Validation par analyse statique

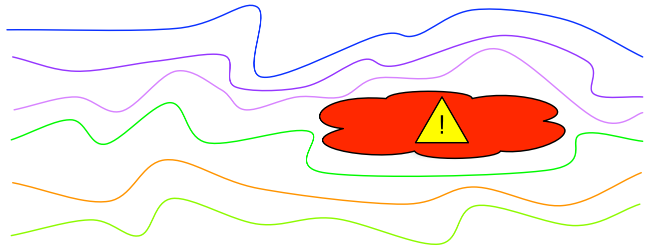
Interprétation abstraite

Pierre-Loïc Garoche

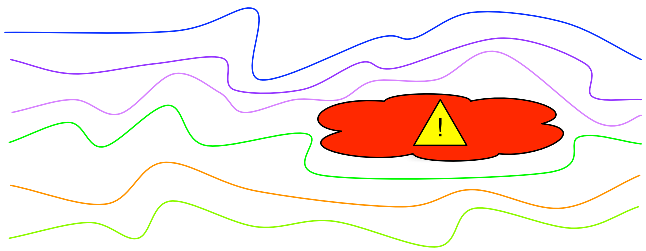
ONERA

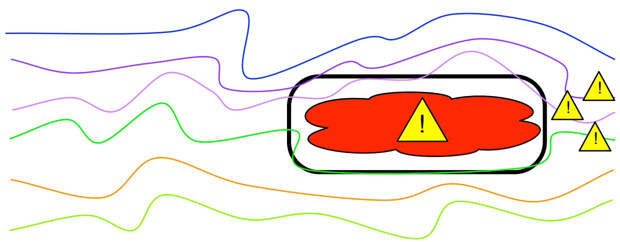
Cours ISAE
2014-2015

L'interprétation abstraite d'un coup d'oeil

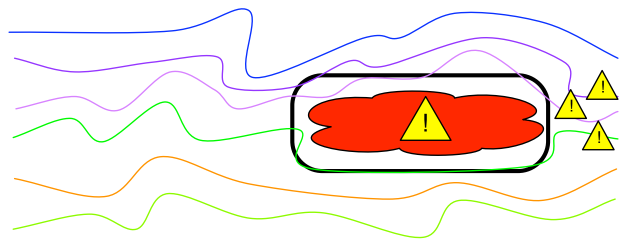


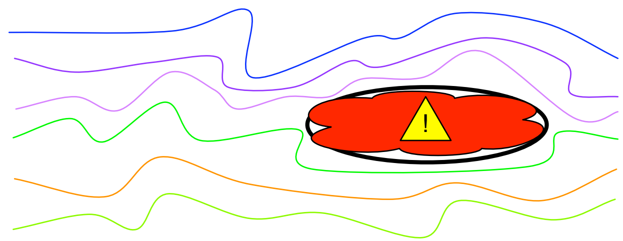
L'interprétation abstraite d'un coup d'oeil





L'interprétation abstraite d'un coup d'oeil





Plan du cours sur l'interprétation abstraite

1. Introduction à l'interprétation abstraite
   - Sémantique collectrice d'un langage *C*-like
   - Abstractions numériques simples
     - domaine des signes
     - domaine des constantes
     - intervalles et accélération de convergence
2. Abstractions numériques relationnelles et bref état de l'art
   - domaine des polyèdres
   - aperçu d'autres analyses
   - quelques outils et applications

Un langage jouet

Syntaxe

$$\begin{array}{rl} \mathit{stm} ::= & v = \mathit{expr}\,\mathbf{;} \mid \mathit{stm}\ \mathit{stm} \\ & \mid \mathbf{if}\ (\mathit{expr} > 0)\ \mathbf{\{}\ \mathit{stm}\ \mathbf{\}}\ \mathbf{else}\ \mathbf{\{}\ \mathit{stm}\ \mathbf{\}} \\ & \mid \mathbf{while}\ (\mathit{expr} > 0)\ \mathbf{\{}\ \mathit{stm}\ \mathbf{\}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \mathit{expr} ::= & v \mid n \mid \mathbf{rand}(n,\ n) \\ & \mid \mathit{expr} + \mathit{expr} \mid \mathit{expr} - \mathit{expr} \mid \mathit{expr} \times \mathit{expr} \mid \mathit{expr} / \mathit{expr} \end{array}$$

$v \in \mathbb{V}$, un ensemble de variables

$n \in \mathbb{Z}$ (on ne manipule que des entiers)

$\mathbf{rand}(n_1,\ n_2)$ représente le choix aléatoire d'un entier entre n_1 et n_2 (sert à simuler une entrée).

Suite très inspirée du cours de A. Miné au MPRI.

Un langage jouet (suite et fin)

Exemple

$$\begin{array}{l} \mathrm{x} = \mathbf{rand}(0,\ 12)\,;\ \mathrm{y} = 42\,; \\ \mathbf{while}\ (\mathrm{x} > 0)\ \mathbf{\{} \\ \quad \mathrm{x} = \mathrm{x} - 2\,; \\ \quad \mathrm{y} = \mathrm{y} + 4\,; \\ \mathbf{\}} \end{array}$$

Une exécution
(valeurs à l'entrée de la boucle) :

x	7	5	3	1	-1
y	42	46	50	54	58

Remarques

- un langage très simple, sans fonctions, sans...
- mais représentatif d'un langage impératif comme C
- dont c'est d'ailleurs un sous ensemble
- et on peut tout calculer (c'est Turing-complet)

Graphe de flot de contrôle

On va utiliser les graphes de flot de contrôle des programmes

Définition

Un *graphe de flot de contrôle* (L, A) est composé d'un ensemble de points de programme L, d'un point d'entrée $0 \in L$ et d'arêtes $A \subseteq L \times com \times L$ avec :
$com ::= v = expr \mid expr > 0$

Graphe de flot de contrôle

On va utiliser les graphes de flot de contrôle des programmes

Définition

Un *graphe de flot de contrôle* (L, A) est composé d'un ensemble de points de programme L, d'un point d'entrée $0 \in L$ et d'arêtes $A \subseteq L \times com \times L$ avec :
$com ::= v = expr \mid expr > 0$

Exemple

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) **{**
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[dr, "y = y+4"'] & & 3 \arrow[ll, "x = x - 2"'] & \\
0 \arrow[r, "x = \mathbf{rand}(0,12)"'] & 1 \arrow[rr, "y = 42"'] & & 2 \arrow[ur, "x > 0"'] \arrow[rr, "x \leqslant 0"'] & & 5
\end{tikzcd}$$

Sémantique concrète, expressions

Sémantique des expressions : $[\![e]\!]_{\mathrm{E}} : (\mathbb{V} \to \mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

$$\begin{array}{ll}
[\![v]\!]_{\mathrm{E}}(\rho) & = \{\rho(v)\} \\
[\![n]\!]_{\mathrm{E}}(\rho) & = \{n\} \\
[\![\mathbf{rand}(n_1, n_2)]\!]_{\mathrm{E}}(\rho) & = \{n \in \mathbb{Z} \mid n_1 \leqslant n \leqslant n_2\} \\
[\![e_1 + e_2]\!]_{\mathrm{E}}(\rho) & = \{n_1 + n_2 \mid n_1 \in [\![e_1]\!]_{\mathrm{E}}(\rho) \wedge n_2 \in [\![e_2]\!]_{\mathrm{E}}(\rho)\} \\
\ldots &
\end{array}$$

Sémantique concrète, expressions

Sémantique des expressions : $[\![e]\!]_{\mathrm{E}} : (\mathbb{V} \to \mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

$$\begin{array}{ll}
[\![v]\!]_{\mathrm{E}}(\rho) & = \{\rho(v)\} \\
[\![n]\!]_{\mathrm{E}}(\rho) & = \{n\} \\
[\![\mathbf{rand}(n_1, n_2)]\!]_{\mathrm{E}}(\rho) & = \{n \in \mathbb{Z} \mid n_1 \leqslant n \leqslant n_2\} \\
[\![e_1 + e_2]\!]_{\mathrm{E}}(\rho) & = \{n_1 + n_2 \mid n_1 \in [\![e_1]\!]_{\mathrm{E}}(\rho) \wedge n_2 \in [\![e_2]\!]_{\mathrm{E}}(\rho)\} \\
\dots &
\end{array}$$

Remarque : environnement

On nomme généralement *environnement* les fonctions $\rho : \mathbb{V} \to \mathbb{Z}$ qui associent une valeur à chaque variable.

Sémantique concrète, expressions (suite et fin)

Remarque : cas d'erreur

On peut rencontrer deux types d'erreur à l'exécution :

- **rand**(n_1, n_2) avec $n1 > n2$: $[\![\mathbf{rand}(n_1, n_2)]\!]_{\mathrm{E}} = \{x \in \mathbb{Z} \mid n_1 \leqslant x \leqslant n_2\} = \emptyset$;

Sémantique concrète, expressions (suite et fin)

Remarque : cas d'erreur

On peut rencontrer deux types d'erreur à l'exécution :

- **rand**(n_1, n_2) avec $n1 > n2$: $[\![\mathbf{rand}(n_1, n_2)]\!]_{\mathrm{E}} = \{x \in \mathbb{Z} \mid n_1 \leqslant x \leqslant n_2\} = \emptyset$;
- division par zéro : $[\![e/0]\!]_{\mathrm{E}} = \emptyset$.

Sémantique concrète, expressions (suite et fin)

Remarque : cas d'erreur

On peut rencontrer deux types d'erreur à l'exécution :

- **rand**(n_1, n_2) avec $n1 > n2$: $[\![\mathbf{rand}(n_1, n_2)]\!]_{\mathrm{E}} = \{x \in \mathbb{Z} \mid n_1 \leqslant x \leqslant n_2\} = \emptyset$;
- division par zéro : $[\![e/0]\!]_{\mathrm{E}} = \emptyset$.

On suppose donc que le programme lève une exception et abandonne son exécution dans ces deux cas.

Sémantique concrète, commandes

Sémantique des commandes : $[\![c]\!]_{\mathrm{C}} : \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$

$$[\![v = e]\!]_{\mathrm{C}}(R) = \{\rho[v \mapsto n] \mid \rho \in R, n \in [\![e]\!]_{\mathrm{E}}(\rho)\}$$
$$[\![e > 0]\!]_{\mathrm{C}}(R) = \{\rho \mid \rho \in R, \exists n \in [\![e]\!]_{\mathrm{E}}(\rho), n > 0\}$$

Sémantique concrète, commandes

Sémantique des commandes : $[\![c]\!]_{\mathrm{C}} : \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$

$$[\![v = e]\!]_{\mathrm{C}}(R) = \{\rho[v \mapsto n] \mid \rho \in R, n \in [\![e]\!]_{\mathrm{E}}(\rho)\}$$
$$[\![e > 0]\!]_{\mathrm{C}}(R) = \{\rho \mid \rho \in R, \exists n \in [\![e]\!]_{\mathrm{E}}(\rho), n > 0\}$$

Remarque : $e \leqslant 0$

$e \leqslant 0$ n'est qu'une jolie façon d'écrire $1 - e > 0$ (sucre syntaxique).

Sémantique concrète, programme

Sémantique des programmes : $[\![(L, A)]\!] : L \to \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$

À chaque point de programme, on associe le meilleur invariant.

Sémantique concrète, programme

Sémantique des programmes : $[\![(L, A)]\!] : L \to \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$

À chaque point de programme, on associe le meilleur invariant.

C'est la plus petite solution (au sens de l'inclusion $\subseteq$) du système

$$\begin{cases} R_0 = \mathbb{V} \to \mathbb{Z} & \\ R_{l'} = \displaystyle\bigcup_{(l,c,l') \in A} [\![c]\!]_{\mathrm{C}}(R_l) & l' \neq 0 \end{cases}$$

Sémantique concrète, programme

Sémantique des programmes : $[\![(L, A)]\!] : L \to \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$

À chaque point de programme, on associe le meilleur invariant.

C'est la plus petite solution (au sens de l'inclusion $\subseteq$) du système

$$\begin{cases} R_0 = \mathbb{V} \to \mathbb{Z} \\ R_{l'} = \displaystyle\bigcup_{(l,c,l')\in A} [\![c]\!]_{\mathrm{C}}(R_l) \qquad l' \neq 0 \end{cases}$$

Une telle solution existe toujours
d'après le théorème de Knaster-Tarski...

Exemple

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) **{**
    $_3$x = x − 2 ;
    $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

$$\begin{tikzcd} & & 4 \arrow[d, "y = y+4"'] & 3 \arrow[l, "x = x-2"'] & \\ 0 \arrow[r, "x = \mathbf{rand}(0,\,12)"'] & 1 \arrow[r, "y = 42"'] & 2 \arrow[ur, "x > 0"'] \arrow[r, "x \leqslant 0"'] & 5 \end{tikzcd}$$

équations
$R_0 = \{\, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \,\}$

Exemple

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) **{**
    $_3$x = x − 2 ;
    $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

$$\begin{tikzcd} & & 4 \arrow[d, "y = y+4"'] & 3 \arrow[l, "x = x-2"'] & \\ 0 \arrow[r, "x = \mathbf{rand}(0,\,12)"'] & 1 \arrow[r, "y = 42"'] & 2 \arrow[ur, "x > 0"'] \arrow[r, "x \leqslant 0"'] & 5 \end{tikzcd}$$

équations
$R_0 = \{\, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \,\}$
$R_1 = \{\, x \in [\![0, 12]\!], y \in \mathbb{Z} \,\}$

Exemple

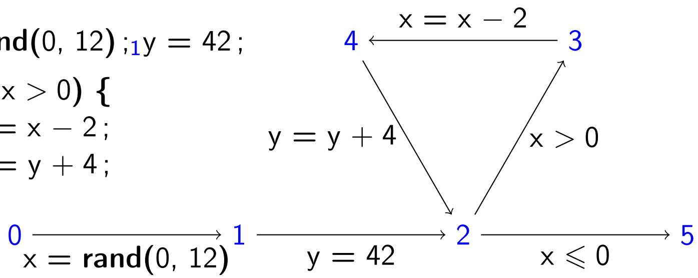
$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) **{**
    $_3$x = x − 2 ;
    $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

$$\begin{tikzcd} & & 4 \arrow[d, "y = y+4"'] & 3 \arrow[l, "x = x-2"'] & \\ 0 \arrow[r, "x = \mathbf{rand}(0,\,12)"'] & 1 \arrow[r, "y = 42"'] & 2 \arrow[ur, "x > 0"'] \arrow[r, "x \leqslant 0"'] & 5 \end{tikzcd}$$

équations
$R_0 = \{\, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \,\}$
$R_1 = \{\, x \in [\![0, 12]\!], y \in \mathbb{Z} \,\}$
$R_2 = R_1[y \mapsto 42] \cup R_4[y \mapsto y + 4]$

Exemple

$_0$x $=$ **rand**(0, 12) ; $_1$y $=$ 42 ;
while $_2$(x $>$ 0) {
  $_3$x $=$ x $-$ 2 ;
  $_4$y $=$ y $+$ 4 ;
}$_5$



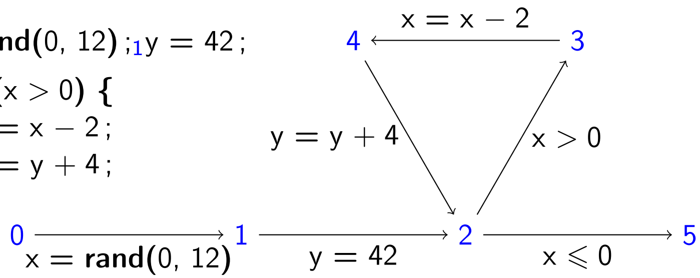
équations

$R_0 = \{ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \}$
$R_1 = \{ x \in [\![0, 12]\!], y \in \mathbb{Z} \}$
$R_2 = R_1[y \mapsto 42] \cup R_4[y \mapsto y + 4]$

$R_3 = R_2 \cap \{ x > 0, y \in \mathbb{Z} \}$

Exemple

$_0$x $=$ **rand**(0, 12) ; $_1$y $=$ 42 ;
while $_2$(x $>$ 0) {
  $_3$x $=$ x $-$ 2 ;
  $_4$y $=$ y $+$ 4 ;
}$_5$



équations

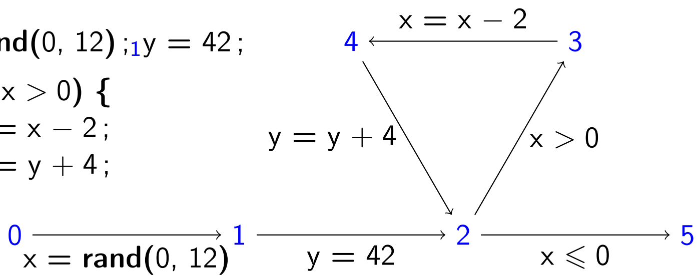
$R_0 = \{ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \}$
$R_1 = \{ x \in [\![0, 12]\!], y \in \mathbb{Z} \}$
$R_2 = R_1[y \mapsto 42] \cup R_4[y \mapsto y + 4]$

$R_3 = R_2 \cap \{ x > 0, y \in \mathbb{Z} \}$

$R_4 = R_3[x \mapsto x - 2]$

Exemple

$_0$x $=$ **rand**(0, 12) ; $_1$y $=$ 42 ;
while $_2$(x $>$ 0) {
  $_3$x $=$ x $-$ 2 ;
  $_4$y $=$ y $+$ 4 ;
}$_5$



équations

$R_0 = \{ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \}$
$R_1 = \{ x \in [\![0, 12]\!], y \in \mathbb{Z} \}$
$R_2 = R_1[y \mapsto 42] \cup R_4[y \mapsto y + 4]$

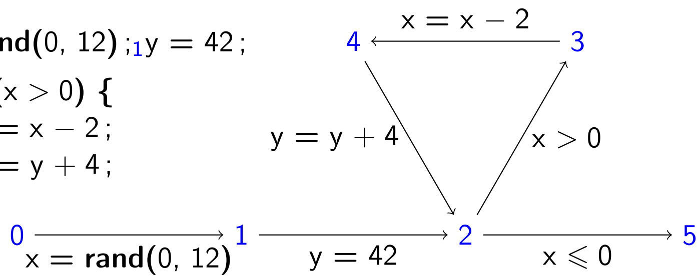
$R_3 = R_2 \cap \{ x > 0, y \in \mathbb{Z} \}$

$R_4 = R_3[x \mapsto x - 2]$

$R_5 = R_2 \cap \{ x \leqslant 0, y \in \mathbb{Z} \}$

Exemple

$_0$x $=$ **rand**(0, 12) ; $_1$y $=$ 42 ;
while $_2$(x $>$ 0) {
  $_3$x $=$ x $-$ 2 ;
  $_4$y $=$ y $+$ 4 ;
}$_5$



équations — plus petite solution

$$
\begin{aligned}
R_0 &= \{ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \} && = \{ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \} \\
R_1 &= \{ x \in [\![0, 12]\!], y \in \mathbb{Z} \} && = \{ x \in [\![0, 12]\!], y \in \mathbb{Z} \} \\
R_2 &= R_1[y \mapsto 42] \cup R_4[y \mapsto y + 4] && = \{x \in [\![-1, 12]\!], y \in [\![42, 66]\!] \cap 4\mathbb{Z} + 2 \\
& && \quad \mid 2x + y \in [\![42, 66]\!]\} \\
R_3 &= R_2 \cap \{ x > 0, y \in \mathbb{Z} \} && = \{x \in [\![1, 12]\!], y \in [\![42, 66]\!] \cap 4\mathbb{Z} + 2 \\
& && \quad \mid 2x + y \in [\![42, 66]\!]\} \\
R_4 &= R_3[x \mapsto x - 2] && = \{x \in [\![-1, 10]\!], y \in [\![42, 66]\!] \cap 4\mathbb{Z} + 2 \\
& && \quad \mid 2x + y \in [\![38, 62]\!]\} \\
R_5 &= R_2 \cap \{ x \leqslant 0, y \in \mathbb{Z} \} && = \{x \in [\![-1, 0]\!], y \in [\![42, 66]\!] \cap 4\mathbb{Z} + 2 \\
& && \quad \mid 2x + y \in [\![42, 66]\!]\}
\end{aligned}
$$

Rappels

Définition (ordre)

Un *ordre* $\sqsubseteq$ est une relation binaire

- réflexive $(\forall x, x \sqsubseteq x)$;
- transitive $(\forall x, y, z, (x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq z) \Rightarrow x \sqsubseteq z)$;
- antisymétrique $(\forall x, y, (x \sqsubseteq y \wedge y \sqsubseteq y) \Rightarrow x = y)$.

Définition (borne supérieure)

Une *borne supérieure* $\bigsqcup : \mathcal{P}(S) \rightarrow S$ associe à tout sous ensemble S' de S son plus petit majorant

- $\forall x \in S', x \sqsubseteq \bigsqcup S'$
- $\forall y \in S, (\forall x \in S', x \sqsubseteq y) \Rightarrow \bigsqcup S' \sqsubseteq y$

Treillis complet

Définition (treillis complet)

Un ensemble S muni d'un ordre $\sqsubseteq$ est un *treillis complet* s'il admet une borne supérieure $\bigsqcup S'$.

Un treillis complet est automatiquement muni

- d'une borne inférieure (plus grand minorant) : $\bigsqcap S' = \bigsqcup \{x \mid \forall y \in S', x \sqsubseteq y\}$;
- d'un plus petit élément (bottom) : $\bot = \bigsqcup \emptyset = \bigsqcap S$;
- d'un plus grand élément (top) : $\top = \bigsqcup S = \bigsqcap \emptyset$.

Treillis complet

Définition (treillis complet)

Un ensemble S muni d'un ordre $\sqsubseteq$ est un *treillis complet* s'il admet une borne supérieure $\bigsqcup S'$.

Un treillis complet est automatiquement muni

- d'une borne inférieure (plus grand minorant) : $\bigsqcap S' = \bigsqcup \{x \mid \forall y \in S', x \sqsubseteq y\}$;
- d'un plus petit élément (bottom) : $\bot = \bigsqcup \emptyset = \bigsqcap S$;
- d'un plus grand élément (top) : $\top = \bigsqcup S = \bigsqcap \emptyset$.

Exercice

Prouver la première propriété (borne inférieure).

Treillis complet, exemples

Exemple

$\mathbb{Z}$ n'est pas un treillis complet ($\bigsqcup \mathbb{Z}$ n'existe pas).

Treillis complet, exemples

Exemple

$\mathbb{Z}$ n'est pas un treillis complet ($\bigsqcup \mathbb{Z}$ n'existe pas).

Exemple

$\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est un treillis complet.

Treillis complet, exemples

Exemple

$\mathbb{Z}$ n'est pas un treillis complet ($\bigsqcup \mathbb{Z}$ n'existe pas).

Exemple

$\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est un treillis complet.

Exercice

- Montrer que pour tout ensemble S, l'*ensemble de ses parties* $\mathcal{P}(S)$ muni de l'ordre inclusion $\subseteq$ est un treillis complet.
- À quoi correspondent la borne supérieure $\sqcup$?
  la borne inférieure $\sqcap$? $\bot$ et $\top$?

Treillis complet, autres exemples

Exercice

Soit A un ensemble quelconque et $(B, \sqsubseteq_B)$ un treillis complet,
montrer que $A \to B$, les *fonctions* de A dans B
forment un treillis complet muni de l'ordre usuel sur les fonctions
$f \sqsubseteq_{A \to B} g$ si pour tout $x \in A$, $f(x) \sqsubseteq_B g(x)$.

Treillis complet, autres exemples

Exercice

Soit A un ensemble quelconque et $(B, \sqsubseteq_B)$ un treillis complet, montrer que $A \to B$, les *fonctions* de A dans B forment un treillis complet muni de l'ordre usuel sur les fonctions $f \sqsubseteq_{A \to B} g$ si pour tout $x \in A$, $f(x) \sqsubseteq_B g(x)$.

Exemple

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \{0,1\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \{0\} & & \{1\} \end{tikzcd}$$

n'est pas un treillis complet ($\bigsqcup \emptyset$ n'existe pas).

Treillis complet, autres exemples

Exercice

Soit A un ensemble quelconque et $(B, \sqsubseteq_B)$ un treillis complet, montrer que $A \to B$, les *fonctions* de A dans B forment un treillis complet muni de l'ordre usuel sur les fonctions $f \sqsubseteq_{A \to B} g$ si pour tout $x \in A$, $f(x) \sqsubseteq_B g(x)$.

Exemple

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \{0,1\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \{0\} & & \{1\} \end{tikzcd}$$

n'est pas un treillis complet ($\bigsqcup \emptyset$ n'existe pas).

Exemple

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \{0,1\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \{0\} \arrow[dr, dash] & & \{1\} \arrow[dl, dash] \\ & \emptyset & \end{tikzcd}$$

est un treillis complet (c.f. exercice du slide précédent).

Théorème de Knaster-Tarski

Définition

Une fonction f d'un treillis complet dans lui même est *monotone* si

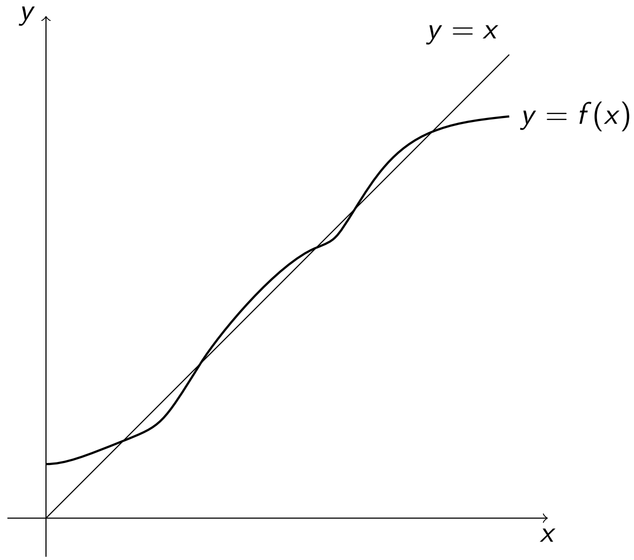
$$\forall x, y \in S, \quad x \sqsubseteq y \Rightarrow f(x) \sqsubseteq f(y)$$

Théorème

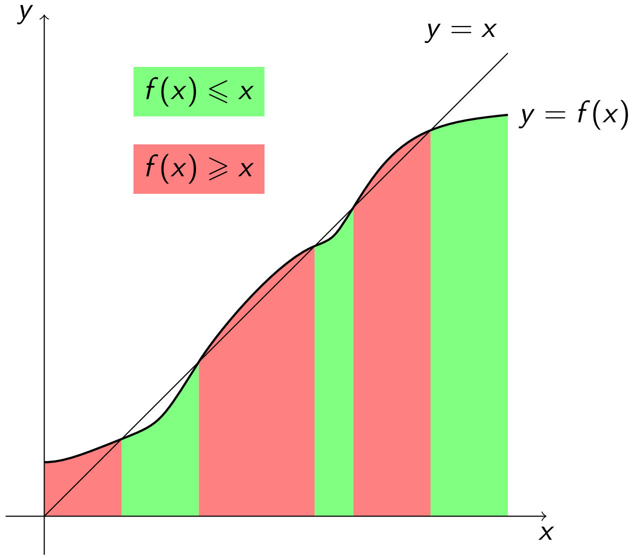
Si S est un treillis complet et f une fonction monotone sur ce treillis alors f admet un plus petit point fixe

$$\mathrm{lfp}\, f = \bigsqcap \{x \in S \mid f(x) \sqsubseteq x\}.$$

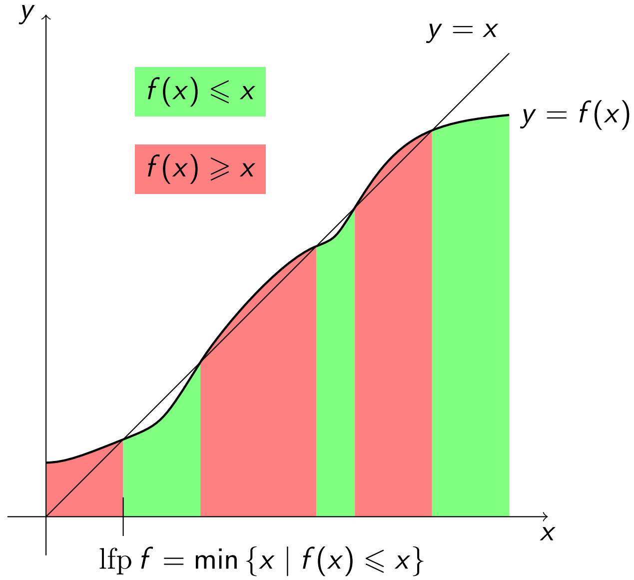
Théorème de Knaster-Tarski, illustration



Théorème de Knaster-Tarski, illustration



Théorème de Knaster-Tarski, illustration



Théorème de Knaster-Tarski, démonstration

Notons $P = \{x \in S \mid f(x) \sqsubseteq x\}$ et $p = \bigsqcap P$.

- p est un point fixe :
  - Soit $x \in P$ quelconque (P est non vide car $\top \in P$), $p \sqsubseteq x$ donc par croissance de f, $f(p) \sqsubseteq f(x)$ et $f(x) \sqsubseteq x$ car $x \in P$ donc $f(p) \sqsubseteq x$.
    Ainsi $f(p)$ est un minorant de P donc $f(p) \sqsubseteq p$ ($p = \bigsqcap P$).
  - Par croissance de f, $f(f(p)) \sqsubseteq f(p)$ donc $f(p) \in P$.
    Or $p = \bigsqcap P$ donc $p \sqsubseteq f(p)$.
  - Ainsi $p = f(p)$.
- et c'est le plus petit :
  - Tous les point fixes sont dans P (si $f(x) = x$ alors $f(x) \sqsubseteq x$).
  - p est un minorant de P.

Notre système a une solution

- $L \to \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ est un treillis complet (c.f. exercices).
- La fonction $F : (L \to \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})) \to (L \to \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z}))$

$$F(R) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \mapsto & (\mathbb{V} \to \mathbb{Z}) \\ l' & \mapsto & \displaystyle\bigcup_{(l,c,l') \in A} [\![c]\!]_{\mathrm{C}} (R(l)) \end{array} \right.$$

  est monotone.
- Donc notre sémantique est bien définie.

Problème

Malheureusement, la sémantique concrète n'est pas calculable.

Problème

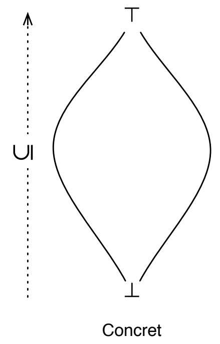
Malheureusement, la sémantique concrète n'est pas calculable.

On va donc en calculer une surapproximation.

Définition

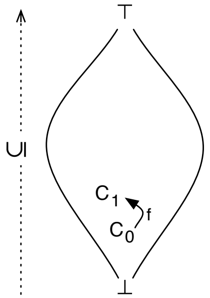
L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.

L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.



- Caractérisation d'un ensemble d'états munis d'un pré-ordre (+ prop) = treillis
- Sémantique décrite par la fonction monotone f
- Caractérisation de la sémantique du programme comme le plus petit point fixe de f à partir de C_0

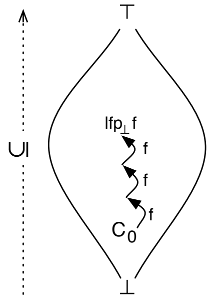
L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.



Concret

- Caractérisation d'un ensemble d'états munis d'un pré-ordre (+ prop) = treillis
- Sémantique décrite par la fonction monotone f
- Caractérisation de la sémantique du programme comme le plus petit point fixe de f à partir de C_0

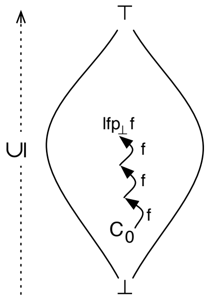
L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.



Concret

- Caractérisation d'un ensemble d'états munis d'un pré-ordre (+ prop) = treillis
- Sémantique décrite par la fonction monotone f
- Caractérisation de la sémantique du programme comme le plus petit point fixe de f à partir de C_0

L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.

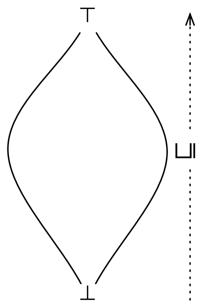


Concret

- Caractérisation d'un ensemble d'états munis d'un pré-ordre (+ prop) = treillis
- Sémantique décrite par la fonction monotone f
- Caractérisation de la sémantique du programme comme le plus petit point fixe de f à partir de C_0

Problème : calcul effectif de *lfp* f indécidable en général

L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.

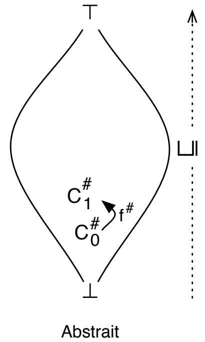


Abstrait

On choisit un domaine abstrait plus *petit*

- Caractérisation d'un ensemble d'états munis d'un pré-ordre (+ prop) = treillis
- Sémantique abstraite décrite par la fonction monotone $f^{\#}$
- Caractérisation de la sémantique du programme comme le plus petit point fixe de $f^{\#}$ à partir de $C_0^{\#}$

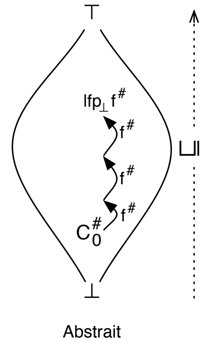
L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.



On choisit un domaine abstrait plus *petit*

- Caractérisation d'un ensemble d'états munis d'un pré-ordre (+ prop) = treillis
- Sémantique abstraite décrite par la fonction monotone $f^\#$
- Caractérisation de la sémantique du programme comme le plus petit point fixe de $f^\#$ à partir de $C_0^\#$

L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.

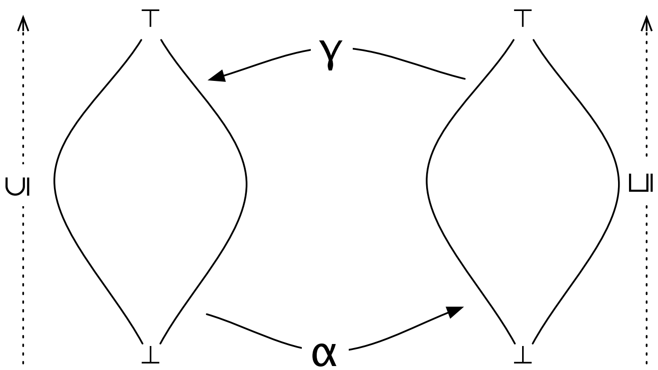


On choisit un domaine abstrait plus *petit*

- Caractérisation d'un ensemble d'états munis d'un pré-ordre (+ prop) = treillis
- Sémantique abstraite décrite par la fonction monotone $f^\#$
- Caractérisation de la sémantique du programme comme le plus petit point fixe de $f^\#$ à partir de $C_0^\#$

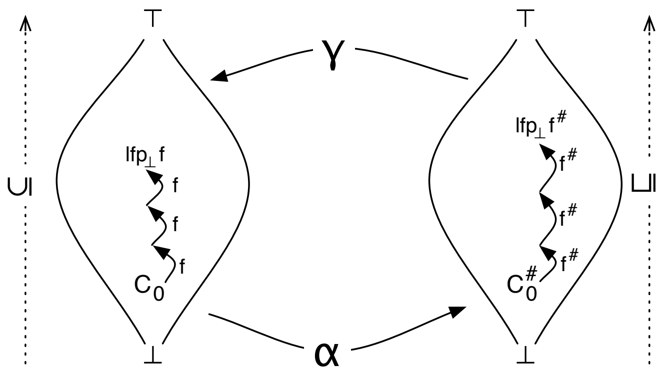
L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.

On construit une abstraction correcte entre les deux treillis :



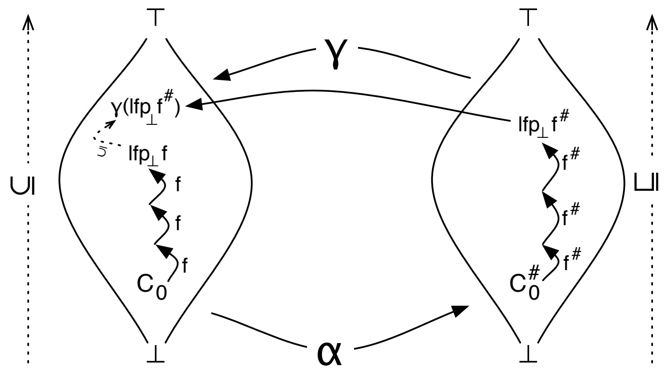
L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.

On construit une abstraction correcte entre les deux treillis :



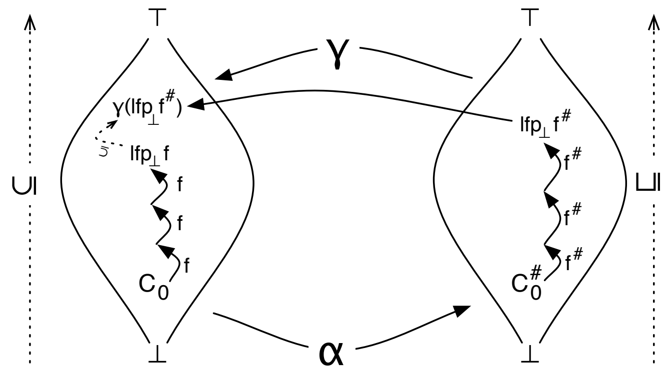
L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.

On construit une abstraction correcte entre les deux treillis :



L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.

On construit une abstraction correcte entre les deux treillis :
Avec le calcul du point fixe dans l'abstrait et le transfert de points fixes, approximation correcte de la sémantique de f dans le concret.



Type de la sémantique concrète

La sémantique concrète d'un programme est de type

$$L \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{Z})$$

Type de la sémantique concrète

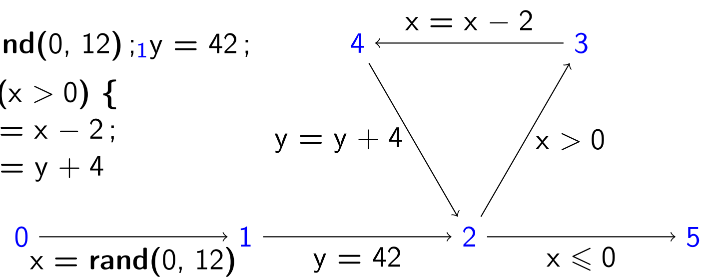
La sémantique concrète d'un programme est de type

$$L \to \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$$

- une fonction qui à chaque point du programme (dans L)
- associe un ensemble d'états possibles de la mémoire
  - une fonction qui à chaque variable (dans $\mathbb{V}$)
  - associe sa valeur en mémoire (dans $\mathbb{Z}$)

Exemple

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) **{**
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4
}$_5$



$R_0 = \mathbb{V} \to \mathbb{Z} \qquad (\mathbb{V} = \{x, y\})$
$R_1 = \{f \in (\mathbb{V} \to \mathbb{Z}) \mid f(x) \in [\![0, 12]\!]\}$
$R_2 = \{f \mid f(x) \in [\![-1, 12]\!], f(y) \in [\![42, 66]\!] \cap 4\mathbb{Z} + 2, 2f(x) + f(y) \in [\![42, 66]\!]\}$
$R_3 = \{f \mid f(x) \in [\![1, 12]\!], f(y) \in [\![42, 66]\!] \cap 4\mathbb{Z} + 2, 2f(x) + f(y) \in [\![42, 66]\!]\}$
$R_4 = \{f \mid f(x) \in [\![-1, 10]\!], f(y) \in [\![42, 66]\!] \cap 4\mathbb{Z} + 2, 2f(x) + f(y) \in [\![38, 62]\!]\}$
$R_5 = \{f \mid f(x) \in [\![-1, 0]\!], f(y) \in [\![42, 66]\!] \cap 4\mathbb{Z} + 2, 2f(x) + f(y) \in [\![42, 66]\!]\}$

Abstraire ? oui mais quoi ?

La sémantique concrète est incalculable, on veut la simplifier.
Mais que simplifier ?

Abstraire ? oui mais quoi ?

La sémantique concrète est incalculable, on veut la simplifier.
Mais que simplifier ?

- L est fini et on veut savoir ce qui se passe en chaque point

Abstraire ? oui mais quoi ?

La sémantique concrète est incalculable, on veut la simplifier.
Mais que simplifier ?

- L est fini et on veut savoir ce qui se passe en chaque point
  $\Rightarrow$ on le garde à l'identique

Abstraire ? oui mais quoi ?

La sémantique concrète est incalculable, on veut la simplifier.
Mais que simplifier ?

- L est fini et on veut savoir ce qui se passe en chaque point
  $\Rightarrow$ on le garde à l'identique
- $\mathbb{V}$ est fini et on s'intéresse à toutes les variables

Abstraire ? oui mais quoi ?

La sémantique concrète est incalculable, on veut la simplifier.
Mais que simplifier ?

- L est fini et on veut savoir ce qui se passe en chaque point
  $\Rightarrow$ on le garde à l'identique
- $\mathbb{V}$ est fini et on s'intéresse à toutes les variables
  $\Rightarrow$ on le garde à l'identique

Abstraire ? oui mais quoi ?

La sémantique concrète est incalculable, on veut la simplifier.
Mais que simplifier ?

- L est fini et on veut savoir ce qui se passe en chaque point
  $\Rightarrow$ on le garde à l'identique
- $\mathbb{V}$ est fini et on s'intéresse à toutes les variables
  $\Rightarrow$ on le garde à l'identique
- $\mathbb{Z}$ (et donc l'ensemble des fonctions $\mathbb{V} \to \mathbb{Z}$) est infini

Abstraire ? oui mais quoi ?

La sémantique concrète est incalculable, on veut la simplifier.
Mais que simplifier ?

- L est fini et on veut savoir ce qui se passe en chaque point
  $\Rightarrow$ on le garde à l'identique
- $\mathbb{V}$ est fini et on s'intéresse à toutes les variables
  $\Rightarrow$ on le garde à l'identique
- $\mathbb{Z}$ (et donc l'ensemble des fonctions $\mathbb{V} \to \mathbb{Z}$) est infini
  $\Rightarrow$ c'est ici qu'on va abstraire

Comment abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$?

Deux grandes solutions

- Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ en $\mathbb{V} \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ puis $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ en un $\mathcal{D}^\sharp$
  - *non relationnel* : les valeurs de x et y sont indépendantes

Comment abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$?

Deux grandes solutions

- Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ en $\mathbb{V} \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ puis $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ en un $\mathcal{D}^\sharp$
  - *non relationnel* : les valeurs de x et y sont indépendantes
- Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ directement en un $\mathcal{D}^\sharp$
  - *relationnel* : certaines combinaisons de x et y sont impossibles

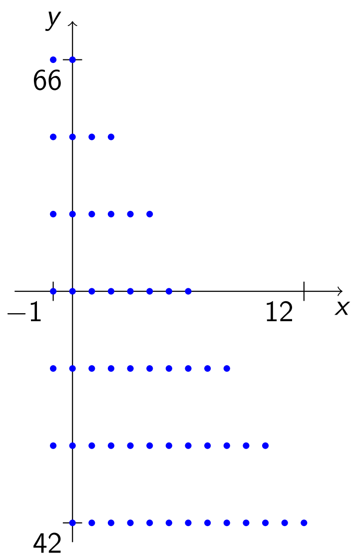
Comment abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$?

Deux grandes solutions

- Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ en $\mathbb{V} \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ puis $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ en un $\mathcal{D}^\sharp$
  - *non relationnel* : les valeurs de x et y sont indépendantes
- Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ directement en un $\mathcal{D}^\sharp$
  - *relationnel* : certaines combinaisons de x et y sont impossibles
  - \+ plus précis
  - − plus compliqué et plus coûteux

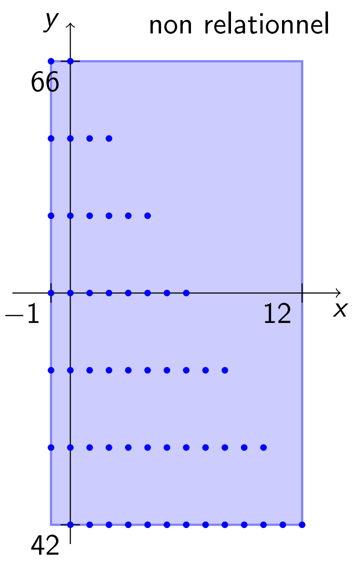
Deux petits dessins valent mieux que de longs discours

Exemple précédent au point de programme 2 (invariant de boucle)



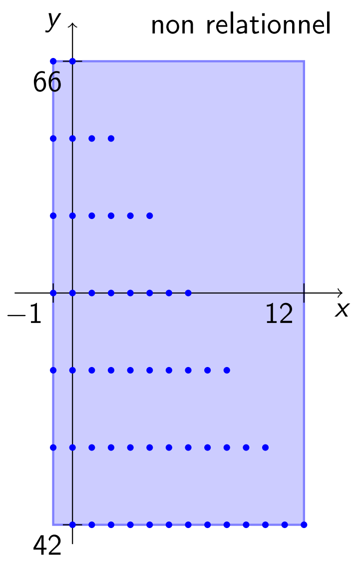
Deux petits dessins valent mieux que de longs discours

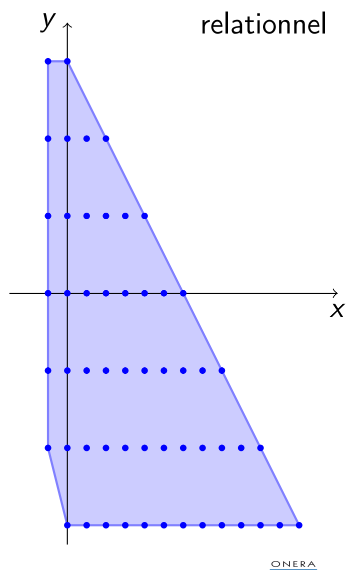
Exemple précédent au point de programme 2 (invariant de boucle)



Deux petits dessins valent mieux que de longs discours

Exemple précédent au point de programme 2 (invariant de boucle)





Domaine des signes

Définition

Treillis des signes $(\mathcal{D}^\sharp, \sqsubseteq^\sharp)$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \top \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \leqslant 0 \arrow[dr, dash] & & \geqslant 0 \arrow[dl, dash] \\ & \bot & \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \gamma(\top) &= \mathbb{Z} \\ \gamma(\leqslant 0) &=]\!]-\infty, 0]\!] \\ \gamma(\geqslant 0) &= [\![0, +\infty[\![\\ \gamma(\bot) &= \emptyset \end{aligned}$$

Domaine des signes

Définition

Treillis des signes $(\mathcal{D}^\sharp, \sqsubseteq^\sharp)$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \top \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \leqslant 0 \arrow[dr, dash] & & \geqslant 0 \arrow[dl, dash] \\ & \bot & \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \gamma(\top) &= \mathbb{Z} \\ \gamma(\leqslant 0) &=]\!]-\infty, 0]\!] \\ \gamma(\geqslant 0) &= [\![0, +\infty[\![\\ \gamma(\bot) &= \emptyset \end{aligned}$$

Question

L'ordre $\sqsubseteq^\sharp$ ci dessus est il correct par rapport à l'ordre $\subseteq$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Domaine des signes

Définition

Treillis des signes $(\mathcal{D}^\sharp, \sqsubseteq^\sharp)$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \top \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \leqslant 0 \arrow[dr, dash] & & \geqslant 0 \arrow[dl, dash] \\ & \bot & \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \gamma(\top) &= \mathbb{Z} \\ \gamma(\leqslant 0) &=]\!]-\infty, 0]\!] \\ \gamma(\geqslant 0) &= [\![0, +\infty[\![\\ \gamma(\bot) &= \emptyset \end{aligned}$$

Question

L'ordre $\sqsubseteq^\sharp$ ci dessus est il correct par rapport à l'ordre $\subseteq$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Correction de l'ordre abstrait par rapport au concret

L'ordre $\sqsubseteq^\sharp$ est correct par rapport à l'ordre $\sqsubseteq$ si γ est monotone

$$\forall x^\sharp, y^\sharp \in \mathcal{D}^\sharp, \quad x^\sharp \sqsubseteq^\sharp y^\sharp \Rightarrow \gamma(x^\sharp) \sqsubseteq \gamma(y^\sharp)$$

Domaine des signes

Définition

Treillis des signes $(\mathcal{D}^\sharp, \sqsubseteq^\sharp)$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \top \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \leqslant 0 \arrow[dr, dash] & & \geqslant 0 \arrow[dl, dash] \\ & \bot & \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \gamma(\top) &= \mathbb{Z} \\ \gamma(\leqslant 0) &=]\!] -\infty, 0]\!] \\ \gamma(\geqslant 0) &= [\![0, +\infty[\![\\ \gamma(\bot) &= \emptyset \end{aligned}$$

Question

L'ordre $\sqsubseteq^\sharp$ ci dessus est il correct par rapport à l'ordre $\subseteq$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Réponse

Oui ($\emptyset \subseteq [\![0, +\infty[\![$, $\emptyset \subseteq]\!] -\infty, 0]\!]$, $[\![0, +\infty[\![\subseteq \mathbb{Z}$ et $]\!] -\infty, 0]\!] \subseteq \mathbb{Z}$).

Domaine des signes, meilleure abstraction

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \top \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \leqslant 0 \arrow[dr, dash] & & \geqslant 0 \arrow[dl, dash] \\ & \bot & \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \gamma(\top) &= \mathbb{Z} \\ \gamma(\leqslant 0) &=]\!] -\infty, 0]\!] \\ \gamma(\geqslant 0) &= [\![0, +\infty[\![\\ \gamma(\bot) &= \emptyset \end{aligned}$$

Question

Toute partie S de $\mathbb{Z}$ (i.e. $S \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$) admet elle une meilleure abstraction dans ce domaine ?

Domaine des signes, meilleure abstraction

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \top \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \leqslant 0 \arrow[dr, dash] & & \geqslant 0 \arrow[dl, dash] \\ & \bot & \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \gamma(\top) &= \mathbb{Z} \\ \gamma(\leqslant 0) &=]\!] -\infty, 0]\!] \\ \gamma(\geqslant 0) &= [\![0, +\infty[\![\\ \gamma(\bot) &= \emptyset \end{aligned}$$

Question

Toute partie S de $\mathbb{Z}$ (i.e. $S \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$) admet elle une meilleure abstraction dans ce domaine ?

Meilleure abstraction

Une partie S de $\mathbb{Z}$ admet une meilleure abstraction si l'ensemble $\left\{ S^\sharp \in \mathcal{D}^\sharp \;\middle|\; S \subseteq \gamma\left(S^\sharp\right) \right\}$ a un minimum.

Domaine des signes, meilleure abstraction

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \top \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \leqslant 0 \arrow[dr, dash] & & \geqslant 0 \arrow[dl, dash] \\ & \bot & \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \gamma(\top) &= \mathbb{Z} \\ \gamma(\leqslant 0) &=]\!] -\infty, 0]\!] \\ \gamma(\geqslant 0) &= [\![0, +\infty[\![\\ \gamma(\bot) &= \emptyset \end{aligned}$$

Question

Toute partie S de $\mathbb{Z}$ (i.e. $S \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$) admet elle une meilleure abstraction dans ce domaine ?

Réponse

Toute sauf le singleton $\{ 0 \}$ qui admet deux abstractions ($\leqslant 0$ et $\geqslant 0$) incomparables.

Domaine des signes, meilleure abstraction (suite et fin)

Définition

On corrige en ajoutant un élément

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \top \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\leqslant 0 \arrow[dr, dash] & & \geqslant 0 \arrow[dl, dash] \\
 & 0 \arrow[d, dash] & \\
 & \bot &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{ll}
\gamma(\top) & = \mathbb{Z} \\
\gamma(\leqslant 0) & = \rrbracket -\infty, 0 \rrbracket \\
\gamma(\geqslant 0) & = \llbracket 0, +\infty \llbracket \\
\gamma(0) & = \{ 0 \} \\
\gamma(\bot) & = \emptyset
\end{array}
$$

Domaine des signes, meilleure abstraction (suite et fin)

Définition

On corrige en ajoutant un élément

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \top \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\leqslant 0 \arrow[dr, dash] & & \geqslant 0 \arrow[dl, dash] \\
 & 0 \arrow[d, dash] & \\
 & \bot &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{ll}
\gamma(\top) & = \mathbb{Z} \\
\gamma(\leqslant 0) & = \rrbracket -\infty, 0 \rrbracket \\
\gamma(\geqslant 0) & = \llbracket 0, +\infty \llbracket \\
\gamma(0) & = \{ 0 \} \\
\gamma(\bot) & = \emptyset
\end{array}
$$

Remarques

- γ reste monotone.
- On a bien une correspondance de Galois avec

$$
\alpha(S) = \begin{cases}
\top & \text{si } \exists s, s' \in S, s < 0, s' > 0 \\
\leqslant 0 & \text{si } \forall s \in S, s \leqslant 0 \wedge \exists s \in S, s < 0 \\
\geqslant 0 & \text{si } \forall s \in S, s \geqslant 0 \wedge \exists s \in S, s > 0 \\
0 & \text{si } S = \{ 0 \} \\
\bot & \text{si } S = \emptyset
\end{cases}
$$

Abstraction non relationnelle

D'une abstraction $\mathcal{D}^\sharp$ de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$,
on déduit une abstraction $\mathcal{D}^\sharp_{\mathrm{nr}}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$,
en procédant point à point :

- $\mathcal{D}^\sharp_{\mathrm{nr}} = \mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp$
- $x^\sharp \sqsubseteq^\sharp_{\mathrm{nr}} y^\sharp$ si pour tout $v \in \mathbb{V}$, $x^\sharp(v) \sqsubseteq y^\sharp(v)$
- $\gamma_{\mathrm{nr}}\left(x^\sharp\right) = \left\{\rho \in (\mathbb{V} \to \mathbb{Z}) \,\middle|\, \forall v \in \mathbb{V}, \rho(v) \in \gamma\left(x^\sharp(v)\right)\right\}$
- $\alpha_{\mathrm{nr}}(x) = v \mapsto \alpha\left(\{\rho(v) \mid \rho \in x\}\right)$

Abstraction non relationnelle

D'une abstraction $\mathcal{D}^\sharp$ de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$,
on déduit une abstraction $\mathcal{D}^\sharp_{\mathrm{nr}}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$,
en procédant point à point :

- $\mathcal{D}^\sharp_{\mathrm{nr}} = \mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp$
- $x^\sharp \sqsubseteq^\sharp_{\mathrm{nr}} y^\sharp$ si pour tout $v \in \mathbb{V}$, $x^\sharp(v) \sqsubseteq y^\sharp(v)$
- $\gamma_{\mathrm{nr}}\left(x^\sharp\right) = \left\{\rho \in (\mathbb{V} \to \mathbb{Z}) \,\middle|\, \forall v \in \mathbb{V}, \rho(v) \in \gamma\left(x^\sharp(v)\right)\right\}$
- $\alpha_{\mathrm{nr}}(x) = v \mapsto \alpha\left(\{\rho(v) \mid \rho \in x\}\right)$

- $\top_{\mathrm{nr}} = v \mapsto \top$
- $\bot_{\mathrm{nr}} = v \mapsto \bot$
- $x^\sharp \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} y^\sharp = v \mapsto x^\sharp(v) \sqcup^\sharp y^\sharp(v)$
- $x^\sharp \sqcap^\sharp_{\mathrm{nr}} y^\sharp = v \mapsto x^\sharp(v) \sqcap^\sharp y^\sharp(v)$

Syntaxe de notre langage (rappel)

Syntaxe

$$
\begin{aligned}
stm ::= {} & v = expr\,; \mid stm\ stm \\
& \mid \textbf{if}\ (expr > 0)\ \{\ stm\ \}\ \textbf{else}\ \{\ stm\ \} \\
& \mid \textbf{while}\ (expr > 0)\ \{\ stm\ \}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
expr ::= {} & v \mid n \mid \textbf{rand}(n,\ n) \\
& \mid expr + expr \mid expr - expr \mid expr \times expr \mid expr / expr
\end{aligned}
$$

$v \in \mathbb{V}$, un ensemble de variables

$n \in \mathbb{Z}$ (on ne manipule que des entiers)

$\textbf{rand}(n_1,\ n_2)$ représente le choix aléatoire d'un entier entre n_1 et n_2 (sert à simuler une entrée).

Domaine des signes, opérations arithmétiques abstraites

- $n^\sharp = \alpha(\{\,n\,\}) = \begin{cases} \leqslant 0 & \text{si } n < 0 \\ \geqslant 0 & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$

Domaine des signes, opérations arithmétiques abstraites

- $n^\sharp = \alpha(\{\,n\,\}) = \begin{cases} \leqslant 0 & \text{si } n < 0 \\ \geqslant 0 & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$
- $\textbf{rand}^\sharp(n_1, n_2) = \alpha([\![n_1, n_2]\!]) = \begin{cases} \bot & \text{si } n_1 > n_2 \\ 0 & \text{si } n_1 = n_2 = 0 \\ \leqslant 0 & \text{sinon si } n_2 \leqslant 0 \\ \geqslant 0 & \text{sinon si } n_1 \geqslant 0 \\ \top & \text{sinon} \end{cases}$

Domaine des signes, opérations arithmétiques abstraites

- $n^\sharp = \alpha(\{\,n\,\}) = \begin{cases} \leqslant 0 & \text{si } n < 0 \\ \geqslant 0 & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$
- $\textbf{rand}^\sharp(n_1, n_2) = \alpha([\![n_1, n_2]\!]) = \begin{cases} \bot & \text{si } n_1 > n_2 \\ 0 & \text{si } n_1 = n_2 = 0 \\ \leqslant 0 & \text{sinon si } n_2 \leqslant 0 \\ \geqslant 0 & \text{sinon si } n_1 \geqslant 0 \\ \top & \text{sinon} \end{cases}$
- $x^\sharp +^\sharp y^\sharp = \alpha\left(\left\{x + y \;\middle|\; x \in \gamma(x^\sharp), y \in \gamma(y^\sharp)\right\}\right) =$

$+^\sharp$	$\top$	$\leqslant 0$	$\geqslant 0$	0	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\leqslant 0$	$\top$	$\leqslant 0$	$\top$	$\leqslant 0$	$\bot$
$\geqslant 0$	$\top$	$\top$	$\geqslant 0$	$\geqslant 0$	$\bot$
0	$\top$	$\leqslant 0$	$\geqslant 0$	0	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

- ...

Domaine des signes, opérations arithmétiques abstraites (suite et fin)

Exercice

Compléter la table de la soustraction abstraite

$-^\sharp$	$\top$	$\leqslant 0$	$\geqslant 0$	0	$\bot$
$\top$					
$\leqslant 0$					
$\geqslant 0$					
0					
$\bot$					

Domaine des signes, opérations arithmétiques abstraites (suite et fin)

Exercice

Compléter la table de la soustraction abstraite

$-^\sharp$	$\top$	$\leqslant 0$	$\geqslant 0$	0	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$
$\leqslant 0$	$\top$	$\top$	$\leqslant 0$	$\leqslant 0$	$\bot$
$\geqslant 0$	$\top$	$\geqslant 0$	$\top$	$\geqslant 0$	$\bot$
0	$\top$	$\geqslant 0$	$\leqslant 0$	0	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

Sémantique abstraite, expressions

Sémantique des expressions : $[\![e]\!]^\sharp_{\mathrm{E}} : (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp) \to \mathcal{D}^\sharp$

$$\begin{aligned}
[\![v]\!]^\sharp_{\mathrm{E}}(\rho) &= \rho(v) \\
[\![n]\!]^\sharp_{\mathrm{E}}(\rho) &= n^\sharp \\
[\![\mathbf{rand}(n_1, n_2)]\!]^\sharp_{\mathrm{E}}(\rho) &= \mathbf{rand}^\sharp(n_1, n_2) \\
[\![e_1 + e_2]\!]^\sharp_{\mathrm{E}}(\rho) &= [\![e_1]\!]^\sharp_{\mathrm{E}} +^\sharp [\![e_2]\!]^\sharp_{\mathrm{E}} \\
&\dots
\end{aligned}$$

Sémantique abstraite, expressions

Sémantique des expressions : $[\![e]\!]^\sharp_{\mathrm{E}} : (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp) \to \mathcal{D}^\sharp$

$$\begin{aligned}
[\![v]\!]^\sharp_{\mathrm{E}}(\rho) &= \rho(v) \\
[\![n]\!]^\sharp_{\mathrm{E}}(\rho) &= n^\sharp \\
[\![\mathbf{rand}(n_1, n_2)]\!]^\sharp_{\mathrm{E}}(\rho) &= \mathbf{rand}^\sharp(n_1, n_2) \\
[\![e_1 + e_2]\!]^\sharp_{\mathrm{E}}(\rho) &= [\![e_1]\!]^\sharp_{\mathrm{E}} +^\sharp [\![e_2]\!]^\sharp_{\mathrm{E}} \\
&\dots
\end{aligned}$$

Remarque

Ça se calcule très bien.

Graphe de flot de contrôle (rappel)

On étudie les graphes de flot de contrôle des programmes.

Définition

Un *graphe de flot de contrôle* (L, A) est composé d'un ensemble de points de programme L, d'un point d'entrée $0 \in L$ et d'arêtes $A \subseteq L \times com \times L$ avec :
$com ::= v = expr \mid expr > 0$

Graphe de flot de contrôle (rappel)

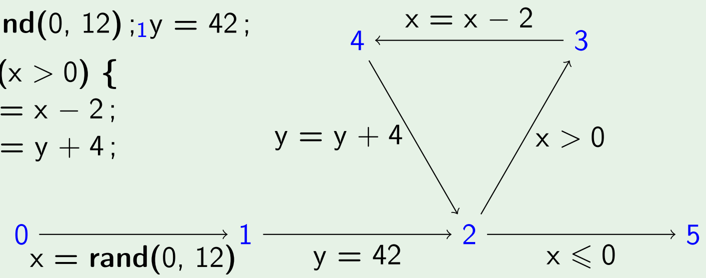
On étudie les graphes de flot de contrôle des programmes.

Définition

Un *graphe de flot de contrôle* (L, A) est composé d'un ensemble de points de programme L, d'un point d'entrée $0 \in L$ et d'arêtes $A \subseteq L \times com \times L$ avec :
$com ::= v = expr \mid expr > 0$

Exemple

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) **{**
    $_3$x = x − 2 ;
    $_4$y = y + 4 ;
}$_5$



Sémantique abstraite, commandes

Sémantique des commandes : $[\![c]\!]^\sharp_{\mathrm{C}} : (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp) \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp)$

$$[\![v = e]\!]^\sharp_{\mathrm{C}}(\rho) = \rho\left[v \mapsto [\![e]\!]^\sharp_{\mathrm{E}}\,\rho\right]$$
$$[\![e > 0]\!]^\sharp_{\mathrm{C}}(\rho) = \begin{cases} \rho\left[v \mapsto \rho(v) \sqcap^\sharp \alpha([\![1, +\infty[\![)\right] & \text{si } e = v \\ \rho & \text{sinon} \end{cases}$$

...

Sémantique abstraite, commandes

Sémantique des commandes : $[\![c]\!]^\sharp_{\mathrm{C}} : (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp) \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp)$

$$[\![v = e]\!]^\sharp_{\mathrm{C}}(\rho) = \rho\left[v \mapsto [\![e]\!]^\sharp_{\mathrm{E}}\,\rho\right]$$
$$[\![e > 0]\!]^\sharp_{\mathrm{C}}(\rho) = \begin{cases} \rho\left[v \mapsto \rho(v) \sqcap^\sharp \alpha([\![1, +\infty[\![)\right] & \text{si } e = v \\ \rho & \text{sinon} \end{cases}$$

...

Remarque

Ça se calcule toujours aussi bien.

Sémantique abstraite, programme

Sémantique des programmes : $[\![(L,A)]\!]^\sharp : L \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp)$

C'est la plus petite solution (au sens de l'ordre abstrait $\sqsubseteq^\sharp_{\mathrm{nr}}$) du système

$$\begin{cases} R^\sharp_0 = \mathbb{V} \to \top \\ R^\sharp_{l'} = \displaystyle\bigsqcup^\sharp_{\mathrm{nr}\,(l,c,l')\in A} [\![c]\!]^\sharp_{\mathrm{C}}\,(R^\sharp_l) & l' \neq 0 \end{cases}$$

Sémantique abstraite, programme

Sémantique des programmes : $[\![(L,A)]\!]^\sharp : L \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp)$

C'est la plus petite solution (au sens de l'ordre abstrait $\sqsubseteq^\sharp_{\mathrm{nr}}$) du système

$$\begin{cases} R^\sharp_0 = \mathbb{V} \to \top \\ R^\sharp_{l'} = \displaystyle\bigsqcup^\sharp_{\mathrm{nr}\,(l,c,l')\in A} [\![c]\!]^\sharp_{\mathrm{C}}\,(R^\sharp_l) & l' \neq 0 \end{cases}$$

Remarques

- Une telle solution existe (c.f. théorème de Knaster-Tarski).

Sémantique abstraite, programme

Sémantique des programmes : $[\![(L,A)]\!]^\sharp : L \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp)$

C'est la plus petite solution (au sens de l'ordre abstrait $\sqsubseteq^\sharp_{\mathrm{nr}}$) du système

$$\begin{cases} R^\sharp_0 = \mathbb{V} \to \top \\ R^\sharp_{l'} = \displaystyle\bigsqcup^\sharp_{\mathrm{nr}\,(l,c,l')\in A} [\![c]\!]^\sharp_{\mathrm{C}}\,(R^\sharp_l) & l' \neq 0 \end{cases}$$

Remarques

- Une telle solution existe (c.f. théorème de Knaster-Tarski).
- Ça semble un peu moins évident à calculer.

Sémantique abstraite, calcul effectif

Théorème

Si S est un treillis complet, f une fonction monotone sur ce treillis et si la suite $(f^n(\bot))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire $(\exists N, \forall n, f^n(\bot) = f^N(\bot))$ alors sa limite est le plus petit point fixe de f

$$\mathrm{lfp}\, f = f^N(\bot)$$

Sémantique abstraite, calcul effectif

Théorème

Si S est un treillis complet, f une fonction monotone sur ce treillis et si la suite $(f^n(\bot))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire ($\exists N, \forall n, f^n(\bot) = f^N(\bot)$) alors sa limite est le plus petit point fixe de f

$$\mathrm{lfp}\, f = f^N(\bot)$$

Démonstration.

- $f^N(\bot)$ est un point fixe : $f(f^N)(\bot) = f^{N+1}(\bot) = f^N(\bot)$;

Sémantique abstraite, calcul effectif

Théorème

Si S est un treillis complet, f une fonction monotone sur ce treillis et si la suite $(f^n(\bot))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire ($\exists N, \forall n, f^n(\bot) = f^N(\bot)$) alors sa limite est le plus petit point fixe de f

$$\mathrm{lfp}\, f = f^N(\bot)$$

Démonstration.

- $f^N(\bot)$ est un point fixe : $f(f^N)(\bot) = f^{N+1}(\bot) = f^N(\bot)$;
- et c'est le plus petit : soit y un point fixe ($f(y) = y$), $\bot \sqsubseteq y$ donc par croissance de f, $f(\bot) \sqsubseteq f(y) = y$ et par récurrence immédiate $f^N(\bot) \sqsubseteq y$.

$\square$

Sémantique abstraite, calcul effectif (suite et fin)

- $L \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp)$ est un treillis complet (car $\mathcal{D}^\sharp$ en est un).
- La fonction $F^\sharp : (L \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp)) \to (L \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp))$

$$F^\sharp(R^\sharp) = \begin{cases} 0 & \mapsto \quad \top_{\mathrm{nr}} \\ l' & \mapsto \quad \bigsqcup^\sharp_{\mathrm{nr}\,(l,c,l')\in A} \llbracket c \rrbracket^\sharp_{\mathrm{C}} (R^\sharp(l)) \end{cases}$$

est monotone et calculable.

Sémantique abstraite, calcul effectif (suite et fin)

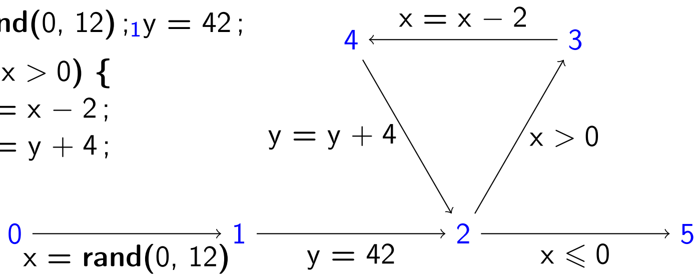
- $L \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp)$ est un treillis complet (car $\mathcal{D}^\sharp$ en est un).
- La fonction $F^\sharp : (L \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp)) \to (L \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp))$

$$F^\sharp(R^\sharp) = \begin{cases} 0 & \mapsto \quad \top_{\mathrm{nr}} \\ l' & \mapsto \quad \bigsqcup^\sharp_{\mathrm{nr}\,(l,c,l')\in A} \llbracket c \rrbracket^\sharp_{\mathrm{C}} (R^\sharp(l)) \end{cases}$$

est monotone et calculable.
- Donc si la suite $\left({F^\sharp}^n(L \to \bot_{\mathrm{nr}})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, on a une méthode de calcul de la sémantique abstraite :
  1. On part de ${R^\sharp}^0 := L \to \bot_{\mathrm{nr}}$;
  2. on calcule ${R^\sharp}^{k+1} := F^\sharp\left({R^\sharp}^k\right)$;
  3. on retourne en 2 jusqu'à atteindre un point fixe.

Exemple de calcul du point fixe abstrait

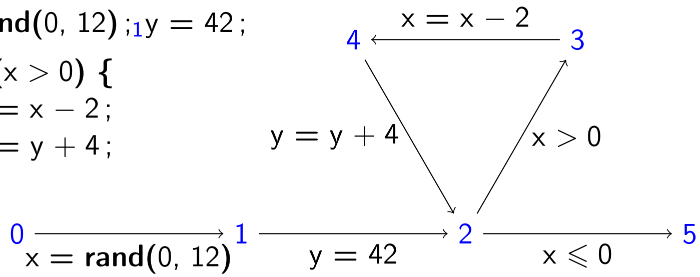
$_0$x = **rand**(0, 12) ; $_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}}\\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0]\\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}}\\
&\quad R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right]\\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right]\\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right]\\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ; $_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

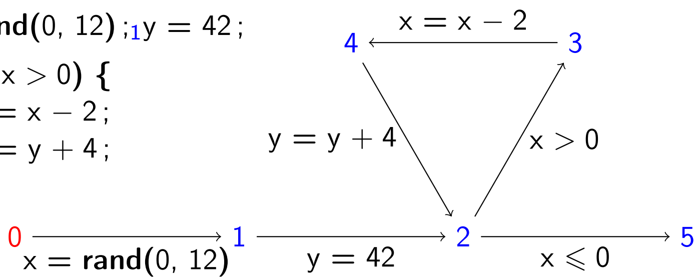


$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}}\\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0]\\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}}\\
&\quad R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right]\\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right]\\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right]\\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$(\bot,\bot)$			
1	$(\bot,\bot)$			
2	$(\bot,\bot)$			
3	$(\bot,\bot)$			
4	$(\bot,\bot)$			
5	$(\bot,\bot)$			

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ; $_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

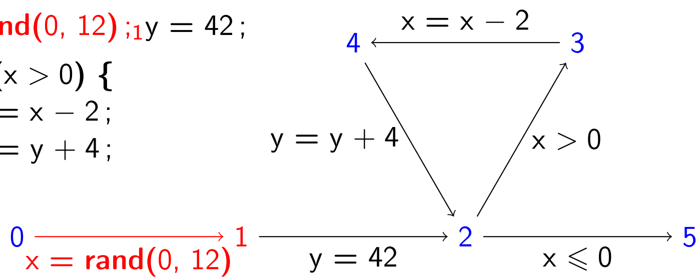


$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}}\\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0]\\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}}\\
&\quad R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right]\\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right]\\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right]\\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$		
1	$(\bot,\bot)$			
2	$(\bot,\bot)$			
3	$(\bot,\bot)$			
4	$(\bot,\bot)$			
5	$(\bot,\bot)$			

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ; $_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

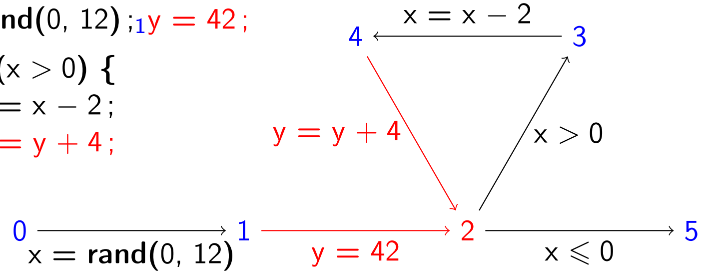


$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}}\\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0]\\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}}\\
&\quad R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right]\\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right]\\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right]\\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$		
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$		
2	$(\bot,\bot)$			
3	$(\bot,\bot)$			
4	$(\bot,\bot)$			
5	$(\bot,\bot)$			

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$



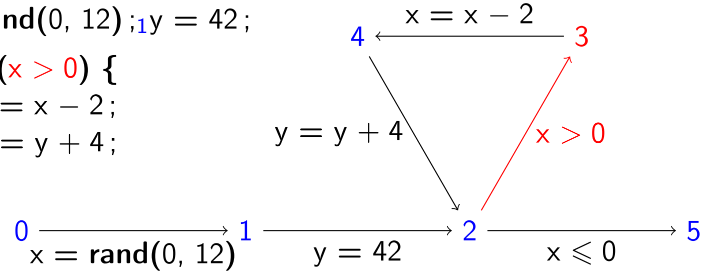
$$\begin{aligned} R_0^{\sharp i+1} &= \top_{nr}\\ R_1^{\sharp i+1} &= R_0^{\sharp i+1}[x\mapsto \geqslant 0]\\ R_2^{\sharp i+1} &= R_1^{\sharp i+1}[y\mapsto\geqslant 0]\sqcup^\sharp_{nr}\\ &\quad R_4^{\sharp i}\left[y\mapsto R_4^{\sharp i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right]\\ R_3^{\sharp i+1} &= R_2^{\sharp i+1}\left[x\mapsto R_2^{\sharp i+1}(x)\sqcap^\sharp \geqslant 0\right]\\ R_4^{\sharp i+1} &= R_3^{\sharp i+1}\left[x\mapsto R_3^{\sharp i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right]\\ R_5^{\sharp i+1} &= R_2^{\sharp i+1}\left[x\mapsto R_2^{\sharp i+1}\sqcap^\sharp\leqslant 0\right]\end{aligned}$$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$	$R_l^{\sharp 3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$		
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$		
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$		
3	$(\bot,\bot)$			
4	$(\bot,\bot)$			
5	$(\bot,\bot)$			

$$(\geqslant 0,\geqslant 0)\sqcup^\sharp_{nr}(\bot,\bot)$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

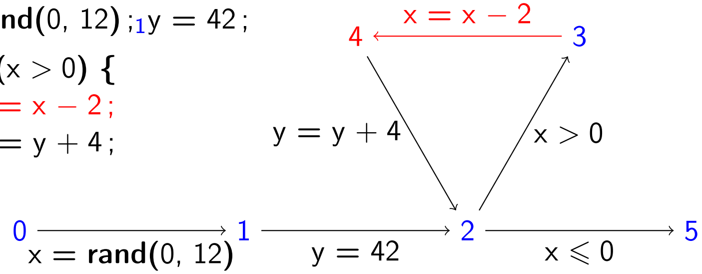


$$\begin{aligned} R_0^{\sharp i+1} &= \top_{nr}\\ R_1^{\sharp i+1} &= R_0^{\sharp i+1}[x\mapsto \geqslant 0]\\ R_2^{\sharp i+1} &= R_1^{\sharp i+1}[y\mapsto\geqslant 0]\sqcup^\sharp_{nr}\\ &\quad R_4^{\sharp i}\left[y\mapsto R_4^{\sharp i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right]\\ R_3^{\sharp i+1} &= R_2^{\sharp i+1}\left[x\mapsto R_2^{\sharp i+1}(x)\sqcap^\sharp \geqslant 0\right]\\ R_4^{\sharp i+1} &= R_3^{\sharp i+1}\left[x\mapsto R_3^{\sharp i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right]\\ R_5^{\sharp i+1} &= R_2^{\sharp i+1}\left[x\mapsto R_2^{\sharp i+1}\sqcap^\sharp\leqslant 0\right]\end{aligned}$$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$	$R_l^{\sharp 3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$		
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$		
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$		
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$		
4	$(\bot,\bot)$			
5	$(\bot,\bot)$			

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

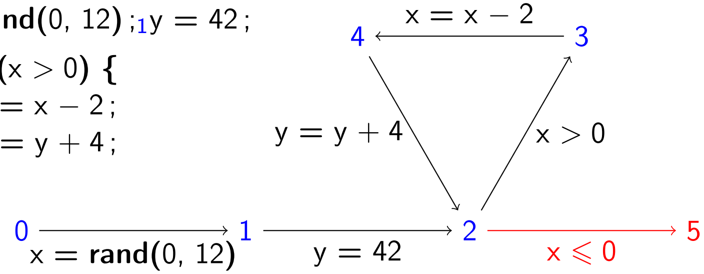


$$\begin{aligned} R_0^{\sharp i+1} &= \top_{nr}\\ R_1^{\sharp i+1} &= R_0^{\sharp i+1}[x\mapsto \geqslant 0]\\ R_2^{\sharp i+1} &= R_1^{\sharp i+1}[y\mapsto\geqslant 0]\sqcup^\sharp_{nr}\\ &\quad R_4^{\sharp i}\left[y\mapsto R_4^{\sharp i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right]\\ R_3^{\sharp i+1} &= R_2^{\sharp i+1}\left[x\mapsto R_2^{\sharp i+1}(x)\sqcap^\sharp \geqslant 0\right]\\ R_4^{\sharp i+1} &= R_3^{\sharp i+1}\left[x\mapsto R_3^{\sharp i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right]\\ R_5^{\sharp i+1} &= R_2^{\sharp i+1}\left[x\mapsto R_2^{\sharp i+1}\sqcap^\sharp\leqslant 0\right]\end{aligned}$$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$	$R_l^{\sharp 3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$		
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$		
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$		
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$		
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,\geqslant 0)$		
5	$(\bot,\bot)$			

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

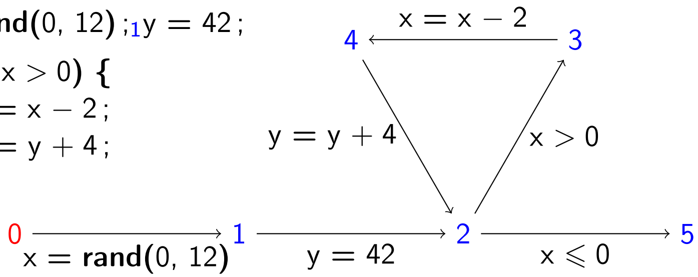


$$\begin{aligned} R_0^{\sharp i+1} &= \top_{nr}\\ R_1^{\sharp i+1} &= R_0^{\sharp i+1}[x\mapsto \geqslant 0]\\ R_2^{\sharp i+1} &= R_1^{\sharp i+1}[y\mapsto\geqslant 0]\sqcup^\sharp_{nr}\\ &\quad R_4^{\sharp i}\left[y\mapsto R_4^{\sharp i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right]\\ R_3^{\sharp i+1} &= R_2^{\sharp i+1}\left[x\mapsto R_2^{\sharp i+1}(x)\sqcap^\sharp \geqslant 0\right]\\ R_4^{\sharp i+1} &= R_3^{\sharp i+1}\left[x\mapsto R_3^{\sharp i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right]\\ R_5^{\sharp i+1} &= R_2^{\sharp i+1}\left[x\mapsto R_2^{\sharp i+1}\sqcap^\sharp\leqslant 0\right]\end{aligned}$$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$	$R_l^{\sharp 3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$		
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$		
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$		
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$		
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,\geqslant 0)$		
5	$(\bot,\bot)$	$(0,\geqslant 0)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

${}_0$x = **rand**(0, 12) ;${}_1$y = 42 ;
while ${}_2$(x > 0) {
  ${}_3$x = x − 2 ;
  ${}_4$y = y + 4 ;
}${}_5$

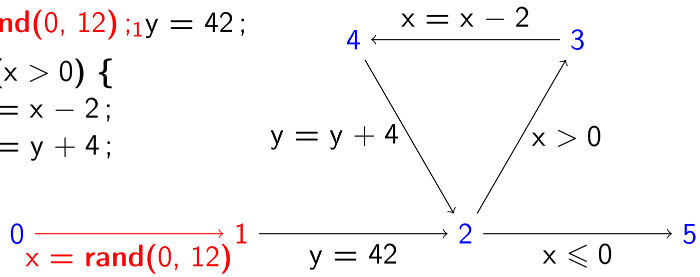


$R_0^{\sharp\, i+1} = \top_{\mathrm{nr}}$
$R_1^{\sharp\, i+1} = R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0]$
$R_2^{\sharp\, i+1} = R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\, i}(y) +^{\sharp} (\geqslant 0)\right]$
$R_3^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0\right]$
$R_4^{\sharp\, i+1} = R_3^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(x) -^{\sharp} (\geqslant 0)\right]$
$R_5^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0\right]$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$	$R_l^{\sharp 3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$		
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$		
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$		
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,\geqslant 0)$		
5	$(\bot,\bot)$	$(0,\geqslant 0)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

${}_0$x = **rand**(0, 12) ;${}_1$y = 42 ;
while ${}_2$(x > 0) {
  ${}_3$x = x − 2 ;
  ${}_4$y = y + 4 ;
}${}_5$

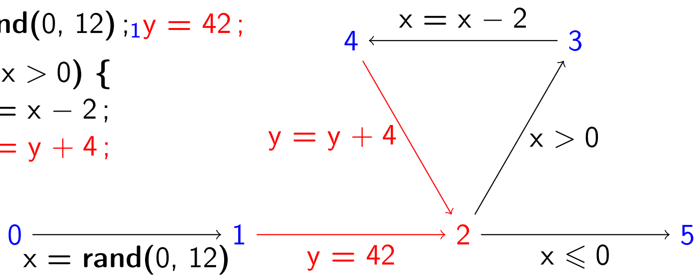


$R_0^{\sharp\, i+1} = \top_{\mathrm{nr}}$
$R_1^{\sharp\, i+1} = R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0]$
$R_2^{\sharp\, i+1} = R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\, i}(y) +^{\sharp} (\geqslant 0)\right]$
$R_3^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0\right]$
$R_4^{\sharp\, i+1} = R_3^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(x) -^{\sharp} (\geqslant 0)\right]$
$R_5^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0\right]$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$	$R_l^{\sharp 3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$	
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$		
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$		
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,\geqslant 0)$		
5	$(\bot,\bot)$	$(0,\geqslant 0)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

${}_0$x = **rand**(0, 12) ;${}_1$y = 42 ;
while ${}_2$(x > 0) {
  ${}_3$x = x − 2 ;
  ${}_4$y = y + 4 ;
}${}_5$



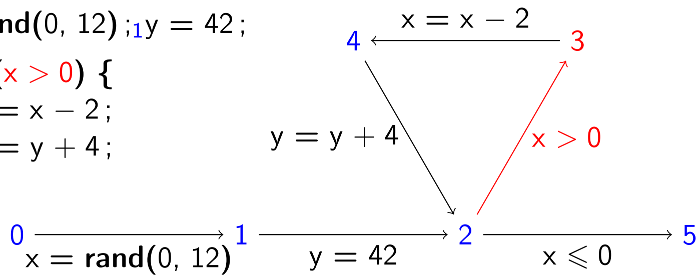
$R_0^{\sharp\, i+1} = \top_{\mathrm{nr}}$
$R_1^{\sharp\, i+1} = R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0]$
$R_2^{\sharp\, i+1} = R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\, i}(y) +^{\sharp} (\geqslant 0)\right]$
$R_3^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0\right]$
$R_4^{\sharp\, i+1} = R_3^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(x) -^{\sharp} (\geqslant 0)\right]$
$R_5^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0\right]$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$	$R_l^{\sharp 3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$	
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$		
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,\geqslant 0)$		
5	$(\bot,\bot)$	$(0,\geqslant 0)$		

$$(\geqslant 0, \geqslant 0) \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} (\top, \geqslant 0)$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

${}_0$x = **rand**(0, 12) ;${}_1$y = 42 ;
while ${}_2$(x > 0) {
  ${}_3$x = x − 2 ;
  ${}_4$y = y + 4 ;
}${}_5$

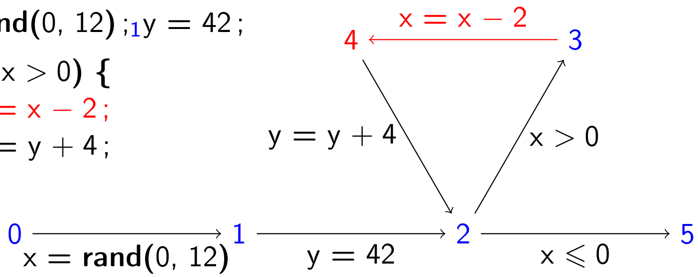


$R_0^{\sharp\, i+1} = \top_{\mathrm{nr}}$
$R_1^{\sharp\, i+1} = R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto \geqslant 0]$
$R_2^{\sharp\, i+1} = R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\, i}(y) +^{\sharp} (\geqslant 0)\right]$
$R_3^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0\right]$
$R_4^{\sharp\, i+1} = R_3^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(x) -^{\sharp} (\geqslant 0)\right]$
$R_5^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0\right]$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$	$R_l^{\sharp 3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$	
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,\geqslant 0)$		
5	$(\bot,\bot)$	$(0,\geqslant 0)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

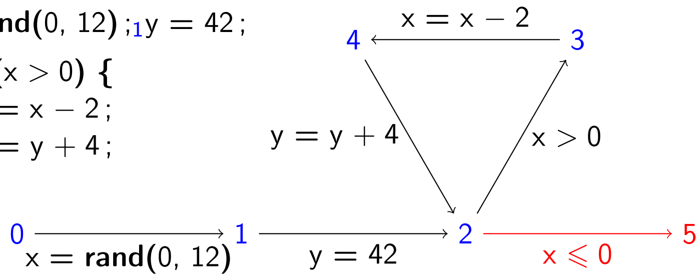


$R_0^{\sharp i+1} = \top_{\mathrm{nr}}$
$R_1^{\sharp i+1} = R_0^{\sharp i+1}[x \mapsto \geqslant 0]$
$R_2^{\sharp i+1} = R_1^{\sharp i+1}[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right]$
$R_3^{\sharp i+1} = R_2^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right]$
$R_4^{\sharp i+1} = R_3^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right]$
$R_5^{\sharp i+1} = R_2^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$	$R_l^{\sharp 3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$	
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	
5	$(\bot,\bot)$	$(0,\geqslant 0)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

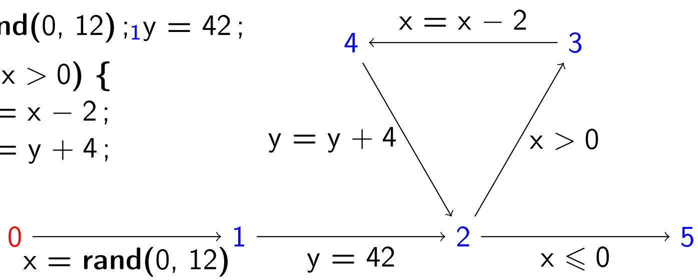


$R_0^{\sharp i+1} = \top_{\mathrm{nr}}$
$R_1^{\sharp i+1} = R_0^{\sharp i+1}[x \mapsto \geqslant 0]$
$R_2^{\sharp i+1} = R_1^{\sharp i+1}[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right]$
$R_3^{\sharp i+1} = R_2^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right]$
$R_4^{\sharp i+1} = R_3^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right]$
$R_5^{\sharp i+1} = R_2^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$	$R_l^{\sharp 3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$	
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	
5	$(\bot,\bot)$	$(0,\geqslant 0)$	$(\leqslant 0,\geqslant 0)$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

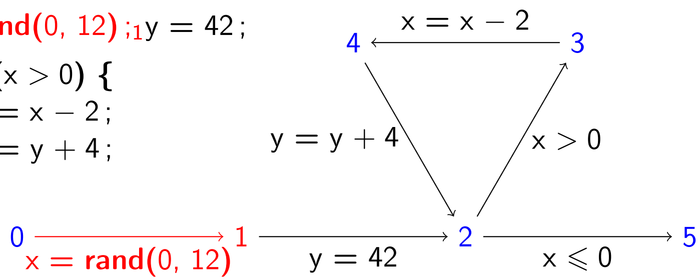


$R_0^{\sharp i+1} = \top_{\mathrm{nr}}$
$R_1^{\sharp i+1} = R_0^{\sharp i+1}[x \mapsto \geqslant 0]$
$R_2^{\sharp i+1} = R_1^{\sharp i+1}[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right]$
$R_3^{\sharp i+1} = R_2^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right]$
$R_4^{\sharp i+1} = R_3^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right]$
$R_5^{\sharp i+1} = R_2^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$	$R_l^{\sharp 3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$	
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	
5	$(\bot,\bot)$	$(0,\geqslant 0)$	$(\leqslant 0,\geqslant 0)$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

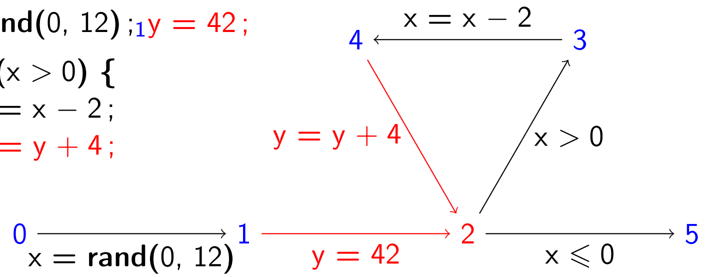


$R_0^{\sharp i+1} = \top_{\mathrm{nr}}$
$R_1^{\sharp i+1} = R_0^{\sharp i+1}[x \mapsto \geqslant 0]$
$R_2^{\sharp i+1} = R_1^{\sharp i+1}[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right]$
$R_3^{\sharp i+1} = R_2^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right]$
$R_4^{\sharp i+1} = R_3^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right]$
$R_5^{\sharp i+1} = R_2^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$	$R_l^{\sharp 3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	
5	$(\bot,\bot)$	$(0,\geqslant 0)$	$(\leqslant 0,\geqslant 0)$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ; $_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$



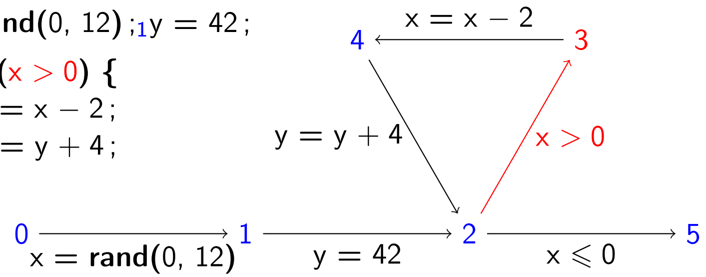
$R_0^{\sharp\,i+1} = \top_{nr}$
$R_1^{\sharp\,i+1} = R_0^{\sharp\,i+1}[x \mapsto \geqslant 0]$
$R_2^{\sharp\,i+1} = R_1^{\sharp\,i+1}[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{nr} R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right]$
$R_3^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right]$
$R_4^{\sharp\,i+1} = R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right]$
$R_5^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	
5	$(\bot,\bot)$	$(0,\geqslant 0)$	$(\leqslant 0,\geqslant 0)$	

$(\geqslant 0, \geqslant 0) \sqcup^\sharp_{nr} (\top, \geqslant 0)$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ; $_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

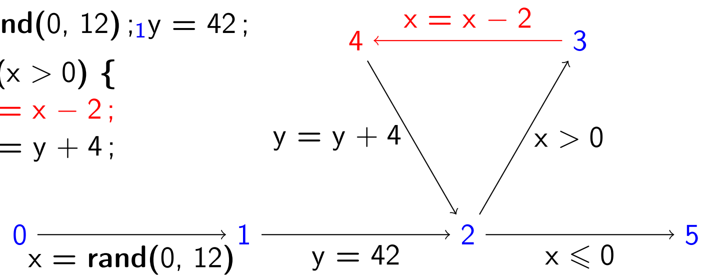


$R_0^{\sharp\,i+1} = \top_{nr}$
$R_1^{\sharp\,i+1} = R_0^{\sharp\,i+1}[x \mapsto \geqslant 0]$
$R_2^{\sharp\,i+1} = R_1^{\sharp\,i+1}[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{nr} R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right]$
$R_3^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right]$
$R_4^{\sharp\,i+1} = R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right]$
$R_5^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	
5	$(\bot,\bot)$	$(0,\geqslant 0)$	$(\leqslant 0,\geqslant 0)$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ; $_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

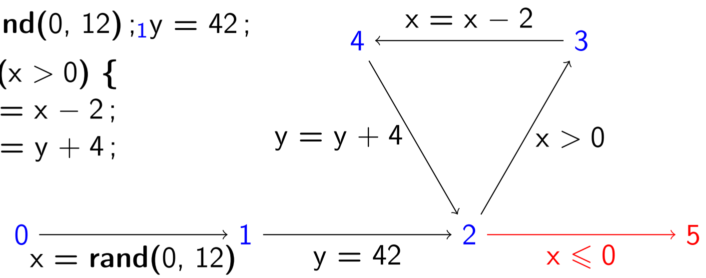


$R_0^{\sharp\,i+1} = \top_{nr}$
$R_1^{\sharp\,i+1} = R_0^{\sharp\,i+1}[x \mapsto \geqslant 0]$
$R_2^{\sharp\,i+1} = R_1^{\sharp\,i+1}[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{nr} R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right]$
$R_3^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right]$
$R_4^{\sharp\,i+1} = R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right]$
$R_5^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$
5	$(\bot,\bot)$	$(0,\geqslant 0)$	$(\leqslant 0,\geqslant 0)$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ; $_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

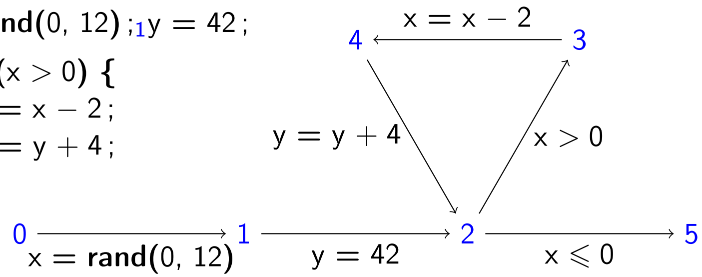


$R_0^{\sharp\,i+1} = \top_{nr}$
$R_1^{\sharp\,i+1} = R_0^{\sharp\,i+1}[x \mapsto \geqslant 0]$
$R_2^{\sharp\,i+1} = R_1^{\sharp\,i+1}[y \mapsto \geqslant 0] \sqcup^\sharp_{nr} R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right]$
$R_3^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right]$
$R_4^{\sharp\,i+1} = R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right]$
$R_5^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$
5	$(\bot,\bot)$	$(0,\geqslant 0)$	$(\leqslant 0,\geqslant 0)$	$(\leqslant 0,\geqslant 0)$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) **{**
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}}\\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto\geqslant 0]\\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto\geqslant 0] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}}\\
&\quad R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp (\geqslant 0)\right]\\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp \geqslant 0\right]\\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp (\geqslant 0)\right]\\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1} \sqcap^\sharp \leqslant 0\right]
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$	$(\geqslant 0,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$
3	$(\bot,\bot)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$
5	$(\bot,\bot)$	$(0,\geqslant 0)$	$(\leqslant 0,\geqslant 0)$	$(\leqslant 0,\geqslant 0)$

On a atteint le point fixe !

Correction et terminaison

Théorème (correction)

La sémantique abstraite est une *sur-approximation correcte* de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_l \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_l^\sharp\right)$$

Correction et terminaison

Théorème (correction)

La sémantique abstraite est une *sur-approximation correcte* de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_l \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_l^\sharp\right)$$

Propriété (terminaison)

Le calcul du point fixe par itérations termine.

Correction et terminaison

Théorème (correction)

La sémantique abstraite est une *sur-approximation correcte* de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_l \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_l^\sharp\right)$$

Propriété (terminaison)

Le calcul du point fixe par itérations termine.

Démonstration.

$\mathcal{D}^\sharp$ est fini donc $L \to \left(\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp\right)$ également

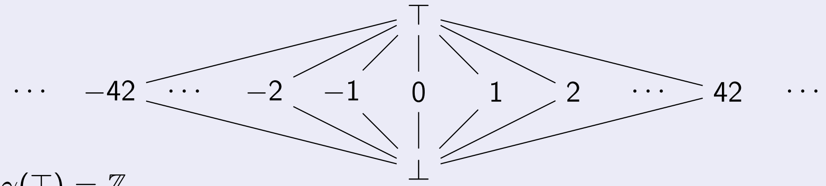
donc la suite croissante $\left(R^{\sharp\,n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. □

- Analyse statique des propriétés des programmes impératifs
  - Syntaxe
  - Sémantique
  - Ordres partiels
- Abstract interpretation - le Reader Digest
- Abstraire la sémantique concrète
  - Rappels sur la sémantique concrète
  - Abstractions relationnelles ou non
- **Abstractions non relationnelles**
  - Signes
  - **Constantes**
  - Intervalles

Domaine des constantes

Définition

Treillis des constantes $(\mathcal{D}^\sharp, \sqsubseteq^\sharp)$

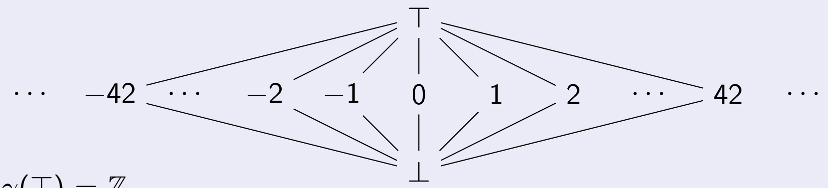


$\gamma(\top) = \mathbb{Z}$
$\gamma(n) \ = \{ n \}$
$\gamma(\perp) = \emptyset$

Domaine des constantes

Définition

Treillis des constantes $(\mathcal{D}^\sharp, \sqsubseteq^\sharp)$



$\gamma(\top) = \mathbb{Z}$
$\gamma(n) \ = \{ n \}$
$\gamma(\perp) = \emptyset$

Remarque

L'ordre $\sqsubseteq^\sharp$ ci dessus est correct par rapport à l'ordre $\subseteq$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Domaine des constantes, meilleure abstraction

Remarque

On a bien une correspondance de Galois avec

$$\alpha(S) = \begin{cases} \top & \text{si } \mathrm{card}(S) \geqslant 2 \\ n & \text{si } S = \{ n \} \\ \perp & \text{si } S = \emptyset \end{cases}$$

Domaine des constantes, opérations arithmétiques abstraites

- $n^\sharp = \alpha(\{\, n \,\}) = n$

Domaine des constantes, opérations arithmétiques abstraites

- $n^\sharp = \alpha(\{\, n \,\}) = n$

- $\mathbf{rand}^\sharp(n_1, n_2) = \alpha([\![n_1, n_2]\!]) = \begin{cases} \top & \text{si } n_1 < n_2 \\ n_1 & \text{si } n_1 = n_2 \\ \bot & \text{si } n_1 > n_2 \end{cases}$

Domaine des constantes, opérations arithmétiques abstraites

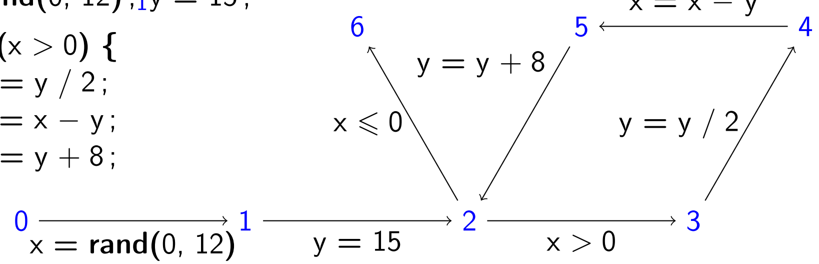
- $n^\sharp = \alpha(\{\, n \,\}) = n$
- $\mathbf{rand}^\sharp(n_1, n_2) = \alpha([\![n_1, n_2]\!]) = \begin{cases} \top & \text{si } n_1 < n_2 \\ n_1 & \text{si } n_1 = n_2 \\ \bot & \text{si } n_1 > n_2 \end{cases}$
- $x^\sharp +^\sharp y^\sharp = \alpha\left(\left\{ x + y \;\middle|\; x \in \gamma(x^\sharp), y \in \gamma(y^\sharp) \right\}\right) =$

$$\begin{cases} \top & \text{si } x^\sharp = \top \text{ ou } y^\sharp = \top \\ n_1 + n_2 & \text{si } x^\sharp = n_1 \text{ et } y^\sharp = n_2 \\ \bot & \text{si } x^\sharp = \bot \text{ ou } y^\sharp = \bot \end{cases}$$

- ...

Exemple de calcul du point fixe abstrait

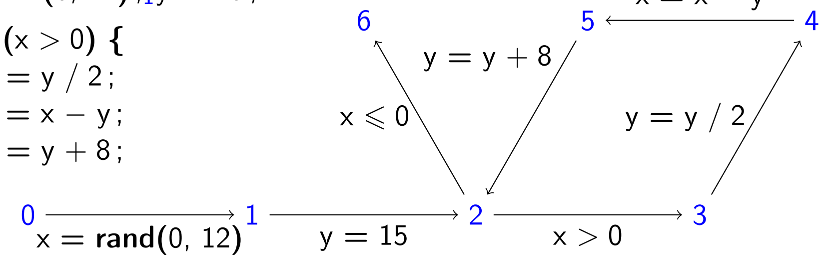
$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) **{**
  $_3$y = y / 2 ;
  $_4$x = x − y ;
  $_5$y = y + 8 ;
}$_6$



$$\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \top] \\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\
&\quad R_5^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\,i}(y) +^\sharp 8\right] \\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1} \\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(y) /^\sharp 2\right] \\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_4^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp R_4^{\sharp\,i+1}(y)\right] \\
R_6^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}
\end{aligned}$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$y = y / 2 ;
  $_4$x = x − y ;
  $_5$y = y + 8 ;
}$_6$

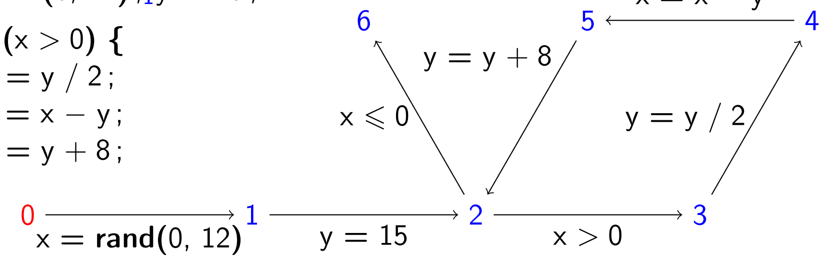


$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\, i+1} &= \top_{\mathrm{nr}}\\
R_1^{\sharp\, i+1} &= R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto \top]\\
R_2^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}}\\
&\quad R_5^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\, i}(y) +^\sharp 8\right]\\
R_3^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\\
R_4^{\sharp\, i+1} &= R_3^{\sharp\, i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(y) /^\sharp 2\right]\\
R_5^{\sharp\, i+1} &= R_4^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\, i+1}(x) -^\sharp R_4^{\sharp\, i+1}(y)\right]\\
R_6^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot,\bot)$		
1	$(\bot,\bot)$		
2	$(\bot,\bot)$		
3	$(\bot,\bot)$		
4	$(\bot,\bot)$		
5	$(\bot,\bot)$		
6	$(\bot,\bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$y = y / 2 ;
  $_4$x = x − y ;
  $_5$y = y + 8 ;
}$_6$

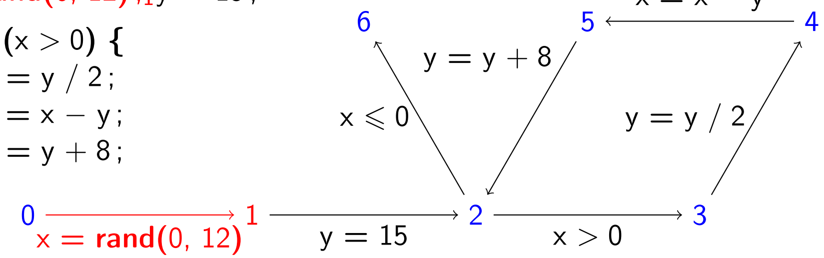


$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\, i+1} &= \top_{\mathrm{nr}}\\
R_1^{\sharp\, i+1} &= R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto \top]\\
R_2^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}}\\
&\quad R_5^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\, i}(y) +^\sharp 8\right]\\
R_3^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\\
R_4^{\sharp\, i+1} &= R_3^{\sharp\, i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(y) /^\sharp 2\right]\\
R_5^{\sharp\, i+1} &= R_4^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\, i+1}(x) -^\sharp R_4^{\sharp\, i+1}(y)\right]\\
R_6^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$		
2	$(\bot,\bot)$		
3	$(\bot,\bot)$		
4	$(\bot,\bot)$		
5	$(\bot,\bot)$		
6	$(\bot,\bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$y = y / 2 ;
  $_4$x = x − y ;
  $_5$y = y + 8 ;
}$_6$

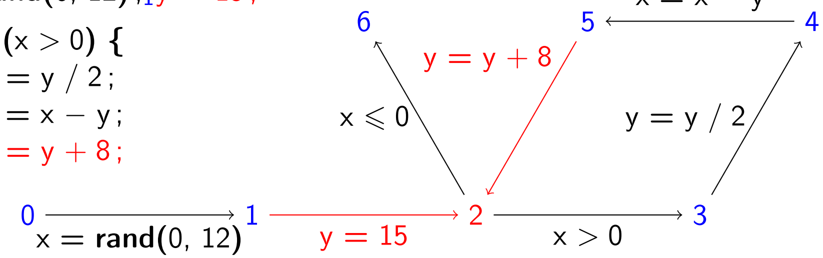


$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\, i+1} &= \top_{\mathrm{nr}}\\
R_1^{\sharp\, i+1} &= R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto \top]\\
R_2^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}}\\
&\quad R_5^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\, i}(y) +^\sharp 8\right]\\
R_3^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\\
R_4^{\sharp\, i+1} &= R_3^{\sharp\, i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(y) /^\sharp 2\right]\\
R_5^{\sharp\, i+1} &= R_4^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\, i+1}(x) -^\sharp R_4^{\sharp\, i+1}(y)\right]\\
R_6^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
2	$(\bot,\bot)$		
3	$(\bot,\bot)$		
4	$(\bot,\bot)$		
5	$(\bot,\bot)$		
6	$(\bot,\bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$y = y / 2 ;
  $_4$x = x − y ;
  $_5$y = y + 8 ;
}$_6$



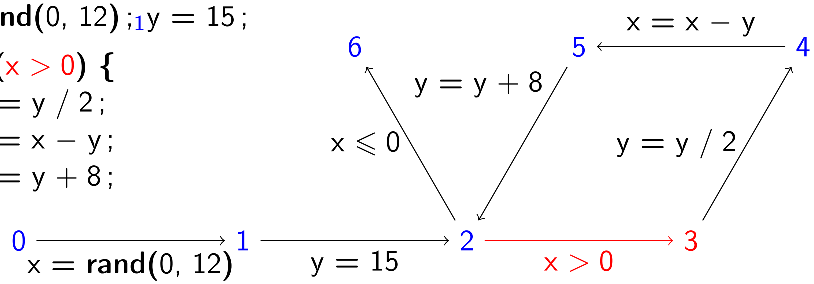
$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\, i+1} &= \top_{\mathrm{nr}}\\
R_1^{\sharp\, i+1} &= R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto \top]\\
R_2^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}}\\
&\quad R_5^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\, i}(y) +^\sharp 8\right]\\
R_3^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\\
R_4^{\sharp\, i+1} &= R_3^{\sharp\, i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(y) /^\sharp 2\right]\\
R_5^{\sharp\, i+1} &= R_4^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\, i+1}(x) -^\sharp R_4^{\sharp\, i+1}(y)\right]\\
R_6^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
2	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	
3	$(\bot,\bot)$		
4	$(\bot,\bot)$		
5	$(\bot,\bot)$		
6	$(\bot,\bot)$		

$$(\top, 15) \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} (\bot, \bot)$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$y = y / 2 ;
  $_4$x = x − y ;
  $_5$y = y + 8 ;
}$_6$

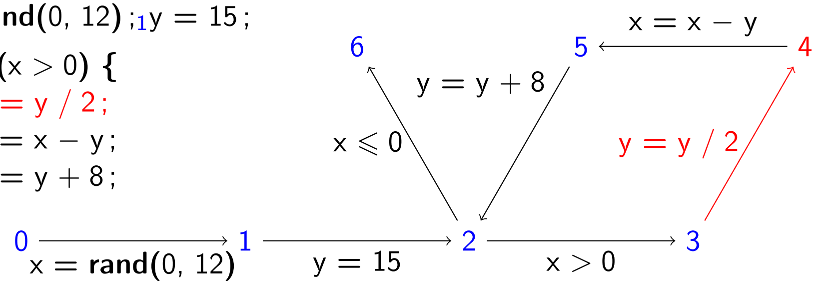


$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}}\\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \top]\\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}}\\
&\quad R_5^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\,i}(y) +^{\sharp} 8\right]\\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(y) /^{\sharp} 2\right]\\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_4^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\,i+1}(x) -^{\sharp} R_4^{\sharp\,i+1}(y)\right]\\
R_6^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
2	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	
3	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	
4	$(\bot,\bot)$		
5	$(\bot,\bot)$		
6	$(\bot,\bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$y = y / 2 ;
  $_4$x = x − y ;
  $_5$y = y + 8 ;
}$_6$

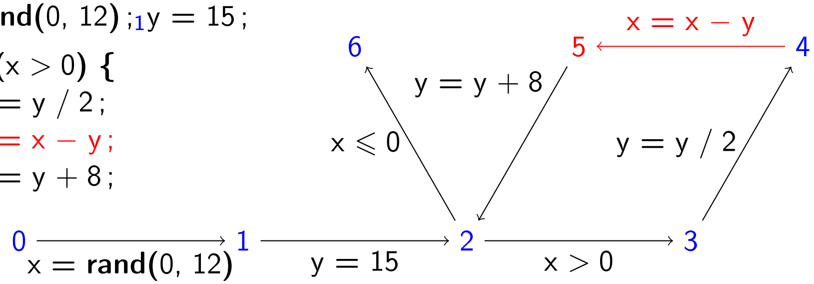


$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}}\\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \top]\\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}}\\
&\quad R_5^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\,i}(y) +^{\sharp} 8\right]\\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(y) /^{\sharp} 2\right]\\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_4^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\,i+1}(x) -^{\sharp} R_4^{\sharp\,i+1}(y)\right]\\
R_6^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
2	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	
3	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
5	$(\bot,\bot)$		
6	$(\bot,\bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$y = y / 2 ;
  $_4$x = x − y ;
  $_5$y = y + 8 ;
}$_6$

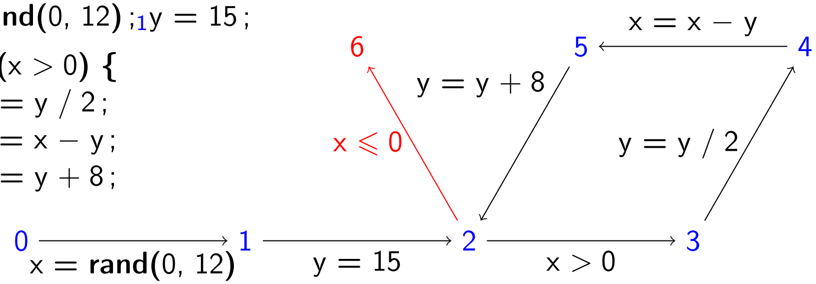


$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}}\\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \top]\\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}}\\
&\quad R_5^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\,i}(y) +^{\sharp} 8\right]\\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(y) /^{\sharp} 2\right]\\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_4^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\,i+1}(x) -^{\sharp} R_4^{\sharp\,i+1}(y)\right]\\
R_6^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
2	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	
3	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
5	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
6	$(\bot,\bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$y = y / 2 ;
  $_4$x = x − y ;
  $_5$y = y + 8 ;
}$_6$

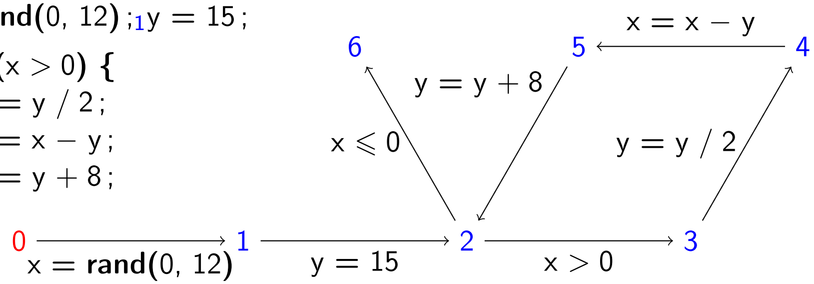


$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}}\\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_0^{\sharp\,i+1}\,[x \mapsto \top]\\
R_2^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}}\\
&\quad R_5^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\,i}(y) +^{\sharp} 8\right]\\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}\\
R_4^{\sharp\,i+1} &= R_3^{\sharp\,i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(y) /^{\sharp} 2\right]\\
R_5^{\sharp\,i+1} &= R_4^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\,i+1}(x) -^{\sharp} R_4^{\sharp\,i+1}(y)\right]\\
R_6^{\sharp\,i+1} &= R_2^{\sharp\,i+1}
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
2	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	
3	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
5	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
6	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$y = y / 2 ;
  $_4$x = x − y ;
  $_5$y = y + 8 ;
}$_6$

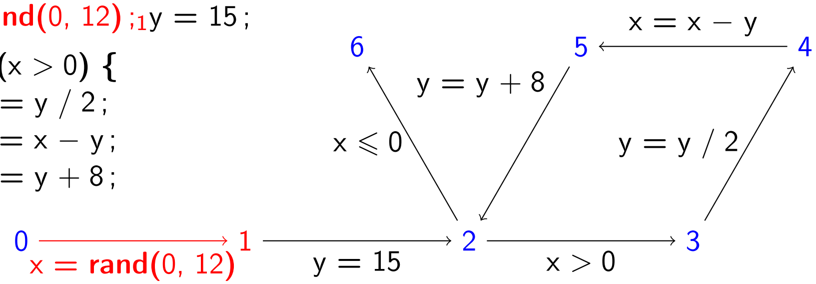


$R_0^{\sharp\, i+1} = \top_{\mathrm{nr}}$
$R_1^{\sharp\, i+1} = R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto \top]$
$R_2^{\sharp\, i+1} = R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}}$
$\quad R_5^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\, i}(y) +^{\sharp} 8\right]$
$R_3^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}$
$R_4^{\sharp\, i+1} = R_3^{\sharp\, i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(y) /^{\sharp} 2\right]$
$R_5^{\sharp\, i+1} = R_4^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\, i+1}(x) -^{\sharp} R_4^{\sharp\, i+1}(y)\right]$
$R_6^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}$

l	$R_l^{\sharp\, 0}$	$R_l^{\sharp\, 1}$	$R_l^{\sharp\, 2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
2	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	
3	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
5	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
6	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$y = y / 2 ;
  $_4$x = x − y ;
  $_5$y = y + 8 ;
}$_6$

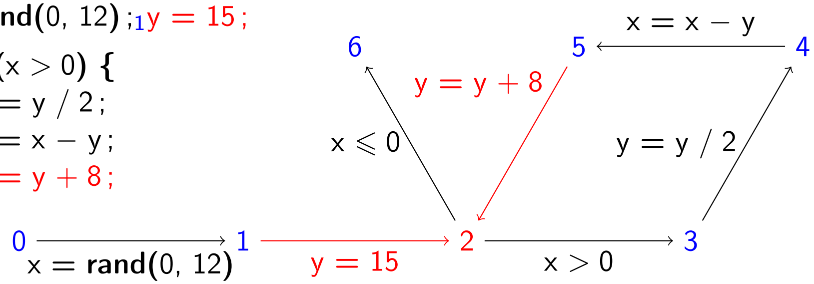


$R_0^{\sharp\, i+1} = \top_{\mathrm{nr}}$
$R_1^{\sharp\, i+1} = R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto \top]$
$R_2^{\sharp\, i+1} = R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}}$
$\quad R_5^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\, i}(y) +^{\sharp} 8\right]$
$R_3^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}$
$R_4^{\sharp\, i+1} = R_3^{\sharp\, i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(y) /^{\sharp} 2\right]$
$R_5^{\sharp\, i+1} = R_4^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\, i+1}(x) -^{\sharp} R_4^{\sharp\, i+1}(y)\right]$
$R_6^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}$

l	$R_l^{\sharp\, 0}$	$R_l^{\sharp\, 1}$	$R_l^{\sharp\, 2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	
3	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
5	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
6	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$y = y / 2 ;
  $_4$x = x − y ;
  $_5$y = y + 8 ;
}$_6$



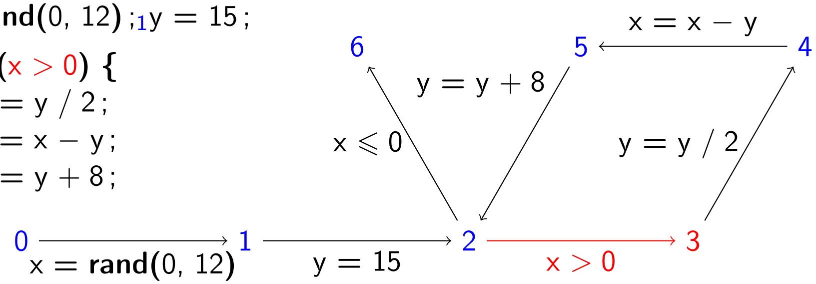
$R_0^{\sharp\, i+1} = \top_{\mathrm{nr}}$
$R_1^{\sharp\, i+1} = R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto \top]$
$R_2^{\sharp\, i+1} = R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}}$
$\quad R_5^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\, i}(y) +^{\sharp} 8\right]$
$R_3^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}$
$R_4^{\sharp\, i+1} = R_3^{\sharp\, i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(y) /^{\sharp} 2\right]$
$R_5^{\sharp\, i+1} = R_4^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\, i+1}(x) -^{\sharp} R_4^{\sharp\, i+1}(y)\right]$
$R_6^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}$

l	$R_l^{\sharp\, 0}$	$R_l^{\sharp\, 1}$	$R_l^{\sharp\, 2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$
3	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
5	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
6	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	

$$(\top,15) \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} (\top, 7+8)$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$y = y / 2 ;
  $_4$x = x − y ;
  $_5$y = y + 8 ;
}$_6$

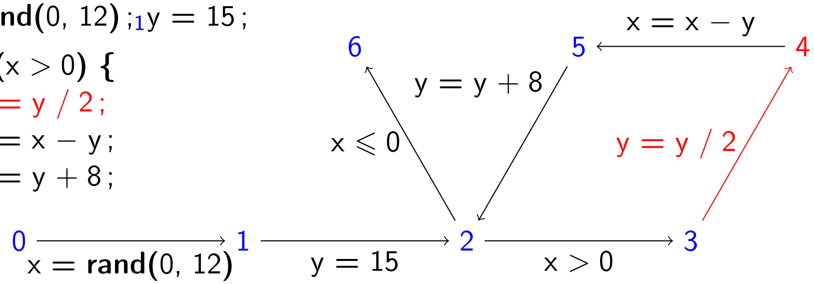


$R_0^{\sharp\, i+1} = \top_{\mathrm{nr}}$
$R_1^{\sharp\, i+1} = R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto \top]$
$R_2^{\sharp\, i+1} = R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto 15] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}}$
$\quad R_5^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\, i}(y) +^{\sharp} 8\right]$
$R_3^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}$
$R_4^{\sharp\, i+1} = R_3^{\sharp\, i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(y) /^{\sharp} 2\right]$
$R_5^{\sharp\, i+1} = R_4^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\, i+1}(x) -^{\sharp} R_4^{\sharp\, i+1}(y)\right]$
$R_6^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}$

l	$R_l^{\sharp\, 0}$	$R_l^{\sharp\, 1}$	$R_l^{\sharp\, 2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$
3	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
5	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
6	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$y = y / 2 ;
  $_4$x = x − y ;
  $_5$y = y + 8 ;
}$_6$

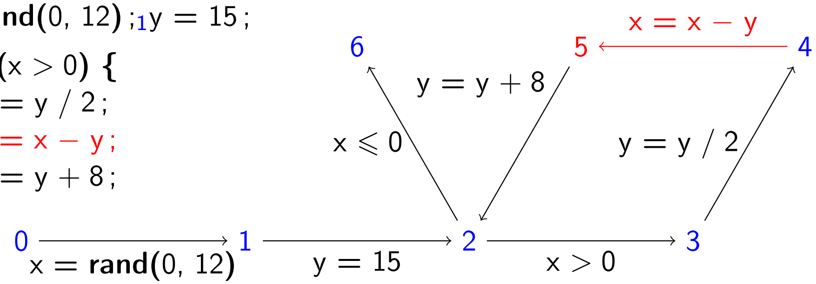


$R_0^{\sharp\,i+1} = \top_{\mathrm{nr}}$
$R_1^{\sharp\,i+1} = R_0^{\sharp\,i+1}[x \mapsto \top]$
$R_2^{\sharp\,i+1} = R_1^{\sharp\,i+1}[y \mapsto 15] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} R_5^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\,i}(y) +^\sharp 8\right]$
$R_3^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}$
$R_4^{\sharp\,i+1} = R_3^{\sharp\,i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(y)/^\sharp 2\right]$
$R_5^{\sharp\,i+1} = R_4^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp R_4^{\sharp\,i+1}(y)\right]$
$R_6^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$
3	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	$(\top,7)$
5	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	
6	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$y = y / 2 ;
  $_4$x = x − y ;
  $_5$y = y + 8 ;
}$_6$

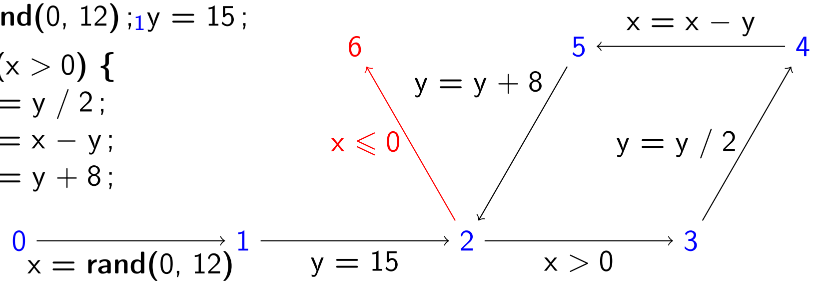


$R_0^{\sharp\,i+1} = \top_{\mathrm{nr}}$
$R_1^{\sharp\,i+1} = R_0^{\sharp\,i+1}[x \mapsto \top]$
$R_2^{\sharp\,i+1} = R_1^{\sharp\,i+1}[y \mapsto 15] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} R_5^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\,i}(y) +^\sharp 8\right]$
$R_3^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}$
$R_4^{\sharp\,i+1} = R_3^{\sharp\,i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(y)/^\sharp 2\right]$
$R_5^{\sharp\,i+1} = R_4^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp R_4^{\sharp\,i+1}(y)\right]$
$R_6^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$
3	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	$(\top,7)$
5	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	$(\top,7)$
6	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$y = y / 2 ;
  $_4$x = x − y ;
  $_5$y = y + 8 ;
}$_6$

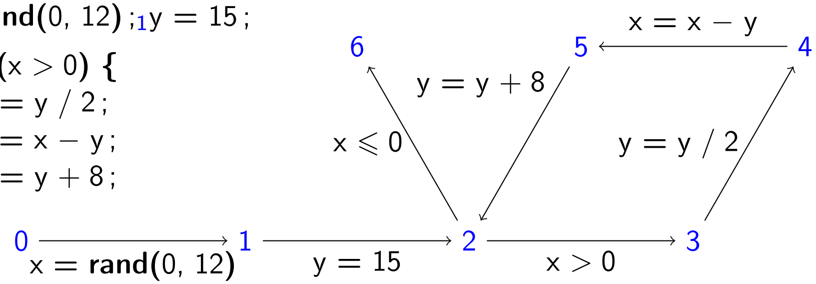


$R_0^{\sharp\,i+1} = \top_{\mathrm{nr}}$
$R_1^{\sharp\,i+1} = R_0^{\sharp\,i+1}[x \mapsto \top]$
$R_2^{\sharp\,i+1} = R_1^{\sharp\,i+1}[y \mapsto 15] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} R_5^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\,i}(y) +^\sharp 8\right]$
$R_3^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}$
$R_4^{\sharp\,i+1} = R_3^{\sharp\,i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(y)/^\sharp 2\right]$
$R_5^{\sharp\,i+1} = R_4^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp R_4^{\sharp\,i+1}(y)\right]$
$R_6^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$
3	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	$(\top,7)$
5	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	$(\top,7)$
6	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 15 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$y = y / 2 ;
  $_4$x = x − y ;
  $_5$y = y + 8 ;
}$_6$



$R_0^{\sharp\,i+1} = \top_{\mathrm{nr}}$
$R_1^{\sharp\,i+1} = R_0^{\sharp\,i+1}[x \mapsto \top]$
$R_2^{\sharp\,i+1} = R_1^{\sharp\,i+1}[y \mapsto 15] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} R_5^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_5^{\sharp\,i}(y) +^\sharp 8\right]$
$R_3^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}$
$R_4^{\sharp\,i+1} = R_3^{\sharp\,i+1}\left[y \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(y)/^\sharp 2\right]$
$R_5^{\sharp\,i+1} = R_4^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_4^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp R_4^{\sharp\,i+1}(y)\right]$
$R_6^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$
3	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$
4	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	$(\top,7)$
5	$(\bot,\bot)$	$(\top,7)$	$(\top,7)$
6	$(\bot,\bot)$	$(\top,15)$	$(\top,15)$

On a atteint le point fixe !

Correction et terminaison

Théorème (correction, *pareil que pour les signes*)

La sémantique abstraite est une *sur-approximation correcte* de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_l \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_l^\sharp\right)$$

Correction et terminaison

Théorème (correction, *pareil que pour les signes*)

La sémantique abstraite est une *sur-approximation correcte* de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_l \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_l^\sharp\right)$$

Propriété (terminaison)

Le calcul du point fixe par itérations termine.

Correction et terminaison

Théorème (correction, *pareil que pour les signes*)

La sémantique abstraite est une *sur-approximation correcte* de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_l \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_l^\sharp\right)$$

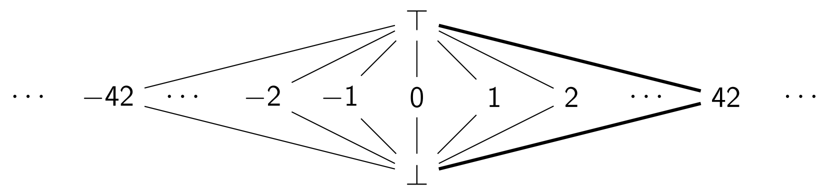
Propriété (terminaison)

Le calcul du point fixe par itérations termine.

Démonstration.

$\mathcal{D}^\sharp$ est infini mais n'a pas de chaîne strictement croissante infinie donc $L \to \left(\mathbb{V} \to \mathcal{D}^\sharp\right)$ non plus donc la suite croissante $\left({R^\sharp}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. $\square$

Le treillis des constantes n'a pas de chaîne croissante infinie



Remarques

- Le domaine des constantes est souvent appelé Killdall.
- Il est utilisé en compilation pour faire du constant folding.

Remarques

- Le domaine des constantes est souvent appelé Killdall.
- Il est utilisé en compilation pour faire du constant folding.
- Démo GCC.

Remarques

- Le domaine des constantes est souvent appelé Killdall.
- Il est utilisé en compilation pour faire du constant folding.
- Démo GCC.
- Le domaine des constantes est en fait
  le domaine des singletons de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.
- Sur le même principe, on peut construire pour un $n \in \mathbb{N}$ quelconque un domaine « ensembles d'au plus n éléments ».

Domaine des intervalles

Définition

Treillis des intervalles $(\mathcal{D}^\sharp, \sqsubseteq^\sharp)$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & &]\!] -\infty, +\infty [\![& & & \\
 & & & \vdots & & & \\
 & & \cdots & [\![-1, 1]\!] & \cdots & & \\
 & \cdots & [\![-1, 0]\!] & & [\![0, 1]\!] & \cdots & \\
\cdots & [\![-1, -1]\!] & & [\![0, 0]\!] & & [\![1, 1]\!] & \cdots \\
 & & & \bot & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\gamma(]\!] -\infty, +\infty [\![) & =]\!] -\infty, +\infty [\![\\
\gamma(]\!] -\infty, n]\!]) & =]\!] -\infty, n]\!] \\
\gamma([\![n, +\infty [\![) & = [\![n, +\infty [\![\\
\gamma([\![n_1, n_2]\!]) & = [\![n_1, n_2]\!] \\
\gamma(\bot) & = \emptyset
\end{array}
$$

Domaine des intervalles

Définition

Treillis des intervalles $(\mathcal{D}^\sharp, \sqsubseteq^\sharp)$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & &]\!] -\infty, +\infty [\![& & & \\
 & & & \vdots & & & \\
 & & \cdots & [\![-1, 1]\!] & \cdots & & \\
 & \cdots & [\![-1, 0]\!] & & [\![0, 1]\!] & \cdots & \\
\cdots & [\![-1, -1]\!] & & [\![0, 0]\!] & & [\![1, 1]\!] & \cdots \\
 & & & \bot & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\gamma(]\!] -\infty, +\infty [\![) & =]\!] -\infty, +\infty [\![\\
\gamma(]\!] -\infty, n]\!]) & =]\!] -\infty, n]\!] \\
\gamma([\![n, +\infty [\![) & = [\![n, +\infty [\![\\
\gamma([\![n_1, n_2]\!]) & = [\![n_1, n_2]\!] \\
\gamma(\bot) & = \emptyset
\end{array}
$$

Remarque

L'ordre est correct.

Domaine des intervalles, meilleure abstraction

Remarque

On a bien une correspondance de Galois avec

$$
\alpha(S) = \begin{cases} [\![n_1, n_2]\!] & \text{avec } n_1 = \min S \text{ et } n_2 = \max S \\ \bot & \text{si } S = \emptyset \end{cases}
$$

Domaine des intervalles, opérations arithmétiques abstraites

- $n^\sharp = \alpha(\{\, n \,\}) = [\![n, n]\!]$

Domaine des intervalles, opérations arithmétiques abstraites

- $n^\sharp = \alpha(\{ n \}) = [\![n, n]\!]$
- $\textbf{rand}^\sharp(n_1, n_2) = \alpha([\![n_1, n_2]\!]) = \begin{cases} [\![n_1, n_2]\!] & \text{si } n_1 \leqslant n_2 \\ \bot & \text{si } n_1 > n_2 \end{cases}$

Domaine des intervalles, opérations arithmétiques abstraites

- $n^\sharp = \alpha(\{ n \}) = [\![n, n]\!]$
- $\textbf{rand}^\sharp(n_1, n_2) = \alpha([\![n_1, n_2]\!]) = \begin{cases} [\![n_1, n_2]\!] & \text{si } n_1 \leqslant n_2 \\ \bot & \text{si } n_1 > n_2 \end{cases}$
- $x^\sharp +^\sharp y^\sharp = \alpha\left(\left\{x + y \;\middle|\; x \in \gamma(x^\sharp), y \in \gamma(y^\sharp)\right\}\right) =$

$$\begin{cases} [\![a + c, b + d]\!] & \text{avec } x^\sharp = [\![a, b]\!] \text{ et } y^\sharp = [\![c, d]\!] \\ \bot & \text{si } x^\sharp = \bot \text{ ou } y^\sharp = \bot \end{cases}$$

- ...

Domaine des intervalles, opérations arithmétiques abstraites (suite et fin)

Exercice

- Donner la soustraction d'intervalles.
- Donner la multiplication d'intervalles.

Domaine des intervalles, opérations arithmétiques abstraites (suite et fin)

Exercice

- Donner la soustraction d'intervalles.
  $x^\sharp -^\sharp y^\sharp = \alpha\left(\left\{x - y \;\middle|\; x \in \gamma(x^\sharp), y \in \gamma(y^\sharp)\right\}\right) =$

$$\begin{cases} [\![a - d, b - c]\!] & \text{avec } x^\sharp = [\![a, b]\!] \text{ et } y^\sharp = [\![c, d]\!] \\ \bot & \text{si } x^\sharp = \bot \text{ ou } y^\sharp = \bot \end{cases}$$

- Donner la multiplication d'intervalles.

Domaine des intervalles, opérations arithmétiques abstraites (suite et fin)

Exercice

- Donner la soustraction d'intervalles.
  $x^\sharp -^\sharp y^\sharp = \alpha\left(\left\{x-y \;\middle|\; x\in\gamma(x^\sharp), y\in\gamma(y^\sharp)\right\}\right) =$

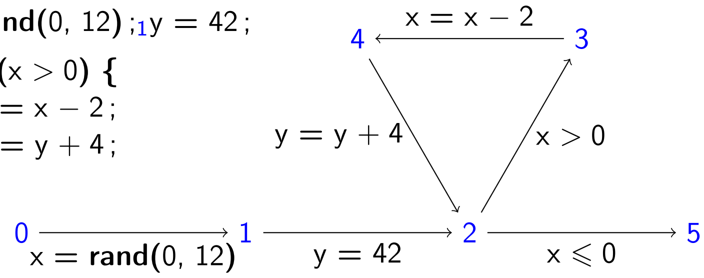
$$\begin{cases} [\![a-d, b-c]\!] & \text{avec } x^\sharp = [\![a,b]\!] \text{ et } y^\sharp=[\![c,d]\!] \\ \bot & \text{si } x^\sharp=\bot \text{ ou } y^\sharp = \bot\end{cases}$$

- Donner la multiplication d'intervalles.
  $x^\sharp \times^\sharp y^\sharp = \alpha\left(\left\{x\times y \;\middle|\; x\in\gamma(x^\sharp), y\in\gamma(y^\sharp)\right\}\right) =$

$$\begin{cases} [\![\min(ab,ac,ad,bd), \max(ab,ac,ad,bd)]\!] & \text{avec}\ldots \\ \bot & \text{si}\ldots\end{cases}$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

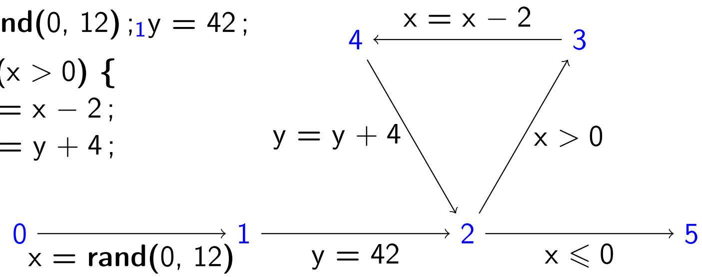
$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$



$$\begin{aligned}
R_0^{\sharp\, i+1} &= \top\\
R_1^{\sharp\, i+1} &= R_0^{\sharp\, i+1}[x \mapsto [\![0,12]\!]]\\
R_2^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i+1}[y \mapsto [\![42,42]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}}\\
&\quad R_4^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\, i}(y) +^\sharp [\![4,4]\!]\right]\\
R_3^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x)\right.\\
&\qquad \left.\sqcap^\sharp [\![1,+\infty[\![\right]\\
R_4^{\sharp\, i+1} &= R_3^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(x) -^\sharp [\![2,2]\!]\right]\\
R_5^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x)\right.\\
&\qquad \left.\sqcap^\sharp]\!]-\infty,0]\!]\right]
\end{aligned}$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

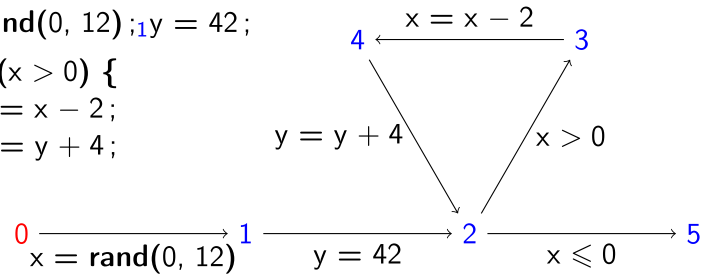


$$\begin{aligned}
R_0^{\sharp\, i+1} &= \top\\
R_1^{\sharp\, i+1} &= R_0^{\sharp\, i+1}[x \mapsto [\![0,12]\!]]\\
R_2^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i+1}[y \mapsto [\![42,42]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}}\\
&\quad R_4^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\, i}(y) +^\sharp [\![4,4]\!]\right]\\
R_3^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x)\right.\\
&\qquad \left.\sqcap^\sharp [\![1,+\infty[\![\right]\\
R_4^{\sharp\, i+1} &= R_3^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(x) -^\sharp [\![2,2]\!]\right]\\
R_5^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x)\right.\\
&\qquad \left.\sqcap^\sharp]\!]-\infty,0]\!]\right]
\end{aligned}$$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$
0	$(\bot,\bot)$		
1	$(\bot,\bot)$		
2	$(\bot,\bot)$		
3	$(\bot,\bot)$		
4	$(\bot,\bot)$		
5	$(\bot,\bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

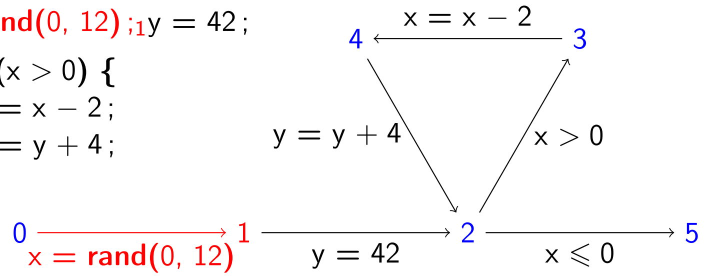


$$\begin{aligned}
R_0^{\sharp\, i+1} &= \top\\
R_1^{\sharp\, i+1} &= R_0^{\sharp\, i+1}[x \mapsto [\![0,12]\!]]\\
R_2^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i+1}[y \mapsto [\![42,42]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}}\\
&\quad R_4^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\, i}(y) +^\sharp [\![4,4]\!]\right]\\
R_3^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x)\right.\\
&\qquad \left.\sqcap^\sharp [\![1,+\infty[\![\right]\\
R_4^{\sharp\, i+1} &= R_3^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(x) -^\sharp [\![2,2]\!]\right]\\
R_5^{\sharp\, i+1} &= R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x)\right.\\
&\qquad \left.\sqcap^\sharp]\!]-\infty,0]\!]\right]
\end{aligned}$$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$		
2	$(\bot,\bot)$		
3	$(\bot,\bot)$		
4	$(\bot,\bot)$		
5	$(\bot,\bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ; $_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

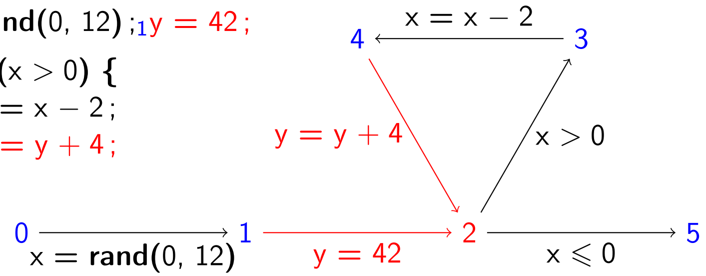


$R_0^{\sharp\, i+1} = \top$
$R_1^{\sharp\, i+1} = R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto [\![0,12]\!]]$
$R_2^{\sharp\, i+1} = R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto [\![42,42]\!]] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\, i}(y) +^{\sharp} [\![4,4]\!]\right]$
$R_3^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x) \sqcap^{\sharp} [\![1,+\infty[\![\right]$
$R_4^{\sharp\, i+1} = R_3^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(x) -^{\sharp} [\![2,2]\!]\right]$
$R_5^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x) \sqcap^{\sharp}]\!]-\infty,0]\!]\right]$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$	$([\![0,12]\!],\top)$	
2	$(\bot,\bot)$		
3	$(\bot,\bot)$		
4	$(\bot,\bot)$		
5	$(\bot,\bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ; $_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

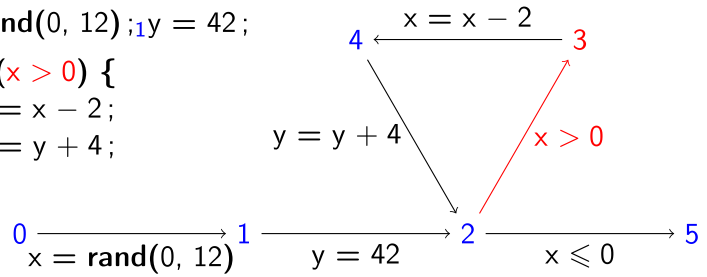


$R_0^{\sharp\, i+1} = \top$
$R_1^{\sharp\, i+1} = R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto [\![0,12]\!]]$
$R_2^{\sharp\, i+1} = R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto [\![42,42]\!]] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\, i}(y) +^{\sharp} [\![4,4]\!]\right]$
$R_3^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x) \sqcap^{\sharp} [\![1,+\infty[\![\right]$
$R_4^{\sharp\, i+1} = R_3^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(x) -^{\sharp} [\![2,2]\!]\right]$
$R_5^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x) \sqcap^{\sharp}]\!]-\infty,0]\!]\right]$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$	$([\![0,12]\!],\top)$	
2	$(\bot,\bot)$	$([\![0,12]\!],\{42\})$	
3	$(\bot,\bot)$		
4	$(\bot,\bot)$		
5	$(\bot,\bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ; $_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

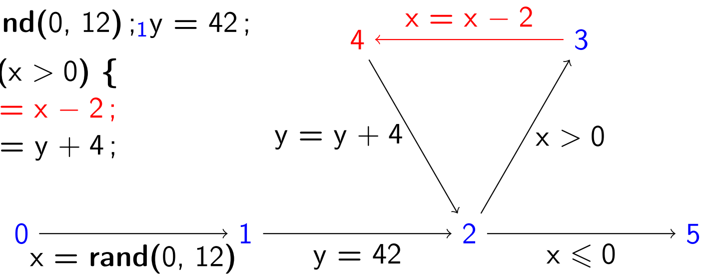


$R_0^{\sharp\, i+1} = \top$
$R_1^{\sharp\, i+1} = R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto [\![0,12]\!]]$
$R_2^{\sharp\, i+1} = R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto [\![42,42]\!]] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\, i}(y) +^{\sharp} [\![4,4]\!]\right]$
$R_3^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x) \sqcap^{\sharp} [\![1,+\infty[\![\right]$
$R_4^{\sharp\, i+1} = R_3^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(x) -^{\sharp} [\![2,2]\!]\right]$
$R_5^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x) \sqcap^{\sharp}]\!]-\infty,0]\!]\right]$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$	$([\![0,12]\!],\top)$	
2	$(\bot,\bot)$	$([\![0,12]\!],\{42\})$	
3	$(\bot,\bot)$	$([\![1,12]\!],\{42\})$	
4	$(\bot,\bot)$		
5	$(\bot,\bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ; $_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

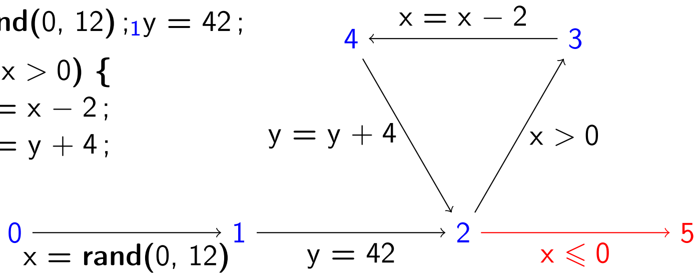


$R_0^{\sharp\, i+1} = \top$
$R_1^{\sharp\, i+1} = R_0^{\sharp\, i+1}\,[x \mapsto [\![0,12]\!]]$
$R_2^{\sharp\, i+1} = R_1^{\sharp\, i+1}\,[y \mapsto [\![42,42]\!]] \sqcup^{\sharp}_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp\, i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\, i}(y) +^{\sharp} [\![4,4]\!]\right]$
$R_3^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x) \sqcap^{\sharp} [\![1,+\infty[\![\right]$
$R_4^{\sharp\, i+1} = R_3^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\, i+1}(x) -^{\sharp} [\![2,2]\!]\right]$
$R_5^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\, i+1}(x) \sqcap^{\sharp}]\!]-\infty,0]\!]\right]$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$	$([\![0,12]\!],\top)$	
2	$(\bot,\bot)$	$([\![0,12]\!],\{42\})$	
3	$(\bot,\bot)$	$([\![1,12]\!],\{42\})$	
4	$(\bot,\bot)$	$([\![-1,10]\!],\{42\})$	
5	$(\bot,\bot)$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

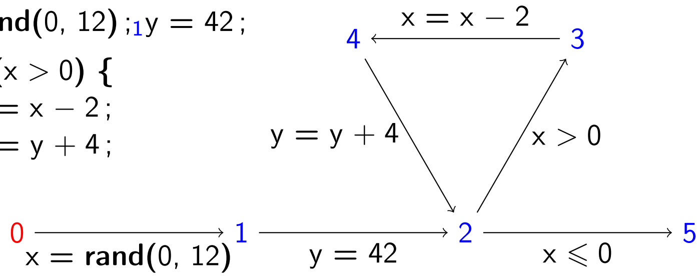


$R_0^{\sharp i+1} = \top$
$R_1^{\sharp i+1} = R_0^{\sharp i+1}\,[x \mapsto [\![0,12]\!]]$
$R_2^{\sharp i+1} = R_1^{\sharp i+1}\,[y \mapsto [\![42,42]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp i}(y) +^\sharp [\![4,4]\!]\right]$
$R_3^{\sharp i+1} = R_2^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp i+1}(x) \sqcap^\sharp [\![1,+\infty[\![\right]$
$R_4^{\sharp i+1} = R_3^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp i+1}(x) -^\sharp [\![2,2]\!]\right]$
$R_5^{\sharp i+1} = R_2^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp i+1}(x) \sqcap^\sharp]\!]-\infty,0]\!]\right]$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	
1	$(\bot,\bot)$	$([\![0,12]\!],\top)$	
2	$(\bot,\bot)$	$([\![0,12]\!],\{42\})$	
3	$(\bot,\bot)$	$([\![1,12]\!],\{42\})$	
4	$(\bot,\bot)$	$([\![-1,10]\!],\{42\})$	
5	$(\bot,\bot)$	$(\{0\},\{42\})$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

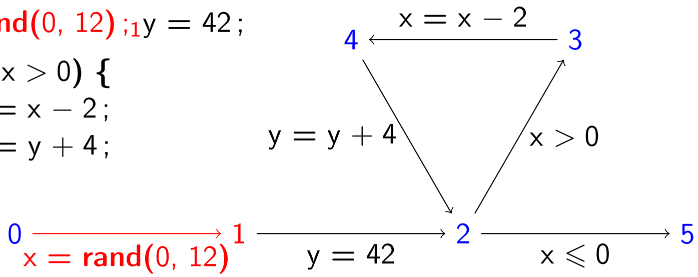


$R_0^{\sharp i+1} = \top$
$R_1^{\sharp i+1} = R_0^{\sharp i+1}\,[x \mapsto [\![0,12]\!]]$
$R_2^{\sharp i+1} = R_1^{\sharp i+1}\,[y \mapsto [\![42,42]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp i}(y) +^\sharp [\![4,4]\!]\right]$
$R_3^{\sharp i+1} = R_2^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp i+1}(x) \sqcap^\sharp [\![1,+\infty[\![\right]$
$R_4^{\sharp i+1} = R_3^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp i+1}(x) -^\sharp [\![2,2]\!]\right]$
$R_5^{\sharp i+1} = R_2^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp i+1}(x) \sqcap^\sharp]\!]-\infty,0]\!]\right]$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$([\![0,12]\!],\top)$	
2	$(\bot,\bot)$	$([\![0,12]\!],\{42\})$	
3	$(\bot,\bot)$	$([\![1,12]\!],\{42\})$	
4	$(\bot,\bot)$	$([\![-1,10]\!],\{42\})$	
5	$(\bot,\bot)$	$(\{0\},\{42\})$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

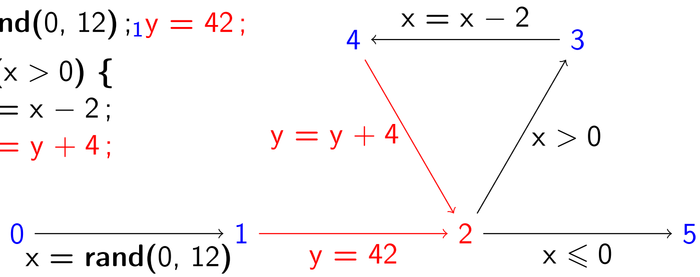


$R_0^{\sharp i+1} = \top$
$R_1^{\sharp i+1} = R_0^{\sharp i+1}\,[x \mapsto [\![0,12]\!]]$
$R_2^{\sharp i+1} = R_1^{\sharp i+1}\,[y \mapsto [\![42,42]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp i}(y) +^\sharp [\![4,4]\!]\right]$
$R_3^{\sharp i+1} = R_2^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp i+1}(x) \sqcap^\sharp [\![1,+\infty[\![\right]$
$R_4^{\sharp i+1} = R_3^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp i+1}(x) -^\sharp [\![2,2]\!]\right]$
$R_5^{\sharp i+1} = R_2^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp i+1}(x) \sqcap^\sharp]\!]-\infty,0]\!]\right]$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$([\![0,12]\!],\top)$	$([\![0,12]\!],\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$([\![0,12]\!],\{42\})$	
3	$(\bot,\bot)$	$([\![1,12]\!],\{42\})$	
4	$(\bot,\bot)$	$([\![-1,10]\!],\{42\})$	
5	$(\bot,\bot)$	$(\{0\},\{42\})$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

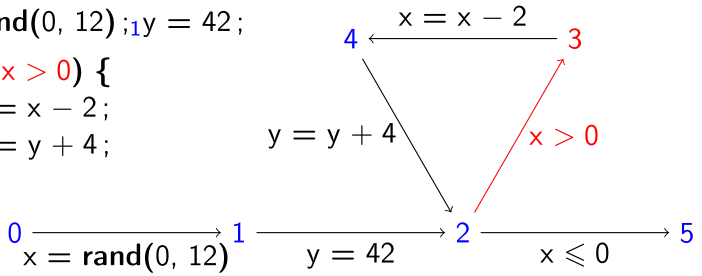


$R_0^{\sharp i+1} = \top$
$R_1^{\sharp i+1} = R_0^{\sharp i+1}\,[x \mapsto [\![0,12]\!]]$
$R_2^{\sharp i+1} = R_1^{\sharp i+1}\,[y \mapsto [\![42,42]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp i}(y) +^\sharp [\![4,4]\!]\right]$
$R_3^{\sharp i+1} = R_2^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp i+1}(x) \sqcap^\sharp [\![1,+\infty[\![\right]$
$R_4^{\sharp i+1} = R_3^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp i+1}(x) -^\sharp [\![2,2]\!]\right]$
$R_5^{\sharp i+1} = R_2^{\sharp i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp i+1}(x) \sqcap^\sharp]\!]-\infty,0]\!]\right]$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$([\![0,12]\!],\top)$	$([\![0,12]\!],\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$([\![0,12]\!],\{42\})$	$([\![-1,12]\!],[\![42,46]\!])$
3	$(\bot,\bot)$	$([\![1,12]\!],\{42\})$	
4	$(\bot,\bot)$	$([\![-1,10]\!],\{42\})$	
5	$(\bot,\bot)$	$(\{0\},\{42\})$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

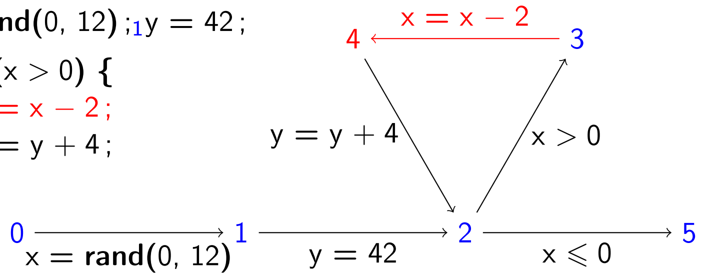


$$R_0^{\sharp\,i+1} = \top$$
$$R_1^{\sharp\,i+1} = R_0^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto \llbracket 0,12\rrbracket\right]$$
$$R_2^{\sharp\,i+1} = R_1^{\sharp\,i+1}\left[y \mapsto \llbracket 42,42\rrbracket\right] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp \llbracket 4,4\rrbracket\right]$$
$$R_3^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp \llbracket 1,+\infty\llbracket\right]$$
$$R_4^{\sharp\,i+1} = R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp \llbracket 2,2\rrbracket\right]$$
$$R_5^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp \rrbracket -\infty,0\rrbracket\right]$$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\llbracket 0,12\rrbracket,\top)$	$(\llbracket 0,12\rrbracket,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\llbracket 0,12\rrbracket,\{42\})$	$(\llbracket -1,12\rrbracket,\llbracket 42,46\rrbracket)$
3	$(\bot,\bot)$	$(\llbracket 1,12\rrbracket,\{42\})$	$(\llbracket 1,12\rrbracket,\llbracket 42,46\rrbracket)$
4	$(\bot,\bot)$	$(\llbracket -1,10\rrbracket,\{42\})$	
5	$(\bot,\bot)$	$(\{0\},\{42\})$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

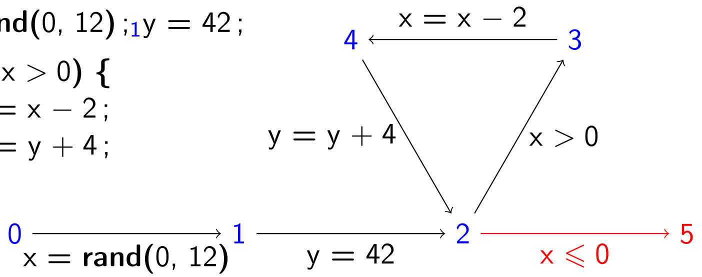


$$R_0^{\sharp\,i+1} = \top$$
$$R_1^{\sharp\,i+1} = R_0^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto \llbracket 0,12\rrbracket\right]$$
$$R_2^{\sharp\,i+1} = R_1^{\sharp\,i+1}\left[y \mapsto \llbracket 42,42\rrbracket\right] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp \llbracket 4,4\rrbracket\right]$$
$$R_3^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp \llbracket 1,+\infty\llbracket\right]$$
$$R_4^{\sharp\,i+1} = R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp \llbracket 2,2\rrbracket\right]$$
$$R_5^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp \rrbracket -\infty,0\rrbracket\right]$$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\llbracket 0,12\rrbracket,\top)$	$(\llbracket 0,12\rrbracket,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\llbracket 0,12\rrbracket,\{42\})$	$(\llbracket -1,12\rrbracket,\llbracket 42,46\rrbracket)$
3	$(\bot,\bot)$	$(\llbracket 1,12\rrbracket,\{42\})$	$(\llbracket 1,12\rrbracket,\llbracket 42,46\rrbracket)$
4	$(\bot,\bot)$	$(\llbracket -1,10\rrbracket,\{42\})$	$(\llbracket -1,10\rrbracket,\llbracket 42,46\rrbracket)$
5	$(\bot,\bot)$	$(\{0\},\{42\})$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$

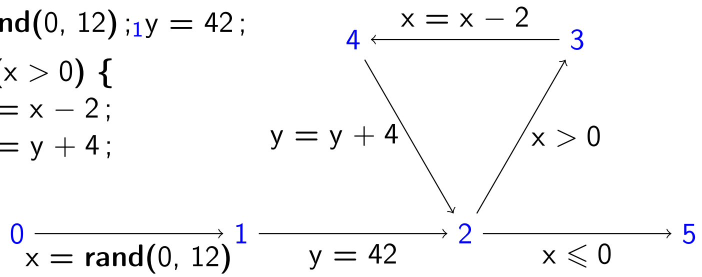


$$R_0^{\sharp\,i+1} = \top$$
$$R_1^{\sharp\,i+1} = R_0^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto \llbracket 0,12\rrbracket\right]$$
$$R_2^{\sharp\,i+1} = R_1^{\sharp\,i+1}\left[y \mapsto \llbracket 42,42\rrbracket\right] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp \llbracket 4,4\rrbracket\right]$$
$$R_3^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp \llbracket 1,+\infty\llbracket\right]$$
$$R_4^{\sharp\,i+1} = R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp \llbracket 2,2\rrbracket\right]$$
$$R_5^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp \rrbracket -\infty,0\rrbracket\right]$$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\llbracket 0,12\rrbracket,\top)$	$(\llbracket 0,12\rrbracket,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\llbracket 0,12\rrbracket,\{42\})$	$(\llbracket -1,12\rrbracket,\llbracket 42,46\rrbracket)$
3	$(\bot,\bot)$	$(\llbracket 1,12\rrbracket,\{42\})$	$(\llbracket 1,12\rrbracket,\llbracket 42,46\rrbracket)$
4	$(\bot,\bot)$	$(\llbracket -1,10\rrbracket,\{42\})$	$(\llbracket -1,10\rrbracket,\llbracket 42,46\rrbracket)$
5	$(\bot,\bot)$	$(\{0\},\{42\})$	$(\llbracket -1,0\rrbracket,\llbracket 42,46\rrbracket)$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = **rand**(0, 12) ;$_1$y = 42 ;
while $_2$(x > 0) {
  $_3$x = x − 2 ;
  $_4$y = y + 4 ;
}$_5$



$$R_0^{\sharp\,i+1} = \top$$
$$R_1^{\sharp\,i+1} = R_0^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto \llbracket 0,12\rrbracket\right]$$
$$R_2^{\sharp\,i+1} = R_1^{\sharp\,i+1}\left[y \mapsto \llbracket 42,42\rrbracket\right] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp\,i}\left[y \mapsto R_4^{\sharp\,i}(y) +^\sharp \llbracket 4,4\rrbracket\right]$$
$$R_3^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp \llbracket 1,+\infty\llbracket\right]$$
$$R_4^{\sharp\,i+1} = R_3^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_3^{\sharp\,i+1}(x) -^\sharp \llbracket 2,2\rrbracket\right]$$
$$R_5^{\sharp\,i+1} = R_2^{\sharp\,i+1}\left[x \mapsto R_2^{\sharp\,i+1}(x) \sqcap^\sharp \rrbracket -\infty,0\rrbracket\right]$$

l	$R_l^{\sharp 0}$	$R_l^{\sharp 1}$	$R_l^{\sharp 2}$
0	$(\bot,\bot)$	$(\top,\top)$	$(\top,\top)$
1	$(\bot,\bot)$	$(\llbracket 0,12\rrbracket,\top)$	$(\llbracket 0,12\rrbracket,\top)$
2	$(\bot,\bot)$	$(\llbracket 0,12\rrbracket,\{42\})$	$(\llbracket -1,12\rrbracket,\llbracket 42,46\rrbracket)$
3	$(\bot,\bot)$	$(\llbracket 1,12\rrbracket,\{42\})$	$(\llbracket 1,12\rrbracket,\llbracket 42,46\rrbracket)$
4	$(\bot,\bot)$	$(\llbracket -1,10\rrbracket,\{42\})$	$(\llbracket -1,10\rrbracket,\llbracket 42,46\rrbracket)$
5	$(\bot,\bot)$	$(\{0\},\{42\})$	$(\llbracket -1,0\rrbracket,\llbracket 42,46\rrbracket)$

Le point fixe est encore loin !

Correction et terminaison

Théorème (correction, *encore le même*)

La sémantique abstraite est une *sur-approximation correcte* de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_l \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_l^\sharp\right)$$

Correction et terminaison

Théorème (correction, *encore le même*)

La sémantique abstraite est une *sur-approximation correcte* de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_l \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_l^\sharp\right)$$

Remarques

- De manière générale, ca ne termine pas !
  Car le treillis a des chaînes croissantes infinies (ex. $(\llbracket 0, n \rrbracket)_{n \in \mathbb{N}}$).

Correction et terminaison

Théorème (correction, *encore le même*)

La sémantique abstraite est une *sur-approximation correcte* de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_l \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_l^\sharp\right)$$

Remarques

- De manière générale, ca ne termine pas !
  Car le treillis a des chaînes croissantes infinies (ex. $(\llbracket 0, n \rrbracket)_{n \in \mathbb{N}}$).
- Et quand bien même ça termine, ça peut être long...

Accélération de convergence

On va donc intercaler entre chaque itération un *élargissement* (widening en anglais) qui va empêcher de suivre des chaînes croissantes infinies en « sautant » plus haut.

Accélération de convergence

On va donc intercaler entre chaque itération un *élargissement* (widening en anglais) qui va empêcher de suivre des chaînes croissantes infinies en « sautant » plus haut.

Définition (élargissement)

Un élargissement ∇ est une opération binaire ($\nabla : \mathcal{D}^\sharp \times \mathcal{D}^\sharp \to \mathcal{D}^\sharp$) vérifiant

- $\forall x^\sharp, y^\sharp, \quad x^\sharp \sqcup^\sharp y^\sharp \; \sqsubseteq^\sharp \; x^\sharp \nabla y^\sharp$;

Accélération de convergence

On va donc intercaler entre chaque itération un *élargissement* (widening en anglais) qui va empêcher de suivre des chaînes croissantes infinies en « sautant » plus haut.

Définition (élargissement)

Un élargissement ∇ est une opération binaire ($\nabla : \mathcal{D}^\sharp \times \mathcal{D}^\sharp \to \mathcal{D}^\sharp$) vérifiant

- $\forall x^\sharp, y^\sharp, \quad x^\sharp \sqcup^\sharp y^\sharp \; \sqsubseteq^\sharp \; x^\sharp \nabla y^\sharp$;
- pour toute suite $\left(x_n^\sharp\right)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite croissante

$$\begin{cases} y_0^\sharp & = & x_0^\sharp \\ y_{i+1}^\sharp & = & y_i^\sharp \nabla x_{i+1}^\sharp \end{cases}$$

  est stationnaire.

Élargissement, illustration

$$\begin{array}{c} R^\sharp = {F^\sharp}^N(\bot) = \mathrm{lfp}\ F^\sharp \\ \uparrow \\ \vdots \\ \uparrow \\ {R^\sharp}^2 = F^\sharp\left({R^\sharp}^1\right) = {F^\sharp}^2(\bot) \\ \uparrow \\ {R^\sharp}^1 = F^\sharp\left({R^\sharp}^0\right) = F^\sharp(\bot) \\ \uparrow \\ {R^\sharp}^0 = \bot \end{array}$$

$F^\sharp$ stationnaire

Élargissement, illustration

$$\begin{array}{c} R^\sharp = {F^\sharp}^N(\bot) = \mathrm{lfp}\ F^\sharp \\ \uparrow \\ \vdots \\ \uparrow \\ {R^\sharp}^2 = F^\sharp\left({R^\sharp}^1\right) = {F^\sharp}^2(\bot) \\ \uparrow \\ {R^\sharp}^1 = F^\sharp\left({R^\sharp}^0\right) = F^\sharp(\bot) \\ \uparrow \\ {R^\sharp}^0 = \bot \end{array}$$

$F^\sharp$ stationnaire

$$\begin{array}{c} R^\sharp = R^\sharp \nabla F^\sharp(R^\sharp) \\ \mathrm{lfp}\ F^\sharp \\ \vdots \\ {R^\sharp}^2 = {R^\sharp}^1 \nabla F^\sharp\left({R^\sharp}^1\right) \\ {R^\sharp}^1 = {R^\sharp}^0 \nabla F^\sharp\left({R^\sharp}^0\right) \\ {R^\sharp}^0 = \bot \end{array}$$

$F^\sharp$ non stationnaire, élargissement

Élargissement, illustration

$$
\begin{array}{c}
R^\sharp = {F^\sharp}^N(\bot) = \operatorname{lfp} F^\sharp \\
\uparrow \\
\vdots \\
\uparrow \\
{R^\sharp}^2 = F^\sharp\left({R^\sharp}^1\right) = {F^\sharp}^2(\bot) \\
\uparrow \\
{R^\sharp}^1 = F^\sharp\left({R^\sharp}^0\right) = F^\sharp(\bot) \\
\uparrow \\
{R^\sharp}^0 = \bot
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
R^\sharp = R^\sharp \triangledown F^\sharp(R^\sharp) \\
\operatorname{lfp} F^\sharp \\
\vdots \\
{R^\sharp}^2 = {R^\sharp}^1 \triangledown F^\sharp\left({R^\sharp}^1\right) \\
{R^\sharp}^1 = {R^\sharp}^0 \triangledown F^\sharp\left({R^\sharp}^0\right) \\
{R^\sharp}^0 = \bot
\end{array}
$$

$F^\sharp$ stationnaire — $F^\sharp$ non stationnaire, élargissement

Remarque : $\operatorname{lfp} F^\sharp \sqsubseteq^\sharp R^\sharp$

On s'arrête avec $R^\sharp = R^\sharp \triangledown F^\sharp(R^\sharp)$ donc $F^\sharp(R^\sharp) \sqsubseteq^\sharp R^\sharp$ donc

$$\operatorname{lfp} F^\sharp = \bigsqcap^\sharp \left\{ x \;\middle|\; F^\sharp(x) \sqsubseteq^\sharp x \right\} \sqsubseteq^\sharp R^\sharp.$$

Exemple d'élargissement

Si les bornes de l'intervalle sont stables, on les conserve, sinon on les remplace par ∞.

Exemple d'élargissement

Si les bornes de l'intervalle sont stables, on les conserve, sinon on les remplace par ∞.

Définition

$$
x^\sharp \triangledown y^\sharp = \begin{cases}
[\![a, b]\!] & \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!], y^\sharp = [\![c, d]\!], c \geqslant a, d \leqslant b \\
[\![a, +\infty[\![& \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!], y^\sharp = [\![c, d]\!], c \geqslant a, d > b \\
]\!]-\infty, b]\!] & \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!], y^\sharp = [\![c, d]\!], c < a, d \leqslant b \\
]\!]-\infty, +\infty[\![& \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!], y^\sharp = [\![c, d]\!], c < a, d > b \\
y^\sharp & \text{si } x^\sharp = \bot \\
x^\sharp & \text{si } y^\sharp = \bot
\end{cases}
$$

Exemple d'élargissement

Si les bornes de l'intervalle sont stables, on les conserve, sinon on les remplace par ∞.

Définition

$$
x^\sharp \triangledown y^\sharp = \begin{cases}
[\![a, b]\!] & \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!], y^\sharp = [\![c, d]\!], c \geqslant a, d \leqslant b \\
[\![a, +\infty[\![& \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!], y^\sharp = [\![c, d]\!], c \geqslant a, d > b \\
]\!]-\infty, b]\!] & \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!], y^\sharp = [\![c, d]\!], c < a, d \leqslant b \\
]\!]-\infty, +\infty[\![& \text{si } x^\sharp = [\![a, b]\!], y^\sharp = [\![c, d]\!], c < a, d > b \\
y^\sharp & \text{si } x^\sharp = \bot \\
x^\sharp & \text{si } y^\sharp = \bot
\end{cases}
$$

Exemple

- $[\![0, 2]\!] \triangledown [\![0, 1]\!] = [\![0, 2]\!]$

Exemple d'élargissement

Si les bornes de l'intervalle sont stables, on les conserve, sinon on les remplace par ∞.

Définition

$$x^\sharp \triangledown y^\sharp = \begin{cases} [\![a,b]\!] & \text{si } x^\sharp = [\![a,b]\!], y^\sharp = [\![c,d]\!], c \geqslant a, d \leqslant b \\ [\![a,+\infty[\![& \text{si } x^\sharp = [\![a,b]\!], y^\sharp = [\![c,d]\!], c \geqslant a, d > b \\ ]\!]-\infty,b]\!] & \text{si } x^\sharp = [\![a,b]\!], y^\sharp = [\![c,d]\!], c < a, d \leqslant b \\ ]\!]-\infty,+\infty[\![& \text{si } x^\sharp = [\![a,b]\!], y^\sharp = [\![c,d]\!], c < a, d > b \\ y^\sharp & \text{si } x^\sharp = \bot \\ x^\sharp & \text{si } y^\sharp = \bot \end{cases}$$

Exemple

- $[\![0,2]\!] \triangledown [\![0,1]\!] = [\![0,2]\!]$
- $[\![0,1]\!] \triangledown [\![0,2]\!] = [\![0,+\infty[\![$

Exemple d'élargissement

Si les bornes de l'intervalle sont stables, on les conserve, sinon on les remplace par ∞.

Définition

$$x^\sharp \triangledown y^\sharp = \begin{cases} [\![a,b]\!] & \text{si } x^\sharp = [\![a,b]\!], y^\sharp = [\![c,d]\!], c \geqslant a, d \leqslant b \\ [\![a,+\infty[\![& \text{si } x^\sharp = [\![a,b]\!], y^\sharp = [\![c,d]\!], c \geqslant a, d > b \\ ]\!]-\infty,b]\!] & \text{si } x^\sharp = [\![a,b]\!], y^\sharp = [\![c,d]\!], c < a, d \leqslant b \\ ]\!]-\infty,+\infty[\![& \text{si } x^\sharp = [\![a,b]\!], y^\sharp = [\![c,d]\!], c < a, d > b \\ y^\sharp & \text{si } x^\sharp = \bot \\ x^\sharp & \text{si } y^\sharp = \bot \end{cases}$$

Exemple

- $[\![0,2]\!] \triangledown [\![0,1]\!] = [\![0,2]\!]$
- $[\![0,1]\!] \triangledown [\![0,2]\!] = [\![0,+\infty[\![$ ($\triangledown$ n'est pas symétrique)

Exemple d'élargissement (suite et fin)

Exercice

Reprendre le calcul précédent en remplaçant l'equation de $R_2^\sharp$ par

$$R_2^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i} \triangledown_{\mathrm{nr}} \left(R_1^{\sharp\, i+1} [y \mapsto \{42\}] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp\, i} \left[y \mapsto R_4^{\sharp\, i}(y) +^\sharp \{4\} \right] \right)$$

(ça devrait s'arrêter après trois étapes).

Exemple d'élargissement (suite et fin)

Exercice

Reprendre le calcul précédent en remplaçant l'equation de $R_2^\sharp$ par

$$R_2^{\sharp\, i+1} = R_2^{\sharp\, i} \triangledown_{\mathrm{nr}} \left(R_1^{\sharp\, i+1} [y \mapsto \{42\}] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} R_4^{\sharp\, i} \left[y \mapsto R_4^{\sharp\, i}(y) +^\sharp \{4\} \right] \right)$$

(ça devrait s'arrêter après trois étapes).

Résultat

Après calcul on obtient :

$R_0^\sharp = \top_{\mathrm{nr}}$

$R_1^\sharp = ([\![0,12]\!], \top)$

$R_2^\sharp = (]\!]-\infty,12]\!], [\![42,+\infty[\![)$

$R_3^\sharp = ([\![1,12]\!], [\![42,+\infty[\![)$

$R_4^\sharp = ([\![-1,10]\!], [\![46,+\infty[\![)$

$R_5^\sharp = (]\!]-\infty,0]\!], [\![42,+\infty[\![)$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = 12 ;
while $_1$(x > 0) {
  $_2$ x = x − 1 ;
}$_3$

$$\begin{tikzcd} & & 2 \arrow[dl, bend right, "x = x - 1"'] \\ 0 \arrow[r, "x = 12"'] & 1 \arrow[ur, "x > 0"'] \arrow[r, "x \leqslant 0"'] & 3 \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} R_0^{\sharp\, i+1} &= \top \\ R_1^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i} \,\triangledown_{\mathrm{nr}} \Big(R_0^{\sharp\, i+1} [x \mapsto [\![12,12]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\ &\qquad R_2^{\sharp\, i} \big[y \mapsto R_2^{\sharp\, i}(x) -^\sharp [\![1,1]\!]\big]\Big) \\ R_3^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i+1} \Big[x \mapsto R_1^{\sharp\, i+1}(x) \\ &\qquad \sqcap^\sharp\,]\!]-\infty,0]\!]\Big] \end{aligned}$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = 12 ;
while $_1$(x > 0) {
  $_2$ x = x − 1 ;
}$_3$

$$\begin{tikzcd} & & 2 \arrow[dl, bend right, "x = x - 1"'] \\ 0 \arrow[r, "x = 12"'] & 1 \arrow[ur, "x > 0"'] \arrow[r, "x \leqslant 0"'] & 3 \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} R_0^{\sharp\, i+1} &= \top \\ R_1^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i} \,\triangledown_{\mathrm{nr}} \Big(R_0^{\sharp\, i+1} [x \mapsto [\![12,12]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\ &\qquad R_2^{\sharp\, i} \big[y \mapsto R_2^{\sharp\, i}(x) -^\sharp [\![1,1]\!]\big]\Big) \\ R_3^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i+1} \Big[x \mapsto R_1^{\sharp\, i+1}(x) \\ &\qquad \sqcap^\sharp\,]\!]-\infty,0]\!]\Big] \end{aligned}$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$\bot$			
1	$\bot$			
2	$\bot$			
3	$\bot$			

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = 12 ;
while $_1$(x > 0) {
  $_2$ x = x − 1 ;
}$_3$

$$\begin{tikzcd} & & 2 \arrow[dl, bend right, "x = x - 1"'] \\ 0 \arrow[r, "x = 12"'] & 1 \arrow[ur, "x > 0"'] \arrow[r, "x \leqslant 0"'] & 3 \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} R_0^{\sharp\, i+1} &= \top \\ R_1^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i} \,\triangledown_{\mathrm{nr}} \Big(R_0^{\sharp\, i+1} [x \mapsto [\![12,12]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\ &\qquad R_2^{\sharp\, i} \big[y \mapsto R_2^{\sharp\, i}(x) -^\sharp [\![1,1]\!]\big]\Big) \\ R_3^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i+1} \Big[x \mapsto R_1^{\sharp\, i+1}(x) \\ &\qquad \sqcap^\sharp\,]\!]-\infty,0]\!]\Big] \end{aligned}$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$\bot$	$\top$		
1	$\bot$	$[\![12,12]\!]$		
2	$\bot$	$[\![12,12]\!]$		
3	$\bot$	$\bot$		

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = 12 ;
while $_1$(x > 0) {
  $_2$ x = x − 1 ;
}$_3$

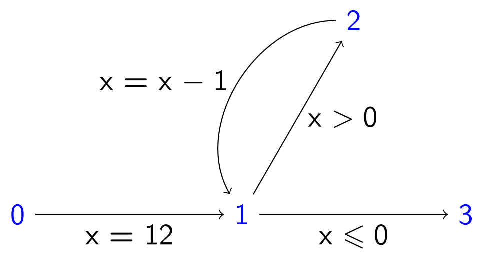
$$\begin{tikzcd} & & 2 \arrow[dl, bend right, "x = x - 1"'] \\ 0 \arrow[r, "x = 12"'] & 1 \arrow[ur, "x > 0"'] \arrow[r, "x \leqslant 0"'] & 3 \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} R_0^{\sharp\, i+1} &= \top \\ R_1^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i} \,\triangledown_{\mathrm{nr}} \Big(R_0^{\sharp\, i+1} [x \mapsto [\![12,12]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}} \\ &\qquad R_2^{\sharp\, i} \big[y \mapsto R_2^{\sharp\, i}(x) -^\sharp [\![1,1]\!]\big]\Big) \\ R_3^{\sharp\, i+1} &= R_1^{\sharp\, i+1} \Big[x \mapsto R_1^{\sharp\, i+1}(x) \\ &\qquad \sqcap^\sharp\,]\!]-\infty,0]\!]\Big] \end{aligned}$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$\bot$	$\top$	$\top$	
1	$\bot$	$[\![12,12]\!]$	$]\!]-\infty,12]\!]$	
2	$\bot$	$[\![12,12]\!]$	$[\![1,12]\!]$	
3	$\bot$	$\bot$	$]\!]-\infty,0]\!]$	

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = 12 ;
while $_1$(x > 0) {
  $_2$ x = x − 1 ;
}$_3$

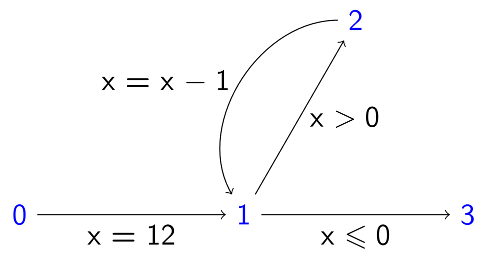


$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top\\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i}\,\triangledown_{\mathrm{nr}}\left(R_0^{\sharp\,i+1}\,[x\mapsto [\![12,12]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}}\right.\\
&\qquad \left. R_2^{\sharp\,i}\left[y\mapsto R_2^{\sharp\,i}(x) -^\sharp [\![1,1]\!]\right]\right)\\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\left[x\mapsto R_1^{\sharp\,i+1}(x)\right.\\
&\qquad \left.\sqcap^\sharp\,]\!]-\infty,0]\!]\right]
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
1	$\bot$	$[\![12,12]\!]$	$]\!]-\infty,12]\!]$	$]\!]-\infty,12]\!]$
2	$\bot$	$[\![12,12]\!]$	$[\![1,12]\!]$	$[\![1,12]\!]$
3	$\bot$	$\bot$	$]\!]-\infty,0]\!]$	$]\!]-\infty,0]\!]$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$_0$x = 12 ;
while $_1$(x > 0) {
  $_2$ x = x − 1 ;
}$_3$



$$
\begin{aligned}
R_0^{\sharp\,i+1} &= \top\\
R_1^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i}\,\triangledown_{\mathrm{nr}}\left(R_0^{\sharp\,i+1}\,[x\mapsto [\![12,12]\!]] \sqcup^\sharp_{\mathrm{nr}}\right.\\
&\qquad \left. R_2^{\sharp\,i}\left[y\mapsto R_2^{\sharp\,i}(x) -^\sharp [\![1,1]\!]\right]\right)\\
R_3^{\sharp\,i+1} &= R_1^{\sharp\,i+1}\left[x\mapsto R_1^{\sharp\,i+1}(x)\right.\\
&\qquad \left.\sqcap^\sharp\,]\!]-\infty,0]\!]\right]
\end{aligned}
$$

l	$R_l^{\sharp\,0}$	$R_l^{\sharp\,1}$	$R_l^{\sharp\,2}$	$R_l^{\sharp\,3}$
0	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
1	$\bot$	$[\![12,12]\!]$	$]\!]-\infty,12]\!]$	$]\!]-\infty,12]\!]$
2	$\bot$	$[\![12,12]\!]$	$[\![1,12]\!]$	$[\![1,12]\!]$
3	$\bot$	$\bot$	$]\!]-\infty,0]\!]$	$]\!]-\infty,0]\!]$

Pourtant $x = 0$ à la fin !

Regagner de la précision

- L'élargissement permet au calcul de terminer.
- Mais entraîne une perte de précision.
- On peut en regagner un peu par des itérations descendantes.

Regagner de la précision

- L'élargissement permet au calcul de terminer.
- Mais entraîne une perte de précision.
- On peut en regagner un peu par des itérations descendantes.

Définition (rétrécissement)

Un rétrécissement (narrowing en anglais) $\triangle$ est une opération binaire ($\triangle\colon \mathcal{D}^\sharp \times \mathcal{D}^\sharp \to \mathcal{D}^\sharp$) vérifiant

- $\forall x^\sharp, y^\sharp,\quad x^\sharp \sqcap^\sharp y^\sharp \sqsubseteq^\sharp x^\sharp \triangle y^\sharp \sqsubseteq^\sharp x^\sharp$;

Regagner de la précision

- L'élargissement permet au calcul de terminer.
- Mais entraîne une perte de précision.
- On peut en regagner un peu par des itérations descendantes.

Définition (rétrécissement)

Un rétrécissement (narrowing en anglais) $\vartriangle$ est une opération binaire ($\vartriangle : \mathcal{D}^\sharp \times \mathcal{D}^\sharp \to \mathcal{D}^\sharp$) vérifiant

- $\forall x^\sharp, y^\sharp, \quad x^\sharp \sqcap^\sharp y^\sharp \sqsubseteq^\sharp x^\sharp \vartriangle y^\sharp \sqsubseteq^\sharp x^\sharp$;
- pour toute suite $\left(x^\sharp\right)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite décroissante

$$\begin{cases} y_0^\sharp & = & x_0^\sharp \\ y_{i+1}^\sharp & = & y_i^\sharp \vartriangle x_{i+1}^\sharp \end{cases}$$

est stationnaire.

Rétrécissement, illustration

$R^\sharp = R^\sharp \triangledown F^\sharp(R^\sharp)$

$R^{\sharp\prime 1} = R^\sharp \vartriangle F^\sharp(R^\sharp)$

$\vdots$

$R^{\sharp\prime} = R^{\sharp\prime} \vartriangle F^\sharp\left(R^{\sharp\prime}\right)$

$\mathrm{lfp}\ F^\sharp$

$\vdots$

$R^{\sharp 0} = \bot$

Rétrécissement, illustration

$R^\sharp = R^\sharp \triangledown F^\sharp(R^\sharp)$

$R^{\sharp\prime 1} = R^\sharp \vartriangle F^\sharp(R^\sharp)$

$\vdots$

$R^{\sharp\prime} = R^{\sharp\prime} \vartriangle F^\sharp\left(R^{\sharp\prime}\right)$

$\mathrm{lfp}\ F^\sharp$

$\vdots$

$R^{\sharp 0} = \bot$

Rétrécissement, illustration

$R^\sharp = R^\sharp \triangledown F^\sharp(R^\sharp)$

$R^{\sharp\prime 1} = R^\sharp \vartriangle F^\sharp(R^\sharp)$

$\vdots$

$R^{\sharp\prime} = R^{\sharp\prime} \vartriangle F^\sharp\left(R^{\sharp\prime}\right)$

$\mathrm{lfp}\ F^\sharp$

$\vdots$

$R^{\sharp 0} = \bot$

Remarque : $\mathrm{lfp}\ F^\sharp \sqsubseteq^\sharp R^{\sharp\prime}$

On part de $R^\sharp \sqsupseteq^\sharp \mathrm{lfp}\ F^\sharp$
donc par croissance de $F^\sharp$,

$$F^\sharp(R^\sharp) \sqsupseteq^\sharp F^\sharp\left(\mathrm{lfp}\ F^\sharp\right) = \mathrm{lfp}\ F^\sharp$$

donc par propriété du rétrécissement $\vartriangle$,

$$R^{\sharp\prime 1} = R^\sharp \vartriangle F^\sharp(R^\sharp) \sqsupseteq^\sharp \mathrm{lfp}\ F^\sharp.$$

Finalement, par récurrence immédiate,

$$R^{\sharp\prime} \sqsupseteq \mathrm{lfp}\ F^\sharp.$$

Exemple de rétrécissement

Pour garantir la convergence, on ne raffine que les bornes infinies.

Exemple de rétrécissement

Pour garantir la convergence, on ne raffine que les bornes infinies.

Définition

$$x^\sharp \vartriangle y^\sharp = \begin{cases} [\![a, d]\!] & \text{si } x^\sharp = [\![a, +\infty[\![\,, y^\sharp = [\![c, d]\!] \\ [\![c, b]\!] & \text{si } x^\sharp =]\!]-\infty, b]\!]\,, y^\sharp = [\![c, d]\!] \\ [\![c, d]\!] & \text{si } x^\sharp =]\!]-\infty, +\infty[\![\,, y^\sharp = [\![c, d]\!] \\ x^\sharp & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple de rétrécissement

Pour garantir la convergence, on ne raffine que les bornes infinies.

Définition

$$x^\sharp \vartriangle y^\sharp = \begin{cases} [\![a, d]\!] & \text{si } x^\sharp = [\![a, +\infty[\![\,, y^\sharp = [\![c, d]\!] \\ [\![c, b]\!] & \text{si } x^\sharp =]\!]-\infty, b]\!]\,, y^\sharp = [\![c, d]\!] \\ [\![c, d]\!] & \text{si } x^\sharp =]\!]-\infty, +\infty[\![\,, y^\sharp = [\![c, d]\!] \\ x^\sharp & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple

- $[\![0, +\infty[\![\vartriangle [\![0, 1]\!] = [\![0, 1]\!]$

Exemple de rétrécissement

Pour garantir la convergence, on ne raffine que les bornes infinies.

Définition

$$x^\sharp \vartriangle y^\sharp = \begin{cases} [\![a, d]\!] & \text{si } x^\sharp = [\![a, +\infty[\![\,, y^\sharp = [\![c, d]\!] \\ [\![c, b]\!] & \text{si } x^\sharp =]\!]-\infty, b]\!]\,, y^\sharp = [\![c, d]\!] \\ [\![c, d]\!] & \text{si } x^\sharp =]\!]-\infty, +\infty[\![\,, y^\sharp = [\![c, d]\!] \\ x^\sharp & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple

- $[\![0, +\infty[\![\vartriangle [\![0, 1]\!] = [\![0, 1]\!]$
- $[\![0, 2]\!] \vartriangle [\![0, 1]\!] = [\![0, 2]\!]$

Exemple de rétrécissement (suite et fin)

Exercice

Raffiner le résultat du calcul précédent avec le rétrécissement (i.e. partir du point fixe $R_l^{\sharp 3}$ et itérer en remplaçant ∇_{nr} par $\triangle_{\mathrm{nr}}$ dans les equations).

Exemple de rétrécissement (suite et fin)

Exercice

Raffiner le résultat du calcul précédent avec le rétrécissement (i.e. partir du point fixe $R_l^{\sharp 3}$ et itérer en remplaçant ∇_{nr} par $\triangle_{\mathrm{nr}}$ dans les equations).

Résultat

Après calcul on obtient :
$R_0^\sharp = \top_{\mathrm{nr}}$
$R_1^\sharp = [\![0, 12]\!]$
$R_2^\sharp = [\![1, 12]\!]$
$R_3^\sharp = [\![0, 0]\!]$

Exemple de rétrécissement (suite et fin)

Exercice

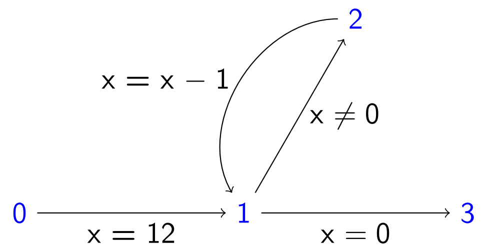
Raffiner le résultat du calcul précédent avec le rétrécissement (i.e. partir du point fixe $R_l^{\sharp 3}$ et itérer en remplaçant ∇_{nr} par $\triangle_{\mathrm{nr}}$ dans les equations).

Résultat

Après calcul on obtient :
$R_0^\sharp = \top_{\mathrm{nr}}$
$R_1^\sharp = [\![0, 12]\!]$
$R_2^\sharp = [\![1, 12]\!]$
$R_3^\sharp = [\![0, 0]\!]$ (on a maintenant bien $x = 0$)

Limitations du narrowing et élargissement à seuil

$_0$x = 12 ;
while $_1$(x $\neq$ 0) {
  $_2$ x = x − 1 ;
}$_3$



- Même avec le narrowing, on ne peut pas trouver $x \geqslant 0$.

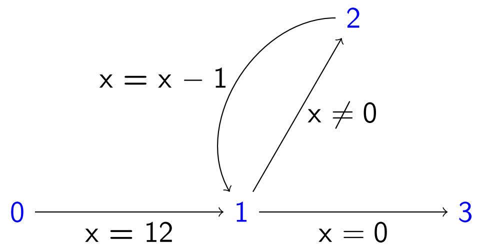
Limitations du narrowing et élargissement à seuil

$_0$x = 12 ;

while $_1$(x $\neq$ 0) **{**

  $_2$ x = x − 1 ;

}$_3$



- Même avec le narrowing, on ne peut pas trouver $x \geqslant 0$.
- Alors que le domaine des signes y parvient.

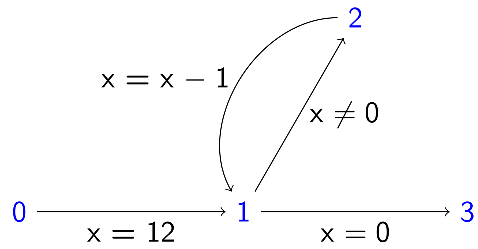
Limitations du narrowing et élargissement à seuil

$_0$x = 12 ;

while $_1$(x $\neq$ 0) **{**

  $_2$ x = x − 1 ;

}$_3$



- Même avec le narrowing, on ne peut pas trouver $x \geqslant 0$.
- Alors que le domaine des signes y parvient.
- On peut améliorer l'élargissement :
  au lieu de passer directement d'une borne positive à $-\infty$,
  on s'arrête d'abord à 0.
- C'est l'idée de l'élargissement à seuil : on peut ainsi utiliser n'importe quel nombre fini de constantes comme seuils.

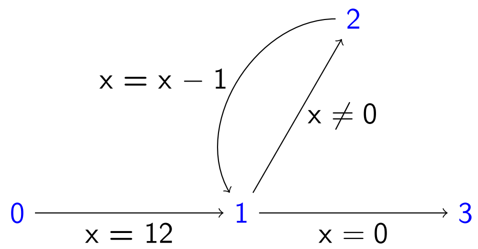
Limitations du narrowing et élargissement à seuil

$_0$x = 12 ;

while $_1$(x $\neq$ 0) **{**

  $_2$ x = x − 1 ;

}$_3$



- Même avec le narrowing, on ne peut pas trouver $x \geqslant 0$.
- Alors que le domaine des signes y parvient.
- On peut améliorer l'élargissement :
  au lieu de passer directement d'une borne positive à $-\infty$,
  on s'arrête d'abord à 0.
- C'est l'idée de l'élargissement à seuil : on peut ainsi utiliser n'importe quel nombre fini de constantes comme seuils.
- Encore faut il avoir le bon seuil (si on avait utilisé -1 ici, on n'aurait pas obtenu l'intervalle $[\![-1, 12]\!]$).