Université de sétif **2018/2019**

Faculté des sciences

Département de physique **Série $N^0 1$ (Solution)** **M.Q.A.1**

Composition de moments cinétiques (suite)

$Exercice\ n^0 4$:

On a le potentiel suivant

$$w(r) = v(r) + \frac{\alpha}{r}\frac{dv(r)}{dr}\,\vec{L}\cdot\vec{S}$$

1) Si on a $\vec{j}_1$ et $\vec{j}_2$, on peut trouver $\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$, tel que $|j_1 - j_2| \le j \le j_1 + j_2$.

Dans notre cas, $\vec{j} = \vec{L} + \vec{S}$ tel que $|L - S| \le j \le L + S$

$\vec{L} \longrightarrow |l, m\rangle$

$\vec{S} \longrightarrow |s, \varepsilon\rangle$

La base commune de $\vec{L}$ et $\vec{S} \longrightarrow |l, m, s, \varepsilon\rangle$

qui peut représenté par $\longrightarrow |j, \mu\rangle$, tel que $\mu = m + \varepsilon$

$|j, \mu\rangle = \sum_{m,\varepsilon} |l, m, s, \varepsilon\rangle\, \langle l, m, s, \varepsilon | j, \mu\rangle$

$|l, m, s, \varepsilon\rangle = \sum_{j,\mu} |j, \mu\rangle\, \langle j, \mu | l, m, s, \varepsilon\rangle$

donc

$$|j,\mu\rangle = \sum_m \left(\left|l, m, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle \left\langle l, m, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\middle| j, \mu\right\rangle + \left|l, m, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle \left\langle l, m, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\middle| j, \mu\right\rangle\right)$$

et comme $\mu = m + \varepsilon \Rightarrow m = \mu - \varepsilon$, donc finalement

$$|j,\mu\rangle = \left|l, \mu - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle \left\langle l, \mu - \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\middle| j, \mu\right\rangle + \left|l, \mu + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle \left\langle l, \mu + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\middle| j, \mu\right\rangle$$

2) Le potentiel $w(r)$ peut s'écrire comme suit

$$w(r) = v(r)\mathbb{I} + f(r)\,\vec{L}\cdot\vec{S}$$

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \Rightarrow \vec{L}\cdot\vec{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$$

On doit chercher, $\langle j'\mu' | w(r) | j, \mu\rangle = ?$

$$\langle j\mu'|w(r)|j,\mu\rangle = v(r)\delta_{\mu'\mu} + f(r)\langle j\mu'|\vec{L}\cdot\vec{S}|j,\mu\rangle$$
$$= v(r)\delta_{\mu'\mu} + f(r)\left\langle j\mu'\left|\frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)\right|j,\mu\right\rangle$$

alors, on a (évident)

$\langle j\mu'|J^2|j,\mu\rangle = \hbar^2 j(j+1)\delta_{\mu'\mu}$

Maintenant

$$\langle j\mu'|L^2|j,\mu\rangle = \sum_{m'\varepsilon'}\sum_{m\varepsilon}\langle j\mu'|lm's\varepsilon'\rangle\langle lm's\varepsilon'|L^2|lms\varepsilon\rangle\langle lms\varepsilon|j,\mu\rangle$$
$$= \hbar^2 l(l+1)\sum_{m'\varepsilon'}\sum_{m\varepsilon}\langle j\mu'|lm's\varepsilon'\rangle\langle lm's\varepsilon'||lms\varepsilon\rangle\langle lms\varepsilon|j,\mu\rangle$$
$$= \hbar^2 l(l+1)\sum_{m'\varepsilon'}\sum_{m\varepsilon}\langle j\mu'|lm's\varepsilon'\rangle\langle lms\varepsilon|j,\mu\rangle\delta_{mm'}\delta_{\varepsilon\varepsilon'}$$
$$\langle J\mu'|L^2|j,\mu\rangle = \hbar^2 l(l+1)\sum_{m\varepsilon}\langle J\mu'|lms\varepsilon\rangle\langle lms\varepsilon|J,\mu\rangle = \hbar^2 l(l+1)\delta_{\mu'\mu}$$

de même pour S^2

$\langle j\mu'|S^2|j,\mu\rangle = \sum_{m'\varepsilon'}\sum_{m\varepsilon}\langle j\mu'|lm's\varepsilon'\rangle\langle lm's\varepsilon'|S^2|lms\varepsilon\rangle\langle lms\varepsilon|j,\mu\rangle$

$$= \hbar^2 s(s+1)\sum_{m'\varepsilon'}\sum_{m\varepsilon}\langle j\mu'|lm's\varepsilon'\rangle\langle lm's\varepsilon'||lms\varepsilon\rangle\langle lms\varepsilon|j,\mu\rangle$$
$$= \hbar^2 s(s+1)\sum_{m'\varepsilon'}\sum_{m\varepsilon}\langle j\mu'|lm's\varepsilon'\rangle\langle lms\varepsilon|j,\mu\rangle\delta_{mm'}\delta_{\varepsilon\varepsilon'}$$
$$\langle J\mu'|S^2|j,\mu\rangle = \hbar^2 s(s+1)\sum_{m\varepsilon}\langle J\mu'|lms\varepsilon\rangle\langle lms\varepsilon|J,\mu\rangle = \hbar^2 s(s+1)\delta_{\mu'\mu}$$

finalement

$$\langle j\mu'|w(r)|j,\mu\rangle = v(r)\delta_{\mu'\mu} + \frac{\hbar^2}{2}f(r)[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]\delta_{\mu'\mu}$$

donc le potentiel $w(r)$ est diagonal.

- On a

$S = \frac{1}{2}$ et $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \Rightarrow |l - s| \leq j \leq l + s \Rightarrow l - \frac{1}{2} \leq j \leq l + \frac{1}{2}$

donc les valeurs propres pour $\vec{J}$ sont $j = l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}$.

$w(r)|j\mu\rangle = \beta(r)|j\mu\rangle$

$$\beta(r) = \begin{cases} v(r) + \frac{\hbar^2}{2}\frac{\alpha}{r}\frac{dv(r)}{dr}\left[\left(l-\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{1}{2}\right) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right] \\ v(r) + \frac{\hbar^2}{2}\frac{\alpha}{r}\frac{dv(r)}{dr}\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{3}{2}\right) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right] \end{cases}$$

3)

a) Si $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alors

$$j_+ \left|lm\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = j_+ \sum_{j\mu} |j\mu\rangle \langle j\mu| \left|lm\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$$

on sait que,

$j_+ = L_+ + S_+$, on aura donc

$(L_+ + S_+)\left|lm\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = j_+ \sum_{\mu} |j\mu\rangle \langle j\mu| \left|lm\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$, comme $S_+\left|lm\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = 0$, donc

$$\hbar\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\left|l, m+1, \frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - \mu(\mu+1)} \sum_{j\mu} \langle j\mu| \left|lm\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle |j, \mu+1\rangle$$

Si $\begin{cases} j = l + \frac{1}{2} \\ \mu + 1 = m + \frac{3}{2} \end{cases}$

Multipliant à gauche par $\langle j\mu| = \left\langle l+\frac{1}{2}, m+\frac{3}{2}\right|$

$$\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\left\langle l+\frac{1}{2}, m+\frac{3}{2}\right| \left|l, m+1, \frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$$
$$= \sqrt{j(j+1) - \mu(\mu+1)} \sum_{j\mu} \langle j\mu| \left|lm\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle \left\langle l+\frac{1}{2}, m+\frac{3}{2}\right| |j, \mu+1\rangle$$

Tous les termes de la somme sont nuls sauf les termes pour lesquels :

$$\begin{cases} j = l + \frac{1}{2} \\ \mu + 1 = m + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\sqrt{l(l+1) - m(m+1)}\left\langle l+\frac{1}{2}, m+\frac{3}{2}\right| \left|l, m+1, \frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$$
$$= \sqrt{j(j+1) - \mu(\mu+1)} \sum_{j\mu} \langle j\mu| \left|lm\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle \left\langle l+\frac{1}{2}, m+\frac{3}{2}\right| |j, \mu+1\rangle$$

donc

$$\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\,\langle l+\frac{1}{2},m+\frac{3}{2}\big|\,\big|l,m+1,\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$$

$$=\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{3}{2}\right)-(m+\frac{1}{2})(m+\frac{3}{2})}\ \langle l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}\big|\,\big|lm\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$$

et $\langle l+\frac{1}{2},m+\frac{3}{2}\big|\,\big|j,\mu+1\rangle=1$, finalement

$$\langle l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}\big|\,\big|lm\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle=\frac{\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}}{\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{3}{2}\right)-(m+\frac{1}{2})(m+\frac{3}{2})}}\langle l+\frac{1}{2},m+\frac{3}{2}\big|\,\big|l,m+1,\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle.$$

Maintenant si on écrit $L_+|lm\rangle=\sqrt{(l-m)(l+m+1)}|l,m+1\rangle$, on aura donc

$$\langle l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}\big|\,\big|lm\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle=\frac{\sqrt{(l-m)(l+m+1)}}{\sqrt{(l-m)(l+m+2))}}\langle l+\frac{1}{2},m+\frac{3}{2}\big|\,\big|l,m+1,\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle\text{ , alors}$$

$$\langle l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}\big|\,\big|lm\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle=\frac{\sqrt{(l+m+1)}}{\sqrt{(l+m+2))}}\langle l+\frac{1}{2},m+\frac{3}{2}\big|\,\big|l,m+1,\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle\text{ ,}$$

Si on remplace m par $m+1$ dans cette dernière relation, on obtient

$$\langle l+\frac{1}{2},m+\frac{3}{2}\big|\,\big|l,m+1,\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle=\frac{\sqrt{(l+m+2)}}{\sqrt{(l+m+3)}}\langle l+\frac{1}{2},m+\frac{5}{2}\big|\,\big|l,m+2,\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle\text{ , *}$$

remplaçant maintenant dans la même relation, on trouve

$$\langle l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}\big|\,\big|lm\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle=\frac{\sqrt{(l+m+1)}}{\sqrt{(l+m+2))}}\frac{\sqrt{(l+m+2)}}{\sqrt{(l+m+3)}}\langle l+\frac{1}{2},m+\frac{5}{2}\big|\,\big|l,m+2,\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle\text{ , **}$$

Si on remplace m par $m+1$ une autre fois dans relation $*$, on obtient

$$\langle l+\frac{1}{2},m+\frac{5}{2}\big|\,\big|l,m+2,\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle=\frac{\sqrt{(l+m+3)}}{\sqrt{(l+m+4)}}\langle l+\frac{1}{2},m+\frac{7}{2}\big|\,\big|l,m+3,\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle$$

Remplaçant maintenant dans **

$$\langle l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}\big|\,\big|lm\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle=\frac{\sqrt{(l+m+1)}}{\sqrt{(l+m+2))}}\frac{\sqrt{(l+m+2)}}{\sqrt{(l+m+3)}}\frac{\sqrt{(l+m+3)}}{\sqrt{(l+m+4)}}\langle l+\frac{1}{2},m+\frac{7}{2}\big|\,\big|l,m+3,\frac{1}{2}\frac{1}{2}\rangle\text{ ,}$$

or

$$\langle lm\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\left|l+\tfrac{1}{2},m+\tfrac{1}{2}\right\rangle = \frac{\sqrt{(l+m+1)}}{\sqrt{(l+m+2))}}\frac{\sqrt{(l+m+2)}}{\sqrt{(l+m+3)}}\frac{\sqrt{(l+m+3)}}{\sqrt{(l+m+4)}}\langle l,m+3,\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\left|\left|l+\tfrac{1}{2},m+\tfrac{7}{2}\right\rangle\right.,$$

Cas extrême

$$\langle l,l-1,\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\left|l+\tfrac{1}{2},l-\tfrac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2l}{2l+1}}\langle l,l,\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\left|\left|l+\tfrac{1}{2},l+\tfrac{1}{2}\right\rangle\right.$$

Donc

$$\langle lm\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\left|l+\tfrac{1}{2},m+\tfrac{1}{2}\right\rangle = \frac{\sqrt{(l+m+1)}}{\sqrt{(l+m+2))}}\frac{\sqrt{(l+m+2)}}{\sqrt{(l+m+3)}}\frac{\sqrt{(l+m+3)}}{\sqrt{(l+m+4)}}\cdots\sqrt{\frac{2l}{2l+1}}\langle l,l,\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\left|\left|l+\tfrac{1}{2},l+\tfrac{1}{2}\right\rangle\right.,$$

On a

$$\langle l,l,\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\left|\left|l+\tfrac{1}{2},l+\tfrac{1}{2}\right\rangle\right. = 1 \quad car \quad \langle j_1 j_1 j_2 j_2 || J,M\rangle = 1$$

Finalement

$$\langle lm\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\left|l+\tfrac{1}{2},m+\tfrac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}}$$

b) De la même manière pour l'application de $j_- = L_- + S_-$

Exercice $n^0 5$:

On l'Hamiltonien

$H = a'(\sigma_{1z} + \sigma_{2z}) + b\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ qui peut s'écrire aussi comme

$H = a(S_{1z} + S_{2z}) + b\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$, avec $a = 2a'$ et $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$

1) Les valeurs propres de H

Deux manières sont possibles pour trouver Les valeurs propres de H

Dans la représentation $(S_1^2, S_2^2, S^2, S_z) \longrightarrow |S,M\rangle \equiv |S_1, S_2, S, M\rangle$, on écrit

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2}(S^2 - S_1^2 - S_2^2)$$

Dans la représentation $(S_1^2, S_{1z}, S_1^2, S_{2z}) \longrightarrow |S_1, m_1, S_2, m_2\rangle$, on écrit

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{1z}S_{2z}$$

- Dans la représentation $(S_1^2, S_2^2, S^2, S_z) \longrightarrow |S,M\rangle \equiv |S_1, S_2, S, M\rangle$

$$H|S_1,S_2,S,M\rangle = \left[a(S_{1z}+S_{2z}) + b\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2\right]|S_1,S_2,S,M\rangle$$

$$= \left[aS_z + \frac{b}{2}(S^2 - S_1^2 - S_2^2)\right]|S_1,S_2,S,M\rangle$$

$$H|S_1,S_2,S,M\rangle =$$
$$\left[aM\hbar + \frac{b}{2}[\hbar^2 S(S+1) - \hbar^2 S_1(S_1+1) - \hbar^2 S_2(S_2+1)]\right]|S_1,S_2,S,M\rangle$$

Donc H est diagonale dans cette base, et les valeurs propres de H sont

$$\hbar\left[aM + \frac{\hbar b}{2}[S(S+1) - S_1(S_1+1) - S_2(S_2+1)]\right] = \hbar\left[aM + \frac{\hbar b}{2}[S(S+1) - \frac{3}{4}]\right]$$

- Dans la représentation $(S_1^2, S_{1z}, S_1^2, S_{2z})$ *les vecteurs de base* $\longrightarrow |S_1,m_1,S_2,m_2\rangle$, on écrit

  $H = a(S_{1z}+S_{2z}) + b(S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y} + S_{1z}S_{2z})$

Il est difficile de calculer ces élément de matrice et de déduire les valeurs propres de H, car si on calcul les composantes, $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$, on trouve une matrice non diagonale, donc il faut la diagonaliser ce qui entraine un travail en plus par rapport à la première représentation.

Exercice $n^0$6:

Le spin du noyau Deutérium :

$|S_1 - S_2| \leq I \leq S_1 + S_2 \Rightarrow 0 \leq I \leq 1 \Rightarrow I = 0{,}1$

La base considérée est $|IM_I\rangle$

Mais d'après les données de l'exercice, on considère que le noyau est dans l'état $I = 1$

1) Pour l'état $1s \Rightarrow n = 1$ *et* $l = 0$

$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, donc\ \left|0 - \frac{1}{2}\right| \leq J \leq 0 + \frac{1}{2} \Rightarrow J = \frac{1}{2}$

$\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}, donc\ |I - J| \leq F \leq I + J \Rightarrow \left|1 - \frac{1}{2}\right| \leq F \leq 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow F = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

La base considérée sera $|F, M_F\rangle$, tel que $-F \leq M_F \leq +F$ et les différents kets seront :

$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle,$

2) Pour l'état $2p \Rightarrow n = 2$ *et* $l = 1$

$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, donc\ \left|1 - \frac{1}{2}\right| \leq J \leq 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

$\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}, donc\ |I - J| \leq F \leq I + J \Rightarrow \left|1 - \frac{1}{2}\right| \leq F \leq 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow F = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ *et*

$$\left|1 - \frac{3}{2}\right| \leq F \leq 1 + \frac{3}{2} \Rightarrow F = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$$

La base considérée sera $|F, M_F\rangle$, tel que $-F \leq M_F \leq +F$ et les différents kets seront :

$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle,$

$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle,$

$\left|\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right\rangle, \left|\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle.$

Il ya 12 kets de base pour l'état $2p$.

Exercice n°7:

1)

$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'}$, et

$HM = OM \cdot sin\theta$, et

$\overrightarrow{MM'} = HM \cdot \varepsilon\overrightarrow{u_1}$, et comme

$\overrightarrow{u_1} \perp \vec{u}$ et $\overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{OM}$, on peut écrire

$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \wedge \overrightarrow{OM} \cdot \varepsilon$, finalement

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \varepsilon \cdot \vec{u} \wedge \overrightarrow{OM} \qquad (1)$$

2) La matrice représentant $R_{\vec{u}}(\varepsilon)$

- $R_{\vec{u}}(\varepsilon) =?$

On a, $\overrightarrow{OM'} = R_{\vec{u}}(\varepsilon)\overrightarrow{OM}$

Calculant le terme

$$\varepsilon \cdot \vec{u} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ x & y & z \end{pmatrix} = (\varepsilon_y z - y\varepsilon_z)\vec{\imath} - (\varepsilon_x z - x\varepsilon_z)\vec{\jmath} + (\varepsilon_x y - x\varepsilon_y)\vec{k}$$

de l'équation (1), on obtient

$x' = x + (\varepsilon_y z - y\varepsilon_z)$

$y' = y + \ (x\varepsilon_z - \varepsilon_x z)$

$z' = z + (\varepsilon_x y - x\varepsilon_y)$

qui peut s'écrire sous une forme matricielle

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ zé \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 1 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow R_{\vec{u}}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 1 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 1 \end{pmatrix}$$

- On déduit les matrices représentant les composantes infinitésimales de $\vec{J}$

On a

$R_{\vec{u}}(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\vec{J} \cdot \vec{u}$, après la projection,

$R_{\vec{\imath}}(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\vec{J} \cdot \vec{\imath}$, donc

$J_x = \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - R_x(\varepsilon)\right)$, avec

$$R_x(\varepsilon) = R(\varepsilon_x = \varepsilon, \varepsilon_y = 0,\ \varepsilon_z = 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$, donc on aura

$$J_x = \frac{1}{\varepsilon}\left(1 - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$, finalement

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$, de même pour

$$J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } J_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Calcul des commutateurs $[J_i, J_j] =?$

$$[J_x, J_y] = J_xJ_y - J_yJ_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J_z$$

Les analogues quantiques :

$[J_i, J_j] = i\hbar \mathcal{E}_{ijk} J_k$

4) Calcul la matrice représentant $e^{\alpha J_z}$

$e^{\alpha J_z} \approx 1 + \alpha J_z$, ce qui donne

$$e^{\alpha J_z} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_{\vec{k}}(\alpha)$$; son analogue en MQ est

$e^{\frac{-i}{\hbar}\alpha J_z}$.

Exercice $n^0 8$: (n'est pas résolu au TD)

Exercice $n^0 9$:

1)

On Remarque la rotation d'angles polaires $\theta,\ \varphi$ est un cas particulier de la rotation d'angles d'Euler α, β, γ pour $\alpha = \varphi, \beta = \theta, et\ \gamma = 0$.

On peut donc se contenter (satisfaire) d'étudier les éléments de matrice de $R^J(\alpha, \beta, \gamma)$.

Toute la difficulté du calcule de ces éléments réside dans le terme fonction J_y.

$$R^J_{MM'} = \langle JM|R^J(\alpha,\beta,\gamma)|JM'\rangle = \left\langle JM\left|e^{-i\alpha J_z}e^{-i\beta J_y}e^{-i\gamma J_z}\right|JM'\right\rangle$$

or

$$R^J_{MM'} = e^{-i\alpha M}e^{-i\gamma M'}\left\langle JM\left|e^{-i\beta J_y}\right|JM'\right\rangle = e^{-i\alpha M}e^{-i\gamma M'}d^J_{MM'}(\beta)$$

La relation cherchée est très utile : elle permet le calcul des éléments de matrice aux termes correspondant à $M \geq 0$:

$$R^{J*}_{MM'} = e^{i\alpha M}e^{i\gamma M'}d^{J*}_{MM'}(\beta) = e^{-i\alpha(-M)}e^{-i\gamma(-M)'}d^J_{MM'}(\beta)$$

En effet l'opérateur iJ_y est représenté par une matrice réelle dans la base des vecteurs $|JM\rangle$ et les quantités $d^J_{MM'}(\beta)$ sont donc toutes réelles.0

On peut exprimer $d^J_{MM'}(\beta)$ en fonction de $d^J_{-M-M'}(\beta)$ en utilisant l'opérateur de rotation d'un angle π autour de l'axe (Oy) :

$$d^J_{MM'}(\beta) = \left\langle JM\left|e^{i\pi J_y}e^{-i\beta J_y}e^{-i\pi J_y}\right|JM'\right\rangle$$

Sachant que : $\langle JM|e^{+i\pi J_y} = (-1)^{M-J}\langle J-M|, \quad \Rightarrow e^{-i\pi J_y}|JM'\rangle = (-)^{J-M'}|J-M'\rangle$, alors

$$d^J_{MM'}(\beta) = (-1)^{M-J}\langle J-M|e^{-i\beta J_y}(-1)^{J-M'}|J-M'\rangle = (-1)^{M-M'}\langle J-M|e^{-i\beta J_y}|J-M'\rangle,$$

donc

$$d^J_{MM'}(\beta) = (-1)^{M-M'}d^J_{-M-M'}(\beta)$$

On obtient

$$R^{J*}_{MM'}(\alpha,\beta,\gamma) = (-1)^{M-M'}e^{-i\alpha(-M)}e^{-i\gamma(-M)'}d^J_{-M-M'}(\beta)$$

Finalement

$$R^{J*}_{MM'}(\alpha,\beta,\gamma) = (-1)^{M-M'}R^J_{-M-M'}(\alpha,\beta,\gamma)\ . \quad (*)$$

La qualité réelle de $d^J_{MM'}(\beta)$ apporte une autre limitation au nombre d'éléments de matrice indépendants. En effet

$$d^J_{MM'}(\beta) = d^{J*}_{MM'}(\beta) = \langle JM|e^{-i(-\beta)J_y}|JM'\rangle = d^J_{MM'}(-\beta)$$

En résumé il suffit de calculer les éléments de matrices correspondant à $M \geq 0$ et $M \geq M'$. Tous les autres s'en déduisent par les deux relations précédentes.

2) Pour le cas de $j = \frac{1}{2}$

$$j = \frac{1}{2} \Rightarrow d^{\frac{1}{2}}_{MM'} = \left\langle \frac{1}{2}M\middle|e^{-i\beta\frac{\sigma_y}{2}}\middle|\frac{1}{2}M'\right\rangle$$, on sait que

$$e^{-i\beta\frac{\sigma_y}{2}} = cos\frac{\beta}{2} - i\sigma_y sin\frac{\beta}{2}$$, avec $\sigma_y = \begin{pmatrix} o & -i \\ i & o \end{pmatrix}$, donc

$$d^{\frac{1}{2}}_{MM'} = \begin{pmatrix} cos\frac{\beta}{2} & -sin\frac{\beta}{2} \\ sin\frac{\beta}{2} & cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$, finalement

$$R^{\frac{1}{2}}_{MM'} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}}cos\frac{\beta}{2} & -e^{-i\frac{\alpha-\gamma}{2}}sin\frac{\beta}{2} \\ e^{i\frac{\alpha-\gamma}{2}}sin\frac{\beta}{2} & e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

Pour le cas particulier où, $\alpha = \varphi, \beta = \theta, et\, \gamma = 0$, on aura

$$R^{\frac{1}{2}}_{MM'}(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}}cos\frac{\theta}{2} & -e^{-i\frac{\varphi}{2}}sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\varphi}{2}}sin\frac{\theta}{2} & e^{i\frac{\varphi}{2}}cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

- alors d'une part

$$R^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = e^{-i\frac{\varphi}{2}}cos\frac{\theta}{2} \Rightarrow R^{\frac{1}{2}*}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = e^{i\frac{\varphi}{2}}cos\frac{\theta}{2}$$

D'autre part, en appliquant la relation (*)

$$R^{\frac{1}{2}*}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = R^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = e^{i\frac{\varphi}{2}}cos\frac{\theta}{2}$$

- On a d'une part

$$R^{\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = -e^{-i\frac{\varphi}{2}}sin\frac{\theta}{2} \Rightarrow R^{\frac{1}{2}*}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = -e^{i\frac{\varphi}{2}}sin\frac{\theta}{2}$$

D'autre part, en appliquant la relation (*)

$$R^{\frac{1}{2}*}_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})}R^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = -R^{\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = -e^{i\frac{\varphi}{2}}sin\frac{\theta}{2}$$

3)

L'opérateur de rotation est unitaire. L'opérateur correspondant à la rotation inverse est donc égal à l'opérateur adjoint :

$$[R^J(\alpha,\beta,\gamma)]^{-1} = R^{J+}(\alpha,\beta,\gamma) = R^J(-\gamma,-\beta,-\alpha)$$

Exercice n⁰10

1) On a

$\left\langle j,m\middle|T_k^{(1)}\middle|j',m'\right\rangle = \frac{\langle 1q j'm'|jm\rangle}{\sqrt{2j+1}}\langle j'|T^{(1)}|j\rangle$, donc

$\left\langle j,m\middle|V_k^{(1)}\middle|j',m'\right\rangle = \frac{\langle 1q j'm'|jm\rangle}{\sqrt{2j+1}}\langle j'|\vec{V}|j\rangle$, et (1)

$\left\langle j,m\middle|J_k^{(1)}\middle|j',m'\right\rangle = \frac{\langle 1q j'm'|jm\rangle}{\sqrt{2j+1}}\langle j'|\vec{J}|j\rangle$, (2)

(1)/(2) donne

$$\frac{\left\langle j,m\middle|V_k^{(1)}\middle|j',m'\right\rangle}{\left\langle j,m\middle|J_k^{(1)}\middle|j',m'\right\rangle} = \frac{\langle j'|\vec{V}|j\rangle}{\langle j'|\vec{J}|j\rangle} = A \Rightarrow \langle j'|\vec{V}|j\rangle = A\,\langle j'|\vec{J}|j\rangle$$

2) Calcul : $\langle j,m|\vec{V}\cdot\vec{J}|j,m'\rangle = ?$

$$\langle j,m|\vec{V}\cdot\vec{J}|j,m'\rangle = \sum_{m"}\langle j,m|\vec{V}|j,m"\rangle\langle j,m"|\vec{J}|j,m'\rangle = \sum_{m"} A\,\langle j,m|\vec{J}|j,m"\rangle\,\langle j,m"|\vec{J}|j,m'\rangle$$
$$= A\langle j,m|J^2|j,m'\rangle$$

$$\langle j,m|\vec{V}\cdot\vec{J}|j,m'\rangle = A\hbar^2 J(J+1)\delta_{mm'}$$

3) Déduisant la formule de Landé

On a

$\langle j'|\vec{V}|j\rangle = A\,\langle j'|\vec{J}|j\rangle$, et $A = \frac{\langle j,m|\vec{V}\cdot\vec{J}|j,m'\rangle}{\hbar^2 J(J+1)\delta_{mm'}} = \frac{\langle j,m|\vec{V}\cdot\vec{J}|j,m\rangle}{\hbar^2 J(J+1)}$

Alors

$$\langle j,m|\vec{V}|j,m\rangle = \frac{\langle j,m|\vec{V}\cdot\vec{J}|j,m\rangle}{\hbar^2 J(J+1)}\langle j,m|\vec{J}|j,m\rangle$$

4)

a) On Montrer que $|j,m\rangle$ est ket propre de L^2 et S^2

$|j,m\rangle = \sum_{m_l m_s}\langle l m_l s m_s|jm\rangle\,|l m_l s m_s\rangle$

$L^2|j,m\rangle = \sum_{m_l m_s} L^2\langle l m_l s m_s|jm\rangle\,|l m_l s m_s\rangle = \hbar^2 l(l+1)|j,m\rangle$

Idem pour S^2

$S^2|j,m\rangle = \hbar^2 S(S+1)|j,m\rangle$

b)

$2\vec{J}\cdot\vec{L} = ?$

$\vec{J} = \vec{L}+\vec{S} \Rightarrow \vec{S} = \vec{J}-\vec{L} \Rightarrow S^2 = J^2 + L^2 - 2\vec{J}\cdot\vec{L}$

Exercice $n^0 11$:

$2\vec{J}\cdot\vec{L} = j^2 + L^2 - S^2$

$2\vec{J}\cdot\vec{S} =?$

$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \Rightarrow \vec{J} - \vec{S} = \vec{L} \Rightarrow L^2 = j^2 + S^2 - 2\vec{J}\cdot\vec{S}$

$2\vec{J}\cdot\vec{S} = j^2 + S^2 - L^2$

c)

Calcul de :

$\mu = \langle j, m = j|\mu_z|j, m = j\rangle =?$

$\vec{\mu} = g_1\vec{L} + g_2\vec{S}$, on a la formule de Landé

$\langle j,m|\vec{V}|j,m\rangle = \frac{\langle j,m|\vec{V}\cdot\vec{J}|j,m\rangle}{\hbar^2 J(J+1)}\langle j,m|\vec{J}|j,m\rangle$

$\langle j,m|\mu_z|j,m\rangle = \frac{\langle j,m|\vec{\mu}\cdot\vec{J}|j,m\rangle}{\hbar^2 J(J+1)}\langle j,m|j_z|j,m\rangle = \frac{m}{2\hbar^2 J(J+1)}[\langle j,m|(g_1 2\vec{J}\cdot\vec{L} + g_2 2\vec{J}\cdot\vec{S})|j,m\rangle]$

$\langle j,m|\mu_z|j,m\rangle = \frac{m\hbar}{\hbar^2 2J(J+1)}[\langle j,m|(g_1(j^2 + L^2 - S^2) + g_2(j^2 + S^2 - L^2))|j,m\rangle]$

$\langle j,m = j|\mu_z|j,m = j\rangle = \frac{m\hbar}{2J(J+1)}[(g_1(j(j+1) + l(l+1) - S(S+1)) + g_2(j(j+1) + S(S+1) - l(l+1))]$

1) Pour $j = (l + \frac{1}{2}) = m$

$\mu = \frac{1}{2(l+\frac{3}{2})}[(g_1((l+\frac{1}{2})((l+\frac{1}{2})+1) + l(l+1) - \frac{3}{4}) + g_2((l+\frac{1}{2})((l+\frac{1}{2})+1) - l(l+1) + \frac{3}{4})]$

$\mu = \frac{1}{2(l+\frac{3}{2})}[2g_1 l\left(l+\frac{3}{2}\right) + g_2\left(l+\frac{3}{2}\right)]$

$\mu = g_l l + \frac{1}{2}g_s$

2) Pour $j = (l - \frac{1}{2}) = m$

$\mu = g_l l - \frac{1}{2}g_s$

Exercice n°11:

Trouvant ses composantes standards

$$\left[J_z\,,T_q^{(n)}\right] = \hbar q\, T_q^{(n)}$$

$$\left[J_\pm\,,T_q^{(n)}\right] = \hbar\sqrt{n(n+1) - q(q\pm 1)}\; T_{q\pm 1}^{(n)}$$

$$\left[J_i, V_j\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk}V_k$$

- On a pour la composante $T_0^{(1)}$

$$\begin{cases} [J_z\,, V_z] = 0 \\ \left[J_z\,, T_0^{(1)}\right] = 0 \end{cases} \Longrightarrow V_z = T_0^{(1)}$$

- On a pour la composante $T_1^{(1)}$

$$\left[J_+\,, T_0^{(1)}\right] = \hbar\sqrt{2}\;\; T_1^{(1)} \qquad (1)$$

$$[J_+\,, V_z] = \left[J_x + iJ_y\,, V_z\right] = \;[J_x\,, V_z] + i\left[J_y\,, V_z\right]$$

On sait que

$$[J_x\,, V_z] = -i\hbar V_y$$

$\left[J_y\,, V_z\right] = i\hbar V_x$, on aura donc

$$[J_+\,, V_z] = \; -i\hbar V_y \;+ i(\,i\hbar V_x) = -\hbar(V_x + iV_y) \qquad (2)$$

(1) et (2) donnent

$\hbar\sqrt{2}\;\; T_1^{(1)} = -\hbar(V_x + iV_y)$, donc

$$T_1^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x + iV_y)$$

- On a pour la composante $T_{-1}^{(1)}$

$$\left[J_-\,, T_0^{(1)}\right] = \hbar\sqrt{2}\;\; T_{-1}^{(1)} \qquad (3)$$

$$[J_-\,, V_z] = \left[J_x - iJ_y\,, V_z\right] = \;[J_x\,, V_z] - i\left[J_y\,, V_z\right] = -i\hbar V_y - \big(i(i\hbar V_x)\big)$$

$$[J_-\,, V_z] = \hbar(V_x - iV_y) \qquad (4)$$

(3) et (4) donnent

$$T_{-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x - iV_y)$$

Université de sétif **2018/2019**

Faculté des sciences

Département de physique **Série $N^0 2$** **M.Q.A.1**

Perturbations dépendant du temps

Exercice $n^0 1$:

on considère un oscillateur harmonique à une dimension de masse M, de pulsation $\omega_0{}'$ et de charge q.

Soient $|n\rangle$ et E_n les états propres et les valeurs propres de son Hamiltonien H_0. Pour $t < 0$, l'oscillateur est dans l'état fondamental $|0\rangle$. A $t = 0$, il est soumis à un créneau de champs électrique de durée T ; la perturbation correspondante s'écrit :

$$V(t) = \begin{cases} -qeX & pour \ \ 0 < t < T \\ 0 & pour \ \ t < 0 \ \ et \ \ t > T \end{cases}$$

Tapez une équation ici.où e est l'amplitude du champs électrique et X l'observable position. Soit P_{01}la probabilité de trouver l'oscillateur dans l'état $|n\rangle$ après la fin du créneau.

a- Calculer P_{01} en utilisant la théorie des perturbations dépendant du temps au premier ordre. Comment varie P_{01} avec T, $\omega_0{}'$ étant fixé ?

b- Montrer que pour obtenir P_{02}, il faut pousser le calcul de perturbations dépendant du temps au mois jusqu'au seconde ordre. Calculer P_{02} à cet ordre de perturbations.

Exercice $n^0 2$:

On considère un niveau atomique de moment cinétique $J = 1$ soumis à l'action de deux champs magnétique et électrique statiques ; parallèles tous les deux à l'axe Oz. On peut montrer qu'on obtient alors trois niveaux non équidistants correspondent les états propres $|j, m\rangle$ de J_z, d'énergie E_m. On pose : $E_1 - E_0 = \hbar\omega_0$, $E_0 - E_{-1} = \hbar\omega_0'$ $(\omega_0 \neq \omega_0')$.

L'atome est soumis de plus à l'action d'un champ radiofréquence tournant à la fréquence angulaire ω dans le plan (xoy). La perturbation correspondante $V(t)$ s'écrit :

$V(t) = \frac{\omega_1}{2}(J_+ e^{-i\omega t} + J_- e^{i\omega t})$, où ω_1 est une constante proportionnelle à l'amplitude du champ tournant.

a- Si à l'instant $t = 0$ le système se trouve dans l'état $|-1\rangle$, quel est l'état du système à l'instant t.

b- Calculer la probabilité de transition de l'état $|-1\rangle$ à l'état $|+1\rangle$ au second ordre de la perturbation.

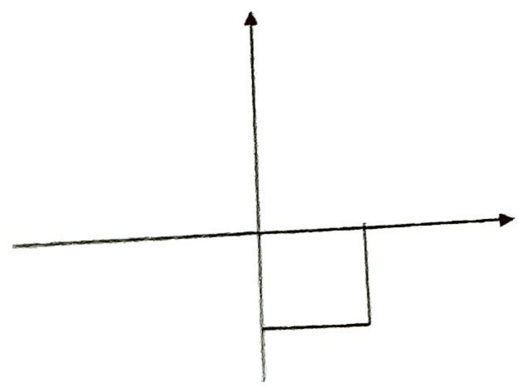
Université de sétif **2018/2019**
Faculté des sciences

Département de physique **Série $N^0 2$** **M.Q.A.1**

Perturbations dépendant du temps(solution)

Exercice $n^0 1$:

$$V(t) = \begin{cases} -qeX & pour \quad 0 < t < T \\ 0 & pour \quad t < 0 \quad et \quad t > T \end{cases}$$



Au 1^{er}ordre

$$P_{if} = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{t_0}^{t} e^{i\omega_{fi}t'} V_{fi}(t')dt'\right|^2 \qquad (1)$$

ou

$$P_{if}^{(1)} = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{t_0}^{t} \langle i|U_0(t,t_1)V(t_1)U_0(t_1,t_0)dt_1|f\rangle\right|^2$$

Au 2^{eme}ordre

$$P_{if}^{(2)} = \frac{1}{\hbar^4}\left|\langle i|\int_0^t\int_0^{t_1} U_0(t,t_2)\,V(t_2)U_0(t_2,t_1)V(t_1)U_0(t_1,t_0)dt_1dt_2|f\rangle\right|^2$$

a- Calcule de P_{01} :

De (1), on écrit

$$P_{0n}^{(1)} = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^T \langle 0| - qeX(t)\, e^{\frac{i(E_n-E_0)t}{\hbar}}|n\rangle\, dt\right|^2, \text{ avec } X(t) = \frac{1}{\beta\sqrt{2}}(a+a^+), \beta = \sqrt{\frac{M\omega_0'}{\hbar}}$$

$$P_{0n}^{(1)} = \frac{q^2e^2}{2\beta^2\hbar^2}\left|\int_0^T \langle 0|a+a^+|n\rangle e^{\frac{i(E_n-E_0)t}{\hbar}}dt\right|^2$$

$$= \frac{2q^2e^2T^2}{\beta^2\hbar^2}\left|\sqrt{n}\delta_{0,n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{0,n+1}\right|^2 \frac{\sin^2(\omega_{n0}\frac{T}{2})}{(\omega_{n0}\frac{T}{2})^2}$$

On pose : $x = (\omega_{n0}\frac{T}{2})$, donc

$P_{0n}^{(1)} = \frac{2q^2e^2T^2}{\beta^2\hbar^2}\frac{\sin^2 x}{x^2} n\delta_{0,n-1}$,on obtient

$P_{01}^{(1)} = \frac{2q^2e^2T^2}{\beta^2\hbar^2}\frac{\sin^2 x}{x^2}$

b-

En premier ordre,

$P_{02}^{(1)} = \frac{2q^2e^2T^2}{\beta^2\hbar^2}\frac{\sin^2 x}{x^2} 2\delta_{0,1} = 0 \Longrightarrow$ il faut pousser le calcul au deuxième ordre.

Calcul de $P_{02}^{(1)}$ au 2^{eme} ordre

$P_{if}^{(2)} = \frac{1}{\hbar^4}\left|\langle i|\int_0^t\int_0^{t_1} U_0(t,t_2)\, V(t_2)U_0(t_2,t_1)V(t_1)U_0(t_1,t_0)dt_1dt_2|f\rangle\right|^2$

donc

$P_{0n}^{(2)} = \frac{1}{\hbar^4}\left|\langle 0|\int_0^T\int_0^{t_1} U_0(T,t_2)\, V(t_2)U_0(t_2,t_1)V(t_1)U_0(t_1,0)dt_1dt_2|n\rangle\right|^2$

Or

$P_{0n}^{(2)} = \frac{q^4e^4}{\hbar^4}\left|\langle 0|\int_0^T\int_0^{t_1} e^{-\frac{i}{\hbar}H_0(T-t_2)}Xe^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t_2-t_1)}Xe^{-\frac{i}{\hbar}H_0t_1}\,|n\rangle dt_1dt_2\right|^2$

Donc

$P_{0n}^{(2)} = \frac{q^4e^4}{\hbar^4}\left|\int_0^T\int_0^{t_1} e^{-\frac{i}{\hbar}E_0(T-t_2)}\,\langle 0|Xe^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t_2-t_1)}X\,|n\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_nt_1}\,dt_1dt_2\right|^2$

Or

$P_{0n}^{(2)} = \frac{q^4e^4}{\hbar^4}\left|\sum_m\int_0^T\int_0^{t_1} e^{-\frac{i}{\hbar}E_0(T-t_2)}\,\langle 0|Xe^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t_2-t_1)}|m\rangle\langle m|X\,|n\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_nt_1}\,dt_1dt_2\right|^2$

Donc

$P_{0n}^{(2)} = \frac{q^4e^4}{\hbar^4}\left|\sum_m\int_0^T\int_0^{t_1} e^{-\frac{i}{\hbar}E_0(T-t_2)}e^{-\frac{i}{\hbar}E_m(t_2-t_1)}e^{-\frac{i}{\hbar}E_nt_1}\,\langle 0|X|m\rangle\langle m|X|n\rangle\,dt_1dt_2\right|^2$

Or

$P_{0n}^{(2)} = \frac{q^4e^4}{\hbar^4}\left|\sum_m\langle 0|X|m\rangle\langle m|X|n\rangle\int_0^T\int_0^{t_1} e^{i(\omega_0-\omega_m)t_2}e^{i(\omega_m-\omega_n)t_1}\,dt_1dt_2\right|^2$

Donc

$P_{0n}^{(2)} = \frac{q^4e^4}{\hbar^4}\left|\sum_m\langle 0|X|m\rangle\langle m|X|n\rangle\int_0^T dt_1e^{i(\omega_m-\omega_n)t_1}\int_0^{t_1} e^{i(\omega_0-\omega_m)t_2}\,dt_2\right|^2$

$\beta_1 = (\omega_m-\omega_n), et\;\; \beta_2 = (\omega_0-\omega_m)$

On aura

$P_{0n}^{(2)} = \frac{q^4e^4}{\hbar^4}\left|\sum_m\langle 0|X|m\rangle\langle m|X|n\rangle\int_0^T dt_1e^{i\beta_1t_1}\int_0^{t_1} e^{i\beta_2t_2}\,dt_2\right|^2$

$P_{0n}^{(2)} = \frac{q^4e^4}{\hbar^4}\left|\sum_m\langle 0|X|m\rangle\langle m|X|n\rangle\int_0^T dt_1e^{i\beta_1t_1}(\frac{e^{i\beta_2t_1}-1}{i\beta_2})\right|^2$

$P_{0n}^{(2)} = \frac{q^4e^4}{\hbar^4{\beta_2}^2}\left|\sum_m\langle 0|X|m\rangle\langle m|X|n\rangle\left\{\frac{e^{i(\beta_1+\beta_2)T}-1}{\beta_1+\beta_2}-\frac{e^{i\beta_1T}-1}{\beta_1}\right\}\right|^2$ (2)

On a :

$$\sum_m\langle 0|X|m\rangle\langle m|X|n\rangle = \frac{1}{2\beta^2}\sum_m(\sqrt{m}\delta_{0,m-1}+\sqrt{m+1}\delta_{0,m+1})(\sqrt{n}\delta_{m,n-1}+\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1})$$

Tous les terme sont nuls sauf pour $m = 1$

$$\sum_m\langle 0|X|m\rangle\langle m|X|n\rangle = (\sqrt{n}\delta_{1,n-1}+\sqrt{n+1}\delta_{1,n+1})$$

Remplaçant de l'équation (2)

$P_{0n}^{(2)} = \frac{q^4e^4}{4\beta^4\hbar^4{\beta_2}^2}\left|(\sqrt{n}\delta_{1,n-1}+\sqrt{n+1}\delta_{1,n+1})\left\{\frac{e^{i(\beta_1+\beta_2)T}-1}{\beta_1+\beta_2}-\frac{e^{i\beta_1T}-1}{\beta_1}\right\}\right|^2$, donc

$$P_{02}^{(2)} = \frac{q^4e^4}{2\beta^4\hbar^4{\beta_2}^2}\left|\left\{\frac{e^{i(\beta_1+\beta_2)T}-1}{\beta_1+\beta_2} - \frac{e^{i\beta_1 T}-1}{\beta_1}\right\}\right|^2$$

On a : $m = 1$ et $n = 2$

$(\beta_1 + \beta_2) = (\omega_0 - \omega_n) = \frac{E_0 - E_2}{\hbar}$, et

$\beta_1 = (\omega_m - \omega_n) = \frac{E_1 - E_2}{\hbar}$

$\beta_2 = (\omega_0 - \omega_m) = \frac{E_0 - E_1}{\hbar}$, donc

$$P_{02}^{(2)} = \frac{q^4e^4}{2\beta^4\hbar^4{\beta_2}^2}\left|\left\{\frac{e^{i\frac{E_0-E_2}{\hbar}T}-1}{\frac{E_0-E_2}{\hbar}} - \frac{e^{i\frac{E_1-E_2}{\hbar}T}-1}{\frac{E_1-E_2}{\hbar}}\right\}\right|^2$$

On a pour l'oscillateur harmonique

$E_n = \hbar\omega_0'(n + \frac{1}{2})$,

$E_0 - E_2 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0' - \frac{5}{2}\hbar\omega_0' = -2\hbar\omega_0'$

$E_1 - E_2 = \frac{3}{2}\hbar\omega_0' - \frac{5}{2}\hbar\omega_0' = -\hbar\omega_0'$, donc

$$P_{02}^{(2)} = \frac{q^4e^4}{2\beta^4\hbar^4{\beta_2}^2}\left|\left\{\frac{e^{-2i\omega_0'T}-1}{-2\omega_0'} - \frac{e^{-i\omega_0'T}-1}{-\omega_0'}\right\}\right|^2 = \frac{q^4e^4}{2\beta^4\hbar^4{\beta_2}^2}\left|\left\{\frac{e^{-2i\omega_0'T}-1}{2\omega_0'} - \frac{2e^{-i\omega_0'T}-2}{2\omega_0'}\right\}\right|^2$$

$$P_{02}^{(2)} = \frac{q^4e^4}{2\beta^4\hbar^4{\beta_2}^2}\left|\left\{\frac{e^{-2i\omega_0'T}-1-2e^{-i\omega_0'T}+2}{2\omega_0'}\right\}\right|^2 = \frac{q^4e^4}{2\beta^4\hbar^4{\beta_2}^2}\left|\left\{\frac{e^{-2i\omega_0'T}-2e^{-i\omega_0'T}+1}{2\omega_0'}\right\}\right|^2$$

$$P_{02}^{(2)} = \frac{q^4e^4}{2\beta^4\hbar^4{\beta_2}^2}\left|\frac{(e^{-i\omega_0'T}-1)^2}{2\omega_0'}\right|^2 = \frac{q^4e^4}{2\beta^4\hbar^4{\beta_2}^2}\left|\frac{(e^{-i\omega_0'\frac{T}{2}}(e^{-i\omega_0'\frac{T}{2}}-e^{i\omega_0'\frac{T}{2}}))^2}{2\omega_0'}\right|^2, \text{ donc}$$

$$P_{02}^{(2)} = \frac{q^4e^4}{2\beta^4\hbar^4{\beta_2}^2}\left|\frac{(e^{-i\omega_0'\frac{T}{2}}-e^{i\omega_0'\frac{T}{2}})^2}{2\omega_0'}\right|^2 = \frac{q^4e^4}{2\beta^4\hbar^4{\beta_2}^2}\left|\frac{(2isin\omega_0'\frac{T}{2})^2}{2\omega_0'}\right|^2 = \frac{2q^4e^4}{\beta^4\hbar^4{\beta_2}^2}\left|\frac{sin^2\omega_0'\frac{T}{2}}{\omega_0'}\right|^2$$

Finalement et el hamdou li ellah

$$\boldsymbol{P_{02}^{(2)} = \frac{2M^2(qe)^4}{\hbar^2{\omega_0'}^6}sin^4\frac{\omega_0'}{2}T\ .}$$

Exercice $n^0 2$:

a- l'état du système à l'instant t.

$$|\psi(t)\rangle = U(t,0)|-1\rangle$$

b- P_{-11} =?.

$$P_{-11}^{(2)} = \frac{1}{\hbar^4}\left|\int_0^t \int_0^{t_1} \langle -1|U_0(t,t_2)\, V(t_2)U_0(t_2,t_1)V(t_1)U_0(t_1,0)dt_1dt_2|1\rangle\right|^2$$

On a

$$V(t) = \frac{\omega_1}{2}(J_+e^{-i\omega t} + J_-e^{i\omega t})$$

$$P_{-11}^{(2)} =$$

$$\frac{\omega_1{}^4}{4\hbar^4}\left|\int_0^t \int_0^{t_1} \langle -1|e^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t_2)}\, (J_+e^{-i\omega t_2} + J_-e^{i\omega t_2})\, e^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t_2-t_1)}(J_+e^{-i\omega t_1} + J_-e^{i\omega t_1})e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t_1}dt_1dt_2|1\rangle\right|^2$$

On a :

$J_+|1\rangle = 0 \qquad \Rightarrow \langle 1|J_+ = \langle 1|J_- = \sqrt{2}\langle 0|$

$J_-|1\rangle = \sqrt{2}|0\rangle \quad \Rightarrow \langle 1|J_- = \langle 1|J_+ = 0$

$J_+|-1\rangle = \sqrt{2}|0\rangle \quad \Rightarrow \langle -1|J_+ = \langle -1|J_- = 0$

$J_-|-1\rangle = 0 \qquad \Rightarrow \langle -1|J_- = \langle -1|J_+ = \sqrt{2}\langle 0|$

$J_+|0\rangle = \sqrt{2}|1\rangle$

$J_-|0\rangle = \sqrt{2}|-1\rangle$

on remplace, on obtient

$$P_{-11}^{(2)} = \frac{\omega_1{}^4}{\hbar^4}\left|\int_0^t \int_0^{t_1} e^{-\frac{i}{\hbar}E_{-1}(t-t_2)}\, \langle 0|(\ \sqrt{2}e^{i\omega t_2})\, e^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t_2-t_1)}(\sqrt{2}e^{i\omega t_1})|0\rangle e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t_1}dt_1dt_2\right|^2$$

encor

$$P_{-11}^{(2)} = \frac{\omega_1{}^4}{\hbar^4}\left|\int_0^t \int_0^{t_1} e^{-\frac{i}{\hbar}E_{-1}(t-t_2)}\, (\ e^{i\omega t_2})\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_0(t_2-t_1)}(e^{i\omega t_1})e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t_1}dt_1dt_2\right|^2$$

encor

$$P_{-11}^{(2)} = \frac{\omega_1{}^4}{\hbar^4}\left|\int_0^t \int_0^{t_1} e^{-\frac{i}{\hbar}E_{-1}(t)}(e^{i\omega t_1})e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t_1}e^{\frac{i}{\hbar}E_0 t_1}e^{\frac{i}{\hbar}E_{-1}(t_2)}\, (\ e^{i\omega t_2})\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_0(t_2)}dt_1dt_2\right|^2$$

encor

$$P_{-11}^{(2)} = \frac{\omega_1{}^4}{\hbar^4}\left|\int_0^t \int_0^{t_1} e^{i(\omega+\frac{E_0-E_1}{\hbar})t_1}e^{i(\omega+\frac{E_{-1}-E_0}{\hbar})t_2} \quad (\ )\, dt_1dt_2\right|^2$$

on a posé :

$E_1 - E_0 = \hbar\omega_0$, $E_0 - E_{-1} = \hbar\omega_0'$ $(\omega_0 \neq \omega_0')$.

$$P_{-11}^{(2)} = \frac{\omega_1{}^4}{\hbar^4}\left|\int_0^t \int_0^{t_1} e^{i(\omega-\omega_0)t_1}e^{i(\omega-\omega_0')t_2} \quad (\ )\, dt_1dt_2\right|^2$$

Aussi

$$P_{-11}^{(2)} = \frac{\omega_1{}^4}{\hbar^4}\left| \int_0^t dt_1 e^{i(\omega-\omega_0)t_1} \int_0^{t_1} e^{i(\omega-\omega_0')t_2} dt_2 \right|^2$$

encor

$$P_{-11}^{(2)} = \frac{\omega_1{}^4}{\hbar^4}\left| \int_0^t dt_1 e^{i(\omega-\omega_0)t_1} \frac{e^{i(\omega-\omega_0')t_1}-1}{(\omega-\omega_0')} \right|^2 = \frac{\omega_1{}^4}{2\hbar^4}\left| \int_0^t dt_1 \quad \frac{e^{i(2\omega-\omega_0-\omega_0')t_1}-e^{i(\omega-\omega_0)t_1}}{(\omega-\omega_0')} \right|^2$$

$$P_{-11}^{(2)} = \frac{\omega_1{}^4}{\hbar^4(\omega-\omega_0')^2}\left| \frac{e^{i(2\omega-\omega_0-\omega_0')t}-1}{2\omega-\omega_0-\omega_0'} - \frac{e^{i(\omega-\omega_0)t}-1}{\omega-\omega_0} \right|^2$$

donc ω présente trois valeurs pour que la probabilité sera importante

$\omega = \omega_0'$, $\omega = \omega_0$, $et\ \omega = \frac{\omega_0+\omega_0'}{2}$

Posant

$A = 2\omega - \omega_0 - \omega_0'$, $B = \omega - \omega_0$

$$P_{-11}^{(2)} = \frac{\omega_1{}^4 t^2}{4\hbar^4(\omega-\omega_0')^2}\left| e^{i\frac{At}{2}} \frac{\sin\frac{At}{2}}{\frac{At}{2}} - e^{i\frac{Bt}{2}} \frac{\sin\frac{Bt}{2}}{\frac{Bt}{2}} \right|^2$$

qui peut s'écrire

$$P_{-11}^{(2)} = \left(\frac{\omega_1}{\sqrt{2}\hbar}\right)^4 \frac{t^2}{(\omega-\omega_0')^2}\left| e^{i\varphi}\frac{\sin\varphi}{\varphi} - e^{i\eta}\frac{\sin\eta}{\eta} \right|^2,$$

$\varphi = \frac{At}{2}$, $\eta = \frac{Bt}{2}$

Université de sétif
Faculté des sciences

2018/2019

Département de physique **Série N^{0}3** **M.Q.A.1**

Théorie quantique de la diffusion

Exercice n^{0}1:

Trouver la limite de validité de l'approximation de Born pour un potentiel coulombien masqué (screened coulomb potentiel) :

$$V(r) = \frac{z_1 z_2 e^2}{r} e^{-ar}$$

Exercice n^{0}2:

Evaluer la section efficace de diffusion élastique pour un puits sphérique :

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases}$$

Exercice n^{0}3:

Montrer que pour des particules de faible énergie, seules les ondes S participent à la diffusion et que

$$d\sigma = \frac{\sigma_0}{4\pi} d\Omega = \frac{sin^2 \delta_0}{k^2} d\Omega$$

Exercice n^{0}4:

On veut étudier le déphasage $\delta_l(k)$ produit par une sphère dure dans l'onde p et s'assurer en particulier qu'il devient négligeable devant $\delta_0(k)$ à basse énergie.

1- Ecrire l'équation radiale donnant la fonction $u_{k,l}(r)$ pour $r > r_0$.
2- Montrer que sa solution générale est de la forme :

$$u_{k,l}(r) = C\left[\frac{sinkr}{kr} - coskr + a\left(\frac{coskr}{kr} + sinkr\right)\right]$$

C et a étant des constantes.

3- Montrer que la définition de $\delta_1(k)$ implique que :

$$a = tg[\delta_1(k)]$$

4- Montrer que, pour k tendant vers zéro, $\delta_1(k)$ se comporte comme $(kr_0)^3$, ce qui le rend négligeable devant $\delta_0(k)$.

Université de sétif **2018/2019**

Faculté des sciences

Département de physique **Série $N^0 3$** **M.Q.A.1**

Théorie quantique de la diffusion (solution)

Exercice $n^0 1$: (voir le cours)

Exercice $n^0 2$:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases}$$

On a dans l'approximation de Born :

$d\sigma^{(B)} = (\frac{\mu}{2\pi\hbar^2})^2 |\langle \varphi_b | V | \varphi_a \rangle|^2 d\Omega$

Introduisant les deux relations de fermeture

$$\frac{d\sigma^{(B)}}{d\Omega} = (\frac{\mu}{2\pi\hbar^2})^2 |\int\int \langle \varphi_b | \vec{r} \rangle \langle \vec{r} | V | \vec{r}' \rangle \langle \vec{r}' | \varphi_a \rangle d\vec{r} d\vec{r}'|^2$$

on aura donc

$$\frac{d\sigma^{(B)}}{d\Omega} = (\frac{\mu}{2\pi\hbar^2})^2 \left| \int\int e^{-i\vec{k}_b\cdot\vec{r}} \langle \vec{r} | V | \vec{r}' \rangle e^{i\vec{k}_a\cdot\vec{r}'} d\vec{r} d\vec{r}' \right|^2$$

encor

$$\frac{d\sigma^{(B)}}{d\Omega} = (\frac{\mu}{2\pi\hbar^2})^2 \left| \int\int e^{-i\vec{k}_b\cdot\vec{r}} V(\vec{r}') \langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle e^{i\vec{k}_a\cdot\vec{r}'} d\vec{r} d\vec{r}' \right|^2$$

aussi

$$\frac{d\sigma^{(B)}}{d\Omega} = (\frac{\mu}{2\pi\hbar^2})^2 \left| \int\int e^{-i\vec{k}_b\cdot\vec{r}} V(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') e^{i\vec{k}_a\cdot\vec{r}'} d\vec{r} d\vec{r}' \right|^2$$

encor

$$\frac{d\sigma^{(B)}}{d\Omega} = (\frac{\mu}{2\pi\hbar^2})^2 \left| \int e^{-i(\vec{k}_b - \vec{k}_a)\vec{r}} V(\vec{r}) d\vec{r} \right|^2$$

On a :

$V(\vec{r}) = -V_0, \quad et \quad \Delta\vec{k} = \vec{k}_b - \vec{k}_a$

donc

$$\frac{d\sigma^{(B)}}{d\Omega} = (\frac{\mu V_0}{2\pi\hbar^2})^2 \left| \int e^{-i\Delta\vec{k}\vec{r}} d\vec{r} \right|^2 = (\frac{\mu V_0}{2\pi\hbar^2})^2 \left| \int e^{-i\Delta k r \cos\theta} r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \right|^2$$

aussi

$$\frac{d\sigma^{(B)}}{d\Omega} = (\frac{\mu V_0}{\hbar^2})^2 \left| \int_0^{r_0} r^2 \int_0^{\pi} e^{-i\Delta k r \cos\theta} \sin\theta d\theta dr \right|^2 = (\frac{\mu V_0}{\hbar^2})^2 \left| \int_0^{r_0} \frac{2r^2}{\Delta k r} \sin \Delta k r dr \right|^2$$

encor

$$\frac{d\sigma^{(B)}}{d\Omega} = (\frac{2\mu V_0}{\Delta k \hbar^2})^2 \left| \int_0^{r_0} r \sin \Delta k r dr \right|^2 = (\frac{2\mu V_0}{\Delta k \hbar^2})^2 \left| \frac{r_0}{\Delta k} \cos\Delta k r_0 - \frac{1}{(\Delta k)^2} \sin\Delta k r_0 \right|^2$$

aussi

$$\boldsymbol{\frac{d\sigma^{(B)}}{d\Omega} = (\frac{2\mu V_0}{(\Delta k)^2 \hbar^2})^2 (r_0 \cos\Delta k r_0 - \frac{1}{\Delta k} \sin\Delta k r_0)^2}$$

Exercice $n^0 3$:

On a

$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l\ j_l(kr)p_l(cos\theta)$

$j_l(kr)$ peut s'écrire

$j_l(kr) = \frac{(kr)^l}{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2l+1)}$

pour des particules de faible énergie c'est-à-dire , $kr \ll 1$

$j_l(kr) = 1 + \frac{kr}{3} + \frac{(kr)^2}{15} + \cdots$

à basse énergie on peut écrire $j_l(kr) \simeq 1 \Longrightarrow l = 0$ (seules les ondes S participent à la diffusion)

et on a

$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_l(2l+1)sin^2\delta_l = \sum_l \sigma_l$, donc pour $l = 0$

$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}sin^2\delta_0 = \delta_0$

comme on a aussi

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$

avec, pour $l = 0$

$f(\theta) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\sqrt{4\pi(2l+1)}\,e^{i\delta_l}Y_l^0(\theta)sin\delta_l = \frac{1}{k}\sqrt{4\pi}e^{i\delta_0}Y_0^0(\theta)sin\delta_0 = \frac{1}{k}e^{i\delta_0}sin\delta_0$,avec $Y_0^0(\theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

donc

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \left|\frac{1}{k}e^{i\delta_0}sin\delta_0\right|^2 = \frac{1}{k^2}sin^2\delta_0$

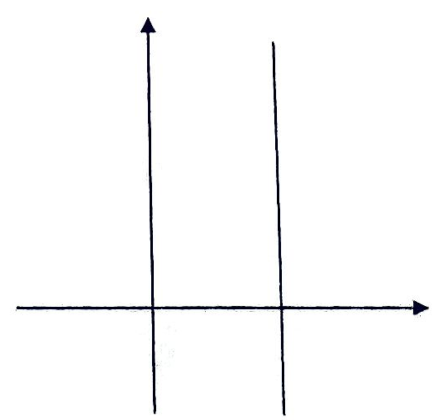
finalement

$d\sigma = \frac{sin^2\delta_0}{k^2}d\Omega = \frac{\sigma_0}{4\pi}d\Omega$

Exercice $n^0 4$:

La sphère dure

$V(r) = \begin{cases}\infty & r < r_0\\ 0 & r > r_0\end{cases}$



L'équation de Schrödinger s'écrit sous la forme :

$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2\right]u_l(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2}V(r)u_l(r)$, $\quad R_l(r) = \frac{u_l(r)}{r}$

1- L'écriture de l'équation radiale donnant la fonction $u_{k,l}(r)$ pour $r > r_0$.

$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2\right]u_l(r) = 0$

2- On cherche la solution générale de cette équation: on a

$$u_l(r) = [Aj_l(kr) + Bn_l(kr)]kr \qquad (1)$$

pour $l = 1$

$$u_1(r) = kr[Aj_1(kr) + Bn_1(kr)] ,$$

tel que :

$$j_0(kr) = \frac{sinkr}{kr} \quad et \quad n_0(kr) = \frac{coskr}{kr}$$

$$j_1(kr) = \frac{sinkr - krcoskr}{(kr)^2} \quad et \quad n_1(kr) = \frac{coskr + krsinkr}{(kr)^2}$$

Remplaçant dans (1)

$$u_1(r) = kr\left[A(\frac{sinkr - krcoskr}{(kr)^2}) \quad + B(\frac{coskr + krsinkr}{(kr)^2})\right] = A\left[\frac{sinkr}{kr} - coskr + a(\frac{coskr}{kr} + sinkr)\right],$$

donc

$$u_1(r) = C\left[\frac{sinkr}{kr} - coskr + a(\frac{coskr}{kr} + sinkr)\right]$$

avec

$$C = A \quad et \quad a = \frac{B}{A}$$

3- Montrer que la définition de $\delta_1(k)$ implique que : $a = tg[\delta_1(k)]$

la solution asymptotique s'écrit : $kr \longrightarrow \infty$

$$u_{kl}^{math}(r) = C[-coskr + asinkr] \qquad (2)$$

La solution physique, $l = 1$

$$u_{kl}^{phy}(r) = A' \sin\left(kr - l\frac{\pi}{2} + \delta_l\right) = A'[\sin\left(kr - \frac{\pi}{2}\right) cos\delta_l + \cos\left(kr - \frac{\pi}{2}\right) sin\delta_l]$$

$$u_{kl}^{phy}(r) = \frac{A'}{cos\delta_l}[-coskr + tg\delta_l sinkr] \quad (3)$$

Comparant (2) et (3), on obtient

$$a = tg[\delta_1(k)]$$

4- Montrer que, pour k tendant vers zéro, $\delta_1(k)$ se comporte comme $(kr_0)^3$, ce qui le rend négligeable devant $\delta_0(k)$.

Pour trouver $\frac{B}{A}$, on utilise les conditions aux limites

$$u_1(r_0) = 0$$

$$kr_0[Aj_1(kr_0) + Bn_1(kr_0)] = 0 \implies \frac{B}{A} = \frac{j_1(kr_0)}{n_1(kr_0)} = tg[\delta_1(k)]$$

$$tg[\delta_1(k)] = \frac{sinkr_0 - kr_0coskr_0}{coskr_0 + kr_0sinkr_0}$$

$k \longrightarrow 0,\ tg[\delta_1(k)] = tgkr_0 \simeq kr_0 - \frac{(kr_0)^3}{3!} = kr_0\left(1 - \frac{(kr_0)^2}{2\cdot 3}\right) = kr_0 - \frac{1}{3}(kr_0)^3$

calcul de δ_0 =?

La solution physique, $l = 0$

$u_{kl}^{phy}(r_0) = A' \sin(kr_0 + \delta_0) = A'[\sin(kr_0)\, cos\delta_0 + \cos(kr_0)\, sin\delta_0] = 0$

alors

$tg\delta_0 = -tgkr_0 \ \Rightarrow \delta_0 = -kr_0$