Analysis I

Vorlesung von Prof. Dr. Kohnen

SS 1996

Inhaltsverzeichnis

Erstellt mit LaTeX, ©Petra Döhren

W. Kohnen, Zimmer 107

Literatur:

- K.Königsberger, Analysis I, Springer 1995
- Gravert, Lieb, Differential- und Integralrechnung I, Springer 1967
- Barner, Flohr, Analysis I, de Gruyter 1991

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Die Axiome der natürlichen Zahlen

1,2=1+1,3=2+1 ...

Kardinalzahlen: Anzahbestimmung

Ordinalzahlen: Dinge werden durch Numerieren geordnet.

Hier werden primär Ordinalzahlen behandelt.
Standpunkt: A priori gegeben ist eine Menge $\mathbb{N}$, genannt natürliche Zahlen, mit folgenden Eigenschaften:

Axiom 1) 1 ist eine natürliche Zahl, d.h. $\mathbb{N}$ enthält mindestens ein Argument, nämlich die 1.

Axiom 2) (Arithmetisches Axiom) Jedem Paar m,n von natürlichen Zahlen sind zwei weitere natürliche Zahlen m+n (Summe) und m·n (Produkt)zugeordnet, und für die Verknüpfungen (Addition/Multiplikation) gelten die folgenden Regeln:
$1 \cdot 1 = 1$;
für beliebige nat. Zahlen gilt:

i) $m + n = n + m$

ii) $m + (n + r) = (m + n) + r$

iii) $m \cdot n = n \cdot m$

iv) m(nr)=(mn)r

v) m(n+r)=mn+mr

Axiom 3) (Anordnungsaxiom)

i) Für zwei beliebige vorgegebene nat. Zahlen m,n gilt genau *eine* der folgenden Alternativen
$m < n$,$m = n$ oder $m > n$

ii) Für alle nat. Zahlen n gilt $n \geq 1$

Axiom 4) (vollständige Induktion)

Sei M eine Menge von natürlichen Zahlen mit

i) 1 gehört zu M

ii) mit n gehört auch n+1 zu M

Dann ist M=$\mathbb{N}$, d.h. M enthält *alle* nat. Zahlen.

Bezeichnung: Gilt m=n+r, so schreibt man $m > n$ („m ist größer als n“) oder auch $n < m$. Entsprechend soll $m \geq n$ (bzw. $m \leq n$) für folgende Alternativen gelten: Entweder ist $m > n$ (bzw. $m < n$) oder $m = n$.

Problem 1) Gibt es natürliche Zahlen, d.h. haben sie eine reale Existenz außerhalb unseres Bewußseins?

Kronecker (1823–1891) „Natürliche Zahlen sind von Gott gemacht.“

Dedekind (1831–1916) „Natürliche Zahlen sind reines Menschenwerk.“

Standpunkt der modernen Mathematik: Die Frage nach der Existenz der nat. Zahlen ist unsinnig und unendscheidbar. Sinnvolle mathematische Aussagen betreffen nur die Beziehungen, die zwischen nat. Zahlen bestehen und die Regeln, nach denen man expiriert.

Problem 2) Es könnte a priori passieren, daß man beim Umgang mit den Regeln auf Widersprüche stößt. Kann man die Widerspruchsfreiheit der Axiome 1–4 beweisen? Hieran wird seit ca. 100 Jahren gearbeitet.

Problem 3) Braucht man wirklich die umfangreichen Axiome 1–4?
Nein, es reichen die sogenannten “Peano-Axiome”.

Satz:

i) $m < n$ und $n < p \Rightarrow m < p$

ii) $m < n$ bzw. $m = n$ bzw. $m > n \Rightarrow m + p < n + p$ bzw. $m + p = n + p$ bzw. $m + p > n + p$.

iii) Ist $m > n$, so hat die Gleichung $m = n + r$ genau eine Lösung r, die man die Differenz von m und n nennt, $r = m - n$.

iv) Gilt $m > n$ und $p > q$, so folgt
$m + p > n + q$

v) $m > n \Rightarrow m \geq n + 1$

vi) $m > n$ bzw. $m = n$ bzw. $m < n$
$\Rightarrow mp > np$ bzw. $mp = np$ bzw. $mp < np$

vii) $m > n$ und $p > q \Rightarrow mp > nq$

Beweis:

i) Es gilt nach Definition
$m < n \Leftrightarrow n = m + r$
Genauso $n < p \Leftrightarrow p = n + s$
Es gilt $p = n + s = (m + r) + s = m + (r + s)$
d.h. $m < p$ q.e.d.

ii) Wir zeigen z.B.
$m < n \Rightarrow m + p < n + p$
Wegen $m < n$ gilt $n = m + r$

$\Rightarrow \; n + p = (m + r) + p = p + (m + r) = (p + m) + r = (m + p) + r$ q.e.d.

Die Umkehrung der Aussagen ergibt sich daraus, daß die Fälle $m < n, m = n, m > n$ sich gegenseitig ausschließen (Axiom 3)

v) $m > n$ heißt $m = n + r \geq n + 1$, weil $r \geq 1$ nach 3.2

1.2 Beweis durch vollständige Induktion. Definition durch Induktion

Satz:
Für jede nat. Zahl n sei eine Aussage s_n gegeben. Es gelte

i) s_1 sei richtig.

ii) Unter der Annahme, daß s_n richtig ist, kann man die Richtigkeit von s_{n+1} beweisen.

Dann ist s_n richtig für jede nat. Zahl.

Beweis:
Sei M die Menge der nat. Zahlen, für die s_n richtig ist. Nach Voraussetzung gilt dann $1 \in M$, und mit n in M gilt auch n+1 in M. Daher gilt nach Axiom 4), daß M=$\mathbb{N}$, das heißt, s_n ist richtig für alle nat. Zahlen.
Beispiel: Es gilt $n \cdot 1 = n$ für alle nat. Zahlen n.
Induktionsanfang:

$n = 1$.
Es gilt $1 \cdot 1 = 1$ nach Axiom 1), also ist s_1 wahr.
Induktionsbehauptung:

s_n ist wahr, d.h. $n \cdot 1 = n$
Induktionsschluß:

zu zeigen für s_{n+1}: $(n + 1) \cdot 1 = n + 1$

Es gilt: $(n + 1) \cdot 1 = n \cdot 1 + 1 \cdot 1 =^{1} n + 1 \cdot 1 = n + 1$

Daher ist nach Satz die Behauptung richtig für alle nat. Zahlen n.

Unter „Definition durch Induktion“ versteht man folgendes:
Für jede nat. Zahl n wird ein Element f(n) einer Menge X definiert durch

i) Angabe von f(1)

ii) Angabe einer Vorschrift, die es gestattet, für jede nat. Zahl n f(n+1) aus f(1),f(2), . . . ,f(n) zu erhalten

[1] da die Induktionsbehauptung wahr ist

Daß solch eine Definition sinnvoll ist, besagt der „Rekursionssatz“ (wird hier nicht bewiesen).

Beispiel: Sei a nat. Zahl. Dann definiert man die Potenzen a^n (n nat. Zahl) durch $a^1 = a$, $a^{n+1} = a \cdot a^n$.

Beispiel zum Induktionsbeweis:
Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$n^2 + 1 \geq 2 \cdot n$$

Induktionsanfang:
$n = 1: \quad 1^2 + 1 \geq 2 \cdot 1$
$\Leftrightarrow 2 \geq 2$
Induktionsbehauptung:
$n^2 + 1 \geq 2 \cdot n$
Induktionsschluß:
$(n+1)^2 + 1 \geq 2(n+1)$ ist zu zeigen

Es gilt:$(n+1)^2 + 1 = (n^2 + 2n + 1) + 1$
$= (n^2 + 1) + 2n + 1 \geq^{2} 2n + 2n + 1$
$\geq^{3} 2n + 1 + 1 = 2n + 2 = 2(n+1)$ q.e.d.

1.3 Mengen. Abbildungen von Mengen

Arbeitshypothese (nach Canter, 1845 -1918, Begründer der Mengenlehre)
Die Menge ist die Zusammmenfassung von wohlunterschiedenen Objekten des Denkens oder der Sachwelt zu einem Ganzen.

Notationen:

i) Sei M eine Menge von Objekten a, b. Dann sagt man, daß a Element von M ist (im Zeichen $a \in M$). Man schreibt auch M={a,b, ... }.
Oft wird eine Menge durch gewisse Eigenschaften ihrer Objekte definiert, z. B. M bestehe aus genau den Elementen einer Menge M_0, für die die Eigenschaften $E_1, E_2, \ldots$ gelten, dann schreibt man:
$M = \{x | x \in M_0$, x hat die Eigenschaften $E_1, E_2, \ldots\}$.

ii) Die Menge, die kein Element enthält, heißt leere Menge (im Zeichen Ø).
Vorsicht! Sei M die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten. Frage: Entält M sich selbst (Rund‘sche Axiome)?

Definition i) Sind alle Elemente der Menge M‘ auch Elemente der Menge M, so heißt M‘ Teilmenge von M ($M‘ \subset M, M \supset M‘$). Zwei Mengen heißen gleich, wenn $M \subset M‘$ und $M‘ \subset M$.

ii) Gilt $M‘ \subset M, M \neq M‘$, so heißt M‘ echte Teilmenge von M.

iii) Seien A,B Mengen. Dann setzt man:
$A \cap B := \{x | x \in A$ und $x \in B\}$ (Durchschnitt)
$A \cup B := \{x | x \in A$ oder $x \in B\}$ (Vereinigung)
$A \setminus B := \{x | x \in A, x \notin B\}$ (Differenz von A und B)

[2] nach Induktionsvoraussetzung
[3] denn $2n \geq 1$ nach Axiom

Entsprechendes gilt für beliebig viele Mengen.

Definition Seien A,B Mengen, $a \in A, b \in B$. Dann definiert man das geordnete Paar (a,b) als die Menge $M = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.
Man beachte: Für $a = b$ gilt $(a, a) = \{\{a\}\}$. (Dies ist formal etwas anderes als a oder { a }.)

Es gilt: (a,b)=(a',b') genau dann ($\Leftrightarrow$), wenn $a = a', b = b'$.
Sei $(a, b) = (a', b')$. Dann gilt also
$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$.

1) $\{a\} = \{a'\} \Leftrightarrow a = a'$ und
$\{a, b\} = \{a', b'\}$ also $b = b'$

2) $\{a\} = \{a', b'\} \Rightarrow a = a' = b' = b$

Man nennt $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ das kartesische Podukt von A und B.

Definition Seien A_i (i=1, ... ,n) Mengen, $a_i \in A_i$.
Dann definiert man das geordnete n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ als das Paar $((a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n)$. (Induktive Definition) Entsprechend definiert man $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Es gilt $(a_1, \ldots, a_n) = (a_1‘, \ldots, a_n‘)$
$\Leftrightarrow a_i = a_i‘ \ \forall i = 1, \ldots, n$ [$\forall$ = „für alle“]

Definition Seien A, B Mengen. Dann nennt man eine Teilmenge $R \subset A \times B$ eine Relation zwischen A und B.

Definition Seien A,B Mengen. Dann versteht man unter einer Abbildung von A nach B ein Tripel f=(A,B,R), wobei R eine Relation zwischen A und B ist mit der Eigenschaft, daß für jedes $a \in A$ ein eindeutig bestimmtes Element $b \in B$ existiert mit $(a, b) \in R$.[4] Statt f=(A,B,R) schreibt man $f : A \to B, a \mapsto f(a)$.

Mit anderen Worten: Eine Abbildung $f : A \to B, a \mapsto f(a)$ ist eine Voschrift, die jedem $a \in A$ ein eindeutig bestimmtes Element $b = f(a)$ in B zuordnet.

Beispiel:
$A = \{1, 3, 5\} \quad B = \{2, 5, 11, 30, 33\}$
$f : A \to B, f(1) = 2, f(3) = 11, f(5) = 2$

Man beachte:
Zwei Abbildungen $f : A \to B, a \mapsto f(a)$ und $g : A‘ \to B‘, a‘ \mapsto g(a‘)$ sind genau dann gleich, wenn A=A‘, B=B‘ und $f(a) = g(a) \ \forall a \in A$ gilt.

Definition Man nennt A den Definitionsbereich von f und $f(A) := \{f(a) | a \in A\}$.

Beispiel:
wie oben $\{1, 3, 5\}$ ist Definitionsbereich von f und $f(A) = \{2, 11\}$.

Definition Sei $f : A \to B, a \mapsto f(a)$ Abbildung. Sei $A' \subset A$. Dann heißt $f|_{A'} : A' \to B, f|_{A'}(a) = f(a) \ (a \in A')$ die Einschränkung von f auf A‘.

[4] Man schreibt b=f(a) und nennt b das Bild von a unter f.

Beispiel:
wie oben

$A' = \{1\} \qquad f|_{A'} : A' \to B;\ f|_{A'}(1) = 2.$

Definition Sei $f : A \to B$ Abbildung. Dann heißt f *surjektiv*, falls f(A)=B. Man nennt f *injektiv*, falls gilt:$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$ (d.h. verschiedene Elemente haben verschiedene Bilder). Man nennt f *bijektiv*, falls f surjektiv und injektiv ist (d.h. für jedes $b \in B$ existiert genau ein $a \in A$ mit $f(a) = b$).

$$\begin{array}{cccl} \bullet & \bullet & \bullet & A \\ \downarrow & \downarrow & \swarrow & \\ \bullet & \bullet & & \end{array} \qquad \text{surjektiv, nicht injektiv}$$

$$\begin{array}{ccccl} \bullet & \bullet & \bullet & & A \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & B \end{array} \qquad \text{injektiv, nicht surjektiv}$$

$$\begin{array}{ccccl} \bullet & \bullet & \bullet & & A \\ \downarrow & \downarrow & \swarrow & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & B \end{array} \qquad \text{weder surjektiv, noch injektiv}$$

$$\begin{array}{cccl} \bullet & \bullet & \bullet & A \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \bullet & \bullet & \bullet & B \end{array} \qquad \text{bijektiv}$$

Definition
- i) Sei A eine Menge. Dann nennt man $id_A : A \to A, a \mapsto a$ die identische Abbildung (Identität) der Menge A.
- ii) Seien $f : A \to B, g : B \to C$ Abbildungen. Dann heißt $g \circ f : A \to C$, $(g \circ f)(a) := g(f(a))$ die Komposition von f und g.

Satz Sei $f : A \to B$ bijektiv. Dann existiert genau eine Abbildung $g : B \to A$ mit $g \circ f = id|_A$. Diese nennt man die inverse Abbildung von f und schreibt $g = f^{-1}$.

Beweis: Sei $b \in B$. Da f bijektiv ist, existiert genau ein $a \in A$ mit $f(a) = b$. Man setze $g : B \to A$, $g(b) = a$. Dann gilt $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a$. Es ist klar, daß g eindeutig bestimmt ist durch die Eigenschaft $g \circ f = id_A$. Zusatz: Es gilt auch $f \circ g = id_B$, denn $(f \circ g)(b) \Leftrightarrow f(g(b)) = f(a) = b$. f^{-1} ist auch bijektiv.

Definition Zwei Mengen A und B heißen gleichmächtig, falls eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ existiert (A $\sim$ B).

Satz 2 Es gilt

- i) $A \sim A$
- ii) $A \sim B \ \Rightarrow B \sim A$
- iii) $A \sim B,\ B \sim C \ \Rightarrow A \sim C$

Beweis: i) $id_A,\ A \to A$, bijektiv

ii) $f:\ A \to B$ bijektiv $\Rightarrow f^{-1}: B \to A$ bijektiv

iii) Seien $f: A \to B,\ g: \ B \to C$ bijektiv. Dann ist $g \circ f:\ A \to C$ bijektiv, denn $g \circ f$ ist injektiv.
$(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a`)$
$\Rightarrow g(f(a)) = g(f(a`)) \Rightarrow^{5} f(a) = f(a`)$
$\Rightarrow^{6}\ a = a`$
Also ist $g \circ f$ injektiv. Der Beweis für $g \circ f$ surjektiv ist ähnlich.

1.4 Endliche Mengen

Eine Menge M heißt endlich, wenn sie entweder leer ist oder gleichmächtig zu einem „Abschnitt“ $A_n := \{k \in \mathbb{N} | 1 \leq k \leq n\}$ (für ein $n \in \mathbb{N}$) ist.

Wir wollen zeigen, daß obiges n eindeutig bestimmt ist. In anderen Worten:

Satz 1 $A_n \sim A_m \Leftrightarrow m = n$

Beweis: $\Leftarrow$ klar!
$\Rightarrow$ Beweis durch Widerspruch
Sei $A_m \sim A_n$. Angenommen $m \neq n$. Dann gilt $m > n$ oder $m < n$. Daher genügt es zu zeigen: Für $m > n$ existiert keine bijektive Abbildung von A_m nach A_n.
Beweis durch vollständige Induktion nach n
n=1. Dann $A_1 = \{1\},\ A_m \supset \{m, 1\},\ m \neq 1$, denn $m > 1$. Aber es existiert keine bijektive Abb. $f: A_1 \to A_m$.
$n \to n+1$ Angenommen, es gibt eine bijektive Abb. $f: A_{n+1} \to A_m$ mit $m > n+1$. Dann existiert $i \in A_{n+1}$ mit $f(i) = m$. Man betrachte $g|_{A_n}: A_n \to A_m$. Die Abbildung $h: A_n \to A_{m`},\ h(k) := g(k)$ ist nach Konstruktion bijektiv. Daher hat man einen Widersruch zur Induktionsbehauptung, denn $m` > n$.

Definition Sei $M \neq 0$, M endlich, $M \sim A_n$. Dann heißt n die Kardinalität $n = \#M = |M|$.

Satz 2 Es gilt

i) Sind M,M` endlich, $M \sim M`$, so gilt #M=#M`.

ii) Teilmengen endlicher Mengen sind endlich; gilt $M` \subset M$, so folgt $\#M` \leq \#M$ mit Gleichheit genau dann, wenn M=M`.

Beweis: Übungsaufgaben

[5] g injektiv
[6] f injektiv

1.5 Abzählbare Mengen. Nichtabzählbare Mengen

Intuitiv ist klar, daß $\mathbb{N}$ unendlich (d.h. nicht endlich) ist (ist $n \in \mathbb{N}$, so sind n, n+1,n+2, ... alle voneinander verschieden). Dies ist auch formal beweisbar: wäre $\mathbb{N}$ endlich, also $\mathbb{N} \sim A_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so folgt:
wegen $A_{n+1} \subset \mathbb{N}$ (1.4 Satz 2ii) gilt
n+1=$\#A_{n+1} \leq \#\ \mathbb{N} = \#A_n = n$ Widerspruch!

Standpunkt: $\mathbb{N}$ ist die „einfachste" unendliche Menge.

Definition Eine Menge M heißt abzählbar, falls $M \sim \mathbb{N}$.

Beispiel: $\{2n | n \in \mathbb{N}\}$ ist abzählbar.

Definition Eine Folge $a_1, a_2, \ldots$ von Elementen einer Menge M ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to M$, $n \to a(n)$. Statt a(n) schreibt man a_n. Statt $a_1, a_2, \ldots$ schreibt man $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beispiele:

i) 2,4,6, ... , d.h. $a_n = 2n$ $(n \in \mathbb{N})$

ii) 1,2,1,2, ... d.h.

$$a_n = \begin{cases} 1 & : \quad n \text{ ungerade} \\ 2 & : \quad n \text{ gerade} \end{cases}$$

Offenbar ist M genau dann abzählbar, wenn es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus M gibt, so daß jedes Element von M genau einmal als Folgenglied auftritt. Dann kann man M abzählbar nennen.

Satz 1 Unendliche Teilmengen abzählbarer Mengen sind abzählbar.
Zum Beweis wird benutzt:

Satz 2 Jede nicht leere Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element, d.h. es gibt $n_0 \in M$ mit $n_0 \leq m \;\; \forall m \in M$. Dieses n_0 ist eindeutig bestimmt.

Beweis von Satz 2: Sei $A_n := \{n \in \mathbb{N} | n \leq m \; \forall m \in M\}$. Es gilt $1 \in A$, denn $1 \leq m$ sogar $\forall m \in \mathbb{N}$ (Axiom 3). Wäre mit jedem n in A auch n+1 in A, so folgte $A = \mathbb{N}$ nach Axiom 4. Aber M enthält mindestens ein Element m. Also folgte m+1$\in$ A, also $m + 1 \leq m$ Widerspruch
Also existiert $n_0 \in A$ mit $n_0 + 1 \notin A$. Dann ist n_0 kleinstes Element in M, denn wegen $n_0 \in A$ ist $n_0 \leq m \; \forall m \in M$.
Wegen $n_0 + 1 \notin A$ gibt es $m_0 \in M$ mit $n_0 + 1 > m_0$, d.h. $n_0 \geq m_0$. Aber $m_0 \geq n_0$ wegen $m_0 \in M \;\; \Rightarrow n_0 = m_0 \in M$.
Sind n_0, n_0‘ zwei kleinste Elemente in M, so gilt nach Def. $n_0 \leq n_0$‘ $\leq n_0$. Daher n_0‘ $= n_0$. Daher ist Satz 2 bewiesen.

Beweis von Satz 1: Es genügt zu zeigen, daß jede Teilmenge M von $\mathbb{N}$ abzählbar ist. Sei m das kleinste Element von M (s. Satz 2), m_2 das kleinste Element von $M \backslash \{m_1\}$, m_3 das kleinste Element von $M \backslash \{m_1, m_2\}$ usw. Dieser Prozeß kann nicht abbrechen, denn M ist unendlich. Dann ist $(m_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$

eine Abzählung von M. Es gilt $m_u \neq m_\mu (u \neq \mu)$nach Konstruktion. Außerdem tritt jedes $m \in M$ als Folgeglied auf, denn sonst gäbe es $m \in M$ mit
$m_1 < m_2 < m_3 < \cdots < m$ (sukzessive), also wäre $\underbrace{\{m_u\}_{u \in \mathbb{N}}}_{\sim \mathbb{N}} \subset A_m$, also wäre $\mathbb{N}$ endlich. Widerspruch!

Satz 3 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.

Beweis: Das folgende Schema ist eine Abzählung für $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$
\begin{array}{ccccc}
(1,1) & \rightarrow & (1,2) & & (1,3) \ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & \downarrow \\
(2,1) & \rightarrow & (2,2) & & (2,3) \ldots \\
 & & & \swarrow & \\
(3,1) & \leftarrow & (3,2) & & (3,3) \ldots \\
\cdot & & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot & & \cdot
\end{array}
$$

Korollar (Folgerung): $M_1, M_2, \ldots, M_n$ abzählbar
$\Rightarrow M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ abzählbar.

Beweis : Durch vollständige Induktion

$$M_1 \times (M_2 \times \cdots \times M_n) \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \underbrace{\sim}_{Satz 3} \mathbb{N}.$$

Satz 4 Die Menge aller Folgen $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$ ist überabzählbar, d.h. weder endlich noch abzählbar.

Beweis M ist unendlich, denn die Folgen f_k mit $f_k :\ 0,0,0,\ldots \underbrace{0,1,0}_{k-te\ Stelle}, \ldots$ sind alle paarweise verschieden. Angenommen M wäre abzählbar. Sei $f_1, f_2, \ldots$ eine Abzählung mit $f_k = (z_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$. Man setze
$f = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$z_n := \begin{cases} 1 & , \quad z_{nn} = 0 \\ 0 & , \quad z_{nn} = 1 \end{cases}$$

Dann $f \in M$, aber $f \neq f_k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Also ist M nicht abzählbar.
$\Rightarrow$ „Cantor'sches Diagonalverfahren“

Kapitel 2

Die reellen Zahlen

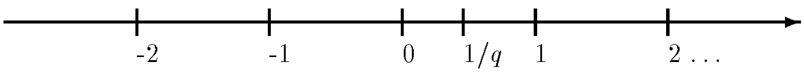
2.1 Einführende Bemerkungen

Per Definition kann man in $\mathbb{N}$ addieren und multiplizieren. Umkehrungen dieser Operationen führen zu Problemen.

x+a=b nur in $\mathbb{N}$ lösbar für $b > a$.

Lösung: Einführung von 0,-1,-2 ...

Geometrisch: Zahlengerade (gerade orientierte „Linie“)



Zeichne Punkte von 0 aus. Sei s „Urmeter“, d.h. s ist Strecke der Länge r. Man trage s sukzessive nach rechts, ausgehend von 0, ab. Die rechten Endpunkte der entstehenden Intervalle heißen 1,2,3, ...
Die Einführung der negativen natürlichen Zahlen entspricht dem Wunsch, s auch von 0 aus nach links abzutragen und den Endpunkten der entstehenden Intervalle Namen zu geben.
Umkehrung der Multiplikation (Division):

$q \cdot x = p \quad (q, p \in \mathbb{N})$

Geometrisch: Man nehme (von 0 aus) den q-ten Teil des p-fachen der Strecke s.
$\Rightarrow$ Erfindung der rationalen Zahlen durch die alten Griechen.
Hier: Wir denken uns die rationalen Zahlen. $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0, \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, -, 1, 2, \ldots\})$ (wie oben auf der Zahlgeraden dargestellt):
Beobachtung: Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ liegen „dicht“ auf der Zahlengeraden, denn in jedem vorgegebenen Intervall kann man eine rationale Zahl durch geeigneten Teilungsprozeß finden.
Frage: Füllt $\mathbb{Q}$ die Zahlengerade gänzlich aus?
Pythagoras (ca. 600 v.Chr.): Es gibt Strecken, die von 0 aus abgetragen, keine

rationale Zahl als Endpunkt haben. Man betrachte ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlänge 1.
Satz des Pythagoras: $h^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ also „$h = \sqrt{2}$ “.

Behauptung: h ist nicht rational.

Beweis durch Widerspruch. Angenommen h ist rational, also $h = \frac{q}{p}(q, p \in \mathbb{N})$. (Wir benutzen jetzt, daß jede natürliche Zahl sich eindeutig bis auf die Reihenfolge als Produkt von Primzahlen darstellen läßt.)
Nach Kürzen von gemeinsamen Faktoren kann man erreichen, daß p und q teilerfremd sind.
Es gilt : $2 = h^2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$
Es folgt: 2 teilt p^2, also p=2u. Daher:
$2q^2 = (2u)^2 = 4u^2 \Rightarrow q^2 = 2u^2 \Rightarrow^{1} q = 2v$ Widerspruch zur Teilerfremdheit von p und q.
Daher ist h nicht rational.

Die Zahlengerade enthält also „Lücken“, die nicht von $\mathbb{Q}$ ausgefüllt werden.
Eudoxos (408-355 v.Chr.) Man „stopfe“ die „Löcher“ durch Einführung einer neuen Art von Zahlen, „irrationale Zahlen“ genannt.
Cantor, Dedekind (1872): strenger Aufbau einer Theorie der irrationalen Zahlen.
$\mathbb{R}$ =reelle Zahlen und „irrationale“ Zahlen

Man kann ausgehend von $\mathbb{N}$ und seinen Axiomen die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und schließlich $\mathbb{R}$ (streng logisch) konstruieren. (siehe auch Springer: „Zahlen“)

2.2 Die Axiome der reellen Zahlen

Wir denken uns a priori gegeben eine Menge $\mathbb{R}$, reelle Zahlen genannt, die eine Reihe von Axiomen erfüllen:

A) Algebraische Axiome

B) Anordnungsaxiome

C) Axiom über die Einbettung von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$

D) Axiom von der monotonen Folge

Zu A) Es gibt Abbildungen $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,$(a, b) \mapsto a + b$ (Addition), $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(a, b) \mapsto a/b$ (oder auch $a \cdot b$) (Multiplikation) mit folgenden Regeln:

i) $a + (b + c) = (a + b) + c \qquad (\forall a, b, c \in \mathbb{R})$ (Assoziativität)

ii) $a + b = b + a \qquad (\forall a, b \in \mathbb{R})$ (Kommutativität)

iii) es gibt ein eindeutig bestimmtes Element 0 („die Null“), so daß $a + 0 = a \qquad (\forall a \in \mathbb{R})$

iv) zu jedem $a \in \mathbb{R}$ existiert ein eindeutig bestimmtes Element $b \in \mathbb{R}$ mit $a + b = 0$ (man schreibt $b = -a$) und nennt $-a$ das Negative von a.

[1] Gleiches Argument wie vorher

v) $a(bc) = (ab)c \qquad (\forall a, b, c \in \mathbb{R})$

vi) $a \cdot b = b \cdot a \qquad (\forall a, b \in \mathbb{R})$

vii) es existiert ein eindeutig bestimmtes Element $e \in \mathbb{R}, e \neq 0$, mit $a \cdot e = a \qquad (\forall a \in \mathbb{R})$

viii) zu jedem $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ existiert ein eindeutig bestimmtes $b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ mit $a \cdot b = e$ (man schreibt $b = a^{-1}$ und nennt a^{-1} das Inverse von a).

ix) $a(b + c) = ab + ac \qquad (\forall a, b, c \in \mathbb{R})$

Zu B) Wir fordern, daß auch in $\mathbb{R}$ eine Ordnungsrelation „ $<$ " gegeben ist, d.h. es gibt eine Relation $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ (statt $(a, b) \in R$ schreibt man $a < b$) mit den Eigenschaften:

i) für je zwei Elemente $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Alternativen $a < b, a = b, a > b$ ($a > b$ bedeutet $b < a$)

ii) $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$ (Transitivität)

iii) $a < b \Rightarrow a + c < b + c \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

iv) $a > 0$ und $b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$

Zu C) Wir verlangen, daß $\mathbb{N}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, derart daß die algebraische Eins e mit der natürlichen Zahl 1 zusammenfällt und daß die Addition, die Multiplikation und Ordnungsrelation „ $<$ " von $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ mit den früherdefinierten Addition, Multiplikation und Ordnungsrelation zusammenfällt.

Zu D) Um D) zu formulieren, benötigen wir Definitionen

i) Unter einer Zahlenfolge$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ versteht man eine Folge von reellen Zahlen, d.h. $a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \geq 1$.

ii) Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt beschränkt, wenn es $K \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Ein solches K heißt obere Schranke von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt nach unten beschränkt, wenn $\exists K \in \mathbb{R}$ mit $K \leq a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$. ($\exists$ =es gibt) Ein solches K heißt untere Schranke von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

iii) Man nennt $K \in \mathbb{R}$ kleinste obere Schranke von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn K erstens obere Schranke von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist und zweitens keine Schranke von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ echt kleiner als K existiert. Entsprechend wird der Begriff größte obere Schranke definiert.

iv) Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt monoton wachsend, falls $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ gilt. Sie heißt streng monoton wachsend, falls $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Entsprechend wird monoton fallend ($a_n \geq a_{n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$) und streng monoton fallend ($a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$) definiert.

Beispiele:

1) $a_n = \frac{1}{n} \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$
Diese Folge ist beschränkt und streng monoton fallend ($0 < \frac{1}{n} \leq 1$, und $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$; formaler Beweis später)

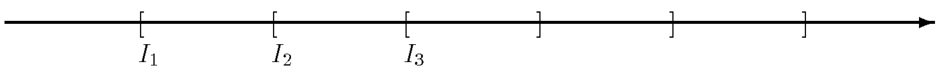
2) $a_n = n^2 \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$: 1,4,9, ...
   Diese Folge ist nach unten beschränkt, nicht nach oben beschränkt und streng monoton wachsend (formaler Beweis später).

3) $a_n = (-1)^n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$: -1,1,-1, ...
   beschränkt und nicht monoton fallend

Zu D) Jede monoton wachsende (bzw. monoton fallende) beschränkte Zahlenfolge besitzt eine kleinste obere (bzw. größte untere) Schranke.
Dieses Axiom impliziert: „Die Zahlengerade hat keine Löcher.“

Man kann Axiom D) dazu benutzen, zu zeigen, daß die Zahlengerade keine Löcher hat. Genauer: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, dann heißt $I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ kompaktes Intervall mit Endpunkten a und b.

Satz Sei $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von kompakten Intervallen mit $I_{n+1} < I_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$. Man sagt, die Intervalle sind geschachtelt.



Dann $\exists\, s \in \mathbb{R}$ mit $s \in I_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Bemerkung: Der Satz ist „interessant“, falls die Länge “$b_n - a_n$” gegen Null geht, für „$n \to \infty$“.

Beweis: Sei $I_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n \leq b_n$.
Es gilt nach Voraussetzung

$$I_m \subset I_n \qquad \forall m \geq n$$

Das heißt:

$$a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n \qquad \forall m \geq n \tag{2.1}$$

Hieraus folgt:

$$a_n \leq b_m \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

$$a_m \leq b_n \qquad \forall m \geq n$$

Statt m schreibe n.
Statt n schreibe m.

$$a_n \leq b_m \qquad \forall n \geq m$$

D.h. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt, und jedes b_m $(m \in \mathbb{N})$ ist obere Schranke. Mit $m = n + 1$ in (2.1) folgt $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, d.h. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

ist monoton wachsend.
Nach Axiom D) hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine kleinste obere Schranke, sei diese s. Da s obere Schranke ist, gilt $a_n \leq s, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Da s kleinste obere Schranke und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $b_m(m \in \mathbb{N})$ nach oben beschränkt ist, gilt nach Definition der kleinsten oberen Schranke $s \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, also $s \leq b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Daher folgt $a_n \leq s \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, also $s \in I_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ q.e.d

2.3 Folgerungen aus den algebraischen Axiomen

Notationen: $a - b = a + (-b), \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} \ \forall a, b \in \mathbb{R}, \, b \neq 0$$

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup (-\mathbb{N}) = \text{ Die Menge der ganzen Zahlen}$$

$$-\mathbb{N} := \{x \in \mathbb{R} | x = -n\} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{Q} = \text{Die Menge der rationalen Zahlen } = \{\frac{p}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

Satz 1 i) Für $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $x + a = b$ genau eine Lösung, nämlich $x = b - a$.

ii) Für $a, b \in \mathbb{R}$,$a \neq 0$ hat $a \cdot x = b$ genau eine Lösung nämlich $x = \frac{b}{a}$

Beweis i) Sei $x = b - a$. Dann gilt:

$x + a = (b - a) + a = (b + (-a)) + a = b + ((-a) + a) = b + 0 = b$ nach Axiom D)

Sei x irgendeine Lösung von $x + a = b$. Dann gilt

$b - a = (x + a) - a = x + (a - a) = x + 0 = x$ nach Axiom D) q.e.d

ii) genauso

Satz 2 i) $-0 = 0, \qquad a = -(-a) \qquad \forall a \in \mathbb{R}$

ii) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R}$

iii) $-a = (-1) \cdot a$

Beweis i) Es gilt

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + (-0) = 0$$

ferner

$$a + (-a) = 0 \Rightarrow a = -(-a)$$

wegen der Eindeutigkeit des negativen Elements.

ii)

$$\underbrace{a \cdot (0+0)}_{a \cdot 0} = a \cdot 0 + a \cdot 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Satz 1 i)}} a \cdot 0 = 0$$

iii)

$$0 = a \cdot 0 = a(1-1) = a \cdot 1 + a \cdot (-1) = a + (-1) \cdot a \Rightarrow -a = (-1)a$$

Satz 3: (Vorzeichenregel)
Es gilt $(-a)(-b) = a \cdot b$ und $(-a)(b) = a(-b) = -(ab)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, ferner $(-a)^{-1} = -a^{-1}$ $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Beweis Man benutze Satz 2 iii)
z.B.

$$-(ab) = (-1)(ab) = ((-1)a)b = (-a)b \quad \text{usw.} \qquad \text{q.e.d}$$

Satz 4 Es gelte $a \cdot b = 0 \qquad (a, b \in \mathbb{R})$
Dann folgt $a = 0$ oder $b = 0$.

Beweis Ist $a = 0$, so ist nichts zu zeigen.
Sei $a \neq 0$. Dann $\exists a^{-1}$, und es folgt aus $a \cdot b = 0$, daß $a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0$
$\Rightarrow a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1b = b = 0$ q.e.d.

Definition (Summe, Produktzeichen)
Seien a_1, a_2, ... reelle Zahlen. Man definiert

$$\sum_{\nu=i}^{n} a_\nu = \begin{cases} a_1 & \text{, falls } n = 1 \\ \left(\sum\limits_{\nu=1}^{n-1} a_\nu\right) + a_n & \text{, falls } n > 1 \end{cases}$$

Ferner setzt man

$$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu = \begin{cases} a_1 & \text{, falls } n = 1 \\ \left(\prod\limits_{\nu=1}^{n-1} a_\nu\right) \cdot a_n & \text{, falls } n > 1 \end{cases}$$

Man kann die „üblichen" Regeln schreiben, z.B. gilt

i)

$$\sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu + b_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu$$

ii)

$$a \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} a a_\nu$$

iii)

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)\left(\sum_{\mu=1}^{m} b_\mu\right) = \sum_{\substack{\nu=1,\dots,n \\ \mu=1,\dots,m}} a_\nu b_\mu = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\sum_{\mu=1}^{m} a_\nu b_\mu\right) = \sum_{\mu=1}^{m}\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\mu\right)$$

Definition (Potenzen)
Sei $a \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ setzt man

$$a^n := \begin{cases} a & , n = 1 \\ a^{n-1}a & , n > 1 \end{cases}$$

$$a^{-n} := \begin{cases} a^{-1} & , n = 1 \\ a^{-(n-1)}a^{-1} & , n > 1 \end{cases}$$

Es gilt dann $a^m \cdot a^n = a^{m+n} (a \in \mathbb{R}, a \neq 0, n, m \in \mathbb{Z})$. Für $a \neq 0$ setzt man $a^0 := 1$ (Manchmal setzt man auch $0^0 := 1$, Vorsicht!).

Satz 5 (Rechnen mit Brüchen)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd} \qquad (\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, b, d \neq 0)$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \qquad (\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, b, d \neq 0)$$

Beweis Übungsaufgaben

2.4 Fakultät, Binomialkoeffizienten

Definition Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann setzt man

$$n! := \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ (n-1)!n & , n > 1 \end{cases}$$

Ferner $0! = 1$.

Man kann zeigen, es gibt genau $n!$ bijektive Abbildungen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ auf sich.

Definition Sei $n \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{N}_0, \nu \leq n$, dann setzt man

$$\binom{n}{\nu} := \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$$

Beispiel

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n$$

Satz 1 i)

$$\binom{n}{\nu} = \binom{n}{n-\nu}$$

ii)

$$\binom{n}{\nu} + \binom{n}{\nu+1} = \binom{n+1}{\nu+1} \qquad 0 \leq \nu \leq n-1$$

Hieraus folgt induktiv, daß $\binom{n}{\nu} \in \mathbb{N}$.

iii) $\binom{n}{\nu}$ ist die Anzahl der r-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

Beweis i) klar!

ii)

$$\begin{aligned}
\binom{n}{\nu} + \binom{n}{\nu+1} &= \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} + \frac{n!}{(\nu+1)!(n-\nu-1)!} \\
&= \frac{n!}{\nu!(n-\nu-1)!}\left(\frac{1}{n-\nu} + \frac{1}{\nu+1}\right) \\
&= \frac{n!}{\nu!(n-\nu-1)!} \cdot \frac{\nu+1+n-\nu}{(n-\nu)(\nu+1)} \\
&= \frac{n!}{\nu!(n-\nu-1)!} \cdot \frac{n+1}{(n-\nu)(\nu+1)} \\
&= \frac{(n+1)!}{(\nu+1)!(n-\nu)!} \\
&= \binom{n+1}{\nu+1}
\end{aligned}$$

q.e.d.

iii) Läßt sich mit Hilfe des „Pascal‘schen Dreiecks“ veranschaulichen. $\left(\binom{0}{0} := 1\right)$.

$$\begin{array}{ccccccccccc|l}
 & & & & & 1 & & & & & & n=0 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & n=1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & n=2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & n=3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & n=4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & n=5
\end{array}$$

Satz 2 (Binomischer Lehrsatz)
Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} b^{\nu}$$

Beweis durch vollständige Induktion nach n

<u>*Induktionanfang:*</u> $n = 1$

Linke Seite: $(a+b)^1 = a+b$
Rechte Seite: $\binom{1}{0}a^1 b^0 + \binom{1}{1}a^0 b^1 = a+b \qquad \surd$

<u>*Induktionsschluß:*</u> Unter der Annahme der Behauptung für n zeige man die Behauptung für $n+1$. Es gelte also:

$$(a+b)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} b^{\nu}$$

Dann folgt:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&\underbrace{=}_{\text{Induktions-anfang}} (a+b)\left(\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} b^{\nu}\right) \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^{n+1-\nu} b^{\nu} + \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} b^{\nu+1} \\
&\qquad \text{Setze } \mu = \nu + 1 \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^{n+1-\nu} b^{\nu} + \sum_{\nu=1}^{n+1} \binom{n}{\mu-1} a^{n+1-\mu} b^{\mu} \\
&\qquad \text{Setze wieder } \mu = \nu \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^{n+1-\nu} b^{\nu} + \sum_{\nu=1}^{n+1} \binom{n}{\nu-1} a^{n+1-\nu} b^{\nu} \\
&= \underbrace{a^{n+1}}_{\text{0-ter Term}} + \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} a^{n+1-\nu} b^{\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu-1} a^{n+1-\nu} b^{\nu} + \underbrace{b^{n+1}}_{(n+1)\text{-ter Term}} \\
&= a^{n+1} + \sum_{\nu=1}^{n} \left(\left[\binom{n}{\nu} + \binom{n}{\nu+1}\right] a^{n+1-\nu} b^{\nu}\right) + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n+1}{\nu} a^{n+1-\nu} b^{\nu} + b^{n+1} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{n+1}{\nu} a^{n+1-\nu} b^{\nu}
\end{aligned}$$

q.e.d

2.5 Rechnen mit Ungleichungen, Absolutbetrag

$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} | x > 0\} =$ die Menge der positiven reellen Zahlen

Satz 1 i) $a > 0,\ b > 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$

ii) $a < 0,\ b > 0 \Rightarrow a \cdot b < 0$

iii) $a < 0,\ b < 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$

Beweis i) ist Axiom B iv)

iii) $a < 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Axiom B}} a + (-a) < 0 + (-a)$, d.h. $0 < -a$

genauso $0 < -b$

Nach i) folgt daher $0 < (-a)(-b) \underbrace{=}_{\text{2.3 Satz 3iii)}} ab$

Satz 2 i) $a < b$ und $c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

ii) $a < b$ und $c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

Beweis i) $a < b \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Axiom B iii)}} 0 < b - a$

$\Rightarrow \underbrace{0 < (b-a)c}_{\text{Satz 1i)}} = bc - ac$

$\Rightarrow ac < bc$ q.e.d.

ii) ähnlich

Satz 3 $0 < 1$

Beweis Es gilt $1 = e \neq 0$ (nach C und A viii)). Nach B) gilt also entweder $1 < 0$ oder $1 > 0$.
Angenommen $1 < 0$
Dann folgte $1 = 1 \cdot 1 > 0$ nach Satz 1 iii), also wäre $1 > 0$ als auch $1 < 0$
Widerspruch!!
Also ist die Annahme $1 < 0$ nicht wahr, also gilt $1 > 0$. q.e.d.

Korollar $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $n > 0$.

Beweis Es ist $n \geq 1 > 0$.

Satz 4

$$0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

Beweis Es gilt $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. Wegen $1 > 0$ und $a > 0$ folgt $\frac{1}{a} > 0$, sonst Widerspruch zu Satz 1. Genauso $\frac{1}{b} > 0$. Daher folgt aus $a < b$

$$\frac{1}{a} \cdot a < \frac{b}{a} \quad \text{d.h.} \quad 1 < \frac{b}{a} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Satz 2}} \frac{1}{b} < \frac{1}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{1}{a} \qquad \text{q.e.d.}$$

Satz 5 i) $a \geq 0, a^n \geq b^n$ für ein $n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow a \geq b$

ii) $a \geq 0, b \geq 0, a^n = b^n$ für ein $n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow a = b$

Beweis i) Angenommen, es ist nicht $a \geq b$. Dann gilt $a < b$.
Gilt $a = 0$, so folgt $0 < b$ also $0 < b^n$, d.h. $a^n < b^n$. Widerspruch zur Voraussetzung

Sei $a > 0$. Dann folgt aus $a < b$
$a^2 < ba < b^2$ (Satz 2), also $a^2 < b^2$. Dann folgt $a^3 < ab^2 < b^3$ usw. Widerspruch zur Voraussetzung q.e.d.

ii) Angenommen $a \neq b$. Dann ist $a > b$ oder $a < b$. Es folgt hieraus wie unter i), daß $a^n > b^n$ oder $b^n > a^n$. Widerspruch zur Voraussetzung $\Rightarrow a = b$.

Definition Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann setzt man

$$|a| := \begin{cases} a & \text{, falls } a \geq 0 \\ -a & \text{, falls } a \leq 0 \end{cases}$$

Sprich „a absolut“.
Setze

$$\text{sign } (a) := \begin{cases} 1 & \text{, falls } a > 0 \\ 0 & \text{, falls } a = 0 \\ -1 & \text{, falls } a < 0 \end{cases}$$

„Vorzeichen von a“

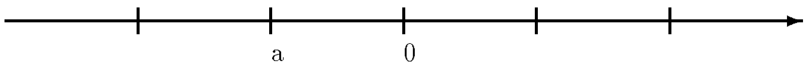
Lemma i) $|a| = a \cdot \text{sign}\,(a)$

ii) $|0| = 0$, $|a| > 0$ für $a \neq 0$

iii) $|-a| = |a|$

iv) $a^2 = |a|^2$

v) $-|a| \leq a \leq |a|$



$|a| =$ Abstand von zum Nullpunkt

1) Sei $a > 0$. Dann ist
$|a| = a$, a sign$(a) = a \cdot 1 = a$ q.e.d.

Sei $a = 0$. Dann ist
$|0| = 0$, $0 \cdot \text{sign} \cdot 0 = 0$ q.e.d.

Sei $a < 0$. Dann ist
$|a| = -a$, $a \cdot \text{sign}(a) = a \cdot (-1) = -a$ q.e.d.

Beweis: ii),iii),iv) klar!

5) Fallunterscheidung
$a = 0 \quad \surd$
$a > 0: \quad -|a| \le a \le |a|$
$\Leftrightarrow -a \le a \le a$ denn $a \le a \; \forall a \in \mathbb{R}$
und $-a \le a \Leftrightarrow 2a \ge 0 \Leftrightarrow a > 0$
$a < 0: \quad -|a| \le a \le |a|$
$\Leftrightarrow -(-a) \le a \le -a, \; a \le a \le -a$
richtig, denn $a < 0$

Satz 6 1) $|a| \ge 0, \; |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2) $|a \cdot b| = |a|\,|b|$
3) $|a + b| \le |a| + |b|$ („Dreiecksungleichung")

Man sagt, daß $|\cdot|$ eine Norm auf $\mathbb{R}$ definiert.

Beweis 1) s.Lemma
2) Es gilt $(|ab|)^2 \underbrace{=}_{\text{Lemma iv}} (ab)^2 = a^2b^2 = |a|^2|b|^2 = (|a|\,|b|)^2$
Daher folgt aus Satz 5ii) wegen $|ab| \ge 0, \; |a|\,|b| \ge 0$, daß $|a|\,|b| = |ab|$
3) $|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2 \underbrace{\le}_{\text{Lemma v}} |a|^2 + 2|ab| + |b|^2 = |a|^2 + 2|a|\,|b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$.
Daher folgt $|a + b| \le |a| + |b|$ q.e.d.

Korollar 1) Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \right| \le \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu|$$

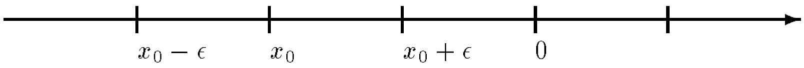
2) $||a| - |b|| \le |a - b|$

Beweis 1) durch vollständige Induktion nach n
$|a + b + c| = |(a + b) + c| \le |a + b| + |c| \le |a| + |b| + |c|$
2) $|a| = |(a - b) + b| \le |a - b| + |b|$ („Dreiecksungleichung")
$|b| = |(b - a) + a| \le |b - a| + |a| = |a - b| + |a|$
$\Leftrightarrow |a| - |b| \le |a - b|$
$-\,(|a| - |b|) \le |a - b|$
$\Rightarrow ||a| - |b|| \le |a - b|$

Satz 7 1) $|x| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < x < \epsilon$
2) $|x - x_0| < \epsilon \Leftrightarrow x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$

Beweis 1) Sei $|x| < \epsilon$. Nach Lemma V gilt $-|x| \le x \le |x|$. Aus $|x| < \epsilon$ (oder $-|x| > -\epsilon$) folgt also
$-\epsilon < -|x| \le x \le |x| < \epsilon$
Sei $-\epsilon < x < \epsilon$. Sei $x > 0$. Dann ist $|x| = x$, also folgt $|x| < \epsilon$. Sei $x < 0$. Dann ist $|x| = -x$ dann folgt aus $-\epsilon < x$, daß $-x < \epsilon$, d.h. $|x| < \epsilon$ q.e.d.

2) In i) ersetze man x durch $x - x_0$. Dann ist also nach i) $|x - x_0| < \epsilon$ äquivalent zu $-\epsilon < x - x_0 < \epsilon \Leftrightarrow x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$ q.e.d.

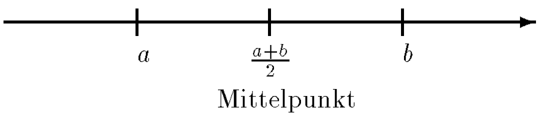


Definition Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann heißt $|x - y| = |y - x|$ der Abstand von x und y.

Satz 8 1) $|x - y| \geq 0, \ |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$
2) $|x - y| = |y - x|$
3) $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$

Beweis i)+ii) folgt aus Satz 6
iii)$|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|$ q.e.d.

Definition Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann heißen die Mengen
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} | \, a < x < b\}$
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$
$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$
$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$
Intervalle mit Endpunkten a und b. Genauer heißt (a, b) offen,$[a, b]$ abgeschlossen (bzw. kompaktes) Intervall. Ferner nennt man $(a, b], [a, b)$ halboffene Intervalle.



Definition Sei $x_0 \in \mathbb{R}, \ \epsilon \in \mathbb{R}, \ \epsilon > 0$. Dann heißt
$U_\epsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R} | \, |x - x_0| < \epsilon\}$ ϵ-Umgebung von x_0. Bemerkung: Es ist $U_\epsilon(x_0) = \{x_0 - \epsilon, \, x_0 + \epsilon\}$ Satz 7, also $U_\epsilon(x_0)$ offenes Intervall mit Endpunkten $x_0 - \epsilon, \ x_0 + \epsilon$ und Mittelpunkt x_0 und „Länge" 2ϵ.

Satz 9 Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gelte $|x| \leq \epsilon \ \ \forall \epsilon \in \mathbb{R}, \ \epsilon > 0$. Dann ist $x = 0$.

Beweis Angenommen $x \neq 0$. Dann ist $|x| > 0$. Setze $\epsilon := 1/2|x|$. Nach Voraussetzung gilt dann

$$|x| \leq \frac{|x|}{2} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{wegen } |x| > 0} 1 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \leq 1 \quad \text{Widerspruch}$$

Also muß gelten $x = 0$. q.e.d.

2.6 Einige nützliche Ungleichungen

Satz 1 (Bernoulli-Ungleichung)
Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ oder $-1 < a < 0$. Dann gilt: $(1+a)^n > 1 + n \cdot a$

Beweis Für $a > 0$ folgt dies aus dem binomischen Lehrsatz, denn

$$\begin{aligned}
(1+a)^n &= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu [1^{n-\nu}] \\
&= \binom{n}{0} a^0 + \binom{n}{1} a^1 + \sum_{\nu=2}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu = 1 + n \cdot a + \sum_{\nu=2}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu \\
&> 1 + na \quad \text{wegen } a > 0
\end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall Beweis durch Induktion nach n
Induktionsanfang: $n = 2 \quad (1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$ wegen $a \neq 0$
Induktionsschluß auf $n+1$: Es gelte also $(1+a)^n > 1 + na$
Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(1+a)^{n+1} &= (1+a)(1+a)^n > (1+a)(1+na) \\
&\text{Wegen } 1 + a > 0 \text{ nach Voraussetzung} \\
&= 1 + na + a + na^2 = 1 + (n+1)a + na^2 \\
&> 1 + (n+1)a \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Satz 2 Sei $q \in (0,1)$. Dann gilt $1 + q + q^2 + \cdots + q^n < \frac{1}{1-q} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis Setze $s_n := 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$
Dann gilt $qs_n = q + q^2 +^3 + \cdots + q^n + q^{n+1}$
Daher

$$\begin{aligned}
s_n(1-q) &= s_n - qs_n = 1 - q^{n+1} \\
\Rightarrow s_n &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} < \frac{1}{1-q} \quad \text{denn} \\
1 - q^{n+1} < 1 &\Leftrightarrow 0 < q^{n+1} \quad \text{richtig, denn } q > 0
\end{aligned}$$

Satz 3 Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

Bemerkung: Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist also (streng) monoton wachsend und beschränkt. Nach Axiom D) hat also $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine kleinste obere Schranke, etwa e. (Wir werden „e“ später auf etwas andere Weise einführen).

Beweis

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} & < & \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \quad (n \geq 2) \\
\Leftrightarrow & \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} & < & \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \\
\Leftrightarrow & \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} & < & \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \\
\Leftrightarrow & \frac{n-1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} & < & \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \\
\Leftrightarrow & \frac{n-1}{n} & < & \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}} = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^{n} \\
\Leftrightarrow & \frac{n-1}{n} & < & \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n} \\
\Leftrightarrow & 1-\frac{1}{n} & < & \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n} \qquad (*)
\end{array}
$$

$(*)$ ist richtig, denn setzt man in Satz 1 $a = -\frac{1}{n^2}$, so folgt

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n} > 1-\frac{1}{n}$$

Daher (wegen „ $\Leftrightarrow$ “) ist auch i) richtig. ii) z.z.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < 3$$

Nach dem binomischen Lehrsatz gilt:

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\cdot\frac{1}{n^\nu} = \binom{n}{0}\cdot\frac{1}{n^0}+\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\sum_{\nu=2}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{1}{n^\nu}\\
&= 2+\sum_{\nu=2}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{1}{n^\nu}
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\binom{n}{\nu}\cdot\frac{1}{n^\nu} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)}{v!}\cdot\frac{1}{n^\nu}\\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-\nu+1)}{n^\nu}\cdot\frac{1}{v!}\\
&= \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-(\nu-1)}{n}\cdot\frac{1}{\nu!}\\
&= 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{\nu!}\\
&\leq 1\cdot 1\cdots 1\cdot\frac{1}{\nu!}=\frac{1}{\nu!}\\
&= \frac{1}{2\cdot 3\cdots\nu}\leq\frac{1}{2^{\nu-1}} \qquad (\nu\geq 2)\\
\Leftrightarrow \binom{n}{\nu}\frac{1}{n^\nu} &\leq \frac{1}{2^{\nu-1}}
\end{aligned}$$

Daher folgt:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2+\sum_{\nu=2}^{n}\binom{n}{\nu}\frac{1}{n^\nu}\leq 2+\sum_{\nu=2}^{n}\frac{1}{2^{\nu-1}} = 2+\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{2^\nu} \underbrace{<}_{\substack{\text{Satz 2}\\ \text{mit } q=\frac{1}{2}}} 2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2+1=3 \quad \text{q.e.d.}$$

Satz 4 („Schwarz'sche Ungleichung“)
Für zwei n-Tupel reeller Zahlen $(a_1,\ldots,a_n =$ und $(b_1,\ldots,b_n)$ gilt stets

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu b_\nu\right)\leq\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^2\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu^2\right)$$

Beweis Sei

$$A:=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^2,\qquad B:=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu b_\nu,\qquad C:=\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu^2$$

Für $t\in\mathbb{R}$ gilt:

$$0\leq\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu+tb_\nu)^2=\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^2+2ta_\nu b_\nu+t^2b_\nu^2)=A+2tB+t^2C \qquad (*)$$

Fallunterscheidung

1) $C=0$, dann ist $b_\nu=0\;\forall\nu$, also ist auch $B=0$, und die zu beweisende Ungleichung ist trivialerweise richtig.

2) $C \neq 0$. In $(*)$ setze $t = \frac{-B}{C}$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
0 &\leq A + 2\left(\frac{-B}{C}\right)B + \left(\frac{-B}{C}\right)^2 \cdot C \\
&= A - \frac{2B^2}{C} + \frac{B^2}{C^2} \cdot C \\
&= A - \frac{B^2}{C} \quad | \cdot C \quad (\text{ beachte } C > 0) \\
\Rightarrow \ 0 &\leq AC - B^2 \\
\Rightarrow B^2 &\leq AC \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Kapitel 3

Folgen, Reihen und Mengen reeller Zahlen

3.1 Der Satz von Eudoxox-Archimedes

Satz Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann $\exists\, n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$.

Beweis Angenommen, dies ist nicht richtig. Dann $\exists a \in \mathbb{R}$ mit $n \leq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$. daher ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := n$ beschränkt. Da die Folge a_n monoton wachsend ist, hat sie nach Axiom D eine kleinste obere Schranke b. Wegen $0 < 1$ gilt $b - 1 < b$. Daher ist $b - 1$ keine obere Schanke von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Daher $\exists k \in \mathbb{N}$ mit $b-1 < k$. Es folgt $b < k+1 \in \mathbb{N}$, daher kann b nicht obere Schranke von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sein. Widerspruch. Daher ist unsere Annahme falsch und es gilt die Behauptung des Satzes.

Korollar Sei $\epsilon \in \mathbb{R},\ \epsilon > 0$. Dann $\exists N \in \mathbb{N}$, so daß $\forall\, n > N,\ n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{n} < \epsilon$.

Beweis Im Satz setze man $a := \frac{1}{\epsilon}$. Nach Satz $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\epsilon} < N < n$ ($\forall\, n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$). q.e.d.

3.2 Grenzwertbegriff. Konvergente und divergente Folgen

Definition Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent, wenn es eine reelle Zahl a gibt mit folgender Eigenschaft: zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R},\ \epsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl $N = N(\epsilon)$ derart, daß

$$|a_n - a| < \epsilon \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > N$$

Äquivalent dazu ist: in jeder ϵ-Umgebung $U_\epsilon(a)$ ($\epsilon > 0$) liegen „fast alle" (d.h. alle bis auf endlich viele) Glieder der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Man sagt dann, daß $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den Limes (Grenzwert) a konvergiert (strebt), im Zeichen $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.
Man sagt auch, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ existiert, wenn obiger Sachverhalt vorliegt.

Definition Ist die Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergent, heißt sie divergent.
Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, so heißt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge.

Beispiele 1) $a_: = \frac{1}{n}$. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist Nullfolge, d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, wie aus dem Korollar zum Satz 3.1.

$$|a_n - a| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \epsilon \quad \forall n > N$$

2)

$$a_n = \frac{n+1}{n} \qquad \text{Behauptung: } \lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

Beweis: Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Nach Korollar zu Satz 3.1, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ derart, daß $\frac{1}{n} < \epsilon$
$\forall\, n \in \mathbb{N}, n > N$. Dann folgt:

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon \;\; \forall\, n > N$$

3)

$$a_n := (-1)^n \qquad \text{Behauptung: } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist divergent.}$$

Denn: Angenommen $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ existiert. Sei $\epsilon = \frac{1}{2}$. Dann existiert also $N \in \mathbb{N}$ mit

$$(*) \quad |a_n - a| < \frac{1}{2} \quad \forall\, n > N$$

Es gilt

$$\begin{aligned} |a_{N+2} - a_{N+1}| &= |(a_{N+2} - a) + (a - a_{N+1})| \\ &\leq |(a_{N+2} - a| + |a_{N+1} - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{wegen } (*) \end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} |a_{N+2} - a_{N+1}| &= |(-1)^{N+2} - (-1)^{N+1}| \\ &= |(-1)^N \cdot \left((-1)^2 + 1\right)| = |(-1)^N| \cdot |2| = 2 \end{aligned}$$

Also folgt $2 < 1$ Widerspruch!! Daher divergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Satz Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

Beweis Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} a_n$
z.z $a = b$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Nach Voraussetzung existieren N_1, N_2 mit

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall\, n < N_1 \qquad\qquad |a_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\, n > N_2$$

Sei $N := \max\{N_1,\, N_2\}$.
Dann folgt

$$\begin{aligned} |a-b| &= |(a-a_n)+(a_n-b)| \\ &\leq |a_n-a|+|a_n-b| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} \\ & \text{ für } n > N \end{aligned}$$

Also gilt $|a-b| < \epsilon \ \ \forall\, \epsilon > 0$. Daher folgt $a-b=0$, d.h. $a=b$ nach Satz 2.5.8. q.e.d.

3.3 Rechenregeln für konvergente Folgen

Satz 1 („Notwendige Konvergenzbegingung“)
Eine konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis Sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Sei $\epsilon = 1$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$|a_n - a| < 1 \qquad\qquad \forall n > N$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} |a_n| &= |(a_n-a)+a| \leq |a_n-a|+|a| \\ &< 1+|a| \qquad \text{für } n > N \end{aligned}$$

Setze $K := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, 1+|a|\}$. Dann gilt:
$|a_n| \leq K \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ q.e.d.

Satz 2 Seien $(a_n)_{n\,\in N}$ und $(b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ konvergent. Dann gilt:

i) Die Folgen $(a_n+b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$, $(a_n-b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$, $(a_n\cdot b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ und $(|a_n|)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ sind konvergent und es gilt:

$$\begin{aligned} \lim(a_n+b_n) &= \lim a_n + \lim b_n \\ \lim(a_n-b_n) &= \lim a_n - \lim b_n \\ \lim(a_n\cdot b_n) &= \lim a_n \cdot \lim b_n \\ \lim(|a_n|) &= |\lim a_n| \end{aligned}$$

ii) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so konvergiert auch $(a_n+\lambda)_{n\,\in N}$, $(a_n\cdot\lambda)_{n\,\in N}$ und $\lim(a_n+\lambda) = \lim a_n + \lambda$, $\lim(a_n\cdot\lambda) = (\lim a_n)\cdot\lambda$

iii) Ist $a_n \neq 0 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ und $\lim a_n \neq 0$, so gilt:

$$\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim a_n} \qquad \text{und} \qquad \lim\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \frac{\lim b_n}{\lim a_n}$$

Beweis Sei $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben.
Dann $\exists\, N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad (\forall\, n > N_1)$
und $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \quad (\forall\, n > N_2)$
Sei $N := \max\{N_1, N_2\}$. Dann folgt für $n > N$

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| \leq |a_n-a|+|b_n-b| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

D.h. $a_n + b_n \longrightarrow a + b (n \to \infty)$ q.e.d.
Genauso $\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$.

Es gilt:

$$a_n b_n - ab = (a_n - a)b + (b_n - b)a_n$$

Nach Satz 1 $\exists\, K > 0$, so daß $|a_n| \leq K \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ Daher folgt $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &\leq |a_n - a|\,|b| + |b_n - b|\,|a_n| \\ &\leq |a_n - a|\,|b| + |b_n - b| K \end{aligned}$$

Sei $\epsilon > 0$. Wegen $\lim b_n = b \quad \exists\, N_1 \in \mathbb{N}$, so daß $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2K} \quad \forall\, n > N_1$. Wegen $\lim a_n = a \quad \exists\, N_2 \in \mathbb{N}$, so daß $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2+2|b|} \quad \forall\, n > N_2$. Sei $N := \max\{N_1, N_2\}$. Dann folgt für $n > N$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &\leq \frac{\epsilon}{2 + 2|b|} \cdot |b| + \frac{\epsilon}{2K} \cdot K \\ &= \frac{\epsilon}{2} \cdot \underbrace{\frac{|b|}{1 + |b|}}_{<1} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$|\,|a_n| - |a|\,| \leq |a_n - a| \Rightarrow |a_n| = |a|$$

ii) folgt aus i) mit $b_n := \lambda \;\; (\forall\, n \in \mathbb{N})$, $\lim b_n = \lambda$
iii) Da $a \neq 0$, $\exists\, N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| > \frac{|a|}{2} \quad \forall\, n > N_1$. Denn:
Setze $\epsilon := \frac{|a|}{2} > 0$. Dann gilt mit geeignetem $N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N_1$

$$\begin{aligned} |\,|a_n| - |a|\,| &\leq |a_n - a| < \epsilon \\ \Leftrightarrow -\epsilon &< |a_n| - |a| < \epsilon \\ |a_n| > |a| - \epsilon &= \frac{|a|}{2} \quad (\forall\, n > N_1) \end{aligned}$$

Daher gilt für $n > N_1 (\frac{1}{a_n} < \frac{2}{|a|})$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| &= \left| \frac{a - a_n}{a_n \cdot a} \right| = \left| \frac{a_n - a}{a_n \cdot a} \right| \\ &< \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{|a|} \cdot |a_n - a| < \frac{2}{|a|^2} |a_n - a| \end{aligned}$$

Sei $\epsilon > 0$. Dann $\exists\, N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{|a|^2}{2} \cdot \epsilon \quad \forall\, n > N_2$ Sei $N := \max\{N_1, N_2\}$. Dann gilt also für $n > N$

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| < \frac{2}{|a|^2} |a_n - a| < \frac{2}{|a|^2} \cdot \frac{|a|^2}{2} \cdot \epsilon = \epsilon \quad \text{q.e.d}$$

2. Aussage in iii) folgt aus i) und dem gerade Bewiesenen.

Satz 3 Es gelte $\lim a_n = 0$ und $\exists\, K > 0$ mit $|b_n| \leq K \quad \forall\, n > N$. Dann folgt $\lim a_n b_n = 0$.

Beweis Sei $\epsilon > 0$. Dann $\exists N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n| < \frac{\epsilon}{K} \qquad \forall\, n > N$$

Daher folgt:

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n|\,|b_n| < \frac{\epsilon}{K} \cdot K = \epsilon \qquad \forall\, n > N$$

Daher $\lim a_n\, b_n = 0$.

Satz 4 Es gelte $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ und $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a \leq b$.

Beweis Angenommen $a > b$.

$$\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n = a - b > 0$$

. Setze $\epsilon := \frac{a-b}{2} > 0$. Dann $\exists\, N \in \mathbb{N}$, so daß

$$\begin{aligned} |(a_n - b_n) - (a - b)| &< \epsilon \qquad \forall\, n > N \\ &\Rightarrow \\ 0 < \frac{a-b}{2} &= a - b - \epsilon < a_n - b_n < (a - b) + \epsilon \end{aligned}$$

Daher folgte $a_n - b_n > 0$, d.h. $a_n > b_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ Widerspruch. Also gilt $a \leq b$.

3.4 Der Satz von der monotonen Folge

Satz Eine monotone, beschränkte Zahlenfolge ist konvergent.

Beweis Sei z.B. $(a_n)_{n\,\in N}$ monoton wachsend und beschränkt. Nach Axiom D) hat $(a_n)_{n\,\in N}$ eine kleinste obere Schranke. Sei diese a. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann $\exists\, N \in \mathbb{N}$ mit $a - \epsilon < a_N$, denn sonst wäre a nicht kleinste obere Schranke. Wegen $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ folgt $a - \epsilon < a_N \leq a_n \leq a < a + \epsilon$, also $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$, d.h.

$$|a_n - a| < \epsilon \qquad \forall\, n > N$$

Zusatz Wir haben gezeigt: eine monoton wachsende, beschränkte Zahlenfolge konvergiert gegen ihre kleinste obere Schranke.

Nachtrag zu Kapitel 3.3

Definition: Eine Folge $(b_p)_{p\,\in\,\mathbb{N}}$ heißt *Umordnung* einer anderen Folge $(a_n)_{n\,\in N}$, wenn es eine bijektive Abbildung $p \to n_p$ von $\mathbb{N}$ auf sich selbst gibt derart, daß $b_p = a_{n_p}$ ist $\quad \forall\, p \in \mathbb{N}$.

Definition: Eine Folge $(b_p)_{p\,\in\,\mathbb{N}}$ heißt *Teilfolge* von $(a_n)_{n\,\in N}$, wenn es eine Abbildung $p \to n_p$ von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ gibt, derart daß $n_1 < n_2 < n_2 \ldots$ und $b_p = a_{n_p} \quad \forall\, p \in \mathbb{N}$ ist.

Beispiel: $a_n = \frac{1}{n}$, $\quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\frac{1}{4} \dots$ dann ist $(b_n)_{n\in N}$ mit $b_n = \frac{1}{2n}$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in N}$.

Satz 5: Sei $\lim\limits_{n\to infty} a_n = a$. Dann konvergiert auch jede Umordnung und jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in N}$ gegen a.

Satz 6: Eine monotone, beschränkte Zahlenfolge konvergiert.

Beispiele

1) $a_n = q^n$
Behauptung: Für $|q| < 1$ gilt $\lim a_n = 0$
Beweis: Für eine beliebige Folge $(c_n)_{n\in N}$ gilt $\lim c_n = 0 \Leftrightarrow \lim |c_n| = 0$. Daher genügt es, den Fall $0 \leq q < 1$ zu betrachten. Dann gilt

$$0 \leq q^{n+1} < q^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Daher ist $(a_n)_{n\in N}$ beschränkt und monoton fallend, also existiert nach Satz $\lim a_n = a$. Es gilt

$$\begin{array}{rrcl} & a_{n+1} & = & q \cdot a_n \\ \Rightarrow & a & = & \lim a_{n+1} = \lim q \cdot a_n = q \cdot a \\ \Rightarrow & a(q-1) & = & 0 \quad \Rightarrow a = 0 \quad \text{denn } q \neq 1 \quad \text{q.e.d} \end{array}$$

2) $a_n := 1 + q + q^2 + \dots + q^n \qquad (0 \leq q < 1)$
Offenbar gilt $a_{n+1} = a_n + q^{n+1}$, also $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Ferner gilt $a_n \leq \frac{1}{1-q} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Kapitel 2.6 Satz 2). Daher ist $(a_n)_{n\in N}$ monoton wachsend und beschränkt, also $\exists \lim a_n = a$. Es gilt

$$\begin{array}{rcl} (1-q)a_n & = & 1 - q^{n+1} \\ \Rightarrow \quad a_n & = & \dfrac{1+q^{n+1}}{1-q} \\ \Rightarrow \quad a & = & \lim a_n = \lim \dfrac{1+q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{1+\lim q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{1}{1-q} \end{array}$$

3) $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{n!} = \sum\limits_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!}$
Es gilt $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)!}$, also ist $(a_n)_{n\in N}$ monoton wachsend. Ferner

$$\begin{array}{rrcl} & \dfrac{1}{n!} & = & \dfrac{1}{2\cdot 3 \cdots n} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}} \\ \Rightarrow & a_n & \leq & 1 + (1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dots + \dfrac{1}{2^{n-1}} \\ & & \leq & 1 + \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3 \end{array}$$

Also ist $(a_n)_{n\in N}$ auch beschränkt, also existiert

$$e := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!}$$

e heißt Eulersche Zahl, L. Euler (1707-1783)

Bemerkung: Der Satz von der monotonen Folge ist über dem Körper $\mathbb{Q}$ nicht richtig, d.h. nicht jede Folge $(a_n)_{n\in N}$ mit $a_n \in \mathbb{Q}$, die beschränkt und monoton ist, hat auch ihren Limis in $\mathbb{Q}$.

Beispiel: $a_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} \in \mathbb{Q}$, aber $e \notin \mathbb{Q}$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ schreibe

$$e = \alpha_n + \beta_n$$

mit

$$\alpha_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!}, \qquad \beta_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=n+1}^{k+n} \frac{1}{\nu!}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=n+1}^{k+n} \frac{1}{\nu!} &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+2)\cdots(n+k)}\right] \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2\cdot 3 \cdots k}\right] \\
&< \frac{1}{(n+1)!}\,[e-1]
\end{aligned}$$

Daher folgt

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=n+1}^{n+k} \frac{1}{\nu!} \leq \frac{e-1}{(n+1)!} < \frac{2}{(n+1)!} \\
&\quad (\text{ Kapitel 3.2, Satz 4 und wegen } e < 3) \\
\Rightarrow \quad 0 &< n!\beta_n < \frac{2}{n+1} \leq 1
\end{aligned}$$

d.h. $0 < n!\beta_n < 1$. Es gilt $n!\alpha_n \in \mathbb{N}$. Daher ist

$$n!e = n!\alpha_n + n!\beta_n \;\notin \mathbb{N}\;\forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$n \cdot e \notin \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow e \notin \mathbb{Q} \quad \text{q.e.d.}$$

3.5 Intervallschachtelung. Wurzeln

Unter einer Intervallschachtelung versteht man eine Folge von kompakten Intervallen $(I_n)_{n\in N}$, $I_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n \leq b_n$ derart, daß $I_n \supset I_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Beispiel: $I_n = [1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}]$

Satz 1: Sei $(I_n)_{n\in N}$ Intervallschachtelung. Dann existiert genau eine reelle Zahl $s \in \mathbb{R}$ mit $s \in I_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Daß $\exists\, s \in \mathbb{R}$ mit $s \in I_n$ wurde schon früher bewiesen, wird hier erneut anders gezeigt.
Wegen $I_n \supset I_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Daher ist $(a_n)_{n\,\in N}$ monoton wachsend und beschränkt und $(b_n)_{n\,\in N}$ monoton fallend und beschränkt. Also $\exists\, a = \lim a_n,\ b = \lim b_n$ und

$$a_n \leq a,\ b_n \geq b \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Ferner gilt $a_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow a \leq b$. D.h. $a_n \leq a \leq b \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ also $a, b \in I_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Sei $s, s' \in I_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\begin{aligned} & |s - s'| \leq |b_n - a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow\ & |s - s'| = \lim_{n\to\infty} |s - s'| = \lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| \underbrace{=}_{\substack{\text{Nach Def. der} \\ \text{Intervallschachtelung}}} 0 \\ \Rightarrow\ & s = s' \end{aligned}$$

Zusatz: Wir haben mitbewiesen:
Es gilt $s = \lim a_n = \lim b_n$.
Die Bedeutung der Intervallschachtelung soll am Beispiel von Wurzeln erläutert werden.

Satz 2: Sei $b \in \mathbb{R}, b \geq 0$. Dann existiert auch ein $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ mit $a^2 = b$ (man schreibt $a = \sqrt{b}$ oder $a = b^{\frac{1}{2}}$).
Beweis: *Eindeutigkeit:*

$$a^2 = b = {a'}^2 \qquad a, a' \geq 0 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Satz}} a = a'$$

Existenz: Man wähle beliebige $b_0 \in \mathbb{R}, b_0 > 0$ und setze $a_0 := \frac{b}{b_0}$. Man definiere induktiv Folgen $(a_n)_{n\,\in N}$, $(b_n)_{n\,\in N}$ durch

$$b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} \qquad a_{n+1} := \frac{b}{b_n + 1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Es gilt $a_n \geq 0, b_n \geq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).
Beweis durch Induktion nach n
$n = 1:\ b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} > 0$, denn $a_0 \geq 0, b_0 > 0$
$\frac{b}{b_1} = a_1 \geq 0$
$n \to n + 1$

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} > 0$$
$$a_{n+1} = \frac{b}{b_{n+1}} \geq 0$$

Wir zeigen jetzt: $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \frac{b}{b_{n+1}} = \frac{b}{b_n} \cdot \frac{b_n}{b_{n+1}} = a_n \cdot \frac{b_n}{b_{n+1}}$$

Ferner gilt

$$a_n \cdot b_n \leq \left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)^2 = b_{n+1}^2$$

also folgt

$$a_{n+1} = \frac{a_n b_n}{b_{n+1}} \leq \frac{b_{n+1}^2}{b_{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

Daher

$$a_n \leq \underbrace{\frac{a_n + b_n}{2}}_{b_{n+1}} \leq b_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots$$

Wegen $b_{n+1} \leq b_n$ gilt $1 < \frac{b_n}{b_{n+1}}$. Daher folgt

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{b_n}{b_{n+1}} \geq a_n$$

Sei $I = [a_n, b_n]$. Dann gilt also $I_n \supset I_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$. Wegen $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} =$ Mittelpunkt von I_n muß gelten

$$|b_{n+1} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|b_n - a_n|$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{induktiv}} \quad |b_n - a_n| \leq 2^{-n}|b_0 - a_0| \; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = \lim_{n\to\infty} 2^{-n}|b_0 - a_0| = 0$$

$$\text{denn } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Daher ist $(I_n)_{n \in N}$ eine Intervallschachtelung, die nach Satz 1 genau ein reelles s umfaßt. Es gilt

$$s = \lim b_n = \lim a_n$$

Daher folgt

$$a_{n+1} \cdot b_{n+1} = \frac{b}{b_{n+1}} \cdot b_{n+1} = b$$

$\Rightarrow$ $s^2 = b$. Setze $s = a$. Wegen $a_n \geq 0$ gilt $s \geq 0$ $\square$

3.6 Häufungspunkte. Der Satz von Bolzano-Weierstraß

Definition: Eine reelle Zahl a heißt Häufungspunkt der Zahlenfolge $(a_n)_{n \in N}$, wenn in jeder ϵ-Umgebung $U_\epsilon(a)$ von a unendlich viele Glieder von $(a_n)_{n \in N}$ liegen.

Beispiele:

1) $(\frac{1}{n})_{n\in N}$ hat 0 als Häufungspunkt.

2) $((-1)^n)_{n\in N}$ hat genau 2 Häufungspunkte, 1 und -1.

3) $(n)_{n\in N}$ hat keinen Häugungspunkt.

Satz 1: Sei a Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in N}$. Dann hat $(a_n)_{n\in N}$ eine gegen a konvergente Teilfolge.

Beweis: Wir konstruieren $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ von natürlichen Zahlen derart, daß $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ und

$$|a - a_{n_p}| < \frac{1}{p} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nach Voraussetzung $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_{n_1}| < 1$. Seien bereits $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ konstruiert,so daß

$$|a - a_{n_p}| < \frac{1}{p} \text{ für } p = 1, 2, \dots, k$$

gilt. Die Umgebung $U_{\frac{1}{k+1}}(a)$ von a enthält unendlich viele Glieder von $(a_n)_{n\in N}$ nach Voraussetzung, also auch von $a_{n_{k+1}}, a_{n_{k+2}}, \dots$. Sei n_{k+1} die kleinste natürliche Zahl mit $n_{k+1} > n_k$ und $|a - a_{n_{k+1}}| < \frac{1}{k+1}$. Dies definiert uns induktiv die Folge $(a_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$. Es gilt

$$\lim_{p\to\infty} |a - a_{n_p}| \le \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{p\to\infty} a_{n_p} = a \qquad \square$$

Satz 2: (Bolzano-Weierstraß)
Jede beschränkte Zahlenfolge hat wenigstens einen Häufungspunkt.

Beweis: Es gelte $|a_n| < K \ \forall n \in \mathbb{N}$. Sei $I := [-K, K]$. Man unterteile I in zwei gleichlange Teilintervalle. Mindestens eins davon muß unendlich viele Glieder von $(a_n)_{n\in N}$ enthalten. Wir wählen ein solches aus und nennen es I. Man unterteile I in zwei gleichlange Teilintervalle, von denen mindestens eins (I_2 genannt) unendlich viele Glieder von $(a_n)_{n\in N}$ enthalten muß.
Man erhält induktiv eine Folge von Intervallen $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $I_m \supset I_{m+1}$ und Länge von $I_m = 2^{-m+1} \cdot K$ derart, daß I_m unendlich viele Glieder von $(a_n)_{n\in N}$ enthält. Die Folge $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist Intervallschachtelung und umfaßt daher nach Satz genau eine reelle Zahl a.
Sei $I_m = [\alpha_m, \beta_m]$ und $\epsilon_m = \frac{1}{m} + \max\{a - \alpha_m, \beta_m - a\}$. Dann gilt $\epsilon_m > 0$ und $\epsilon_m \to 0 (m \to \infty)$, denn $\alpha_m \to a, \beta_m \to a, \frac{1}{m} \to 0 (m \to \infty)$. Ferner gilt $I_m \subset U_{\epsilon_m}(a)$. Da I_m unendlich viele Gleider von $(a_n)_{n\in N}$ enthält, enthält auch $U_{\epsilon_m}(a)$ unendlich viele Glieder von $(a_n)_{n\in N}$. Wegen $\epsilon_m \to 0 (m \to \infty)$ enthält daher auch jede ϵ-Umgebung $U_{\epsilon_m}(a) \subset U_\epsilon(a)$ unendlich viele Glieder von $(a_n)_{n\in N}$. $\square$

Korollar: Jede beschränkte Zahlenfolge hat eine konvergente Teilfolge.

3.7 Das Cauchy'sche Konvergenzkriterium

Satz: Eine Zahlenfolge $(a_n)_{n \in N}$ konvergiert genau dann, wenn gilt: zu jedem $\epsilon > 0$ existiert $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so daß

$$|a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m > N \tag{3.1}$$

Bemerkung: Das Kriterium ist wichtig, da es ohne den Begriff des Grenzwerts auskommt.

Beweis:

1) Sei $(a_n)_{n \in N}$ konvergent, $\lim a_n = a$. Sei $\epsilon > 0$. Dann $\exists N \in \mathbb{N}$, so daß $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Daher folgt für $n, m > N$

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Daher gilt 3.1.

2) Die Folge $(a_n)_{n \in N}$ erfülle 3.1. Wir zeigen zunächst, daß $(a_n)_{n \in N}$ beschränkt ist.
Nach Voraussetzung mit $\epsilon = 1\ \exists N_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$|a_n - a_m| < 1\ \forall n, m > N$$

Insbesondere gilt für $n > N_0$

$$|a_n - a_{N_0+1}| < 1$$

Für $n > N_0$ folgt daher

$$|a_n| = |(a_n - a_{N_0+1}) + a_{N_0+1}| \leq |a_n - a_{N_0+1}| + |a_{N_0+1}| < 1 + |a_{N_0+1}|$$

Setze $K := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N_0}|, 1+|a_{N_0+1}|\}$. Dann gilt $|a_n| \leq K\ \forall n \in \mathbb{N}$, also ist $(a_n)_{n \in N}$ beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat daher $(a_n)_{n \in N}$ einen Häufungspunkt. Wir wollen zeigen $\lim a_n = a$.
Sei $\epsilon > 0$. Nach 3.1 $\exists N \in \mathbb{N}$, so daß

$$|a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}\ \forall n, m > N$$

Da a Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in N}$ ist, ist a auch Häufungspunkt der Folge $a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$. Daher existiert $k \in \mathbb{N}, k > N$ mit $|a - a_k| < \frac{\epsilon}{2}$. Für $n > N$ gilt daher

$$|a - a_n| = |(a - a_k) + (a_k - a_n)| \leq |a - a_k| + |a_k - a_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Daher gilt $\lim a_n = a$ $\square$.

Bemerkung: Zahlenfolgen $(a_n)_{n \in N}$, die 3.1 erfüllen, heißen Cauchy-Folgen oder Fundamentalfolgen. Cauchy-Folgen sind also genau die konvergenten Folgen. Hierfür sagt man auch, daß $\mathbb{R}$ vollständig ist.

Beispiel:
$$a_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$
. Dann ist $(a_n)_{n \in N}$ nicht konvergent. Denn
$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$
Also ist das Cauchy'sche Konvergenzkriterium nicht erfült.

Satz: Sei $M \subseteq \mathbb{R}, M \neq \emptyset, M$ nach oben beschränkt. Dann hat M eine kleinste obere Schranke (Diese ist offenbar eindeutig bestimmt).

Beweis: Wir wählen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \in M$ und $M < b$ (d.h. $x < b \; \forall x \in M$). Man definiere induktiv zwei Folgen $(a_n)_{n \in N}$ und $(b_n)_{n \in N}$ wie folgt: $a_1 := a, \; b_1 := b$. Seien schon a_n und b_n definiert durch $a_n \in M$ und $M < b_n$. Setze
$$c_n := \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{(Mittelpunkt des Intervalls } [a_n, b_n])$$
Dann gilt entweder

1) $M < c_n$ oder
2) $\exists c_n' \in M$ mit $c_n \leq c_n'$.

Man setze
$$a_{n+1} := \begin{cases} a_n & \text{im Fall i)} \\ c_n' & \text{um Fall ii)} \end{cases}$$
$$b_{n+1} := \begin{cases} c_n & \text{im Fall i)} \\ b_n & \text{im Fall ii)} \end{cases}$$
Dann gilt $a_{n+1} \in M$ und $M < b_{n+1}$. Ferner gilt
$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$|a_{n+1} - b_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_n - b_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
In der Tat:
$a_{n+1} \leq b_{n+1}$ wegen $a_{n+1} \in M, M < b_{n+1}$. Es gilt $a_n \leq a_{n+1}$ im Fall i), denn dann ist $a_n = a_{n+1}$. Im Fall ii) gilt auch $a_n \leq a_{n+1}$, denn dann ist $a_n \leq c_n = \frac{a_n+b_n}{2} \leq c_n' = a_{n+1}$. Genauso zeigt man $b_{n+1} \leq b_n$. Ähnlich folgt aus den Definitionen, daß $|a_{n+1} - b_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_n - b_n|$.
Also gilt: $([a_n, b_n])_{n \in N}$ bilden eine Intervallschachtelung (insbesondere gilt Länge $[a_n, b_n] \to 0 (n \to \infty)$). Diese umfaßt nach Satz genau eine reelle Zahl c.
Behauptung: Dieses c ist kleinste obere Schranke von M.
Wegen $b_n > M \; \forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim b_n = c \;\; \Rightarrow c = \lim b_n \geq M$, also ist c obere Schranke von M.
Sei K irgendeine obere Schranke von M. Wegen $a_n \in M \; \forall n \in \mathbb{N}$ und $c = \lim a_n$ gilt dann $c \leq K$, also ist c wirklich kleinste obere Schranke von M.

Korollar: Sei $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$, M nach unten beschränkt, dann hat M eine größte untere Schranke (Man wende den Satz auf $-M := \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in M\}$ an).

3.8 Supremum und Infimum sowie Häufungspunkte von Mengen

Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$. Dann heißt M nach oben beschränkt (bzw. nach unten), wenn es $a \in \mathbb{R}$ gibt mit $x \leq a\ \forall x \in M$ (bzw. $x \geq a\ \forall x \in M$). Ein solches a heißt dann obere (bzw. untere)*Schranke* von M. Man schreibt auch $M \leq a$ (bzw. $a \leq M$). Ein solches a heißt *kleinste obere Schranke* von M, wenn $M \leq a$ und wenn aus $M \leq a'$ folgt $a \leq a'$. Entsprechend wird „größte obere Schranke" definiert. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$ heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Definition:

1) Sei $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset, M$ nach oben beschränkt. Dann nennt man die kleinste obere Schranke das *Supremum* von M (im Zeichen $\sup M$)

2) Sei $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$, M nach unten beschränkt. Dann heißt die größte untere Schranke von M das *Infimum* von M (im Zeichen $\inf M$).

Beispiel:

1) $\mathbb{R}_+$ ist nach unten aber nicht nach oben beschränkt. $\inf \mathbb{R}_+ = 0$

2) Kompakte Intervalle sind beschränkt; $\sup[a, b) = b, \sup[a, b] = b$.

Definition: Eine reelle Zahl a heißt Häufungspunkt der Menge $M \subset \mathbb{R}$, wenn in jeder ϵ-Umgebung von a unendlich viele Elemente aus M liegen.

Beispiele:

1) Jede reelle Zahl ist Häufungspunkt von $\mathbb{R}$.

2) 0 ist Häufungspunkt der Menge $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

3) eine endliche Menge $M \subset \mathbb{R}$ hat keinen Häufungspunkt.

4) Ein Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n \in N}$ *braucht* nicht Häufungspunkt der Menge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zu sein (Beispiel: $a_n = (-1)^n$).

3.9 Uneigentliche Konvergenz. Limes superior und limes inferior

Man erweitert $\mathbb{R}$ durch die Einführung zweier Symbole $-\infty, +\infty$ und setzt $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Man erweitert die Ordnungsrelation auf $\mathbb{R}$ durch $-\infty < x < \infty\ \forall x \in \mathbb{R}$. Man kann formal Additon in $\bar{\mathbb{R}}$ definieren, z.B.

$$\begin{aligned}
a + \infty = \infty + a = \infty \quad (\forall a \in \mathbb{R}) \\
\infty + \infty = \infty, a - \infty = -\infty = -\infty + a\ (\forall a \in \mathbb{R}) \\
-\infty - \infty = -\infty \quad (\text{Achtung: } \infty - \infty \text{ ist nicht definiert}) \\
a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty\ (\forall a \in \mathbb{R}, a > 0) \\
a \cdot \infty = -\infty\ (\forall a \in \mathbb{R}, a < 0) \quad \text{u.s.w.}
\end{aligned}$$

Definition: Sei $(a_n)_{n\in N}$ Zahlenfolge. Dann sagt man, daß a_n nach ∞ strebt (im Zeichen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$), wenn es zu jedem $K \in \mathbb{R}, K > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $a_n > K\ \forall n > N$. Analog definiert man $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Sei $(a_n)_{n\in N}$ eine beschränkte Zahlenfolge. Sei M die Menge ihrer Häufungspunkte. Dann ist $M \neq \emptyset$ (Bolzano-Weierstraß), und M ist beschränkt. In der obigen Situation setzt man

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n := \sup M \quad \text{(limes superior)}$$
$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n := infM \quad \text{(limes inferior)}$$

Definition: Sei $(a_n)_{n\in N}$ Zahlenfolge. Man setzt $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n = \infty$, wenn es zu jedem $K \in \mathbb{R}, K > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a_n > K$. Man setzt $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n = -\infty$, wenn zu jedem $K \in \mathbb{R}, K > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n < -K$ existieren.

3.10 Unendliche Reihen

Problem: Man ordne unendlich viele Zahlen $a_1, a_2, a_3, \dots$ in sinnvoller Weise einer unendlichen Summe $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ (oder kürzer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$) zu. Dies bedarf einer präzisen Definition, denn die Sume $(1-1)+(1-1)+\cdots = 0$ schreiben wir sowie als $1+(1-1)+(1-1)+\cdots = 1$.

Definition: Sei $(a_n)_{n\in N}$ eine Zahlenfolge. Dann versteht man unter der unendlichen Reihe $a_1 + a_2 + \dots$ (oder kürzer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$) die Folge $(s_n)_{n\in N}$ der Partialsummen

$$s_n := \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Man nennt s_n die n-te Partialsumme und a_n das n-te Glied der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$.

Definition: Eine unendliche Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ heißt konvergent, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert.

Definition: Sei $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ konvergent. Dann nennt man $s := \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ die Summe der Reihe und schreibt $s = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$.

Satz 1: (Cauchy'sches Konvergenzkriterium)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \text{ zu jedem } \epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N},$$

$$\text{so daß } |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon\ \forall n > N,\ \forall p \in \mathbb{N}$$

Beweis:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \text{ konvergent } \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Def.}} (s_n)_{n\in N} \text{ konvergent}$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{\text{Cauchy'sche Konvergenz-}\\ \text{kriterium für Folgen}}} \quad \text{zu jedem } \epsilon > 0\ \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ so daß}$$

$$|s_{n+p} - s_n| < \epsilon\ \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$$

Es gilt $s_{n+p} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}$. $\square$

Satz 2: (Notwendige Konvergenzbedingung)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Beweis: In Satz 1 wähle insbesondere $p = 1$. Dann folgt $a_{n+1} \to 0 (n \to \infty)$.

Beispiel:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent, wie schon früher gezeigt. Also Bedingung aus Satz 2 ist *nicht hinreichend.*

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert mit Summe e.

3) („Geometrische Reihe")
$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergiert und hat die Summe $\frac{1}{1-q}$ für $0 \leq p < 1$.

Satz 3: Sei $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent genau dann, wenn $\exists K \in \mathbb{R}, K > 0$, so daß $\sum_{n=1}^{N} a_n \leq K\ \forall N \in \mathbb{N}$.

Beweis: Wegen $a_n \geq 0$ ist die Folge $(s_n)_{n \in N}$ monoton wachsend. Daher ist $(s_n)_{n \in N}$ genau dann konvergent, wenn $(s_n)_{n \in N}$ beschränkt ist, d.h. $\exists K \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{n=1}^{N} a_n \leq K$ $\square$.

Definition: Eine Reihe der Form $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$ mit $0 \leq a_{n+1} \leq a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ heißt alternierende Reihe.

Satz 4: (Leibniz)
Eine alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn ihre Glieder a_n eine Nullfolge bilden.

Beweis:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ konvergiert $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Satz 2}}$ $(-1)^{n+1} a_n \to 0$,
also auch $a_n \to 0\ (n \to \infty)$.

2) Sei $(a_n)_{n \in N}$ eine Nullfolge. Es gilt $s_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m})$, daher $0 \leq s_{2m} \leq s_{2m+2}\ \forall m \in \mathbb{N}$, denn nach Voraussetzung $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$. Es gilt

$$s_{2m+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m} - a_{2m+1})$$

daher $s_{2m+3} \leq s_{2m+1} \leq a_1$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Ferner ist $s_{2m} \leq s_{2m+1}$. Es folgt $0 \leq s_{2m} \leq s_{2m+1} \leq a_1$. Insgesamt folgt $(s_{2m})_{m \in \mathbb{N}}$ und $(s_{2m+1})_{m \in \mathbb{N}}$ sind monotone, beschränkte Zahlenfolgen. Daher existiert $\lim\limits_{m\to\infty} s_{2m}$ und $\lim\limits_{m\to\infty} s_{2m+1}$. Es gilt

$$s_{2m+1} - s_{2m} = a_{2m+1} \to 0 \, (m \to \infty)$$

Nach Grenzwertrechenregeln folgt daher

$$0 = \lim_{m\to\infty}(s_{2m} - s_{2m+1}) = \lim_{m\to\infty} s_{2m} - \lim_{n\to\infty} s_{2m+1}$$

$$\lim_{m\to\infty} s_{2m} = \lim_{m\to\infty} s_{2m+1}$$

Nach Übungsaufgabe (Blatt 4) folgt $\lim\limits_{m\to\infty} s_m$ existiert. Also ist $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ konvergent. $\square$

Beispiel: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ ist konvergent.

Satz 5: (Rechenregeln)

1) Sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so konvergieren auch $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ $(c \in \mathbb{R}$ fest) und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

2) Aus einer konvergenten Reihe $a_1 + a_2 + a_3 \ldots$ erhält man durch beliebeige Klammerung z.B. $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) + \ldots$ wieder eine konvergente Reihe mit derselben Summe.

Beweis:

1) folgt aus den Rechenregeln für Folgen

2) Wenn man Klammern in der angegebenen Weise setzt, so betrachtet man statt $(s_n)_{n \in N}$ eine Teilfolge von $(s_n)_{n \in N}$ (nämlich $(s_{n_\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$) und nach Übungsaufgage ist jede Teilfolge einer konvergenten Folge wieder konvergent mit demselben Grenzwert.

Definition: Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt Umordung einer anderen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, wenn $(b_n)_{n \in N}$ eine Umordnung der Folge $(a_n)_{n \in N}$ ist.

Bemerkung:

1) Wir wissen, daß eine Umordnung eine konvergenten Folge wiederum konvergiert mit demselben Limes.

2) Wenn man einer konvergenten Reihe unendlich viele Glieder umordnet, so kann es passieren, daß die erhaltene Reihe nicht mehr konvergiert.

Definition: Eine unendliche Reihe heißt *ungedingt konvergent*, wenn jede Umordnung dieser Reihe wiederum konvergiert und die gleiche Summe hat. Andernfalls heißt sie bedingt konvergent.

Frage: $\exists$ ein einfaches Kriterium zu entscheiden, wann eine Reihe unbedingt konvergiert?

Definition: Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Bemerkung: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auch im gewöhnlichen Sinne (Beweis nach Cauchy, denn $|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}| \leq |a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+p}|$)

Satz 6: (Dericklet)
Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist genau dann ungedingt konvergent, wenn sie absolut konvergiert.

zu Satz 3: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent $\Leftrightarrow$ $\exists k \in \mathbb{R}_+$ mit $\sum_{n=1}^{N} |a_n| \leq K$ $\forall N \in \mathbb{N}$.

Beweis : (zu Satz 6)

1) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absoulut konvergent. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\nu_n}$ eine Umordung von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Seien s_n und s_n' die Partialsummen der beiden Reihen. Sei $\epsilon > 0$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ nach Voraussetzung konvergiert, existiert insbesondere nach dem Cauchykriterium ein $m \in \mathbb{N}$, so daß

$$|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \cdots + |a_{m+p}| < \epsilon \ \forall p \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

Man bestimme $N \in \mathbb{N}$ so groß, daß $\{1, 2, \ldots m\} \subset \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N\}$. Für $N > N$ ($\Rightarrow n > m$) heben sich dann in dem Ausdruck $s_n' - s_n$ alle Terme $a_1, a_2, \ldots, a_n$ weg. Daher ist $s_n' - s_n$ eine endliche Summe von Zahlen aus der Menge $\{\pm a_{m+1}, \pm a_{m+2} \ldots\}$. Daher gilt wegen 3.2 $|s_n' - s_n| \leq \sum_{l=1}^{p(n)} |a_{m+l}| < \epsilon$, wobei $p(n)$ eine geeignete natürliche Zahl ist. Also ist $(s_n' - s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Man schreibe $s_n' = (s_n' - s_n) + s_n$. Wegen $s_n' - s_n \to 0$ und $s_n \to s := \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ folgt daher $s_n' \to s\,(n \to \infty)$. Daher ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\nu_n}$ konvergent gegen s. $\square$

2) zu zeigen: Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ unbedingt konvergent. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
Es genügt zu zeigen: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ nicht konvergent, so existiert eine Umordnung, die gegen ∞ strebt. Man setzte

$$b_n := \begin{cases} a_n & \text{falls } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$c_n := \begin{cases} 0 & \text{falls } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{falls } a_n < 0 \end{cases}$$

Dann gilt $b_n \geq 0, c_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$.
Behauptung:

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right)_{n \in \mathbb{N}} \to \infty, \; \left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\right)_{n \in \mathbb{N}} \to \infty \; (n \to \infty)$$

Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Sei z.B. $(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt.Dann wäre wegen der Monotonie diese Folge konvergent, d.h. $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$ wäre konvergent. Dann wäre aber auch

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu = -\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$$

konvergent, denn $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ konvergiert nach Voraussetzung. Dann wäre aber auch

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (c_\nu + b_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|$$

konvergent. Widerspruch zur Voraussetzung. Genauso führt man zum Widerspruch, daß $(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht beschränkt ist. Man definiere induktiv $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, derart, daß

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{r_n} > n + c_1 + c_2 + \cdots + c_n \tag{3.3}$$

Dies funktioniert wegen obiger bewiesener Behauptung. Man betrachte $b_1 + b_2 + \cdots + b_{r_1} - c_1 + b_{r_1+1} + b_{r_1+2} + \cdots + b_{r_2} - c_2 + b_{r_2+1} + \ldots$ (Man streiche auftretende Nullen). Dies ist eine Umordnung von $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$, und ihre Partialsummen gehen wegen 3.3 nach ∞.

Im folgenden einige nützliche Konvergenzkriterien:

Definition: Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, wenn $b_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ und $|a_n| \leq b_n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Sie heißt Minorante, von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, wenn $b_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ und $b_n \leq |a_n| \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Satz 7: Eine Reihe ist absolut konvergent, wenn sie eine konvergente Majorante hat.

Beweis: Folgt aus dem Cauchykriterium wegen

$$|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| \leq b_{n+1} + \cdots + b_{n+p}$$

Satz 8: Eine Reihe ist nicht absolut konvergent, wenn sie eine divergente Minorante hat.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt:

$$\infty \leftarrow \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \leq \sum_{\nu=1}^{n} |a_\nu| \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Satz 3}} \text{Behauptung}$$

Beispiele:

1) Es gelte $|a_n| \leq cq^n \;\forall n \in \mathbb{N}$, wobei $c > 0$ fest und $q \in (0,1)$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} cq^n$ eine konvergente Majorante („geometrische Reihe“), also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut. $q^n \to \infty$ für $q > 1$, denn $q^n \to 0$ für $0 < q < 1$.

2) („Quotientenkriterium“)
Gilt
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \;\forall n \in \mathbb{N} \text{ für ein } q \in (0,1)$$
so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent (Hierbei wird vorausgesetzt, daß $a_n \neq 0 \;\forall n \in \mathbb{N}$). Es gilt:
$$|a_{n+1}| \leq q \cdot |a_n| \leq q^2 |a_{n-1}| \leq \cdots \leq q^n |a_1|$$
Daher kann man i) anwenden.

3) („Wurzelkriterium“) Gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \;\forall n \in \mathbb{N}$, wobei $q \in (0,1)$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut. Aus $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ folgt $|a_n| \leq q^n \;\forall n \in \mathbb{N}$, also kann man i) anwenden.

4) Quotienten- und Wurzelkriterium funktionieren nicht immer.
Beispiel:
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n; \; a_n = \frac{1}{n^2}$$
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \to 1 \; (n \to \infty)$$
also ist ii) nicht anwendbar. iii) ist auch nicht anwendbar, denn
$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \to 1 \; (n \to \infty)$$
Es gilt
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)}$$
$$1 + \underbrace{\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}}_{\text{Fast alle Terme heben sich gegenseitig auf}} = 1 + 1 - \frac{1}{N} = 2 - \frac{1}{N} < \infty$$
Nach Satz 3 ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent.

Weitere spezielle Beispiele:
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(x \in \mathbb{R})$ ist absoulut konvergent, denn
$$(x \neq 0) \; \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \frac{|x|^{n+1} \cdot n!}{(n+1)!|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} = \frac{|x|}{n+1} < \frac{1}{2}$$

für n groß. Also ist ii) anwendbar.
$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ konvergiert nach iii).

Kapitel 4

Grenzwerte reeller Funktionen

4.1 Beispiele reeller Funktionen

Definition: Unter einer reellen Funktion versteht man eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$, wobei $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$. Jedem solchen f ordnet man seinen Graphen $G(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \in M\}$ zu. $y = f(x)$ $x \in M$

Beispiele:

Abbildung 4.1: $id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$

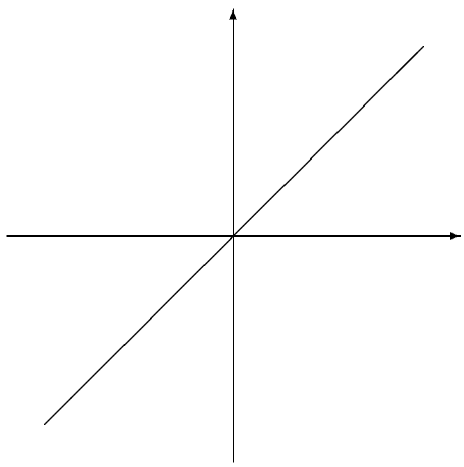


Abbildung 4.2: $f(x) = |x|, x \mapsto |x| \; (x \in \mathbb{R})$

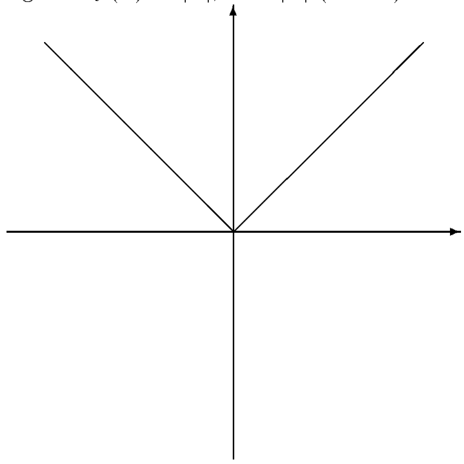
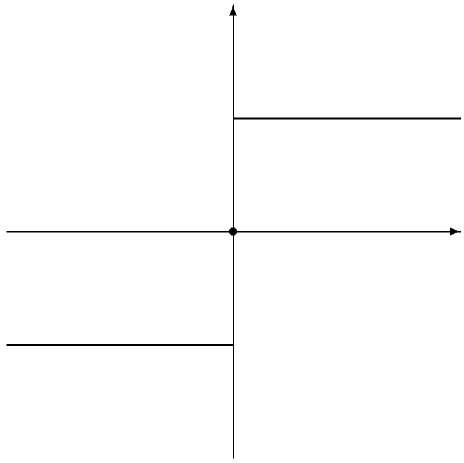


Abbildung 4.3: $x \mapsto \mathrm{sign}(x)$[1]



[1] $\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

Abbildung 4.4: „Zackenfunktion“[2]

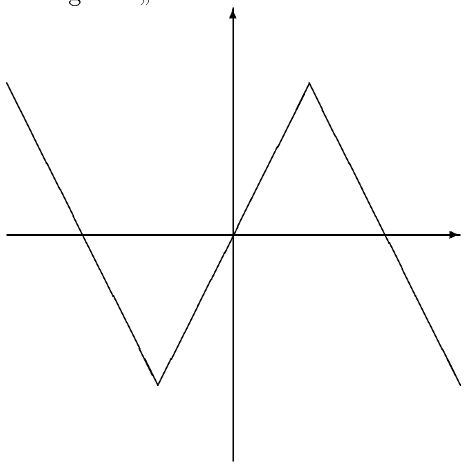
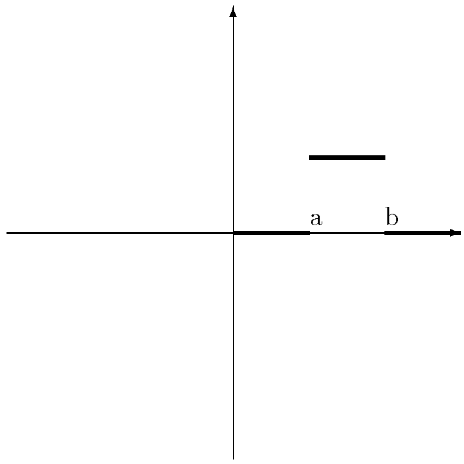


Abbildung 4.5: Charakteristische Funktion einer Menge $N \subset \mathbb{R}, N = [a, b]$[3]



Der Graph von $\chi_{\mathbb{Q}}$ kann nicht in vernünftiger Weise aufgezeichnet werden.

6) Polynome: Seien $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben. Dann heißt $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n$ Polynom. Wenn $a_n \neq 0$, so heißt n Grad von p.

7) Gebrochen rationale Funktionen

$$f(x) := \frac{p(x)}{q(x)}$$

---

[2] $z(x) := \begin{cases} 4x & -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 2 - 4x & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$, $z(x+1) := z(x)$ (Periodizitätsforderung)

[3] $\chi_N(x) := \begin{cases} 1 & x \in N \\ 0 & x \notin N \end{cases}$

(p, q Polynome, $x \in \mathbb{R}$, $x \notin \{$ Nullstellen von $q\}$).

8) Lineare Funktionen: $f(x) := ax (a$ fest$)$.
Affin Lineare Funktionen: $f(x) := ax + b$ $(a, b$ fest$)$

9) Definition von Funktionen durch algebraische Operationen: Seien $f, g : M \to \mathbb{R}$ Abbildungen. Dann definiert man

$$\begin{aligned} f + g : M \to \mathbb{R},\ (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{„Summe“} \\ \text{und } f \cdot g : M \to \mathbb{R},\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{„Produkt“} \end{aligned}$$

Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ fest, so setzt man

$$\lambda f(x) = (\lambda f)(x),\ \ \lambda f : M \to \mathbb{R}$$

Ist $M' := \{x \in M \mid g(x) \neq 0\}$, so setzt man

$$\frac{f}{g} : M' \to \mathbb{R},\ \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

10) Definition von Funktionen durch Grenzprozesse. Seien $f_n : M \to \mathbb{R}\,(n \in \mathbb{N})$. Seien $\forall x \in M$ die Folgen $(f_n(x))_{n \in N}$ konvergent. Dann wird durch $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ eine neue Funktion auf M definiert.
Beispiel:
$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}}$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1 \\ \frac{1}{2}, & |x| = 1 \\ 1, & |x| < 1 \end{cases}$$

4.2 Grenzwerte von Funktionen

Definition: Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, die in einer r-Umgebung xon $x_0 \in \mathbb{R}$ mit eventuell von x_0 selbst definiert ist, d.h. $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - x_0| < r\} \subset M$. Man sagt dann, daß der Limes von $f(x)$ für x gegen x_0 existiert, wenn es $a \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für jede Folge $(x_n)_{n \in N}$ mit $0 < |x_n - x_0| < r$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$. Hierfür schreibt man auch $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$. (Entsprechend kann man auch $a = \pm\infty$ zulasen und $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ definieren).

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1} \quad (x \neq 1)$$

Sei $x_0 = 1$. Sei $(x_n)_{n \in N}$ Zahlenfolge $x_n \neq 1\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. Es gilt

$$f(x_n) = \frac{x_n^3 - 1}{x_n - 1} = x_n^2 + x_n + 1 \to 3\,(n \to \infty)$$

wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Also gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = 3$.

Satz 1: Für eine auf $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < |x - x_0| < r\}$ definierte Funktion gilt: $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert $\Leftrightarrow$ Für jede Folge $(x_n)_{n\in N}$ mit $0 < |x_n - x_0| < r$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ konvergiert $(f(x_n))_{n\in N}$.

Beweis:

i) „$\Rightarrow$" klar!

ii) „$\Leftarrow$" Seien $(x_n)_{n\in N}$ und $(y_n)_{n\in N}$ zwei Folgen mit $0 < |x_n - x_0| < r$, $0 < |y_n - x_0| < r$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$ und $(f(x_n))_{n\in N}$, $(f(y_n))_{n\in N}$ seien konvergent. Wir zeigen dann:

$$\lim f(x_n) = \lim f(y_n) \ (=: a)$$

Man betrachte die „gemischte Folge" $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, \ldots$, d.h. die Folge $(z_n)_{n\in N}$ gegeben durch

$$z_{2k-1} := x_k \qquad z_{2k} := y_k$$

Dann gilt $\lim z_n = x_0$. Nach Voraussetzung konvergiert daher $(f(z_n))_{n\in N}$. Da Teilfolgen konvergenter Folgen konvergent mit demselben Grenzwert sind, folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{k\to\infty} f(z_{2k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_k)$$

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{k\to\infty} f(z_{2k-1}) = \lim_{k\to\infty} f(x_k)$$

Also gilt

$$\lim f(x_n) = \lim f(y_n) \qquad \square$$

Satz 2: Für eine auf $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < |x - x_0| < r\}$ definierte reelle Funktion gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, daß $|f(x) - a| < \epsilon\ \forall x \in \mathbb{R}$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$ (Hier wird stillschweigend vorrausgesetzt, daß $\delta < r$).

Beweis:

i) „$\Leftarrow$": Sei also das „$\epsilon - \delta$-Kriterium" erfüllt, sei $\epsilon > 0$. Dann $\exists\, \delta > 0$ mit $|f(x) - a| < \epsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$. Sei $(x_n)_{n\in N}$ Folge mit $0 < |x_n - x_o| < r$, $\lim x_n = x_0$. Wegen $\lim x_n = x_0$ existiert dann ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $\forall n > N$ gilt $|x_n - x_0| < \delta$. Daher gilt für $n > N$ $|f(x_n) - a| < \epsilon$. Dies bedeutet aber $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

ii) „$\Rightarrow$": Sei $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$. Angenommen, das „$\epsilon - \delta$-Kriterium" ist nicht erfüllt. Dann existiert also $\epsilon > 0$, so daß sich kein $\delta > 0$ finden läßt derart, daß $|f(x) - a| < \epsilon$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$. Sei $(\delta_n)_{n\in N}$ eine Nullfolge positiver Zahlen (z.B. $\delta_n = \frac{1}{n}$). Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert dann ein $x_n \in \mathbb{R}$

mit $0 < |x_n - x_0| < \delta_n$, aber $|f(x_n) - a| \geq \epsilon$. Dann gilt aber $\lim x_n = x_0$, denn $(\delta_n)_{n \in N}$ ist Nullfolge. Andererseits kann nicht $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$ sein, denn $|f(x_n) - a| \geq \epsilon \forall n$ Widerspruch zur Voraussetzung $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$. Daher muß das „$\epsilon - \delta$“-Kriterium gelten.

Definition: Sei f eine auf $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x_0 < x < x_0 + r\}$ bzw. $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x_0 - r < x < x_0\}$definierte Funktion. Man sagt dann, daß Limes von $f(x)$ für x bei rechts- bzw. linksseitiger Annäherung von x gegen x_0 existiert, wenn es $a \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für jede Folge $(x_n)_{n \in N}$ mit $x_0 < x_n < x_0 + r$ bzw. $x_0 - r < x_n < x_0$ gilt $\lim f(x_n) = a$. Man schreibt hierfür auch

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = a \qquad \lim_{x\to x_0-0} f(x) = a$$

Beispiel: Funktion $s(x)$. $\lim_{x\to 0+} s(x) = 1$, $\lim_{x\to 0-} s(x) = 0$. Aber $\lim_{x\to 0} s(x)$ existiert nicht.

Definition: Sei $f : M \to \mathbb{R}$ reelle Funktion, sei $x_0 \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von M. Man sagt dann, daß der Limes von $f(x)$ für x gegen x_0 existiert, wenn $\exists a \in \mathbb{R}$, so daß für jede Folge $(x_n)_{n \in N}$ mit $x_n \in M$, $x_n \neq x_0$, $\lim x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$. Man schreibt $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$.

Satz 2': Es gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ zu jedem $\epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, so daß $|f(x) - a| < \epsilon$ $\forall x \in M$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$ („$\epsilon - \delta$-Kriterium“).

Definition: Sei f eine auf $\{x \in \mathbb{R} \,|\, c < x < \infty\}$ (c fest) definierte Funktion. Man sagt, der Limes von $f(x)$ für x gegen x_0 existiert, wenn es $a \in \mathbb{R}$ gibt, derart daß für jede Folge $(x_n)_{n \in N}$ mit $c < x_n < \infty$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ die Folge $(f(x_n))_{n \in N}$ gegen a konvergiert ($n \to \infty$). Man schreibt $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ (Entsprechend definiert man $\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$. Man kann auch sinngemäß $a = \infty, a = -\infty$ zulassen).

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \qquad x \neq -1$$

Man untersuche, ob $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert. Sei hierzu $(x_n)_{n \in N}$ Folge mit $x_n > 0$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Dann gilt

$$f(x_n) = \frac{x_n}{x_n + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x_n}} \to 1 (n \to \infty)$$

denn $\frac{1}{x_n} \to 0$ wegen $x_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Daher ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

Satz 3: („Rechenregeln“)
Seien $f_1, f_2 : M \to \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}, M \neq 0, x_0$ Häufungspunkt von M. Es gelte $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = a_1$, $\lim_{x\to x_0} f_2(x) = a_2$ mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

i) Es existiert $\lim_{x\to x_0} (f_1(x) \pm f_2(x))$ und ist gleich $a_1 \pm a_2$, es existiert $\lim_{x\to x_0} c \cdot f_1(x)$ und ist gleich $c \cdot a_1$ ($c \in \mathbb{R}$ fest).

ii) Es existiert $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) \cdot f_2(x)$ und ist gleich $a_1 \cdot a_2$. Ist $f_2(x) \neq 0 \, \forall x \in M$ und $a_2 \neq 0$, so existiert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ und ist gleich $\frac{a_1}{a_2}$.

iii) Es existiert $\lim\limits_{x \to x_0} |f_1(x)|$ und ist gleich $|a_1|$.

iv) Wenn es eine Folge $(x_n)_{n \in N}$ gibt mit $x_n \in M, x_n \neq x_0, x_n \to x_0$ und $f_1(x_n) \leq f_2(x_n) \, \forall n \in \mathbb{N}$, so gilt $a_1 \leq a_2$.

Beweis: folgt aus den Rechenregeln für Folgen

Kapitel 5

Stetigkeit reeller Funktionen

5.1 Stetigkeit in einem Punkt

Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset, f : M \to \mathbb{R}$. Sei $x_0 \in M$. Dann heißt f stetig in x_0, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, derart daß

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \ \forall x \in M \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

Offenbar gibt es für x_0 folgende zwei Alternativen:
Entweder ist $x_0 \in M$ „isolierter Punkt von M“, d.h. $\exists\, r$-Umgebung $U_r(x_0)$ von x_0, so daß $U_r(x_0) \cap M = \{x_0\}$. Dann ist jede Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig. (Man wähle $0 < \delta < r$ und wende die Definition mit diesem δ an.)
Oder in jeder δ-Umgebung $U_\delta(x_0)$ von x_0 liegt ein Punkt aus M, der von x_0 verschieden ist. Dann ist x_0 Häufungspunkt von M, und es gilt:
$f(x)$ ist stetig in $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und ist gleich $f(x_0) \Leftrightarrow$ für jede Folge $(x_n)_{n \in N}$ mit $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$.
Das folgt unmittelbar aus Kapitel 4.2, Satz 2', Seite 55. Man beachte: Das ϵ, δ-Kriterium ist hier für $x = x_0$ automatisch erfüllt, denn für $x = x_0$ ist $x - x_0 = 0$ und $f(x) - f(x_0) = 0$. Genauso gilt hier: Die Aussage „Für jede Folge $(x_n)_{n \in N}$ mit $x_n \in M, x_n \neq x_0, x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$“ ist äquivalent zur Aussage „Für jede Folge $(x_n)_{n \in N}$ mit $x_n \in M, x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$“.

Beispiele:

i) Polynome $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_n x$ $(x \in \mathbb{R})$ sind in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig.

ii) Die Zackenfunktion $z(x)$ ist stetig in allen $x_0 \in \mathbb{R}$.

iii) Die Sprungfunktion $s(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ ist nicht stetig in $x_0 = 0$.

Ist f stetig in x_0, so nennt man x_0 *Stetigkeitsstelle*. Ist f nicht stetig in x_0, so heißt f unstetig in x_0 und x_0 *Unstetigkeitsstelle*.

Beispiele für Unstetigkeitsstellen
Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall.

Zusatz: Sei $I \subset R$ Intervall, das nicht nur aus einem Punkt besteht. Dann ist jedes $x_0 \in I$ Häufungspunkt von I, also gilt $f : I \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in I \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

i) Hebbare Unstetigkeitsstellen
Sei $f : I \to \mathbb{R}$. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiere, sei aber verschieden von $f(x_0)$. Dann ist f nicht stetig in x_0, aber die Ersatzfunktion $g : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & (x \neq x_o) \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & (x = x_0) \end{cases}$$

ist in x_0 stetig.
Beispiel:

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & (x \neq 1) \\ 0 & (x = 1) \end{cases}$$

Es gilt $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(x+1) = 2$.
Setze

$$g(x) := \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & (x \neq 1) \\ 2 & (x = 1) \end{cases}$$

ii) Sprungstellen
Sei $f : I \to \mathbb{R}$, I offen, $x_0 \in I$. Dann heißt x_0 Sprungstelle von f, wenn $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ existieren und voneinander verschieden sind. (Beispiel: $x_0 = 0$ ist Sprungstelle von $s(x)$.

iii) Oszillatorisches Verhalten
Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} z(\frac{1}{x}) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

hat oszillatorisches Verhalten bei $x_0 = 0$, d.h. in jeder noch so kleinen δ-Umgebung von $x_0 = 0$ nimmt $f(x)$ alle Werte von -1 und 1 an.

iv) Unendlichkeitsstelle
Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

hat in $x_0 = 0$ eine Unendlichkeitsstelle, d.h. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$.

Satz 1: Seien $f, g : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}, M \neq 0$. Seien f und g stetig in $x_0 \in M$. Dann sind auch $f \pm g$ und $f \cdot g$ in x_0 stetig. Ferner ist $\lambda f (\lambda \in \mathbb{R}$ fest) in x_0 stetig.

Beweis: Folgt aus den Rechenregeln für „$\lim\limits_{x \to x_0}$“, Kapitel 4.2, Satz 3, 55.

Lemma: Sei $f : M \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig. Es gelte $f(x_0) \neq 0$. Dann $\exists \delta > 0$, so daß $f(x) \neq 0$ in $M \cap U_\delta(x_0)$.

Beweis: Sei $\epsilon := \frac{1}{2}|f(x_0)| > 0$. Da f stetig in x_0 ist, $\exists \delta > 0$, so daß $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \; \forall x \in M \cap U_\delta(x_0)$. Für $x \in M \cap U_\delta(x_0)$ gilt daher

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x_0) - (f(x_0 - f(x))| \\ &\geq |f(x_0)| - |f(x_0) - f(x)| > 2\epsilon - \epsilon = \epsilon > 0 \end{aligned}$$

Satz 2: Seien $f, g : M \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in M$ stetig. Es gelte $g(x_0) \neq 0$. Dann ist $\frac{f}{g}$ in $U_\delta(x_0) \cap M$ für ein geeignetes (kleines) $\delta > 0$ definiert und in x_0 stetig.

Beweis: Folgt aus dem Lemma

Satz 3: Sei $f : M \to \mathbb{R}, g : N \to \mathbb{R}$ $(M, N \subset \mathbb{R}, M, N \neq 0)$ und $f(M) \subset N$. Sei f in $x_0 \in M$ stetig und g in $y_0 = f(x_0)$ stetig. Dann ist auch $g \circ f$ (Komposition) in x_0 stetig. (Genauer müßte man statt $g \circ f$ die Abbildung $g \circ f^*$ betrachten, wobei $f^* : M \to N$; $f^*(x) = f(x)$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert $\eta > 0$, so daß $|g(y) - g(x_0)| < \epsilon \; \forall y \in N$ mit $|y - y_0| < \eta$. Zu $\eta > 0$ existiert $\delta > 0$, so daß $|f(x) - f(x_0)| < \eta \; \forall x \in M$ mit $|x - x_0| < \delta$. Daher gilt

$$|g \circ f(x) - g \circ f(x_0)| = |g\underbrace{(f(x))}_{y} - g\underbrace{(f(x_0))}_{y_0}| < \epsilon$$

für $x \in M$ mit $|x - x_0| < \delta$. $\square$

5.2 Stetigkeit auf einem kompakten Intervall

Definition: Sei $f : M \to \mathbb{R}$. Sei $M_0 \subset M$. Dann heißt f auf M_0 stetig, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in M_0$ stetig ist.

Im folgenden: Wir untersuchen die Abbildung $f : I \to \mathbb{R}$, die auf I stetig ist, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist.

Satz 1: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ stetig. Es gelte $f(a) < 0 < f(b)$ (bzw. $f(a) > 0 > f(b)$). Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = 0$.

Zum Beweis benötigen wir ein **Lemma:**
Sei $f : M \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig. Es gelte $f(x_0) > a$ (bzw. $f(x_0) < a$). für ein $a \in \mathbb{R}$. Dann $\exists \delta > 0$, so daß $f(x) > a$ $(f(x) < a)$ $\forall x \in M \cap U_\delta(x_0)$.

Beweis des Lemmas:
Es gelte $f(x_0) > a$. Sei $\epsilon := f(x_0) - a > 0$. Da f in x_0 stetig ist, $\exists \delta > 0$, so daß

$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ (d.h. $-\epsilon < f(x) - f(x_0) < \epsilon\ \forall x \in M \cap U_\delta(x_0)$. Daher gilt für $x \in M \cap U_\delta(x_0)$

$$f(x) > f(x_0) - \epsilon = f(x_0) - (f(x_0) - a) = a \qquad \square$$

Beweis von Satz 1:
Es gelte $f(a) < 0 < f(b)$. Sei $M := \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq 0\}$. Dann ist $a \in M$, also ist $M \neq \emptyset$. Außerdem ist M nach oben beschränkt (b ist obere Schranke). Also existiert $\xi = \sup M$. Wegen $f(b) > 0$ und dem Lemma ist $f(x) > 0\ \forall x \in [a,b] \cap U_\delta(b)$ für geeignetes $\delta > 0$, also ist $\xi < b$. Nach Konstruktion des Supremums existieren Folgen $(x_n)_{n \in N}$ und $(y_n)_{n \in N}$ mit $x_n \in M, \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$ Intervallschachtelung) und $\lim x_n = \xi = \lim y_n$. Wegen $x_n \in M$ ist $f(x_n) \leq 0$. Wegen $\xi < b$ und $\lim y_n = \xi$ gilt $y_n < b$ für fast alle n. Wegen $y_n \geq x_n \in M$ gilt auch $y_n \geq a$. Also ist $y_n \in [a,b]$ für fast alle n, und somit ist $f(y_n)$ definiert und $f(y_n) > 0$ (wegen $y_n \notin M$ für fast alle n.) Da f in ξ stetig ist, gilt wegen $\lim x_n = \xi = \lim y_n$

$$f(\xi) = \lim f(x_n) \leq 0,\ f(\xi) = \lim f(y_n) \geq 0 \quad \Leftrightarrow f(\xi) = 0$$

Es gilt $a \leq \xi$, denn $\xi = \sup M$. Wäre $a = \xi$, so folgte $f(a) = f(\xi) = 0$ Widerspruch zu $f(a) < 0$. Also gilt auch $\xi \in (a,b)$. $\square$

Satz 2: (Zwischenwertsatz)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ stetige Funktion. Sei c eine reelle Zahl mit $f(a) < c < f(b)$ (bzw. $f(a) > c > f(b)$). Dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = c$.

Beweis: Setze $g(x) := f(x) - c$ für $x \in [a,b]$. Es gelte $f(a) < c < f(b)$. Dann folgt $g(a) < 0 < g(b)$. Die Funktion g ist auf $[a,b]$ stetig. Nach Satz 1 existiert $\xi \in (a,b)$ mit $g(\xi) = 0$, d.h. $f(\xi) = c$. $\square$

Anwendung: Sei $p(x) = x^n - \alpha$ mit $n \in \mathbb{N}, \alpha > 0$.
Behauptung: $p(x)$ hat eine positive Nullstelle.
Beweis: Es gilt $p(0) = -\alpha < 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} p(\alpha+1) &= (\alpha+1)^n - \alpha \geq (1 + \alpha \cdot n) - \alpha \quad \text{Bernoullische Ungleichung} \\ &= 1 + \alpha(n-1) \geq 1 > 0 \end{aligned}$$

Also $p(0) < 0 < p(\alpha+1)$. p ist auch auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Nach dem Zwischenwertsatz $\exists \xi \in (0, \alpha+1)$ mit $p(\xi) = 0$, d.h. $\xi^n = \alpha$.

Definition: Sei $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$.

i) Dann heißt f auf M nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, wenn $f(M)$ nach oben (bzw. nach unten) beschränkt ist, d.h. $\exists K \in \mathbb{R}_+$ mit $f(x) \leq K\ \forall x \in M$ (bzw. $-K \leq f(x)\ \forall x \in M$). Man nennt f auf M beschränkt, wenn $f(M)$ nach oben und nach unten beschränkt ist, d.h. $\exists K \in \mathbb{R}_+$ mit $|f(x)| \leq K\ \forall x \in M$.

ii) Man sagt, daß f auf M ihr Maximum annimmt, wenn $f(M)$ nach oben beschränkt ist und es $x_0 \in M$ gibt mit $f(x_0) = \sup f(M)$, d.h. $f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in M$.

Man sagt, daß f auf M ihr Minimum annimmt, wenn $f(M)$ nach unten beschränkt ist und es $x_0 \in M$ gibt mit $f(x_0) = \inf f(M)$, d.h. $f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in M$.

Satz 3: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ stetige Funktion. Dann ist f auf $[a,b]$ beschränkt und nimmt auf $[a,b]$ ihr Maximum und ihr Minimum an, d.h. $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)\ \forall x \in M$.

Bemerkung: Sei $f[a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$ für $x \in (0,1]$. Dann ist f auf $(0,1]$ stetig, aber nicht auf $(0,1]$ beschränkt. Daher ist der Satz für nicht kompakte Intervalle im algemeinen falsch.

Beweis: Wir zeigen nur, daß f auf $[a,b]$ nach oben beschränkt ist und auf $[a,b]$ ihr Maximum annimmt. Den Rest der Behauptung zeigt man ähnlich.
Angenommen f wäre auf $[a,b]$ nicht nach oben beschränkt. Dann existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a,b]$ mit $f(x_n) > n$. Die Folge $(x_n)_{n \in N}$ ist beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert $x_0 \in \mathbb{R}$ und eine Teilfolge $\left(x_{n_p}\right)_{p \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in N}$ mit $x_{n_p} \to x_0\,(p \to \infty)$. Wegen $a \leq x_{n_p} \leq b$ gilt auch $a \leq x_0 = \lim x_{n_p} \leq b$, d.h. $x_0 \in [a,b]$. Nach Voraussetzung ist f stetig in x_0, also (mit $\epsilon = 1$) existiert $\delta > 0$, so daß $|f(x) - f(x_0)| < 1\,\forall x \in [a,b] \cap U_\delta(x_0)$. Wegen $x_{n_p} \to x_0$ $(p \to \infty)$ gilt $x_{n_p} \in [a,b] \cap U_\delta(x_0)$ für fast alle p. Also gilt für fast alle p

$$|f(x_{n_p})| - |f(x_0)| \leq |f(x_{n_p}) - f(x_0)| < 1$$

$$\infty \leftarrow n_p < f(x_{n_p}) \leq |f(x_{n_p})| < 1 + |f(x_0)|$$

für fast alle p. Widerspruch! Also ist f nach oben beschränkt.
Da $f([a,b])$ nicht leer und nach oben beschränkt ist, existiert $\xi = \sup f([a,b])$. Nach Konstruktion $\exists$ Folge $(f(z_n))_{n \in N}$ mit $z_n \in [a,b]$ und $f(z_n) \to \xi$ $(n \to \infty)$. Wie oben (Bolzano-Weierstraß) folgt die Existens eines Punktes $z_0 \in [a,b]$ und einer Teilfolge $\left(z_{n_p}\right)_{p \in \mathbb{N}}$ mit $z_{n_p} \to z_0$. Da f in z_0 stetig ist, gilt $f(z_{n_p}) \to f(z_o)$ $(p \to \infty)$. Wegen $f(z_{n_p}) \to \xi$ folgt $f(z_o) = \xi$. $\square$

Korollar: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist das Bild $f([a,b])$ wiederum ein kompaktes Intervall.

Beweis: Nach Satz 3 existieren $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $y_1 := f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) =: y_2\ \forall x \in [a,b]$. Also gilt $f([a,b]) \in [y_1, y_2]$. Sei $c \in (y_1, y_2)$. Dann $\exists$ nach dem Zwischenwertsatz $\xi \in (x_1, x_2)$ mit $f(\xi) = c$. Daher gilt $f([a,b]) = [y_1, y_2]$.

Definition: Sei $V/_{\mathbb{R}}$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $V \to \mathbb{R}, v \to ||v||$ („Norm von v") heißt Norm auf V wenn gilt

i) $||v|| \geq 0\ \forall v \in V,\ ||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

ii) $||\lambda v|| = |\lambda|\,||v||\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V$

iii) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||\ \forall v, w \in V$

Mann nennt $(V, ||\cdot||)$ normierten linearen Raum.

Beispiele:

i)

$$(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|), \quad \|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu^2}$$

euklidische Norm

ii) Sei $I \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall und $C^0(I) := \{f : I \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ ist auf } I \text{ stetig } \}$. Dann ist $C^0(I)$ Vektorraum über $\mathbb{R}$ unter den Operationen $(f, g) \to f + g$, $(\lambda, f) \to \lambda f$. Für $f \in C^0(I)$ setze man $|\cdot|_I := \sup\{|f(x)|, x \in I\}$ (sprich: „Supremumsnorm von f auf I“). Dann ist $|\cdot|_I$ eine Norm auf $C^0(I)$ (siehe Übungsaufgabe).

iii) Sei allgemeiner $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$ und $B(M) := \{f : M \to \mathbb{R} \,|\, f$ ist auf M beschränkt$\}$. Dann ist $(B(M), |\cdot|_M)$ normierter linearer Raum, wenn $|f|_M := \sup\{|f(x)| \,|\, x \in M\}$. Ist I kompaktes Intervall, so ist $C^0(I)$ linearer Unterraum von $B(I)$.

Satz 4: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Sei $f([a, b]) = [\alpha, \beta]$ (s. Korollar zu Satz 3). Sei $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion zu f. Dann ist g auf $[\alpha, \beta]$ stetig.

Beweis: Sei $y_0 \in [\alpha, \beta]$ und $y_n \in [\alpha, \beta]$ mit $\lim y_n = y_0$. Sei $x_n := g(y_n) \in [a, b]$. Sei $\left(x_{n_p}\right)_{p \in \mathbb{N}}$ irgendeine Teilfolge von $(x_n)_{n \in N}$. Dann ist $\left(x_{n_p}\right)_{p \in \mathbb{N}}$ beschränkt, also $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ und eine Teilfolge $\left(x_{n_{p_q}}\right)_{q \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n_{p_q}} \to x_0\,(q \to \infty)$ nach Bolzano-Weierstraß. Es gilt $x_0 \in [a, b]$. Da f in x_0 stetig ist, gilt

$$\begin{aligned}
y_{n_{p_q}} &= f(x_{n_{p_q}}) \to f(x_0) \\
&\Rightarrow y_0 = f(x_0) \;\text{ denn } y_n \to y_0 \\
&\Rightarrow x_0 = g(y_0) \;\text{ Also } x_{n_{p_q}} \to g(y_0)
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt: Die Folge $(x_n)_{n \in N}$ hat folgende Eigenschaft: es gibt $a \in \mathbb{R}$ (nämlich $a = g(y_0)$) derart, daß man aus jeder Teilfolge von $(x_n)_{n \in N}$ eine weitere Teilfolge auswählen kann ,die gegen a konvergiert. Nach Übungsaufgabe gilt dann $x_n \to a$. Also gilt $g(y_n) = x_n \to g(y_0)$, also ist g in y_0 stetig.

Beispiel: Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^n\,(n \in \mathbb{N})$. Dann ist f stetig und injektiv, also ist auch $x \to \sqrt[?]{x}\;(x \in [0, \infty))$ stetig.
Um Satz 4 formal anwenden zu können, beschränke man f auf $[0, c]$ für jedes $c > 0$ ein).

5.3 Gleichmäßige Stetigkeit

Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset, f : M \to \mathbb{R}$. Dann heißt f auf M gleichmäßig stetig, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ (nur von ϵ abhängig) existiert, derart daß

$$|f(x) - f(x')| < \epsilon \;\forall x, x' \in M \text{ mit } |x - x'| < \delta$$

Offenbar ist jede Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, die auf M gleichmäßig stetig ist, in jedem Punkt $x_0 \in M$ stetig. Der Unterschied zur Definition der Stetigkeit von f in x_0 besteht darin, daß man bei gleichmäßiger Stetigkeit das für jedes x_0 existierende $\delta > 0$ (bei vorgegebenem $\epsilon > 0$) unabhängig von x_0 wählen kann.

Beispiele:

i) $f(x) = x^2 - 1,\ x \in (0,1]$. Dann gilt

$$|f(x) - f(x')| = |x^2 - {x'}^2| = |x - x'||x + x'| \le 2|x - x'| \ \forall x, x' \in (0,1]$$

Sei $\epsilon > 0$. Setze $\delta := \frac{\epsilon}{2}$. Dann gilt also

$$|f(x) - f(x')| < \epsilon \ \forall x, x' \in (0,1] \text{ mit } |x - x'| < \delta$$

$\Rightarrow f$ ist gleichmäßig stetig auf $(0,1]$.

ii) $f(x) = \frac{1}{x},\ x \in (0,1]$. Sei $x_n = \frac{1}{n}, x'_n = \frac{1}{2n}$. Dann gilt

$$|x_n - x'_n| = \frac{1}{2n} \to 0 \, (n \to \infty)$$

aber

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = n \to \infty$$

Hieraus folgt, daß f auf $(0,1]$ nicht gleichmäßig stetig ist.

Satz 1: Sei $I \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ auf I stetig. Dann ist f auf I gleichmäßig stetig.

Beweis: Angenommen f wäre nicht gleichmäßig stetig auf I. Dann existiert ein $\epsilon > 0$, zu dem sich kein $\delta > 0$ finden läßt mit

$$|f(x) - f(x')| < \epsilon \ \forall x, x' \in I \text{ mit } |x - x'| < \delta$$

Also existieren zwei Folgen $(x_n)_{n \in N}, (x'_n)_{n \in N}$ mit $x_n, x'_n \in I$ und $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$, aber $|f(x_n) - f(x'_n)| \ge \epsilon$. Nach Bolzano-Weierstraß $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ und eine Teilfolge $(x_{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$ mit $x_{n_p} \to x_0 \, (p \to \infty)$. Wegen $x_{n_p} \in I$ und I kompakt gilt $x_0 \in I$. Wegen $|x_{n_p} - x'_{n_p}| < \frac{1}{n_p} \to 0 \, (p \to \infty)$ gilt auch $x'_{n_p} \to x_0 \, (p \to \infty)$. Da f stetig ist in x_0, folgt $f(x_{n_p}) \to f(x_0), f(x'_{n_p}) \to f(x_0) \, (p \to \infty)$. $\Rightarrow |f(x_{n_p}) - f(x'_{n_p})| \to 0$. Wegen $|f(x_{n_p} - f(x'_{n_p})| > \epsilon$ folgt also $0 \ge \epsilon$. Widerspruch. $\square$

Definition: Sei $I \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall. Sei $I = [a, b]$ mit $a < b$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion auf I, wenn es eine Zerlegung Z von I gibt (d.h. ein $(n+1)$-Tupel $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$) mit $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ derart, daß f auf jedem der n offenen Teilintervalle $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ konstant ist, d.h. $\exists c_\nu \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = c_\nu \ \forall x \in (a_{\nu-1}, a_\nu) \, (\nu = 1, \ldots, n)$. (Man beachte, daß in den Teilungspunkten a_ν selbst nichts gefordert ist.)

Satz 2: Sei $I = [a, b]$ kompaktes Intervall mit $a < b$. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf I stetig. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es genau eine Treppenfunktion $t : I \to \mathbb{R}$ mit $|f - t|_I < \epsilon$

(d.h. $|f(x) - t(x)| \leq \epsilon \ \forall x \in I$).

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Da f auf I stetig und I kompakt ist, ist f auf I gleichmäßig stetig nach Satz 1. Zu dem gegebenem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß $|f(x) - f(x')| < \epsilon \ \forall x, x' \in I$ mit $|x - x'| < \delta$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{b-a}{\delta}$. Man betrachte die „äquidistante Zerlegung " $z = \{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = 0\}$ mit $a_\nu = a + \nu \cdot \frac{b-a}{n}$ $(\nu = 0, \ldots, n)$. Man definiere $t : I \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} t(a_\nu) &= f(a_\nu) \ (\nu = 0, \ldots, n) \\ t(x) &:= f(a_\nu) \ \forall x \in (a_\nu, a_{\nu+1}) \, (\nu = 0, \ldots, n-1) \end{aligned}$$

Sei $x \in (a_\nu, a_{\nu+1})$. Dann ist $|x - a_\nu| < \frac{b-a}{n} < \delta$, also gilt $|f(x) - \underbrace{f(a_\nu)}_{=t(x)}| < \epsilon$, also gilt $|f(x) - t(x)| < \epsilon \ \forall x \in I$. $\square$

Satz 2 ist wichtig für spätere Integrationstheorie.

5.4 Folgen bzw. Reihen von Funktionen und Stetigkeit

Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$. Sei $f_n : M \to \mathbb{R} \, \forall n \in \mathbb{N}$. Dann heißt die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in N}$ auf M punktweise konvergent , wenn für jedes $x \in M$ die Folge $(f_n(x))_{n \in N}$ konvergiert. Die durch $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ definierte Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt Grenzfunktion der Folge $(f_n)_{n \in N}$. Man schreibt $f_n \to f \ (n \to \infty)$.
Beobachung: Die Grenzfunktion einer punktweise konvergenten Folge stetiger Funktionen braucht i.a. nicht mehr stetig zu sein.

Beispiel: $f_n(x) = x^n, \ x \in [0, 1]$. Es gilt

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) : \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Definition: Sei $M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$. Sei $f_n : M \to \mathbb{R} \, (\forall n \in \mathbb{N})$. Dann heißt die Folge $(f_n)_{n \in N}$ auf M gleichmäßig konvergent, wenn es $f : M \to \mathbb{R}$ gibt mit $f_n \to f$ derart, daß für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \ \forall n > N, \forall x \in M$$

Man schreibt $f_n \rightrightarrows f \ (n \to \infty)$ (auf M).

Satz 1:(„Cauchy-Kriterium")
Die Folge $(f_n)_{n \in N}$, $f_n : M \to \mathbb{R}$ ist auf M gleichmäßig konvergent genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ien $N \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \ \forall n, m > N, \forall x \in M$.

Beweis:

i) Sei f_n gleichmäßig konvergent auf M gegen f. Sei $\epsilon > 0$. Dann existiert nach Definition ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \, \forall n > N, \forall x \in M$.

Daher gilt für $n, m > N$ und $\forall x \in M$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \square$$

ii) Es gelte die Bedingung des Satzes. Sei $\epsilon > 0$. Dann ist insbesondere $(f_n(x))_{n \in N}$ für jedes $x \in M$ eine Cauchyfolge, also existiert nach dem Cauchy'schen Konvergenzkriterium für Folgen der Grenzwert

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \text{ also } f_n \to f$$

Dann gibt es nach Voraussetzung $N \in \mathbb{N}$, so daß

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \ \forall n, m > N, \forall x \in M \tag{5.1}$$

Sei $m > N$ fest, sei $x \in M$ fest. Man nehme in 5.1 den Limes für $n \to \infty$. Dann folgt

$$|f(x) - f_m(x)| = \lim |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

Also gilt $f_n \rightrightarrows f$.

Satz 2: Sei $f_n : M \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Es gelte $f_n \rightrightarrows f$ auf M. Außerdem sei jedes f_n in $x_0 \in M$ stetig. Dann ist auch f in x_0 stetig.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $(f_n)_{n \in N}$ gibt es $n \in \mathbb{N}$, so daß

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3} \ \forall x \in M$$

Da f_n in $x_0 \in M$ stetig ist, existiert $\delta > 0$, so daß

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} \ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M$$

Für $x \in U_\delta(x_0) \cap M$ gilt daher

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \qquad \square \end{aligned}$$

Man kann die entsprechenden Konvergenzbegriffe leicht auf Reihen von Funktionen übertragen. Genauer:

Definition: Sei $f_n : M \to \mathbb{R}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$. Dann versteht man unter der Reihe $f_1 + f_2 + \cdots = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n \in N}$.

$$s_n(x) := \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x) \ (x \in M)$$

Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ heißt punktweise konvergent auf M (bzw. gleichmäßig konergent auf M), falls $(s_n)_{n \in N}$ die entsprechenden Eigenschaften hat. Die Reihe

$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ heißt absolut konvergent auf M, falls $\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_\nu|$ auf M punktweise konvergiert. Sie heißt absoulut gleichmäßig konvergent auf M, falls $\sum_{\nu=1}^{\infty} |f_\nu|$ auf M gleichmäßig konvergent ist.

Man zeigt leicht:
Satz 3: („Cauchy-Kriterium")
$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ist auf M gleichmäßig konvergent $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}$, so daß $\forall n \in \mathbb{N}$ und $\forall p \in \mathbb{N}$ und $\forall x \in M$ gilt

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \epsilon$$

Satz 4: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf M gleichmäßig konvergent gegen f und sind alle f_n in $x_0 \in M$ stetig, so ist auch f in x_0 stetig.

Satz 5: Blatt 10, Aufgabe Nr. 4

Kapitel 6

Grundlagen der Integralrechnung

6.1 Vorbemerkung

Aufgabe der Integralrechnung (klassisch): Berechnung des Flächeninhalts ebener Figuren. Sei z.B. $f : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktion auf $I = [a,b]$ mit $f(x) > 0\ \forall x \in I$. Man betrachte die Figur im $\mathbb{R}^2$, die berandet wird vom Graphen $G(f)$ und von den Geradenstücken $\{(x,0)\,|\,x \in I\}$, $\{(a,y)\,|\,0 \leq y \leq f(a)\}$ und $\{(b,y)\,|\,0 \leq y \leq f(b)\}$. Anschaulich besitzt die Figur den Flächeninhalt $I(f)$ („das Integral zwischen den Grenzen a und b"), den man offenbar annähernd wie folgt berechnen kann: Man approximiere zunächst f „hinreichend gut " durch eine Treppenfunktion t auf I. Der entsprechende Flächeninhalt $I(t)$ ist eine endliche Summe von Flächeninhalten von Rechtecken und kann daher leicht errechnet werden. Es ist klar, daß $I(t)$ und $I(f)$ nur um weniges differieren.
Man approximiere f beliebig genau durch eine Folge von Treppenfunktionen $(t_n)_{n\,\in N}$. Dann sollte $I(t_n)$ gegen $I(f)$ konvergieren $(n \to \infty)$.

Moderne Mathematik:
Anschauung oft zweifelhaft, Existenz des Flächeninhalts $I(f)$ keineswegs a priori klar! Man sollte $I(f)$ exakt definieren durch einen Grenzprozeß, und zwar so, daß diese Definition dann möglichst gut mit der Anschauung verträglich ist.

6.2 Das Integral einer Treppenfunktion

Konvention in diesem Kapitel: $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall $a < b$.

Definition: Sei $t : I \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion bzgl. der Zerlegung $Z = \{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b\}$ von I, mit $t(x) = c_\nu\ \forall x \in (a_{\nu-1}, a_\nu),\ \nu = 1, \ldots n$. Dann setzt man

$$I_Z(t) := \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu (a_\nu - a_{\nu-1})$$

Satz 1: Sei $t : I \to \mathbb{R}$ Treppenfunktion bzgl. der Zerlegungen Z und Z'. Dann gilt $I_Z(t) = I_{Z'}(t)$.

Beweis: Wir betrachten zunächst die Zerlegung $Z_1 = \{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k < w < a_{k+1} < \cdots < a_n = b\}$ die aus Z durch Hinzunahme eines weiteren Punktes w entsteht. Es gilt $t(x) = c_{k+1}\ \forall x \in (a_k, a_{k+1})$, also $t(x) = c_{k+1}\ \forall x \in (a_k, w), \forall x \in (w, a_{k+1})$. Es gilt

$$I_{Z_1}(t) = c_1(a_1 - a_0) + \cdots + c_{k+1}(w - a_k) + c_{k+1}(a_k + 1 - w) + \cdots + c_n(a_n - a_{n-1})$$

Daher ist $I_{Z_1}(t) = I_Z(t)$. Ist daher $\tilde{Z}$ eine Verfeinerung von Z (d.h. entsteht aus Z durch Hinzunahme von endlich vielen Punkten), so gilt (per Induktion), $I_{\tilde{Z}}(t) = I_Z(t)$. Man betrachte jetzt die Verfeinerung $Z \vee Z'$, die aus Z durch Hinzunahme aller (nicht in Z enthaltenen) Punkte aus Z' entsteht. Nach Konstruktion ist dann $Z \vee Z'$ auch Verfeinerung von Z'. Daher gilt

$$I_Z(t) = I_{Z \vee Z'}(t) = I_{Z'}(t) \qquad \square$$

Definition: Die jeder Treppenfunktion $f : I \to \mathbb{R}$ zugeorndete Zahl $I(t) = I_Z(t)$ heißt das Integral von t über I.

Satz 1: Sei $T(I) := \{t : I \to \mathbb{R} \,|\, t \text{ ist Treppenfunktion auf } I\}$. Dann gilt

i) $T(I)$ ist linearer Unterraum von $B(I)$ und die Abbildung $T(I) \to \mathbb{R}, t \to I(t)$ ist linear, d.h.

$$I(t_1 + t_2) = I(t_1) + I(t_2),\ \ I(\alpha t) = \alpha I(t)\ \ (\alpha \in \mathbb{R})$$

ii) Für alle $t \in Z(I)$ gilt

$$|I(t)| \leq |t|_I \cdot (b - a)$$

iii) Ist $t \geq 0$ (d.h. $t(x) \geq 0\ \forall x \in I$), so ist $I(t) \geq 0$.

iv) Mit $t \in T(I)$ ist auch $|t| \in T(I)$ ($|t|(x) := |t(x)|$) und es gilt $|I(t)| \leq I(|t|)$.

Beweis:

i) $T(I) \subset B(I)$ ist klar.
Seien $t_1, t_2 \in T(I)$ Treppenfunktionen, t_1 bzgl. der Zerlegung Z_1, t_2 bzgl. der Zerlegung Z_2 von I. Sei $Z := Z_1 \vee Z_2$ die gemeinsame Verfeinerung Z_1 und Z_2. Dann ist t_1, t_2 Treppenfunktion bzgl. Z. Sei $Z := \{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b\}, t_1(x) = c_\nu, t_2(x) = d_\nu\ \forall x \in (a_{\nu-1}, a_\nu), \nu = 1, \ldots n$. Dann ist $(t_1 + t_2)(x) = t_1(x) + t_2(x) = c_\nu + d_\nu\ \forall x \in (a_{\nu-1}, a_\nu)$, also ist $t_1 + t_2$ Treppenfunktion bzgl. Z. Also ist $t_1 + t_2 \in T(I)$. Daß $\alpha t \in T(I)$ ist klar. Daß die Abbildung $I : T(I) \to \mathbb{R}$ linear ist, ist klar, denn es gilt z.B.

$$\begin{aligned} I(t_1 + t_2) = I_{Z_1 \vee Z_2}(t) &= \sum_{\nu=1}^{n} (c_\nu + d_\nu)(a_\nu - a_{\nu-1}) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu(a_\nu - a_{\nu-1}) + \sum_{\nu=1}^{n} d_\nu(a_\nu - a_{\nu-1}) \\ &= I_{Z_1 \vee Z_2}(t_1) + I_{Z_1 \vee Z_2}(t_2) = I(t_2) + I(t_2) \end{aligned}$$

ii) Es gilt

$$|I(t)| \leq \sum_{\nu=1}^{n} |c_\nu|(a_\nu - a_{\nu-1}) \leq \sum_{\nu=1}^{n} |t|_I(a_\nu - a_{\nu=1})$$

nach Definition der Sup-Norm

$$= |t|_I \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu - a_{\nu-1}) = |t|_I(b-a)$$

iii) +iv) klar!

Definition: Sei $R(I) := \{f \in B(I) \,|\,$ es gibt eine Folge $(t_n)_{n \in N}$ von Treppenfunktionen $t_n \in T(I)$ mit $\lim |f - t_n|_I = 0\}$. Funktionen aus $R(I)$ heißen Regelfunktionen.

Bemerkung:

i) Man beachte, daß $\lim\limits_{n\to\infty} |f - t_n|_I = 0$ äquivalent zu $t_n \rightrightarrows f$ auf I ist, denn

$$|f - t_n|_I = \sup\{|f(x) - t_n(x)| \,|\, x \in I\} \Leftrightarrow |f(x) - t_n(x)| \leq \epsilon \;\forall x \in I$$

ii) $R(I)$ ist ein linearer Unterraum von $B(I)$.

iii) Man kann zeigen: Eine Funktion $f \in B(I)$ liegt in $R(I)$ genau denn, wenn für jedes $x_0 \in I$ der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x)$ und der rechtseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)$ existiert.

Satz 2: Es gilt $C^0(I) \subset R(I)$.

Beweis: schon bewiesen in Kapitel 5.3.

6.3 Das Integral einer Regelfunktion

Satz:

i) Sei $(t_n)_{n \in N}$ eine Folge von Treppenfunktionen $t_n \in T(I)$ mit der folgenden Eigenschaft: zu jedem $\epsilon > 0 \,\exists N \in \mathbb{N}$, so daß $|t_n - t_m|_I < \epsilon \,\forall n, m > N$ (d.h. $(t_n)_{n \in N}$ ist Cauchyfolge in $T(I)$). Dann ist die Zahlenfolge $(I(t_n))_{n \in N}$ konvergent.

ii) Sei $f \in R(I)$ und es gelte

$$\lim_{n\to\infty} |f - t_n|_I = 0, \; \lim_{n\to\infty} |f - t_n^*|_I = 0$$

für Folgen von Treppenfunktionen $(t_n)_{n \in N}$ und $(t_n^*)_{n \in N}$ auf I. Dann konvergiert $(I(t_n))_{n \in N}$ und $(I(t_n^*))_{n \in N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} I(t_n) = \lim\limits_{I\to\infty} (t_n^*)$:

Beweis:

i) Sei $\epsilon > 0$ Man bestimme $N \in \mathbb{N}$, so daß $|t_n - t_m|_I < \frac{\epsilon}{b-a}$ $\forall n, m > N$. Dann gilt

$$|I(t_n) - I(t_m)| \underbrace{=}_{\text{Satz } 2.1} |I(t_n - t_m)| \leq |t_n - t_m|_I \cdot (b-a) < \frac{\epsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \epsilon$$

$\forall n, m > N$. Also ist $(I(t_n))_{n \in N}$ Cauchyfolge, also konvergent.

ii) Es gilt

$$|t_n - t_m|_I \leq |f - t_n|_I + |f - t_m|_I$$

(denn $|\cdot|_I$ ist Norm, also gilt die Dreiecksungleichung). Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} |f - t_n|_I = 0$ ist also $(t_n)_{n \in N}$ eine Cauchyfolge, nach i) konvergiert $(I(t_n))_{n \in N}$.
Genauso: $(I(t_n^*))_{n \in N}$ konvergiert.
Wegen $|t_n - t_n^*|_I \leq |f - t_n|_I + |f - t_n^*|_I \to 0$ ist $(|t_n - t_n^*|_I)_{n \in N}$ eine Nullfolge. Daher gilt

$$|I(t_n) - I(t_n^*)| = |I(t_n - t_n^*)| \leq |t_n - t_n *|_I (b-a) \to 0$$

Aslo ist $\lim I(t_n) = \lim I(t_n^*)$.

Definition: Sei $f \in R(I)$. Dann ordnet man f eine wohlbestimmte Zahl $I(f)$ wie folgt zu: man wählt ein Folge $(t_n)_{n \in N}$ mit $t_n \in T(I)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} |f - t_n|_I = 0$ und setzt $I(f) := \lim\limits_{n\to\infty} I(t_n)$ (s. Satz). Die Zahl $I(f)$ heißt das Intergral von f über I, man schreibt

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(nach Leibniz). Man nennt x die Integrationsvariable.

6.4 Berechnung des Integrals einer stetigen Funktion durch Riemann'sche Summen

Sei $Z = \{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b\}$ eine Zerlegung von I. Man nennt dann $\delta(z) := \max\limits_{1 \leq \nu \leq n} \Delta a_\nu$, wobei $\Delta a_\nu = a_\nu - a_{\nu-1}$ $(\nu = 1, \ldots n)$ die Länge des Intervalls $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ ist, die Feinheit von Z. Sei $f \in C^0(I)$. Dann heißt die Summe der Form

$$\delta = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi^{(\nu)}) \Delta a_\nu$$

wobei die $\xi^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots n)$ Zwischenpunkte $\xi \in [a_{\nu-1}, a_\nu]$ sind, *Riemannsche Summe* für f zur Zerlegung Z.

Satz: Sei $f \in C^0(I)$: Sei $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen z_m von I mit

$\delta(z_m) \to 0\,(m \to \infty)$. Sei $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Riemannschen Summen für f, wobei s_m zu z_m gehöre. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} s_m$$

Beweis: Sei $z_m = \{a = a_0^{(m)} < a_1^{(m)} < \cdots < a_{n_m}^{(m)} = b\}$, $\xi_\nu^{(m)} \in [a_{\nu-1}^{(m)}, a_\nu^{(m)}]$, $\Delta a_\nu^{(m)} = a_\nu^{(m)} - a_{\nu-1}^{(m)}$, $s_m = \sum_{\nu=1}^{n_m} f(\xi_\nu^{(m)})\Delta a_\nu^{(m)}$. Für $m \in \mathbb{N}$ definiere $t_m \in T(I)$ durch

$$\begin{aligned} t(x) &:= f(\xi_\nu^{(m)}),\ \ x \in (a_{\nu-1}^{(m)}, a_\nu^{(m)}),\ (\nu = 1, \ldots, m) \\ t(x) &:= f(a_\nu^{(m)}),\ \ x = a_\nu^{(m)},\ (\nu = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

Nach Definition ist $s_m = I(t_m)$. Man zeigt jetzt, daß $\lim |f - t_m|_I = 0$ (genauso wie der Beweis von Kapitel 5.3, Satz 2, man benutzt $\delta(z_m) \to 0$). Nach Definition gilt dann also

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} s_m$$

Beispiele:

i) $f(x) = 1$, $x \in I$. Dann ist

$$\int_a^b 1\,\mathrm{d}x) = \int_a^b \mathrm{d}x = I(f) = 1(b-a) = b - a$$

(Man beachte $f \in T(I)$).

ii) $f(x) = x$, $x \in I$
Berechnung von $\int_a^b x\,\mathrm{d}x$ über Riemannsche Summen. Man nehme die Zerlegungen $z_m = \{a = a_0^{(m)} < a_1^{(m)} < \cdots < a_m^{(m)} = b\}$ mit $a_\nu^{(m)} = a + \nu \cdot \frac{b-a}{m}$ $(\nu = 0, \ldots, m)$. Man nehme ferner $\xi_\nu^{(m)} = a_\nu^{(m)}$ $(\nu = 1, \ldots, m)$. Es gilt $\delta(z_m) = \frac{b-a}{m} \to 0\,(m \to \infty)$. Daher gilt nach Satz

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} s_m$$

wobei

$$\begin{aligned} s_m &= \sum_{\nu=1}^{m} f(\xi_\nu^{(m)})\Delta a_\nu^{(m)} \\ &= \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu^{(m)}(a_\nu^{(m)} - a_{\nu-1}^{(m)}) \\ &= \sum_{\nu=1}^{m}(a + \nu\frac{b-a}{m})\frac{b-a}{m} = m \cdot a \cdot \frac{b-a}{m} + \left(\frac{b-a}{m}\right)^2 \sum_{\nu=1}^{m} \nu \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{m^2} \cdot \frac{m(m+1)}{2} \\
&= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{m}\right) \\
&\to a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \ (m \to \infty) \\
&= \frac{1}{2}(b^2 - a^2)
\end{aligned}
$$

6.5 Eigenschaften des Integrals

Satz:

i) $\forall f, g \in R(I)$ gilt

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$\forall f \in R(I), \forall \alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(d.h. die Abbildung $R(I) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist linear)

ii) $\forall f \in R(I)$ gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq |f|_I \cdot (b-a)$$

iii) Aus $f \geq 0$ folgt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

iv) Aus $f \leq g$ folgt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

v) Ist $f \in R(I)$ und $m_1 \leq f \leq m_2$ ($m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ fest), so folgt

$$m_1(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq m_2(b-a)$$

vi) Ist $f \in R(I)$, so folgt

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Beweis:

i) Sei $\lim|f-t_n|_I=0, \lim|g-t'_n|_I=0$ für $t_n\in T(I), t'_n\in T(I)$. Dann gilt $\lim|(f+g)-(t_n+t'_n)|_I=0$, also folgt

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty} I(t_n+t'_n)=\lim_{n\to\infty}\big(I(t_n)+I(t'_n)\big)$$

$$=\lim_{n\to\infty} I(t_n)+\lim_{n\to\infty} I(t'_n)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Genauso zeigt man die zweite Behauptung in i).

ii) Sei $t_n\in T(I)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}|f-t_n|_I=0$. Da die Abbildung $B(I)\to\mathbb{R}, g\mapsto|g|_I$ eine Norm ist, gilt $\forall g,h\in B(I)\ \big||g|_I-|h|_I\big|\le|g-h|_I$. Inbesondere gilt

$$\big||f|_I-|t_n|_I\big|\le|f-t_n|_I\to 0\,(n\to\infty)\ \Rightarrow\ |t_n|_I\to|f|_I\,(n\to\infty)$$

Daher

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|)|=|\lim_{n\to\infty} I(t_n)|=\lim_{n\to\infty}|I(t_n)|\le\lim_{n\to\infty}|t_n|_I\cdot(b-a)=|f|_I\cdot(b-a)$$

iii) Sei $\lim\limits_{n\to\infty}|f-t_n|_I=0$. Dann gilt auch $|t_n|\rightrightarrows|f|=f$ auf I (denn $\forall c,d\in\mathbb{R}$ gilt $\big||c|-|d|\big|\le|c-d|$). Es gilt $t_n\rightrightarrows f$ nach Voraussetzung, d.h. $\forall\epsilon>0\,\exists N\in\mathbb{N}$ derart, daß

$$\big||f(x)|-|t_n(x)|\big|\le|f(x)-t_n(x)|$$

Daher $|t_n|\rightrightarrows|f|\Leftrightarrow|f|\in R(I)$. Daher

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty} I(|t_n|)\ge 0\ (\forall n\in\mathbb{N})$$

iv) folgt aus i) und iii), denn $f\le g\Leftrightarrow g-f\ge 0$

v) folgt aus iv) wegen $\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$. Denn

$$\begin{aligned}
m_1\le f\Leftrightarrow\ & m_1\le f(x)\ \forall x\in I\\
&\Leftrightarrow f(x)-m_1\ge 0\\
&\Rightarrow\int_a^b\big(f(x)-m_1\big)\,\mathrm{d}x\ge 0\\
&\Rightarrow\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b m_1\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-m_1\int_a^b\mathrm{d}x\\
&\quad=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-m_1(b-a)\ge 0\\
&\Rightarrow\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ge m_1(b-a)
\end{aligned}$$

Rest genauso.

vi) Sei $t_n\rightrightarrows f$ auf I. Dann gilt $|t_n|\rightrightarrows|f|$ auf I (schon gezeigt). Daher

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|=|\lim_{n\to\infty} I(t_n)|=\lim_{n\to\infty}|I(t_n)|\le\lim_{n\to\infty} I(|t_n|)=\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$$

6.6 Vertauschung von Integral und Grenzprozeß

Satz:

i) Seien $f_n \in R(I)\,(n \in \mathbb{N})$ mit $f_n \rightrightarrows f \in R(I)$ auf I. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

ii) Sei $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ eine Reihe von Regelfunktionen $f_\nu \in R(I)$, die auf I gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f \in R(I)$ konvergiert. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\sum f_\nu(x)\right)\,\mathrm{d}x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_a^b f_\nu(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis:

ii) folgt sofort aus i)

i) Es gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b (f(x) - f_n(x))\,\mathrm{d}x\right| \le |f - f_n|_I(b-a) \to 0$$

$(n \to \infty)$ denn $\lim_{n\to\infty} |f - f_n|_I = 0$ nach Voraussetzung. □

Bemerkung: Die Aussage des Satzes wird i.a. falsch, wenn man die Voraussetzung über gleichmäßige Konvergenz fallen laßt.
Beispiel $I = [0,1]$, $f_n : I \to \mathbb{R}$.

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ n & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $f(x) = 0\,\forall x \in I$. Daher $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Offenbar gilt $f_n \in T(I)$ und $\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = n(\frac{1}{n} - 0) + 0 = 1$

6.7 Erweiterung der Integraldefinition. Additivität des Integrals

Definition: Sei $I = [a,b]$ mit $a < b$. Seien $c, d \in I$ mit $d < c$. Sei $f \in R(I)$. Dann setzt man

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_d^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x := 0$$

Satz: Sei $I = [a, b], a < b$. Dann gilt für beliebige $c, d, e \in I$ und $\forall f \in R(I)$

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^e f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^e f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.1}$$

Beweis: Man unterscheidet die verschiedenen Fälle $c \leq d \leq e, d \leq c \leq e$ (ingesamt $6 = 3!$ Fälle). Man beachte, daß 6.1 äquivalent ist zu

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^e f(x)\,\mathrm{d}x + \int_e^c f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Korollar: Sei $I = [a, b], a < b$. Sei $f \in R(I)$. Dann gilt für beliebige Punkte $c_0, c_1, \ldots, c_n \in I$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_{c_{\nu-1}}^{c_\nu} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{c_0}^{c_n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

6.8 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz: Sei $I = [a, b], a < b$. Sei $f \in C^0(I)$. Dann gibt es $\xi \in I$, so daß

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

Beweis: Da $f : I \to \mathbb{R}$ auf dem kompakten Intervall stetig ist, nimmt f auf I ihr Maximum m_2 und ihr Minimum m_1 an. Daher gilt $m_1 \leq f \leq m_2$. nach 6.5 Satz gilt daher

$$m_1(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq m_2(b-a)$$

Daher folgt

$$m_1 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq m_2$$

Nach dem Zwischenwertsatz folgt daher die Existenz eines $\xi \in I$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6.2}$$

(streng genommen braucht man den Zwischenwertsatz nur im Fall $m_1 < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < m_2$, in den anderen Fällen ist die Existenz 6.2 klar, denn $\exists x_1 \in I$ mit $m_1 = f(x_1)$ und $\exists x_2 \in I$ mit $m_2 = f(x_2)$.)

Kapitel 7

Grundlagen der Differentialrechnung

7.1 Differenzierbarkeit

Motivation: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf dem offenen Intervall I definierte reelle Funktion, deren Graph $G(f)$ im $\mathbb{R}^2$ eine Kurve beschreibt. Man bilde den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x^*) - f(x)}{x^* - x}$$

Dieser ist gleich der Steigung $\tan\alpha$ der Sekante durch die Punkte $p = (x, f(x))$, $p^* = (x^*, f(x^*))$. Läßt man x^* gegen x gehen, so geht bei einer stetigen Funktion f der Punkt p^* gegen p. Besitzt dann der Differenzenquotient einen Grenzwert $f'(x)$, so heißt dies, daß sich die Sekante einer Grenzlage nähert, die man dann die Tangente der Kurve in p nennt und $f'(x)$ ist dann die Steigung der Tangente.

Definition: Sei f eine reelle Funktion, die in einer r-Umgebung eines Punktes $x_0 \in \mathbb{R}$ definiert ist, d.h. $U_r(x_0)$ ist im Definitionsbereich von f enthalten. Dann heißt f differenzierbar in x_0, wenn der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für x gegen x_0 einen Limes hat. Man setzt dann

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Die Zahl $f'(x_0)$ heißt Ableitung von f in x_0. Statt $f'(x_0)$ schreibt man auch $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ oder $Df(x_0)$.

Beispiele:

i) $f(x) = c$ konstant $(x \in \mathbb{R})$. Dann ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = \frac{0}{h} = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0 \ \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

ii) $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$. Dann

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_0 h + h^2}{h} = 2x_0 + h \to 2x_0 \ (h \to 0)$$

$\Rightarrow f'(x_0) = 2x_0 \ \forall x_0 \in \mathbb{R}$

Definition: Sei f eine reelle Funktion, die in einer r-Umgebung von $x_0 \in \mathbb{R}$ definiert ist. Man sagt dann auch, daß f ein Differential in x_0 besitzt, wenn es $A \in \mathbb{R}$ und $\epsilon : U_r(0) \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = \epsilon(0) = 0$ gibt, derart daß $\forall h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < r$ gilt

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A \cdot h + \epsilon(h) \cdot h \tag{7.1}$$

Durch $h \to Ah$ wird dann eine lineare Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert, die man das Differential von f in x_0 nennt und mit $df(x_0)$ bezeichnet.

Satz: Sei f in einer r-Umgebung von x_0 definiert. Dann ist f in x_0 diff'bar genau dann, wenn f in x_0 ein Differential besitzt. Dieses ist eindeutig bestimmt — sofern es existiert — und es gilt

$$df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h$$

(i.a.W. $A = f'(x_0)$)

Beweis:

i) Es gelte 7.1 $\forall h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < r$, wobei $\epsilon : U_r(x_0) \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = \epsilon(0) = 0$. Für $0 < |h| < r$ folgt dann aus 7.1

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - A = \epsilon(h)$$

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - A \right| = |\epsilon(h)| \to 0 \ (h \to \infty)$$

also ist f in x_0 diff'bar und es gilt $A = f'(x_0)$. Es gilt also $(df(x_0)(h) = Ah = f'(x_0)h$.

ii) Sei f in x_0 diff'bar. Man definiere $\epsilon : U_r(0) \to \mathbb{R}$ durch

$$\epsilon(h) := \begin{cases} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) & (0 < |h| < r) \\ 0 & (h = 0) \end{cases}$$

Dann gilt $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = \epsilon(0) = 0$ (denn f ist ja in x_0 diffbar). Ferner gilt $\forall h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < r$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \epsilon(h) \cdot h \qquad \square$$

Korollar: Sei f in $U_r(x_0)$ definiert. Sei f in x_0 diff'bar. Dann ist f in x_0 stetig.

Beweis: Folgt aus 7.1.

Bemerkung: Man beachte, daß die Umkehrung i.a. falsch ist. Es gibt Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in jedem Punkt von $\mathbb{R}$ stetig sind, aber in keinem diff'bar.

Definition: Eine in $\{x \in \mathbb{R} \mid x_0 \leq x < x_0 + r\}$ definierte reelle Funktion heißt in x_0 rechtsseitig diff'bar, falls der rechtsseitige Limes

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} := D_+ f(x_0)$$

existiert. Man nennt $D_+ f(x_0)$ die rechtsseitige Ableitung von f in x_0. Ähnlich nennt man eine in $\{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - r < x \leq x_0\}$ definierte reelle Funktion in x_0 linksseitig diff'bar, falls

$$D_- f(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Man nennt dann $D_- f(x_0)$ linksseitige Ableitung von f in x_0.

Beispiele:

i) $f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R}), x_0 = 0$. $D_+ f(0) = 1, D_- f(0) = -1$

ii) Eine Funktion ist in x_0 diff'bar genau dann, wenn $D_+ f(x_0)$ und $D_- f(x_0)$ existieren und übereinstimmen.

Definition: („Diffbarkeit auf einem Intervall")
Sei $I \subset \mathbb{R}$ mit a, b Endpunkten $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt diff'bar auf I, wenn

i) in jedem inneren Punkt von I ist f diff'bar

ii) Falls a oder b oder a, b zu I gehören, soll $D_+ f(a)$ oder $D_- f(a)$ oder beide existieren. Man setzt dann $f'(a) = D_+ f(a)$ und $f'(b) = D_- f(b)$.

In diesem Fall heißt die Funktion

$$\begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$$

die Ableitung von f.

Bemerkung: Für den Fall $a \in I$ gelten obige Eigenschaften mit der Einschränkung, daß die Funktion auf $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < r\}$ definiert ist und es gilt

i) $f(a + h) = f(a) + Ah + \epsilon(h) \cdot h$ $(0 \leq h < r)$

ii) $\lim\limits_{h \to 0+} \epsilon(h) = \epsilon(0) = 0$

Definition: (höhere Ableitungen")
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine diff'bare Funktion. Dann heißt f zweimal diff'bar auf I, wenn $f' : I \to \mathbb{R}$ diff'bar ist. Man setzt $f''(x) := (f')'(x)$ (zweite Ableitung von f). Analog definiert man rekursiv höhere Ableitungen von einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ höhere Diff'barkeitsordnung und

i) ist f stetig, so setzt man $f^{(0)} = f$

ii) Für $k \in \mathbb{N}$ heißt f k-mal diff'bar, wenn $f^{(k-1)} : I \to \mathbb{R}$ diff'bar ist. Man setzt dann

$$f^{(k)}(x) := (f^{(k-1)})'(x)$$

Definition: Eine diff'bare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt stetig diff'bar, wenn die Ableitung von f' von f stetig ist.

7.2 Eigenschaften der Ableitung

Satz 1: Seien $f, g : U_r(x_0) \to \mathbb{R}\,(r > 0)$ in x_0 diff'bare Funktionen. Dann sind die Funktionen $f + g, c \cdot f\,(c \in \mathbb{R}), f \cdot g$ diff'bar in x_0, und es gilt

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),\ \ (c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$$
$$(f \cdot g)(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \ \ \text{Produktregel}$$

Gilt darüberhinaus $g(x_0) \neq 0$, so sind die Funktionen $\frac{1}{g}$ und $\frac{f}{g}$ in x_0 diff'bar und es gilt

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Beweis: Für $0 < |h| < r$ gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{cf(x_0+h) - cf(x_0)}{h} = c \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = c \cdot f'(x_0) = (cf)'(x_0) \qquad \square$$
$$\frac{(f\cdot g)(x_0+h) - (f \cdot g)(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot g(x_0+h) + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \cdot f(x_0) \qquad \square$$

Gilt $g(x_0) \neq 0, g$ ist in x_0 diff'bar, insbesondere stetig, dann existiert eine δ-Umgebung $U_\delta(x_0) \subset U_r(x_0)$ auf der g keine Nullstelle besitzt. Man betrachte also die Funktion

$$\begin{cases} U_\delta(x_0) \to \mathbb{R} \\ x \to \frac{1}{g(x)} \end{cases}$$

Für $0 < |h| < \delta$

$$\frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} = -\frac{1}{g(x_0+h) \cdot g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{f(x_0)^2} \qquad \square$$

$\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ Produktregel anwenden.

Satz 3: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten a und b, $a < b$. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf I stetig und auf (a, b) diff'bar. Dann gilt:

i) Gilt $f'(x) \geq 0$ bzw. $f'(x) > 0\ \forall x \in (a,b)$, so ist f auf I monoton wachsend bzw. streng monoton wachsend (d.h. ist $x, y \in I$ und $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$; $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$).

ii) Ist f auf I monoton wachsend, so gilt $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a,b)$.

Beweis:

i) Seien $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$. Nach dem MWS gibt es dann $\xi \in (x_1, x_2)$ mit $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$ oder > 0 je nachdem ob $f'(\xi) \geq 0$ oder $f'(\xi) > 0 \ \forall x \in (a,b)$. Also gilt $f(x_2) \geq f(x_1)$ oder $f(x_2) > f(x_1)$ $\forall x \in (a,b)$. $\square$

ii) Sei $x \in (a,b)$ und $h \neq 0$. Für $h > 0$ ist dann $x < x+h \Rightarrow f(x) \leq f(x+h)$. Für $h < 0$ ist $x + h < x \Rightarrow f(x+h) \leq f(x)$. In jedem Fall ist also

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \underbrace{\Rightarrow}_{h \to 0} f'(x) \geq 0 \qquad \square$$

7.3 Der Satz über die inverse Funktion

Satz: Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ kompaktes Intervall mit $a < b$. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine auf I stetige, injektive Abbildung, die auf (a,b) diff'bar ist und $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b)$ erfüllt. Sei $f([a,b]) = [\alpha, \beta]$. (Siehe Kapitel 5.2). Sei $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, die zu f inverse Abbildung. Dann ist auch g auf (α, β) diff'bar, und es gilt

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

Beweis: Sei $y_0 \in (\alpha, \beta)$. Sei $x_0 := g(y_0)$. Dann gilt $x_0 \in (a,b)$ In der Tat, angenommen z.B. $x_0 = a$. Dann ist also $y_0 = f(a)$. Sei $x \in I$ mit $a < x$. Nach Voraussetzung ist $f'(w) > 0 \ \forall w \in (a,b)$, also ist f auf I streng monoton wachsend. Also $y_0 = f(a) < f(x)$, daher folgte $f([a,b]) < [y_0, \beta]$, Widerspruch zur Surjektivität von f, da $\alpha < y_0$. Genauso widerlegt man die Annahme $x_0 = b$. Sei $(y_n)_{n \in N}$ eine Folge mit $y_n \to y_0, y_n \neq y_0, y_n \in [\alpha, \beta]$. Sei $x_n = g(y_n)$. Da g stetig auf $[\alpha, \beta]$, folgt $x_n \to x_0 = g(y_0)\,(n \to \infty)$ (Kapitel 5.2). Da g injektiv, folgt aus $y_n \neq y_0$, daß $x_n \neq x_0$. Daher

$$\frac{g(y_n) - g(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \to \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

da f in x_0 diff'bar und $f'(x_0) \neq 0$ ist. $\square$

Beispiel: $f(x) = x^4, f'(x) = 4x^3 > 0 \ \forall x > 0$, f ist stetig und für $x > 0$ diff'bar. Anwendung des Satzes auf $[0,b]$, denn f ist injektiv.

$$g = \sqrt[4]{y}\,(y > 0)$$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{4(\sqrt[4]{y})^{4-1}} = \frac{1}{4} y^{\frac{1}{4}-1}$$

7.4 Zusammenhang zwischen Differential- und Integralrechnung

Generalvoraussetzung: $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit $a < b$.

Definition: Eine Funktion $\Phi : I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion einer vorgegebenen

Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, wenn Φ auf I diff'bar ist und $\Phi' = f$ ist.

Satz 1: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ vorgegeben. Ist dann Φ_0 eine Stammfunktion von f, so läßt sich jede weitere Stammfunktion von f schreiben als

$$\Phi = \Phi_0 + c$$

(d.h. $\Phi(x) = \Phi_0(x) + c\ \forall x \in I$), wobei c eine Konstante ist.

Beweis: Es gilt $\Phi' = \Phi_0' + c' = \Phi_0' = f$, also ist jedes solche Φ eine Stammfunktion von f. Seien umgekehrt Φ_1 und Φ_2 zwei Stammfunktionen von f. Es gilt dann

$$(\Phi_1 - \Phi_2)' = \Phi_1' - \Phi_2' = f - f = 0$$

Da $\Phi_1 - \Phi_2$ auf I diff'bar ist, ist auch $\Phi_1 - \Phi_2$ stetgi auf I (siehe Korollar zu Satz 1, Kapitel 7.1, die Aussage wurde dort nur für Punkte $x_0 \in (a, b)$ bewiesen, der Beweis funktioniert aber genauso $\forall x \in I$). Daher gilt (Kapitel 7.3, Korollar zu Satz 2) $\phi_1 - \phi_2 = c$ konstant.

Satz 2: (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Sei $f \in C^0(I)$. Sei $c \in I$ fest. Dann ist die durch $F : I \to \mathbb{R}, F(x) := \int_0^x f(\nu)\,\mathrm{d}\nu$ definierte Funktion stetig diff'bar auf I und $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$, i.a.W. das Integral einer stetigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, als Funktion der oberen Grenze, liegert eine Stammfunktion von f.

Beweis: Sei $x, x + h \in I, h \neq 0$. Dann gilt

$$F(x+h) - F(x) = \int_c^{x+h} f(\nu)\,\mathrm{d}\nu - \int_c^x f(\nu)\,\mathrm{d}\nu$$

$$= \int_x^c f(\nu)\,\mathrm{d}\nu + \int_c^{x+h} f(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \int_x^{x+h} f(\nu)\,\mathrm{d}\nu$$

Es gilt ferner

$$f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)\,\mathrm{d}\nu$$

Daher gilt

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} (f(\nu) - f(x))\,\mathrm{d}\nu\right|$$

Sei $\epsilon > 0$. Da f auf I stetig ist und I kompakt, ist f auf I gleichmäßig stetig. Also existiert $\delta > 0$, so daß $|f(u) - f(\nu)| < \epsilon$ mit $|u - \nu| < \delta$. Sei $0 < |h| < \delta$. Dann folgt also

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} |f(\nu) - f(x)|\,\mathrm{d}\nu\right| \leq \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} \epsilon\,\mathrm{d}\nu\right|$$

(denn ν liegt zwischen x und $x+h$, also gilt $|\nu - x| < \delta$)

$$= \frac{1}{|h|} \cdot \epsilon |x+h-x| = \epsilon$$

Daher gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

also ist F diff'bar und $F'(x) = f(x)$.

Satz 3: Sei $f \in C^0(I)$ und sei $\Phi : F \to \mathbb{R}$ irgendeine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(b) - \Phi(a) =: \Phi(x)|_a^b$$

Beweis: Die Funktion $\Phi_0(x) := \int_a^x f(\nu)\,\mathrm{d}\nu$ ist nach Satz 2 eine Stammfunktion von f. Nach Satz 1 existiert daher $c \in \mathbb{R}$, so daß $\Phi = \Phi_0 + c$. Es gilt also

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Phi_0(b) = \Phi_0(b) - \Phi_0(a)$$

wegen $\Phi_0(a) = 0$). Außerdem

$$(\Phi_0(b) + c) - (\Phi_0(a) + c) = \Phi_0(b) - \Phi_0(a) \qquad \square$$

Definition: Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt das unbestimmte Integral von f und wir mit $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ bezeichnet.

Beispiel:

$$\int_a^b x^k\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1} x^{k+1}|_a^b = \frac{1}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1}$$

($k \in \mathbb{N}$, denn $x \mapsto \frac{1}{k+1}x^{k+1}$ ist Stammfunktion von x^k.

7.5 Partielle Integration. Substitution

Satz 1: (Partielle Integration)
Seien $f, g \in C^1(I)$. Dann gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g'(x)f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis: Nach der Produktregel ist

$$(fg)' = f'g + g'f \tag{7.2}$$

Ferner ist

$$\int_a^b (fg)'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)|_a^b$$

Man integriert beide Seiten von 7.2

Satz 2: (Substitution)
Seien $I = [\alpha, \beta]$ und $I^* = [a, b]$ zwei kompakte Intervall in $\mathbb{R}$, $\alpha < \beta, a < b$. Sei $f \in C^0(I^*)$. Es gebe $\varphi \in C^1(I)$ mit $\varphi(I) \subset I^*$. Dann gilt

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(\nu))\varphi'(\nu)\,\mathrm{d}\nu$$

Beweis: Sei $\Phi : I^* \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : I^* \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\frac{d}{d\nu}\Phi(\varphi(\nu)) = \Phi'(\varphi(\nu)) \cdot \varphi'(\nu) = f(\varphi(\nu))\varphi'(\nu)$$

Daher gilt nach Satz

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(\nu))\varphi'(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \Phi(\varphi(\nu))|_{\alpha}^{\beta} = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha))$$

$$= \Phi(x)|_{\varphi(alpha)}^{\varphi(\beta)} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \square$$

1. Anwendungsmöglichkeit: Es soll $\int_{\infty}^{\beta} f(x)\,\mathrm{d}x$ berechnet werden. Wenn man eine Funktion $f \in C^0(I^*)$, ein $\varphi \in C^1(I)$ mit $\varphi(I) \subset I^*$ finden kann, so daß $g(\nu) = f(\varphi(\nu))\varphi'(\nu)$, so gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(\nu)\,\mathrm{d}\nu = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. Anwendungsmöglichkeit: („Variablentransformation")
Es soll $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ berechnet werden. Wenn man eine bijektive Abbildung $\varphi \in C^1(I)$ mit $\varphi(I) \subset I^*$ finden kann und $\psi : I^* \to I$ die inverse Abbildung zu φ ist, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(\varphi(\nu))\varphi'(\nu)\,\mathrm{d}\nu$$

Index