Analysis III

Vorlesung von Prof. Dr. Kohnen

SS 1997

Inhaltsverzeichnis

Mo, Mi 9-11Uhr
Zimmer 216, Sprechstunde Mo 12-13 Uhr
Thema: Allgemeine Integrationstheorie

Literatur: S. Lang, Real Analysis, Addison-Westley

Klausur: Di 8.7.1997, 14-17 Uhr,HS 1
Übung Mi 14-16 Uhr(A), Mi 18-20 Uhr(B)

Abgabe der Übungsblätter: montags

Kapitel 1

Einführung

Erinnerung: Integral von Regelfunktionen
$I = [a, b]$ kompaktes Intervall., $t : I \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion, d.h. $\exists$ Zerlegung $Z = \{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m = b\}$, so daß t auf $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ konstant ist, $t(x) = c_\nu$ $\forall x \in (a_{\nu-1}, a_\nu)$. Man setzt

$$I(t) = I_Z(t) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu (a_\nu - a_{\nu-1})$$

(hängt nicht mehr von der Auswahl von z ab).

$$\begin{aligned} B(I) &:= \{f : I \to \mathbb{R} | f \text{ beschränkt}\} \\ R(I) &:= \{f \in B(I) | \exists \text{ Folge } (t_n)_{n \in N} \text{ von Treppenfunktionen auf I, so daß } t_n \\ &\quad \text{gleichmäßig auf } I \text{ gegen } f \text{ konvergiert}\} = \text{Menge der Regelfunktionen} \end{aligned}$$

(gleichmäßige Konvergenz bedeutet: $\forall \epsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N}$, so daß $|t_n(x) - f(x)| < \epsilon \, \forall n > N$, $\forall x \in I$)

Man kann zeigen: ein $f \in B(I)$ ist genau dann Regelfunktion, wenn $\forall x_0 \in I$ die einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existieren. $(*)$
WICHTIG: $C^0(I) = \{f : I \to \mathbb{R} | \; f \text{ auf } I \text{ stetig } \} \subset R(I)$
Ist $f \in R(I)$, so wähle man eine Folge $(t_n)_{n \in N}$ von Treppenfunktionen auf I, so daß $(t_n)_{n \in N}$ auf I gleichmäßig gegen f konvergiert. Man setzt dann:

$$\int_a^b f(x) \mathrm{dx} := \lim_{n \to \infty} I(t_n)$$

(der Limis existiert und ist unabhängig von der Auswahl von $(t_n)_{n \in N}$).
Dieser Integralbegriff hat einige schlechte Eigenschaften:

- Die Klasse der integrierbaren Funktionen ist relativ klein (solche sind definiert auf kompakten Intervallen, sind beschränkt, und unterscheiden sich nach $(*)$ gar nicht so stark von stetigen Funktionen)

- Integration und Grenzübergang kann i.a. nur bei gleichmäßiger Konvergenz vertauscht werden

Satz: Ist $(f_n)_{n\in N}$ eine Folge in $R(I)$, welche gleichmäßig auf I gegen $f \in R(I)$ konvergiert, so gilt

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{dx} = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{dx}$$

Dies ist i.a. falsch, wenn man nur punktweise Konvergenz hat:
Beispiel: $I = [0,1]$

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & x = 0 \\ n, & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0, & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$f_n \in R(I)$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0; \quad \int_0^1 f_n(x)\mathrm{dx} = \int_0^{\frac{1}{n}} f_n(x)\mathrm{dx} = \int_0^{\frac{1}{n}} n\mathrm{dx} = n(\frac{1}{n} - 0) = 1$$

Zielsetzung: Entwicklung eines allgemeinen Integralbegriffs für eine „sehr große " Klasse von Funktionen mit *guten* Eigenschaften (z.B. Vertauschung von Integration und Grenzübergang unter schwachen Voraussetzungen); für Regelfunktionen auf kompakten Intervallen sollte der neue und der alte Integralbegriff zusammenfallen.
Wir arbeiten mit „allgemeinen Maßräumen"(X, M, μ), wobei X nicht-leere Menge, M eine
geeignete Familie von Teilmengen von X ist (eine sogenannte σ-Algebra von meßbaren Mengen) und $\mu : M \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ ein „Maß" ist. Spezialisiert man $X = \mathbb{R}^n$, $M =$ diejenige σ-Algebra, die „erzeugt" wird von Produkten von n Intervallen, $\mu =$ *dasjenige* Maß, welches auf Produkten von n Intervallen das übliche Volumen (gleich Produkt der Intervalllängen) gibt, so erhält man das *Lebesgue-Maß* auf $\mathbb{R}^n$.

Vorgehensweise:

- Banachräume E
- meßbare Mengen, Maße
- Integral von Treppenfunktionen $f : X \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)
- Fortsetzung des Integrals auf Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$), welche „fast überall " punktweiser Limes einer L^1-Cauchy von Treppenfunktionen sind. (z.B. $\int_a^b |f(x)$ dx)
- Eigenschaften des Integrals

Kapitel 2

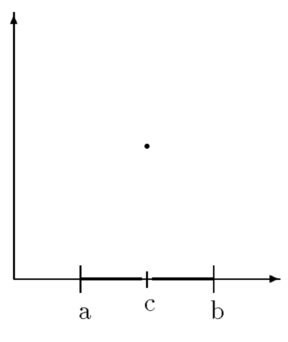
Banachräume

Definition i) Ein normierter Raum ist ein Paar $(E, \|\cdot\|)$, wobei $E_{/\mathbb{R}}$ ein Vektorraum ist und $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ eine Norm auf E ist, d.h. $\|x\| \geq 0 \ \forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

ii) Ist $E_{/\mathbb{R}}$ Vektorraum, so versteht man unter einer Seminorm auf E eine Abbildung $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$, die alle Eigenschaften einer Norm erfüllt *bis auf* „$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$“.

Beispiele i) $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ($\|\cdot\|$ euklidische Norm), $(C^0([a,b], \|\cdot\|_\infty)$ ($\|\cdot\|_\infty$ sup-Norm) sind normierte lineare Räume.

ii) Für $f \in R(I)$ setze man $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \mathrm{dx}$. Dann ist $\|\cdot\|_1$ eine Seminorm auf $R(I)$, welche im allgemeinen keine Norm ist.



Definition i) Eine Folge $(x_n)_{n \in N}$ mit $x_n \in E$ heißt knvergent gegen $x \in E$ (im Zeichen $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$), wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $\|x_n - x\| < \epsilon \quad \forall n > N$

ii) Eine Folge $(x_n)_{n \in N}$ mit $x_n \in E$ heißt Cauchyfolge in E, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $\|x_n - x_m\| < \epsilon \quad \forall m, n > N$.

Bemerkung: Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt. Es gelten die üblichen Rechenregeln.

Bemerkunkg: Jeder normierte lineare Raum ist in natürlicher Weise ein topologischer Raum; die (offenen) Umgebungen eines Punktes $x \in E$ sind die Kugeln $U_\delta(x_0) = \{x \in E |$ für $\|x - x_0\| < \delta\}$.

Bemerkung: Seien E, F normierte lineare Räume und $\phi : E \to F$ eine Abbildung. Sei $x_0 \in E$. Dann sind äquivalent:

i) ϕ ist stetig in x_0

ii) $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$, so daß

$$\|\phi(x) - \phi(x_0)\| < \epsilon \quad \text{für } \|x - x_0\| < \delta$$

iii) Für jede Folge $(x_n)_{n \in N}$ mit $x_n \in E$ und $\lim x_n = x_0$ gilt $\lim \phi(x_n) = \phi(x_0)$

Definition Sei E normierter linearer Raum. Dann heißt E *vollständig* oder *Banachraum*, wenn jede Cauchyfolge in E einen Grenzwert in E hat.

Beispiele i) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ($\|\cdot\|$ = euklidische Norm) sind Banachräume.

ii) $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ ist Banachraum, wobei $\|\cdot\|_\infty$ = sup-Norm

iii) $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_1)$ ist kein Banachraum, wobei $\|\cdot\|_1 = L^1$-Norm

Ziel: Zu jedem normierten linearen Raum E konstruiere man einen *vollständigen* normierten linearen Raum in natürlicher und einfacher Weise, der E als „dichten“ Teilraum enthält.

Satz 1: Seien E und F normierte lineare Räume. Sei $\phi : E \to F$ linear. Dann ist ϕ stetig auf E genau dann, wenn es $C \geq 0$ gibt, so daß $\|\phi(x)\| \leq C\|x\| \ \ \forall\, x \in E$.

Beweis: „$\Leftarrow$“: Sei $x_0 \in E$ und $(x_n)_{n \in N}$ eine Folge in E mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Es gilt

$$\|\phi(x_n) - \phi(x_0)\| \underbrace{=}_{\phi \text{ linear}} \|\phi(x_n - x_0)\| \leq C\|x_n - x_0\|$$

Aus $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ folgt daher $\phi(x_n) \to \phi(x_0)$ $(n \to \infty)$, also ist ϕ stetig in x_0.

„$\Rightarrow$“ Nach Voraussetzung ist ϕ stetig in $x_0 = 0$. Sei $\epsilon = 1$. Dann existiert $\delta > 0$, so daß

$$\|\phi(x)\| = \|\phi(x) - \phi(0)\| \leq 1 \quad \text{für} \quad \|x\| < \delta$$

Sei $x \neq 0$. Dann ist $\left\|\frac{\delta x}{\|x\|}\right\| = \delta$.. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \|\phi\left(\frac{\delta x}{\|x\|}\right)\| &\leq 1 \quad \Rightarrow \\ \|\phi(x)\| &\leq \frac{1}{\delta} \cdot \|x\| \quad \forall\, x \in E,\ x \neq 0 \end{aligned}$$

Für $x = 0$ ist dies ohnehin trivial, also setze $C := \frac{1}{\delta}$.

Definition: Seien E, F normierte lineare Räume und sei $L(E,\ F)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der *stetigen* linearen Abbildungen von E nach F. Man definiert für $\phi \in L(E,\ F)$

$$\|\phi\| := \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|\phi(x)\|$$

Man zeigt (leicht), daß $\|\cdot\|$ eine Norm auf $L(E,\ F)$ ist.

Lemma Sei $A \subset E$ Teilmenge. Sei $\overline{A} := A \cup \partial A$ der der Abschluß von A in E. Dann ist $\overline{A}$ genau die Menge der x in E, so daß es eine gegen x konvergente Folge $(a_n)_{n \in N}$ mit $a_n \in A$ gibt.

Beweis: Sei $x \in \overline{A}$. Sei $x \in A$. Dann konvergiert die „konstante" Folge $(x)_{n \in N}$ gegen x. Sei $x \in \partial A$. Dann liegt also in jeder Umgebung von x ein Punkt aus A (und aus A^C), also kann man insbesondere eine Folge $(a_n)_{n \in N}$ mit $\lim a_n = x$ und $a_n \in A$ finden.
Umgekehrt: Sei $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n,\ a_n \in A$. Gilt $x \in A$, so ist nichts zu zeigen. Sei daher $x \notin A$. Wegen $x = \lim a_n,\ a_n \in A$ liegt in jeder Umgebung von x ein Element aus A. Jede solche Umgebung enthält auch einen Punkt aus A^C, nämlich x selbst. q.e.d.

Satz 2 Sei E ein normierter linearer Raum und $F \subset E$ ein linearer Teilraum. Sei G ein Banachraum und $\phi :\ F \to G$ eine stetige Abbildung. Dann gilt: Der Abschluß $\overline{F}$ von F in E ist ein linearer Teilraum von E, und ϕ besitzt eine eindeutig bestimmte Fortsetzung zu einer stetigen linearen Abbildung $\overline{\phi} := \overline{F} \to G$.
Zusatz: es gilt $\|\phi\| = \|\overline{\phi}\|$.

Beweis Nach dem Lemma besteht $\overline{F}$ genau aus den Grenzwerten von konvergenten Folgen in F. Seien $x, y \in \overline{F}$, also $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n;\ y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ mit $x_n,\ y_n \in F$. Daher

$$x + y = \lim x_n + \lim y_n = \lim(x_n + y_n)$$

also ist $x + y \in \overline{F}$, denn F ist Teilraum von E. Genauso: $x \in \overline{F},\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x \in \overline{F}$

Eindeutigkeit der Fortsetzung: Seien ϕ_1, ϕ_2 zwei Fortsetzungen von ϕ zu stetigen linearen Abbildungen $\overline{F} \to G$. Sei $x \in \overline{F}$, mit $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ mit $x_n \in F$. Dann gilt:

$$\phi_1(x) \underbrace{=}_{\text{Stetigkeit}} \lim_{n\to\infty} \phi_1(x_n) \underbrace{=}_{\phi_{1/F} = \phi_{2/F}} \lim_{n\to\infty} \phi_2(x_n) \underbrace{=}_{\text{Stetigkeit}} \phi_2(x)$$

Existenz: Sei $x \in \overline{F},\ x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ mit $x_n \in F$. Nach Voraussetzung ist ϕ stetig, nach Satz 1 $\exists C \geq 0$ mit

$$\|\phi(x)\| \leq C\,\|x\| \quad \forall\, x \in E$$

Daher gilt:

$$\|\phi(x_n - x_m)\| = \|\phi(x_n) - \phi(x_m)\| \leq C\,\|x_n - x_m\| \quad (\forall\, n, m \in \mathbb{N})$$

Da $(x_n)_{n\in N}$ konvergiert, ist $(x_n)_{n\in N}$ Cauchy-Folge. Daher ist auch $(\phi(x_n))_{n\in N}$ Cauchy-Folge. Da G vollständig, ist also $(\phi(x_n))_{n\in N}$ konvergent. Dieser Limes hängt nicht von der Auswahl der Folge $(x_n)_{n\in N}$ mit $\lim x_n = x$ ab; gilt $\lim x_n' = x'$, $x_n' \in F$, so folgt

$$\|\phi(x_n) - \phi(x_n')\| \leq C\,\|x_n - x_n'\| \to 0 \ (n \to \infty)$$

also $\lim \phi(x_n) = \lim \phi(x_n')$.
Wir setzen daher

$$\overline{\phi}(x) := \lim_{n\to\infty} \phi(x_n)$$

Linearität von $\overline{\phi}$: Seien $x, y \in \overline{F}, \lim x_n = x,\ \lim y_n = y$ mit $x_n, y_n \in F$. Dann $x + y = \lim(x_n + y_n)$, also gilt

$$\begin{aligned} \overline{\phi}(x+y) &= \lim_{n\to\infty} \phi(x_n + y_n) \\ &= \lim \phi(x_n) + \phi(y_n) \\ &= \overline{\phi}(x) + \overline{\phi}(y) \end{aligned}$$

Genauso $\overline{\phi}(\lambda x) = \lambda\overline{\phi}(x) \quad (\lambda \in \mathbb{R}, x \in \overline{F})$

Sei $x \in F$. Sei $(x)_{n\in N}$ die konstante Folge. Nach Definition gilt $\overline{\phi}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \phi(x) = \phi(x)$, also ist $\overline{\phi}$ Fortsetzung von ϕ.
Sei $x \in \overline{F}$, $\lim x_n = x$ mit $x_n \in F$. Aus

$$\|\phi(x_n)\| \leq C\,\|x_n\|$$

folgt durch Grenzübergang $n \to \infty$ und wegen der Stetigkeit der Norm

$$(*) \qquad \|\overline{\phi}(x)\| \leq C\,\|x\|$$

Daher ist nach Satz 1 $\overline{\phi}$ stetig.
Es gilt: $\quad \|\phi\| := \sup\limits_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in F}} \|\phi(x)\|$
Daher gilt $\|\phi(x)\| \leq \|\phi\|\ \forall x \in F$ mit $\|x\| = 1$, daher $\|\phi\| \leq \|\phi\|\,\|x\|\ \ \forall x \in F$.
Mit $(*)$ für $C = \|\phi\|$ gilt daher:
$\|\overline{\phi}(x)\| \leq \|\phi\|\,\|x\| \ \ \forall x \in \overline{F}$, daher $\|\overline{\phi}(x)\| \leq \|\phi\|$ für $x \in \overline{F}$, $\|x\| = 1$. Daher $\|\overline{\phi}\| \leq \|\phi\|$.
Umgekehrt gilt auch $\|\phi\| \leq \|\overline{\phi}\|$, denn $\overline{\phi}$ ist Fortsetzung von ϕ und

$$\{x \in F |\ \|x\| = 1\} \subset \{x \in \overline{F} |\ \|x\| = 1\}$$

.

Anwendung: $I = [a, b]$ kompaktes Intervall, $E = B(I) =$ Raum der beschränkten Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ mit Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, $F = T(I) =$ Raum der Treppenfunktionen auf I, $G = \mathbb{R}$; dann ist $\bar{F} = R(I) =$ Raum der Regelfunktionen auf I, denn gleichmäßige Konvergenz für beschränkte Funktionen ist dasselbe wie Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|_\infty$. Sei φ :

$F \to \mathbb{R}$ definiert durch $t \mapsto \int_a^b t(x)dx$, dann ist φ linear (klar!) und stetig, denn

$$\left|\int_a^b t(x)dx\right| \leq \int_a^b |t(x)|dx \leq (b-a)\|t\|_\infty$$

(Man benutze Satz 1.)
Aus Satz 2 erhält man also unmittelbar die Existenz des Integrals für Regelfunktionen.

Definition: Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt dicht in E, falls $\bar{A} = E$, d.h. $\forall\, x \in E$ gilt: in jeder Umgebung von x liegt ein Punkt aus A.

Beispiel $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Definition: Sei E normierter linearer Raum. Unter einer Vervollständigung von E versteht man dann ein Paar (V, φ), wobei V ein Banachraum ist und $\varphi : E \to V$ eine stetige lineare Abbildung, welche *injektiv* ist, sogar Norm-erhaltend ist (d.h. $\|\varphi(x)\| = \|x\| \;\; \forall\, x \in E$), und so daß $\varphi(E)$ dicht in V ist.

Satz 3: Zu jedem normierten linearen Raum existiert eine Vervollständigung (V, φ). Diese ist eindeutig bestimmt im folgenden Sinne: ist (V', φ') eine weitere Vervollständigung von E, so existiert ein eindeutig bestimmtes $u \in L(V, V')$, u invertierbar, $u^{-1} \in L(V, V')$, so daß $\varphi' = u \circ \varphi$, d.h. das Diagramm ist kommutativ.

$$\begin{tikzcd}
V' & & V \arrow[ll, "u"] \\
& E \arrow[ul, "\varphi'"] \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Beweis *Eindeutigkeit*: Die Abbildung φ ist nach Voraussetzung Norm-erhaltend, also gilt dasselbe auch für $\varphi^{-1} : \varphi(E) \to E$, also ist φ^{-1} stetig, also ist $\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(E) \to \varphi'(E) \subset V'$ stetig und linear. Nach Satz 2 hat also $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ eine eindeutig bestimmte Fortsetzung zu einer Abbildung u auf $\overline{\varphi(E)} = V$, d.h. $u \in L(V, V')$.
Genauso hat $\varphi \circ \varphi'^{-1}$; $\varphi'(E) \to \varphi(E) \subset V$ eine eindeutig bestimmte Fortsetzung zu einem Element $v \in L(V', V)$. Nach Konstruktion sind $v \circ u \in L(V, V)$ und $u \circ v \in L(V', V')$ auf $\varphi(E)$ und auf $\varphi'(E)$ gleich der Identität. Daher gilt nach Satz 1 oder wegen der Stetigkeit $v \circ u = id_V$ $(u \circ v = id_V)$. Dies zeigt die Existenz eines u's mit den geforderten Eigenschaften.
Dieses u ist eindeutig bestimmt, denn gilt $\varphi' = \tilde{u} \circ \varphi$, $\varphi' = u \circ \varphi$, so gilt $\tilde{u} \circ \varphi = u \circ \varphi$, also stimmen $\tilde{u}$ und u auf $\varphi(E)$ überein, daher auch auf $\overline{\varphi(E)} = V$ (Satz 2).
Existenz: Sei S die Menge der Cauchy-Folgen, $\xi = (x_n)_{n \in N}$ in E. Dann ist S ein reeller linearer Raum unter der Addition $(x_n)_{n \in N} + (y_n)_{n \in N} :=$

$(x_n+y_n)_{n\in N}$ und Skalarmultiplikation $\lambda\,(x_n)_{n\in N} := (\lambda x_n)_{n\in N}$. (man beachte

$$\|(x_n+y_n)-(x_m+y_m)\| \le \|x_n-x_m\|+\|y_n-y_m\| \to 0 \ (n,m\to\infty)$$

denn $(x_n)_{n\in N}$ und $(y_n)_{n\in N}$ sind Cauchy-Folgen).
Sei $S_0 \subset S$ die Teilmenge aller Nullfolgen $\alpha = (a_n)_{n\in N}$ in E, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann ist S_0 Teilraum von S. Man definiere eine Äquivalenzrelation auf S durch

$$\xi \sim \eta \ \Leftrightarrow: \exists\, a\in S_0 \text{ mit } \eta = \xi + a$$

Wir bezeichnen mit $\bar{\xi}$ die Äquivalenzklasse von ξ und mit V die Menge aller Äquivalenzklassen. Dann ist V ein reeller linearer Raum unter der Addition

$$\bar{\xi}+\bar{\eta} := \overline{\xi+\eta}$$

und Skalarmultiplikation

$$\lambda\bar{\xi} := \overline{\lambda\xi}$$

(V ist nichts anderes als der Quotientenraum $S_{/S_0}$).
$\forall\, x,y\in E$ gilt $|\,\|x\|-\|y\|\,| \le \|x-y\|$ (Zweimaliges Anwenden der Dreiecksungleichung). Sei $\xi = (x_n)_{n\in N} \in S$. Dann gilt also

$$|\,\|x_n\|-\|x_m\|\,| \le \|x_n-x_m\| \quad \forall\, m,n\in\mathbb{N}$$

da $(x_n)_{n\in N}$ Cauchyfolge ist, ist somit auch $(\|x_n\|)_{n\in N}$ Cauchy-Folge, da $\mathbb{R}$ vollständig, existiert also $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|$. Ist $\eta\in S$, $\eta\sim\xi$, also $\eta = \xi + a$ mit $a\in S_0$, d.h. $y_n = x_n + a$, wenn $\eta = (y_n)_{n\in N}$, so gilt

$$\left.\begin{array}{lcl} \|y_n\| &=& \|x_n+a_n\| \le \|x_n\|+\|a_n\| \\ \|x_n\| &=& \|y_n-a_n\| \le \|y_n\|+\|a_n\| \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\|y_n\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|$$

denn $\lim\limits_{n\to\infty}\|a_n\| = 0$.
Man setzt daher

$$\|\bar{\xi}\| := \lim_{n\to\infty}\|x_n\|$$

Dann ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf V (klar!). Man definiere $\varphi: E\to V$, $\varphi(x) := \overline{(x)}$ (= Klasse der konstante Folge $(x,x,x,\ldots)$)Dann ist φ linear (trivial!). Es gilt $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ (trivial!), also ist φ Norm-erhaltend, insbesondere injektiv und stetig!
Wir zeigen jetzt, daß $\overline{\varphi(E)} = V$. Sei $\xi = (x_n)_{n\in N}\in S$. Für festes $m\in\mathbb{N}$ ist $\bar{\xi}-\varphi(x_m) = (\overline{x_n - x_m})_{n\in N}$. Sei $\epsilon > 0$. Da $(x_n)_{n\in N}$ Cauchyfolge, $\exists\, N\in\mathbb{N}$ so daß $\|x_n - x_m\| < \epsilon \quad \forall\, n,m > n$.
Daher folgt

$$\begin{array}{lcl} \|\bar{\xi}-\varphi(x_m)\| &=& \lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x_m\| \le \epsilon \\ &\Rightarrow& \lim\limits_{m\to\infty}\varphi(x_m) = \bar{\xi}, \qquad \text{also gilt } \overline{\varphi(E)} = V \end{array}$$

Noch zu zeigen: V ist vollständig. Sei $\left(\bar{\xi}_n\right)_{n \in N}$ eine Cauchyfolge in V. Da $\varphi(E)$ dicht in V, kann man für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in E$ finden mit

$$\|\bar{\xi}_n - \varphi(x_n)\| < \frac{1}{n} \quad (**)$$

Sei $\epsilon > 0$. Dann

$$\begin{array}{lll} \exists\, N_1 \in \mathbb{N} & \text{mit} & \|\xi_n - \varphi(x_n)\| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall\, n, m > N_2 \\ \exists\, N_2 \in \mathbb{N} & \text{mit} & \|\bar{\xi}_n - \bar{\xi}_m\| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall\, n, m > N_2 \end{array}$$

Sei $N := \max\{N_1, N_2\}$. Für $n, m > N$ gilt

$$\begin{array}{lll} \|x_n - x_m\| & \underbrace{=}_{\text{Normerhaltend}} & \|\varphi(x_n - x_m)\| = \|\varphi(x_n) - \varphi(x_m)\| \\ & = & \|(\varphi(x_n) - \bar{\xi}_n) + (\bar{\xi}_n - \bar{\xi}_m) + (\bar{\xi}_m - \varphi(x_m)\| \\ & \leq & \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{array}$$

Also ist $(x_n)_{n \in N}$ Cauchyfolge in E, also $\xi := (x_n)_{n \in N} \in S$. Man zeigt $\lim\limits_{n \to \infty} \bar{\xi}_n = \bar{\xi}$.
Denn sei $\epsilon > 0$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$ groß

$$\|\bar{\xi}_n - \bar{\xi}\| \leq \|\bar{\xi}_n - \varphi(x_n)\| + \|\varphi(x_n) - \bar{\xi}\| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

Bemerkungen:

i) Ist $E \subset W$ Teilraum eines Banachraumes W, so ist $(\bar{E}, \varphi)$ eine Vervollständigung von E, wobei $\bar{E}$ der Abschluß von E in W ist und $\varphi : E \to \bar{E},\ x \mapsto x$ die Inklusion ist. In der Tat: sei $(x_n)_{n \in N}$ eine Cauchyfolge in $\bar{E}$. Wegen $\bar{E} \subset W$ ist dann $(x_n)_{n \in N}$ Cauchyfolge in W, also existiert $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n,\ x \in W$, da W nach Voraussetzung vollständig. Da $\bar{E}$ abgeschlossen, folgt $x \in \bar{E}$ (s. Lemma). Daher ist $\bar{E}$ vollständig. Es ist klar, daß die Inklusion φ die geforderten Eigenschaften hat.

ii) Im Hinblick auf i) bezeichnet man i.a. die im Sinne der Vervollständigung von $(E, \|\cdot\|)$ mit $\bar{E}$.

iii) Ist $A : E \to G$ (G Banachraum) eine stetige lineare Abbildung und identifiziert man E mit seinem Bild φ (also „$E \subset \bar{E}$“), also besitzt nach Satz 2 die Abb. eine eindeutig bestimmte stetige lineare Fortsetzung $\bar{A} : \bar{E} \to G$.

iv) Sei E linearer Raum und $\|\cdot\|$ eine Seminorm auf E. Sei $E_0 : \{x \in E \mid \|x\| = 0\}$. Dann ist E_0 Teilraum von E, und der Faktorraum $E_{/E_0}$ (bestehend aus den Nebenklassen $x + E_0$ $(x \in E)$) wird zu einem normierten linearen Raum durch $\|x + E_0\| := \|x\|$ (Übungsaufgabe! Tip: für $x \in E,\ y \in E_0$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \|x + y\| & \leq & \|x\| + \|y\| = \|x\| \\ \|x\| & = & \|(x + y) - y\| \leq \|x + y\| + \|y\| = \|x + y\| \\ & \Rightarrow & \|x + y\| = \|x\|). \end{array}$$

(„ $(x_n)_{n\in N}$ heiße konvergent, wenn $\exists\, x$ mit $\lim x_n = x$“ $\Rightarrow \lim \|x_n - x\| = 0$, $x_0 \in E_0$
$\|x_n - (x + x_0)\| = \|x_n - x + x_0\| = \|x_n - x\|$)
Sei $A : E \to G$ (G Banachraum) eine lineare Abbildung. Es gelte $ker\, A \supset E_0$. Dann „faktorisiert A durch E_0“, d.h. man kann eine lineare Abbildung (auch mit A bezeichnet) von $E_{/E_0}$ nach G definieren durch $A(x + E_0) := A(x)$. Ist dieses A stetig, so besitzt also dieses A eine eindeutig bestimmte stetige lineare Fortsetzung $\bar{A} : \overline{E_{/E_0}} \to G$.

v) Beispiele
$I = [a, b]$ kompaktes Intervall, $E = T(I)$; für $t \in T(I)$ sei $\|t\|_1 := \int_a^b |t(x)|dx$, dann ist $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf $T(I)$ („L^1-Seminorm“). Sei $G = \mathbb{R}$. Sei $A : T(I) \Rightarrow \mathbb{R}$, $A(t) := \int_a^b t(x)dx$. Dann ist A linear.
Sei $t \in E_0$, also $\|t\|_1 = 0$.

$$0 = \|t\|_1 = \int_a^b |t(x)|dx \geq \left|\int_a^b t(x)dx\right| \qquad \Rightarrow A(t) = 0 \ \Rightarrow E_0 \subset ker\, A$$

Also faktorisiert A durch E_0. die faktorisierte Abbildung A ist stetig, denn für $t \in E_{/E_0}$ ist

$$|A(t)| \leq \int_a^b |t(x)|dx = \|t\|_1$$

Das Integral besitzt daher eine eindeutig bestimmte stetige lineare Fortsetzung auf $(\overline{T(I)_{/T(I)_0}}, \|\cdot\|_1)$. Anders als in der Situation $(\overline{T(I)}, \|\cdot\|_\infty) = (R(I), \|\cdot\|_\infty) \subset (B(I), \|\cdot\|_\infty)$ ist $(\overline{T(I)_{/T(I)_0}}, \|\cdot\|)$ in keiner offensichtlichen Weise in einem Banachraum enthalten.
Daher die *Frage*: kann man trotzdem $(\overline{T(I)_{/T(I)_0}})$ mit einer Klasse von Funktionen in Verbindung bringen oder sogar identifizieren? Hat das Integral auf dieser Klasse von Funktionen „gute“ Eigenschaften? (Antwort: i.a. *ja*).

Kapitel 3

Meßbare Mengen, Maße

3.1 Meßbare Mengen

Definition: Sei X eine nichtleere Menge. Unter einer σ-Algebra in X versteht man man eine Familie $\mathcal{M}$ von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

i) $\emptyset \in \mathcal{M}$

ii) $\mathcal{M}$ ist abgeschlossen unter Komplementbildung und der Bildung abzählbarer Vereinigungen, d.h. $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^C := X \backslash A \in \mathcal{M}$, und wenn $(A_n)_{n \in N}$ eine Folge von Elementen aus $\mathcal{M}$ ist, so ist auch $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ in $\mathcal{M}$.

Das Paar $(X, \mathcal{M})$ heißt Meßraum, die Mengen aus $\mathcal{M}$ heißen meßbare Mengen..

Lemma 1: Sei $(X, \mathcal{M})$ Meßraum. Dann gilt

i) $X \in \mathcal{M}$

ii) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{M}$

iii) $(A_n)_{n \in N}$ Folge von Elementen aus $\mathcal{M} \Rightarrow \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$

iv) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{M}$

v) $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A \backslash B := \{x \in A | x \in B\} \in \mathcal{M}$

Beweis:

i) klar, denn $X = \emptyset^C$ (Eigenschaft i))

ii) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots \in \mathcal{M}$ (Eigenschaft i)+ii))

iii) $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \left(\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n^{C^C} \right) = \left(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n^C \right)^C \in \mathcal{M}$ (nach Eigenschaft ii))

iv) $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{M} \Rightarrow A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap X \cap X \cdots \in \mathcal{M}$

v) $A \backslash B = A \cap B^C \in \mathcal{M}$ (Eigenschaft ii))

Lemma 2: Der Durchschnitt beliebig vieler σ-Algebren in X ist wieder eine σ-Algebra in X.

Beweis: klar!

Definition: Sei X nicht-leere Menge und S eine Familie von Teilmengen von X. Dann nennt man den Durchschnitt aller σ-Algebren, die S umfassen, die von S *erzeugte* σ-Algebra (Man beachte, daß es immer eine σ-Algebra gibt, die S umfaßt, nämlich die Potenzmenge $\mathcal{P}(x)$). Diese ist also „kleinste" σ-Algebra, die S umfaßt.

Beispiel: X = topologischer Raum. Sei S die Menge aller offenen Mengen in X. Dann heißt die von S erzeugte σ-Algebra die σ-Algebra der Borel-Mengen von X. Diese wird auch mit $\mathcal{B}$ bezeichnet. Mengen aus $\mathcal{B}$ heißen Borel-meßbar. Insbesondere (s. Lemma) sind dann abzählbare Durchschnitte von offenen Mengen und abzähbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen Borel-meßbar.
Ist $X = \mathbb{R}$, so sind insbesondere halboffene Intervalle meßbar, denn z.B. ist

$$(a, b] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a + \frac{1}{n}, b]$$

Bemerkung: „σ" soll an abzählbare Summen-bildung erinnern. (früher: Vereinigung von zwei Mengen wurde auch deren Summe genannnt.)

Beispiele i) $(X, \mathcal{M})$ Meßraum, $Y \subset X$, $M_Y := \{A \cap Y |\ A \in \mathcal{M}\}$; dann ist das Paar $(Y, \mathcal{M}_Y)$ Meßraum (Übung!). Man nennt $\mathcal{M}_Y$ die auf Y durch $\mathcal{M}$ induzierte σ-Algebra.

ii) Eine Familie $\mathcal{M}$ von Teilmengen von X ist genau dann eine σ-Algebra über X, wenn $\emptyset \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ abgeschlossen ist unter Komplementbildung und der Bildung endlicher Vereinigungen und derart, daß wenn $(A_n)_{n \in N}$ eine Folge von paarweise disjunkten Elementen aus $\mathcal{M}$ ist, dann auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ zu $\mathcal{M}$ gehört. (Übung!).

Definition: Eine Algebra von Mengen über X ist eine Familie von Teilmengen von X derart, daß $\emptyset \in \mathcal{A}$ und daß gilt $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B,\ A \cap B, A \backslash B \in \mathcal{A}$. Aus dem obigen folgt leicht, daß die σ-Algebren über X genau dijenigen Algebren $\mathcal{A}$ über X sind, die die Eigenschaft $X \in \mathcal{A}$ haben und abgeschlossen sind unter abzählbaren Vereinigungen.

3.2 Meßbare Abbildungen

Definition: Seien $(X, \mathcal{M})$ Meßraum und $(Y, \mathcal{N})$ Meßräume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt meßbar, wenn das Urbild jeder meßbaren Menge meßbar ist: $B \in \mathcal{N} \ \Rightarrow\ f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$.

Lemma 1: Sei $(X, \mathcal{M})$ Meßraum. Sei Y nicht-leere Menge, S eine Familie von Teilmengen von Y und $\mathcal{N}$ die von S erzeugte σ-Algebra. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann ist f meßbar genau dann, wenn $f^{-1}(B)$ meßbar ist $\forall\, B \in S$.

Beweis: „$\Rightarrow$“: klar nach Definition, denn die Mengen B aus S sind ja meßbar, d.h. in $\mathcal{N}$.
„$\Leftarrow$“: Sei $\mathcal{W} := \{B \subset Y \,|\, f^{-1}(B)$ meßbar $\}$.
Es gilt $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(B^C) = f^{-1}(B)^C$, $f^{-1}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$.
Daher ist $\mathcal{W}$ σ-Algebra über Y. Nach Voraussetzung umfaßt $\mathcal{W}$ alle Mengen aus S. Da $\mathcal{N}$ die kleinste σ-Algebra ist, die S umfaßt, folgt $\mathcal{W} \supset \mathcal{N}$.
Das heißt: $f^{-1}(B)$ ist meßbar für alle $B \in \mathcal{N}$, also ist f meßbar. q.e.d.

Beispiel: Ist Y topologischer Raum und $\mathcal{B}$ die σ-Algebra der Borel-Mengen, so ist nach Lemma 1 eine Abbildung $f : X \to Y$, X Meßraum, genau dann meßbar, wenn $f^{-1}(B)$ meßbar ist $\forall$ offenen Mengen $B \subset Y$.

Beispiel:

i) $I : [a, b]$ kompaktes Intervall, $t : I \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion auf I. Sei $\mathcal{B}$ die σ-Algebra der Borel-Mengen über $\mathbb{R}$ und $\mathcal{B}_I$, die auf I induzierte σ-Algebra. Dann ist t meßbar, denn für jede (offene) Menge $B \subset \mathbb{R}$ ist $t^{-1}(B)$ endliche Vereinigung von Intervallen, also meßbar.

ii) $X; Y$ topologische Räume (mit den σ-Algebren der Borel-Mengen), $f : X \to Y$ stetig. Dann ist f meßbar (s. Lemma 1).

Lemma 2 Sei X Meßbar. Seien Y und Z topologische Räume. Sei $f : X \to Y$ meßbar und $g : Y \to Z$ stetig. Dann ist $g \circ f : X \to Z$ meßbar.

Beweis: Sei $B \subset Z$ offen. Dann ist $(g \circ f)^{-}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$ meßbar, denn $g^{-1}(B)$ offen, da g stetig, $f^{-1}(g^{-1}(B))$ meßbar, denn f ist meßbar. Nach Lemma 1 ist daher $g \circ f$ meßbar.

Beispiel: Ist $f : X \to E$ meßbar, wobei E ein reeller normierter Raum, so ist auch $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x)\|$ meßbar., denn $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Erinnerung: Sind X und Y topologische Räume, so ist $X \times Y$ in natürlicher Weise ein topologischer Raum unter der Produkttopologie:
Ist $(x, y) \in X \times Y$, so seien die (offenen) Umgebungen von (x, y) genau die Mengen der Form $U \times V$, wobei U (offene) Umgebung von x und V (offene) Umgebungen von y ist. Offene Mengen sind genau die Vereinigungen von Mengen der Form $A \times B$, wobei $A \subset X$ offen udn $B \subset Y$ offen. Die Projektionen $X \times Y \to X$, $(x, y) \mapsto x$ und $X \times Y \to Y$, $(x, y) \mapsto y$ sind stetig.

Lemma 3: Sei X Meßraum und seien Y und Z topologische Räume. Sei $f : X \to Y \times Z$ eine Abbildung. Man schreibe $f(x) = (g(x), h(x))$, wobei $g : X \to Y$, $h : X \to Z$ die Koordinatenabbildungen sind. Dann gilt

i) f meßbar $\Rightarrow$ g und h meßbar

ii) Sind g und h meßbar und ist jede offene Menge in $Y \times Z$ abzählbare Vereinigung von Mengen $A \times B$ mit $A \subset Y$ offen, $B \subset Z$ offen, dann ist auch f meßbar.

Beweis:

i) g bzw. h sind die Kompositionen von f mit den Projektionsabbildungen, letztere sind stetig, da f meßbar, folgt die Behauptung aus Lemma 2.

ii) Sei $V \subset Y$ offen, $W \subset Z$ offen. Dann ist $f^{-1}(V \times W) = g^{-1}(v) \cap h^{-1}(W)$. Da g und h meßbar sind, ist $g^{-1}(U) \cap h^{-1}(W)$ meßbar, d.h. $f^{-1}(V \times W)$ meßbar. Ist $B \subset Y \times Z$ irgendeine offene Menge, so kann man nach Voraussetzung schreiben $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \times W_n$. Daher ist

$$f{-}1(B) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(V_n \times W_n)$$

Also ist $f^{-1}(B)$ meßbar, also ist f meßbr nach Lemma 1.

Satz 1: Sei X Meßraum. Dann bilden die meßbaren Abbildungen $f : X \to \mathbb{R}$ einen reellen Vektorraum unter komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation.

Beweis: Wir zeigen z.B., daß mit f und g auch $x \mapsto f(x) + g(x)$ meßbar ist. Letztere Abbildung ist aber die Komposition von $X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x \mapsto (f(x), g(x))$ und der „Summenbildung“ $(a, b) \mapsto a + b$, und letztere ist stetig und erstere Abbildung ist meßbar, denn f und g sind meßbar und jede offene Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ ist abzählbare Vereinigung von offenen Mengen $U \times V$ mit $U \subset \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}$ offen (man benutze $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$)
(

$$A \subset \mathbb{R},\ A = \bigcup_{\substack{r,s \in A \\ r,s \in \mathbb{Q}}} (r, s))$$

Also folgt die Behauptung aus Lemma 2 und 3.

Bemerkung: Eine entsprechende Aussage gilt auch mit $\mathbb{R}$ ersetzt durch $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$.

Satz: Sei X Meßraum, E normierter linearer Raum und $f : X \to E$ eine Abbildung. Sei $(f_n)_{n \in N}$ eine Folge von meßbaren Abbildungen $f_n : X \to E$, die punktweise gegen f konvergiert (d.h. $\lim_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = f(x)$, $\forall\, x \in X$). Dann ist f meßbar.

Beweis: Sei $U \subset E$ offen. Sei $x \in f^{-1}(U)$, d.h. $f(x) \in U$. Wegen $\lim f_n(x) = f(x)$ und U offen, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $f_n(x) \in U \quad \forall\, n > N$, d.h. $x \in f_n^{-1}(U)$. Daher gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$x \in \bigcup_{n \geq m} f_n^{-1}(U)$$

d.h.

$$x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} f_n^{-1}(U)$$

also gilt

$$f^{-1}(U) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} f_n^{-1}(U) \qquad (*)$$

Sei $A \subset E$ abgeschlossen. Sei $x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} f_n^{-1}(A)$. Daher existieren beliebig große n, so daß $x \in f_n^{-1}(A)$, d.h. $f_n(x) \in A$. Wegen $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ konvergiert auch jede Teilfolge von $(f_n(x))_{n \in N}$ gegen $f(x)$. Da A abgeschlossen, folgt nach Lemma, Kapitel 2, daß $f(x) \in A$, d.h. $x \in f^{-1}(A)$. Daher

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq m} f_n^{-1}(A) \subset f^{-1}(A) \qquad (**)$$

Sei $V \subset E$ offen fest gewählt. Wir müssen zeigen, daß $f^{-1}(V)$ meßbar ist. Für $y \in V$ sei

$$d(y, V^c) = \inf_{x \in V^c} \|y - x\|$$

der Abstand von y zu V^c.
Sei

$$\begin{aligned} V_n &:= \{y \in V \mid d(y, V^c) > \frac{1}{n}\} \\ A_n &:= \{y \in V \mid d(y, V^c) \geq \frac{1}{n}\} \end{aligned}$$

Da die Abbildung $y \mapsto d(y, V^c)$ stetig ist (nachprüfen!), ist V_n offen und A_n abgeschlossen (Urbilder unter einer stetigen Abbildung von $(1/n, \infty)$ bzw. $[1/n, \infty]$!). Ferner gilt

$$V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

(letztere Gleichheit ist klar; erstere auch, denn gäbe es $y \in V$, welches in keinem V_n enthalten wäre, so wäre $d(y, V^c) = 0$, also $y \in \overline{V^c}$, denn V^c ist abgeschlossen, weil V offen. Widerspruch zu $x \in V$.)
Es folgt

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(V_n) \\ &\subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq m} f_k^{-1}(V_n) \end{aligned}$$

Ferner

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_n) \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq m} f_k^{-1}(A_n) \\ &\supset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq m} f_k^{-1}(V_n) \qquad \text{wegen } V_n \subset A_n \end{aligned}$$

Daher gilt Gleichheit, d.h.

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq m} f_k^{-1}(V_n)$$

Da $f_n^{-1}(V_n)$ meßbar ist nach Voraussetzung, ist somit auch $f^{-1}(V)$ meßbar.

Definition: Sei X Meßraum und Z eine Menge. Eine Abbildung $f : X \to Z$ heiße „einfach“, falls $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_i$; $(X_i \cap X_j = 0$ für $i \neq j)$ endliche disjunkte Vereinigung von meßbaren Mengen X_i $(i = 1, \ldots, n)$ ist derart, daß $f|_{X_i}$ konstant ist $(\forall\, i = 1, \ldots, m)$.

Bemerkung: Ist Z Meßraum und $f : X \to Z$ einfach, so ist f meßbar.

Satz 3: Sei X Meßraum. Dann ist eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ genau dann meßbar, wenn f punktweiser Limes einer Folge $(f_n)_{n \in N}$ von einfachen Abbildungen $f_n : X \to \mathbb{R}$ ist.

Bemerkung: Eine entsprechende Aussage gilt auch, wenn man $\mathbb{R}$ durch einen endlich-dimensionalen Vektorraum ersetzt.

Beweis: „$\Leftarrow$“ da einfache Abbildungen meßbar sind, folgt die Aussage aus Satz 2.
„$\Rightarrow$“ Übung!

3.3 Maße

Sei $[0, \infty] := \{x \in \mathbb{R} | \, x \geq 0\} \cup \{\infty\}$. Die übliche Ordnungsrelation auf $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$ wird erweitert zu einer Ordnungsrelation auf $[0, \infty]$ durch $x < \infty$ für x reell. Man definiere

$$\begin{aligned} \infty + x &= x + \infty = \infty \quad \forall\, x \in [0, \infty] \\ \infty \cdot x &= x \cdot \infty = \infty \quad \forall\, x \text{ mit } 0 < x \leq \infty \\ \infty \cdot 0 &= 0 \cdot \infty = 0 \end{aligned}$$

Dann gilt Kommutativität, Assoziativität und Distributivität. Ferner: Ist $(x_n)_{n \in N}$ eine Folge mit $x_n \in [0, \infty]$, so ist die Reihe $\sum_{x \geq 1} x_n$ konvergent in $[0, \infty]$, d.h. sie ist konvergent gegen ein $x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$ oder bestimmt divergent gegen ∞.

Definition: Sei $(X, \mathcal{M})$ ein Meßraum. Unter einem (positiven) *Maß* auf X versteht man eine Abbildung $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$, derart daß

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) ist $(A_n)_{n \in N}$ eine Folge in $\mathcal{M}$ mit $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$, so gilt

$$\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) \qquad (\text{„}\sigma - \text{Additivität“})$$

Man nennt $\mu(A)$ $(A \in \mathcal{M})$ das Maß von A und das Tripel $(X, \mathcal{M}, \mu)$ einen *Maßraum*.

Beispiele: i) $(X,\mathcal{M})$ Meßraum; für $A \in \mathcal{M}$ sei

$$\mu(A) := \begin{cases} \sharp A & ; \text{ falls } A \text{ endlich} \\ \infty & ; \text{ falls } A \text{ unendlich} \end{cases}$$

Dann ist μ ein Maß auf X („Zählmaß").

ii) $(X,\mathcal{M})$ Meßraum, $x_0 \in X$ fest. Für $A \in \mathcal{M}$. Sei

$$\mu_{x_0}(A) := \begin{cases} 1 & ; \ x_0 \in A \\ 0 & ; \ x_0 \notin A \end{cases}$$

Dann ist μ_{x_0} ein Maß („Dirac-Maß"), welches man sich als „Massenverteilung" vorstellen kann. Durch Bilden endlicher Summen oder unendlicher Reihen $\mu \sum_{n\geq 1} \alpha_n \mu_{x_n}$ $(\alpha_n \geq 0,$ $x_n \in X)$ erhält man Maße, die komplizierteren Massenverteilungen entsprechen.

iii) Lebesgue-Maß
Sei S die Menge endlicher disjunkter Vereinigungen von beschränkten Intervallen (leer, offen, halb-offen, abgeschlossen) in $\mathbb{R}$. Dann ist S eine Algebra von Mengen (leichte Übung). Für $A \in S$ sei $\mu(A)$ die „Längenfunktion", d.h.

$$\mu(A) = \sum_{\nu=1}^{m} l(I_\nu)$$

wenn A Vereinigung von paarweise disjunkten Intervallen I_ν $(\nu = 1,\dots m)$ ist und $l(I_\nu$ = Intervallänge. Dann ist $\mu(A)$ wohldefiniert (leicht!). Die von S erzeugte $\sigma-$Algebra ist gleich der Algebra $\mathcal{B}$ der Borelmengen von $\mathbb{R}$ (leichte Übung). Wir werden später zeigen, daß sich μ auf eindeutige Weise fortsetzen läßt zu einem Maß auf $\mathcal{B}$ (Satz von Hahn, schwerer!) (Für $B \in \mathcal{B}$ setzt man

$$\mu_{\text{Leb}}(B) := \inf \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$$

wobei das Infimum über alle Folgen $(A_n)_{n\in N}$ in S zu nehmen ist, für die $B \in \bigcup_{n\geq 1} A_n$ gilt. Man nennt μ_{Leb} das *Lebesgue-Maß* über $\mathbb{R}$.

Lemma 1: Sei $(X,\mathcal{M},\mu)$ ein Maßraum. Dann gilt

i) $\mu(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \cdots \mu(A_n)$ wenn $A_1,\dots A_n \in \mathcal{M}, A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$.

ii) $A, B \in \mathcal{M}, A \subset B \;\Rightarrow \mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$, insbesondere ist $\mu(A) \leq \mu(B)$.

iii) Ist $(A_n)_{n\in N}$ eine Folge in $\mathcal{M}$ mit $A_n \subset A_{n+1}\; \forall\, n \in \mathbb{N}$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$, wobei $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Beweis:

i) folgt aus Eigenschaft ii), denn $A_1 \cup \cdots \cup A_n = A_1 \cup \cdots A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots$

ii) Es ist $B = A \cup (B \backslash A)$ (disjunkt), also gilt nach Eigenschaft ii)

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \quad \Rightarrow \quad \text{Behauptung (beachte } \mu \geq 0)$$

iii) Es ist

$$A = A_1 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup (A_3 \backslash A_2) \cup \cdots \cup (A_{n+1} \backslash A_n) \cup \cdots$$

(disjunkte Vereinigung meßbarer Mengen), also gilt nach Eigenschaft ii)

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sum_{n \geq 0} \mu(A_{n+1} \backslash A_n) \qquad (A_0 := \emptyset) \\ &= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \mu(A_{n+1} \backslash A_n) \\ &= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} (\mu(A_{n+1}) - \mu(A_n)) \qquad \text{nach ii)} \\ &= \lim_{N \to \infty} \mu(A_{n+1}) \end{aligned}$$

Lemma 2: Sei $(X, \mathcal{M})$ Meßraum. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ ist ein Maß auf X genau dann, wenn $\mu(\emptyset) = 0$, μ endlich-additiv ist und wenn gilt: ist $(A_n)_{n \in N}$ ein Folge in $\mathcal{M}$ mit $A_n \subset A_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, so ist $\lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$.

Beweis: Übung!

Lemma 3: Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Dann gilt:

i) Ist $(A_n)_{n \in N}$ eine Folge in $\mathcal{M}$ mit $A_{n+1} \subset A_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ und gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_{n_0}) < \infty$, so gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(A) \qquad \text{wobei } A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

ii) Ist $(A_n)_{n \in N}$ eine Folge in $\mathcal{M}$, so ist

$$\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$$

Beweis:

i) Sei z.B. $\mu(A_1) < \infty$. Es gilt $A_1 \backslash A_n \subset A_1 \backslash A_{n+1}$, wegen $A_{n+1} \subset A_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 2,ii) gilt daher, daß $\lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_1 \backslash A_n)$ existiert und gleich $\mu(\bigcup (A_1 \backslash A_n))$ ist. Es gilt aber

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_1 \backslash A_n) = A_1 \backslash A$$

daher $\lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_1 \backslash A_n) = \mu(A_1 \backslash A)$. Ferner gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_n)$ existiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ schreibe man

$$A_1 = (A_1 \backslash A_n) \cup A_n$$

(disjunkt), also

$$\begin{aligned}
\mu(A_1) &= \mu(A_1\backslash A_n) + \mu(A_n) \\
\lim_{n\to\infty}\mu(A_1) = \mu(A_1) &= \lim_{n\to\infty}\nu(A_1\backslash A_n) + \lim_{n\to\infty}\mu(A_n) \\
&= \nu(A_1\backslash A) + \lim_{n\to\infty}\mu(A_n) \\
&= \mu(A_1) - \mu(A) + \lim_{n\to\infty}\mu(A_n) \\
&\Rightarrow \quad \text{Behauptung, wegen } \mu(A_1) < \infty
\end{aligned}$$

ii) Es gilt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_1 \cup (A_2\backslash A_1) \cup (A_2\backslash(A_1\cup A_2)) \cup \cdots$$

(disjunkt), also

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) &= \mu(A_1) + \mu(\overbrace{A_2\backslash A_1}^{A_2\backslash(A_2\cap A_1)}) + \mu(\overbrace{A_3\backslash(A_1\cup A_2)}^{A_3\backslash(A_3\cap(A_1\cup A_2))}) + \ldots \\
&\leq \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots \qquad \text{Lemma 1 ii)}
\end{aligned}$$

Definition:

i) Sei X Maßraum. Eine meßbare Menge A mit $\mu(A) = 0$ heißt *Nullmenge*.

ii) Sei X Maßraum. Man sagt, daß eine Eigenschaft (von Elementen aus X) fast überall gilt (oder für fast alle $x \in X$ gilt), wenn es eine Nullmenge A gibt, so daß diese Eigenschaft $\forall\, x \in X$ mit $x \notin A$ erfüllt ist.

Lemma 4: Eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.

Beweis: Sind $A_1, A_2, A_3 \ldots$ Nullmengen, so gilt

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \underbrace{\leq}_{\text{Lemma 3,ii)}} \sum_{n\geq 1}\mu(A_n) = 0 \quad \Rightarrow \text{Behauptung}$$

Kapitel 4

Das Integral

Sei im folgenden immer X ein Maßraum und E ein normierter reeller linearer Raum.

4.1 Das Integral von Treppenfunktionen

Definition: Sei $A \subset X$ meßbar mit $\mu(A) < \infty$. Unter einer Partition von A versteht man eine endliche disjunkte Zerlegung

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \tag{4.1}$$

mit A_i meßbar. Eine Treppenfunktion auf X mit Werten in E bezügl. der Partition 4.1 ist eine Abbildung $f : X \to E$ derart, daß f auf jeder Menge A_i konstant ist $(i = 1, \ldots, m)$ und $f(x) = 0 \; \forall x \notin A$. Unter einer Treppenfunktion versteht man eine Treppenfunktion bezügl. irgendeiner Partition bezügl. irgendeiner meßbaren Menge A, $\mu(A) < \infty$. Die Menge aller Treppenfunktionen $f : X \to E$ wird mit $T(X, E)$ bezeichnet.

Beispiele:

i) Jede Treppenfunktion $f : X \to E$ ist eine einfache Abbildung. (Erinnerung: $g : X \to E$ heißt einfach, falls $X = \bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i$ (disjunkt) mit X_i meßbar, $f|_{X_i}$ konstant). Man schreibe

$$X = (X \backslash A) \cup \bigcup_{i=1}^{m} A_i$$

Umgekehrt: Ist $\mu/(X) < \infty$, so ist auch jede einfache Abbildung $f : X \to E$ eine Treppenfunktion. Man nehme $A_i = X_i$, $A = X$ (man beachte: $f(x) = 0 \;\; \forall x \in X \backslash A = \emptyset$)

ii) $Y \subset X$ meßbar und $f \in T(X, E) \Rightarrow f|_Y \in T(Y, E)$ (in der Tat: $A \cap Y$ meßbar. $\mu(A \cap Y) \leq \mu(A) < \infty$, $\;A \cap Y = \bigcup\limits_{i=1}^{m} (A_i \cap Y)$ ist Partition, $f|_Y$

ist konstant auf $A_i \cap Y$, $f|_Y$ ist Null außerhalb $A \cap Y$).
Umgekehrt: $g \in T(Y, E)$, so setze man

$$f(x) := \begin{cases} g(x) & , \quad x \in Y \\ 0 & , \quad x \notin Y \end{cases}$$

Dann ist $f \in T(X, E)$.

Definition: Ist $Y \subset X$ und $f : X \to E$, so sei $f_Y : X \to E$,

$$f_Y(x) := \begin{cases} f(x) & , \quad x \in Y \\ 0 & , \quad x \notin Y \end{cases}$$

Bemerkung: Nach dem obigen gilt $f \in T(X, E) \Rightarrow f_Y \in T(X, E)$.

Satz 1: Die Menge $T(X, E)$ wird zu einem reellen Vektorraum unter komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation. Ist $f \in T(X, E)$, so ist $\|f\| : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x)\|$ in $T(X, E)$.

Beweis: Wir zeigen: $f, g \in T(X, E) \Rightarrow f + g \in T(X, E)$. Sei f Treppenfunktion bzgl. der Partition $A = \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$, $\mu(A) < \infty$ und g Treppenfunktion bzgl. der Partition $B = \bigcup\limits_{j=1}^{n} B_j$, $\mu(B) < \infty$. Es ist

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B) \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^{m} (A_i \backslash B) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n} (B_j \backslash A) \right) \cup \left(\bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j) \right) \end{aligned} \tag{4.2}$$

ist Partition von $A \cup B$, auch ist $A \cup B$ meßbar, $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) < \infty$, nach Voraussetzung sind f und g konstant auf jeder der in 4.2 vorkommenden Teilmengen ($f(x) = 0$ für $x \notin A$, $g(x) = 0$ für $x \notin B$), also auch $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, für $x \notin A \cup B$ gilt

$$(f + g)(x) = 0 + 0 = 0$$

Also gilt $f + g \in T(X, E)$.
Der Rest der Behauptung von Satz 1 ist klar.

Definition: Sei $f : X \to E$ Treppenfunktion bzgl. der Partition $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, A meßbar, $\mu(A) < \infty$. Dann definiert man das Integral von f als

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) \nu_i; \qquad (\nu := f(x), \ x \in A_i)$$

Man muß zeigen, daß das Integral wohldefiniert ist ! (Stichwort: Verfeinerungen).
Sei $A = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$ eine andere Zerlegung von A und f auch Treppenfunktion bzgl. letzterer Partition, so gilt (in offentsichtlicher Notation):

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) f(A_i) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) \right) f(A_i)$$

$$\left(A_i = A \cap A_i = \bigcup_{j=1}^{n} (A_i \cap B_j) \quad \text{(disjunkt)}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) f(A_i \cap B_j)$$

Genauso gilt (aus Symmetriegründen)

$$\sum_{j=1}^{n} \mu(B_j) f(B_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \mu(B_j \cap A_i) f(B_j \cap A_i)$$

(Gleichheit!) Daher hängt die Definition des Integrals nicht von der Auswahl der Partitionen von A ab. Sei f Treppenfunktion bzgl. $A = \bigcup A_i$, als auch bzgl. $B = \bigcup B_j$. Dann gilt

$$A = (A \backslash B) \cup (A \cap B) = (A \backslash B = \cup \left(\bigcup_{i,j} (A_j \cap B_j) \right)$$

Dies ist Partition von A und f ist konstant auf jeder vorkommenden Teilmenge, insbesondere ist $f(x) = 0$ für $x \notin B$.
Nach dem schon gezeigten gilt:

$$\begin{aligned} \sum \mu(A_i) f(A_i) &= \mu(A \backslash B) f(A \backslash B) + \sum_{i,j} \mu(A_i \cap B_j) f(A_i \cap B_j) \\ &= \sum \mu(A_i \cap B_j) f(A_i \cap B_j) \end{aligned}$$

Genauso ist

$$B = (B \backslash A) \cup (B \cap A) = (B \backslash A) \cup \left(\bigcup_{i,j} (B_j \cap A_i) \right).$$

$$\Rightarrow \sum \mu(B_j) f(B_j) = \sum_{i,j} \mu(A_i \cap B_j) f(A_i \cap B_j)$$

Also hängen die Definitionen des Integrals nicht von der Wahl von A ab.

Definition: Sei $A \subset X$ meßbar. Sei $f \in T(X, E)$. Dann definiert man das Integral von f über A als

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_X f_A \, \mathrm{d}\mu$$

(beachte $f_A \in T(X, E)$)

Satz 2: i) Die Abbildung $T(X, E) \to E, \ f \mapsto \int_X f \, \mathrm{d}\mu$ ist linear.

ii) Sind A, B meßbar und $A \cap B = \emptyset$, so gilt

$$\int_{A \cup B} f \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu + \int_B f \, \mathrm{d}\mu$$

iii) Sei $E = \mathbb{R}$. Gilt $f \leq g$ (d.h. $f(x) \leq g(x)\ \forall\, x \in X$), so ist

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X g \,\mathrm{d}\mu$$

Insbesondere $f \geq 0 \Rightarrow \int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq 0$.

iv) Sei $E = \mathbb{R}$. Sei $f \geq 0$ und $A \subset B$. Dann gilt

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_B f \,\mathrm{d}\mu$$

Beweis: i) Man wähle meßbares $A, \mu(A) < \infty,\ A = \bigcup_{i=1}^m A_i$ Partition, so daß sowohl f als auch g Treppenfunktionen bzgl. dieser Partition sind (s.Beweis von Satz 1). Dann ist

$$\begin{aligned}\int_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{i=1}^m \mu(A_i)(f+g)(A_i)\\ &= \sum_{i=1}^m \mu(A_i) f(A_i) + \sum_{i=1}^m g(A_i)\mu(A_i)\\ &= \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X g\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Daß $\int_X \lambda f \,\mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ ist, ist trivial.

ii)

$$\begin{aligned}\int_{A\cup B} f\,\mathrm{d}\mu &= \int_X f_{A\cup B}\,\mathrm{d}\mu = \int_X (f_A + f_B)\,\mathrm{d}\mu\\ &\qquad \text{denn } f_{A\cup B} = f_A + f_B \text{ wegen } A\cap B = \emptyset)\\ &\underbrace{=}_{i} \int_X f_A\,\mathrm{d}\mu + \int_X f_B\,\mathrm{d}\mu = \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_B f\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

iii)

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^m \mu(A_i) f(A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i) g(A_i) = \int_X g\,\mathrm{d}\mu$$

iv) Man schreibe $B = A \cup (B\backslash A)$ (disjunkt). Nach ii) gilt

$$\begin{aligned}\int_B f\,\mathrm{d}\mu &= \int_{A\cup(B\backslash A)} f\,\mathrm{d}\mu\\ &= \int_A f\,\mathrm{d}\mu + \int_{B\backslash A} f\,\mathrm{d}\mu\\ &\geq \int_A f\,\mathrm{d}\mu \qquad (\text{ wegen } f \geq 0 \text{ und iii})\end{aligned}$$

Der Raum $T(X, E)$ wird zu einem normierter linearen Raum durch die Definition

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} \|f(x)\| \qquad \text{„sup-Norm“}$$

Satz 3: Es gilt

$$\left\| \int_A f \,\mathrm{d}\mu \right\| \leq \int_A \|f\| \,\mathrm{d}\mu \leq \mu(A) \|f\|_\infty$$

(Man beachte $\|f\|$ ist die Funktion $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|f(x)\|$, es ist $\|f\| \in T(X, \mathbb{R})$ für $f \in T(X, E)$; $\|f\|_\infty = \sup -$Norm; ferner $0 \cdot \infty = 0$)

Beweis: Übungsaufgabe!

Für $f \in T(X, E)$ sei $\|f\|_1 := \int_A \|f\| \,\mathrm{d}\mu$.

Satz 4: Die Abbildung $f \mapsto \|f\|_1$ ist eine Seminorm auf $T(X, E)$. Diese heißt L^1-Seminorm.

Beweis: $\|f\|_1 \geq 0$ klar, wegen Satz 2 iii)
$\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \, \|f\|_1$ klar!
$\|f + g\|_1 \geq \|f\|_1 + \|g\|_1$ klar wegen $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (Satz 2)

Bemerkung:

i) Man mach sich (z.B. am Dirac-Maß) klar, daß die L^1-Seminorm i.a. keine Norm ist.

ii) Wir haben bis jetzt nirgends genutzt, daß μ σ-additiv ist (nur endliche Additivität wurde ausgenutzt).

Definition: Sei E ein seminormierter Raum mit Seminorm $\| \cdot \|$. Sei $\xi = (x_n)_{n \in N}$ eine Folge in E.

i) ξ heißt Cauchyfolge, falls $\forall \epsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - x_m\| < \epsilon \;\; \forall n, m > N$

ii) ξ heißt konvergent, falls $\exists x \in E$ mit $\forall \epsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - x\| < \epsilon \;\; \forall n > N$

iii) ξ heißt Nullfolge, falls man $x = 0$ in ii) wählen kann.

Bemerkung:

i) Ein Grenzwert einer konvergenten Folge ist keineswegs eindeutig bestimmt (man kann immer durch ein Element aus $E_0 := \{X \in E | \, \|x\|_1 = 0\}$ abändern).

ii) $\xi = (x_n)_{n \in N}$ ist Cauchyfolge (bzw. Nullfolge bzw. konvergent), falls die entsprechenden Aussagen für die Folge $(x_n + E_0)_{n \in N}$ in $E|_{E_0}$ gelten.

4.2 Die L^1-Vervollständigung

Nach Kapitel II, Bem. iv) nach Satz 3 Seite 9 definiert die Seminorm $\| \cdot \|_1$ eine Norm auf dem Quotientenraum $T(X, E)|_{T(X,E)_0}$, wobei $T(X, E)_0 = \{f \in T(X, E) | \, \|f\|_1 = 0\}$. Man kann daher die Vervollständigung $L^1(X, E) := \overline{T(X, E)|_{T(X,E)_0}}$ betrachten. Diese „enthält“ $T(X, E)|_{T(X,E)_0}$ „Norm-erhaltend“ als dichten Teilraum (Kapitel 2, Satz 3 Seite 9). Die lineare Abbildung $\int$ bildet $T(X, E)_0$ auf Null ab (folgt sofort aus Satz 3 aus Kapitel 4.1), daher faktorisiert $\int$ $T(X, E)_0$ (loc.cit.). Ist daher E ein Banachraum, so besitzt $\int$ eine eindeutig bestimmte stetige lineare Fortsetzung auf $L^1(X, E)$. Man kann daher auf $L^1(X, E)$ Integrationtheorie betreiben. Welche Eigenschaften hat das Integral?

Problem: $L^1(X, E)$ ist „abstrakt" definiert (Cauchyfolgen modulo Nullfolgen). Frage: Gibt es einen Raum von Funktionen $X \to E$, welcher $L^1(X, E)$ möglichst nahe kommt?

Wir werden im folgenden immer $E = \mathbb{R}$ annehmen (und dann oft das Symbol „$\mathbb{R}$" in den Notationen weglassen). Fast alle Resultate (ausgenommen natürlich Positivitätsaussagen) gelten auch allgemeiner für einen beliebigen Banachraum E.

Definition: Sei $\mathcal{L}^1(X)$ die Menge aller Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$, derart daß es eine L^1-Cauchyfolge $(f_n)_{n \in N}$ in $T(X) = T(X, \mathbb{R})$ gibt, die fast überall punktweise gegen f konvergiert, d.h. es gibt eine Nullmenge A, so daß $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \notin A$.

Satz 1: $\mathcal{L}^1(X)$ ist eine reeller Vektorraum unter komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation. Es gilt $T(X) \subset \mathcal{L}^1(X)$.

Beweis: Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(X)$. Dann gibt es also L^1-Cauchyfolgen $(f_n)_{n \in N}$ und $(g_n)_{n \in N}$ und Nullmengen A und B, so daß $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \;\; \forall\, x \notin A$ und $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) \;\; \forall\, x \notin B$. Da $(f_n)_{n \in N}$ und $(g_n)_{n \in N}$ L^1-Cauchyfolgen sind, ist auch $(f_n + g_n)_{n \in N}$ eine L^1-Cauchyfolge (klar!). Ferner gilt

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x) + g_n(x)) = f(x) + g(x) \;\; \forall\, x \notin A \cup B$$

und $A \cup B$ ist wiederum Nullmenge. Also gilt $f + g \in \mathcal{L}^1(x)$. Genauso zeigt man $\lambda f \in \mathcal{L}^1(X)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{L}^1(X)$. Daß $T(X) \subset \mathcal{L}^1(X)$ ist klar (man nehme $f_n = f \; \forall\, n$, wenn $f \in T(X)$).

Ziel: Fortsetzung des Integrals von $T(X)$ auf $\mathcal{L}^1(X)$!

Lemma 1: Sei $(f_n)_{n \in N}$ eine L^1-Cauchyfolge in $T(X)$. Dann gibt es eine Teilfolge von $(f_n)_{n \in N}$, die fast überall punktweise konvergiert, und die zusätzlich noch folgende Eigenschaft hat:
ist $\epsilon > 0$, so existiert eine meßbare Menge Z mit $\mu(Z) < \epsilon$, so daß diese Teilfolge *gleichmäßig* absolut außerhalb von Z konvergiert.

Beweis: Da $(f_n)_{n \in N}$ L^1-Cauchyfolge ist, gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $N_k \in \mathbb{N}$, so daß

$$||f_m - f_n||_1 < \frac{1}{2^{2k}} \quad \forall\, m, n \geq N_k$$

Man setze $g_k := f_{N_k}$ $(k \in \mathbb{N})$, wobei die N_k induktiv definiert werden mit $N_1 < N_2 < \ldots$.Wir werden zeigen, daß die Reihe

$$g_1(x) + \sum_{k\geq 1} \big(g_{k+1}(x) - g_k(x)\big) \tag{4.3}$$

fast überall absolut konvergiert, und daß die Konvergenz gleichmäßig ist mit eventueller Ausnahme auf Mengen beliebig kleinen Maßes. Dies beweist dan die Behauptung von Lemma 1, denn die Partialsummen der Reihe 4.3 sind ja $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x), \ldots$.Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$Y_n := \{x \in X \mid |g_{n+1}(x) - g_n(x)| \geq \frac{1}{2^n}\}$$

Da g_{n+1} und g_n Treppenfunktionen sind, ist auch $|g_{n+1}-g_n|$ eine Treppenfunktion. Es gibt also eine Partition $A = \bigcup_{i=1} A_i$, A meßbar,$\mu(A) < \infty$, so daß $|g_{n+1} - g_n|$ auf jedem A_i konstant ist und außerhalb von A verschwindet. Da $\frac{1}{2^n} > 0$, hat daher Y_n endliches Maß. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^n}\mu(Y_n) &= \int_X \frac{1}{2^n} 1_{Y_n}\, \mathrm{d}\mu \\
&\leq \int_X |g_{n+1} - g_n|\, \mathrm{d}\mu \quad \text{(4.1,Satz 2,ii)} \\
&= \|g_{n+1} - g_n\| \\
&< \frac{1}{2^{2n}} \qquad\qquad \text{(Nach Konstruktion der Folge } (g_n)_{n\in N}\text{)}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mu(Y_n) < \frac{1}{2^n}$
Sei $Z_n := Y_n \cup Y_{n+1} \cup \ldots$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mu(Z_n) &\leq \sum_{m\geq n} \mu(Y_m) \\
&< \sum_{m\geq n} \frac{1}{2^m} \\
&= \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

Für $x \notin Z_n$ gilt, falls $m \geq n$

$$|g_{n+1}(x) - g_n(x)| < \frac{1}{2^m}$$

Daher gilt

$$\sum_{m\geq n} |g_{n+1}(x) - g_m(x)| < \sum_{m\geq n} \frac{1}{2^m} < \infty \tag{4.4}$$

daher ist

$$g_1(x) + \sum_{m\geq 1} (g_{m+1}(x) - g_m(x)) \tag{4.5}$$

für $x \notin Z_n$ gleichmäßig absolut konvergent (Weierstraß'scher Majorantentest). Man beachte, daß 4.5 aus 4.4 durch Hinzufügen von endlich vielen Treppenfunktion entsteht, und Treppenfunktioen sind beschränkt. Man beachte außerdem: $\mu(Z_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$ ist beliebig klein, wenn n beliebig groß. Sei schließlich $Z := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n$. Dann ist $\mu(Z) \leq \mu(Z_n) < \frac{1}{2^{n-1}}\ \forall n \in \mathbb{N}$, also gilt $\mu(Z) = 0$. Ist $x \notin Z$, so ist $x \notin Z_n$ für wenigstens ein n, also konvergiert die Reihe 4.4 für dieses x absolut nach dem schon Bewiesenen. q.e.d

Lemma 2: Seien $(g_n)_{n \in N}$ und $(h_n)_{n \in N}$ zwei L^1-Cauchyfolgen in $T(X)$, die fast überall punktweise gegen dieselbe Grenzfunktion konvergieren. Dann existieren

$$\lim_{n \to \infty} \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} \int_X h_n \, \mathrm{d}\mu$$

und die beiden Limites sind gleich. Ferner ist $(g_n - h_n)_{n \in N}$ eine L^1-Nullfolge.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu - \int_X g_m \, \mathrm{d}\mu \right| &= \left| \int_X (g_n - g_m) \, \mathrm{d}\mu \right| \\ &\leq \int_X |g_n - g_m| \, \mathrm{d}\mu \; = \; \|g_n - g_m\|_1 \end{aligned}$$

Da $(g_n)_{n \in N}$ eine L^1-Cauchyfolge ist, ist auch $\left(\int_X g_n \, \mathrm{d}\mu\right)_{n \in N}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$; da $\mathbb{R}$ vollständig, konvergiert daher $\left(\int_X g_n \, \mathrm{d}\mu\right)_{n \in N}$. Genauso konvergiert $\left(\int_X h_n \, \mathrm{d}\mu\right)_{n \in N}$. Sei $f_n := g_n - h_n$. Dann ist $(f_n)_{n \in N}$ eine L^1-Cauchyfolge, die nach Voraussetzung fast überall, d.h. außerhalb einer Nullmenge Z_1, punktweise gegen Null konvergiert. Wir müssen zeigen, daß $(f_n)_{n \in N}$ eine L^1-Nullfolge ist, d.h. $(\|f_n\|_1)_{n \in N}$ ist Nullfolge. Dann folgt auch

$$\lim_{n \to \infty} \int_X g_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X h_n \, \mathrm{d}\mu \quad \text{denn}$$
$$\left| \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f_n| \, \mathrm{d}\mu = \|f_n\|_1$$

Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert N, so daß

$$\|f_m - f_n\|_1 < \epsilon \qquad \forall \, m, n \geq N \tag{4.6}$$

Sei A eine meßbare Menge mit $\mu(A) < \infty$, so daß die Treppenfunktion f_N außerhalb von A Null ist. Für $n \geq N$ gilt dann

$$\begin{aligned} \int_{A^c} |f_n| \, \mathrm{d}\mu &= \int_{A^c} |f_n - f_N| \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \int_X |f_n - f_N| \, \mathrm{d}\mu = \|f_n - f_N\|_1 < \epsilon \end{aligned}$$

Nach Lemma 1 existiert eine Teilfolge $(f_{n_\nu})_{\nu \in N}$ und eine meßbare Menge Z mit

$$\mu(Z) < \frac{\epsilon}{1 + \|f_N\|_\infty} \tag{4.7}$$

so daß $(f_{n_\nu})_{\nu \in N}$ gleichmäßig auf $X \backslash Z$ (also auch auf $A \backslash Z$) konvergiert, also auf $A \backslash (Z \cup Z_1)$ gleichmäßig gegen Null konvergiert. Für ν groß gilt daher

$$\int_{A \backslash (Z \cup Z_1)} |f_{n_\mu}| \, \mathrm{d}\mu \leq \mu\big(A \backslash (Z \cup Z_1)\big) \|f_{n_\nu}\|_\infty < \epsilon \quad \text{(4.1 Satz 3)}$$

Für ν groß gilt ferner

$$\begin{aligned}
\int_{Z\cup Z_1} |f_{n_\nu}|\,\mathrm{d}\mu &= \int_{Z\cup Z_1} |(f_{n_\nu} - f_N) + f_N|\,\mathrm{d}\mu \\
&\le \int_{Z\cup Z_1} |f_{n_\nu} - f_n|\,\mathrm{d}\mu + \int_{Z\cup Z_1} |f_N|\,\mathrm{d}\mu \\
&\le \int_X |f_{n_\nu} - f_N|\,\mathrm{d}\mu + \mu(Z\cup Z_1)\cdot \|f_N\|_\infty \\
&= \|f_{n_\nu} - f_N\|_1 + \mu(Z)\,\|f_N\|_\infty \qquad \text{wegen } Z_1 \text{ Nullmenge, ist } \mu(Z) = \mu(Z\cup Z_1) \\
&< \epsilon + \frac{\epsilon}{1+\|f_N\|_\infty}\|f_N\|_\infty \qquad \text{wegen 4.7} \\
&\le \epsilon + \epsilon = 2\epsilon
\end{aligned}$$

Zusammen erhält man also für ν groß

$$\begin{aligned}
\|f_{n_\nu}\|_1 &= \int_X |f_{n_\nu}|\,\mathrm{d}\mu \\
&= \left(\int_{A^c} \int_{A\setminus(Z\cup Z_1)} + \int_{Z\cup Z_1}\right) |f_{n_\nu}|\,\mathrm{d}\mu \\
&\le \epsilon + \epsilon + 2\epsilon = 4\epsilon
\end{aligned}$$

Daher ist $(\|f_{n_\nu}\|_1)_{\nu\in N}$ eine Nullfolge.
Es gilt

$$\big|\,\|f_m\|_1 - \|f_n\|_1\big| \le \|f_m - f_n\|_1$$

Da $(f_n)_{n\in N}$ eine L^1-Cauchyfolge ist, ist auch $(\|f_n\|_1)_{n\in N}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$; da $\mathbb{R}$ vollständig, existiert daher $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\|_1$. Da $\lim\limits_{\nu\to\infty}\|f_{n_\nu}\|_1 = 0$ folgt somit auch $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\|_1 = 0$.

Definition: Sei $f \in \mathcal{L}^1(X)$. Dann definiert man das Integral von f über X als

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu := \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$$

wobei $(f_n)_{n\in N}$ irgendeine L^1-Cauchyfolge in $T(X)$ ist, die fast überall punktweise gegen f konvergiert.

Bemerkung: Nach Lemma 2 ist $\int_X f\,\mathrm{d}\mu$ wohldefiniert.

Sprechweise: Ist $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und $(f_n)_{n\in N}$ eine L^1-Cauchyfolge in $T(X)$, die fast überall gegen f punktweise konvergiert, so sagen wir auch, daß $(f_n)_{n\in N}$ die Funktion f approximiert.

Lemma 3: Sei $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und $(f_n)_{n\in N}$ eine f approximierende Folge. Dann ist auch $|f| \in \mathcal{L}^1(X)$ und $(|f_n|)_{n\in N}$ it eine $|f|$ approximierende Folge. Insbesondere gilt

$$\int_X |f|\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X |f_n|\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\|f_n\|_1$$

Beweis: Da $(f_n)_{n\in N}$ fast überall gegen f konvergiert, konvergiert $(|f_n|)_{n\in N}$ fast überall gegen $|f|$. Ferner

$$\begin{aligned}
\|\,|f_m| - |f_n|\,\| &= \int_X \big||f_m| - |f_n|\big|\,\mathrm{d}\mu \\
&\le \int_X |f_m - f_n|\,\mathrm{d}\mu \quad \text{denn } \big|\,|a| - |b|\,\big| < |a-b| \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R} \\
&= \|f_m - f_n\|_1
\end{aligned}$$

Daher ist $(|f_n|)_{n\in N}$ L^1-Cauchyfolge.

Definition: Für $f \in \mathcal{L}^1(X)$ setze man

$$\|f\|_1 := \int_X |f|\,\mathrm{d}\mu.$$

Satz 2: Die Abbildung $f \mapsto \|f\|_1$ ist eine Seminorm auf $\mathcal{L}^1(X)$, genannt die L^1-Seminorm.

Beweis: trivial!!

Erinnerung: $T(X)_0 = \{f \in T(X) \mid \|f\|_1 = 0\}$ bzw. $\mathcal{L}^1(X)_0 = \{f \in \mathcal{L}^1(X) \mid \|f\|_1 = 0\}$ sind Teilräume von $T(X)$ bzw. $\mathcal{L}^1(X)$, und die Quotientenräume $T(X)/_{T(x)_0}$ bzw. $\mathcal{L}^1(X)/_{\mathcal{L}^1(X)_0}$ sind normierte Vektorräume unter $\|\cdot\|_1$.

Satz 3: Sei $L^1(X) = \overline{T(X)/_{T(X)_0}}$ die Vervollständigung von $T(X)/_{T(X)_0}$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^1(X)/_{\mathcal{L}^1(X)_0} &\to L^1(X) \\
f + \mathcal{L}^1(X)_0 &\mapsto \overline{(f_n + T(X)_0)_{n\in\mathbb{N}}}
\end{aligned}$$

wobei $(f_n)_{n\in N}$ eine f approximierende Folge in $T(X)$ ist, $\overline{(f_n + T(X)_0)_{n\in\mathbb{N}}}$ die Klasse der Cauchyfolge $(f_n + T(X)_0)_{n\in N}$ in $T(X)/_{T(X)_0}$ ist, ist wohldefiniert und ein linearer Isomorphismus, der Norm-erhaltend ist.

Beweis: Wir betrachten zunächst die Abbildung

$$\varphi : \mathcal{L}^1(X) \to L^1(X),\ f \mapsto \overline{(f_n + T(X)_0)_{n\in\mathbb{N}}}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn sind $(f_n)_{n\in N}$ und $(g_n)_{n\in N}$ zwei f approximierende Folgen, so ist nach Lemma 2 $(f_n - g_n)_{n\in N}$ eine L^1-Nullfolge, also

$$\overline{(f_n + T(X)_0)_{n\in\mathbb{N}}} = \overline{(g_n + T(X)_0)_{n\in\mathbb{N}}}$$

Die Abbildung φ ist auch linear (trivial). Sei $\overline{(g_n + T(X)_0)_{n\in\mathbb{N}}}$ ein Element in $L^1(X)$, d.h. $(g_n)_{n\in N}$ ist eine L^1-Cauchyfolge in $T(X)$. Nach Lemma 1 existiert daher eine Teilfolge $(g_{n_\nu})_{\nu\in N}$, die außerhalb einer Nullmenge Z punktweise konvergiert. Sei $g(x)$ $(x \notin Z)$ der Limes und sei $g(x) := 0$ ($f \in Z$). Per Konstruktion ist dann $g \in \mathcal{L}^1(X)$ ($(g_{n_\nu})_{\nu \in N}$ approximiert g), und es gilt

$$\varphi(g) = \overline{(g_n + T(X)_0)_{n \in \mathbb{N}}},$$

denn $(g_\nu - g_{n_\nu})_{\nu \in N}$ ist eine L^1-Nullfolge. Daher ist φ surjektiv. Sei $f \in ker\,\varphi$, also $\varphi(f) = 0$. D.h. $(f_n)_{n \in N}$ ist eine L^1-Nullfolge, also $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \|f\|_1$ (Lemma 3). Also ist $f \in \mathcal{L}^1(X)_0$. Daß $\mathcal{L}^1(X)_0 \subset ker\,\varphi$, ist trivial. Also ist $ker\,\varphi = \mathcal{L}^1(X)_0$. Nach dem Homomorphiesatz erhält man daher den gewünschten linearen Isomorphismus. Nach Definition ist $\|\varphi(f)\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \|f\|_1$. $\square$

Korollar: $(*)$ $\mathcal{L}^1(X)$ ist vollständig unter der Seminorm $\|\cdot\|_1$.

Beweis: $L^1(X)$ ist vollständig, nach Satz 3 daher auch $\mathcal{L}^1(X)/_{\mathcal{L}^1(X)_0}$, also auch $\mathcal{L}^1(X)$.

Bemerkung: 1) $(*)$ bedeutet, daß $\mathcal{L}^1(X)$unter der L^1-Seminorm vollständig ist.

2) Was noch fehlt, ist eine „schöne“ funktionentheoretische Beschreibung von $\mathcal{L}^1(X)_0$. Wir werden zeigen, daß $\mathcal{L}^1(X)_0$ aus genau denjenigen Funktionen in $\mathcal{L}^1(X)$besteht, die fast überall Null sind.

4.3 Elementare Eigenschaften des Integrals

Satz 1: i) Sei $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und $g : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die fast überall mit f übereinstimmt. Dann ist $g \in \mathcal{L}^1(X)$ und

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X g \,\mathrm{d}\mu, \qquad \|f\|_1 = \|g\|_1$$

ii) Sei $f \in \mathcal{L}^1(X)$. Dann gibt es eine Nullmenge Z, so daß für die Funktion $g : X \to \mathbb{R}$,

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \notin Z \\ 0 & \text{falls } x \in Z \end{cases}$$

gilt: g ist meßbar, $g \in \mathcal{L}^1(X)$, $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X g \,\mathrm{d}\mu$, $\|f\|_1 = \|g\|_1$.

Beweis:

i) Es gilt nach Voraussetzung $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \notin Z$, wobei Z eine Nullmenge ist. Sei $(f_n)_{n \in N}$ eine f approximierende Folge in $T(X)$, es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall\, x \notin Z_1$, wobei $Z_!$ Nullmenge. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x) \quad \forall x \notin Z_1 \cup Z$$

also ist $g \in \mathcal{L}^1(X)$, und nach Definition des Integrals gilt

$$\int_X g \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu, \qquad (\mu(Z_1 \cup Z) = 0),$$

genauso $\|g\|_1 = \|f\|_1$.

ii) Sei $(f_n)_{n \in N}$ eine f approximierende Folge in $T(X)$; also gibt es insbesondere eine Nullmenge Z, so daß

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X \backslash Z$$

. Man setze

$$g_n(x) := \begin{cases} f_n(x) & \text{falls } x \notin Z \\ 0 & \text{falls } x \in Z \end{cases}$$

Dann ist $g_n = f_{n_{X\backslash Z}}$, also ist $g_n \in T(X)$ (siehe Kapitel 4.1)
Nach Konstruktion gilt

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) \quad (\forall x \in X)$$

Da der punktweise Limes einer Folge von meßbaren Funktionen wieder meßbar ist (Kapitel 3.2, Satz 2) und g_n als Funktion in $T(X)$ meßbar, ist auch g meßbar. Da f und g außerhalb einer Nullmenge übereinstimmen, folgen die übrigen Aussagen aus i).

Lemma: Sei $A \subset X$ meßbar und $f \in \mathcal{L}^1(X)$. Dann ist auch $f_A \in \mathcal{L}^1(X)$. (Erinnerung:

$$f_A(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

Beweis: Sei $(f_n)_{n \in N}$ eine f approximierende Folge. Es gelte $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ $\forall x \notin Z$, wobei Z Nullmenge. Dann gilt $f_{n_A}(x) \to f_A(x)$ für $x \notin A \cap Z$, und $\mu(A \cap Z) = 0$. Es gilt ferner

$$\begin{aligned} \|f_{m_A} - f_{n_A}\|_1 &= \int_X |f_{m_A} - f_{n_A}| \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \int_X |f_m - f_n| \,\mathrm{d}\mu = \|f_m - f_n\|_1 \end{aligned}$$

Da $(f_n)_{n \in N}$ L^1-Cauchyfolge, ist somit auch $(f_{n_A})_{n \in N}$ L^1-Cauchyfolge. $\square$

Definition: Sei $A \subset X$ meßbar und $f \in \mathcal{L}^1(X)$. Dann setzt man

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu := \int_X f_A \,\mathrm{d}\mu$$

Satz 2: i) Die Abbildung $\mathcal{L}^1(X) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ ist linear.

ii) Ist $f, g \in \mathcal{L}^1(X)$, so ist auch $\sup\{f,g\}$ und $\inf\{f,g\}$ in $\mathcal{L}^1(X)$, $\sup\{f,g\}(x) := \sup\{f(x), g(x)\}$ und $\inf\{f,g\{(x) := \inf\{f(x), g(x)\}$.

iii) ist $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und sind $A, B \subset X$ meßbar, $A \cap B = \emptyset$, so gilt

$$\int_{A\cup B} f \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu + \int_B f \,\mathrm{d}\mu$$

iv) ist $f \leq g$, so gilt

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X g \,\mathrm{d}\mu$$

Insbesondere ist $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq 0$, wenn $f \geq 0$.

v) Ist $A \subset B$ und $f \geq 0$, so gilt

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_B f \,\mathrm{d}\mu$$

vi) Ist $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und $A \subset X$ meßbar, so gilt

$$\left| \int_A f \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int_A |f| \,\mathrm{d}\mu \leq \mu(A) \|f\|_\infty$$

Beweis: Übungsaufgabe! Man benutze Kapitel 4.1 Satz 2 und 3
Hinweis zu ii): $a, b \in \mathbb{R}$, so ist

$$\sup\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2},$$
$$\inf\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2}$$

Satz 3: Sei $(f_n)_{n \in N}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(X)$, die L^1-konvergent ist gegen $f \in \mathcal{L}^1(X)$. Dann existiert $\lim\limits_{n \to \infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$ und ist gleich $\int_X f \,\mathrm{d}\mu$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \left| \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu - \int_X f \,\mathrm{d}\mu \right| &= \left| \int_X (f_n - f) \,\mathrm{d}\mu \right| \\ &\leq \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = \|f_n - f\|_1 \to 0 \ (n \to \infty) \end{aligned}$$

nach Voraussetzung, siehe Satz 2 □

4.4 Weitere Eigenschaften des Integrals

Lemma:

i) Sei $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und f meßbar. Sei $c > 0$. Dann ist $S_c := \{x \in X \mid |f(x)| \geq c\}$ meßbar und hat endliches Maß.

ii) Sei $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und f meßbar. Dann verschwindet f außerhalb einer σ-endlichen Menge. Dabei heißt eine meßbare Menge $A \subset X$ σ-endlich, falls A abzählbare Vereinigung von meßbaren Mengen endlichen Maßes ist.

Beweis:

i) Da f meßbar, ist $|f|$ meßbar, daher ist $S_c = |f|^{-1}([c,\infty))$. Daher meßbar, denn $[c,\infty)$ ist meßbar.
Da $f \in \mathcal{L}^1(X)$, existiert eine f approximierende Folge in $T(X)$. Geht man zu einer Teilfolge über, so kann man von vornherein annehmen (4.2 Lemma 1), daß $(f_n)_{n\in N}$ punktweise gleichmäßig gegen f außerhalb von Z konvergiert, wobei $Z \subset X$ meßbar mit $\mu(Z) < 1$ ist. Für n genügend groß, gilt dann für alle $x \in S_c \backslash Z$:

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |f(x) - \big(f(x) - f_n(x)\big)| \\ &\geq |f(x)| - |f(x) - f_n(x)| \\ &\geq c - \frac{c}{2} \\ &= \frac{c}{2}, \end{aligned}$$

also gilt

$$S_c \backslash Z \subset |f_n|^{-1}([\frac{c}{2},\infty))$$

Da f_n Treppenfunktion und $c > 0$ ist, hat $|f_n|^{-1}([\frac{c}{2},\infty))$ endliches Maß, also folgt $\mu(S_c\backslash Z) < \infty$, also auch $\mu(S_c) = \mu((S_c\backslash Z)\cup Z) = \mu(S_c\backslash Z) + \mu(Z) < \infty$. $\square$

ii) Nach i) ist $S_{\frac{1}{n}}$ $(n \in \mathbb{N})$ meßbar und hat endliches Maß, daher ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{\frac{1}{n}}$ σ-endlich. Aber es gilt $f(x) = 0$ für $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{\frac{1}{n}}$.

Satz 1: Sei $(f_n)_{n\in N}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(X)$, die gegen $f \in \mathcal{L}^1(X)$ L^1-konvergent ist. Dann gibt es eine Teilfolge, die fast überall punktweise gegen f konvergiert, und für die zusätzlich noch gilt: Ist $\epsilon > 0$, so existiert eine meßbare Menge Z mit $\mu(Z) < \epsilon$, so daß die Teilfolge außerhalb von Z gleichmäßig konvergiert.

Bemerkung: Spezialisiert man, indem man für $(f_n)_{n\in N}$ eine Cauchyfolge in $T(X)$ nimmt (diese konvergiert bzgl. L^1, denn $\mathcal{L}^1(X)$ist vollständig), so erhält man insbesondere die Aussage von 4.2 Lemma 1 zurück.

Beweis: Ersetzt man f_n durch $f_n - f$, so sieht man, daß es genügt, Satz 1 für $f = 0$ zu zeigen. Geht man gegebenenfalls zu einer Teilfolge von $(f_n)_{n\in N}$ über, so kann man von vorneherein annehmen, daß

$$||f_n||_1 < \frac{1}{2^{2n}} \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

(siehe Beweis von Lemma 1). Nach 4.3 Satz 1 ii) kann man jedes f_n auf einer Nullmenge so abändern, daß die abgeänderte Funktion meßbar und in $\mathcal{L}^1(X)$ist und gleiches Integral, sowie gleiche Seminorm wie f_n hat. Da die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, kann man alle f_n simultan auf einer Nullmenge abändern, so daß obige Eigenschaft für alle f_n gelten. Daher genügt es, die Aussage des Satzes unter der zusätzlichen Voraussetzung zu zeigen, daß alle f_n meßbar sind.

Sei $Y_n := \{x \in X \mid |f_n(x)| \geq \frac{1}{2^n}\}$. Nach dem Lemma ist dann Y_n meßbar und hat endliches Maß. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n}\mu(Y_n) &= \int_X \frac{1}{2^n} 1_{Y_n}\, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \int_X |f_n|\, \mathrm{d}\mu \\ &= \|f_n\|_1 < \frac{1}{2^{2n}} \\ \Rightarrow \quad \mu(Y_n) &< \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Sei $Z_n := Y_n \cup Y_{n+1} \cup \ldots$. Dann ist

$$\mu(Z_n) \leq \sum_{m \geq n} \mu(Y_m) < \sum_{m \geq n} \frac{1}{2^m} \underbrace{=}_{\text{geom. Reihe}} \frac{1}{2^{n-1}}$$

Sei $x \notin Z_n$, also $x \notin Y_m$ für $m \geq n$. Nach Definition ist dann $|f_m(x)| < \frac{1}{2^m}$ $(\forall m \geq n)$, also konvergiert $(f_n)_{n \in N}$ außerhalb von Z_n gleichmäßig gegen Null. Sei $Z := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_n$. Dann ist $Z \subset Z_n$ $\forall n$, also $\mu(Z) \leq \mu(Z_n) < \frac{1}{2^{n-1}}$ also $\mu(Z) = 0$. Ist $x \notin Z$, so ist $x \notin Z_n$ für mindestens ein n, also ist $\big(f_m(x)\big)_{m \in \mathbb{N}}$ konvergent nach dem schon Bewiesenen.

Korollar 1: Sei $f \in \mathcal{L}^1(X)$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(X)_0$ (d.h. $\|f\|_1 = 0$) genau dann, wenn f fast überall auf X verschwindet.

Beweis: „$\Leftarrow$" Sei f fast überall gleich Null. Dann ist die konstante Folge $(0)_{n \in N}$ eine f approximierende Folge, also gilt

$$\|f\|_1 = \lim_{n \to \infty} \|0\|_1 = 0$$

„$\Rightarrow$" Sei $\|f\|_1 = 0$. Dann ist die konstante Folge $(0)_{n \in N}$ L^1-konvergent gegen f, also existiert nach Satz 1 eine Teilfolge, die fast überall punktweise gegen f konvergiert. Daher ist f fast überall gleich Null.

Bemerkung: Zusammenfassend haben wir gezeigt, daß $L^1(X)$ Norm-erhaltend isomorph zu $\mathcal{L}^1(X)/\{f \in \mathcal{L}^1(X) \mid f \text{ ist fast überall gleich Null}\}$ ist.

Korollar 2: Sei $(f_n)_{n \in N}$ eine L^1-Cauchyfolge in $\mathcal{L}^1(X)$, die fast überall punktweise gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und $(f_n)_{n \in N}$ ist L^1-konvergent gegen f.

Satz 2: („Satz von der monotonen Konvergenz")
Sei $(f_n)_{n \in N}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(X)$, die monoton wachsend ist (d.h. $f_n \leq f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$) bzw monoton fallend ist (d.h. $f_n \geq f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$). Die Folge der Integrale $\left(\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu\right)_{n \in N}$ sei nach oben bzw. nach unten beschränkt. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{L}^1(X)$, derart daß $(f_n)_{n \in N}$ sowohl L^1-konvergent also auch fast überall punktweise konvergent gegen f ist.

Bemerkung: Satz 2 heißt auch in der Literatur „Satz von Beppo Levi".

Beweis: Wir betrachten nur den Fall, daß $(f_n)_{n \in N}$ monoton wachsend ist (der andere Fall geht genauso, oder man ersetze f_n durch $-f_n$).

Wegen $f_n \leq f_{n+1}$ ist $\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f_{n+1} \,\mathrm{d}\mu \ \forall n$. Die Folge der Integrale ist also monoton wachsend und nach Voraussetzung nach oben beschränkt, also konvergent (nach dem Satz von der monotonen Folge, Analysis 1) und konvergiert gegen ihre kleinste obere Schranke. Insbesondere ist $\left(\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu\right)_{n \in N}$ eine Cauchyfolge. Es gilt

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_X |f_m - f_n| \,\mathrm{d}\mu$$

ohne Einschränkung kann man $m \geq n$ annehmen

$$\begin{aligned}
&= \int_X (f_m - f_n) \,\mathrm{d}\mu \qquad (\text{wegen } f_m \geq f_n \ \forall m \geq n) \\
&= \int_X f_m \,\mathrm{d}\mu - \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \\
&= \left| \int_X f_m \,\mathrm{d}\mu - \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \right|
\end{aligned}$$

Da $\left(\int_X f_n \,\mathrm{d}\mu\right)_{n \in N}$ Cauchyfolge, ist also auch $(f_n)_{n \in N}$ eine L^1-Cauchyfolge. Da $\mathcal{L}^1(X)$vollständig, existiert also $f \in \mathcal{L}^1(X)$, so daß $(f_n)_{n \in N}$ L^1-konvergent gegen f ist. Nach Satz 1 gibt es eine Teilfolge $(f_{n_\nu})_{\nu \in N}$, die fast überall punktweise gegen f konvergiert. Insbesondere ist $(f_{n_\nu})_{\nu \in N}$ für fast alle x beschränkt. Da $(f_{n_\nu}(x))_{\nu \in N}$ monoton wachsend ist, konvergiert nach dem Satz von der monotonen Folge $(f_{n_\nu}(x))_{\nu \in N}$ gegen ihre kleinste obere Schranke, also muß diese gleich $f(x)$ sein. Da $(f_n)_{n \in N}$ monoton wachsend und die kleinste obere Schranke einer monoton wachsenden, beschränkten Folge gleich der kleinsten oberen Schranke jeder Teilfolge ist, konvergiert nach dem Satz von der monotonen Folge $(f_n(x))_{n \in N}$ (für fast alle x) gegen $f(x)$. $\square$

Korollar: Sei $(f_n)_{n \in N}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(X)$. Es gebe $g \in \mathcal{L}^1(X)$ mit $|f_n| \leq g \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$ (definiert durch $(\sup_{n \in \mathbb{N}})(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}}\{f_n(x)\}$) und $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ (definiert analog) in $\mathcal{L}^1(X)$und es gilt

$$\begin{aligned}
\int_X \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \,\mathrm{d}\mu &\geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \right\}, \\
\int_X \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n \,\mathrm{d}\mu &\leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \right\}
\end{aligned}$$

Beweis: Übungsaufgabe!

Es genügt den Fall „sup“ zu betrachten. Man betrachte die Folge $g_n := \sup\{f_1, \ldots, f_n\}$ und wende hierauf den Satz von der monotonen Konvergenz an!

4.5 Das Lemma von Fatou und der Satz von der dominierten Konvergenz. Folgerungen

Problem: Sei $(f_n)_{n\in N}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(X)$, die fast überall punktweise konvergiert. Unter welchen Bedingungen ist das $f \in \mathcal{L}^1(X)$? Unter welchen Bedingungen ist zusätzlich auch noch $(f_n)_{n\in N}$ L^1-konvergent gegen f, so daß also insbesondere gilt

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu \qquad \text{(siehe 4.3 Satz 3)?}$$

Satz 1: („Lemma von Fatou")
Sei $(f_n)_{n\in N}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(X)$mit $f_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Es gebe $C \geq 0$, so daß $\|f_n\|_1 \leq C$ $\forall n \in \mathbb{N}$, und $(f_n)_{n\in N}$ konvergiere fast überall punktweise gegen $f: X \to \mathbb{R}$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und $\int_X f\,\mathrm{d}\mu \leq C$.

Bemerkung: Es wird *nicht* behauptet, daß $(f_n)_{n\in N}$ bzgl. L^1 gegen f konvergiert. Dies ist i.a. auch falsch.

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Für $m \in \mathbb{N}$ setze man

$$g_m := \inf\{f_k, f_{k+1}, \ldots, f_{k+m}\}$$

Dann ist $g_m \in \mathcal{L}^1(X)$ (4.3 Satz 2 ii)). Ferner ist $(g_m)_{n\in N}$ monoton fallend und wegen $f_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $\int_X g_m\,\mathrm{d}\mu \geq 0$. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gibt es $g \in \mathcal{L}^1(X)$, so daß $(g_m)_{n\in N}$ bzgl. der L^1-Seminorm und auch fast überall punktweise gegen g konvergiert. Für alle $x \in X$ ist aber

$$\lim_{m\to\infty} g_m(x) = \inf_{m\geq k}\{f_m\}(x),$$

also stimmt die Funktion $\inf_{m\geq k}\{f_m\}$ fast überall mit g überein, also ist $\inf_{m\geq k}\{f_m\}$ in $\mathcal{L}^1(X)$(4.3 Satz 1i)), und es gilt

$$\int_X g\,\mathrm{d}\mu = \int_X \inf_{m\geq k}\{f_m\}\,\mathrm{d}\mu = \lim_{m\to\infty}\int_X \inf\{f_k, \ldots, f_{k+m}\}\,\mathrm{d}\mu$$

Man setze $h_k := \inf_{m\geq k}\{f_m\}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $h_k \leq h_l$ für $k \leq l$, d.h. $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend. Es gilt ferner

$$\inf\{f_k, \ldots, f_{k+m}\} \leq f_k \qquad \forall m \in \mathbb{N} \;\; \text{also folgt}$$

$$\int_X \inf\{f_k, \ldots, f_{k+n}\}\,\mathrm{d}\mu \leq \int_X f_k\,\mathrm{d}\mu = \int_X |f_k|\,\mathrm{d}\mu = \|f_k\|_1 \leq C$$

nach Voraussetzung.

$$\Rightarrow \int_X h_k\,\mathrm{d}\mu = \lim_{m\to\infty}\int_X \inf\{f_k, \ldots, f_{k+m}\}\,\mathrm{d}\mu \leq C$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz angewandt auf die Folge h_k erhält man also die Existenz eines $h \in \mathcal{L}^1(X)$, so daß h_k in der L^1-Seminorm und auch fast überall punktweise gegen h konvergiert. Es gilt aber für fast alle x

$$\lim_{k\to\infty} h_k(x) = \lim_{k\to\infty} \inf_{m\geq k} \{f_m(x)\} = f(x)$$

denn für fast alle x konvergiert nach Voraussetzung die Folge $(f_n(x))_{n\in N}$ gegen $f(x)$ $(*)$. Also stimmt f fast überall mit der Funktion $h \in \mathcal{L}^1(X)$ überein, also gilt $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \int_X h \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X h_k \, \mathrm{d}\mu \leq C$$

$(*)$ Man beachte: Sei $(a_n)_{n\in N}$ eine Folge reeller Zahlen, die konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Also zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $\forall n \geq N$ $|a_n - a| < \epsilon$, d.h. $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$. Daher gilt auch für jedes $m \geq N$

$$a - \epsilon \leq \inf\{a_m, a_{m+1}, \ldots\} \leq a + \epsilon$$

also konvergiert auch die Folge $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $b_m := \inf\{a_m, a_{m+1}, \ldots\}$ gegen a.

Satz 2: („Satz von der dominierten Konvergenz")
Sei $(f_n)_{n\in N}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(X)$, die fast überall punktweise gegen ein $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Es gebe $g \in \mathcal{L}^1(X)$ mit $g \geq 0$ und $|f_n| \leq g$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und $(f_n)_{n\in N}$ ist L^1-konvergent gegen f. Insbesondere gilt also

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu$$

Beweis: Es ist $|f_m - f_n|$ in $\mathcal{L}^1(X)$für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Ferner gilt

$$|f_m - f_n| \leq |f_m| + |f_n| \leq 2g$$

nach Voraussetzung. Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Dann ist

$$g_k := \sup_{m,n\geq k} |f_m - f_n|$$

in $\mathcal{L}^1(X)$(Korolloar zum Satz von der monotonen Konvergenz). Ferner ist $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und $\int_X g_k \, \mathrm{d}\mu \geq 0$ wegen $g_k \geq 0$. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gibt es $g \in \mathcal{L}^1(X)$, so daß $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ L^1-konvergent und fast überall punktweise konvergent gegen g ist. Nach Voraussetzung ist $(f_n(x))_{n\in N}$ konvergent für fast alle x, also Cauchyfolge, also gilt für fast alle x

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \lim_{k\to\infty} \sup_{m,n\geq k} |f_m(x) - f_n(x)| = 0$$

Also ist $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine L^1-Nullfolge. Für $m,n\geq k$ gilt

$$\begin{aligned}\|f_m-f_n\|_1 &= \int_X |f_m-f_n|\,\mathrm{d}\mu \leq \int_X \sup_{i,j\geq k}|f_i-f_j|\,\mathrm{d}\mu\\ &= \int_X g_k\,\mathrm{d}\mu = \int_X |g_k|\,\mathrm{d}\mu = \|g_k\|_1 \to 0 \quad (k\to\infty)\end{aligned}$$

Daher ist $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine L^1-Cauchyfolge. Nach Voraussetzung konvergiert diese fast überall punktweise gegen f. Nach 4.4 Korollar 2 zu Satz 1 ist daher $f\in\mathcal{L}^1(X)$ und $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist L^1-konvergent gegen f. □

Korollar: Sei $(f_n)_{n\in N}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(X)$, derart daß

$$\sum_{n\geq 1}\int_X |f_n|\,\mathrm{d}\mu < \infty$$

Dann gibt es eine Nullmenge Z, so daß die unendliche Reihe $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ $(x\notin Z)$ konvergiert, die Funktion

$$f: X\to\mathbb{R},\quad f(x) := \begin{cases}\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x) & (x\in Z)\\ 0 & (x\notin Z)\end{cases}$$

ist in $\mathcal{L}^1(X)$ und

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\geq 1}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$$

Beweis: Man betrachte die Partialsummenfolge

$$g_n(x) := \sum_{m=1}^{n} |f_m(x)|.$$

Diese ist monoton wachsend, und es gilt

$$\int_X g_n\,\mathrm{d}\mu = \sum_{m=1}^{n}\int_X |f_m|\,\mathrm{d}\mu \leq \sum_{m\geq 1}\int_X |f_m|\,\mathrm{d}\mu < \infty$$

nach Voraussetzung. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gibt es daher $g\in\mathcal{L}^1(X)$, so daß $(g_n)_{n\in N}$ bzgl. der L^1-Seminorm als auch fast überall punktweise gegen f konvergiert. Letzteres bedeutet gerade, daß $\exists$ Nullmenge Z, so daß

$$g(x) = \sum_{m\geq 1}|f_m(x)| \quad (x\notin Z)$$

d.h.

$$\sum_{m\geq 1}|f_m(x)| \quad (x\notin Z)$$

konvergiert. Nach dem Majorantenkriterium (Analysis 1) konvergiert daher auch

$$\sum_{m\geq 1} f_m(x) \quad (x \notin Z)$$

Man setze

$$\tilde{f_m}(x) := \begin{cases} f_m(x) & (x \notin Z) \\ 0 & (x \in Z) \end{cases} \qquad \tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & (x \notin Z) \\ 0 & (x \in Z) \end{cases}$$

Dann gilt $\forall x \in X$

$$\left| \sum_{m=1}^{n} \tilde{f_m}(x) \right| \leq \sum_{m=1}^{n} |\tilde{f_m}(x)| \leq \tilde{g}(x)$$

Dann sind $\tilde{f_m}$, also auch $\sum_{m=1}^{n} \tilde{f_m}$ und $\tilde{g}$ in $\mathcal{L}^1(X)$.
Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz ist dann

$$\sum_{m\geq 1} \tilde{f_m}(x) = f(x) \quad \text{ in } \mathcal{L}^1(X) \text{ und}$$

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} \int_X \tilde{f_m} \,\mathrm{d}\mu \right) = \sum_{n\geq 1} \int_X \tilde{f_n} \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\geq 1} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

Bemerkung: Satz 2 + Korollar ermöglichen unter sehr allgemeinen Voraussetzungen Vertauschung von Integral und Grenzübergang.

Satz 3: Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, die fast überall punktweiser Limes einer Folge in $T(X)$ ist. Es gebe $g \in \mathcal{L}^1(X)$ mit $g \geq 0$ und $|f| \leq g$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(X)$.

Beweis: Nach bekannten Sätzen (4.3 Satz 1 ii)) kann man f und g auf einer Nullmenge so abändern, daß die abgeänderte Funktion (auch mit f und g bezeichnet) erfüllen: g meßbar, $g \in \mathcal{L}^1(X)$, $g \geq 0$, $|f| \leq g$. Es genügt also zu zeigen, daß die abgeänderte Funktion f in $\mathcal{L}^1(X)$ist (Satz 1 i)). Sei Z eine Nullmenge und $(\varphi_n)_{n \in N}$ eine Folge in $T(X)$, so daß

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \quad \forall x \notin Z$$

Man setze

$$\psi_n(x) := \begin{cases} \varphi_n(x) & \text{falls } |\varphi_n(x)| \leq 1 + g(x) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktion φ_n und g sind meßbar, also ist auch $g_n := 1 + g - |\varphi_n|$ meßbar. Daher ist

$$S_n := g_n^{-1}([0,\infty)) = \{x \in X \,|\, |\varphi_n(x)| \leq 1 + g(x)\}$$

meßbar. Mit φ_n ist daher auch $\psi_n = \varphi_{n_{s_n}}$ eine Treppenfunktion (siehe Kapitel über Treppenfunktionen). Also gilt insbesondere $\psi_n \in \mathcal{L}^1(X)$.
Sei $x \in X \backslash Z$ fest. Für n groß gilt dann

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x)| &\leq |\varphi_n(x) - f(x)| + |f(x)| \\ &\leq 1 + |f(x)| \qquad \text{denn } \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \\ &\leq 1 + g(x) \end{aligned}$$

Nach Definition folgt also auch $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$. Ferner gilt

$$|\varphi_n| \leq 1 + g$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt also $f \in \mathcal{L}^1(X)$.

Satz 4: Sei $(f_n)_{n\in N}$ eine Folge in $\mathcal{L}^1(X)$, die fast überall punktweise gegen eine Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Es gebe $C \geq 0$, so daß $\|f_n\|_1 \leq C$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(X)$ und $\|f\|_1 \leq C$.

Bemerkung: i) Gilt zusätlich noch $f_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$, so ist Satz 4 gerade das Lemma von Fatou.

ii) Man schreibe $f_n = f_n^+ - f_n^-$ mit $f_n^+ := \sup\{f_n, 0\}$ und $f_n^- := -\inf\{f_n, 0\}$. Dann $f_n^+ \geq 0, f_n^- \geq 0 \; \forall n$, und man kann das Lemma von Fatou auf $(f_n^+)_{n\in N}$ und $(f_n^-)_{n\in N}$ anwenden. Man erhält dann $f^+, f^- \in \mathcal{L}^1(X)$, also auch $f = f^+ - f^- \in \mathcal{L}^1(X)$. Man erhält aber nur $\|f\|_1 \leq 2C$ auf diese Weise.

Beweis: Da f_n in $\mathcal{L}^1(X)$, ist f_n fast überall punktweiser Limes einer Folge in $T(X)$. Es gilt $\lim f_n(x) = f(x)$ für fast alle x, also ist auch f fast überall punktweiser Limes einer Folge in $T(X)$, wie unten stehendes Lemma zeigt. Nach Satz 3 genügt es zu zeigen, daß $|f| \in \mathcal{L}^1(X)$ ist und $\|f\|_1 \leq C$. Da $|f_n|$ fast überall punktweise gegen $|f|$ konvergiert und $|f_n| \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$, $\| \, |f_n| \, \|_1 = \|f_n\|_1 \leq C$, folgt letzteres sofort aus dem Lemma von Fatou.

Lemma: Sei X ein Maßraum. Dann gilt:

i) Eine Abbildung $f: X \to \mathbb{R}$ ist genau dann fast überall punktweiser Limes einer Folge in $T(X)$, wenn f außerhalb einer σ-endlichen Menge verschwindet, und es eine Nullmenge Z gibt, so daß $f_{|X\backslash Z}$ meßbar ist.

ii) Sei $(f_n)_{n\in N}$ eine Folge von Abbildungen $f_n: X \to \mathbb{R}$, derart daß jedes f_n fast überall punktweiser Limes einer Folge in $T(X)$ ist. Es gelte $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für fast alle x. Dann ist auch f fast überall punktweiser Limes einer Folge in $T(X)$.

Beweis: i) „ $\Rightarrow$ “ Es gelte

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \notin Z$$

wobei $\varphi_n \in T(X)$ und Z eine Nullmenge ist. Da $\varphi_n \in T(X)$, *exists* meßbare Menge A_n mit $\mu(A_n) < \infty$, so daß $\varphi_n(x) = 0 \; \forall x \notin A_n$. Sei

$A := Z \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Dann ist A σ-endlich und $f(x) = 0$ für $x \notin A$. Die Folge $\left(\varphi_{n_{|X \setminus Z}}\right)_{n \in N}$ konvergiert punktwiese gegen $f_{|X \setminus Z}$. Jedes $\varphi_{n_{|X \setminus Z}}$ ist meßbar (denn $\varphi_n \in T(X)$) also ist $f_{|X \setminus Z}$ meßbar (2.2 Satz 2)

„ $\Leftarrow$ " Sei $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ (A_n meßbar, $\mu(A_n) < \infty$) eine σ-endliche Menge mit $f(x) = 0$ für $x \notin A$, und sei Z eine Nullmenge, so daß $f_{|X \setminus Z}$ meßbar ist. Man schreibe

$$a = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \quad (B_1 := A_1, B_2 := A_2 \setminus A_1, B_3 := A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots)$$

als disjunkte Vereinigung von meßbaren Mengen endlichen Maßes. Ist $f_{|B_k}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ fast überall punktweiser Limes einer Folge $\left(\varphi_n^{(k)}\right)_{n \in N}$ in $T(B_k)$, so ist auch f fast überall punktweiser Limes einer Folge in $T(X)$. In der Tat: Man setze

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} \varphi_n^{(k)}(x) & \text{falls } x \in B_k \text{ für ein } k \in \{1, \dots, n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist φ_n wohldefiniert, φ_n ist in $Z(X)$ und $(\varphi_n)_{n \in N}$ konvergiert fast überall gegen f (man beachte $f(x) = 0$ für $x \notin A$, und daß die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine Nullmenge ist). Es gilt:

$$B_k = (B_k \setminus Z) \cup (B_k \cap Z)$$

und $B_k \cap Z$ ist Nullmenge. Es genügt also zu zeigen, daß $f_{|B_k \setminus Z}$ punktweiser Limes von Treppenfunktionen ist. Es gilt: $f_{|B_k \setminus Z}$ ist meßbar, denn $B_k \setminus Z \subset X \setminus Z$ und $f_{|X \setminus Z}$ ist meßbar. Nach 4.2 Satz 3 ist daher $f_{|B_k \setminus Z}$ punktweiser Limes von einfachen Abbildungen. da $\mu(B_k \setminus Z) < \infty$, ist daher aber jede einfache Abbildung eine Treppenfunktion. $\square$

ii) Man benutze i). Nach i) existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine σ-endliche Menge A_n mit $f(x) = 0$ für $x \notin A_n$, und es gibt eine Nullmenge Z_n, so daß $f_{n|X \setminus Z_n}$ meßbar ist. Ferner existiert nach Voraussetzung eine Nullmenge W, so daß $\lim f_n(x) = f(x)$ $\forall x \notin W$. Man setze $A := W \cup (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)$. Dann ist A σ-endlich, denn abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen ist wiederum abzählbar. Ferner gilt $f(x) = 0$ für $x \notin A$. Setze $Z := W \cup (\bigcup_{n \in \ltimes} Z_n)$. Dann ist Z Nullmenge. Da $f_{n|x \setminus Z_n}$ meßbar ist, ist auch $f_{n|x \setminus Z}$ meßbar. Aber $\left(f_{n|X \setminus Z}\right)_{n \in N}$ konvergiert punktweise gegen $f_{|x \setminus Z}$, daher ist auch $f_{|X \setminus Z}$ meßbar (3.2 Satz 2). $\square$

Kapitel 5

Fortsetzung von Maßen

5.1 Der Satz von Hahn

Erinnerung: Sei X eine Menge. Dann versteht man unter einer Algebra $\mathcal{A}$ von Teilmengen über X eine Familie $\mathcal{A}$ von Teilmengen von X, derart daß: $\emptyset \in \mathcal{A},\ A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B, A \cup B, A \backslash B \in \mathcal{A}$.

Beispiel:

i) $X = \mathbb{R}$; sei $\mathcal{I}$ die Menge der endlichen disjunkten Vereinigungen von halboffenen Intervallen $(a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist $\mathcal{I}$ eine Algebra von Teilmengen über X (siehe Übungen, Blatt 5, Nr.2).

ii) $X = \mathbb{R}^n$; sei $\mathcal{I}^{(n)}$ die Menge der endlichen disjunkten Vereinigungen von n-fachen Produkten

$$\prod_{j=1}^{n} (a_j, b_j]$$

von halboffenen Intervallen $(a_j, b_j]$ mit $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ („n-dimensionale Würfel"). Dann ist $\mathcal{I}^{(n)}$ eine Algebra von Teilmengen über X (einfache Übungsaufgabe).

Definition: Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra von Teilmengen über X. Unter einem (positiven) Maß auf $\mathcal{A}$ versteht man eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) ist $(A_n)_{n \in N}$ eine Folge in $\mathcal{A}$ mit $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, so gilt

$$\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) \qquad \text{„}\sigma\text{-additiv“}$$

Beispiel: Wir werden später zeigen, daß die Abbildung

$$\mu_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}, \mu_{\mathcal{I}}(A) := \sum_{i=1}^{m} (b_i - a_i)$$

(wenn $A = \bigcup_{i=1}^{m}(a_i, b_i]$ disjunkt) ein Maß auf $\mathcal{I}$ ist. Genauso ist

$$\mu_{\mathcal{I}^{(n)}} : \mathcal{I}^{(n)} \to \mathbb{R}, \mu_{\mathcal{I}^{(n)}}(A) := \sum_{i=1}^{m} \left(\prod_{j=1}^{n} (b_{ij} - a_{ij}) \right)$$

(wenn $A = \bigcup_{i=1}^{m} \left(\prod_{j=1}^{n} (a_{ij}, b_{ij}] \right)$ disjunkt) ein Maß auf $\mathcal{I}^{(n)}$.

Lemma 1: Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra von Teilmengen über X und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Seien $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subset B$. Dann ist $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Beweis: Schreibe $B = (B \backslash A) \cup A$ (disjunkt) also folgt

$$\mu(B) = \mu(B \backslash A) + \mu(A) \geq \mu(A)$$

Satz: („Satz von Hahn") Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra von Teilmengen über X, und X sei Vereinigung von abzählbar vielen Mengen aus $\mathcal{A}$. Sei μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Dann besitzt μ eine Fortsetzung (auch mit μ bezeichnet) zu einem Maß auf die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{M}$, derart daß für jedes $A \in \mathcal{M}$ gilt

$$\mu(A) = \inf\{\sum_{n \geq 1} \mu(A_n)\}$$

wobei das Infimum über alle Folgen $(A_n)_{n \in N}$ in $\mathcal{A}$ mit $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ zu nehmen ist. Ist X Vereinigung von abzählbar vielen Mengen *endlichen* Maßes aus $\mathcal{A}$, so ist die Fortsetzung eindeutig bestimmt.

Man beachte, daß für jedes $A \in \mathcal{M}$ das gebildete Infimum tatsächlich existiert, denn $A \subset X$ und nach Voraussetzung ist $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ mit gewissen $A_n \in \mathcal{A}$.

Beweis in zwei Schritten

1. Schritt

Definition: Sei $\mathcal{N}$ eine σ-Algebra über X. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{N} \to [0, \infty]$ heißt äußeres Maß (auf X), wenn gilt:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $A, B \in \mathcal{N}$ und $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

iii) Ist $(A_n)_{n \in N}$ eine Folge in $\mathcal{N}$, so gilt

$$\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$$

Bemerkung: Nach den bewiesenen Eigenschaften über Maße (siehe 2.3) ist jedes Maß auf X auch äußeres Maß auf X, aber i.a. nicht umgekehrt.

Lemma 2: Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra von Teilmengen über X, und sei X abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{A}$. Sei μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Dann besitzt μ eine Fortsetzung zu einem *äußeren* Maß μ^* auf der σ-Algebra $\mathcal{P}(X)$ (Potenzmenge), derart daß

$$\mu^*(Y) = \inf\{\sum_{n \geq 1} \mu(A_n)\} \quad (Y \subset X)$$

wobei das Infimum über alle Folgen $(A_n)_{n \in N}$ in $\mathcal{A}$ zu nehmen ist mit $Y \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Beweis: Nach Voraussetzung über X existiert das gebildete Infimum für jedes $Y \in \mathcal{P}(X)$. Wir zeigen zuerst, daß $\mu^*(A) = \mu(A)$ für $A \in \mathcal{A}$. Es gilt $A \subset A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$ und $\mu(\emptyset) = 0$, also ist

$$\mu^*(A) \leq \mu(A)$$

Sei $\epsilon > 0$. Nach Definition des Infimums existiert dann eine Folge $(A_n)_{n \in N}$ in $\mathcal{A}$ mit $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, so daß

$$\sum_{n \geq 1} \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \epsilon$$

Man setze $B_1 := A_1, B_2 := A_2 \backslash A_1, B_3 := A_3 \backslash (A_1 \cup A_2), \ldots$. Dann ist $B_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N}$, $B_n \cap B_m = \emptyset$ für $m \neq n$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Es gilt $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \cap A)$ (disjunkt), also folgt

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sum_{n \geq 1} \mu(B_n \cap A) && \text{Eigenschaft ii)} \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \mu(B_n) && \text{(Lemma 1)} \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) && \text{(Lemma 1)} \\ &\leq \mu^*(A) + \epsilon \end{aligned}$$

Dies gilt für jedes $\epsilon > 0$. Also folgt $\mu(A) \leq \mu^*(A)$. Insgesamt folgt also $\mu^*(A) = \mu(A)$.
Im folgenden schreibe man einfach μ statt μ^*.
z.z. μ ist äußere Maß auf $\mathcal{P}(X)$.

i) $\mu(\emptyset) = 0$ ist klar, denn μ stimmt auf $\mathcal{A}$ mit dem ursprünglichen Maß überein.

ii) Seien $Y_1, Y_2 \subset X, Y_1 \subset Y_2$. Sei $(A_n)_{n \in N}$ eine Folge in $\mathcal{A}$ mit $Y_2 \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Daher ist auch $Y_1 \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, also gilt nach Definition

$$\mu(Y_1) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n), \qquad \text{also auch}$$

$$\mu(Y_1) \leq \inf_{Y_2 \subset \bigcup A_n} \left\{ \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) \right\} = \mu(Y_2)$$

iii) Sei $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{P}(X)$; z.z.:

$$\mu\Big(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} Y_j\Big) \leq \sum_{j \geq 1} \mu(Y_j)$$

Sei $\epsilon > 0$. Nach Definition gibt es dann zu jedem $j \in \mathbb{N}$ eine Folge $\left(A_n^{(j)}\right)_{n \in N}$, so daß

$$Y_j \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^{(j)} \quad \text{und} \quad \sum_{n \geq 1} \mu(A_n^{(j)}) \leq \mu(Y_j) + \frac{\epsilon}{2^j}$$

Es gilt

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} Y_j \subset \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ j \in \mathbb{N}}} A_n^{(j)}$$

und die Mengen $A_n^{(j)}$ $(n, j \in \mathbb{N})$ sind abzählbar viele und alle in $\mathcal{A}$. Daher gilt

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} Y_j\right) &\leq \sum_{n,j \in \mathbb{N}} \mu(A_n^{(j)}) \\
&= \sum_{j \geq 1}\left(\sum_{n \geq 1} \mu(A_n^{(j)})\right) \\
&\leq \sum_{j \geq 1}(\mu(Y_j) + \frac{\epsilon}{2^i}) \\
&= \sum_{j \geq 1} \mu(Y_j) + \epsilon
\end{aligned}$$

Dies gilt für jedes $\epsilon > 0$. Also folgt

$$\mu(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} Y_j) \leq \sum_{j \geq 1} \mu(Y_j)$$

Beobachtung: Sei $A \subset X$ fest. Dann gilt für jede andere Teilmenge $Z \subset X$

$$Z = (Z \cap A) \cup (Z \cap A^c)$$

Da μ äußeres Maß auf $\mathcal{P}(x)$ ist , folgt nach Eigenschaft ii)

$$\mu(Z) \leq \mu(Z \cap A) + \mu(Z \cap A^c)$$

Definition: Wir nennen eine Teilmenge $A \subset X$ μ-meßbar, falls für alle $Z \subset X$ gilt

$$\mu(Z) = \mu(Z \cap A) + \mu(Z \cap A^c) \tag{5.1}$$

Lemma 3: Sei $\mathcal{M}_\mu$ die Familie der μ-meßbaren Teilmengen von X. Dann ist $\mathcal{M}_\mu$ eine σ-Algebra über X, und μ eingeschränkt auf $\mathcal{M}_\mu$ ist ein (positives) Maß auf $\mathcal{M}_\mu$.

Beweis: Es gilt $\emptyset \in \mathcal{M}_\mu$, denn $\forall Z \in \mathcal{P}(X)$ gilt

$$\mu(Z) = \mu(Z \cap \emptyset) + \mu(Z \cap \emptyset^c)$$

richtig, wegen $\mu(\emptyset) = 0$, denn $\emptyset \in \mathcal{A}$.
Die Definition 5.1 ist symmetrisch in A und A^c, also gilt $A \in \mathcal{M}_\mu \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}_\mu$.
Wir zeigen als nächstes, daß mit A und B auch $A \cap B$ μ meßbar ist. Man

wende 5.1 mit Z ersetzt durch $Z \cap A$ und A ersetzt durch B an. Dann folgt

$$\begin{aligned} \mu(Z \cap A) &= \mu((Z \cap A) \cap B) + \mu(Z \cap A \cap B^c) \\ \Rightarrow \mu(Z) = \mu(Z \cap A) + \mu(Z \cap A^c) &= \mu(Z \cap A \cap B) + \mu(Z \cap A \cap B^c) \\ &\quad + \mu(Z \cap A^c) \end{aligned}$$

denn $A \in \mathcal{M}_\mu$. Es genügt daher zu zeigen, daß

$$\mu(Z \cap A \cap B^c) + \mu(Z \cap A^c) = \mu(Z \cap (A \cap B)^c)$$

Es gilt nach 5.1

$$\mu(Z \cap (A \cap B)^c) = \mu(Z \cap (A \cap B)^c \cap A) + \mu(Z \cap (A \cap B)^c \cap A^c)$$

Es gilt $Z \cap A^c = Z \cap (A \cap B)^c \cap A^c$ wegen $A^c \subset (A \cap B)^c$. Ferner gilt $Z \cap A \cap B^c = Z \cap (A \cap B)^c \cap A$, denn $Z \cap (A \cap B)^c \cap A = Z \cap (A^c \cup B^c) \cap A$ und $A^c \cap A = \emptyset$. Daher ist auch $A \cup B$ μ-meßbar, wenn dies für A und B gilt, denn $A \cup B = (A \cup B)^{cc} = (A^c \cap B^c)^c$. Durch Induktion folgt: $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}_\mu \Rightarrow A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{M}_\mu$.
Wir zeigen als nächstes: sind $A_1, \ldots, A_n$ in $\mathcal{M}_\mu$ paarweise disjunkt, so gilt für jedes $Z \in \mathcal{P}(X)$

$$\mu(Z \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_n)) = \sum_{\nu=1}^{n} \mu(Z \cap A_\nu) \tag{5.2}$$

Beweis: $n = 2$. Es gilt nach 5.1

$$\begin{aligned} \mu(Z \cap (A_1 \cup A_2)) &= \mu(Z \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mu(Z \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1^c) \\ &= \mu(Z \cap A_1) + \mu(Z \cap A_2) \quad \text{denn } A_1 \cap A_2 = \emptyset \end{aligned}$$

Der Fall von beliebigem $n \in \mathbb{N}$ folgt aus $n = 2$ durch vollständige Induktion. Sei jetzt $(A_n)_{n \in N}$ eine Folge in $\mathcal{M}_\mu$ mit $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $m \neq n$. Wir müssen zeigen, daß $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ in $\mathcal{M}_\mu$ ist und $\mu(A) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$. Wegen $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{M}_\mu$ gilt für jedes $Z \in \mathcal{P}(X)$

$$\begin{aligned} \mu(Z) &= \mu(Z \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_n)) + \mu(Z \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \mu(Z \cap A_\nu) + \mu(Z \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c) \quad \text{wegen 5.2} \\ &\geq \sum_{\nu=1}^{n} \mu(Z \cap A_\nu) + \mu(Z \cap A^c) \end{aligned}$$

wegen $Z \cap (A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c \supset Z \cap A^c$ und nach Eigenschaft ii) eines äußeren Maßes

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mu(Z) &\geq \sum_{\nu \geq 1} \mu(Z \cap A_\nu) + \mu(Z \cap A^c) \\ &\geq \mu(Z \cap A) + \mu(Z \cap A^c) \end{aligned}$$

denn $\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} (Z \cap A_\nu) = Z \cap A$ und nach Eig. ii) eines äußeren Maßes

Wegen $\mu(Z) \leq \mu(Z \cap A) + \mu(Z \cap A^c)$ (sowieso) folgt also 5.1, d.h. $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ist μ-meßbar.

$$\begin{aligned} \mu(Z \cap A) + \mu(Z \cap A^c) &\geq \mu(Z) \\ &\geq \sum_{\nu \geq 1} \mu(Z \cap A_\nu) + \mu(Z \cap A^c) \\ &\geq \mu(Z \cap A) + \mu(Z \cap A^c) \end{aligned}$$

Insbesondere folgt

$$\mu(Z) = \sum_{\nu \geq 1} \mu(Z \cap A_\nu) + \mu(Z \cap A^c)$$

mit $Z = A$ ergibt sich hieraus insbesondere

$$\mu(A) = \sum_{\nu \geq 1} \mu(A \cap A_\nu) + 0 = \sum_{\nu \geq 1} \mu(A_\nu) \quad \text{denn } A \cap A_\nu = A_\nu$$

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ mit $B_1 := A_1, B_2 := A_2 \setminus A_1, B_3 := A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \ldots$
Insgesamt ist somit Lemma 3 gezeigt.

2. Schritt

Wir beweisen jetzt den Satz von Hahn.
Wir beweisen zunächst die Existenz der Fortsetzung von μ wie angegeben. Nach Lemma 2 und 3 hat μ eine Fortsetzung zu einem Maß auf $\mathcal{M}_\mu$ wie angegeben, es genügt also zu zeigen, daß die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra in $\mathcal{M}_\mu$ enthalten ist. Da $\mathcal{M}$ die kleinste σ-Algebra ist, die alle Elemente aus $\mathcal{A}$ enthält, genügt es zu zeigen, daß $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A$ μ-meßbar. Sei $A \in \mathcal{A}$. Da μ äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$ ist, gilt ohnehin $\mu(Z) \leq \mu(Z \cap A) + \mu(Z \cap A^c)\ \forall Z \in \mathcal{P}(X)$. Sei $Z \in \mathcal{P}(X)$. Nach Definition gibt es dann eine Folge $(A_n)_{n \in N}$ in $\mathcal{A}$ mit $Z \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ und $\sum_{n \geq 1} \mu(A_n) \leq \mu(Z) + \epsilon$ bei beliebig vorgegebenen $\epsilon > 0$. Es folgt $Z \cap A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap A)$, $Z \cap A^c \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap A^c)$. Da μ äußeres Maß, gilt

$$\begin{aligned} \mu(Z \cap A) + \mu(Z \cap A^c) &\leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n \cap A) + \sum_{n \geq 1} \mu(A_n \cap A^c) \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \big(\mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \cap A^c)\big) \end{aligned}$$

Es gilt $A, A_n \in \mathcal{A}$, daher auch $A_n \cap A \in \mathcal{A}$ und $A_n \cap A^c = A_n \setminus A \in \mathcal{A}$, denn $\mathcal{A}$ ist Algebra von Teilmengen über X. Ferner ist $(A_n \cap A) \cap (A_n \cap A^c) = \emptyset$. Da μ ein Maß auf $\mathcal{A}$, folgt also

$$\mu(A \cap A) + \mu(A_n \cap A^c) = \mu\big((A_n \cap A) \cup (A_n \cap A^c)\big) = \mu(A_n)$$

. Daher erhält man

$$\mu(Z \cap A) + \mu(Z \cap A^c) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) \leq \mu(Z) + \epsilon$$

Dies gilt für jedes $\epsilon > 0$, also folgt $\mu(Z \cap A) + \mu(Z \cap A^c) \leq \mu(Z)$. Daher ist $\mu(Z) = \mu(Z \cap A) + \mu(Z \cap A^c)$.

Wir zeigen jetzt die Eindeutigkeit der Fortsetzung unter der Voraussetzung $X = \bigcup A_n$ mit $A_n \in \mathcal{A}$ und $\mu(A_n) < \infty$. Sei ν irgendein Maß auf $\mathcal{M}$, so daß $\nu_{|\mathcal{A}} = \mu_{|\mathcal{A}}$. Wir müssen zeigen $\nu = \mu$. Ohne Einschränkung kann man annehmen, daß $A_n \cap A_m = \emptyset$ für $n \neq m$ (man ersetzt A_2 durch $A_2 \backslash A_1$, A_3 durch $A_3 \backslash (A_1 \cup A_2), \ldots$). Ist $Y \subset X$, so gilt $Y = Y \cap X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (Y \cap A_n)$, wegen der σ-Additivität genügt es also zu zeigen, daß $\mu(A \cap Y) = \nu(Y \cap A_n)\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall Y \in \mathcal{M}$. Insbesondere genügt es zu zeigen: ist $A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty$ und $Y \in \mathcal{M}, Y \subset A$, so folgt $\mu(Y) = \nu(Y)$. Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} \mu(Y) &= \inf\{\sum_{n \geq 1} \mu(B_n)\} && \text{wobei } (B_n)_{n \in N} \text{ über alle Folgen in } \mathcal{A} \text{ läuft mit } Y \subset \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \\ &= \inf\{\sum_{n \geq 1} \nu(B_n)\} && \text{denn } \nu_{|\mathcal{A}} = \mu_{|\mathcal{A}} \end{aligned}$$

Da ν Maß ist, gilt

$$\begin{aligned} &\sum_{n \geq 1} \nu(B_n) \geq \nu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) \geq \nu(Y) \\ &\Rightarrow \mu(Y) \geq \nu(Y) \end{aligned} \tag{5.3}$$

Es gilt $A \backslash Y \subset A, A \backslash Y \in \mathcal{M}$, also hat man auch (indem man in 5.3 Y durch $A \backslash Y$ ersetzt) $\mu(A \backslash Y) \geq \nu(A \backslash Y)$. Es folgt

$$\begin{aligned} \mu(A) = \nu(A) &= \nu(Y) + \nu(A \backslash Y) \\ &\leq \mu(Y) + \nu(A \backslash Y) \\ &\leq \mu(Y) + \mu(A \backslash Y) \\ &= \mu(A) \end{aligned}$$

Dann gilt überall Gleichheit, also folgt

$$\nu(Y) + \nu(A \backslash Y) = \mu(Y) + \nu(A \backslash Y) \quad \Rightarrow \nu(Y) = \mu(Y)$$

(Man beachte $Y \subset A, \mu(A) < \infty$, also auch $\mu(Y) < \infty$ und $\infty > \mu(A \backslash Y) = \nu(A \backslash Y)$)

Korollar: Sei $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra von Teilmengen über X, so daß $\mathcal{M}$ die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ-Algebra ist. Man setze voraus, daß alle Mengen aus $\mathcal{A}$ endliches Maß haben, und daß X abzählbare Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{A}$ ist. Dann gilt: $Z \in \mathcal{M}$ ist Nullmenge genau dann, wenn $\forall \epsilon > 0\ \exists$ Folge $(A_n)_{n \in N}$ in $\mathcal{A}$ mit $Z \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ und $\sum_{n \geq 1} \mu(A_n) < \epsilon$

Beweis: Erfüllt $Z \in \mathcal{M}$ die genannten Bedingungen, so ist Z Nullmenge, denn

$$\mu(Z) \leq \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) < \epsilon$$

Umgkehrt: Sei Z Nullmenge. Nach dem Satz von Hahn ist μ die (eindeutig bestimmte) Fortsetzung von $\mu_{|\mathcal{A}}$. Also gilt

$$\mu(Y) = \inf\left\{\sum \mu(A_n)\right\} \quad \forall Y \in \mathcal{M}$$

wobei $Y \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, A_n \in \mathcal{A}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Nimmt man $Y = Z$ und beachtet $\mu(Z) = 0$, so folgt die Behauptung.

5.2 Das Lebesgue-Maß

Wie in Kapitel 5.1 sei $\mathcal{I}^{(n)}$ die Menge bestehend aus endlichen disjunkten Vereinigungen von n-dimensionalen Würfeln

$$\prod_{j=1}^{n}(a_j, b_j]$$

mit $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. Ist

$$A = \bigcup_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(a_{ij}, b_{i,j}]$$

(disjunkt) in $\mathcal{I}^{(n)}$, so setze man

$$\mu_{\mathcal{I}^{(n)}}(A) := \sum_{i=1}^{m}\left(\prod_{j=1}^{n}(b_{ij} - a_{ij})\right)$$

Satz 1: i) $\mathcal{I}^{(n)}$ ist eine Algebra von Teilmengen über $\mathbb{R}^n$.

ii) Die Abbildung $\mu_{\mathcal{I}^{(n)}}$ ist ein Maß auf $\mathcal{I}^{(n)}$.

Beweis: i) klar!

ii) Der Beweis wird nur für $n = 1$ gegeben, der allgemeine Fall geht genauso (Übungsaufgabe!) Wir schreiben $\mathcal{I}$ statt $\mathcal{I}^{(1)}$ und μ statt $\mu_{\mathcal{I}^{(1)}}$. Daß μ wohldefiniert ist, ist einfach einzusehen. Klar ist auch $\mu(\emptyset) = 0$. Wir müssen also nur die σ-Additivität beweisen. Dies geschieht in zwei Schritten.

1. Schritt: Behauptung: Ist $(a, b] = \bigcup_{k \in \mathbb{N}}(a_k, b_k]$ (disjunkt), so gilt

$$\mu((a, b]) = \sum_{k \geq 1}\mu((a_k, b_k])$$

Beweis: Man beachte: $A, B \in \mathcal{I}$ und $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$. In der Tat, da $\mathcal{I}$ Algebra ist, gilt $B \backslash A \in \mathcal{I}$. Wegen $B = A \cup (B \backslash A)$ (disjunkt) und der Wohldefiniertheit von μ folgt $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \quad \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$. Man wende dies an mit $B = (a, b]$ und $A = \bigcup_{k=1}^{m}(a_k, b_k]$. Es folgt

$$\sum_{k=1}^{m}\mu((a_k, b_k]) = \mu(A) \leq \mu(B) = \mu((a, b])$$

$$\Rightarrow \sum_{k \geq 1}\mu((a_k, b_k]) \leq \mu((a, b])$$

Umgekehrt: Sei $\epsilon > 0$. Man bestimme $\alpha \in (a, b]$ mit $\alpha \leq a + \epsilon$ und zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein β_k mit $b_k < \beta_k \leq b_k + \frac{\epsilon}{2^k}$. Dann gilt:

$$[\alpha, b] \subset (a, b] \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}}(a_k, \beta_k)$$

Da $[\alpha, b]$ kompakt, besitzt die offene Überdeckung $\{(a_k, \beta_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ von $[\alpha, b]$ eine endliche Teilüberdeckung nach dem Satz von Heine-Borel, also gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$[\alpha, b] \subset \bigcup_{k=1}^{N} (a_k, \beta_k)$$

Daher

$$(\alpha, b] \subset \bigcup_{k=1}^{N} (a_k, \beta_k]$$

Daher folgt

$$\begin{aligned} \mu((\alpha, b]) &\leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} (a_k, \beta_k]\right) \quad \text{wegen } A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B) \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} \mu((a_k, \beta_k]) \end{aligned}$$

denn es gilt: $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{I} \Rightarrow \mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$; Begründung: man schreibe $A_1 \cup \cdots \cup A_n = A_1 \cup (A_2 \backslash A_1) \cup (A_3 \backslash (A_2 \cup A_1)) \cup \ldots$ (disjunkt).
Es folgt:

$$\begin{aligned} \mu((a, b]) &= b - a \leq b - \alpha + \epsilon = \mu((\alpha, b]) + \epsilon \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} \mu((a_k, b_k]) + \epsilon = \sum_{k=1}^{N} (\beta_k - a_k) + \epsilon \\ &\leq \sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k + \frac{\epsilon}{2^k}) + \epsilon = \sum_{k=1}^{N} \mu((a_k, b_k]) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\epsilon}{2^k} + \epsilon \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu((a_k, b_k]) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} + \epsilon \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu((a_k, b_k]) + 2\epsilon \end{aligned}$$

Dies gilt für jedes $\epsilon > 0$, also folgt

$$\mu((a, b]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu((a_k, b_k]) \qquad \square$$

2. Schritt: Behauptung: Sei $A \in \mathcal{I}$ und $A = \cup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ (disjunkt) mit $A_k \in \mathcal{I}$. Dann gilt

$$\mu(A) = \sum_{k \geq 1} \mu(A_k)$$

Beweis: Man schreibe $A = \bigcup_{j=1}^{m} B_j$ und $A_k = \bigcup_{l=1}^{n_k} C_{kl}$ als disjunkte Vereinigung von halboffenen Intervallen in $\mathcal{I}$. Dann gilt

$$B_j = B_j \cap A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (B_j \cap A_k) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{l=1}^{n_k} (B_j \cap C_{kl})$$

(disjunkte Vereinigung von halboffenen Intervallen). Nach dem 1. Schritt gilt also

$$\mu(B_j) = \sum_{k \geq 1} \sum_{l=1}^{n_k} \mu(B_j \cap C_{kl})$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k \geq 1} \sum_{l=1}^{n_k} \mu(B_j \cap C_{kl}) \\ &= \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{n_k} \mu(B_j \cap C_{kl}) \right) \\ &= \sum_{k \geq 1} \mu(A_k), \quad \text{denn} \\ A_k &= \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{l=1}^{n_k} (B_j \cap C_{kl}) \quad \text{disjunkt} \\ (A_k &= A \cap A_k = \bigcup_{j=1}^{m} (B_j \cap A_k) = \ldots) \end{aligned}$$

Satz 2: i) Die von $\mathcal{I}^{(n)}$erzeugte σ-Algebra ist gleich der σ-Algebra der Borelmengen von $\mathbb{R}^n$, d.h. ist gleich der von den offenen Mengen erzeugten σ-Algebra.

ii) Das Maß $\mu_{\mathcal{I}^{(n)}}$ auf $\mathcal{I}^{(n)}$hat eine eindeutig bestimmte Fortsetzung zu einem Maß auf $\mathcal{B}^{(n)}$ (auch mit $\mu_{\mathcal{I}^{(n)}}$ bezeichnet), so daß für jedes $A \in \mathcal{B}^{(n)}$ gilt

$$\mu_{\mathcal{I}^{(n)}}(A) = \inf \left\{ \sum_{m \geq 1} \mu(C_m) \right\}$$

wobei $(C_m)_{m \in \mathbb{N}}$ über alle Folgen von n-dimensionalen Würfeln in $\mathcal{I}^{(n)}$mit $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_m$ läuft.

Beweis: i) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen, d.h.: A ist Umgebung jedes seiner Punkte, d.h. $x \in A \Rightarrow \exists \epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(x) \subset A$. Offentsichtlich bedeutet dies, daß A mit jedem x auch einen offenen Würfel $\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$ mit $x \in \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$ enthält. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, liegt auch $\mathbb{Q}^n$ dicht in $\mathbb{R}^n$, und $\mathbb{Q}^n$ ist abzählbar. Daher ist A Vereinigung von abzählbar vielen offenen Würfeln (nämlich genau derjenigen Würfel, die in A enthalten sind und rationale Kantenpunkte haben). Jeder offene Würfel läßt sich aber schreiben als

$$\prod_{i=1}^{n}(a_j, b_i) = \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m \text{ groß}}} \prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i - \frac{1}{m}]$$

Da abzählbare Vereinigung von abzählbar vielen Mengen wieder abzählbar ist, läßt sich also A schreiben als abzählbare Vereinigung von Würfeln in $\mathcal{I}^{(n)}$. Daher ist A in der von $\mathcal{I}^{(n)}$erzeugten σ-Algebra $\sigma(\mathcal{I}^{(n)})$ enthalten. Da $\mathcal{B}^{(n)}$ die kleinste σ-Algebra ist, die alle offenen Mengen enthält, folgt $\mathcal{B}^{(n)} \subset \sigma(\mathcal{I}^{(n)})$. Umgekehrt gilt

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i] = \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{N} \\ m \text{ groß}}} \prod_{i=1}^{n}[a_i + \frac{1}{m}, b_i]$$

Jede der Mengen $\prod[a_i + \frac{1}{m}, b_i]$ ist abgeschlossen, also in $\mathcal{B}^{(n)}$, also ist jeder Würfel aus $\mathcal{I}^{(n)}$ in $\mathcal{B}^{(n)}$ enthalten, denn $\mathcal{B}^{(n)}$ ist als σ-Algebra abgeschlossen unter der Bildung abzählbarer Vereinigungen. Daher ist jede Menge aus $\mathcal{I}^{(n)}$in $\mathcal{B}^{(n)}$ enthalten. Wie vorher folgt also $\sigma(\mathcal{I}^{(n)}) = \mathcal{B}^{(n)}$. Also gilt Gleichheit.

ii) Offenbar ist $\mathbb{R}^n$ abzählbare Vereinigung von Würfeln aus $\mathcal{I}^{(n)}$, und letztere haben endliches Maß. Nach dem Satz von Hahn hat daher $\mu_{\mathcal{I}^{(n)}}$ eine eindeutig bestimmte Fortsetzung auf die von $\mathcal{I}^{(n)}$erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{I}^{(n)}) = \mathcal{B}^{(n)}$ (s.o.), derart daß für $A \in \mathcal{B}^{(n)}$ gilt

$$\mu_{\mathcal{I}^{(n)}}(A) = \inf\left\{\sum_{m\geq 1} \mu_{\mathcal{I}^{(n)}}(A_m)\right\}$$

wobei $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ über alle Folgen in $\mathcal{I}^{(n)}$mit $A \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$. Man beachte, daß $A_m = \bigcup_{l=1}^{n_m} C_{ml}$ (disjunkt), wobei C_{ml} ein n-dimensionaler Würfel in $\mathcal{I}^{(n)}$ist, und daß gilt

$$\mu(A_m) = \sum_{l=1}^{n_m} \mu_{\mathcal{I}^{(n)}}(C_{ml})$$

Dies zeigt die Behauptung.

Definition: Das Maß $\mu_{\mathcal{I}^{(n)}}$ auf $\mathcal{B}^{(n)}$ heißt Lebesgue-Maß, die Mengen aus $\mathcal{B}^{(n)}$ heißen dann Lebesgue-meßbar.

Bemerkung: Nach dem Satz von Hahn kann man $\mu_{\mathcal{I}^{(n)}}$ sogar auf die σ-Algebra $\mathrm{Leb}^{(n)}$ der $\mu_{\mathcal{I}^{(n)}}$-meßbaren Teilmengen von $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen. In manchen Büchern wird das Maß $\mu_{\mathcal{I}^{(n)}}$ auf $\mathrm{Leb}^{(n)}$ Lebesgue-Maß genannt, das Maß $\mu_{\mathcal{I}^{(n)}}$ nur auf $\mathcal{B}^{(n)}$ betrachtet heißt dann Borel-Lebesgue-Maß. Man kann zeigen, daß $\mathcal{B}^{(n)} \subsetneq \mathrm{Leb}^{(n)}$ (schwer!).

Sei $\mu = \mu_{\mathcal{I}^{(n)}}$ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}^{(n)} = \sigma$-Algebra der Borel-Mengen.

Satz 3:

i) Sei $A \in \mathcal{B}$ und $\epsilon > 0$. Dann gibt es eine offene Menge U mit $U \supset A$ und $\mu(U \backslash A) < \epsilon$ und eine abgeschlossene Menge F mit $F \subset A$ und $\mu(A \backslash F) < \epsilon$.

ii) Sei $A \in \mathcal{B}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \inf\{\mu(U) \,|\, U \text{ offen}, U \supset A\} \\ &= \sup\{\mu(F) \,|\, F \text{ abgeschlossen}, F \subset A\} \\ &= \sup\{\mu(K) \,|\, K \text{ kompakt}, K \subset A\} \end{aligned}$$

Beweis:

i) Sei zunächst $\mu(A) < \infty$. Sei $\epsilon > 0$. Nach Satz 2,ii) gibt es eine Folge $(C_m)_{m \in \mathbb{N}}$ von n-dimensionalen Würfeln mit $A \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} C_m$ und $\sum_{m \geq 1} \mu(C_m) \leq \mu(A) + \epsilon$. Man wähle für jedes $m \in \mathbb{N}$ einen Würfel D_m in $\mathcal{I}^{(n)}$ mit $C_m \subset \text{int } D_m$ und $\mu(D_m) < \mu(C_m) + \frac{\epsilon}{2^{m+1}}$. Sei $U := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \text{int } D_m$. Dann ist U offen und $A \subset U$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mu(U \backslash A) = \mu(U) - \mu(A) &\leq \sum_{n \geq 1} \mu(D_m) - \mu(A) \\ &\leq \sum_{m \geq 1} (\mu(C_m) + \frac{\epsilon}{2^{m+1}}) - \mu(A) \\ &\leq \mu(A) + \epsilon + \sum_{m \geq 1} \frac{\epsilon}{2^{m+1}} - \mu(A) \\ &= \mu(A) + \frac{3}{2}\epsilon - \mu(A) = \frac{3}{2}\epsilon \end{aligned}$$

Sei jetzt $A \in \mathcal{B}$ beliebig. Sei $K_m := \prod_{i=1}^{m} [-m, m]$ für $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mu(A \cap K_m) \leq \mu(K_m) < \infty$. Nach dem schon Bewiesenem gibt es daher eine offene Menge U_m mit $A \cap K_m \subset U_m$ und $\mu(U_m \backslash (A \cap K_m)) < \frac{\epsilon}{2^m}$. Sei $U := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} U_m$. Dann ist U offen und $A \subset U$. Es gilt auch $U \backslash A \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (U_m \backslash (A \cap K_m))$. Daher folgt

$$\begin{aligned} \mu(U \backslash A) &\leq \sum_{m \geq 1} \mu(U_m \backslash (A \cap K_m)) \\ &\leq \sum_{m \geq 1} \frac{\epsilon}{2^m} = \epsilon \end{aligned}$$

Mit A ist auch A^c meßbar. Nach dem schon bewiesenen gibt es daher eine offene Menge V mit $V \supset A^c$ und $\mu(V \backslash A^c) < \epsilon$. Sei $F := V^c$. Dann ist F abgeschlossen, und wegen $V \supset A^c$ gilt $F \subset A$. Ferner gilt

$$\mu(A \backslash F) = \mu(A \cap F^c) = \mu(A \cap V) = \mu(V \cap A^{c^c}) = \mu(V \backslash A^c) < \epsilon$$

ii) Übungsaufgabe, folgt aus i)!

Beispiele für Lebesgue-Nullmengen

i) Punkte $\{x_o\}, x_0 \in \mathbb{R}^n$ haben Maß Null, denn $\{x_0\} \in \prod_{i=1}^n (x_{0_i} + \frac{1}{m}, x_{0_i} + \frac{1}{m}]$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ und das Maß der Menge rechts ist nach Definition gleich $\left(\frac{2}{m}\right)^n \to 0 \, (m \to \infty)$.

ii) Nach i) haben abzählbare Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ Maß Null.

iii) Sei $n = 2$ und $H := \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Dann gilt

$$H \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} ((-m, m] \times (-\frac{\epsilon}{m^3}, \frac{\epsilon}{m^3}])$$

also folgt

$$\mu(H) \leq \sum_{m \geq 1} 2m \frac{2\epsilon}{m^3} = 4\epsilon \left(\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^2} \right) = C \cdot \epsilon \Rightarrow \mu(H) = 0$$

Für $n > 2$ ähnlich. Also existieren für $n \geq 1$ überabzählbare Nullmengen. Dies ist auch für $n = 1$ wahr, aber komplizierter zu beweisen („Cantor'sches Diskontium“).

Für $A \subset \mathbb{R}^n$ sei $\mathcal{D}_A := \{x - y \mid x, y \in A\}$ die „Differenzenmenge“.

Satz 4: (Steinhaus) Sei A Lebesgue-meßbar und sei $\mu(A) > 0$. Dann $\exists \delta > 0$, so daß $U_\delta(0) \subset \mathcal{D}_A$.

Beweis: Nach Satz 3 ii) genügt es, die Aussage für A kompakt zu zeigen. Nach Satz 3 i) (mit $\epsilon = \mu(A)$) existiert eine offene Menge U mit $A \subset U$ mit $\mu(U \backslash A) < \mu(A)$, d.h. $\mu(U) < 2\mu(A)$. Es gilt $A \neq \emptyset$, denn $\mu(A) > 0$. Es gilt auch $\mu(A) < \infty$, denn A ist kompakt, also insbesondere beschränkt. Daher ist auch $\mu(U) < \infty$, also $U \neq \mathbb{R}^n$, also $U^c \neq \emptyset$. Sei $\delta := \inf\{\|x - y\| \mid x \in A, y \in U^c\}$ der Abstand von A zu U^c. Dann ist $\delta > 0$, denn wäre $\delta = 0$, so gäbe es Folgen $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in A und $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in U^c mit $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_m - y_m\| = 0$. Da A kompakt, ist A beschränkt, also existiert eine Teilfolge $(x_{mp})_{p \in \mathbb{N}}$, die konvergiert (Bolzano-Weierstraß). Sei x_0 der Limes. Dann ist $x_0 \in A$, denn A ist kompakt, also abgeschlossen. Es folgt dann auch wegen $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_{mp} - y_{mp}\| = 0$, daß $(y_{mp})_{p \in \mathbb{N}}$ gegen x_0 konvergiert. Da U offen, ist U^c abgeschlossen,also folgt $x_0 \in U^c$. Wegen $A \subset U$ ist dies ein Widerspruch.
Sei $z \in U_\delta(0)$, also $\|z\| < \delta$. Sei $x \in A$. Dann ist $x + z \in U$, denn sonst wäre $x + z \in U^c$, also wären $x \in A$ und $y := x + z \in U^c$ zwei Punkte mit $\|x - y\| = \|z\| < \delta$ Widerspruch zur Wahl von δ. Sei $A + z := \{x + z \mid x \in A\}$. Wir haben gezeigt, daß $A \cup (A + z) \subset U$. Man beachte, daß das Lebesgue-Integral μ invariant unter Translationen ist, d.h. $\mu(B + t) = \mu(B) \, \forall B \in \mathcal{B}, \forall t \in \mathbb{R}^n$ (In der Tat: für Würfel ist dies klar, und für beliebige B folgt die Aussage aus Satz 2 ii)). Es gilt also $\mu(A + z) = \mu(A)$. Angenommen nun, daß $A \cap (A + z) = \emptyset$. Dann folgt

$$\mu(U) \geq \mu(A \cup (A + z)) = \mu(A) + \mu(A + z) = 2\mu(A)$$

Widerspruch zur Wahl von U. Also gilt $A \cap (A + z) \neq \emptyset$, d.h. $\exists \omega$ mit $\omega \in A$ und $\omega = a + z$ mit $a \in A$. $\Rightarrow z = \omega - a \in \mathcal{D}_A$.

Korollar: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann existieren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, welche nicht Lebesgue-meßbar sind.

Beweis: Man definiere $x \sim y\,(x, y \in \mathbb{R}^n)$ falls $x - y \in \mathbb{Q}^n$. Dies ist eine Äquivalenzrelation, und die Menge der Äquivalenzklassen sei $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$. Sei $\mathcal{M}$ irgendein Repräsentantensystem.
Behauptung: $\mathcal{M}$ ist nicht meßbar.
Angenommen, $\mathcal{M}$ wäre meßbar. Wäre $\mu(\mathcal{M}) > 0$, so folgte nach Satz 4 die Existenz eines $\delta > 0$ mit $U_\delta(0) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{M}}$. Daher gäbe es $r \in \mathbb{Q}^n, r \neq 0$ mit $r = x - y$, wobei $x, y \in \mathcal{M}$. Es folgte also $x \sim y$, also $x = y \Rightarrow r = 0$ Widerspruch! Also gilt $\mu(\mathcal{M}) = 0$. Wegen $\mathbb{R}^n = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}^n} (\mathcal{M} + x)$ und der Invarianz von μ unter Translationen folgt dann

$$\mu(\mathbb{R}^n) = \sum_{x \in \mathbb{Q}^n} \mu(\mathcal{M} + x) = 0 \quad \text{Widerspruch!}$$

5.3 Das Lebesgue-Integral

Definition: Sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}^{(n)}$ die σ-Algebra der Borelmengen und $\mu = \mu_{\mathcal{I}^{(n)}}$ das Lebesgue-Maß. Funktionen in $\mathcal{L}^1(X)$ heißen dann Lebesgue-integrierbar. Sei $Y \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, $\mathcal{B}_Y$ die auf Y durch $\mathcal{B}$ induzierte σ-Algebra und $\mu|\mathcal{B}_Y$ das induzierte Maß. Funktionen in $\mathcal{L}^1(Y)$ heißen Lebesgue-integrierbar über Y.

Wichtig: Alle Sätze aus Kapitel 4 gelten in der gegenwärtigen Situation! (Insbesondere: Satz von der monotonen Konvergenz, Lemma von Fatou, Satz von der dominierten Konvergenz, etc.)

Beispiel: Sei $I \subset \mathbb{R}$ beschränktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$, die auf I beschränkt ist und auf I fast überall punktweiser Limes von Treppenfunktionen aus $T(I)$ ist. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(I)$. In der Tat, ist $|f(x)| \leq c\, \forall x \in I$ und setzt man $g(x) := c\,(\forall x \in I)$, so ist $g \in T(I) \subset \mathcal{L}^1(I)$, siehe Satz 3, Kapitel 4.5.

Satz 1: Sei $I = [a, b]$ kompaktes Intervall und f eine Regelfunktion auf I. Dann ist f über I Lebesgue-integrierbar, und das Regelintegral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und das Lebesgue-Integral $\int_X f\,\mathrm{d}\mu$ stimmen überein.

Bemerkung: $R(I) \subsetneq \mathcal{L}^1(I)$, denn $\chi_{I \setminus \mathbb{Q}} \in \mathcal{L}^1(I) \setminus R(I)$. Hier sei: X Menge, $A \subset X$:

$$\chi_A := \begin{cases} X \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \end{cases}$$

(sog. „charakteristische Funktion von A (in X)“)

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es zu f eine Folge $(t_n)_{n \in N}$ von Treppenfunktionen auf I (im Sinne von Analysis 1), welche gleichmäßig auf I gegen f konvergiert. Nach Definition gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \int_a^b t_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Da I beschränkt ist, ist (t_n) auch eine Folge von Treppenfunktion im Sinne von Analysis 3 und nach Definition gilt

$$\int_a^b t_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_X t_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

Wegen der Abschätzung (Kapitel 4.3)

$$\|t_n - t_m\|_1 = \int_I |t_n - t_m|\,\mathrm{d}\mu \le \underbrace{\mu(I)}_{<\infty} \|t_n - t_m\|_\infty$$

ist (t_n) auch eine L^1-Cauchyfolge (nach Voraussetzung ist (t_n) eine $\|\cdot\|_\infty$-Cauchyfolge).(t_n) konvergiert punktweise gegen f, also gilt (nach Definition) $f \in \mathcal{L}^1$ und

$$\begin{aligned}\int_I f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_I t_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Als Anwendung des Satzes von der dominierenden Konvergenz beweisen wir eine Verallgemeinerung des bekannten Hauptsatzes der Integral- und Differentialrechnung.

Satz 2: Sei $I = [a,b]$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung mit beschränkter Ableitung f'. Dann ist f' auf I Lebesgue-integrierbar und es gilt:

$$\int_I f'(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = f(b) - f(a)$$

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n : I \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_n(x) := \begin{cases} 0 & x + \frac{1}{n} > b \text{ und } x \in I \\ n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)) & x + \frac{1}{n} \le b \text{ und } x \in I \end{cases}$$

Da f stetig ist, ist auch $g_n|_{[a,b-\frac{1}{n}]} (n \gg 0)$ stetig und läßt sich gleichmäßig durch Treppenfunktionen (im Sinne von Analysis 1) approximieren. Wegen $g_n|_{[b-\frac{1}{n},b]} \equiv 0 (n \gg 0)$ ist daher g_n auf I gleichmäßig Limes einer solchen Folge von Treppenfunktionen, somit ist g_n Regelfunktion $(n \gg 0)$, nach Satz 1 also Lebesgue-integrierbar über I und das Regelintegral und das Lebesgue-Integral sind gleich.

$$g_n(x) = \frac{f(x+\frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} \quad (n \gg 0)$$

konvergiert (g_n) punktweise auf I gegen f'. Nach dem Mittelwertsatz ist für $n \geq 0$

$$g_n(x) = f'(\xi_n) \quad (\xi \in (x, x + \frac{1}{n}))$$

also ist g_n auf I durch eine von n unabhängige Konstante beschänkt (f' ist auf I beschränkt). Wegen der Beschränktheit des Intervalls I gilt nach dem Satz von der dominierenden Konvergenz $f' \in \mathcal{L}^1(I)$ und

$$\int_I f' \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_I g_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x) \, \mathrm{d}x$$

Sei $F(x) := \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t$ ($f \in C^0(I)$). Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist F differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$, ferner

$$\frac{d}{dx}(x \mapsto F(x + \frac{1}{n})) = f(x + \frac{1}{n}) \quad (a \leq x \leq b - \frac{1}{n},\, n \gg 0)$$

Daher gilt ($n \gg 0$):

$$\begin{aligned}
\int_a^b g_n(x) \, \mathrm{d}x &= \int_a^{b-\frac{1}{n}} n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x)) \, \mathrm{d}x \\
&= n[(F(b - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}) - F(a + \frac{1}{n})) - (F(b - \frac{1}{n}) - F(a))] \\
&= -\frac{F(a + \frac{1}{n}) - F(a)}{\frac{1}{n}} + \frac{F(b - \frac{1}{n}) - F(b)}{\frac{1}{n}} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} -F'(a) + F'(b) \\
&= f(b) - f(a) \qquad \square
\end{aligned}$$

5.4 Produkt-Maße, Integration auf Produkträumen und der Satz von Fubini

Ziel: Integration von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Beispiel:

$$\int_{[0,1]^2} e^{-x+y} \cos(x^2 y) \, \mathrm{d}\mu$$

Seien X, Y nichtleere Mengen und $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ Algebren von Teilmengen von X bzw. Y. Ein Rechteck (bzgl. A, B) sei eine Menge der Form $A \times B$ mit $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$. Mit $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ sei die Menge aller endlichen disjunkten Vereinigungen von Rechtecken bzgl. $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ bezeichnet.

Lemma 1: Das Mengensystem $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist eine Algebra in $X \times Y$.

Die von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ erzeugte σ-Algebra sei mit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ bezeichnet („$\mathcal{A}$ tensor $\mathcal{B}$“):

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} := (\mathcal{A} \times \mathcal{B})^\sigma$$

Gilt:

$$\mathcal{A}^\sigma \otimes \mathcal{B}^\sigma = (\mathcal{A} \times \mathcal{B})^\sigma$$

Beispiel: Lebesguesche Mengen im $\mathbb{R}^{n+m}$:

$$\mathcal{I}^{(n)} = \underbrace{\mathcal{I}^{(1)} \times \mathcal{I}^{(1)} \times \cdots \times \mathcal{I}^{(1)}}_{n-\text{mal}} \qquad \mathcal{B}^{(1)} = (\mathcal{I}^{(1)})^{\sigma}$$

$$\mathcal{I}^{(m+n)} = \mathcal{I}^{(n)} \times \mathcal{I}^{(m)}$$

$$\mathcal{B}^{(n+m)} = \mathcal{B}^{(n)} \otimes \mathcal{B}^{(m)} \qquad (\mathbb{R}^{(n+m)} = \mathbb{R}^{(n)} \times \mathbb{R}^{(m)})$$

Lemma 2: Seien $(X, \mathcal{M})$, $(Y, \mathcal{N})$ Meßräume. Dann gilt

i) Für $Q \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ und $x \in X$ ist die Menge $Q_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in Q\} \in \mathcal{N}$.

ii) Sei $f : X \times Y \to Z$ eine $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$-meßbare Abbildung in einen topologischen Raum Z. Dann ist für $x \in X$ die partielle Abbildung

$$f_x : \begin{cases} Y & \to Z \\ y & \mapsto f(x, y) \end{cases} \qquad \mathcal{N}\text{-meßbar.}$$

Bemerkung:

i) Das Einschränken auf Fasern der Projektionen

$$p : \begin{cases} X \times Y & \to X \\ (x, y) & \mapsto x \end{cases}; \qquad q : \begin{cases} X \times Y & \to Y \\ (x, y) & \to y \end{cases}$$

ist verträglich mit der Meßbarkeit von Mengen und Abbildungen.

ii) Eine Teilmenge $Q \subset X \times Y$ mit $Q_x \in \mathcal{N}$ $(\forall x \in X)$ ist i.a. nicht meßbar.

Generalvoraussetzung:
Im folgenden seien $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Dann erzeugen die Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ der meßbaren Teilmengen von X bzw. Y von endlichem Maß die σ-Algebren $\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{N}$. Insbesondere erzeugt die Algebra der Rechtecke $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ die σ-Algebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Wir definieren ein iteriertes Integral einer Treppenfunktion f bzgl. $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Aus Linearitätsgründen kann man sich auf die Form $f = \chi_{A \times B}$ $(A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B})$ beschränken. Dann gilt $f_x = \chi_A(x)\chi_B$ d.h. f_x ist eine Treppenfunktion bzgl. $\mathcal{B}$. Die Abbildung

$$x \mapsto \int_X f_x \, \mathrm{d}\nu = \nu(B) \cdot \chi_A(x)$$

ist eine Treppenfunktion bzgl. A. Integration dieser Funktion liefert

$$\int_X \left(\int_Y f_x \, \mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}\mu = \mu(A)\nu(B)$$

Man notiert für das linke Integral auch

$$\int_X \int_Y f(x, y) \, \mathrm{d}\nu(y) \, \mathrm{d}\mu(x), \quad \int_X \int_Y f \, \mathrm{d}\nu \, \mathrm{d}\mu$$

Vertauscht man die Reihenfolge der Integration, so erhält man

$$\int_X \int_Y \chi_{A\times B} \,\mathrm{d}\nu \,\mathrm{d}\mu = \mu(A)\nu(B) = \int_Y \int_X \chi_{A\times B} \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\nu$$

bzw.

$$\int_X \int_Y f \,\mathrm{d}\nu \,\mathrm{d}\mu = \int_Y \int_X f \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\nu$$

für alle Treppenfunktionen f bzgl. $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.
Wir wollen nun ein Maß auf $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ definieren.

Theorem 1: (Exitenz des Produktmaßes) Seien $(X, \mathcal{M}, \mu), (Y, \mathcal{N}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Dann existiert genau ein Maß $\mu \otimes \nu : \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \to [0, \infty]$, so daß für alle meßbaren Teilmengen $A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N}$ von *endlichen* Maß gilt:

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

Beweisskizze: Die durch

$$(\mu \times \nu)(A \times B) := \mu(A)\nu(B)$$

eindeutig bestimmte Abbildung

$$\mu \times \nu : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to [0, \infty]$$

ist σ-additiv. Dann existiert nach dem Satz von Hahn genau eine Fortsetzung auf $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ mit der Bezeichnung $\mu \otimes \nu : \mathcal{M} \otimes \mathcal{N} \to [0, \infty]$.

Theorem 2: (Satz von Fubini) Seien $(X, \mathcal{M}, \mu), (Y, \mathcal{N}, \nu)$ σ-endliche Maßräume.

i) Für eine Abbildung $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ gilt

   (a) $f_x \in \mathcal{L}^1(Y, \nu)$ für μ-fast alle $x \in X$. $\Phi : x \mapsto \int_Y f_x \,\mathrm{d}\nu$ für Ausnahmefälle x definiere man Φ beliebig.

   (b)
   $$\int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_X \int_Y f_x \,\mathrm{d}\nu \,\mathrm{d}\mu(x)$$

ii) Sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ $(\mu \otimes \nu)$-fast überall punktweiser Limes von Treppenfunktionen bzgl. $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$. Ferner gelte $f_x \in \mathcal{L}^1(Y, \nu)$ für fast alle $x \in X$, und die Abbildung

   $$x \mapsto \int_Y |f_x| \,\mathrm{d}\nu$$

   (für fast alle $x \in X$, in Ausnahmefällen beliebig definiert) Sei in $\mathcal{L}^1(X, \mu)$. Dann gilt $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y, \mu \otimes \nu)$ und i) ist somit anwendbar.

Bemerkung: Mit vertauschten Rollen von μ und ν hat das Theorem ebenfalls Gültigkeit.

$$\int_X \int_Y f_X \,\mathrm{d}\nu \,\mathrm{d}\mu = \int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_Y \int_X f_Y \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\nu$$

Korollar: (Prinzip von Cavalieri)
Sei $Q \in \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-meßbare Menge von endlichem Maß. Dann ist für fast alle $x \in \mathbb{R}$

$$Q_x := \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in Q\}$$

eine Lebesgue-meßbare Menge von endlichem Maß, und es gilt

$$\mu_{\mathbb{R}^{n+1}}(Q) = \int_{\mathbb{R}} \mu_{\mathbb{R}^n}(Q_x)\,\mathrm{d}\mu_{\mathbb{R}}(x)$$

Satz: Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $(I_n)_{n \in N}$ eine monoton wachsende Folge von kompakten Intervallen mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = \mathbb{R}$. Ferner sei $f_{|I_n} \in R(I_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ und die Folge der Regelintegrale

$$\left(\int_{I_n} |f(x)|\,\mathrm{d}x\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

sei beschränkt. Dann gilt $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ und

$$\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{I_n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Bemerkung: Die Umkehrung des Satzes gilt ebenfalls.
Beweis: Sei für $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x) & ; x \in I_n \\ 0 & ; x \notin I_n \end{cases}$$

Dann ist nach Satz 2.1. $(|f_n|)_{n \in N}$ eine monoton wachsende Folge von über $\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbaren Funktionen, die punktweise gegen $|f|$ konvergiert. Die Folge der Integrale

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f_n|\,\mathrm{d}\mu\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

ist beschränkt nach Voraussetzung. Dann gilt $|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ nach dem Satz von der monotonen Konvergenz. Durch schlichte Anwendung des Satzes über die dominierende Konvergenz (mit Dominante $|f|$) folgt die Behauptung.

Beispiel: Sei $f(x) = xe^{-x^2}$ $(x \geq 0)$, $f_{|\mathbb{R}_{<0}} \equiv 0$.

1) f ist stetig, $f \geq 0$
2) $I_n = [-n, n]$ $(n \in \mathbb{N})$, $f_{|I_n} \in R(I_n)$ (da f_{I_n} stetig)
3)

$$\begin{aligned} \int_{I_n} |f(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_{-n}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^n xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_{x=0}^{n} = \frac{1}{2}(1 - e^{-n^2}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Folge der Integrale ist beschränkt
$\Rightarrow$ (Satz) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ und

$$\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2}(1 - e^{-n^2}) = \frac{1}{2}$$

5.5 Transformationsformel

Wir wollen nun eine höherdimensionale Verallgemeinerung der Substitutionsregel für Regelintegrale ansteuern. Zunächst untersuchen wir die Veränderung des Lebesgueschen Maßes meßbarer Mengen unter affinen Abbildungen.

Satz 1 : Sei $f(x) = x_0 + L(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$ (mit festem $x_0 \in \mathbb{R}^n, L \in \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n)$) eine affine Transformation des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt für $A \in \mathcal{B}^{(n)}$

i) $g(A) \in \mathcal{B}^{(n)}$

ii) $\mu(g(A)) = |\det L| \mu(A)$

Beweisskizze : Wir benutzen die Eindeutigkeitsaussage des Satzes von Hahn. Im ersten Fall sei $L = id_{\mathbb{R}^n}$, d.h. $g(x) = x + x_0$. Definiere

$$\tau_{x_0} : \begin{cases} \mathcal{I}^{(n)} & \to \quad \mathcal{I}^{(n)} \\ \prod\limits_{i=1}^{n}]a_i, b_i] & \mapsto \quad \prod\limits_{i=1}^{n}]a_i + x_o^{(i)}, b_i + x_o^{(i)}] \end{cases}$$

Dann setzt sich τ_{x_0} zu einer Abbildung $\tau_{x_0} : \mathcal{B}^{(n)} \to \mathcal{B}^{(n)}$ mit $\tilde{\tau}_{x_0}(A) = x_0 + A = \{x_0 + x \in \mathbb{R}^n \mid x \in A\}$ fort. Die Abbildung $\mu \circ \tilde{\tau}_{x_0} : \mathcal{B}^{(n)} \to \mathbb{R}$ ist ein Maß auf $\mathcal{B}^{(n)}$ mit

$$\mu \circ \tilde{\tau}_{x_0} | \mathcal{I}^{(n)} = \mu \circ \tau_{x_0} = \mu | \mathcal{I}^{(n)}$$

Nach dem Satz von Hahn gilt dann $\mu \circ \tilde{\tau}_{x_0} = \mu$, d.h. die Behauptung im Fall 1) ist gezeigt.
Demnach kann man o.E. $x_0 = 0$ annehmen. Für $L \in \operatorname{Aut}(\mathbb{R}^n)$ kann man dies analog zeigen, wnn man beachtet, daß sich die Darstellungsmatrix von L als Produkt von sog. Elementarmatrizen zerlegen läßt.

Bemerkung : Für $A \in \mathcal{B}^{(n)}$ von endlichem Maß und $g(x) = x_0 + L(x)$ eine affine Transformation von $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{g(A)} \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} |\det L| \chi_A \, d\mu$$

Theorem : (Transformationssatz) Seien Δ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $g : \Delta \to \mathbb{R}^n$ ein C^1-Diffeomorphismus auf die (offene) Menge
$D := g(\Delta)$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Dann gilt $f \in \mathcal{L}^1(D)$ genau dann, wenn $f \circ g \cdot |J_g| \in \mathcal{L}^1(D)$; in diesem Fall gilt

$$\int_D f \, d\mu = \int_\Delta f \circ g |J_g| \, d\mu$$

Beweisskizze : Man kann o.E. f als stetig annehmen. Betrachtet man f auf einem kleinen Kompaktum $x_0 \in K \subset \Delta$, dann

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(x) &= g(x_0) + \mathrm{D}\, g(x_0)(x - x_o) \\
\mu(g(K)) &\sim \mu(\tilde{g}(K)) = |\det \mathrm{D} g(x_0)| \mu(K) \\
&= |J_{g(x_0)}| \cdot \mu(K) \\
\int_{g(K)} f \,\mathrm{d}\mu &\sim f \circ g(x_0) \int_{g(K)} \mathrm{d}\mu = f \circ g(x_0) \mu(g(K)) \\
&\sim f \circ g(x_0) |J_{g(x_0)}| \mu(K) \\
\int_D f \circ g |J_g| \,\mathrm{d}\mu &\sim f \circ g(x_0) \cdot |J_{g(x_0)}| \mu(K) \\
&\sim \int_{g(K)} g \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

In Wahrheit

$$\int_K f \circ g |J_g| \,\mathrm{d}\mu = \int_{g(K)} f \,\mathrm{d}\mu \qquad\qquad \text{„q.e.d.“}$$

Index