo, y por lo tanto, tiene que aproximarlo de alguna manera, que es mediante el número:

`1.000000000000002e100`

—Y aquí está también es la eplxicación de por qué, cuando se usa el tipo de dato float no se puede escribir el número...

`1E100`

—El motivo es el mismo por el que nosotros no podemos hacerlo con este ejemplo: es más grande que todos los números que podemos representar. ¿Cuál sería el más grande?

Mira a los alumnos esperando una respuesta y varias personas dicen... algo que no se entiende porque empezaron a hablar en momentos diferentes `:-/`. *Pero no importa. El profesor no se inmuta, y como si hubiera entendido lo que dijeron, escribe en la pizarra:*

`. 9 9 9 E 9 9`

—Exacto, ese es el número más grande que podemos representar, y es menor que 1 E 100.

> **Sheila:**
>
> Aquí haz una pausa y asegúrate de que entiendes por qué `.999E99` es menor que `1E100`. No te preocupes por nosotros, que podemos estar aquí todo el tiempo. Bueno, yo no, porque tengo que estudiar compilación, pero el profesor Fernando y Camila sí se pueden quedar aquí contigo hasta que haga falta.

—Por lo tanto, el 1E100 es más grande que todo lo que existe. ¿Y cómo se llama lo que es más grande que todos los números que existen?

Mira a los alumnos esperando una respuesta.

—¿Infinito?

Eso lo dijo una muchacha de la primera fila, pero lo dijo tan bajito que casi no se oyó.

—¿Qué? —*el profesor la mira fijamente.*

—Más grande que todos los números es infinito. —*parece que no fue buena idea mirarla fijamente, porque eso lo dijo más bajito que lo anterior, y el profesor oyó menos todavía. Pero no importa. Hace como si la hubiera oído y dice:*

—¡Exacto! Lo que es más grande que todos los números es el infinito. —*la mira otra vez, no sea que eso no haya sido lo que dijo, pero como la muchacha asiente, parece que sí fue eso lo que dijo.* —Y vamos a asumir que todo lo que sea más grande que . 9 9 9 E 9 9 es infinito. —*Sonríe.* —Por eso, 1E100 en el float de C# es infinito y cuando en Python se pone un número muy grande, por ejemplo 1E400, el resultado es también es infinito.

Gustavo:

Como estás leyendo esto con calma y tranquilidad, sería una buena idea abrir una consola y comprobar lo que dice el profesor. Esa sería una buena costumbre, porque en estas primeras conferencias no, pero en las siguientes si puede decir cosas intencionalmente erróneas para que las detecten los alumnos que hayan desarrollado el buen hábito de comprobar todo lo que él dice.

—Y para terminar este ejemplo que estamos desarrollando, hay otros números que tampoco se pueden escribir, o sea, que tampoco existen[3], pero esta vez, porque son muy chiquiticos. En este caso, ¿qué significa muy chiquitico?

—Todo lo que sea más pequeño que el menor número que se pueda escribir ahí. —*fue un varón en primera fila.*

—Muy bien. ¿Y cuál sería ese número?

—Punto 0 0 1 E menos 9 —*eso lo dicen varias personas. Y en este caso, ¡quien más alto lo dice es la muchacha que la vez anterior no se le oía nada!* `:-o`. *Por eso, el profesor la mira un instante antes de virarse*[4].

`.0 0 1 E - 9.`

—O sea, que cualquier número menor que 10^{-12} tampoco se puede representar...

Sheila:
Otra vez, asegúrate de que entiendes por qué 10^{-12} es lo mismo que `.001E-9`. Parece una bobería, pero el año pasado cantidad de personas se dieron tremenda *"enredá"* con eso. Y más adelante vienen varios resultados en los que es importante tenerlo claro.

—Cualquier número menor que 10^{-12} no se puede representar porque es más pequeño que lo más pequeño posible. ¿Y cuál es el número que es menor que lo más pequeño posible? ¡Cero! Así que aquí podemos asumir que cualquier número menor que 10^{-12} es cero.

[3]En esta simulación de una computadora.

[4]*Y a partir de aquí no vamos a decir más que escribe en la pizarra...* `:-(` *Si lo que aparece son "cosas raras y eso" y/o tiene* `esta tipografía` *lo más probable es que lo esté escribiendo en la pizarra* `:-/`.

—En resumen, si un número es muy grande no existe[5]. Si es muy chiquitico, tampoco existe[6], y si no es ni muy grande ni muy pequeño, también es posible que no exista[7].

—¿Alguna pregunta hasta aquí?

—Si no hay preguntas, vamos a coger 5 minutos y al regreso, vamos a ponerle nombre a todo lo que hemos visto, para que lo puedan encontrar en cualquier bibliografía.

4 5 minutos

Estos primeros 5 minutos son normales. Algunos alumnos salen del aula, otros se quedan adentro, y el profesor se pasa la mayor parte del tiempo mirando al techo. Cuando han pasado 4 minutos, el profesor se para en la puerta y le dice a los alumnos que entren. Minuto y medio después comienza a hablar.

5 Definiciones formales

— Vamos a ponerle nombre a todo esto que hemos visto aquí.

—Esta forma de presentar los números se llama —*Mientras lo dice, lo escribe en la pizarra.* —aritmética de punto flotante.

`Aritmética de Punto Flotante`

Se vira y mira a los alumnos, que en ese momento recuerdan lo segundo que les

[5] En la computadora.
[6] En la computadora.
[7] En la computadora.

dijo Arnel al comienzo de la clase.

> **Arnel:**
> Cuando el profesor diga el nombre de las aritméticas de punto flotante, no le pregunten por qué se llaman así. Eso lo pueden buscar en cualquier lugar, y la respuesta corta es que se llama de punto (o coma) flotante porque como se puede variar el exponente, da la sensación de que el punto (o la coma) "flota" entre los números. El problema que tiene preguntárselo al profesor es que esta explicación que toma meno de un minuto, a él le va a tomar casi media hora, y al final no va a haber dicho nada relevante para el contenido de la conferencia. Es preferible, y mucho más útil, que ahora se concentre en decir el resto de los nombres, además de que así ganamos tiempo.

El profesor sigue mirando a los alumnos en silencio pero, como nadie dice nada, sigue hablando.

—Para definir una aritmética de punto flotante —*hace énfasis en la parte de "punto flotante", pero ningún alumno se inmuta, ni pregunta nada* —hace falta precisar varios detalles. —*deja de hablar y escribe en la pizarra:*

$$. \quad \_\_\_ \; \_\_\_ \; \_\_\_ \; \texttt{E} \; \_\_\_ \; \_\_\_$$

—Lo primero es cuántos dígitos se usan para representar el número. —*aquí circula el espacio entre en el punto y la E.* —Eso se llama **mantisa** o **precisión**, y se suele representar por p. En el caso del ejemplo la mantisa sería 3.

—Lo segundo es decidir cuántos dígitos se le dedica al exponente —*circula los dos espacios después de la E.* —En este caso sería 2, pero en realidad, eso no es lo que se hace. En la definición de las aritméticas de punto flotante, lo que se define es un **exponente mínimo** y un **exponente máximo**, que es equivalente a dedicarle una cantidad determinada de dígitos, pero bueno —*se encoge de hombros* —esa es la definición. En este caso el exponente mínimo sería -9, y el máximo 99. Estos exponentes mínimo y máximo se representan por m y M.

—Y ya con eso casi se puede definir perfectamente la aritmética. Solo falta un detalle: en qué base se van a representar los números. En el ejemplo, nadie dijo nada, pero todos asumimos que la base era 10. La base se suele representar por β.

Le da la espalda a los alumnos y comienza a escribir mientras habla:

—Formalmente, una aritmética de punto flotante se denota por F y se describe así...

Se vira y señala lo que escribió:

$$\texttt{F=(}\beta\texttt{, p, m, M)}$$

—donde β es la base, p es la mantisa o precisión, y m minúscula y M mayúscula son el mínimo y el máximo exponentes.

Deja de hablar porque hay algunos estudiantes que están escribiendo en sus libretas, y él quiere pensar que son notas relacionadas con lo que él está diciendo. Cuando la mayoría del aula dejó de copiar, sigue hablando.

—Con esta notación, en todos los ejemplos que pusimos se usó la aritmética F 10, 3, -9, 99.

```
F=(10, 3, -9, 99)
```

Carlos:

En esto que se ha dicho hasta aquí todo el mundo está de acuerdo en todos los lugares, pero hay un detalle en el que pueden existir diferencias de un libro a otro. En este curso, nosotros vamos a representar los números con el punto delante de la primera cifra, o sea:

```
0 .  ___ ___ ___ E ___ ___
```

Para nosotros ese 0 siempre va a estar ahí. Bueno, para nosotros y para una buena parte de la bibliografía, pero hay quien lo pone después del primer dígito. En general, el lugar donde se ponga el punto no importa demasiado si uno tiene claro dónde se puso, pero algunos de los resultados que vamos a ver hoy y en la próxima conferencia pueden cambiar en dependencia de eso.

—¿Alguna duda hasta aquí?

Como nadie responde nada, el profesor sigue hablando.

—Entonces, vamos a dar otros nombres. Por comodidad, en todos los ejemplos vamos a usar la aritmética F 10, 3, -9, 99, que le vamos a llamar F_3 o F3.

Vuelve a escribir la aritmética en la pizarra:

$$F_3=(10,\ 3,\ -9,\ 99)$$

—Los números que tienen una representacion exacta en la aritmética se llaman **flotantes**.

—O sea, en F_3, 3210 es un flotante, igual que 3220, porque se poden representar de manera exacta:

```
3210 → .3 2 1 E 0 4

3220 → .3 2 2 E 0 4
```

—En esa aritmética, 3214 no es un flotante porque no se puede representar de manera exacta. Sin embargo, todo número real x tiene una representación flotante, que se llama **flotante de x**, se denota por $fl(x)$ —*mientras habla comienza a escribir en la pizarra* —y es el flotante con el que se representa el número x.

```
fl(x):  flotante de x
```

—En el caso de 3214, ¿cuál sería su flotante?

Varias personas dicen a coro punto 3 2 1 E 0 4, y aquí sí se entiende, porque lo dijeron sincronizados.

```
fl(3214) = .3 2 1 E 0 4
```

—¿Y cuál sería el flotante de 3218?

Varios alumnos dicen punto 3 2 2.

```
fl(3218) = .3 2 2 E 0 4
```

Y mientras el profesor lo está escribiendo alguien dice

—También pudiera ser punto 3 2 1.

El profesor se vira para mirar a quien habló, pero como no tiene idea de quién lo dijo, no sabe a quién mirar. Por eso mira a varias personas al azar, y sigue escribiendo.

```
fl(3218) = .3 2 1 E 0 4
```

—Esta forma de redondear —*señala en la que el flotante de 3218 es .322E04* —se llama **redondeo al flotante más cercano**, y esta otra —*señala la otra* —se llama **redondeo por truncamiento**.

Algunos alumnos están tomando notas... o al menos están escribiendo en sus libretas.

—Otras definiciones importantes son el **mayor representable** y el **menor representable**. El mayor representable en una aritmética es... —*hace una pausa* —el mayor número que se puede representar en esa aritmética. Aquí no se esforzaron mucho con el nombre. En el caso de F_3, el mayor representable, ya lo habíamos visto y es:

.9 9 9 E 9 9

—Y el menor representable de F_3...

Hace una pausa y varios alumnos dicen punto 0 0 1 E - 9.

—No. El menor representable de F_3 no lo hemos visto.

—Profe, sí lo vimos, es el punto 0 0 1 E -9, que es lo mismo que 10^{-12}.

—Es cierto que eso fue lo que escribí en la pizarra, y es cierto que ningún número más pequeño que ese se puede representar en esa aritmética... pero ese número no es el menor representable de F_3, porque no está normalizado.

Una alumno de la segunda fila dice Ahhhhh, y los que están a su alrededor lo miran con cara de ¿Qué Ahhhh de qué? El profesor también lo mira. El alumno se pone serio y dice:

—Disculpe... Siga, siga.

—Una aritmética de punto flotante está **normalizada** si el primer dígito de todos los flotantes es diferente de cero. O sea, si todos los flotantes de la forma...

$$. \quad \beta_1 \ \beta_2 \ \ldots \ \beta_p \ \texttt{E k}$$

—satisfacen que β_1 es diferente de 0. O sea... —*comienza a escribir.*

$$\texttt{F=(}\beta\texttt{, p, m, M) está normalizada si:}$$
$$\forall \ \texttt{f} \in \texttt{F, donde}$$
$$\texttt{f = .} \ \beta_1 \ \beta_2 \ \ldots \ \beta_p \ \texttt{E k,}$$
$$\texttt{se cumple que: } \beta_1 \neq \texttt{0}$$

—El único flotante que puede empezar con 0 es el 0, pero en ese caso, todos los dígitos serían 0.

Da un tiempo para que tomen la nota.

—Que la aritmética no esté normalizada tiene un problema y es el siguiente, en F_3... —*escribe en la pizarra:*

$$. \ \_\_\_ \ \_\_\_ \ \_\_\_ \ \texttt{E} \ \_\_\_ \ \_\_\_$$

—¿cuál sería el flotante de 42?

Varios alumnos proponen punto 4 2 0 E 0 2, *por lo que el profesor escribe:*

$$. \ \underline{\ 4\ } \ \underline{\ 2\ } \ \underline{\ 0\ } \ \texttt{E} \ \underline{\ 0\ } \ \underline{\ 2\ }$$

—Muy bien. Pero también pudiera ser este otro:

$$. \ \underline{\ 0\ } \ \underline{\ 4\ } \ \underline{\ 2\ } \ \texttt{E} \ \underline{\ 0\ } \ \underline{\ 3\ }$$

—Y de pronto, tienes dos flotantes para un mismo número. ¡O más de dos! En F_3 tendrías tres flotantes para números de un solo dígito, y en general, en una aritmética con mantisa p tendrías p flotantes para números de un solo dígito. Ese es uno de los problemas de que la aritmética no esté normalizada: perderías la unicidad de la representación flotante, y en matemática y computación, que las cosas sea únicas suele ser bueno.

> **Carlos:**
>
> Que la aritmética no esté normalizada tiene otros inconvenientes relacionados con varios resultados que van a ver más adelante. Si esos dos motivos no fueran suficientes, hay otro de más peso: casi todas las computadoras usan aritméticas de punto flotante normalizadas.

—A no ser que se indique lo contrario, en el curso siempre vamos a hablar de aritméticas de punto flotante normalizadas, y por eso es que en F_3 el menor representable no es punto 0 0 1 E -9, porque el primer dígito tiene que ser 1.

$$. \ \underline{\ 1\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \texttt{E}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}.$$

—Lo que sí está claro es que el exponente tiene que ser el menor posible, que en este caso sería - 9...

$$. \ \underline{\ 1\ }\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \texttt{E}\ \underline{\ -\ }\ \underline{\ 9\ }.$$

—Y solo tendríamos que rellenar los dos dígitos que nos quedan de forma que se obtenga el menor número posible. ¿Alguien tiene alguna idea?

La voz llega desde la primera fila:

—Poner cero, ¿no?

—¡Exacto!

$$. \quad \underline{\texttt{1}} \; \underline{\texttt{0}} \; \underline{\texttt{0}} \; \texttt{E} \; \underline{\texttt{-}} \; \underline{\texttt{9}}$$

—Y este —*señala lo que acaba de escribir* —sí es el menor representable de F_3.

—¿Alguna pregunta sobre esto?

Hace una pausa, por si hay alguna pregunta, y sigue hablando.

—Si no hay preguntas, ya estamos en condiciones de encontrar el mayor y el menor representables en una aritmética cualquiera (β, p, m, M)...

$$\texttt{F = (}\beta\texttt{, p, m, M)}$$

—donde los flotantes tienen la forma:

$$. \quad \beta_1 \; \beta_2 \; \ldots \quad \beta_p \; \texttt{E k}$$

—Para formar el mayor representable...

$$.\underbrace{\_\_ \; \_\_ \; \ldots \; \_\_}_{\texttt{p veces}} \; \texttt{E} \; \_\_$$

—tenemos que garantizar que el número sea lo más grande posible. La parte más fácil es el exponente. En esta aritmética —*señala a la aritmética* `F` —¿Cuál es el mayor exponente?

—¡Eme! —*coro entusiasta y sincronizado.*

—Sí, claro —el profesor pone cara de `:unamused:` —¿cuál de las dos M?

—¡Mayúscula!

—Muy bien.

$$.\underbrace{\_\_\ \_\_\ \ldots\ \_\_}_{\texttt{p veces}}\ \texttt{E}\ \underline{\texttt{M}}$$

—¿Y cuáles serían los dígitos de la mantisa? Tendrían que ser los más grandes posibles... En una aritmética con base β, ¿cuál es el mayor dígito?

Se hace un silencio.

—Fíjense, en base 10, el mayor dígito es el 9, en base 2, el mayor dígito es 1, y en base 16, el menor dígito es F, que representa el 15. ¿Alguien nota un patrón entre la base y el mayor dígito?

—¡Beta menos 1!

—Exacto, el mayor dígito posible en una aritmética de base beta es beta menos 1, por lo tanto, el mayor representable en una aritmética general es

$$.\underbrace{\underline{\ \beta-1\ }\ \underline{\ \beta-1\ }\ \ldots\ \underline{\ \beta-1\ }}_{\texttt{p veces}}\ \texttt{E}\ \underline{\ \texttt{M}\ }$$

—Por suerte, el menor representable es mucho más fácil. —*borra lo que estaba escrito y escribe:*

$$.\underbrace{\_\_\ \_\_\ \ldots\ \_\_}_{\texttt{p veces}}\ \texttt{E}\ \_\_$$

—El exponente del menor representable es el menor posible, así que ponemos eso de primero...

$$.\underbrace{\_\_\ \_\_\ \ldots\ \_\_}_{\texttt{p veces}}\ \texttt{E}\ \underline{\ \texttt{m}\ }$$

—Y solo tendríamos que poner el menor número posible en la mantisa, que como la aritmética está normalizada, el primero tiene que ser 1...

$$. \underbrace{\underline{1}\ \underline{\ \ }\ \ldots\ \underline{\ \ }}_{\texttt{p veces}}\ \texttt{E}\ \underline{\texttt{m}}$$

—Así que el resto debemos rellenarlos con... Exacto, con ceros.

$$. \underbrace{\underline{1}\ \underline{0}\ \ldots\ \underline{0}}_{\texttt{p veces}}\ \texttt{E}\ \underline{\texttt{m}}$$

—Y este —señala lo que acaba de escribir —es el menor representable de una aritmética cualquiera normalizada, solo que usualmente no se representa de esa forma, sino como β^{m-1} porque:

$$\beta^{\mathtt{m}-1} = 1 \times \beta^{\mathtt{m}-1} = 0.1\beta^{\mathtt{m}}$$

Sheila:

Ojalá hayas parado cada vez que te lo he dicho, para verificar que los dos números son iguales. Ahora lo que hace falta que tengas claro que .10. . . 0 E m es lo mismo que β^{m-1}.

—Entonces, ¿qué tenemos hasta aquí? Una aritmética de punto flotante se define mediante una base β, una mantisa p, un menor exponente m y un mayor exponente M...

$$\mathtt{F}(\beta,\ \mathtt{p},\ \mathtt{m},\ \mathtt{M})$$

—En esa aritmética los números que se pueden representar de manera exacta se llaman flotantes y tienen la forma

$$.\ \beta_1\ \beta_2\ \ldots\ \beta_p\ \texttt{E}\ \texttt{k}$$

—donde `k` es el exponente y es un número entero entre `m` y `M`, y β_1 siempre tiene que ser diferente de 0 si la aritmética está normalizada, y siempre vamos asumir que está normalizada.

—Todo número real x tiene una representación flotante, que se denota por fl(x)...

$$\texttt{x} \rightarrow \texttt{fl(x)}$$

—Además, hay un número que es el mayor que se puede representar en la aritmética. Se llama mayor representable y tiene la forma:

$$.\underbrace{\underline{\beta-1}\ \underline{\beta-1}\ \ldots\ \underline{\beta-1}}_{\texttt{p veces}}\ \texttt{E}\ \underline{\texttt{M}}$$

—Del mismo modo, hay un menor representable que es β^{m-1}

$$\texttt{Menor representable:} \quad \beta^{m-1}$$

—Eso es casi todo lo que hemos visto hasta ahora, y ya todo tiene nombre. Nos falta por ponerle nombres a algunos otros detalles.

—Lo primero es qué pasa cuando se quiere representar, en una aritmética de punto flotante un número más pequeño que el menor representable. La respuesta corta es que no pasa nada. —*se encoge de hombros* —La repuesta casi igual de corta pero con más fundamento numérico es que ocurre un **underflow**, que es como si no pasara nada. Simplemente... compruébenlo ustedes. Si en Python escriben un número como 1e-400, provocan un underflow.

Este es uno de esos momentos en los que puedes aprovechar las ventajas de que el curso no sea presencial, dejar de leer y provocar algún que otro underflow, *para que cuando veas lo que pasas digas ¿Ya?, ¿eso?* `:-/`*. A lo que los profesores responderán: "Sí, eso", y se encogerán de hombros. Cuando todos los alumnos hicieron sus comprobaciones, el profesor sigue hablando.*

—Lo otro curioso que ocurre en la aritmética es qué pasa cuando quieres representar un número mayor que el mayor representable. En ese caso ocurre un **overflow**, y ustedes pueden experimentarlo si tratan de representar un número grande, como 1e400.

Gustavo:
A diferencia de otros **overflows** que ocurren en las computadoras y que sí son un problema como el `stack overflow`, el overflow de las aritméticas no es tanto problema para alguien que sepa un poquito de Análisis Matemático, o incluso un poquito de aritmética y sentido común.

Después de una pausa para que todo el mundo pruebe en qué consiste el overflow, el profesor sigue hablando.

—¿Vieron? Es sencillo. Más o menos como con el underflow: ¿qué es más chiquito que todo lo que existe? El 0. Y entonces, ¿qué es más grande que todo lo que existe? ¡Infinito! Así de sencillo. Cuando se obtiene un número que no se puede representar en la aritmética, el resultado es infinito. Y eso sí, las aritméticas saben su poquito de Análisis, porque una vez que tienen un infinito, pueden seguir haciendo operaciones con ellos, como si no pasara nada. Pueden comprobarlo en Python, donde el infinito está en la clase `math`, como `math.inf`

Este es el momento en el que empiezas a probar algunas operaciones como `math.inf + 6`, `math.inf * -1`, `math.inf * math.inf`, *y así.*

Carlos:

Esas operaciones las puedes hacer escribiendo menos, si escribes en Python `from math import inf`. A partir de ese momento puedes hacer cosas como *inf * 3*, y esas cosas sin tener que poner el `math` delante, y escribes menos. De nada.

—Entonces hasta aquí tenemos los siguientes elementos relacionados con una aritmética:

$$\mathtt{F}(\beta\mathtt{,\ p,\ m,\ M})$$

$$\mathtt{.}\ \beta_1\ \beta_2\ \mathtt{...}\ \beta_p\ \mathtt{E\ k}$$

$$\mathtt{flotante\ de\ x} \rightarrow \mathtt{fl(x)}$$

$$\mathtt{Mayor\ representable:}\quad \mathtt{.}\underbrace{\underline{\beta - 1}\ \ \underline{\beta - 1}\ \ \mathtt{...}\ \ \underline{\beta - 1}}_{\mathtt{p\ veces}}\ \mathtt{E}\ \underline{\mathtt{M}}$$

$$\mathtt{Menor\ representable:}\quad \beta^{m-1}$$

$$\mathtt{Underflow} \rightarrow \mathtt{0}$$

$$\mathtt{Overflow} \rightarrow \infty \rightarrow \mathtt{math.inf}$$

—Y solo falta el último elemento que les queremos mostrar hoy, y que está muy relacionado con sus profes de análisis matemático.

Se hace un silencio tenso en el aula. Algunos alumnos miran al suelo, otros se mueven en sus asientos, incluso hay quien está considerando ¡dejar de leer esto! `:-o`. *Pero no te preocupes, es sencillo* `;-)`.

—¿Qué se obtiene cuando se divide un número entre infinito?

—Cero

—¡Muy bien! Eso lo sabe la aritmética. Me imagino que fue de las operaciones que realizaron con el infinito.

Cuando el profesor dice eso, algunos alumnos abren la consola de Python, escriben algo y aprietan enter. Ven el resultado y exclaman mentalmente ¡Ah, sí!

—Y estoy seguro de que también comprobaron que infinito por infinito es infinito.

No te preocupes, el profesor no te ve mientras lo compruebas después que él lo dijo `;-)`.

—Y ahora es cuando van a hacer que sus profesores de Análisis se sientan muy orgullosos de ustedes. ¿Qué pasa en Análisis Matemático cuando se tiene infinito menos infinito?

¿Te sientes capaz de que los profesores de Análisis estén orgullosos de ti? `:-D` *Siempre puedes revisar primero algún libro de análisis o el omniscio Google* `;-)`.

Sheila:

¡Omniscio! Pschst. Seguro que esa palabra la descubrió hace poco y estaba loco por usarla en algún lugar... Ni que él fuera tan "omniscio" como para usar palabras como esas... Pschst.

—Infinito menos infinito es una indeterminación.

—Es una indeterminación, profe. —*seguro este se demoró más en decirlo porque lo que estaba buscando en Google* `:-/`.

—Exacto: infinito menos infinito, al igual que 0 por infinito, es una indeterminación, y eso las aritméticas de punto flotante lo saben.

Algunos alumnos comienzan a teclear en la consola de Python, mientras el profesor habla.

—Y la prueba de que lo saben es que cuando uno le pide que hagan alguna de esas operaciones, el resultado es nan. Nan son las siglas en inglés de Not E Nómber.

$$\texttt{NaN} \longleftrightarrow \texttt{Not a Number}$$

> **Camila:**
> Él dice que es bueno hablar en inglés en el aula para que los alumnos practiquen el oído, pero la verdad es que con la pronunciación que él tiene lo que se puede practicar es el odio... hacia su persona y su inglés. Nosotros no hemos logrado convencerlo de que solo lo escriba en la pizarra. Nosotros, cada vez que podamos, vamos a traducir de "su inglés" al inglés de verdad, pero quizás alguien debería decirle que su pronunciación y este documento no se mezclan bien.

—El resultado de una indeterminación no es un número, ¿Qué es? — se encoge de hombros —No sé, pero no es un número, es un "Not E Nómber"[8], y las computadoras saben muy bien cómo realizar operaciones con eso, como pueden comprobar ustedes.

Señala a los estudiantes con un gesto de la mano que significa claramente: dale, empiecen a hacer operaciones con el nan.

[8]Suspiros de resignación.

Carlos:

En Python, nan está en la clase math. Pueden usarlo como `math.nan`, o escribir una vez `from math import nan` y solo tienen que escribir `nan` cada vez que quieran usarlo. De nada otra vez.

Varios alumnos prueban algunas operaciones con nan, y cuando ven los resultados le dicen al profesor:

—Profe, siempre da lo mismo.

—Exacto: no importa la operación que se haga. Si hay un nan involucrado, el resultado siempre siempre siempre es nan. Uno pudiera decir que con respecto al nan, las aritméticas de punto flotante "no están pá nan".

Arnel abre los ojos, mira a los demás profesores de clase práctica, y vuelve a mirar al profesor cuando este sigue hablando.

—Y que las aritméticas no estén "pá nan" es un problema porque los nan aparecen en cualquier lugar...

Arnel: ¡Nooooo! Oigan, yo vine al aula, hablé con los alumnos, ¡y convencí a casi 60 personas de que no hablaran para que la conferencia pudiera ser agradable! Ustedes lo único que tenían que convencer a uno solo, de que no hiciera los chistes sobre el nan.

Rocio: Nosotros hablamos con él y le dimos todos los argumentos que habíamos acordado de por qué era mejor no hacer los chistes sobre el nan.

Sheila: Incluso, le dimos otros argumentos: ahorrar tiempo, que los alumnos no se lleven una mala imagen de él, una mala imagen de la asignatura, se lo dijimos todo.

Arnel: Y entonces ¿qué pasó? ¿Por qué está haciendo los chistes?

Rocio: Bueno, él oyó todo lo que le dijimos. Por la cara que tenía cuando terminamos de decirle las cosas estoy segura de que lo habíamos convencido. Pero de pronto se le iluminó el rostro, y nos dijo: "¿Saben qué? Todo lo que me han dicho es cierto, pero...", aquí se rió, "¡Nan me importa!"

Arnel: ¡Páf! O sea, que en vez de evitar que hiciera los chistes sobre el nan, ¡lo que hicieron fue darle otro chiste más!

Carlos: Eh, eh, aguanta. ¡Qué nosotros no se lo dimos! ¡El chiste lo buscó él solo! Nosotros no hicimos...

Arnel: ¡Ni se te ocurra!

Carlos: Ya, ya, está bien. Es que era una oportunidad demasiado evidente como para dejarla pasar.

Sheila: ¡Páf! Esto de ser alumnos ayudantes los tiene muy estresados. Creo que les está haciendo daño.

Rocio: Mírenle el lado positivo: los alumnos han estado leyendo esto y no han tenido que oír los ¡12 "chistes"! sobre el nan.

Arnel: ¡13! Gracia a ustedes hay uno más.

Carlos: 14, porque nosotros no hicimos...

Arnel: ¡Cállate viejo!

Sheila: Sí, decididamente las próximas generaciones nunca nos lo van a perdonar... ¡dos "chistes" más sobre Nan! ¡Qué horror!

Rocio: Bueno ya, cállense que por suerte aquí viene el último.

—... y por eso, es que algunas personas dicen que cuando en una secuencia de operaciones aparece un N a N, "no hay *nan* que hacer". —*cuando termina de hablar sonríe.*

Los alumnos que no prestaron atención a lo que hablaron los alumnos ayudantes y oyeron todo lo que dijo el profesor tienen cara de "qué horror" y "yo qué hice para merecerme esto". Algunos parecen estar a punto de empezar a llorar. El profesor no parece darse cuenta de nada de esto porque sigue hablando muy entusiasmado.

—Y después de la presentación del nana, ya tenemos los elementos fundamentales de una aritmética de punto flotante.

$$\texttt{F}(\beta,\ \texttt{p},\ \texttt{m},\ \texttt{M})$$

$$.\ \beta_1\ \beta_2\ \ldots\ \beta_p\ \texttt{E k}$$

$$\texttt{flotante de x} \to \texttt{fl(x)}$$

$$\texttt{Mayor representable:}\quad .\underbrace{\underline{\beta-1}\ \ \underline{\beta-1}\ \ \ldots\ \ \underline{\beta-1}}_{\texttt{p veces}}\ \texttt{E}\ \underline{\texttt{M}}$$

$$\texttt{Menor representable:}\quad \beta^{m-1}$$

$$\texttt{Underflow} \to 0$$

$$\texttt{Overflow} \to \infty \to \texttt{math.inf}$$

$$\texttt{NaN: Not a Number}$$

—Y ahí —*señala todo lo que está en la pizarra* —está la explicación de por qué los números no existen[9]. La versión corta: en la computadora solo se pueden

[9]En las computadoras.

representar de manera exacta los flotantes de la aritmética, del resto (que son la mayoría) solo se tienen aproximaciones.

—El próximo paso sería enterarnos de por qué `10`^{100}`+10`^{50}` == 10`^{100}, pero eso lo vamos a hacer después de los 5 minutos.

No se asombren que ya en la clase pasada tuvimos 5 minutos dos veces. En la asignatura es costumbre dar los cinco minutos 2 veces. Si no, las clases son muy aburridas... para los profesores `:-/`.

6 5 minutos

Algunos alumnos, salen, otros se quedan adentro, y otros siguen leyendo la conferencia, para ver si pueden adelantarse con alguna participación. ¡Qué list@s!

7 Operaciones con flotantes

Cuando todos los alumnos entran otra vez, el profesor comienza a hablar.

—Una forma muy simplificada de representar la forma en que ocurren las operaciones en una aritmética de punto flotante sería la siguiente:

1. `representar el primer operando en la aritmética,`
2. `representar el segundo operando en la aritmética,`
3. `realizar la operación "igual que en los reales",`
4. `representar el resultado en la aritmética.`

Gustavo:

Eso no es tan sencillo, pero la idea se aproxima bastante. L@s que quieran tener una idea de cómo ocurren las operaciones exactamente, pueden consultar el libro "Numerical Computing with IEEE Floating Point Arithmetic". Son menos de 120 páginas y todo lo explica muy bien.

—A diferencia de lo que ocurre en el mundo real, cuando se usan flotantes, las dos operaciones más complicadas son la suma y la resta. Aquí vamos a hablar solo de la suma, por dos motivos. El primero es que la resta tiene los mismos problemas de la suma que vamos a ver aquí. El segundo es que la resta con flotantes tiene otros problemas tan complicados que tienen su propia sección en la próxima conferencia.

Camila:

La mayoría de los problemas que vamos a tener durante el curso son por culpa de la suma o la resta en las aritméticas de punto flotante, así que conviene tener claro el funcionamiento de estas dos operaciones.

—A modo de ejemplo, en la aritmética F_3...

```
F(10, 3, -9, 99)
```

—vamos a sumar los números 4000 y 4. Los dos son flotantes:

```
. _4_ _0_ _0_ E _0_ _5_
. _4_ _0_ _0_ E _0_ _1_
```

—La suma "en los reales" sería 4004, pero como hay que representarlo otra vez en la aritmética, que tiene mantisa 3, ¿qué ocurre? ¡El resultado vuelve a ser 4000!, porque el flotante de 4004 en F_3 es 4000, y por lo tanto, en F_3:

```
4000 + 4 = 4000
```

—Hay otra forma de aproximarse al fenómeno, y es imaginarse cómo funcionaría un algoritmo para sumar flotantes. La idea sería llevar los dos números al mismo exponente, "moviendo apropiadamente" los dígitos de la mantisa, y cuando los dos tengan el mismo exponente, sumar los dígitos de la mantisa. En este caso, los dos flotantes serían:

$$. \ \underline{4}\ \underline{0}\ \underline{0}\ \mathrm{E}\ \underline{0}\ \underline{5}$$

$$. \ \underline{4}\ \underline{0}\ \underline{0}\ \mathrm{E}\ \underline{0}\ \underline{1}$$

—y habría que convertir el exponente de número 4, de 1 a 5. Para hacer eso, cada vez que se aumente el exponente, habría que "correr" los dígitos de la mantisa hacia la derecha. Eso sería así:

$$\begin{aligned} &. \ \underline{4}\ \underline{0}\ \underline{0}\ \mathrm{E}\ \underline{0}\ \underline{1} = \\ &. \ \underline{0}\ \underline{4}\ \underline{0}\ \mathrm{E}\ \underline{0}\ \underline{2} = \\ &. \ \underline{0}\ \underline{0}\ \underline{4}\ \mathrm{E}\ \underline{0}\ \underline{3} = \\ &. \ \underline{0}\ \underline{0}\ \underline{0}\ \mathrm{E}\ \underline{0}\ \underline{4} = \\ &. \ \underline{0}\ \underline{0}\ \underline{0}\ \mathrm{E}\ \underline{0}\ \underline{5} \end{aligned}$$

—Y por tanto, la suma de los flotantes de 4000 y 4 sería:

$$. \ \underline{4}\ \underline{0}\ \underline{0}\ \mathrm{E}\ \underline{0}\ \underline{5}$$

$$
\begin{array}{r}
+\,.\;\underline{0}\;\underline{0}\;\underline{0}\;\mathrm{E}\;\underline{0}\;\underline{5} \\
\hline
=\,.\;\underline{4}\;\underline{0}\;\underline{0}\;\mathrm{E}\;\underline{0}\;\underline{5}
\end{array}
$$

—Por lo tanto, en F_3, cuando el flotante del número 4 se modifica para que su exponente sea 5, se convierte en 0, y por eso cuando se suma con... con cualquier cosa que tenga exponente 5 o mayor que 5, es como si fuera 0. Eso es lo mismo que pasa con 10^{100} y 10^{50} en las computadoras.

Gustavo:

Y es por eso que, como descubrieron algun@s de ustedes en la clase práctica, cuando se quiere sumar una lista de números flotantes conviene empezar por los más pequeños, para que puedan acumularse y dejar de ser 0 al lado de esos números inmensos. Y ojo, el número inmenso puede ser pequeño, basta que el otro sea más pequeño todavía. En esto de las aritméticas de punto flotante sí se cumple que nada es grande ni pequeño si no es por comparación.

Arnel:

Pero ese algoritmo de sumar primero los más pequeños, aunque es mejor que sumar “al berro”, es un algoritmo malo, porque solo funciona cuando tienes con antelación todos los números que quieres sumar. No funciona, por ejemplo, como parte de un algoritmo en el que los números se generen dinámicamente. La buena noticia es que hay solución para eso. La mala, es que la solución es un poco más complicada que lo que uno esperaría. Hay libros de Numérica que tienen capítulos completos dedicados a cómo sumar una lista de números. En la bibliografía hay, al menos, uno de ellos.

Rocio:

Eso de cómo sumar una lista de números "reales" es interesantísimo y todas las personas que tengan un poquito de curiosidad por cosas de la carrera deberían darle un vistazo, para saber que existe y donde encontrarlo... pero no es vital para la asignatura. De eso no va a depender tu nota.

—Y con eso ya tenemos explicaciones para varios misterios: por qué 1e100 + 1e50 es 1e100, por qué no se puede hacer el último ejercicio. Ya solo nos queda por qué a veces pasan cosas como 0.4*3 > 1.2 y otras, 0.6*3 < 1.8.

—La justificación, en versión corta es que 0.4 se redondea por exceso y 0.6 se redondea por defecto.

—Profe, ¿se redondea qué? Ahí no hay nada que redondear.

—Para ti no, pero para la computadora sí, porque las aritméticas que usan las computadoras no usan base 10, sino base 2.

—¿Y eso qué tiene que ver?

—Bueno, que 0.4 en base 2 tiene una representación infinita, igual que 0.6.

—¿Qué?

El profesor los mira abriendo mucho los ojos y dice:

—¿Pero ustedes no saben que 0.4 en binario tiene infinitas cifras? ¡Eso es algo que deberían saber!

Se hace un silencio en el que ningún estudiante dice nada.

Sheila:

No le hagan caso, los está cogiendo "pá eso". No se supone que ustedes lo sepan, y él, ¡que no se haga! que también se enteró cuando le dieron esta conferencia. Es más, estoy segura de que si alguien le pregunta ahora, él no va a saber explicar cómo se lleva un número con coma de decimal a binario. Así que no te creas que es tan terrible no saberlo. Por otro lado, el algoritmo es sencillo y si quieres lo puedes buscar para que compruebes que, en efecto, la representación de esos números en binario es infinita.

Carlos:

Lo que sí es importante es tener conciencia de que muchos de esos números "sencillitos y pequeños" en decimal, tienen una representación infinita en binario, y que para la máquina no hay diferencia entre tener que representar 0.4, 0.6, o el número Pi. En algún momento tiene que truncar esa representación porque la mantisa tiene un número finito de dígitos.

—Bueno, pues sí. Cuando se escribe 0.4 en binario y se trunca en la cantidad de dígitos que tiene la máquina en doble precisión hay que hacer un redondeo por exceso. Y cuando se trunca la representación en binario de 0.6 en la cantidad de dígitos para la doble precisión el redondeo es por defecto.

Este es otro buen momento para hacer una pausa en la lectura, buscar papel y lápiz y convertir 0.4 y 0.6 a binario. Incluso para hacer el experimento de truncar en la cantidad de dígitos que usan las computadoras, solo para comprobar si de verdad los redondeos tienen que ser por exceso o por defecto.

—Que en una aritmética de punto flotante solo puede representar un número finito de cifras en la mantisa, combinado con que la mayoría de los números tienen una expansión infinita en binario dan lugar a uno de los resultados más peligrosos del curso. Lo que voy a decir es tan terrible que está considerada la primera (y más peligrosa) de las **maldiciones imperdonables de la matemática numérica**. —*hace una pausa para que las palabras causen impacto.*

Mientras decía la frase "maldiciones imperdonables de la matemática numérica" el aula se oscureció, entró una corriente de aire frío por la ventana y cuando justo cuando terminó de hablar se hizo un silencio absoluto.

Dicho así parece dramático, ¿verdad? Pues no. `:-/` . *El aula se oscureció por una nube que pasó en ese momento, la corriente de aire es del frente frío que dicen que está entrando hoy, y el silencio absoluto fue porque todo el mundo estaba revisando el teléfono y nadie le estaba haciendo caso al profesor. Menos mal que Rocio dijo algo y la gente empezó a atenderla.*

Rocio:

Esta parte a mí me gusta mucho. No solo porque es una referencia a Harry Potter, sino porque de verdad te debería cambiar la forma de relacionarte con los números en la computadora e incluso la forma de programar. El hecho de que por violarlo te pueden suspender instantáneamente en cualquier asignatura de ahora en adelante, es solo un incentivo extra `;-)`, así que yo recomendaría prestar atención en este momento.

Después de su pausa dramática, el profesor menciona la maldición imperdonable:

—**Nunca que haya flotantes involucrados se puede usar ==**.

Los alumnos se quedan mirándolo en silencio y de pronto todos empiezan a preguntar.

—Y si...

—¡No!

—Pero...

—¡No!

—Y en un caso en el que...

—¡No! ¡Nunca! ¡Nunca! ¡Nunca! Si en algún momento les cabe la duda de por qué tanto lío, recuerden que 0.4 * 3 no es igual igual a 1.2. Si hay flotantes por el medio, no se usa el ==. No se usa. Punto.

Carlos:

Los profes de la asignatura son sensibles con este tema. Pueden estar viendo cómo a alguien le aplican la maldición cruciatus o imperio sin inmutarse... pero ve un == en un código, y son como los mambises cuando oyen un tiro... ¡enseguida te caen a machetazos!. La verdad es que tampoco se inmutan mucho, pero te suspende en el acto... en la asignatura que sea. Lo *"chiváo"* es que en casi todas las asignaturas de tercero en adelante tienes que usar cosas de numérica. Pero no hay motivos de preocupación. Con no usar el == con flotantes es suficientes para sobrevivir.

Sheila:

Hay que reconocer que hay motivos para ser sensibles con el tema. Un == mal usado puede ser fuente de errores difíciles de encontrar.

Por ejemplo, consideren el siguiente código en Python, y traten de decir qué pasa cuando se ejecuta:

```
i = 0
while (not(i == 1.0)):
  print (i)
  i = i + 0.1
```

Cuando crean que saben qué hace ese código, ejecútenlo. Moraleja: no se usa el `==` con flotantes.

Gustavo:

De hecho, no solo el `==` es conflictivo. Los propios flotantes pueden ser causa de problemas o resultados inesperados. A modo de ejemplo, consideren el siguiente código en Python, que no tiene el problema del código de Sheila, porque ya "lo arreglé":

```
i = 0
while (i < 1.0):
  print (i)
  i = i + 0.1
```

Antes de ejecutarlo, ¿cuántas iteraciones debería hacer ese ciclo? Ahora ejecútalo. Parte de la explicación está en los valores de `i` que se están imprimiendo. El resto de la explicación es Aritmética de Punto Flotante, representación infinita en binario, y cantidad finita de dígitos en la mantisa.

—¿Alguien más tiene alguna pregunta? ¡Qué no sea si existe un caso en el que se pueda usar el `==`! Porque ahí la respuesta es "ese caso no existe".

—Si no hay dudas, cogemos 3 minutos para procesar esto y ver el último tema de la conferencia.

8 3 minutos

Bueno, en algunas clases se dan los 5 minutos 3 veces. Es intencional, no es un error de ninguna aritmética. Pero como ya no queda mucho tiempo, no van a ser 5, van a ser solo 3. `;-)`

9 Espaciamientos

—En las aritméticas de punto flotante, como tienen una cantidad finita de elementos, se cumple todo flotante tiene un sucesor.

> **Camila:**
> Todos los flotantes tienen un sucesor, excepto el infinito, pero para lo que vamos a ver ahora solo nos interesan los flotantes "menores" que infinito.

—Por ejemplo, en la aritmética F_1:

$$\texttt{(}F_1\texttt{ = (10,1,-1,5)}$$

—donde los flotantes tienen la forma:

$$.\ \_\_\_\ \texttt{E}\ \_\_\_$$

—¿Cuál sería el sucesor del 3? Para eso necesitamos el representar el flotante del 3:

$$. \ \underline{\ 3\ }\ E\ \underline{\ 1\ }$$

—Para obtener el sucesor, lo que habría que hacer es aumentar el número que hay en la mantisa, en este caso sería:

$$. \ \underline{\ 4\ }\ E\ \underline{\ 1\ }$$

—que es el número 4. ¿Y el sucesor de 20?

$$. \ \underline{\ 2\ }\ E\ \underline{\ 2\ }$$

—Sería aumentar el número de la mantisa, manteniendo el exponente, y eso sería:

$$. \ \underline{\ 3\ }\ E\ \underline{\ 2\ }$$

Muchos estudiantes dicen que sería el 30.

—Exacto, 30.

—Como todo flotante tiene un sucesor, entre dos flotantes hay una distancia. A esa distancia se le llama **espaciamiento**. El **espaciamiento** de un flotante es la distancia entre ese flotante y su sucesor. Por ejemplo, vamos a ver el espaciamiento de algunos números en la aritmética F_1. —señala a donde está escrito `(`F_1` = (10,1,-1,5)`.

—En F_1, ¿cuál sería el espaciamiento del 3?

Una pequeña pausa para que los estudiantes lo procesen antes de que él siga hablando.

—El sucesor de 3 es el 4, así que el espaciamiento es 1. Muy bien.

—¿Cuál es el espaciamiento del 20? —Señala a donde está que el sucesor del 20 es el 30. —Como el sucesor del 20 es 30, el espaciamiento del 20 es 10. ¿Alguna duda hasta aquí?

Silencio

—Pudiéramos pasarnos toda la tarde preguntando por espaciamientos de flotantes específicos, o podemos responder todas las preguntas de una vez. Podemos decir: en F_1, ¿cuál es el espaciamiento de un flotante cualquiera...? —escribe el flotante en la pizarra:

$$\mathtt{f}_0 \ \mathtt{=}\ \mathtt{.}\ \underline{\ \beta_1\ }\ \mathtt{E}\ \underline{\ \mathtt{k}\ }$$

—En este caso, el sucesor sería:

$$\mathtt{f}_s \ \mathtt{=}\ \mathtt{.}\ \underline{\ \beta_1+1\ }\ \mathtt{E}\ \underline{\ \mathtt{k}\ }$$

—El espaciamiento es la diferencia $\mathtt{f}_s$ `-` $\mathtt{f}_0$, que en este caso es:

$$\mathtt{.}\ \underline{\ \mathtt{1}\ }\ \mathtt{E}\ \underline{\ \mathtt{k}\ }$$

—¿A todo el mundo le queda claro?

Si estuviéramos en el aula tendrías que entenderlo rápido ahí, pero como estamos aquí con calma y tranquilidad, puedes comprobarlo "a tu aire".

Como nadie se pronuncia al respecto, sigue hablando.

—Entonces el espaciamiento sería $.1\times10^k$, que es lo mismo que 10^{k-1}.

—Vamos ahora a calcular el espaciamiento de un flotante cualquiera en F_3:

$$. \quad \underline{\ \beta_1\ }\ \underline{\ \beta_2\ }\ \underline{\ \beta_3\ }\ \mathtt{E}\ \underline{\ \mathtt{k}\ }$$

—Similar a como se hizo con F_1, se calcula la diferencia de ese número con su sucesor y se obtiene que es:

$$. \quad \underline{\ \mathtt{0}\ }\ \underline{\ \mathtt{0}\ }\ \underline{\ \mathtt{1}\ }\ \mathtt{E}\ \underline{\ \mathtt{k}\ }$$

—que es lo mismo que 0.001×10^k, y eso es lo mismo que 10^{k-3}.

$$. \quad \underline{\ \mathtt{0}\ }\ \underline{\ \mathtt{0}\ }\ \underline{\ \mathtt{1}\ }\ \mathtt{E}\ \underline{\ \mathtt{k}\ } = \mathtt{0.001} \times \mathtt{10^k} = \mathtt{10^{k-3}}.$$

—¿Alguna pregunta?

—Como no hay preguntas podemos pasar al paso siguiente que es calcular el espaciamiento de un flotante cualquiera en una aritmética cualquiera. La aritmética cualquiera sería:

$$(\mathtt{F} = (\beta,\ \mathtt{p},\ \mathtt{m},\ \mathtt{M})$$

—y un flotante cualquiera de esa aritmética sería:

$$. \quad \underline{\ \beta_1\ }\ \underline{\ \beta_2\ }\ \ldots\ \underline{\ \beta_p\ }\ \mathtt{E}\ \underline{\ \mathtt{k}\ }$$

Cuando termina de escribir, se vira hacia los estudiantes y les hace un gesto con las dos manos que dice clarito: "Dale, háganlo ustedes, yo no lo voy a hacer". Y ahí se queda, de pie, mirando a los estudiantes.

Un par de minutos después se le acerca una persona, le enseña lo que hizo y él le responde:

—Sí, pero fíjate que aquí asumiste que la base es 10, y la base en este caso general es beta. ¿Cómo quedaría si asumes que la base es beta en vez de 10?

Otra persona dice el resultado que obtuvo asumiendo que la base es beta. El profesor le pregunta qué fue lo que hizo, y la persona se lo describe brevemente.

—Exacto, lo que habría que hacer en este caso es... —*aquí repite lo mismo que le dijo la persona, mientras realiza los pasos en la pizarra. Finalmente, escribe el resultado.* —Y este es el espaciamiento de un número cualquier en una aritmética cualquiera. Fíjense que depende del tamaño del número, por este exponente aquí —*señala donde aparece el exponente* y también depende de la aritmética —*señala donde está el tamaño de la mantisa.* —¿Todo el mundo obtuvo este resultado?

Todo el mundo dice que sí.

—Perfecto, la moleja de este resultado es que mientras más grande sea el número, mayor será el espaciamiento, pero mientras mayor sea la precisión de la aritmética, menor va a ser esa distancia. ¿Alguna pregunta hasta aquí?

—Después de esa introducción, hay un espaciamiento especial, tan especial que tiene nombre y todo. Se llama épsilon de la máquina, es el espaciamiento entre el número 1 y su sucesor, y su valor es β^{1-p}.

Gustavo:

El épsilon de la máquina es tan relevante para la asignatura que pasan dos cosas. La primera es que hay una pregunta de la asignatura que aparece todos los años en varias evaluaciones o lugares y es: diga tres preguntas cuya respuesta sea el épsilon de la máquina. El segundo motivo por el que el épsilon de la máquina es relevante para la asignatura es que es el segundo elemento del kit de supervivencia de la asignatura. Si tienes un ejercicio y no tienes idea de por dónde entrarle, puedes acudir al kit de supervivencia. El primer elemento del kit es la serie de Taylor. (así de importante es para la asignatura). El segundo elemento del kit de supervivencia es el épsilon de la máquina. casi siempre que uno no sabe por dónde entrarle a algo en numérica, se puede probar en ese orden, primero la serie de Taylor, y después el épsilon de la máquina. Claro, si no hay funciones involucradas de ninguna manera, a veces se puede pasar directo al épsilon de la máquina... pero no se confíen, que las funciones pueden estar escondidas en casi cualquier lugar... igual que el épsilon de la máquina. Eso puede ser muy útil para la CP de esta semana `;-)`.

—Aquí hay un resumen de todo lo que se ha hablado sobre aritméticas de punto flotante:

$$\texttt{F}(\beta,\ \texttt{p},\ \texttt{m},\ \texttt{M})$$

$$.\ \beta_1\ \beta_2\ \ldots\ \beta_p\ \texttt{E k}$$

$$\texttt{flotante de x} \to \texttt{fl(x)}$$

$$\texttt{Mayor representable:}\quad .\underbrace{\underline{\beta-1}\ \ \underline{\beta-1}\ \ \ldots\ \ \underline{\beta-1}}_{\texttt{p veces}}\ \texttt{E}\ \underline{\texttt{M}}$$

$$\texttt{Menor representable:}\quad \beta^{m-1}$$

$$\texttt{Underflow} \to \texttt{0}$$

$$\texttt{Overflow} \to \infty \to \texttt{math.inf}$$

$$\texttt{NaN: Not a Number}$$

$$\texttt{Sucesor de un flotante}$$

$$\texttt{Espaciamiento de un número (flotante)} \to$$

`Épsilon de la máquina` $\rightarrow \beta^{1-p}$

—¿Alguna pregunta hasta aquí?

—Si no hay preguntas, terminamos. Gracias por venir, y nos vemos en la clase práctica.

Bibliografía recomendada

- *Numerical Analysis.* Burden R. L., Faires J. D. y Annette M. Burden, 10th Edition. Brooks Cole Publishing, 2016.
- *Numerical Analysis.* Timothy Sauer, 3rd Edition. Pearson, 2017.
- *Accuracy and stability of numerical algorithms.* 2nd Edition. Nicholas J. Higham SIAM. 2002.
- *Numerical Computing with IEEE Floating Point Arithmetic.* Overton, Michael L., SIAM, 2001.
- *Elementary Numerical Analysis, An algorithmic approach.* S. D. Conte y Carl de Boor 3rd Edition. McGraw-Hill Book Company. 1980.
- *Harry Potter y el Cáliz de Fuego.* Rowling J. K. Editorial Salamandra. 2000.

Sheila: No dijo la actividad opcional de esta conferencia.

Carlos: A lo mejor se le olvidó... O no le dio tiempo a escribirla.

Arnel: No cojan lucha. Seguro los alumnos se lo recuerdan, y probablemente salga en la segunda versión.

Rocio: Me quedé pensando: si en Numérica hay maldiciones imperdonables y nosotros enseñamos que como evitarlas... ¿somos los profesores de defensa contra las artes oscuras? Suena interesante `:-)`.

Camila: Yo no estoy segura de que eso sea tan interesante ¿Esa no es la asignatura en que a los profesores siempre les pasa algo al final de cada película?

Rocio: Bueno, sí, verdad `:-(`.

Carlos: Pero eso a mí no me preocupa. Después de la conferencia de hoy, podemos decir que a nosotros nos no va a pasar `nan`.

Priprá, clanck, cóng.

Carlos: Oye, oye... cuidado, vas a romper algo.

Arnel: ¡Y te salvas que no tengo más nada que tirarte! No hagas más chistes pesados.

Sheila: ¡Páf! 15. ¡Qué el profe no se entere de ese!