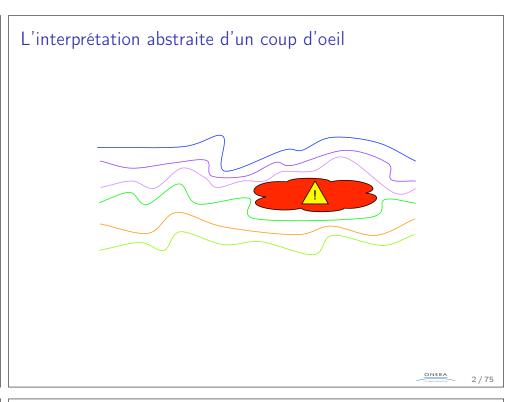
Validation par analyse statique Interprétation abstraite

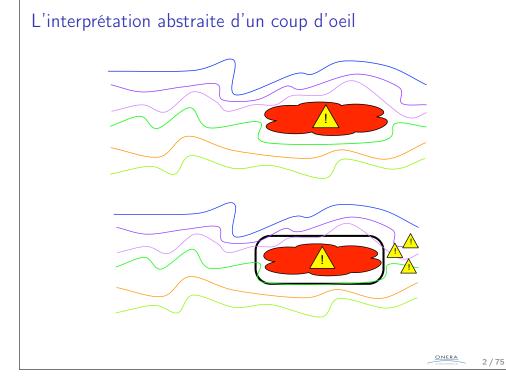
Pierre-Loïc Garoche

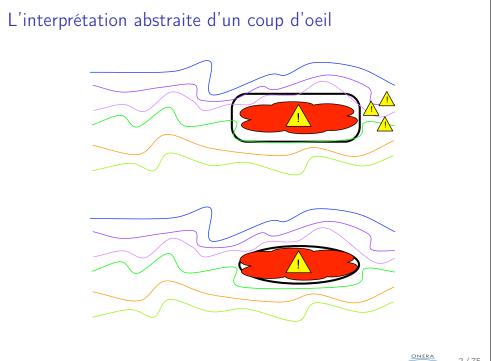
ONERA

Cours ISAE 2014-2015









Plan du cours sur l'interprétation abstraite

- 1. Introduction à l'interprétation abstraite
 - ► Sémantique collectrice d'un langage *C*-like
 - Abstractions numériques simples
 - domaine des signes
 - domaine des constantes
 - ▶ intervalles et accélération de convergence
- 2. Abstractions numériques relationnelles et bref état de l'art
 - domaine des polyèdres
 - aperçu d'autres analyses
 - quelques outils et applications

3 / 75

Analyse statique des propriétés des programmes impératifs Syntaxe

Sémantique Ordres partiel

Abstract interpretation - le Reader Digest

Abstraire la sémantique concrèté

Rappels sur la sémantique concrète Abstractions relationnelles ou non

Abstractions non relationnelles

Signes Constantes

ONERA 4/75

Un langage jouet

Syntaxe

```
stm ::= v = expr; | stm stm
| if (expr > 0) \{ stm \} else \{ stm \} 
| while (expr > 0) \{ stm \}
```

 $\mid expr + expr \mid expr - expr \mid expr imes expr \mid expr / expr$

 $v \in \mathbb{V}$, un ensemble de variables

 $n \in \mathbb{Z}$ (on ne manipule que des entiers)

 $rand(n_1, n_2)$ représente le choix aléatoire d'un entier entre n_1 et n_2 (sert à simuler une entrée).

Suite très inspirée du cours de A. Miné au MPRI.

ONERA 5 / 75

Un langage jouet (suite et fin)

Exemple

Remarques

- ▶ un langage très simple, sans fonctions, sans...
- ▶ mais représentatif d'un langage impératif comme C
- ▶ dont c'est d'ailleurs un sous ensemble
- et on peut tout calculer (c'est Turing-complet)

Analyse statique des propriétés des programmes impératifs

Syntaxe

Sémantique

Ordres partiels

Abstract interpretation - le Reader Digest

Abstraire la sémantique concrète

Rappels sur la sémantique concrète Abstractions relationnelles ou non

Abstractions non relationnelles

Signes

Constantes

ntervalles

Graphe de flot de contrôle

On va utiliser les graphes de flot de contrôle des programmes

Définition

Un graphe de flot de contrôle (L,A) est composé d'un ensemble de points de programme L, d'un point d'entrée $0 \in L$ et d'arêtes $A \subseteq L \times com \times L$ avec :

$$com ::= v = expr \mid expr > 0$$

ONERA 8/75

ONERA 7 / 75

Graphe de flot de contrôle

On va utiliser les graphes de flot de contrôle des programmes

Définition

Un graphe de flot de contrôle (L,A) est composé d'un ensemble de points de programme L, d'un point d'entrée $0 \in L$ et d'arêtes $A \subseteq L \times com \times L$ avec :

$$com ::= v = expr \mid expr > 0$$

Exemple

Sémantique concrète, expressions

Sémantique des expressions : $\llbracket e \rrbracket_{\mathrm{E}} : (\mathbb{V} \to \mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

ONERA

Sémantique concrète, expressions

Sémantique des expressions : $\llbracket e \rrbracket_{\mathrm{E}} : (\mathbb{V} \to \mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

Remarque: environnement

On nomme généralement environnement les fonctions $\rho: \mathbb{V} \to \mathbb{Z}$ qui associent une valeur à chaque variable.

Sémantique concrète, expressions (suite et fin)

Remarque : cas d'erreur

On peut rencontrer deux types d'erreur à l'exécution :

► rand
$$(n_1, n_2)$$
 avec $n1 > n2$:
 $[rand(n_1, n_2)]_{\mathbb{E}} = \{x \in \mathbb{Z} \mid n_1 \leqslant x \leqslant n_2\} = \emptyset;$

Sémantique concrète, expressions (suite et fin)

Remarque : cas d'erreur

On peut rencontrer deux types d'erreur à l'exécution :

- ▶ $rand(n_1, n_2)$ avec n1 > n2: $[\![\mathsf{rand}(n_1, n_2)]\!]_{\mathrm{E}} = \{x \in \mathbb{Z} \mid n_1 \leqslant x \leqslant n_2\} = \emptyset;$
- division par zéro : $[e/0]_E = \emptyset$.

Sémantique concrète, expressions (suite et fin)

Remarque : cas d'erreur

On peut rencontrer deux types d'erreur à l'exécution :

- ▶ $rand(n_1, n_2)$ avec n1 > n2: $[\![rand(n_1, n_2)]\!]_{E} = \{ x \in \mathbb{Z} \mid n_1 \leqslant x \leqslant n_2 \} = \emptyset ;$
- division par zéro : $[e/0]_E = \emptyset$.

On suppose donc que le programme lève une exception et abandonne son exécution dans ces deux cas.

Sémantique concrète, commandes

Sémantique des commandes : $\llbracket c \rrbracket_{\mathrm{C}} : \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$

$$[\![v = e]\!]_{\mathbf{C}}(R) = \{ \rho[v \mapsto n] \mid \rho \in R, n \in [\![e]\!]_{\mathbf{E}}(\rho) \}$$
$$[\![e]\!]_{\mathbf{C}}(R) = \{ \rho \mid \rho \in R, \exists n \in [\![e]\!]_{\mathbf{E}}(\rho), n > 0 \}$$

Sémantique concrète, commandes

Sémantique des commandes : $\llbracket c \rrbracket_{\mathrm{C}} : \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z}) \to \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$

$$\llbracket v = e \rrbracket_{\mathbf{C}}(R) = \{ \rho[v \mapsto n] \mid \rho \in R, n \in \llbracket e \rrbracket_{\mathbf{E}}(\rho) \}$$
$$\llbracket e > 0 \rrbracket_{\mathbf{C}}(R) = \{ \rho \mid \rho \in R, \exists n \in \llbracket e \rrbracket_{\mathbf{E}}(\rho), n > 0 \}$$

Remarque : $e \leq 0$

 $e \le 0$ n'est qu'une jolie façon d'écrire 1 - e > 0 (sucre syntaxique).

ONERA 11 / 75

ONERA 11/75

Sémantique concrète, programme

Sémantique des programmes : $\llbracket (L,A) \rrbracket : L \to \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$

À chaque point de programme, on associe le meilleur invariant.

Sémantique concrète, programme

Sémantique des programmes : $\llbracket (L,A) \rrbracket : L \to \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$

À chaque point de programme, on associe le meilleur invariant.

C'est la plus petite solution (au sens de l'inclusion ⊆) du système

$$\begin{cases}
R_0 = \mathbb{V} \to \mathbb{Z} \\
R_{I'} = \bigcup_{(I,c,I') \in A} \llbracket c \rrbracket_{\mathbf{C}}(R_I)
\end{cases} I' \neq 0$$

ONERA 12 / 75

ONERA 12/7

Sémantique concrète, programme

Sémantique des programmes : $\llbracket (L,A) \rrbracket : L \to \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$

À chaque point de programme, on associe le meilleur invariant.

C'est la plus petite solution (au sens de l'inclusion \subseteq) du système

$$\begin{cases}
R_0 = \mathbb{V} \to \mathbb{Z} \\
R_{l'} = \bigcup_{(l,c,l') \in A} \llbracket c \rrbracket_{\mathbf{C}}(R_l) & l' \neq 0
\end{cases}$$

Une telle solution existe toujours d'après le théorème de Knaster-Tarski...

Exemple

while
$$_{0}x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$
 $4 \leftarrow x = x - 2$ 3

while $_{2}(x > 0)$ {
 $_{3}x = x - 2;$ $_{4}y = y + 4;$
}
 $_{5}$
 $_{x} = rand(0, 12)$ $1 \rightarrow y = 42$ $0 \rightarrow 1$

équations
$$R_0 = \{ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \}$$

ONERA 13 / 75

Exemple

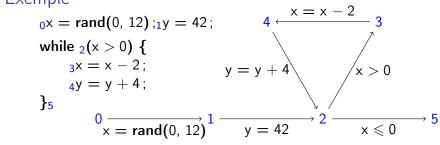
emple

$$_{0}x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$
 $4 \leftarrow x = x - 2$
while $_{2}(x > 0)$ {
 $_{3}x = x - 2;$
 $_{4}y = y + 4;$
}
 $_{5}$
 $0 \rightarrow x = rand(0, 12)$
 $0 \rightarrow y = 42$
 $0 \rightarrow 5$

équations
$$R_0 = \{ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \}$$

$$R_1 = \{ x \in [0, 12], y \in \mathbb{Z} \}$$

Exemple



$$\begin{split} &\text{\'equations} \\ &R_0 = \{\, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \,\} \\ &R_1 = \{\, x \in [\![0,12]\!], y \in \mathbb{Z} \,\} \\ &R_2 = R_1[y \mapsto 42] \cup R_4[y \mapsto y + 4] \end{split}$$

ONERA 12 / 75

Exemple

$$0x = rand(0, 12); 1y = 42; 4 \xrightarrow{x = x - 2} 3$$
while $2(x > 0)$ {
$$3x = x - 2; y = y + 4;$$

$$4y = y + 4;$$

$$5 \xrightarrow{x = rand(0, 12)} 1 \xrightarrow{y = 42} 2 \xrightarrow{x \le 0} 5$$

équations

$$\begin{array}{l}
R_0 = \{ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \} \\
R_1 = \{ x \in [0, 12], y \in \mathbb{Z} \} \\
R_2 = R_1[y \mapsto 42] \cup R_4[y \mapsto y + 4]
\end{array}$$

$$R_3 = R_2 \cap \{ x > 0, y \in \mathbb{Z} \}$$

Exemple

$$0x = rand(0, 12);_{1}y = 42; \qquad 4 \xleftarrow{x = x - 2} 3$$
while $_{2}(x > 0)$ {
$$3x = x - 2; \\ 4y = y + 4;$$
}
$$0 \xrightarrow{x = rand(0, 12)} 1 \xrightarrow{y = 42} 2 \xrightarrow{x \le 0}$$

équations

$$R_{0} = \{ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \}$$

$$R_{1} = \{ x \in [0, 12], y \in \mathbb{Z} \}$$

$$R_{2} = R_{1}[y \mapsto 42] \cup R_{4}[y \mapsto y + 4]$$

$$R_{3} = R_{2} \cap \{ x > 0, y \in \mathbb{Z} \}$$

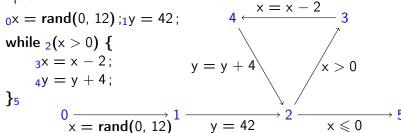
$$R_4 = R_3[x \mapsto x - 2]$$

ONERA 13 / 75

Exemple

$$\begin{array}{lll}
\text{ox} &= \text{rand}(0, 12);_{1}y = 42; & 4 & \underbrace{\qquad x = x - 2} & 3 \\
\text{while } _{2}(x > 0) & \{ \\
& _{3}x = x - 2; \\
& _{4}y = y + 4; \\
\end{cases} \\
\text{o} \\
& x = \text{rand}(0, 12) \\
& x = \text{rand}(0, 12) \\
\end{array}$$

Exemple



équations

$$R_{0} = \{x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \}$$

$$R_{1} = \{x \in [0, 12], y \in \mathbb{Z} \}$$

$$R_{2} = R_{1}[y \mapsto 42] \cup R_{4}[y \mapsto y + 4]$$

$$R_{3} = R_{2} \cap \{x > 0, y \in \mathbb{Z} \}$$

$$R_{4} = R_{3}[x \mapsto x - 2]$$

$$R_{5} = R_{2} \cap \{x \leqslant 0, y \in \mathbb{Z} \}$$

 $R_0 = \{ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \}$ $R_1 = \{ x \in [0, 12], y \in \mathbb{Z} \}$

équations

plus petite solution $= \{ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \}$ $= \{ x \in [0, 12], y \in \mathbb{Z} \}$

 $R_2 = R_1[y \mapsto 42] \cup R_4[y \mapsto y + 4] = \{x \in [-1, 12], y \in [42, 66] \cap 4\mathbb{Z} + 2\}$ $|2x + y \in [42, 66]$

ONERA 13 / 75

 $R_3 = R_2 \cap \{ x > 0, y \in \mathbb{Z} \}$ $= \{x \in [1, 12], y \in [42, 66] \cap 4\mathbb{Z} + 2\}$

 $|2x + y \in [42, 66]$

 $R_4 = R_3[x \mapsto x - 2]$ $= \{x \in [-1, 10], y \in [42, 66] \cap 4\mathbb{Z} + 2\}$ $|2x + y \in [38, 62]$

 $R_5 = R_2 \cap \{ x \leq 0, y \in \mathbb{Z} \}$ $= \{x \in [-1, 0], y \in [42, 66] \cap 4\mathbb{Z} + 2\}$ $|2x + y \in [42, 66]$ ONERA 13 / 75

Analyse statique des propriétés des programmes impératifs

Syntaxe

Sémantique

Ordres partiels

Abstract interpretation - le Reader Digest

Abstraire la sémantique concrète Rappels sur la sémantique concrète Abstractions relationnelles ou non

Abstractions non relationnelles
Signes
Constantes

Rappels

Définition (ordre)

Un *ordre* □ est une relation binaire

- ▶ réflexive $(\forall x, x \sqsubseteq x)$;
- ▶ transitive $(\forall x, y, z, (x \sqsubseteq y \land y \sqsubseteq z) \Rightarrow x \sqsubseteq z)$;
- ▶ antisymétrique $(\forall x, y, (x \sqsubseteq y \land y \sqsubseteq y) \Rightarrow x = y)$.

Définition (borne supérieure)

Une borne supérieure $\bigsqcup: \mathcal{P}(S) \to S$ associe à tout sous ensemble S' de S son plus petit majorant

- $\forall x \in S', x \sqsubseteq | \ | S'$

ONERA 15 / 75

Treillis complet

Définition (treillis complet)

Un ensemble S muni d'un ordre \sqsubseteq est un *treillis complet* s'il admet une borne supérieure $\mid S'$.

Un treillis complet est automatiquement muni

- ▶ d'un plus petit élément (bottom) : $\bot = | \emptyset = \square S$;
- ▶ d'un plus grand élément (top) : $\top = \coprod S = \prod \emptyset$.

Treillis complet

Définition (treillis complet)

Un ensemble S muni d'un ordre \sqsubseteq est un *treillis complet* s'il admet une borne supérieure $\mid S'$.

Un treillis complet est automatiquement muni

- d'un plus petit élément (bottom) : $\bot = \bigsqcup \emptyset = \bigcap S$;
- ▶ d'un plus grand élément (top) : $\top = | S = []\emptyset$.

Exercice

Prouver la première propriété (borne inférieure).

Treillis complet, exemples

Exemple

 \mathbb{Z} n'est pas un treillis complet ($\mid \mathbb{Z}$ n'existe pas).

Treillis complet, exemples

Exemple

 \mathbb{Z} n'est pas un treillis complet ($|\mathbb{Z}$ n'existe pas).

Exemple

 $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est un treillis complet.

ONERA 17 / 75

17 / 75

Treillis complet, exemples

Exemple

 \mathbb{Z} n'est pas un treillis complet ($\mid \mathbb{Z}$ n'existe pas).

Exemple

 $\bar{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est un treillis complet.

Exercice

- ▶ Montrer que pour tout ensemble S, l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(S)$ muni de l'ordre inclusion \subseteq est un treillis complet.
- À quoi correspondent la borne supérieure □? la borne inférieure □? ⊥ et ⊤?

Treillis complet, autres exemples

Exercice

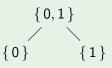
Soit A un ensemble quelconque et (B, \sqsubseteq_B) un treillis complet, montrer que $A \to B$, les *fonctions* de A dans B forment un treillis complet muni de l'ordre usuel sur les fonctions $f \sqsubseteq_{A \to B} g$ si pour tout $x \in A$, $f(x) \sqsubseteq_B g(x)$.

Treillis complet, autres exemples

Exercice

Soit A un ensemble quelconque et (B, \sqsubseteq_B) un treillis complet, montrer que $A \to B$, les *fonctions* de A dans B forment un treillis complet muni de l'ordre usuel sur les fonctions $f \sqsubseteq_{A \to B} g$ si pour tout $x \in A$, $f(x) \sqsubseteq_B g(x)$.

Exemple



n'est pas un treillis complet ($| | \emptyset |$ n'existe pas).

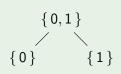
ONERA 18 / 75

Treillis complet, autres exemples

Exercice

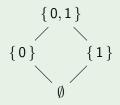
Soit A un ensemble quelconque et (B, \sqsubseteq_B) un treillis complet, montrer que $A \to B$, les fonctions de A dans B forment un treillis complet muni de l'ordre usuel sur les fonctions $f \sqsubseteq_{A \to B} g$ si pour tout $x \in A$, $f(x) \sqsubseteq_B g(x)$.

Exemple



n'est pas un treillis complet $(\bigsqcup \emptyset$ n'existe pas).

Exemple



est un treillis complet (c.f. exercice du slide précédent).

ONERA 18 / 75

Théorème de Knaster-Tarski

Définition

Une fonction f d'un treillis complet dans lui même est monotone si

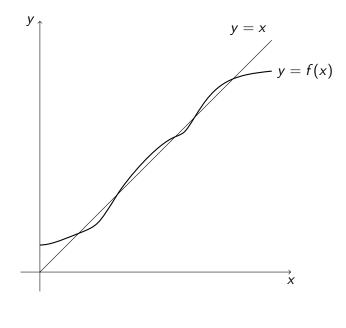
$$\forall x, y \in S, \quad x \sqsubseteq y \Rightarrow f(x) \sqsubseteq f(y)$$

Théorème

Si S est un treillis complet et f une fonction monotone sur ce treillis alors f admet un plus petit point fixe

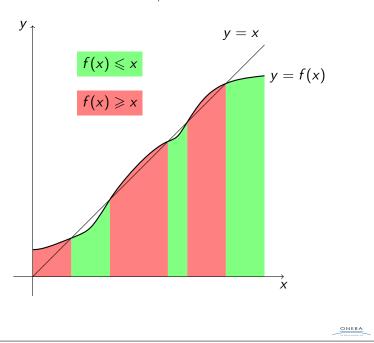
$$\operatorname{lfp} f = \bigcap \{x \in S \mid f(x) \sqsubseteq x\}.$$

Théorème de Knaster-Tarski, illustration

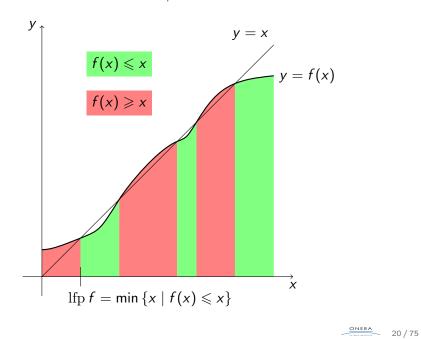


ONERA 19 / 75

Théorème de Knaster-Tarski, illustration



Théorème de Knaster-Tarski, illustration



Théorème de Knaster-Tarski, démonstration

Notons $P = \{x \in S \mid f(x) \sqsubseteq x\}$ et $p = \bigcap P$.

- p est un point fixe :
 - ▶ Soit $x \in P$ quelconque (P est non vide car $\top \in P$), $p \sqsubseteq x$ donc par croissance de f, $f(p) \sqsubseteq f(x)$ et $f(x) \sqsubseteq x$ car $x \in P$ donc $f(p) \sqsubseteq x$.

Ainsi f(p) est un minorant de P donc $f(p) \sqsubseteq p \ (p = \bigcap P)$.

- ▶ Par croissance de f, $f(f(p)) \sqsubseteq f(p)$ donc $f(p) \in P$. Or $p = \bigcap P$ donc $p \sqsubseteq f(p)$.
- Ainsi p = f(p).
- ▶ et c'est le plus petit :
 - ▶ Tous les point fixes sont dans P (si f(x) = x alors $f(x) \sqsubseteq x$).
 - ▶ p est un minorant de P.

Notre système a une solution

- ▶ $L \to \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ est un treillis complet (c.f. exercices).
- ▶ La fonction $F: (L \to \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})) \to (L \to \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z}))$

$$F(R) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & (\mathbb{V} \to \mathbb{Z}) \\ I' & \mapsto & \bigcup_{(I,c,I') \in A} \llbracket c \rrbracket_{\mathrm{C}} (R(I)) \end{array} \right.$$

est monotone.

▶ Donc notre sémantique est bien définie.

Problème

Malheureusement, la sémantique concrète n'est pas calculable.

Problème

Malheureusement, la sémantique concrète n'est pas calculable.

On va donc en calculer une surapproximation.

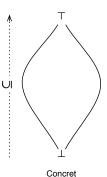
ONERA 23 / 75

ONERA 23 / 75

Définition

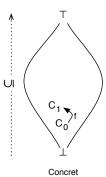
L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.

L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.



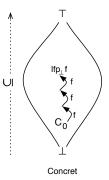
- ► Caractérisation d'un ensemble d'états munis d'un pré-ordre (+ prop) = treillis
- ► Sémantique décrite par la fonction monotone *f*
- ► Caractérisation de la sémantique du programme comme le plus petit point fixe de *f* à partir de *C*₀

L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.



- Caractérisation d'un ensemble d'états munis d'un pré-ordre (+ prop) = treillis
- ► Sémantique décrite par la fonction monotone f
- ► Caractérisation de la sémantique du programme comme le plus petit point fixe de f à partir de C_0

L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.

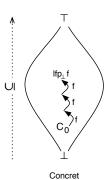


- Caractérisation d'un ensemble d'états munis d'un pré-ordre (+ prop) = treillis
- ► Sémantique décrite par la fonction monotone f
- ► Caractérisation de la sémantique du programme comme le plus petit point fixe de f à partir de C_0

25 / 75

25 / 75

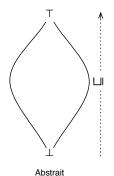
L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.



- Caractérisation d'un ensemble d'états. munis d'un pré-ordre (+ prop) = treillis
- ► Sémantique décrite par la fonction monotone f
- ► Caractérisation de la sémantique du programme comme le plus petit point fixe de f à partir de C_0

Problème : calcul effectif de *lfp f* indécidable en général

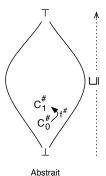
L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.



On choisit un domaine abstrait plus petit

- ► Caractérisation d'un ensemble d'états munis d'un pré-ordre (+ prop) = treillis
- ► Sémantique abstraite décrite par la fonction monotone $f^{\#}$
- ► Caractérisation de la sémantique du programme comme le plus petit point fixe de $f^{\#}$ à partir de $C_0^{\#}$

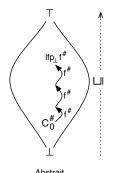
L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.



On choisit un domaine abstrait plus petit

- Caractérisation d'un ensemble d'états munis d'un pré-ordre (+ prop) = treillis
- ► Sémantique abstraite décrite par la fonction monotone $f^\#$
- ► Caractérisation de la sémantique du programme comme le plus petit point fixe de $f^{\#}$ à partir de $C_0^{\#}$

L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.



On choisit un domaine abstrait plus petit

- ➤ Caractérisation d'un ensemble d'états munis d'un pré-ordre (+ prop) = treillis
- ► Sémantique abstraite décrite par la fonction monotone $f^\#$
- ► Caractérisation de la sémantique du programme comme le plus petit point fixe de $f^\#$ à partir de $C_0^\#$

ONERA 26 / 75

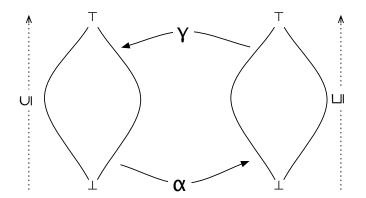
27 / 75

ONER

26 / 75

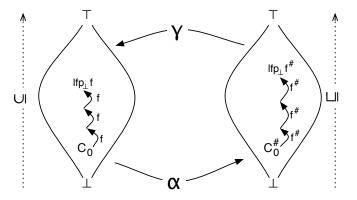
L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.

On construit une abstraction correcte entre les deux treillis :



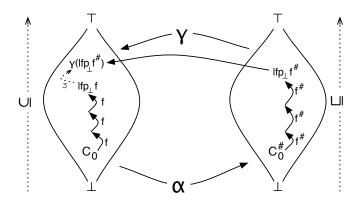
L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.

On construit une abstraction correcte entre les deux treillis :



L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.

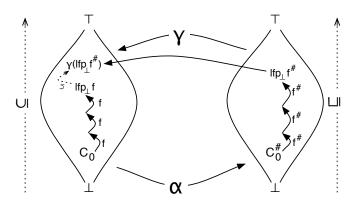
On construit une abstraction correcte entre les deux treillis :



27 / 75

L'interprétation abstraite est un théorie constructive de l'approximation de points fixes d'opérateurs monotones sur des treillis.

On construit une abstraction correcte entre les deux treillis : Avec le calcul du point fixe dans l'abstrait et le transfert de points fixes, approximation correcte de la sémantique de f dans le concret.



27 / 75

Analyse statique des propriétés des programmes impératifs

Syntaxe

Sémantique

Ordres partiels

Abstract interpretation - le Reader Digest

Abstraire la sémantique concrète

Rappels sur la sémantique concrète

Abstractions relationnelles ou nor

Abstractions non relationnelles

Signes

Constantes

Intervalles

Type de la sémantique concrète

La sémantique concrète d'un programme est de type

$$L \to \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$$

Type de la sémantique concrète

La sémantique concrète d'un programme est de type

$$L \to \mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$$

- ▶ une fonction qui à chaque point du programme (dans *L*)
- ▶ associe un ensemble d'états possibles de la mémoire
 - ▶ une fonction qui à chaque variable (dans V)
 - ▶ associe sa valeur en mémoire (dans Z)

ONERA 29 / 75

Exemple

$$0x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$

$$4 \leftarrow x = x - 2$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4$$

$$3x = x - 2;$$

$$4x = x - 2$$

$$R_{0} = \mathbb{V} \to \mathbb{Z} \qquad (\mathbb{V} = \{x, y\})$$

$$R_{1} = \{f \in (\mathbb{V} \to \mathbb{Z}) \mid f(x) \in [0, 12]\}$$

$$R_{2} = \{f \mid f(x) \in [-1, 12], f(y) \in [42, 66] \cap 4\mathbb{Z} + 2, 2f(x) + f(y) \in [42, 66]\}$$

$$R_{3} = \{f \mid f(x) \in [1, 12], f(y) \in [42, 66] \cap 4\mathbb{Z} + 2, 2f(x) + f(y) \in [42, 66]\}$$

$$R_{4} = \{f \mid f(x) \in [-1, 10], f(y) \in [42, 66] \cap 4\mathbb{Z} + 2, 2f(x) + f(y) \in [38, 62]\}$$

$$R_{5} = \{f \mid f(x) \in [-1, 0], f(y) \in [42, 66] \cap 4\mathbb{Z} + 2, 2f(x) + f(y) \in [42, 66]\}$$

ONERA 30 / 75

Analyse statique des propriétés des programmes impératifs

Syntaxe Sémantique

Ordres partiels

Abstract interpretation - le Reader Diges

Abstraire la sémantique concrète

Rappels sur la sémantique concrète

Abstractions relationnelles ou non

Abstractions non relationnelles

Signes

Constantes

Intervalles

Abstraire? oui mais quoi?

La sémantique concrète est incalculable, on veut la simplifier. Mais que simplifier?

Abstraire? oui mais quoi?

La sémantique concrète est incalculable, on veut la simplifier. Mais que simplifier?

L est fini et on veut savoir ce qui se passe en chaque point

Abstraire? oui mais quoi?

La sémantique concrète est incalculable, on veut la simplifier. Mais que simplifier?

► L est fini et on veut savoir ce qui se passe en chaque point ⇒ on le garde à l'identique

ONERA 32 / 75

ONERA 32 / 75

Abstraire? oui mais quoi?

La sémantique concrète est incalculable, on veut la simplifier. Mais que simplifier?

- ► L est fini et on veut savoir ce qui se passe en chaque point ⇒ on le garde à l'identique
- lacktriangle est fini et on s'intéresse à toutes les variables

Abstraire? oui mais quoi?

La sémantique concrète est incalculable, on veut la simplifier. Mais que simplifier?

- ► L est fini et on veut savoir ce qui se passe en chaque point ⇒ on le garde à l'identique
- $ightharpoonup \mathbb{V}$ est fini et on s'intéresse à toutes les variables \Rightarrow on le garde à l'identique

Abstraire? oui mais quoi?

La sémantique concrète est incalculable, on veut la simplifier. Mais que simplifier?

- ► L est fini et on veut savoir ce qui se passe en chaque point ⇒ on le garde à l'identique
- ▶ V est fini et on s'intéresse à toutes les variables
 ⇒ on le garde à l'identique
- lacksquare \mathbb{Z} (et donc l'ensemble des fonctions $\mathbb{V} o \mathbb{Z}$) est infini

32 / 75

Abstraire? oui mais quoi?

La sémantique concrète est incalculable, on veut la simplifier. Mais que simplifier?

- ► L est fini et on veut savoir ce qui se passe en chaque point ⇒ on le garde à l'identique
- $ightharpoonup \mathbb{V}$ est fini et on s'intéresse à toutes les variables \Rightarrow on le garde à l'identique
- ▶ \mathbb{Z} (et donc l'ensemble des fonctions $\mathbb{V} \to \mathbb{Z}$) est infini \Rightarrow c'est ici qu'on va abstraire

ONERA 32 / 75

Comment abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$?

Deux grandes solutions

- ▶ Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ en $\mathbb{V} \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ puis $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ en un \mathcal{D}^{\sharp}
 - ▶ non relationnel : les valeurs de x et y sont indépendantes

Comment abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$?

Deux grandes solutions

- ▶ Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ en $\mathbb{V} \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ puis $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ en un \mathcal{D}^{\sharp}
 - ▶ non relationnel : les valeurs de x et y sont indépendantes
- ▶ Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ directement en un \mathcal{D}^{\sharp}
 - ightharpoonup relationnel: certaines combinaisons de x et y sont impossibles

ONERA 33 / 75

ONERA 33 / 7

Comment abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$?

Deux grandes solutions

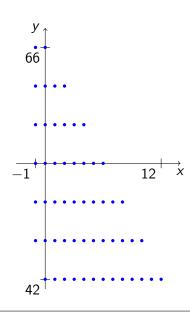
- ▶ Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ en $\mathbb{V} \to \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ puis $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ en un \mathcal{D}^{\sharp}
 - ▶ non relationnel : les valeurs de x et y sont indépendantes
- ▶ Abstraire $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$ directement en un \mathcal{D}^{\sharp}
 - relationnel: certaines combinaisons de x et y sont impossibles
 - + plus précis
 - plus compliqué et plus coûteux

33 / 75

34 / 75

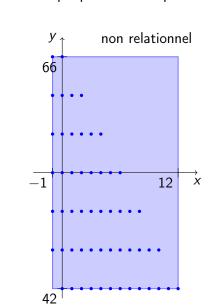
Deux petits dessins valent mieux que de longs discours

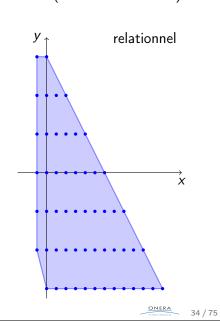
Exemple précédent au point de programme 2 (invariant de boucle)



Deux petits dessins valent mieux que de longs discours

Exemple précédent au point de programme 2 (invariant de boucle)

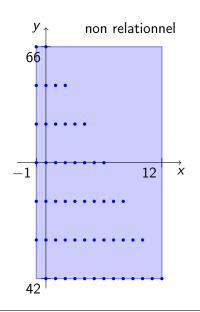




ONERA 34 / 75

Deux petits dessins valent mieux que de longs discours

Exemple précédent au point de programme 2 (invariant de boucle)



Rappels sur la sémantique concrète

Abstractions non relationnelles

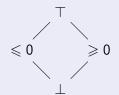
Signes

35 / 75

Domaine des signes

Définition

Treillis des signes $(\mathcal{D}^{\sharp}, \sqsubseteq^{\sharp})$



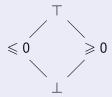
$$\gamma(\top) = \mathbb{Z}$$
 $\gamma(\leqslant 0) =] - \infty, 0]$
 $\gamma(\geqslant 0) = [0, +\infty[$
 $\gamma(\bot) = \emptyset$

ONERA 36 / 75

Domaine des signes

Définition

Treillis des signes $(\mathcal{D}^{\sharp}, \sqsubseteq^{\sharp})$



$$egin{array}{ll} \gamma(\top) &= \mathbb{Z} \ \gamma(\leqslant 0) &= \mathbb{J} - \infty, 0 \mathbb{J} \ \gamma(\geqslant 0) &= \llbracket 0, + \infty \llbracket \ \gamma(\bot) &= \emptyset \end{array}$$

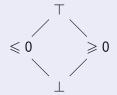
Question

L'ordre \sqsubseteq^{\sharp} ci dessus est il correct par rapport à l'ordre \subseteq sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Domaine des signes

Définition

Treillis des signes $(\mathcal{D}^{\sharp}, \sqsubseteq^{\sharp})$



$$egin{array}{ll} \gamma(op) &= \mathbb{Z} \ \gamma(\leqslant 0) &= \mathbb{J} - \infty, 0 \mathbb{J} \ \gamma(\geqslant 0) &= \llbracket 0, + \infty \llbracket \ \gamma(\perp) &= \emptyset \end{array}$$

Question

L'ordre \sqsubseteq^{\sharp} ci dessus est il correct par rapport à l'ordre \subseteq sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Correction de l'ordre abstrait par rapport au concret

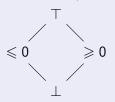
L'ordre \sqsubseteq^{\sharp} est correct par rapport à l'ordre \sqsubseteq si γ est monotone

$$\forall x^{\sharp}, y^{\sharp} \in \mathcal{D}^{\sharp}, \quad x^{\sharp} \sqsubseteq^{\sharp} y^{\sharp} \Rightarrow \gamma(x^{\sharp}) \sqsubseteq \gamma(y^{\sharp})$$

Domaine des signes

Définition

Treillis des signes $(\mathcal{D}^{\sharp}, \sqsubseteq^{\sharp})$



$$egin{array}{ll} \gamma(op) &= \mathbb{Z} \ \gamma(\leqslant 0) &= \mathbb{J} - \infty, 0 \mathbb{J} \ \gamma(\geqslant 0) &= \llbracket 0, + \infty \llbracket \ \gamma(\perp) &= \emptyset \end{array}$$

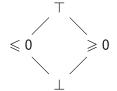
Question

L'ordre \sqsubseteq^{\sharp} ci dessus est il correct par rapport à l'ordre \subseteq sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Réponse

$$\mathsf{Oui}\ (\emptyset\subseteq \llbracket 0,+\infty\llbracket,\,\emptyset\subseteq\rrbracket-\infty,0\rrbracket,\,\llbracket 0,+\infty\llbracket\subseteq\mathbb{Z}\ \mathsf{et}\ \rrbracket-\infty,0\rrbracket\subseteq\mathbb{Z}).$$

Domaine des signes, meilleure abstraction



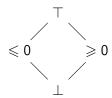
$$\gamma(\top) = \mathbb{Z}$$
 $\gamma(\leqslant 0) =] - \infty, 0]$
 $\gamma(\geqslant 0) = [0, +\infty[]$
 $\gamma(\bot) = \emptyset$

Question

Toute partie S de \mathbb{Z} (i.e. $S \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$) admet elle une meilleure abstraction dans ce domaine?

ONERA 37 / 75

Domaine des signes, meilleure abstraction



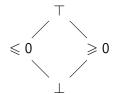
Question

Toute partie S de \mathbb{Z} (i.e. $S \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$) admet elle une meilleure abstraction dans ce domaine?

Meilleure abstraction

Une partie S de \mathbb{Z} admet une meilleure abstraction si l'ensemble $\left\{S^{\sharp} \in \mathcal{D}^{\sharp} \mid S \subseteq \gamma\left(S^{\sharp}\right)\right\}$ a un minimum.

Domaine des signes, meilleure abstraction



$$egin{array}{ll} \gamma(\top) &= \mathbb{Z} \ \gamma(\leqslant 0) &= \mathbb{J} - \infty, 0 \mathbb{J} \ \gamma(\geqslant 0) &= [0, +\infty[] \ \gamma(\bot) &= \emptyset \end{array}$$

Question

Toute partie S de \mathbb{Z} (i.e. $S \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$) admet elle une meilleure abstraction dans ce domaine?

Réponse

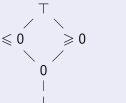
Toute sauf le singleton { 0 } qui admet deux abstractions $(\leq 0 \text{ et } \geq 0)$ incomparables.

ONERA 36 / 75

Domaine des signes, meilleure abstraction (suite et fin)

Définition

On corrige en ajoutant un élément

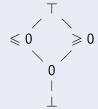


$$egin{array}{ll} \gamma(\top) &= \mathbb{Z} \ \gamma(\leqslant 0) &= \mathbb{J} - \infty, 0 \ \gamma(\geqslant 0) &= \llbracket 0, + \infty
Vert \ \gamma(0) &= \set{0} \ \gamma(\bot) &= \emptyset \end{array}$$

Domaine des signes, meilleure abstraction (suite et fin)

Définition

On corrige en ajoutant un élément



$$egin{array}{ll} \gamma(op) &= \mathbb{Z} \ \gamma(\leqslant 0) &= \mathbb{J} - \infty, 0 \mathbb{J} \ \gamma(\geqslant 0) &= \llbracket 0, + \infty
Vert \ \gamma(0) &= \set{0} \ \gamma(ot) &= \emptyset \end{array}$$

Remarques

- $ightharpoonup \gamma$ reste monotone.
- ► On a bien une correspondance de Galois avec

ONERA

38 / 7

Abstraction non relationnelle

D'une abstraction \mathcal{D}^{\sharp} de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, on déduit une abstraction $\mathcal{D}_{\mathrm{nr}}^{\sharp}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$, en procédant point à point :

$$\blacktriangleright \,\, \mathcal{D}_{\mathrm{nr}}^{\sharp} = \mathbb{V} \to \mathcal{D}^{\sharp}$$

$$ightharpoonup x^{\sharp} \sqsubseteq_{\mathrm{nr}}^{\sharp} y^{\sharp}$$
 si pour tout $v \in \mathbb{V}$, $x^{\sharp}(v) \sqsubseteq y^{\sharp}(v)$

Abstraction non relationnelle

D'une abstraction \mathcal{D}^{\sharp} de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, on déduit une abstraction $\mathcal{D}_{\mathrm{nr}}^{\sharp}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{V} \to \mathbb{Z})$, en procédant point à point :

$$\blacktriangleright \,\, \mathcal{D}_{\mathrm{nr}}^{\sharp} = \mathbb{V} \to \mathcal{D}^{\sharp}$$

$$ightharpoonup x^{\sharp} \sqsubseteq_{\mathrm{nr}}^{\sharp} y^{\sharp}$$
 si pour tout $v \in \mathbb{V}$, $x^{\sharp}(v) \sqsubseteq y^{\sharp}(v)$

$$\blacktriangleright \ \top_{\mathrm{nr}} = v \mapsto \top$$

$$ightharpoonup \perp_{\rm nr} = v \mapsto \perp$$

Syntaxe de notre langage (rappel)

Syntaxe

$$stm ::= v = expr; | stm stm | if (expr > 0) { stm } else { stm } | while (expr > 0) { stm }$$

$$expr ::= v \mid n \mid rand(n, n)$$

 $\mid expr + expr \mid expr - expr \mid expr \times expr \mid expr/expr$

 $v \in \mathbb{V}$, un ensemble de variables

 $n \in \mathbb{Z}$ (on ne manipule que des entiers)

 $rand(n_1, n_2)$ représente le choix aléatoire d'un entier entre n_1 et n_2 (sert à simuler une entrée).

Domaine des signes, opérations arithmétiques abstraites

ONERA 41 / 75

Domaine des signes, opérations arithmétiques abstraites

▶
$$n^{\sharp} = \alpha(\{n\}) = \begin{cases} \leqslant 0 & \text{si } n < 0 \\ \geqslant 0 & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

▶ $\operatorname{rand}^{\sharp}(n_1, n_2) = \alpha(\llbracket n_1, n_2 \rrbracket) = \begin{cases} \bot & \text{si } n_1 > n_2 \\ 0 & \text{si } n_1 = n_2 = 0 \\ \leqslant 0 & \text{sinon si } n_2 \leqslant 0 \\ \geqslant 0 & \text{sinon si } n_1 \geqslant 0 \\ \top & \text{sinon} \end{cases}$

Domaine des signes, opérations arithmétiques abstraites

▶
$$n^{\sharp} = \alpha(\{n\}) = \begin{cases} \leq 0 & \text{si } n < 0 \\ \geq 0 & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

▶ $\operatorname{rand}^{\sharp}(n_{1}, n_{2}) = \alpha(\llbracket n_{1}, n_{2} \rrbracket) = \begin{cases} \bot & \text{si } n_{1} > n_{2} \\ 0 & \text{si } n_{1} = n_{2} = 0 \\ \leq 0 & \text{sinon si } n_{2} \leq 0 \\ \geq 0 & \text{sinon si } n_{1} \geq 0 \end{cases}$

⊤ sinon

$$x^{\sharp} + {}^{\sharp} y^{\sharp} = \alpha \left(\left\{ x + y \mid x \in \gamma(x^{\sharp}), y \in \gamma(y^{\sharp}) \right\} \right) =$$

$$\frac{+^{\sharp} \mid T \leqslant 0 \geqslant 0 \quad 0 \quad \bot}{T \mid T \mid T \mid T \mid T \mid \bot}$$

$$\leqslant 0 \mid T \leqslant 0 \quad T \leqslant 0 \quad \bot$$

$$\geqslant 0 \mid T \mid T \geqslant 0 \geqslant 0 \quad \bot$$

$$0 \mid T \leqslant 0 \geqslant 0 \quad 0 \quad \bot$$

Domaine des signes, opérations arithmétiques abstraites (suite et fin)

Exercice

Compléter la table de la soustraction abstraite

ONERA 42 / 75

Domaine des signes, opérations arithmétiques abstraites (suite et fin)

Exercice

Compléter la table de la soustraction abstraite

ONERA 42 / 75

Sémantique abstraite, expressions

Sémantique des expressions : $[\![e]\!]_{\mathrm{E}}^{\sharp} : (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^{\sharp}) \to \mathcal{D}^{\sharp}$

Sémantique abstraite, expressions

Sémantique des expressions : $[\![e]\!]_{\mathrm{E}}^{\sharp}: (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^{\sharp}) \to \mathcal{D}^{\sharp}$

$$egin{array}{ll} \llbracket v
Vert^{\sharp}_{\mathrm{E}} \left(
ho
ight) &=
ho(v) \ \llbracket n
Vert^{\sharp}_{\mathrm{E}} \left(
ho
ight) &= n^{\sharp} \ \llbracket \mathrm{rand} \left(n_{1}, n_{2}
ight)
Vert^{\sharp}_{\mathrm{E}} \left(
ho
ight) &= \mathrm{rand}^{\sharp} \left(n_{1}, n_{2}
ight) \ \llbracket e_{1} + e_{2}
Vert^{\sharp}_{\mathrm{E}} \left(
ho
ight) &= \llbracket e_{1}
Vert^{\sharp}_{\mathrm{E}} +^{\sharp} \llbracket e_{2}
Vert^{\sharp}_{\mathrm{E}} \end{array}$$

Remarque

Ca se calcule très bien.

Graphe de flot de contrôle (rappel)

On étudie les graphes de flot de contrôle des programmes.

Définition

Un graphe de flot de contrôle (L,A) est composé d'un ensemble de points de programme L, d'un point d'entrée $0 \in L$ et d'arêtes $A \subset L \times com \times L$ avec :

$$com ::= v = expr \mid expr > 0$$

Sémantique abstraite, commandes

Définition

Un graphe de flot de contrôle (L,A) est composé d'un ensemble de points de programme L, d'un point d'entrée $0 \in L$ et d'arêtes $A \subset L \times com \times L$ avec :

On étudie les graphes de flot de contrôle des programmes.

$$com ::= v = expr \mid expr > 0$$

Graphe de flot de contrôle (rappel)

Exemple

ONERA

ONERA 44 / 75

Sémantique des commandes : $\llbracket c \rrbracket_{\mathbb{C}}^{\sharp} : (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^{\sharp}) \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^{\sharp})$

$$[\![v = e]\!]_{\mathrm{C}}^{\sharp}(\rho) = \rho \left[v \mapsto [\![e]\!]_{\mathrm{E}}^{\sharp} \rho\right]$$

$$[\![e > 0]\!]_{\mathrm{C}}^{\sharp}(\rho) = \begin{cases} \rho \left[v \mapsto \rho(v) \; \sqcap^{\sharp} \alpha \left([\![1, +\infty[\![]]\right)\right] & \text{si } e = v \\ \rho & \text{sinon} \end{cases}$$

Sémantique abstraite, commandes

Sémantique des commandes : $\llbracket c \rrbracket_{\mathrm{C}}^{\sharp} : (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^{\sharp}) \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^{\sharp})$

Remarque

Ça se calcule toujours aussi bien.

ONERA 45 / 75

ONERA 45 / 7

Sémantique abstraite, programme

Sémantique des programmes : $\llbracket (L,A) \rrbracket^{\sharp} : L \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^{\sharp})$

C'est la plus petite solution (au sens de l'ordre abstrait $\sqsubseteq_{nr}^{\sharp}$) du système

$$\left\{ \begin{array}{l} R_0^{\sharp} = \mathbb{V} \to \top \\ R_{l'}^{\sharp} = \bigsqcup_{(l,c,l') \in A}^{\sharp} \left[\left[c \right] \right]_{\mathrm{C}}^{\sharp} \left(R_{l}^{\sharp} \right) \end{array} \right. \quad l' \neq 0$$

Sémantique abstraite, programme

Sémantique des programmes : $[(L, A)]^{\sharp} : L \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^{\sharp})$

C'est la plus petite solution (au sens de l'ordre abstrait $\sqsubseteq_{nr}^{\sharp}$) du système

$$\left\{ \begin{array}{l} R_0^{\sharp} = \mathbb{V} \to \top \\ R_{I'}^{\sharp} = \bigsqcup_{(I,c,I') \in A}^{\sharp} \left[\left[c \right] \right]_{\mathrm{C}}^{\sharp} \left(R_{I}^{\sharp} \right) \end{array} \right. \quad I' \neq 0$$

Remarques

▶ Une telle solution existe (c.f. théorème de Knaster-Tarski).

46 / 75

Sémantique abstraite, programme

Sémantique des programmes : $\llbracket (L,A) \rrbracket^{\sharp} : L \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^{\sharp})$

C'est la plus petite solution (au sens de l'ordre abstrait $\sqsubseteq_{nr}^{\sharp}$) du système

$$\begin{cases}
R_0^{\sharp} = \mathbb{V} \to \top \\
R_{l'}^{\sharp} = \bigsqcup_{\substack{l \text{nr} \\ (l,c,l') \in A}}^{\sharp} \llbracket c \rrbracket_{\mathrm{C}}^{\sharp} (R_l^{\sharp}) & l' \neq 0
\end{cases}$$

Remarques

- ▶ Une telle solution existe (c.f. théorème de Knaster-Tarski).
- ► Ca semble un peu moins évident à calculer.

Sémantique abstraite, calcul effectif

Théorème

Si S est un treillis complet, f une fonction monotone sur ce treillis et si la suite $(f^n(\bot))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire $(\exists N, \forall n, f^n(\bot) = f^N(\bot))$ alors sa limite est le plus petit point fixe de f

$$\mathrm{lfp}\, f = f^N(\bot)$$

Sémantique abstraite, calcul effectif

Théorème

Si S est un treillis complet, f une fonction monotone sur ce treillis et si la suite $(f^n(\bot))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire $(\exists N, \forall n, f^n(\bot) = f^N(\bot))$ alors sa limite est le plus petit point fixe de f

lfp
$$f = f^N(\bot)$$

Démonstration.

• $f^N(\bot)$ est un point fixe : $f(f^N)(\bot) = f^{N+1}(\bot) = f^N(\bot)$;

ONERA 47 / 75

Sémantique abstraite, calcul effectif

Théorème

Si S est un treillis complet, f une fonction monotone sur ce treillis et si la suite $(f^n(\bot))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire $(\exists N, \forall n, f^n(\bot) = f^N(\bot))$ alors sa limite est le plus petit point fixe de f

$$\mathrm{lfp}\, f = f^N(\bot)$$

Démonstration.

- $f^N(\bot)$ est un point fixe : $f(f^N)(\bot) = f^{N+1}(\bot) = f^N(\bot)$;
- ▶ et c'est le plus petit : soit y un point fixe (f(y) = y), $\bot \sqsubseteq y$ donc par croissance de f, $f(\bot) \sqsubseteq f(y) = y$ et par récurrence immédiate $f^N(\bot) \sqsubseteq y$.

ONERA 47 / 75

Sémantique abstraite, calcul effectif (suite et fin)

- $lackbox{L} o (\mathbb{V} o \mathcal{D}^\sharp)$ est un treillis complet (car \mathcal{D}^\sharp en est un).
- ▶ La fonction $F^{\sharp}: (L \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^{\sharp})) \to (L \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^{\sharp}))$

$$F^{\sharp}(R^{\sharp}) = \left\{egin{array}{ll} 0 & \mapsto & op_{\mathrm{nr}} \ I' & \mapsto & igsqcup_{\mathrm{nr}}^{\sharp} & \llbracket c
rbracket^{\sharp}_{\mathrm{C}}\left(R^{\sharp}(I)
ight) \ & (I,c,I') \in A \end{array}
ight.$$

est monotone et calculable.

Sémantique abstraite, calcul effectif (suite et fin)

- $ightharpoonup L o (\mathbb{V} o \mathcal{D}^{\sharp})$ est un treillis complet (car \mathcal{D}^{\sharp} en est un).
- ▶ La fonction $F^{\sharp}: (L \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^{\sharp})) \to (L \to (\mathbb{V} \to \mathcal{D}^{\sharp}))$

$$F^\sharp(R^\sharp) = \left\{egin{array}{lll} 0 & \mapsto & op_{\mathrm{nr}} \ I' & \mapsto & igsqcup_{\mathrm{nr}}^\sharp & \llbracket c
rbracket^\sharp (R^\sharp(I))
ight. \end{array}
ight.$$

est monotone et calculable.

- ▶ Donc si la suite $\left(F^{\sharp^n}(L \to \bot_{\mathrm{nr}})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire, on a une méthode de calcul de la sémantique abstraite :
 - 1. On part de ${R^{\sharp}}^0:=L \to \perp_{\mathrm{nr}}$;
 - 2. on calcule $R^{\sharp^{k+1}} := F^{\sharp}(R^{\sharp^k})$;
 - 3. on retourne en 2 jusqu'à attéindre un point fixe.

$$\begin{split} R_{0}^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\ R_{1}^{\sharp\,i+1} &= R_{0}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto \geqslant 0 \right] \\ R_{2}^{\sharp\,i+1} &= R_{1}^{\sharp\,i+1} \left[y \mapsto \geqslant 0 \right] \sqcup_{\mathrm{nr}}^{\sharp} \\ R_{2}^{\sharp\,i} &= R_{1}^{\sharp\,i+1} \left[y \mapsto R_{4}^{\sharp\,i} \left(y \right) +^{\sharp} \left(\geqslant 0 \right) \right] \\ R_{3}^{\sharp\,i+1} &= R_{2}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp\,i+1} (x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0 \right] \\ R_{4}^{\sharp\,i+1} &= R_{3}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto R_{3}^{\sharp\,i+1} (x) -^{\sharp} \left(\geqslant 0 \right) \right] \\ R_{5}^{\sharp\,i+1} &= R_{2}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp\,i+1} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0 \right] \end{split}$$

 $_{0}x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$ while $_{2}(x > 0)$ { $_{3}x = x - 2;$ $_{4}y = y + 4;$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

}₅

$$\begin{split} R_{0}^{\sharp^{i+1}} &= \top_{\mathrm{nr}} \\ R_{1}^{\sharp^{i+1}} &= R_{0}^{\sharp^{i+1}} \left[x \mapsto \geqslant 0 \right] \\ R_{2}^{\sharp^{i+1}} &= R_{1}^{\sharp^{i+1}} \left[y \mapsto \geqslant 0 \right] \sqcup_{\mathrm{nr}}^{\sharp} \\ R_{4}^{\sharp^{i}} \left[y \mapsto R_{4}^{\sharp^{i}} (y) +^{\sharp} (\geqslant 0) \right] \\ R_{3}^{\sharp^{i+1}} &= R_{2}^{\sharp^{i+1}} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp^{i+1}} (x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0 \right] \\ R_{4}^{\sharp^{i+1}} &= R_{3}^{\sharp^{i+1}} \left[x \mapsto R_{3}^{\sharp^{i+1}} (x) -^{\sharp} (\geqslant 0) \right] \\ R_{5}^{\sharp^{i+1}} &= R_{2}^{\sharp^{i+1}} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp^{i+1}} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0 \right] \end{split}$$

	1	$R_I^{\sharp 0}$	$R_I^{\sharp 1}$	$R_I^{\sharp 2}$	${R_I^{\sharp}}^3$
	0	(\bot,\bot)			
	1	(\bot,\bot)			
	2	(\perp, \perp)			
	1 2 3 4 5	(\perp, \perp)			
	4	(\bot,\bot)			
	5	(\perp, \perp)			
]	1	, ,			
]					

ONERA 49 / 75

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$0x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
$$3x = x - 2;$$

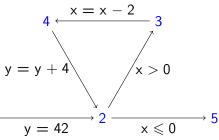
$$4y = y + 4;$$

$$y = y + 4;$$

$$x = rand(0, 12)$$

$$y = 42;$$

$$y = y + 4$$



$$\begin{split} R_{0}^{\sharp i+1} &= \mathsf{T}_{\mathrm{nr}} \\ R_{1}^{\sharp i+1} &= R_{0}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto \geqslant 0 \right] \\ R_{2}^{\sharp i+1} &= R_{1}^{\sharp i+1} \left[y \mapsto \geqslant 0 \right] \sqcup_{\mathrm{nr}}^{\sharp} \\ R_{4}^{\sharp i} \left[y \mapsto R_{4}^{\sharp i} (y) + ^{\sharp} (\geqslant 0) \right] \\ R_{3}^{\sharp i+1} &= R_{2}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp i+1} (x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0 \right] \\ R_{4}^{\sharp i+1} &= R_{3}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_{3}^{\sharp i+1} (x) - ^{\sharp} (\geqslant 0) \right] \\ R_{5}^{\sharp i+1} &= R_{2}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp i+1} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0 \right] \end{split}$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$0x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$

$$while _{2}(x > 0) \{$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4;$$

$$y = y + 4$$

$$x = x - 2$$

$$x > 0$$

$$x = rand(0, 12)$$

$$y = 42$$

$$R_{0}^{\sharp i+1} = \top_{\text{nr}} \qquad \frac{I \quad R_{I}^{\sharp 0} \quad R_{I}^{\sharp 1} \quad R_{I}^{\sharp 2} \quad R_{I}^{\sharp 3}}{0 \quad (\bot, \bot) \quad (\top, \top)}$$

$$R_{2}^{\sharp i+1} = R_{1}^{\sharp i+1} [y \mapsto \geqslant 0] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp} \qquad 2 \quad (\bot, \bot) \qquad (\geqslant 0, \top)$$

$$R_{3}^{\sharp i} = R_{1}^{\sharp i+1} [x \mapsto R_{4}^{\sharp i} (y) + \sharp (\geqslant 0)] \qquad 3 \quad (\bot, \bot)$$

$$R_{3}^{\sharp i+1} = R_{2}^{\sharp i+1} [x \mapsto R_{2}^{\sharp i+1} (x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0] \qquad 4 \quad (\bot, \bot)$$

$$R_{4}^{\sharp i+1} = R_{3}^{\sharp i+1} [x \mapsto R_{3}^{\sharp i+1} (x) - \sharp (\geqslant 0)]$$

$$R_{5}^{\sharp i+1} = R_{2}^{\sharp i+1} [x \mapsto R_{2}^{\sharp i+1} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0]$$

ONERA 49 / 75

$$\begin{split} R_{0}^{\sharp^{i+1}} &= \top_{\mathrm{nr}} \\ R_{1}^{\sharp^{i+1}} &= R_{0}^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto \geqslant 0] \\ R_{2}^{\sharp^{i+1}} &= R_{1}^{\sharp^{i+1}} [y \mapsto \geqslant 0] \sqcup_{\mathrm{nr}}^{\sharp} \\ R_{3}^{\sharp^{i+1}} &= R_{1}^{\sharp^{i+1}} [y \mapsto R_{4}^{\sharp^{i}}(y) + ^{\sharp}(\geqslant 0)] \\ R_{3}^{\sharp^{i+1}} &= R_{2}^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto R_{2}^{\sharp^{i+1}}(x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0] \\ R_{4}^{\sharp^{i+1}} &= R_{3}^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto R_{3}^{\sharp^{i+1}}(x) - ^{\sharp}(\geqslant 0)] \\ R_{5}^{\sharp^{i+1}} &= R_{2}^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto R_{2}^{\sharp^{i+1}} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0] \end{split}$$

I	$R_I^{\sharp 0}$	${R_I^\sharp}^1$	${R_I^{\sharp}}^2$	${R_I^{\sharp}}^3$
0	(\bot,\bot)	(\top, \top)	•	<u> </u>
1	(\bot,\bot)	$(\geqslant 0, \uparrow)$		
2	(\perp, \perp)	$(\geqslant 0,\geqslant 0)$		
3	(\perp, \perp)			
2 3 4 5	(\perp, \perp)			
5	(\bot,\bot)			
	(≥	$0,\geqslant 0)\sqcup_{\mathrm{nr}}^{\sharp}$	(\bot,\bot)	

ONERA 49 / 75

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$0x = rand(0, 12);_{1}y = 42; \qquad 4 \xleftarrow{x = x - 2} 3$$
while $_{2}(x > 0)$ {
$$_{3}x = x - 2;$$

$$_{4}y = y + 4; \qquad y = y + 4$$
}
$$0 \xrightarrow{x = rand(0, 12)} 1 \xrightarrow{y = 42} 2 \xrightarrow{x \le 0} 5$$

$$R_{0}^{\sharp i+1} = \top_{\text{nr}} \qquad \qquad \frac{I \mid R_{I}^{\sharp 0} \quad R_{I}^{\sharp 1} \quad R_{I}^{\sharp 2} \quad R_{I}^{\sharp 3}}{0 \mid (\bot, \bot) \quad (\top, \top)}$$

$$R_{1}^{\sharp i+1} = R_{0}^{\sharp i+1} [x \mapsto \geqslant 0] \qquad \qquad 1 \qquad (\downarrow, \bot) \quad (\downarrow, \bot) \qquad (\downarrow, \bot) \qquad$$

ONERA 49 / 75

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$0x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$

$$while _{2}(x > 0) \{$$

$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4;$$

$$y = y + 4$$

$$x = x - 2$$

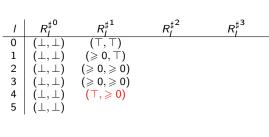
$$x > 0$$

$$x = rand(0, 12)$$

$$y = 42$$

$$x \le 0$$

$$\begin{split} R_{0}^{\sharp^{i+1}} &= \top_{\text{nr}} \\ R_{1}^{\sharp^{i+1}} &= R_{0}^{\sharp^{i+1}} \left[x \mapsto \geqslant 0 \right] \\ R_{2}^{\sharp^{i+1}} &= R_{1}^{\sharp^{i+1}} \left[y \mapsto \geqslant 0 \right] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp} \\ R_{4}^{\sharp^{i}} \left[y \mapsto R_{4}^{\sharp^{i}} (y) + ^{\sharp} (\geqslant 0) \right] \\ R_{3}^{\sharp^{i+1}} &= R_{2}^{\sharp^{i+1}} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp^{i+1}} (x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0 \right] \\ R_{4}^{\sharp^{i+1}} &= R_{3}^{\sharp^{i+1}} \left[x \mapsto R_{3}^{\sharp^{i+1}} (x) - ^{\sharp} (\geqslant 0) \right] \\ R_{5}^{\sharp^{i+1}} &= R_{2}^{\sharp^{i+1}} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp^{i+1}} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0 \right] \end{split}$$



Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$0x = rand(0, 12);_{1}y = 42; x = x - 2
while $_{2}(x > 0)$ {
 $_{3}x = x - 2;$
 $_{4}y = y + 4;$
 $_{5}$

$$0 \xrightarrow{x = rand(0, 12)} 1 \xrightarrow{y = 42} 2 \xrightarrow{x \le 0} 5$$$$

ONERA 49 / 75

$$0x = rand(0, 12); 1y = 42;$$
while $2(x > 0)$ {
$$3x = x - 2;$$

$$4y = y + 4;$$
}
$$0 \xrightarrow{x = rand(0, 12)} 1 \xrightarrow{x = rand(0, 12)} 1$$

$$4 \xleftarrow{x = x - 2} 3$$

$$y = y + 4 \xrightarrow{x > 0}$$

$$y = 42 \xrightarrow{x > 0} 5$$

$$\begin{split} R_{0}^{\sharp^{i+1}} &= \mathsf{T}_{\mathrm{nr}} \\ R_{1}^{\sharp^{i+1}} &= R_{0}^{\sharp^{i+1}} \left[x \mapsto \geqslant 0 \right] \\ R_{2}^{\sharp^{i+1}} &= R_{1}^{\sharp^{i+1}} \left[y \mapsto \geqslant 0 \right] \sqcup_{\mathrm{nr}}^{\sharp} \\ R_{4}^{\sharp^{i}} \left[y \mapsto R_{4}^{\sharp^{i}} (y) + \sharp^{\sharp} (\geqslant 0) \right] \\ R_{3}^{\sharp^{i+1}} &= R_{2}^{\sharp^{i+1}} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp^{i+1}} (x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0 \right] \\ R_{4}^{\sharp^{i+1}} &= R_{3}^{\sharp^{i+1}} \left[x \mapsto R_{3}^{\sharp^{i+1}} (x) - \sharp^{\sharp} (\geqslant 0) \right] \\ R_{5}^{\sharp^{i+1}} &= R_{2}^{\sharp^{i+1}} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp^{i+1}} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0 \right] \end{split}$$

I	$R_I^{\sharp 0}$	$R_I^{\sharp 1}$	${R_I^{\sharp}}^2$	$R_I^{\sharp 3}$
0	(\perp, \perp)	(\top, \top)	(\top, \top)	
1	(\bot,\bot)	$(\geqslant 0, \top)$		
2	(\bot,\bot)	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$		
3	(\bot,\bot)	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$		
4	(\bot,\bot)	$(\top,\geqslant 0)$		
5	(\perp, \perp)	$(0,\geqslant 0)$		

ONERA 49 / 75

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$0x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
$$_{3}x = x - 2;$$

$$_{4}y = y + 4;$$

$$y = y + 4$$
}
$$0 \xrightarrow{x = rand(0, 12)} 1 \xrightarrow{y = 42}$$

$$\begin{array}{lll} R_{0}^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} & & & & & & & & & & \\ R_{1}^{\sharp\,i+1} &= R_{0}^{\sharp\,i+1} \begin{bmatrix} x \mapsto \geqslant 0 \end{bmatrix} & & & & & & & \\ R_{2}^{\sharp\,i+1} &= R_{1}^{\sharp\,i+1} \begin{bmatrix} y \mapsto \geqslant 0 \end{bmatrix} \sqcup_{\mathrm{nr}}^{\sharp} & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & \\ & & & \\ & & & \\ & & \\ & & & \\ &$$

→ 1 2)	L —	y = 4	$\xrightarrow{2}$ 2	x ≤ 0	→ 5
	I	$R_I^{\sharp 0}$	${R_I^{\sharp}}^{1}$	$R_I^{\sharp 2}$	${R_I^{\sharp}}^3$
	0	(\perp, \perp)	(\top, \top)	(\top,\top)	<u> </u>
	1	(\bot, \bot)	$(\geqslant 0, \top)$	(≥ 0, ⊤)	
	2	(\bot,\bot)	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$		
	3	(\bot,\bot)	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$		
l	4	(\bot,\bot)	$(\top,\geqslant 0)$		
	5	(\bot,\bot)	$(0. \geq 0)$		

ONERA 49 / 75

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$_{0}x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$

while $_{2}(x > 0)$ {
 $_{3}x = x - 2;$
 $_{4}y = y + 4;$
 $y = 0$
 $_{2}x = rand(0, 12)$

$$4 \xleftarrow{x = x - 2} 3$$

$$y = y + 4 \xrightarrow{x > 0}$$

$$y = 42 \xrightarrow{x < 0}$$

$$\begin{split} R_{0}^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\ R_{1}^{\sharp\,i+1} &= R_{0}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto \geqslant 0 \right] \\ R_{2}^{\sharp\,i+1} &= R_{1}^{\sharp\,i+1} \left[y \mapsto \geqslant 0 \right] \sqcup_{\mathrm{nr}}^{\sharp} \\ R_{4}^{\sharp\,i} \left[y \mapsto R_{4}^{\sharp\,i} \left(y \right) + ^{\sharp} \left(\geqslant 0 \right) \right] \\ R_{3}^{\sharp\,i+1} &= R_{2}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp\,i+1} (x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0 \right] \\ R_{4}^{\sharp\,i+1} &= R_{3}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto R_{3}^{\sharp\,i+1} (x) - ^{\sharp} \left(\geqslant 0 \right) \right] \\ R_{5}^{\sharp\,i+1} &= R_{2}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp\,i+1} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0 \right] \end{split}$$

$$(\geqslant 0,\geqslant 0)\sqcup_{\mathrm{nr}}^\sharp (op,\geqslant 0)$$

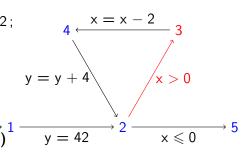
Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$0x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
$$_{3}x = x - 2;$$

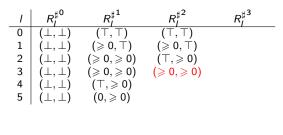
$$_{4}y = y + 4;$$

$$y = 0$$

$$x = rand(0, 12)$$



$$\begin{vmatrix} R_0^{\sharp^{i+1}} &= \top_{\text{nr}} \\ R_1^{\sharp^{i+1}} &= R_0^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto \geqslant 0] \\ R_2^{\sharp^{i+1}} &= R_1^{\sharp^{i+1}} [y \mapsto \geqslant 0] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp} \\ R_3^{\sharp^{i}} &= R_2^{\sharp^{i+1}} [y \mapsto R_2^{\sharp^{i}} (y) + \sharp^{i} (\geqslant 0)] \\ R_3^{\sharp^{i+1}} &= R_2^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto R_2^{\sharp^{i+1}} (x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0] \\ R_4^{\sharp^{i+1}} &= R_3^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto R_3^{\sharp^{i+1}} (x) - \sharp (\geqslant 0)] \\ R_5^{\sharp^{i+1}} &= R_2^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto R_3^{\sharp^{i+1}} (x) - \sharp (\geqslant 0)] \\ R_5^{\sharp^{i+1}} &= R_2^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto R_3^{\sharp^{i+1}} (x) - \sharp (\geqslant 0)] \\ R_5^{\sharp^{i+1}} &= R_2^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto R_3^{\sharp^{i+1}} (x) - \sharp (\geqslant 0)] \\ \end{vmatrix}$$



$$0x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
$$_{3}x = x - 2;$$

$$_{4}y = y + 4;$$
}
$$0 \xrightarrow[x = rand(0, 12)]{} 1 \xrightarrow[x = rand(0, 12)]{} 1$$

$$y = y + 4$$

$$y = 42$$

$$x > 0$$

$$x > 0$$

$$x \le 0$$

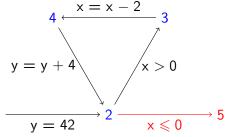
$$\begin{split} R_{0}^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\ R_{1}^{\sharp\,i+1} &= R_{0}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto \geqslant 0 \right] \\ R_{2}^{\sharp\,i+1} &= R_{1}^{\sharp\,i+1} \left[y \mapsto \geqslant 0 \right] \sqcup_{\mathrm{nr}}^{\sharp} \\ R_{2}^{\sharp\,i} &= R_{1}^{\sharp\,i+1} \left[y \mapsto R_{4}^{\sharp\,i} \left(y \right) +^{\sharp} \left(\geqslant 0 \right) \right] \\ R_{3}^{\sharp\,i+1} &= R_{2}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp\,i+1} (x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0 \right] \\ R_{4}^{\sharp\,i+1} &= R_{3}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto R_{3}^{\sharp\,i+1} (x) -^{\sharp} \left(\geqslant 0 \right) \right] \\ R_{5}^{\sharp\,i+1} &= R_{2}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp\,i+1} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0 \right] \end{split}$$

I	${R_{t}^{\sharp}}^{0}$	${R_t^{\sharp}}^{1}$	$R_{t}^{\sharp 2}$	${R_t^{\sharp}}^3$
0	(\bot,\bot)	(⊤,⊤)	(⊤, ⊤)	
1	(\perp, \perp)	$(\geqslant 0, \uparrow)$	$(\geqslant 0, \top)$	
2	(\perp, \perp)	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	
3	(\bot,\bot)	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	
4	(\bot,\bot)	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	
5	(\bot,\bot)	$(0,\geqslant 0)$		
	•			

ONERA 49 / 75

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$_{0}x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
 $_{3}x = x - 2;$
 $_{4}y = y + 4;$
}
$$0 \xrightarrow[x = rand(0, 12)]{} 1 \xrightarrow[x = rand(0, 12)]{} 1$$



$$\begin{split} R_{0}^{\sharp^{i+1}} &= \top_{\text{nr}} \\ R_{1}^{\sharp^{i+1}} &= R_{0}^{\sharp^{i+1}} \left[x \mapsto \geqslant 0 \right] \\ R_{2}^{\sharp^{i+1}} &= R_{1}^{\sharp^{i+1}} \left[y \mapsto \geqslant 0 \right] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp} \\ R_{4}^{\sharp^{i}} \left[y \mapsto R_{4}^{\sharp^{i}} \left(y \right) + \sharp^{\sharp} \left(\geqslant 0 \right) \right] \\ R_{3}^{\sharp^{i+1}} &= R_{2}^{\sharp^{i+1}} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp^{i+1}} (x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0 \right] \\ R_{4}^{\sharp^{i+1}} &= R_{3}^{\sharp^{i+1}} \left[x \mapsto R_{3}^{\sharp^{i+1}} (x) - \sharp^{\sharp} \left(\geqslant 0 \right) \right] \\ R_{5}^{\sharp^{i+1}} &= R_{2}^{\sharp^{i+1}} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp^{i+1}} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0 \right] \end{split}$$

	1	$R_I^{\sharp 0}$	$R_I^{\sharp 1}$	$R_I^{\sharp 2}$	$R_I^{\sharp 3}$
	0	(\bot,\bot)	(\top, \top)	(\top, \top)	
	1	(\bot,\bot)	(≥ 0, ⊤)	(≥ 0, ⊤)	
	2	(\perp, \perp)	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\top, \geqslant 0)$	
	3	(\bot,\bot)	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	
	4	(\bot,\bot)	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	
	5	(\bot,\bot)	$(0,\geqslant 0)$	$(\leqslant 0, \geqslant 0)$	
١٦					
']					

ONERA 49 / 75

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$_{0}x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
 $_{3}x = x - 2;$
 $_{4}y = y + 4;$
 $y = 3$

$$4 \stackrel{x = x - 2}{\longleftarrow} 3$$

$$y = y + 4 \qquad x > 0$$

$$y = 42 \qquad x \leq 0 \qquad 5$$

$$\begin{array}{c} 0 \\ \overline{\mathbf{x} = \mathsf{rand} \big(0, \ 12 \big)} 1 \end{array} \xrightarrow{ \mathbf{y} = 42} 2 \xrightarrow{ } 2 \xrightarrow{ } \\ \begin{matrix} R_0^{\sharp i+1} = \top_{\mathrm{nr}} \\ R_1^{\sharp i+1} = R_0^{\sharp i+1} \left[x \mapsto \geqslant 0 \right] \\ R_2^{\sharp i+1} = R_1^{\sharp i+1} \left[y \mapsto \geqslant 0 \right] \sqcup_{\mathrm{nr}}^{\sharp} \\ R_2^{\sharp i+1} = R_1^{\sharp i+1} \left[y \mapsto R_4^{\sharp i} \left(y \right) + \sharp \left(\geqslant 0 \right) \right] \\ R_3^{\sharp i+1} = R_2^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_2^{\sharp i+1} \left(x \right) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0 \right] \\ R_4^{\sharp i+1} = R_3^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_3^{\sharp i+1} \left(x \right) - \sharp \left(\geqslant 0 \right) \right] \\ R_4^{\sharp i+1} = R_3^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_3^{\sharp i+1} \left(x \right) - \sharp \left(\geqslant 0 \right) \right] \\ R_5^{\sharp i+1} = R_2^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_2^{\sharp i+1} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0 \right] \\ \end{array}$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$0x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$

$$while _{2}(x > 0) \{$$

$$3x = x - 2;$$

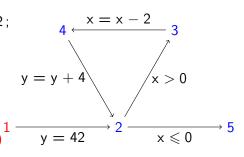
$$4y = y + 4;$$

$$y = y + 4$$

$$x = x - 2$$

$$y = y + 4$$

$$y = y + 4$$



$$R_{0}^{\sharp i+1} = \top_{\text{nr}}$$

$$R_{1}^{\sharp i+1} = R_{0}^{\sharp i+1} \begin{bmatrix} x \mapsto \geqslant 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{2}^{\sharp i+1} = R_{1}^{\sharp i+1} \begin{bmatrix} y \mapsto \geqslant 0 \end{bmatrix} \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp}$$

$$R_{4}^{\sharp i} \begin{bmatrix} y \mapsto R_{4}^{\sharp i}(y) + ^{\sharp}(\geqslant 0) \end{bmatrix}$$

$$R_{3}^{\sharp i+1} = R_{2}^{\sharp i+1} \begin{bmatrix} x \mapsto R_{2}^{\sharp i+1}(x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0 \end{bmatrix}$$

$$R_{4}^{\sharp i+1} = R_{3}^{\sharp i+1} \begin{bmatrix} x \mapsto R_{3}^{\sharp i+1}(x) - ^{\sharp}(\geqslant 0) \end{bmatrix}$$

$$R_{5}^{\sharp i+1} = R_{2}^{\sharp i+1} \begin{bmatrix} x \mapsto R_{2}^{\sharp i+1} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0 \end{bmatrix}$$

1	$R_I^{\sharp 0}$	${R_I^{\sharp}}^1$	$R_I^{\sharp 2}$	$R_I^{\sharp 3}$
0	(\bot,\bot)	(\top, \top)	(\top, \top)	(\top, \top)
1	(\bot,\bot)	$(\geqslant 0, \top)$	$(\geqslant 0, \top)$	(≥ 0, ⊤)
2	(\bot, \bot)	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	
3	(\bot,\bot)	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	
4	(\bot,\bot)	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	
5	(\bot,\bot)	$(0, \ge 0)$	$(\leqslant 0,\geqslant 0)$	

$$_{0}x = \text{rand}(0, 12);_{1}y = 42;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
 $_{3}x = x - 2;$
 $_{4}y = y + 4;$
 $y = y$
}
 $_{5}$

$$0 \xrightarrow{x = rand(0, 12)} 1$$

$$\begin{array}{c} 0 \\ x = \text{rand} \big(0,\ 12\big) \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ y = 42 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2 \\ x \leqslant 0 \end{array} \\ \\ R_0^{\sharp^{i+1}} = \top_{\text{nr}} \\ R_1^{\sharp^{i+1}} = R_0^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto \geqslant 0] \\ R_2^{\sharp^{i+1}} = R_1^{\sharp^{i+1}} [y \mapsto \geqslant 0] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp} \\ R_2^{\sharp^{i+1}} = R_1^{\sharp^{i+1}} [y \mapsto \geqslant 0] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp} \\ R_2^{\sharp^{i}} = R_1^{\sharp^{i+1}} [y \mapsto \geqslant 0] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp} \\ R_3^{\sharp^{i}} = R_2^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto R_2^{\sharp^{i}} (y) + \sharp^{\sharp} (\geqslant 0)] \\ R_3^{\sharp^{i+1}} = R_2^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto R_2^{\sharp^{i+1}} (x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0] \\ R_3^{\sharp^{i+1}} = R_3^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto R_2^{\sharp^{i+1}} (x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0] \\ R_4^{\sharp^{i+1}} = R_3^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto R_3^{\sharp^{i+1}} (x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0] \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ X \leqslant 0 \\ X \leqslant 0 \\ X \leqslant 0 \end{array}$$

 $(0, \geq 0)$

$$(\geqslant 0,\geqslant 0)\sqcup_{\mathrm{nr}}^\sharp (\top,\geqslant 0)$$

49 / 75

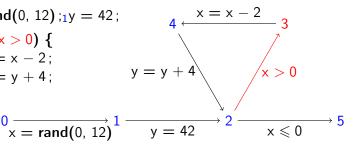
 $(\leqslant 0, \geqslant 0)$

 $(\geqslant 0, \top)$

49 / 75

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$_{0}x = \text{rand}(0, 12);_{1}y = 42;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
 $_{3}x = x - 2;$
 $_{4}y = y + 4;$
}5



$$\begin{split} R_{0}^{\sharp\,i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\ R_{1}^{\sharp\,i+1} &= R_{0}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto \geqslant 0 \right] \\ R_{2}^{\sharp\,i+1} &= R_{1}^{\sharp\,i+1} \left[y \mapsto \geqslant 0 \right] \sqcup_{\mathrm{nr}}^{\sharp} \\ R_{4}^{\sharp\,i} \left[y \mapsto R_{4}^{\sharp\,i} \left(y \right) + ^{\sharp} \left(\geqslant 0 \right) \right] \\ R_{3}^{\sharp\,i+1} &= R_{2}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp\,i+1} \left(x \right) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0 \right] \\ R_{4}^{\sharp\,i+1} &= R_{3}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto R_{3}^{\sharp\,i+1} \left(x \right) - ^{\sharp} \left(\geqslant 0 \right) \right] \\ R_{5}^{\sharp\,i+1} &= R_{2}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp\,i+1} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0 \right] \end{split}$$

1	$R_I^{\sharp 0}$	${R_I^{\sharp}}^{1}$	$R_I^{\sharp 2}$	$R_I^{\sharp 3}$
0	(\bot,\bot)	(\top, \top)	(\top, \top)	(\top, \top)
1	(\bot, \bot)	$(\geqslant 0, \top)$	$(\geqslant 0, \top)$	$(\geqslant 0, \top)$
2	(\bot,\bot)	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\top, \geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$
3	(\bot,\bot)	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$
4	(\bot,\bot)	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	
5	(\bot,\bot)	$(0,\geqslant 0)$	$(\leqslant 0, \geqslant 0)$	

ONERA 49 / 75

Exemple de calcul du point fixe abstrait

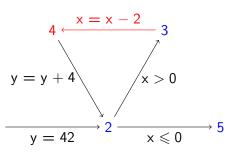
$$_{0}x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$

while $_{2}(x > 0)$ {
 $_{3}x = x - 2;$
 $_{4}y = y + 4;$
}₅

 $R_2^{\downarrow i+1} = R_{1,r}^{\downarrow i+1} \left[y \mapsto \geqslant 0 \right] \sqcup_{nr}^{\sharp}$

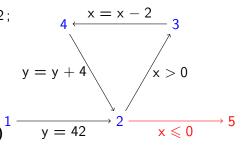
 $R_5^{\sharp i+1} = R_2^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_2^{\sharp i+1} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0 \right]$

$$0 \xrightarrow{\times = \operatorname{rand}(0, 12)}$$

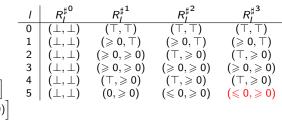


$$\begin{split} R_{0}^{\sharp i+1} &= \top_{\text{nr}} \\ R_{1}^{\sharp i+1} &= R_{0}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto \geqslant 0 \right] \\ R_{2}^{\sharp i+1} &= R_{1}^{\sharp i+1} \left[y \mapsto \geqslant 0 \right] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp} \\ R_{3}^{\sharp i} \left[y \mapsto R_{4}^{\sharp i} \left(y \right) +^{\sharp} \left(\geqslant 0 \right) \right] \\ R_{3}^{\sharp i+1} &= R_{2}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp i+1} (x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0 \right] \\ R_{4}^{\sharp i+1} &= R_{3}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_{3}^{\sharp i+1} (x) -^{\sharp} \left(\geqslant 0 \right) \right] \\ R_{5}^{\sharp i+1} &= R_{2}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp i+1} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0 \right] \end{split}$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait



$$\begin{array}{lll} R_{0}^{\sharp i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} & & & & & & & & & \\ R_{1}^{\sharp i+1} &= R_{0}^{\sharp i+1} & [x \mapsto \geqslant 0] & & & & & & \\ R_{2}^{\sharp i+1} &= R_{1}^{\sharp i+1} & [y \mapsto \geqslant 0] \sqcup_{\mathrm{nr}}^{\mathrm{nr}} & & & & & \\ R_{2}^{\sharp i+1} &= R_{1}^{\sharp i+1} & [y \mapsto \geqslant 0] \sqcup_{\mathrm{nr}}^{\mathrm{nr}} & & & & & \\ & & & & & & & & \\ R_{3}^{\sharp i+1} &= R_{2}^{\sharp i+1} & [x \mapsto R_{2}^{\sharp i+1}(x) \sqcap^{\sharp} \geqslant 0] & & & & & \\ R_{3}^{\sharp i+1} &= R_{3}^{\sharp i+1} & [x \mapsto R_{3}^{\sharp i+1}(x) -^{\sharp} (\geqslant 0)] & & & & & \\ R_{5}^{\sharp i+1} &= R_{2}^{\sharp i+1} & [x \mapsto R_{2}^{\sharp i+1} \sqcap^{\sharp} \leqslant 0] & & & & \\ \end{array}$$



1	$R_I^{\sharp 0}$	$R_I^{\sharp 1}$	$R_I^{\sharp 2}$	$R_I^{\sharp 3}$
0	(\perp, \perp)	(\top, \top)	(\top, \top)	(\top,\top)
1	(\bot,\bot)	$(\geqslant 0, \top)$	$(\geqslant 0, \top)$	$(\geqslant 0, \top)$
2	(\perp, \perp)	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$
3	(\bot,\bot)	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$	$(\geqslant 0, \geqslant 0)$
4	(\bot,\bot)	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$	$(\top,\geqslant 0)$
5	(\bot,\bot)	$(0,\geqslant 0)$	$(\leqslant 0, \geqslant 0)$	$(\leqslant 0, \geqslant 0)$

On a atteint le point fixe!

49 / 75

Correction et terminaison

Théorème (correction)

La sémantique abstraite est une sur-approximation correcte de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_I \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_I^\sharp\right)$$

Correction et terminaison

Théorème (correction)

La sémantique abstraite est une sur-approximation correcte de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_I \subseteq \gamma_{
m nr}\left(R_I^\sharp
ight)$$

Propriété (terminaison)

Le calcul du point fixe par itérations termine.

Correction et terminaison

Théorème (correction)

La sémantique abstraite est une *sur-approximation correcte* de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_I \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_I^\sharp\right)$$

Propriété (terminaison)

Le calcul du point fixe par itérations termine.

Démonstration.

 \mathcal{D}^\sharp est fini donc $L o \left(\mathbb{V} o \mathcal{D}^\sharp
ight)$ également donc la suite croissante $\left(R^{\sharp n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Rappels sur la sémantique concrète

Abstractions non relationnelles

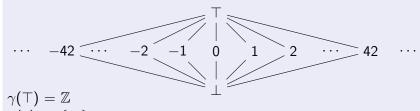
Constantes

Domaine des constantes

Définition

 $\gamma(\perp) = \emptyset$

Treillis des constantes $(\mathcal{D}^{\sharp}, \sqsubseteq^{\sharp})$

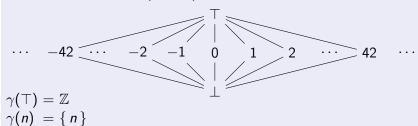


51 / 75

Domaine des constantes

Définition

Treillis des constantes $(\mathcal{D}^{\sharp}, \sqsubseteq^{\sharp})$



Remarque

 $\gamma(\perp) = \emptyset$

L'ordre \sqsubseteq^{\sharp} ci dessus est correct par rapport à l'ordre \subseteq sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

Domaine des constantes, meilleure abstraction

Remarque

On a bien une correspondance de Galois avec

$$\alpha(S) = \begin{cases} \top & \text{si } \operatorname{card}(S) \geqslant 2\\ n & \text{si } S = \{n\}\\ \bot & \text{si } S = \emptyset \end{cases}$$

ONERA 52 / 75

Domaine des constantes, opérations arithmétiques abstraites

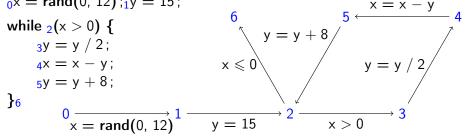
Domaine des constantes, opérations arithmétiques abstraites

54 / 75

Exemple de calcul du point fixe abstrait $_{0}x = rand(0, 12);_{1}y = 15;$

while
$$_{2}(x > 0)$$
 {
 $_{3}y = y / 2$;
 $_{4}x = x - y$;
 $_{5}y = y + 8$;
}

$$0 \xrightarrow{x = \text{rand}(0, 12)}$$



$$R_{0}^{\sharp i+1} = \top_{\text{nr}}
R_{1}^{\sharp i+1} = R_{0}^{\sharp i+1} [x \mapsto \top]
R_{2}^{\sharp i+1} = R_{1}^{\sharp i+1} [y \mapsto 15] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp}
R_{5}^{\sharp i} [y \mapsto R_{5}^{\sharp i} (y) + {}^{\sharp} 8]
R_{3}^{\sharp i+1} = R_{2}^{\sharp i+1} [y \mapsto R_{3}^{\sharp i+1} (y)/{}^{\sharp} 2]
R_{5}^{\sharp i+1} = R_{3}^{\sharp i+1} [x \mapsto R_{4}^{\sharp i+1} (x) - {}^{\sharp} R_{4}^{\sharp i+1} (y)]
R_{5}^{\sharp i+1} = R_{4}^{\sharp i+1} = R_{5}^{\sharp i+1}$$

Domaine des constantes, opérations arithmétiques abstraites

$$\left\{ \begin{array}{ll} \top & \text{si } x^{\sharp} = \top \text{ ou } y^{\sharp} = \top \\ n_1 + n_2 & \text{si } x^{\sharp} = n_1 \text{ et } y^{\sharp} = n_2 \\ \bot & \text{si } x^{\sharp} = \bot \text{ ou } y^{\sharp} = \bot \end{array} \right.$$

ox = rand(0, 12);
$$y = 15$$
;
while $2(x > 0)$ {
$$3y = y / 2;$$

$$4x = x - y;$$

$$5 = y + 8;$$

$$4x = x - y;$$

$$5y = y + 8;$$

$$x = x - y$$

$$x \le 0$$

$$y = y / 2 / 2$$

$$x = x - y$$

$$x = y + 8 / 3$$

$$x = x - y$$

$$x = y + 8 / 3$$

$$x = x - y$$

$$x = y + 8 / 3$$

$$x = x - y$$

$$x = y + 8 / 3$$

$$x = x - y$$

$$x = y + 8 / 3$$

$$x = x - y$$

$$x = y + 8 / 3$$

$$x = x - y$$

$$x = y + 8 / 3$$

$$x = x - y$$

$$x = y + 8 / 3$$

$$x = x - y$$

$$x = y / 2 / 3$$

$$x = x - y$$

$$y = y / 2 / 3$$

$$x = x - y$$

$$y = y / 2 / 3$$

$$x = x - y$$

$$x = x - y$$

$$y = y / 2 / 3$$

$$x = x - y$$

$$y = y / 2 / 3$$

$$x = x - y$$

$$\begin{split} R_{0}^{\sharp i+1} &= \top_{\mathrm{nr}} \\ R_{1}^{\sharp i+1} &= R_{0}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto \top \right] \\ R_{2}^{\sharp i+1} &= R_{1}^{\sharp i+1} \left[y \mapsto 15 \right] \sqcup_{\mathrm{nr}}^{\sharp} \\ R_{5}^{\sharp i} \left[y \mapsto R_{5}^{\sharp i} (y) +^{\sharp} 8 \right] \\ R_{3}^{\sharp i+1} &= R_{2}^{\sharp i+1} \\ R_{4}^{\sharp i+1} &= R_{3}^{\sharp i+1} \left[y \mapsto R_{3}^{\sharp i+1} (y) /^{\sharp} 2 \right] \\ R_{5}^{\sharp i+1} &= R_{4}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_{4}^{\sharp i+1} (x) -^{\sharp} R_{4}^{\sharp i+1} (y) \right] \\ R_{6}^{\sharp i+1} &= R_{2}^{\sharp i+1} \end{split}$$

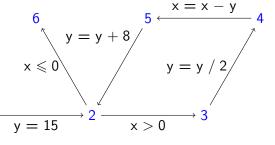
1	$R_I^{\sharp 0}$	${R_I^\sharp}^1$	$R_I^{\sharp 2}$
0	(\bot,\bot)	•	
1	(\bot,\bot)		
2	(\bot,\bot)		
1 2 3	(\bot, \bot)		
	(\perp, \perp)		
5	(\perp, \perp)		
4 5 6	(\perp, \perp)		
О	$ (\perp, \perp)$		

ONERA 55 / 75

55 / 75

Exemple de calcul du point fixe abstrait

ox = rand(0, 12);₁y = 15;
while
$$_{2}(x > 0)$$
 {
 $_{3}y = y / 2;$
 $_{4}x = x - y;$
 $_{5}y = y + 8;$
}₆



$$\begin{split} R_{0}^{\sharp i+1} &= \top_{\text{nr}} \\ R_{1}^{\sharp i+1} &= R_{0}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto \top \right] \\ R_{2}^{\sharp i+1} &= R_{1}^{\sharp i+1} \left[y \mapsto 15 \right] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp} \\ R_{5}^{\sharp i} \left[y \mapsto R_{5}^{\sharp i} (y) + {}^{\sharp} 8 \right] \\ R_{3}^{\sharp i+1} &= R_{3}^{\sharp i+1} \\ R_{4}^{\sharp i+1} &= R_{3}^{\sharp i+1} \left[y \mapsto R_{3}^{\sharp i+1} (y) / {}^{\sharp} 2 \right] \\ R_{5}^{\sharp i+1} &= R_{4}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_{4}^{\sharp i+1} (x) - {}^{\sharp} R_{4}^{\sharp i+1} (x) \right] \\ R_{5}^{\sharp i+1} &= R_{4}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_{4}^{\sharp i+1} (x) - {}^{\sharp} R_{4}^{\sharp i+1} (x) \right] \end{split}$$

1	$R_I^{\sharp 0}$	${R_I^{\sharp}}^{1}$	$R_I^{\sharp 2}$	
0	(\bot,\bot)	(\top, \top)		
1	(\bot, \bot)			
2	(\bot,\bot)			
3	(\bot,\bot)			
4	(\bot,\bot)			
4 5 6	(\bot,\bot)			
6	(\bot,\bot)			

ONERA 55 / 75

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$\begin{array}{lll} \text{ox} = \text{rand(0, 12)};_{1}y = 15; & & & & \\ & \text{while }_{2}(x > 0) \text{ } \{ & & & \\ & \text{3y} = \text{y } / \text{ 2}; & & \\ & \text{4x} = \text{x} - \text{y}; & & \\ & \text{5y} = \text{y} + \text{8}; & & \\ & \text{1} & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & &$$

$$R_{0}^{\sharp i+1} = \top_{\text{nr}}$$

$$R_{1}^{\sharp i+1} = R_{0}^{\sharp i+1} \begin{bmatrix} x \mapsto \top \end{bmatrix}$$

$$R_{2}^{\sharp i+1} = R_{1}^{\sharp i+1} \begin{bmatrix} y \mapsto 15 \end{bmatrix} \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp}$$

$$R_{5}^{\sharp i} \begin{bmatrix} y \mapsto R_{5}^{\sharp i}(y) + {\sharp} 8 \end{bmatrix}$$

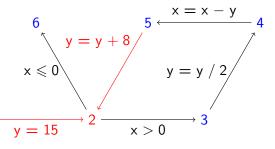
$$R_{4}^{\sharp i+1} = R_{3}^{\sharp i+1} \begin{bmatrix} y \mapsto R_{3}^{\sharp i+1}(y)/{\sharp} 2 \end{bmatrix}$$

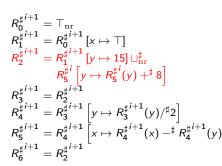
$$R_{5}^{\sharp i+1} = R_{4}^{\sharp i+1} \begin{bmatrix} x \mapsto R_{4}^{\sharp i+1}(x) - {\sharp} R_{4}^{\sharp i+1}(y) \end{bmatrix}$$

$$R_{6}^{\sharp i+1} = R_{2}^{\sharp i+1}$$

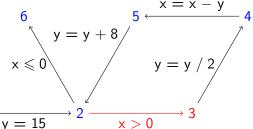
Exemple de calcul du point fixe abstrait

 $0x = rand(0, 12);_{1}y = 15;$ while $_{2}(x > 0)$ { 3y = y / 2; 4x = x - y; 5y = y + 8;}6 $0 \xrightarrow{x = rand(0, 12)} 1$





 $(op,15)\sqcup_{\mathrm{nr}}^\sharp (ot,ot)$



$$\begin{split} R_0^{\sharp i+1} &= \top_{\text{nr}} \\ R_1^{\sharp i+1} &= R_0^{\sharp i+1} \left[x \mapsto \top \right] \\ R_2^{\sharp i+1} &= R_1^{\sharp i+1} \left[y \mapsto 15 \right] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp} \\ R_5^{\sharp i} \left[y \mapsto R_5^{\sharp i} (y) + {}^{\sharp} 8 \right] \\ R_3^{\sharp i+1} &= R_3^{\sharp i+1} \\ R_4^{\sharp i+1} &= R_3^{\sharp i+1} \left[y \mapsto R_3^{\sharp i+1} (y) / {}^{\sharp} 2 \right] \\ R_5^{\sharp i+1} &= R_4^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_4^{\sharp i+1} (x) - {}^{\sharp} R_4^{\sharp i+1} (y) \right] \\ R_6^{\sharp i+1} &= R_2^{\sharp i+1} \end{aligned}$$

I	$R_I^{\sharp 0}$	${R_I^{\sharp}}^{1}$	$R_I^{\sharp 2}$
0	(\bot,\bot)	(\top, \top)	
1	(\perp, \perp)	(\top, \top)	
2	(\bot,\bot)	$(\top, 15)$	
2	(\bot,\bot)	$(\top, 15)$	
4	(\perp, \perp)		
5	(\perp, \perp)		
6	(\perp, \perp)		
	, , ,		

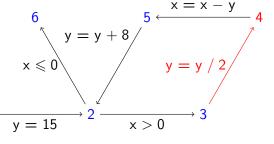
ONERA 55 / 75

55 / 75

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$0x = rand(0, 12);_1y = 15;$$

while $2(x > 0)$ {
 $3y = y / 2;$
 $4x = x - y;$
 $5y = y + 8;$
}6



$$R_{0}^{\sharp^{i+1}} = \top_{\text{nr}}$$

$$R_{1}^{\sharp^{i+1}} = R_{0}^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto \top]$$

$$R_{2}^{\sharp^{i+1}} = R_{1}^{\sharp^{i+1}} [y \mapsto 15] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp}$$

$$R_{5}^{\sharp^{i}} [y \mapsto R_{5}^{\sharp^{i}} (y) + {}^{\sharp} 8]$$

$$R_{3}^{\sharp^{i+1}} = R_{2}^{\sharp^{i+1}}$$

$$R_{4}^{\sharp^{i+1}} = R_{3}^{\sharp^{i+1}} [y \mapsto R_{3}^{\sharp^{i+1}} (y) / {}^{\sharp} 2]$$

$$R_{5}^{\sharp^{i+1}} = R_{4}^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto R_{4}^{\sharp^{i+1}} (x) - {}^{\sharp} R_{4}^{\sharp^{i+1}} (y) / {}^{\sharp} R_{5}^{\sharp^{i+1}} = R_{2}^{\sharp^{i+1}}$$

1	$R_I^{\sharp 0}$	${R_I^\sharp}^1$	$R_I^{\sharp 2}$	
0	(\bot,\bot)	(\top,\top)	-	
1	(\bot, \bot)	(\top, \top)		
2	(\bot,\bot)	$(\top, 15)$		
3	(\perp, \perp)	$(\top, 15)$		
4	(\perp, \perp)	$(\top,7)$		
5	(\bot,\bot)			
6	(\perp, \perp)			
	, , ,			

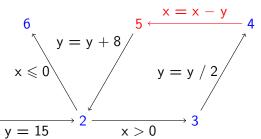
Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$0x = rand(0, 12); 1y = 15;$$

while $2(x > 0)$ {

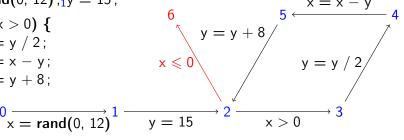
 $3y = y / 2;$
 $4x = x - y;$
 $5y = y + 8;$
}

 $0 \xrightarrow{x = rand(0, 12)} 1 \xrightarrow{y = 15}$



Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$_{0}x = rand(0, 12);_{1}y = 15;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
 $_{3}y = y / 2;$
 $_{4}x = x - y;$
 $_{5}y = y + 8;$
}



$R_0^{\sharp i+1} = \top_{\text{nr}} \\ R_1^{\sharp i+1} = R_0^{\sharp i+1} [x \mapsto \top]$
$R_2^{\frac{1}{p}i+1} = R_1^{\frac{1}{p}i+1} [y \mapsto 15] \sqcup_{\mathrm{nr}}^{\sharp}$
$R_5^{\sharp i}\left[y\mapsto R_5^{\sharp i}(y)+^{\sharp}8\right]$
$R_3^{\sharp i+1} = R_2^{\sharp i+1}$
$R_4^{\sharp l+1} = R_3^{\sharp l+1} \mid y \mapsto R_3^{\sharp l+1}(y)/\sharp 2 \mid$
$R_5^{\sharp i+1} = R_4^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_4^{\sharp i+1}(x) - {}^{\sharp} R_4^{\sharp i+1}(y) \right]$
$R_6^{\sharp i+1} = R_2^{\sharp i+1}$

$ \begin{array}{c cccc} 0 & (\bot,\bot) & (\top,\top) \\ 1 & (\bot,\bot) & (\top,\top) \\ 2 & (\bot,\bot) & (\top,15) \\ 3 & (\bot,\bot) & (\top,15) \end{array} $
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
$3 \mid (\perp, \perp) (\top, 15)$
$3 \mid (\perp, \perp) (\top, 15)$
$4\mid (\perp,\perp) \qquad (\top,7)$
$5 \mid (\bot, \bot) (\top, 7)$
$6 \mid (\perp, \perp) (\top, 15)$

$$0x = rand(0, 12);_{1}y = 15;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
$$3y = y / 2;$$

$$_{4}x = x - y;$$

$$_{5}y = y + 8;$$
}
$$0 \longrightarrow 1$$

$$\begin{array}{c}
6 \\
y = y + 8
\end{array}$$

$$x = x - y \\
4 \\
y = y / 2$$

$$y = 15$$

$$x > 0$$

$$x = x - y \\
4 \\
y = y / 2$$

$$\begin{split} R_{0}^{\sharp i+1} &= \top_{\text{nr}} \\ R_{1}^{\sharp i+1} &= R_{0}^{\sharp i+1} [x \mapsto \top] \\ R_{2}^{\sharp i+1} &= R_{1}^{\sharp i+1} [y \mapsto 15] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp} \\ R_{5}^{\sharp i} \left[y \mapsto R_{5}^{\sharp i} (y) +^{\sharp} 8 \right] \\ R_{3}^{\sharp i+1} &= R_{2}^{\sharp i+1} \\ R_{4}^{\sharp i+1} &= R_{3}^{\sharp i+1} \left[y \mapsto R_{3}^{\sharp i+1} (y) /^{\sharp} 2 \right] \\ R_{5}^{\sharp i+1} &= R_{4}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_{4}^{\sharp i+1} (x) -^{\sharp} R_{4}^{\sharp i+1} (y) \right] \\ R_{6}^{\sharp i+1} &= R_{2}^{\sharp i+1} \end{aligned}$$

	$R_I^{\sharp 0}$	$R_I^{\sharp 1}$	$R_I^{\sharp 2}$
0	(\perp, \perp)	(\top, \top)	(\top, \top)
1	(\bot, \bot)	(\top, \top)	
2	(\bot,\bot)	$(\top, 15)$	
3	(\perp, \perp)	$(\top, 15)$	
4	(\perp, \perp)	$(\top,7)$	
5	(\perp, \perp)	$(\top,7)$	
6	(\perp, \perp)	$(\top, 15)$	

ONERA 55 / 75

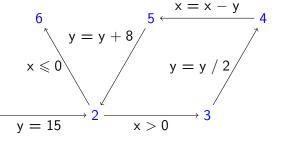
55 / 75

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$0x = rand(0, 12);_{1}y = 15;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
$$_{3}y = y / 2;$$

$$_{4}x = x - y;$$

$$_{5}y = y + 8;$$
}₆



$$R_{0}^{\sharp i+1} = \top_{\text{nr}}$$

$$R_{1}^{\sharp i+1} = R_{0}^{\sharp i+1} [x \mapsto \top]$$

$$R_{2}^{\sharp i+1} = R_{1}^{\sharp i+1} [y \mapsto 15] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp}$$

$$R_{5}^{\sharp i} [y \mapsto R_{5}^{\sharp i}(y) + {}^{\sharp} 8]$$

$$R_{3}^{\sharp i+1} = R_{2}^{\sharp i+1}$$

$$R_{4}^{\sharp i+1} = R_{3}^{\sharp i+1} [y \mapsto R_{3}^{\sharp i+1}(y)/{}^{\sharp} 2]$$

$$R_{5}^{\sharp i+1} = R_{4}^{\sharp i+1} [x \mapsto R_{4}^{\sharp i+1}(x) - {}^{\sharp} R_{4}^{\sharp i+1}(x)$$

$$R_{5}^{\sharp i+1} = R_{5}^{\sharp i+1}$$

1	$R_I^{\sharp 0}$	${R_I^\sharp}^1$	${R_I^{\sharp}}^2$
0	(\bot,\bot)	(\top,\top)	(\top,\top)
1	(\bot, \bot)	(\top, \top)	(\top, \top)
2	(\bot,\bot)	$(\top, 15)$	
3	(\perp, \perp)	$(\top, 15)$	
4	(\perp, \perp)	$(\top,7)$	
5	(\perp, \perp)	$(\top,7)$	
6	(\perp, \perp)	(⊤, 15́)	
	, , ,	,	

ONERA 55 / 75

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$0x = rand(0, 12);_{1}y = 15;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
$$3y = y / 2;$$

$$4x = x - y;$$

$$5y = y + 8;$$

$$0$$

$$x = rand(0, 12)$$

$$y = 15$$

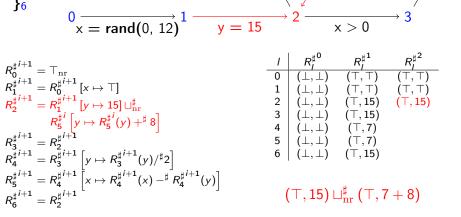
$$0$$

$$x = rand(0, 12)$$

$$y = 15$$

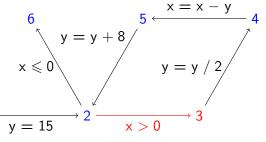
$$0$$

$$x = rand(0, 12)$$



Exemple de calcul du point fixe abstrait

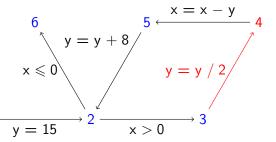
ox = rand(0, 12);₁y = 15; while $_{2}(x > 0)$ { $_{3}y = y / 2$; $_{4}x = x - y$; $_{5}y = y + 8$; }6 $_{x = rand(0, 12)}^{0}$



$$\begin{split} R_{0}^{\sharp\,i+1} &= \top_{\text{nr}} \\ R_{1}^{\sharp\,i+1} &= R_{0}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto \top \right] \\ R_{2}^{\sharp\,i+1} &= R_{1}^{\sharp\,i+1} \left[y \mapsto 15 \right] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp} \\ R_{5}^{\sharp\,i} \left[y \mapsto R_{5}^{\sharp\,i}(y) + {}^{\sharp}\,8 \right] \\ R_{3}^{\sharp\,i+1} &= R_{2}^{\sharp\,i+1} \\ R_{4}^{\sharp\,i+1} &= R_{3}^{\sharp\,i+1} \left[y \mapsto R_{3}^{\sharp\,i+1}(y) / {}^{\sharp}2 \right] \\ R_{5}^{\sharp\,i+1} &= R_{4}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto R_{4}^{\sharp\,i+1}(x) - {}^{\sharp}\,R_{4}^{\sharp\,i+1}(y) \right] \\ R_{6}^{\sharp\,i+1} &= R_{2}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto R_{4}^{\sharp\,i+1}(x) - {}^{\sharp}\,R_{4}^{\sharp\,i+1}(y) \right] \end{split}$$

ONERA 55 / 75

ox = rand(0, 12);₁y = 15;
while
$$_{2}(x > 0)$$
 {
 $_{3}y = y / 2$;
 $_{4}x = x - y$;
 $_{5}y = y + 8$;
}₆



$$\begin{split} R_{0}^{\sharp i+1} &= \top_{\text{nr}} \\ R_{1}^{\sharp i+1} &= R_{0}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto \top \right] \\ R_{2}^{\sharp i+1} &= R_{1}^{\sharp i+1} \left[y \mapsto 15 \right] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp} \\ R_{5}^{\sharp i} \left[y \mapsto R_{5}^{\sharp i} (y) + {}^{\sharp} 8 \right] \\ R_{3}^{\sharp i+1} &= R_{2}^{\sharp i+1} \\ R_{4}^{\sharp i+1} &= R_{3}^{\sharp i+1} \left[y \mapsto R_{3}^{\sharp i+1} (y) / {}^{\sharp} 2 \right] \\ R_{5}^{\sharp i+1} &= R_{4}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_{4}^{\sharp i+1} (x) - {}^{\sharp} R_{4}^{\sharp i+1} (y) \right] \\ R_{6}^{\sharp i+1} &= R_{2}^{\sharp i+1} \end{split}$$

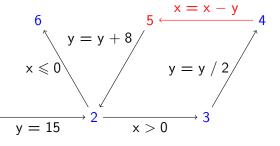
1	$R_I^{\sharp 0}$	${R_I^{\sharp}}^{1}$	${R_I^{\sharp}}^2$
0	(\bot,\bot)	(\top, \top)	(\top,\top)
1	(\bot, \bot)	(\top, \top)	(\top, \top)
2	(\bot,\bot)	$(\top, 15)$	$(\top, 15)$
3	(\perp, \perp)	$(\top, 15)$	$(\top, 15)$
4	(\bot,\bot)	$(\top,7)$	$(\top,7)$
5	(\perp, \perp)	$(\top,7)$	
6	(\perp, \perp)	$(\top,15)$	
	, , ,	` ' /	

ONERA 55 / 75

55 / 75

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$_{0}x = rand(0, 12);_{1}y = 15;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
 $_{3}y = y / 2;$
 $_{4}x = x - y;$
 $_{5}y = y + 8;$
} $_{6}$



$$R_{0}^{\sharp i+1} = \top_{\text{nr}}$$

$$R_{1}^{\sharp i+1} = R_{0}^{\sharp i+1} [x \mapsto \top]$$

$$R_{2}^{\sharp i+1} = R_{1}^{\sharp i+1} [y \mapsto 15] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp}$$

$$R_{5}^{\sharp i} [y \mapsto R_{5}^{\sharp i}(y) + {}^{\sharp} 8]$$

$$R_{3}^{\sharp i+1} = R_{2}^{\sharp i+1}$$

$$R_{4}^{\sharp i+1} = R_{3}^{\sharp i+1} [y \mapsto R_{3}^{\sharp i+1}(y)/{}^{\sharp} 2]$$

$$R_{5}^{\sharp i+1} = R_{4}^{\sharp i+1} [x \mapsto R_{4}^{\sharp i+1}(x) - {}^{\sharp} R_{4}^{\sharp i+1}(y)$$

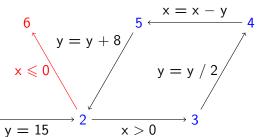
$$R_{6}^{\sharp i+1} = R_{2}^{\sharp i+1} [x \mapsto R_{4}^{\sharp i+1}(x) - {}^{\sharp} R_{4}^{\sharp i+1}(y)$$

1	$R_I^{\sharp 0}$	$R_I^{\sharp 1}$	$R_I^{\sharp 2}$
0	(\perp, \perp)	(\top, \top)	(\top, \top)
1	(\bot, \bot)	(\top, \top)	(\top, \top)
2	(\bot,\bot)	$(\top, 15)$	$(\top, 15)$
3	(\perp, \perp)	$(\top, 15)$	$(\top, 15)$
4	(\perp, \perp)	$(\top,7)$	$(\top,7)$
5	(\perp, \perp)	$(\top,7)$	(⊤, 7)
6	(\perp, \perp)	(⊤, 15)	, , ,
		` ' '	

NERA SE / 7

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$_{0}x = \text{rand}(0, 12);_{1}y = 15;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
 $_{3}y = y / 2;$
 $_{4}x = x - y;$
 $_{5}y = y + 8;$
}
 $_{6}$
 $_{0} \xrightarrow{} 1$

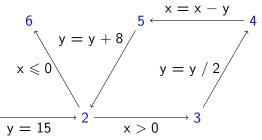


$$\begin{split} R_0^{\sharp^{i+1}} &= \top_{\text{nr}} \\ R_1^{\sharp^{i+1}} &= R_0^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto \top] \\ R_2^{\sharp^{i+1}} &= R_1^{\sharp^{i+1}} [y \mapsto 15] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp} \\ R_2^{\sharp^{i}} &= R_1^{\sharp^{i}} [y \mapsto R_5^{\sharp^{i}}(y) + {}^{\sharp} 8] \\ R_3^{\sharp^{i+1}} &= R_2^{\sharp^{i+1}} [y \mapsto R_3^{\sharp^{i+1}}(y)/{}^{\sharp} 2] \\ R_4^{\sharp^{i+1}} &= R_3^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto R_4^{\sharp^{i+1}}(x) - {}^{\sharp} R_4^{\sharp^{i+1}}(y)] \\ R_5^{\sharp^{i+1}} &= R_2^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto R_4^{\sharp^{i+1}}(x) - {}^{\sharp} R_4^{\sharp^{i+1}}(y)] \\ R_6^{\sharp^{i+1}} &= R_2^{\sharp^{i+1}} \end{aligned}$$

1	$R_I^{\sharp 0}$	$R_I^{\sharp 1}$	$R_I^{\sharp 2}$
0	(\bot,\bot)	(\top, \top)	(\top, \top)
1	(\bot,\bot)	(\top, \top)	(\top, \top)
2	(\bot,\bot)	$(\top, 15)$	$(\top, 15)$
3	(\bot,\bot)	$(\top, 15)$	$(\top, 15)$
4	(\bot,\bot)	$(\top,7)$	$(\top,7)$
5	(\bot,\bot)	$(\top,7)$	$(\top,7)$
6	(\bot,\bot)	$(\top, 15)$	$(\top, 15)$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

 $0x = rand(0, 12);_{1}y = 15;$ while $_{2}(x > 0)$ { $_{3}y = y / 2;$ $_{4}x = x - y;$ $_{5}y = y + 8;$ } $0 \xrightarrow{\text{rand}(0, 12)} 1$



$R_0^{\sharp i+1} = op_{\mathrm{nr}}$
$R_1^{\sharp i+1} = R_0^{\sharp i+1} [x \mapsto \top]$
$R_2^{\sharp i+1} = R_1^{\sharp i+1} [y \mapsto 15] \sqcup_{\mathrm{nr}}^{\sharp}$
$R_5^{\sharp i}\left[y\mapsto R_5^{\sharp i}(y)+^{\sharp}8\right]$
$R_{31}^{\sharp i+1} = R_{21}^{\sharp i+1}$
$R_4^{\sharp l+1} = R_3^{\sharp l+1} \left y \mapsto R_3^{\sharp l+1}(y) / {\sharp 2} \right $
$R_5^{\sharp i+1} = R_4^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_4^{\sharp i+1}(x) - {}^{\sharp} R_4^{\sharp i+1}(y) \right]$
$R_6^{\sharp i+1} = R_2^{\sharp i+1}$

1	$R_I^{\sharp 0}$	$R_I^{\sharp 1}$	$R_I^{\sharp 2}$
0	(\bot,\bot)	(\top, \top)	(\top,\top)
1	(\perp, \perp)	(\top, \top)	(\top, \top)
2	(\perp, \perp)	$(\top, 15)$	$(\top, 15)$
3	(\bot,\bot)	$(\top, 15)$	$(\top, 15)$
4	(\bot, \bot)	$(\top,7)$	$(\top,7)$
5	(\bot,\bot)	$(\top,7)$	$(\top,7)$
6	(\bot,\bot)	$(\top, 15)$	$(\top, 15)$

On a atteint le point fixe!

Correction et terminaison

Théorème (correction, pareil que pour les signes)

La sémantique abstraite est une sur-approximation correcte de la sémantique concrète : pour tout $I \in L$, on a

$$R_I \subseteq \gamma_{
m nr}\left(R_I^\sharp
ight)$$

Correction et terminaison

Théorème (correction, pareil que pour les signes)

La sémantique abstraite est une sur-approximation correcte de la sémantique concrète : pour tout $I \in L$, on a

$$R_I \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_I^\sharp\right)$$

Propriété (terminaison)

Le calcul du point fixe par itérations termine.

ONERA 56 / 7

56 / 75

Correction et terminaison

Théorème (correction, pareil que pour les signes)

La sémantique abstraite est une sur-approximation correcte de la sémantique concrète : pour tout $I \in L$, on a

$$R_I \subseteq \gamma_{
m nr}\left(R_I^\sharp\right)$$

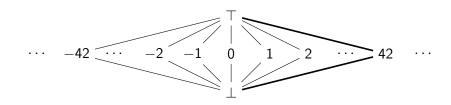
Propriété (terminaison)

Le calcul du point fixe par itérations termine.

Démonstration.

 \mathcal{D}^{\sharp} est infini mais n'a pas de chaîne strictement croissante infinie donc $L \to \left(\mathbb{V} \to \mathcal{D}^{\sharp}\right)$ non plus donc la suite croissante $\left(R^{\sharp}^{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

Le treillis des constantes n'a pas de chaîne croissante infinie



Remarques

- Le domaine des constantes est souvent appelé Killdall.
- ▶ Il est utilisé en compilation pour faire du constant folding.

Remarques

- ▶ Le domaine des constantes est souvent appelé Killdall.
- ▶ Il est utilisé en compilation pour faire du constant folding.
- Démo GCC.

ONERA 58 / 75

ONERA 58 / 75

Remarques

- Le domaine des constantes est souvent appelé Killdall.
- ▶ Il est utilisé en compilation pour faire du constant folding.
- ▶ Démo GCC.
- ▶ Le domaine des constantes est en fait le domaine des singletons de $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$.
- ▶ Sur le même principe, on peut construire pour un $n \in \mathbb{N}$ quelconque un domaine « ensembles d'au plus n éléments ».

Analyse statique des propriétés des programmes impératifs

Syntaxe

Sémantique

Ordres partiels

Abstract interpretation - le Reader Digest

Abstraire la sémantique concrète

Rappels sur la sémantique concrète

Abstractions relationnelles ou non

Abstractions non relationnelles

Signes

Constanted

Intervalles

Domaine des intervalles

Définition

Treillis des intervalles $(\mathcal{D}^{\sharp},\sqsubseteq^{\sharp})$

$$\gamma(\llbracket -\infty, +\infty \llbracket) = \rrbracket -\infty, +\infty \llbracket
\gamma(\llbracket -\infty, n \rrbracket) = \rrbracket -\infty, n \rrbracket
\gamma(\llbracket n, +\infty \rrbracket) = \llbracket n, +\infty \llbracket
\gamma(\llbracket n_1, n_2 \rrbracket) = \llbracket n_1, n_2 \rrbracket
\gamma(\bot) = \emptyset$$

ONERA 60

Domaine des intervalles

Définition

Treillis des intervalles $(\mathcal{D}^{\sharp}, \sqsubseteq^{\sharp})$

$$\gamma(\llbracket -\infty, +\infty \llbracket) = \rrbracket -\infty, +\infty \llbracket \\
\gamma(\llbracket -\infty, n \rrbracket) = \rrbracket -\infty, n \rrbracket \\
\gamma(\llbracket n, +\infty \rrbracket) = \llbracket n, +\infty \llbracket \\
\gamma(\llbracket n_1, n_2 \rrbracket) = \llbracket n_1, n_2 \rrbracket \\
\gamma(\bot) = \emptyset$$

Remarque

L'ordre est correct.

ERA 60 / 7

Domaine des intervalles, meilleure abstraction

Remarque

On a bien une correspondance de Galois avec

$$\alpha(S) = \begin{cases}
\llbracket n_1, n_2 \rrbracket & \text{avec } n_1 = \min S \text{ et } n_2 = \max S \\
\bot & \text{si } S = \emptyset
\end{cases}$$

Domaine des intervalles, opérations arithmétiques abstraites

Domaine des intervalles, opérations arithmétiques abstraites

▶
$$\operatorname{rand}^{\sharp}(n_1, n_2) = \alpha(\llbracket n_1, n_2 \rrbracket) = \begin{cases} \llbracket n_1, n_2 \rrbracket & \text{si } n_1 \leqslant n_2 \\ \bot & \text{si } n_1 > n_2 \end{cases}$$

Domaine des intervalles, opérations arithmétiques abstraites

$$\left\{ \begin{array}{ll} \llbracket a+c,b+d \rrbracket & \operatorname{avec} x^{\sharp} = \llbracket a,b \rrbracket \text{ et } y^{\sharp} = \llbracket c,d \rrbracket \\ \bot & \operatorname{si} x^{\sharp} = \bot \text{ ou } y^{\sharp} = \bot \end{array} \right.$$

•

ONERA 62 / 75

ONERA 62 / 7!

Domaine des intervalles, opérations arithmétiques abstraites (suite et fin)

Exercice

► Donner la soustraction d'intervalles.

▶ Donner la multiplication d'intervalles.

Domaine des intervalles, opérations arithmétiques abstraites (suite et fin)

Exercice

► Donner la soustraction d'intervalles.

$$x^{\sharp} - ^{\sharp} y^{\sharp} = \alpha \left(\left\{ x - y \mid x \in \gamma(x^{\sharp}), y \in \gamma(y^{\sharp}) \right\} \right) =$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} [a - d, b - c] \\ \bot \end{bmatrix} \text{ avec } x^{\sharp} = \begin{bmatrix} [a, b] \end{bmatrix} \text{ et } y^{\sharp} = \begin{bmatrix} [c, d] \end{bmatrix}$$

$$\text{si } x^{\sharp} = \bot \text{ ou } y^{\sharp} = \bot$$

► Donner la multiplication d'intervalles.

Domaine des intervalles, opérations arithmétiques abstraites (suite et fin)

Exercice

► Donner la soustraction d'intervalles.

$$x^{\sharp} - ^{\sharp} y^{\sharp} = \alpha \left(\left\{ x - y \mid x \in \gamma(x^{\sharp}), y \in \gamma(y^{\sharp}) \right\} \right) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \llbracket a - d, b - c \rrbracket & \text{avec } x^{\sharp} = \llbracket a, b \rrbracket \text{ et } y^{\sharp} = \llbracket c, d \rrbracket \\ \bot & \text{si } x^{\sharp} = \bot \text{ ou } y^{\sharp} = \bot \end{array} \right.$$

▶ Donner la multiplication d'intervalles.

$$x^{\sharp} \times^{\sharp} y^{\sharp} = \alpha \left(\left\{ x \times y \mid x \in \gamma(x^{\sharp}), y \in \gamma(y^{\sharp}) \right\} \right) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\min(ab, ac, ad, bd), \max(ab, ac, ad, bd) \right] & \text{avec...} \\ \bot & \text{si...} \end{array} \right.$$

ONERA 63

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$0x = rand(0, 12);_{1}y = 42; 4 \xrightarrow{x = x - 2} 3$$
while $_{2}(x > 0)$ {
$$_{3}x = x - 2;$$

$$_{4}y = y + 4; y = y + 4;$$

$$x = rand(0, 12)$$

$$y = 42 \xrightarrow{x = x - 2} 3$$

$$x > 0$$

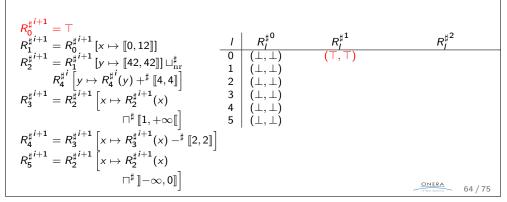
$$x = rand(0, 12)$$

ONERA 64 / 75

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$R_{0}^{\sharp^{i+1}} = \top \\ R_{1}^{\sharp^{i+1}} = R_{0}^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto [0, 12]] \\ R_{2}^{\sharp^{i+1}} = R_{1}^{\sharp^{i+1}} [y \mapsto [42, 42]] \sqcup_{\mathrm{nr}}^{\sharp} \\ R_{3}^{\sharp^{i+1}} = R_{2}^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto R_{2}^{\sharp^{i+1}} (x) \\ \Pi^{\sharp} [1, +\infty[]] \\ R_{5}^{\sharp^{i+1}} = R_{2}^{\sharp^{i+1}} [x \mapsto R_{2}^{\sharp^{i+1}} (x) \\ \Pi^{\sharp} [x \mapsto R_{2}^{$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait



Exemple de calcul du point fixe abstrait $_{0}x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$

ox = rand(0, 12);₁y = 2
while
$$_{2}(x > 0)$$
 {
 $_{3}x = x - 2$;
 $_{4}y = y + 4$;
}₅

$$4 \xleftarrow{x = x - 2} 3$$

$$y = y + 4 \qquad x > 0$$

$$y = 42 \qquad x \le 0$$

$$\begin{split} R_{0}^{\sharp\,i+1} &= \top \\ R_{1}^{\sharp\,i+1} &= R_{0}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto \llbracket 0, 12 \rrbracket \right] \\ R_{2}^{\sharp\,i+1} &= R_{1}^{\sharp\,i+1} \left[y \mapsto \llbracket 42, 42 \rrbracket \right] \sqcup_{\mathrm{nr}}^{\sharp} & 1 & (\bot, \bot) \\ R_{4}^{\sharp\,i} \left[y \mapsto R_{4}^{\sharp\,i}(y) + \sharp \llbracket 4, 4 \rrbracket \right] & 2 & (\bot, \bot) \\ R_{3}^{\sharp\,i+1} &= R_{2}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp\,i+1}(x) & 3 & (\bot, \bot) \\ & & & & \downarrow \\ & & & & \downarrow \\ R_{4}^{\sharp\,i+1} &= R_{3}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto R_{3}^{\sharp\,i+1}(x) - \sharp \llbracket 2, 2 \rrbracket \right] \end{split}$$

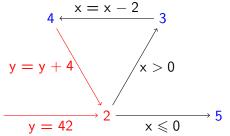
ONERA 64 / 75

$$R_{5}^{\sharp^{i+1}} = R_{2}^{\sharp^{i+1}} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp^{i+1}}(x) \right.$$
$$\left. \sqcap^{\sharp} \left[-\infty, 0 \right] \right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$_{0}x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
 $_{3}x = x - 2;$
 $_{4}y = y + 4;$
}



$$R_{0}^{\sharp i+1} = \top$$

$$R_{1}^{\sharp i+1} = R_{0}^{\sharp i+1} [x \mapsto [0, 12]]$$

$$R_{2}^{\sharp i+1} = R_{1}^{\sharp i+1} [y \mapsto [42, 42]] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp}$$

$$R_{4}^{\sharp i} [y \mapsto R_{4}^{\sharp i} (y) + [4, 4]]$$

$$R_{3}^{\sharp i+1} = R_{2}^{\sharp i+1} [x \mapsto R_{2}^{\sharp i+1} (x)$$

$$\sqcap^{\sharp} [1, +\infty[]]$$

$$R_{4}^{\sharp i+1} = R_{3}^{\sharp i+1} [x \mapsto R_{3}^{\sharp i+1} (x) - [2, 2]]$$

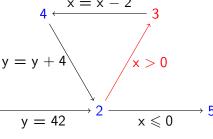
$$R_{4}^{\sharp i+1} = R_{3}^{\sharp i+1} [x \mapsto R_{3}^{\sharp i+1} (x) - [2, 2]]$$

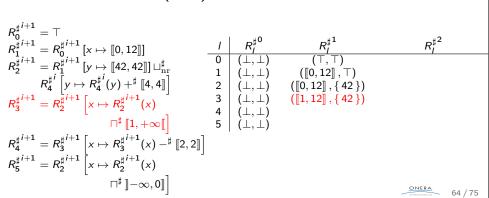
1	$R_I^{\sharp 0}$	$R_I^{\sharp 1}$	${R_I^{\sharp}}^2$
0	(\bot,\bot)	(\top, \top)	
1	(\bot,\bot)	$(\llbracket 0,12 rbracket, op)$	
2	(\bot,\bot)	$([0, 12], {42})$	
2	(\perp, \perp)		
4	(\perp, \perp)		
5	(\bot,\bot)		
1	, , ,		

ONERA 64 / 75

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$_{0}x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
 $_{3}x = x - 2;$
 $_{4}y = y + 4;$
 $_{5}$
 $_{x = rand(0, 12)}^{0} \xrightarrow{1} \xrightarrow{1}$

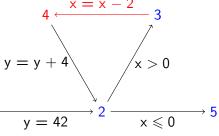




Exemple de calcul du point fixe abstrait

 $\sqcap^{\sharp} \llbracket -\infty, 0 \rrbracket$

$$_{0}x = \text{rand}(0, 12);_{1}y = 42;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
 $_{3}x = x - 2;$
 $_{4}y = y + 4;$
}
 $_{5}$



$$R_{0}^{\sharp i+1} = \top \\ R_{1}^{\sharp i+1} = R_{0}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto [0, 12] \right] \\ R_{2}^{\sharp i+1} = R_{1}^{\sharp i+1} \left[y \mapsto [42, 42] \right] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp} \\ R_{2}^{\sharp i} = R_{1}^{\sharp i} \left[y \mapsto R_{4}^{\sharp i} \left(y \right) + [4, 4] \right] \\ R_{3}^{\sharp i+1} = R_{2}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp i+1} \left(x \right) \\ \Pi^{\sharp} \left[1, + \infty \right] \right] \\ R_{3}^{\sharp i+1} = R_{3}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_{3}^{\sharp i+1} \left(x \right) \\ \Pi^{\sharp} \left[1, + \infty \right] \right] \\ R_{5}^{\sharp i+1} = R_{2}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_{3}^{\sharp i+1} \left(x \right) \\ \Pi^{\sharp} \left[1, + \infty \right] \right] \\ R_{5}^{\sharp i+1} = R_{2}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_{3}^{\sharp i+1} \left(x \right) \\ \Pi^{\sharp} \left[1, + \infty \right] \right] \\ R_{5}^{\sharp i+1} = R_{2}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp i+1} \left(x \right) \\ \Pi^{\sharp} \left[1, + \infty \right] \right]$$

$$0x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
$$3x = x - 2;$$

$$_{4}y = y + 4;$$

$$y = 0$$

$$x = rand(0, 12)$$

$$y = y + 4$$

$$y = 42$$

$$x = x - 2$$

$$x > 0$$

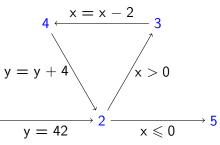
$$x \le 0$$

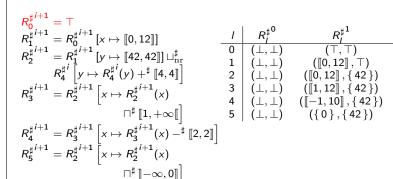
$$R_{0}^{\sharp\,i+1} = \top \\ R_{1}^{\sharp\,i+1} = R_{0}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto [\![0,12]\!] \right] \\ R_{2}^{\sharp\,i+1} = R_{1}^{\sharp\,i+1} \left[y \mapsto [\![42,42]\!] \right] \sqcup_{\mathrm{nr}}^{\sharp} \\ R_{3}^{\sharp\,i+1} = R_{2}^{\sharp\,i+1} \left[y \mapsto R_{4}^{\sharp\,i}(y) + {}^{\sharp} \left[4,4 \right] \right] \\ R_{3}^{\sharp\,i+1} = R_{2}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp\,i+1}(x) \\ \Pi^{\sharp} \left[1,+\infty \right] \right] \\ R_{4}^{\sharp\,i+1} = R_{3}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto R_{3}^{\sharp\,i+1}(x) - {}^{\sharp} \left[2,2 \right] \right] \\ R_{5}^{\sharp\,i+1} = R_{2}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp\,i+1}(x) \\ \Pi^{\sharp} \left[x \mapsto R_{3}^{\sharp\,i+1}(x) - {}^{\sharp} \left[2,2 \right] \right] \\ R_{5}^{\sharp\,i+1} = R_{2}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp\,i+1}(x) \\ \Pi^{\sharp} \left[x \mapsto R_{2}^{\sharp\,i+1}(x) \right] \right]$$

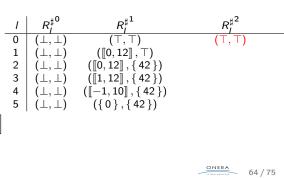
ONERA 64 / 75

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$_{0}x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
 $_{3}x = x - 2;$
 $_{4}y = y + 4;$
}₅



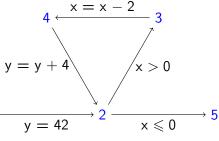




Exemple de calcul du point fixe abstrait

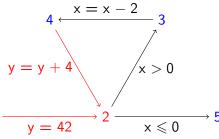
$$0x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
$$_{3}x = x - 2;$$

$$_{4}y = y + 4;$$
}
$$0 \xrightarrow{x = rand(0, 12)} 1 \xrightarrow{x = rand(0, 12)} 1$$



Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$_{0}x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
 $_{3}x = x - 2;$
 $_{4}y = y + 4;$
 $_{5}$
 $0 \xrightarrow{x = rand(0, 12)} 1 \xrightarrow{x = rand(0, 12)}$



$$R_{0}^{\sharp i+1} = \top$$

$$R_{1}^{\sharp i+1} = R_{0}^{\sharp i+1} [x \mapsto [0, 12]] \qquad \frac{I \quad R_{1}^{\sharp 0} \quad R_{1}^{\sharp 1} \quad R_{1}^{\sharp 1}}{0 \quad (\bot, \bot) \quad (\top, \top) \quad (\top, \top)}$$

$$R_{2}^{\sharp i+1} = R_{1}^{\sharp i+1} [y \mapsto [42, 42]] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp} \qquad \frac{I \quad (\bot, \bot) \quad ([0, 12], \top) \quad ([0, 12], \top)}{1 \quad (\bot, \bot) \quad ([0, 12], \top) \quad ([0, 12], \top)}$$

$$R_{3}^{\sharp i+1} = R_{2}^{\sharp i+1} [x \mapsto R_{2}^{\sharp i+1} (x) \qquad 3 \quad (\bot, \bot) \quad ([1, 12], \{42\})$$

$$R_{3}^{\sharp i+1} = R_{2}^{\sharp i+1} [x \mapsto R_{2}^{\sharp i+1} (x) \qquad 3 \quad (\bot, \bot) \quad ([1, 12], \{42\})$$

$$R_{4}^{\sharp i+1} = R_{3}^{\sharp i+1} [x \mapsto R_{3}^{\sharp i+1} (x) - \sharp [2, 2]]$$

$$R_{5}^{\sharp i+1} = R_{2}^{\sharp i+1} [x \mapsto R_{2}^{\sharp i+1} (x)$$

$$\Pi^{\sharp} [-\infty, 0]]$$

$$_{0}x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
 $_{3}x = x - 2;$
 $_{4}y = y + 4;$
 $y = 0$
 $_{3}x = 0$

$$4 \stackrel{x = x - 2}{\longleftarrow} 3$$

$$y = y + 4 \qquad x > 0$$

$$y = 42 \qquad x \leq 0$$

ONERA

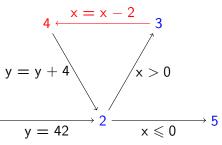
64 / 75

 $([0, 12], \top)$ ([-1, 12], [42, 46])

([1, 12], [42, 46])

Exemple de calcul du point fixe abstrait

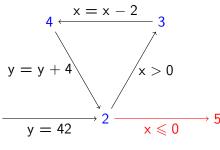
$$_{0}x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
 $_{3}x = x - 2;$
 $_{4}y = y + 4;$
}5

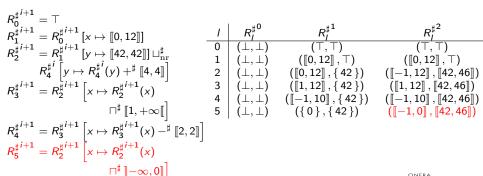


]	0 1 2 3 4 5	$\begin{array}{c} {R_I^{\sharp0}} \\ (\bot,\bot) \end{array}$	$R_I^{\sharp 1} \ (op, op) \ (\llbracket 0, 12 rbracket, op) \ (\llbracket 0, 12 rbracket, \{42\}) \ (\llbracket 1, 12 rbracket, \{42\}) \ (\llbracket -1, 10 rbracket, \{42\}) \ (\{0\}, \{42\}) \ \end{cases}$	$\begin{array}{c} R_I^{\sharp 2} \\ (\top, \top) \\ (\llbracket 0, 12 \rrbracket, \top) \\ (\llbracket -1, 12 \rrbracket, \llbracket 42, 46 \rrbracket) \\ (\llbracket 1, 12 \rrbracket, \llbracket 42, 46 \rrbracket) \\ (\llbracket -1, 10 \rrbracket, \llbracket 42, 46 \rrbracket) \end{array}$
J				

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$_{0}x = \text{rand}(0, 12);_{1}y = 42;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
 $_{3}x = x - 2;$
 $_{4}y = y + 4;$
 $y = 0$

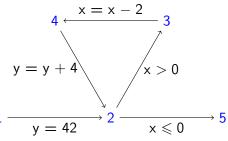




Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$0x = rand(0, 12);_{1}y = 42;$$
while $_{2}(x > 0)$ {
$$_{3}x = x - 2;$$

$$_{4}y = y + 4;$$
}5



 $\sqcap^{\sharp} \left[-\infty, 0 \right]$

	1	$R_I^{\sharp 0}$	${R_I^{\sharp}}^1$	$R_I^{\sharp 2}$
	0	(\bot,\bot)	(\top, \top)	(\top, \top)
	1	(\bot, \bot)	$(\llbracket 0,12 rbracket, op)$	$([\![0,12]\!], \top)$
	2	(\bot,\bot)	$([0,12], \{42\})$	([-1, 12], [42, 46])
	3	(\bot,\bot)	$([1,12], \{42\})$	([1,12],[42,46])
	4	(\bot,\bot)	$([-1, 10], \{42\})$	([-1, 10], [42, 46])
	5	(\perp, \perp)	$(\{0\},\{42\})$	([-1,0],[42,46])
٦.				

Le point fixe est encore loin!

ONERA 64 / 75

ONERA 64 / 75

Correction et terminaison

Théorème (correction, encore le même)

La sémantique abstraite est une sur-approximation correcte de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_I \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_I^\sharp\right)$$

Correction et terminaison

Théorème (correction, encore le même)

La sémantique abstraite est une sur-approximation correcte de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_I \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_I^\sharp\right)$$

Remarques

▶ De manière générale, ca ne termine pas! Car le treillis a des chaînes croissantes infinies (ex. $([0, n])_{n \in \mathbb{N}}$).

ONERA 65 / 75

65 / 75

Correction et terminaison

Théorème (correction, encore le même)

La sémantique abstraite est une sur-approximation correcte de la sémantique concrète : pour tout $l \in L$, on a

$$R_I \subseteq \gamma_{\mathrm{nr}}\left(R_I^\sharp\right)$$

Remarques

- ▶ De manière générale, ca ne termine pas! Car le treillis a des chaînes croissantes infinies (ex. $([0, n])_{n \in \mathbb{N}}$).
- ▶ Et quand bien même ça termine, ça peut être long...

Accélération de convergence

On va donc intercaler entre chaque itération un élargissement (widening en anglais) qui va empêcher de suivre des chaînes croissantes infinies en « sautant » plus haut.

Accélération de convergence

On va donc intercaler entre chaque itération un élargissement (widening en anglais) qui va empêcher de suivre des chaînes croissantes infinies en « sautant » plus haut.

Définition (élargissement)

Un élargissement ∇ est une opération binaire $(\nabla: \mathcal{D}^{\sharp} \times \mathcal{D}^{\sharp} \to \mathcal{D}^{\sharp})$ vérifiant

66 / 75

Accélération de convergence

On va donc intercaler entre chaque itération un *élargissement* (widening en anglais) qui va empêcher de suivre des chaînes croissantes infinies en « sautant » plus haut.

Définition (élargissement)

Un élargissement ∇ est une opération binaire $(\nabla: \mathcal{D}^{\sharp} \times \mathcal{D}^{\sharp} \to \mathcal{D}^{\sharp})$ vérifiant

- $\triangleright \forall x^{\sharp}, y^{\sharp}, \quad x^{\sharp} \sqcup^{\sharp} y^{\sharp} \sqsubseteq^{\sharp} x^{\sharp} \nabla y^{\sharp};$
- ▶ pour toute suite $\left(x_n^{\sharp}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite croissante

$$\left\{ egin{array}{lll} y_0^{\sharp} &=& x_0^{\sharp} \ & & & & & \\ y_{i+1}^{\sharp} &=& y_i^{\sharp}
abla x_{i+1}^{\sharp} \end{array}
ight.$$

est stationnaire.

Élargissement, illustration

$$R^{\sharp} = F^{\sharp N}(\bot) = \operatorname{lfp} F^{\sharp}$$

$$\vdots$$

$$R^{\sharp^{2}} = F^{\sharp}(R^{\sharp^{1}}) = F^{\sharp^{2}}(\bot)$$

$$R^{\sharp^{1}} = F^{\sharp}(R^{\sharp^{0}}) = F^{\sharp}(\bot)$$

$$R^{\sharp^{0}} = \bot$$

 F^{\sharp} stationnaire

Élargissement, illustration

$$R^{\sharp} = R^{\sharp} \nabla F^{\sharp} (R^{\sharp})$$

$$\left(\operatorname{lfp} F^{\sharp} \right)$$

$$\vdots$$

$$R^{\sharp^{2}} = R^{\sharp^{1}} \nabla F^{\sharp} (R^{\sharp^{1}})$$

$$R^{\sharp^{1}} = R^{\sharp^{0}} \nabla F^{\sharp} (R^{\sharp^{0}})$$

 F^{\sharp} stationnaire F^{\sharp} non stationnaire, élargissement

Élargissement, illustration

gissement, illustration
$$R^{\sharp} = F^{\sharp^{N}}(\bot) = \operatorname{lfp} F^{\sharp} \qquad \left(\operatorname{lfp} F^{\sharp}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$R^{\sharp^{2}} = F^{\sharp}(R^{\sharp^{1}}) = F^{\sharp^{2}}(\bot) \qquad R^{\sharp^{2}} = R^{\sharp^{1}} \nabla F^{\sharp}(R^{\sharp^{1}})$$

$$R^{\sharp^{1}} = F^{\sharp}(R^{\sharp^{0}}) = F^{\sharp}(\bot) \qquad R^{\sharp^{1}} = R^{\sharp^{0}} \nabla F^{\sharp}(R^{\sharp^{0}})$$

$$R^{\sharp^{0}} = \bot \qquad R^{\sharp^{0}} = \bot$$

F[♯] stationnaire

F[♯] non stationnaire, élargissement

 $R^{\sharp} = R^{\sharp} \triangledown F^{\sharp} (R^{\sharp})$

Remarque : Ifp $F^{\sharp} \sqsubseteq^{\sharp} R^{\sharp}$

On s'arrête avec $R^{\sharp} = R^{\sharp} \nabla F^{\sharp}(R^{\sharp})$ donc $F^{\sharp}(R^{\sharp}) \sqsubseteq^{\sharp} R^{\sharp}$ donc

$$\operatorname{lfp} F^{\sharp} = \prod^{\sharp} \left\{ x \mid F^{\sharp}(x) \sqsubseteq^{\sharp} x \right\} \sqsubseteq^{\sharp} R^{\sharp}.$$

Exemple d'élargissement

Si les bornes de l'intervalle sont stables, on les conserve, sinon on les remplace par ∞ .

ONERA 68 / 75

Exemple d'élargissement

Si les bornes de l'intervalle sont stables, on les conserve, sinon on les remplace par ∞ .

Définition

$$x^{\sharp} \nabla y^{\sharp} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \llbracket a,b \rrbracket & \text{si } x^{\sharp} = \llbracket a,b \rrbracket, y^{\sharp} = \llbracket c,d \rrbracket, c \geqslant a, d \leqslant b \\ \llbracket a,+\infty \llbracket & \text{si } x^{\sharp} = \llbracket a,b \rrbracket, y^{\sharp} = \llbracket c,d \rrbracket, c \geqslant a, d > b \\ \rrbracket -\infty, b \rrbracket & \text{si } x^{\sharp} = \llbracket a,b \rrbracket, y^{\sharp} = \llbracket c,d \rrbracket, c < a, d \leqslant b \\ \rrbracket -\infty, +\infty \llbracket & \text{si } x^{\sharp} = \llbracket a,b \rrbracket, y^{\sharp} = \llbracket c,d \rrbracket, c < a, d > b \\ y^{\sharp} & \text{si } x^{\sharp} = \bot \\ x^{\sharp} & \text{si } y^{\sharp} = \bot \end{cases}$$

Exemple d'élargissement

Si les bornes de l'intervalle sont stables, on les conserve, sinon on les remplace par ∞ .

Définition

$$x^{\sharp} \nabla y^{\sharp} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \llbracket a,b \rrbracket & \text{si } x^{\sharp} = \llbracket a,b \rrbracket, y^{\sharp} = \llbracket c,d \rrbracket, c \geqslant a, d \leqslant b \\ \llbracket a,+\infty \llbracket & \text{si } x^{\sharp} = \llbracket a,b \rrbracket, y^{\sharp} = \llbracket c,d \rrbracket, c \geqslant a, d > b \\ \rrbracket -\infty, b \rrbracket & \text{si } x^{\sharp} = \llbracket a,b \rrbracket, y^{\sharp} = \llbracket c,d \rrbracket, c < a, d \leqslant b \\ \rrbracket -\infty, +\infty \llbracket & \text{si } x^{\sharp} = \llbracket a,b \rrbracket, y^{\sharp} = \llbracket c,d \rrbracket, c < a, d > b \\ y^{\sharp} & \text{si } x^{\sharp} = \bot \\ x^{\sharp} & \text{si } y^{\sharp} = \bot \end{cases}$$

Exemple

$$ightharpoonup [0, 2] \triangledown [0, 1] = [0, 2]$$

Exemple d'élargissement

Si les bornes de l'intervalle sont stables, on les conserve, sinon on les remplace par $\infty.$

Définition

$$x^{\sharp} \nabla y^{\sharp} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \llbracket a,b \rrbracket & \text{si } x^{\sharp} = \llbracket a,b \rrbracket, y^{\sharp} = \llbracket c,d \rrbracket, c \geqslant a,d \leqslant b \\ \llbracket a,+\infty \llbracket & \text{si } x^{\sharp} = \llbracket a,b \rrbracket, y^{\sharp} = \llbracket c,d \rrbracket, c \geqslant a,d > b \\ \rrbracket -\infty,b \rrbracket & \text{si } x^{\sharp} = \llbracket a,b \rrbracket, y^{\sharp} = \llbracket c,d \rrbracket, c < a,d \leqslant b \\ \rrbracket -\infty,+\infty \llbracket & \text{si } x^{\sharp} = \llbracket a,b \rrbracket, y^{\sharp} = \llbracket c,d \rrbracket, c < a,d > b \\ y^{\sharp} & \text{si } x^{\sharp} = \bot \\ x^{\sharp} & \text{si } y^{\sharp} = \bot \end{cases}$$

Exemple

- $\blacktriangleright \ [\![0,2]\!] \triangledown [\![0,1]\!] = [\![0,2]\!]$
- $ightharpoonup [0,1] riangle [0,2] = [0,+\infty[$

ONERA 68 / 75

Exemple d'élargissement

Si les bornes de l'intervalle sont stables, on les conserve, sinon on les remplace par ∞ .

Définition

$$x^{\sharp} \nabla y^{\sharp} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \llbracket a,b \rrbracket & \text{si } x^{\sharp} = \llbracket a,b \rrbracket, y^{\sharp} = \llbracket c,d \rrbracket, c \geqslant a, d \leqslant b \\ \llbracket a,+\infty \llbracket & \text{si } x^{\sharp} = \llbracket a,b \rrbracket, y^{\sharp} = \llbracket c,d \rrbracket, c \geqslant a, d > b \\ \rrbracket -\infty, b \rrbracket & \text{si } x^{\sharp} = \llbracket a,b \rrbracket, y^{\sharp} = \llbracket c,d \rrbracket, c < a, d \leqslant b \\ \rrbracket -\infty, +\infty \llbracket & \text{si } x^{\sharp} = \llbracket a,b \rrbracket, y^{\sharp} = \llbracket c,d \rrbracket, c < a, d > b \\ y^{\sharp} & \text{si } x^{\sharp} = \bot \\ x^{\sharp} & \text{si } y^{\sharp} = \bot \end{cases}$$

Exemple

- $ightharpoonup [0, 2] \triangledown [0, 1] = [0, 2]$
- $ightharpoonup [0,1] riangledown [0,2] = [0,+\infty[$

(∇ n'est pas symétrique)

ONERA 68

Exemple d'élargissement (suite et fin)

Exercice

Reprendre le calcul précédent en remplaçant l'equation de R_2^{\sharp} par

$$R_{2}^{\sharp i+1} = R_{2}^{\sharp i} \nabla_{\mathrm{nr}} \left(R_{1}^{\sharp i+1} \left[y \mapsto \{42\} \right] \sqcup_{\mathrm{nr}}^{\sharp} R_{4}^{\sharp i} \left[y \mapsto R_{4}^{\sharp i} (y) + {}^{\sharp} \{4\} \right] \right)$$

(ça devrait s'arrêter après trois étapes).

Exemple d'élargissement (suite et fin)

Exercice

Reprendre le calcul précédent en remplaçant l'equation de R_2^{\sharp} par

$$R_{2}^{\sharp^{i+1}} = R_{2}^{\sharp^{i}} \nabla_{\mathrm{nr}} \left(R_{1}^{\sharp^{i+1}} \left[y \mapsto \{42\} \right] \sqcup_{\mathrm{nr}}^{\sharp} R_{4}^{\sharp^{i}} \left[y \mapsto R_{4}^{\sharp^{i}} (y) +^{\sharp} \{4\} \right] \right)$$

(ça devrait s'arrêter après trois étapes).

Résultat

Après calcul on obtient :

$$R_0^{\sharp} = \top_{\mathrm{nr}}$$

$$R_1^{\sharp} = ([0, 12], \top)$$

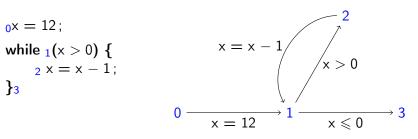
$$R_2^{\sharp} = (\llbracket -\infty, 12 \rrbracket, \llbracket 42, +\infty \llbracket)$$

$$R_3^{\sharp} = ([1, 12], [42, +\infty])$$

$$R_4^{\sharp} = (\llbracket -1, 10 \rrbracket, \llbracket 46, +\infty \llbracket)$$

$$R_5^{\sharp} = (]\!] -\infty, 0]\!], [\! [42, +\infty[\! [)$$

$$_{0}x = 12;$$
while $_{1}(x > 0) \{$
 $_{2}x = x - 1;$
}



$$\begin{split} R_{0}^{\sharp\,i+1} &= \top \\ R_{1}^{\sharp\,i+1} &= R_{1}^{\sharp\,i} \overset{i}{\nabla}_{\mathbf{nr}} \left(R_{0}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto [\![12,12]\!] \right] \sqcup_{\mathbf{nr}}^{\sharp} \\ & R_{2}^{\sharp\,i} \left[y \mapsto R_{2}^{\sharp\,i}(x) -^{\sharp} \left[1,1 \right] \right] \right) \\ R_{3}^{\sharp\,i+1} &= R_{1}^{\sharp\,i+1} \left[x \mapsto R_{1}^{\sharp\,i+1}(x) \\ & \sqcap^{\sharp} \left[-\infty,0 \right] \right] \end{split}$$

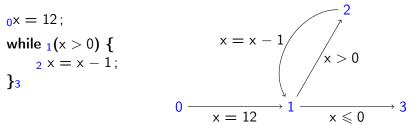
 $_{0}x = 12$;

Exemple de calcul du point fixe abstrait

while
$$_{1}(x > 0)$$
 {

70 / 75

70 / 75

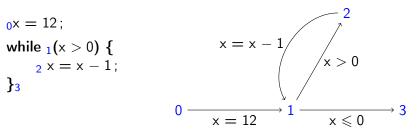


$$\begin{split} R_{0}^{\sharp^{i+1}} &= \top & \frac{\boldsymbol{J} \quad R_{l}^{\sharp^{0}} \quad R_{l}^{\sharp^{1}} \quad R_{l}^{\sharp^{2}} \quad R_{l}^{\sharp^{3}}}{0 \quad \bot} \\ R_{1}^{\sharp^{i+1}} &= R_{1}^{\sharp^{i}} \nabla_{\mathbf{nr}} \left(R_{0}^{\sharp^{i+1}} \left[\boldsymbol{x} \mapsto \llbracket 12, 12 \rrbracket \right] \sqcup_{\mathbf{nr}}^{\sharp} \quad 1 \quad \bot \\ R_{2}^{\sharp^{i}} \left[\boldsymbol{y} \mapsto R_{2}^{\sharp^{i}} (\boldsymbol{x}) - ^{\sharp} \left[\mathbb{I}, 1 \right] \right] \right) \quad \overset{2}{3} \quad \bot \\ R_{3}^{\sharp^{i+1}} &= R_{1}^{\sharp^{i+1}} \left[\boldsymbol{x} \mapsto R_{1}^{\sharp^{i+1}} (\boldsymbol{x}) \right] \end{split}$$

ONERA 70 / 75

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$_{0}x = 12;$$
while $_{1}(x > 0) \{$
 $_{2}x = x - 1;$
}



$$R_{0}^{\sharp^{i+1}} = \top \qquad \frac{I \quad R_{I}^{\sharp^{0}} \quad R_{I}^{\sharp^{1}} \quad R_{I}^{\sharp^{2}} \quad R_{I}^{\sharp^{3}}}{0 \quad \bot \quad \top}$$

$$R_{1}^{\sharp^{i+1}} = R_{1}^{\sharp^{i}} \nabla_{\text{nr}} \left(R_{0}^{\sharp^{i+1}} \left[x \mapsto [12, 12] \right] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp} \quad 1 \quad \bot \quad [12, 12] \right]$$

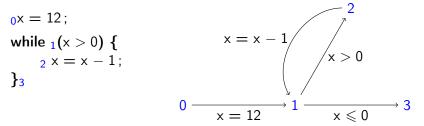
$$R_{2}^{\sharp^{i}} \left[y \mapsto R_{2}^{\sharp^{i}} (x) -^{\sharp} \left[[1, 1] \right] \right) \quad \frac{2}{3} \quad \bot \quad [12, 12]$$

$$R_{3}^{\sharp^{i+1}} = R_{1}^{\sharp^{i+1}} \left[x \mapsto R_{1}^{\sharp^{i+1}} (x) \right]$$

$$\sqcap^{\sharp} \left[-\infty, 0 \right]$$

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$_{0}x = 12;$$
while $_{1}(x > 0)$ {
 $_{2}x = x - 1;$
}



$$0x = 12;$$
while $1(x > 0)$ {
 $2x = x - 1;$
}
$$0 \xrightarrow{x = 12} 1 \xrightarrow{x \le 0} 3$$

$$R_{0}^{\sharp i+1} = \top \\ R_{1}^{\sharp i+1} = R_{1}^{\sharp i} \nabla_{\text{nr}} \left(R_{0}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto [12,12] \right] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp} \right) \\ R_{1}^{\sharp i+1} = R_{1}^{\sharp i} \nabla_{\text{nr}} \left(R_{0}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto [12,12] \right] \sqcup_{\text{nr}}^{\sharp} \right) \\ R_{2}^{\sharp i} \left[y \mapsto R_{2}^{\sharp i} (x) - \sharp \left[1,1 \right] \right] \right) \\ R_{3}^{\sharp i+1} = R_{1}^{\sharp i+1} \left[x \mapsto R_{$$

70 / 75

Exemple de calcul du point fixe abstrait

$$0x = 12;$$
while $1(x > 0)$ {
 $2x = x - 1;$
}
$$0 \xrightarrow{x = 12} 1 \xrightarrow{x \le 0}$$

$$R_{0}^{\sharp^{i+1}} = \top \qquad \qquad \frac{I \quad R_{I}^{\sharp^{0}} \quad R_{I}^{\sharp^{1}} \quad R_{I}^{\sharp^{2}} \quad R_{I}^{\sharp^{3}}}{0 \quad \bot \quad \top \quad \top \quad \top}$$

$$R_{1}^{\sharp^{i+1}} = R_{1}^{\sharp^{i}} \nabla_{\mathbf{nr}} \left(R_{0}^{\sharp^{i+1}} \left[\mathbf{x} \mapsto [\![12,12]\!] \right] \sqcup_{\mathbf{nr}}^{\sharp} \quad 1 \quad \bot \quad [\![12,12]\!] \quad]\![-\infty,12]\!] \quad]\![-\infty,12]\!]$$

$$R_{2}^{\sharp^{i}} \left[\mathbf{y} \mapsto R_{2}^{\sharp^{i}} \left(\mathbf{x} \right) - \mathbb{I} \left[[\![1,1]\!] \right] \right) \quad 2 \quad \bot \quad [\![12,12]\!] \quad [\![1,12]\!] \quad$$

ONERA 70 / 75

Regagner de la précision

- L'élargissement permet au calcul de terminer.
- ► Mais entraîne une perte de précision.
- ▶ On peut en regagner un peu par des itérations descendantes.

Regagner de la précision

- L'élargissement permet au calcul de terminer.
- ▶ Mais entraı̂ne une perte de précision.
- ▶ On peut en regagner un peu par des itérations descendantes.

Définition (rétrécissement)

Un rétrécissement (narrowing en anglais) △ est une opération binaire ($\triangle: \mathcal{D}^{\sharp} \times \mathcal{D}^{\sharp} \to \mathcal{D}^{\sharp}$) vérifiant

Regagner de la précision

- L'élargissement permet au calcul de terminer.
- ► Mais entraı̂ne une perte de précision.
- ▶ On peut en regagner un peu par des itérations descendantes.

Définition (rétrécissement)

Un rétrécissement (narrowing en anglais) \triangle est une opération binaire ($\triangle: \mathcal{D}^{\sharp} \times \mathcal{D}^{\sharp} \to \mathcal{D}^{\sharp}$) vérifiant

- ▶ pour toute suite $(x^{\sharp})_{n \in \mathbb{N}}$, la suite décroissante

$$\begin{cases} y_0^{\sharp} &= x_0^{\sharp} \\ y_{i+1}^{\sharp} &= y_i^{\sharp} \triangle x_{i+1}^{\sharp} \end{cases}$$

est stationnaire.

ONERA 71

72 / 75

Rétrécissement, illustration

$$R^{\sharp} = R^{\sharp} \nabla F^{\sharp}(R^{\sharp})$$

$$R^{\sharp'^{1}} = R^{\sharp} \triangle F^{\sharp}(R^{\sharp})$$

$$\vdots$$

$$R^{\sharp'} = R^{\sharp'} \triangle F^{\sharp}(R^{\sharp'})$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$R^{\sharp^{0}} = \bot$$

ONERA 72 / 75

Rétrécissement, illustration

$$R^{\sharp} = R^{\sharp} \nabla F^{\sharp}(R^{\sharp})$$

$$R^{\sharp'} = R^{\sharp} \triangle F^{\sharp}(R^{\sharp})$$

$$\vdots$$

$$R^{\sharp'} = R^{\sharp'} \triangle F^{\sharp}(R^{\sharp'})$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$R^{\sharp 0} = \Box$$

Rétrécissement, illustration

$$R^{\sharp} = R^{\sharp} \nabla F^{\sharp}(R^{\sharp})$$
 $R^{\sharp'} = R^{\sharp} \triangle F^{\sharp}(R^{\sharp})$
 $R^{\sharp'} = R^{\sharp'} \triangle F^{\sharp}(R^{\sharp'})$
 $R^{\sharp'} = R^{\sharp'} \triangle F^{\sharp}(R^{\sharp'})$
 $R^{\sharp 0} = \bot$

Remarque : Ifp $F^{\sharp} \sqsubseteq^{\sharp} R^{\sharp'}$

On part de $R^{\sharp} \supseteq^{\sharp} \operatorname{lfp} F^{\sharp}$ donc par croissance de F^{\sharp} ,

$$F^{\sharp}(R^{\sharp}) \supseteq^{\sharp} F^{\sharp} \left(\operatorname{lfp} F^{\sharp}\right) = \operatorname{lfp} F^{\sharp}$$

donc par propriété du rétrécissement \triangle ,

$$R^{\sharp'^1} = R^{\sharp} \vartriangle F^{\sharp}(R^{\sharp}) \supseteq^{\sharp} \operatorname{lfp} F^{\sharp}.$$

Finalement, par récurrence immédiate,

$$R^{\sharp'} \supset \operatorname{lfp} F^{\sharp}$$
.

Exemple de rétrécissement

Pour garantir la convergence, on ne raffine que les bornes infinies.

Exemple de rétrécissement

Pour garantir la convergence, on ne raffine que les bornes infinies.

Définition

$$x^{\sharp} \vartriangle y^{\sharp} = \left\{ \begin{array}{ll} \llbracket a, d \rrbracket & \operatorname{si} x^{\sharp} = \llbracket a, +\infty \llbracket \,, y^{\sharp} = \llbracket c, d \rrbracket \\ \llbracket c, b \rrbracket & \operatorname{si} x^{\sharp} = \rrbracket -\infty, b \rrbracket \,, y^{\sharp} = \llbracket c, d \rrbracket \\ \llbracket c, d \rrbracket & \operatorname{si} x^{\sharp} = \rrbracket -\infty, +\infty \llbracket \,, y^{\sharp} = \llbracket c, d \rrbracket \\ x^{\sharp} & \operatorname{sinon} \end{array} \right.$$

ONERA 73 / 75

ONERA 73 / 75

Exemple de rétrécissement

Pour garantir la convergence, on ne raffine que les bornes infinies.

Définition

$$x^{\sharp} \triangle y^{\sharp} = \begin{cases} \begin{bmatrix} [a,d] & \text{si } x^{\sharp} = [a,+\infty[,y^{\sharp} = [c,d]] \\ [c,b] & \text{si } x^{\sharp} =]-\infty,b], y^{\sharp} = [c,d] \\ [c,d] & \text{si } x^{\sharp} =]-\infty,+\infty[,y^{\sharp} = [c,d]] \\ x^{\sharp} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple

$$ightharpoonup [0, +\infty[\triangle [0, 1] = [0, 1]]$$

Exemple de rétrécissement

Pour garantir la convergence, on ne raffine que les bornes infinies.

Définition

$$x^{\sharp} \triangle y^{\sharp} = \begin{cases} \begin{bmatrix} [a,d] & \text{si } x^{\sharp} = [a,+\infty[], y^{\sharp} = [c,d] \\ [c,b] & \text{si } x^{\sharp} = [-\infty,b] , y^{\sharp} = [c,d] \\ [c,d] & \text{si } x^{\sharp} = [-\infty,+\infty[], y^{\sharp} = [c,d] \\ x^{\sharp} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple

- ▶ $[0, +\infty[\triangle [0, 1]] = [0, 1]]$
- $ightharpoonup [0,2] \triangle [0,1] = [0,2]$

Exemple de rétrécissement (suite et fin)

Exercice

Raffiner le résultat du calcul précédent avec le rétrécissement (i.e. partir du point fixe R_{μ}^{\dagger} et itérer en remplaçant ∇_{nr} par Δ_{nr} dans les equations).

Raffiner le résultat du calcul précédent avec le rétrécissement (i.e. partir du point fixe $R_{\perp}^{\sharp 3}$ et itérer en remplaçant ∇_{nr} par Δ_{nr} dans les equations).

Exemple de rétrécissement (suite et fin)

Résultat

Exercice

Après calcul on obtient :

$$R_0^{\sharp} = \top_{\mathrm{nr}}$$

$$R_1^{\sharp} = \llbracket 0, 12 \rrbracket$$

$$R_2^{\sharp} = \llbracket 1, 12 \rrbracket$$

$$R_3^{\overline{\sharp}} = \llbracket 0, 0
rbracket$$

ONERA 74 / 75

Exemple de rétrécissement (suite et fin)

Exercice

Raffiner le résultat du calcul précédent avec le rétrécissement (i.e. partir du point fixe ${R_l^{\sharp}}^3$ et itérer en remplaçant $\triangledown_{\mathrm{nr}}$ par \triangle_{nr} dans les equations).

Résultat

Après calcul on obtient :

$$R_0^{\sharp} = \top_{\mathrm{nr}}$$

$$R_1^{\sharp} = [0, 12]$$

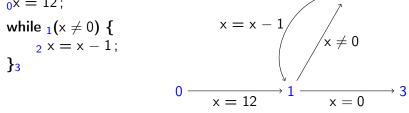
$$R_2^{\sharp} = \llbracket 1, 12
rbracket$$

$$R_3^{\sharp} = \llbracket 0, 0 \rrbracket$$

(on a maintenant bien x = 0)

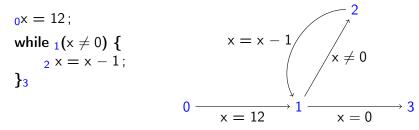
Limitations du narrowing et élargissement à seuil

$$_{0}x = 12;$$
while $_{1}(x \neq 0)$ {
 $_{2}x = x - 1;$
}₃



▶ Même avec le narrowing, on ne peut pas trouver $x \ge 0$.

Limitations du narrowing et élargissement à seuil



- ▶ Même avec le narrowing, on ne peut pas trouver $x \ge 0$.
- ▶ Alors que le domaine des signes y parvient.

75 / 75

ONERA 75 / 75

Limitations du narrowing et élargissement à seuil

$$0x = 12;$$
while $1(x \neq 0)$ {
 $2x = x - 1;$
}
$$0 \xrightarrow{x = 12} 1 \xrightarrow{x = 0} 3$$

- ▶ Même avec le narrowing, on ne peut pas trouver $x \ge 0$.
- ► Alors que le domaine des signes y parvient.
- On peut améliorer l'élargissement : au lieu de passer directement d'une borne positive à $-\infty$, on s'arrête d'abord à 0.
- C'est l'idée de l'élargissement à seuil : on peut ainsi utiliser n'importe quel nombre fini de constantes comme seuils.

ONERA 75 / 75

Limitations du narrowing et élargissement à seuil

$$0x = 12;$$
while $1(x \neq 0)$ {
 $2x = x - 1;$
}
$$0 \xrightarrow{x = 12} 1 \xrightarrow{x = 0} 3$$

- ▶ Même avec le narrowing, on ne peut pas trouver $x \ge 0$.
- ► Alors que le domaine des signes y parvient.
- ▶ On peut améliorer l'élargissement : au lieu de passer directement d'une borne positive à $-\infty$, on s'arrête d'abord à 0.
- C'est l'idée de l'élargissement à seuil : on peut ainsi utiliser n'importe quel nombre fini de constantes comme seuils.
- ▶ Encore faut il avoir le bon seuil (si on avait utilisé -1 ici, on n'aurait pas obtenu l'intervalle [-1, 12]).

ONERA 75 / 75