Anwendungen der Ableitungsregeln

Produkt- und Kettenregel in Technik und Naturwissenschaft

Mathematik GK – 12NP

Februar 2026

Hinweis

Dieses Arbeitsblatt verbindet die Ableitungsregeln mit Anwendungen aus Physik und Technik. Bearbeite die Aufgaben der Reihe nach – sie werden anspruchsvoller. Die **Spezialaufgabe ★** am Ende ist für die gemeinsame Besprechung im Plenum gedacht.

Teil A: Warm-Up (innermathematisch)

Aufgabe 1 – Ableitungen bestimmen

Bestimme die erste Ableitung. Vereinfache soweit möglich.

a) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

b) $g(x) = (3x + 1)^4$

c) $h(x) = e^{-2x}$

d) $k(x) = x^3 \cdot (2x - 5)^2$

e) $m(x) = e^{x^2}$

Aufgabe 2 – Tangente bestimmen

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot e^{-x}$.

a) Bestimme $f'(x)$.

b) Berechne die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(0 \mid f(0))$.

c) Für welchen x-Wert hat die Tangente an f die Steigung Null?

Teil B: Physikalisch-technische Anwendungen

Kontext: Kondensator-Entladung

Ein Kondensator ($C = 100\,\mu\text{F}$, $R = 10\,\text{k}\Omega$) wird entladen. Die Spannung folgt:

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-t/\tau} \quad \text{mit} \quad U_0 = 12\,\text{V}, \quad \tau = R \cdot C = 1\,\text{s}$$

Aufgabe 3 – Kondensator-Entladung

a) Bestimme $U'(t)$. Was beschreibt $U'(t)$ physikalisch?

b) Berechne die Spannung und die Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 1\,\mathrm{s}$.

c) Nach welcher Zeit beträgt die Änderungsrate nur noch $-1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}$?

Kontext: Bewegung mit Luftwiderstand

Ein Fallschirmspringer springt aus einem Flugzeug. Seine Geschwindigkeit (in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$) wird modelliert durch:

$$v(t) = 50 \cdot \left(1 - e^{-0{,}2t}\right) \qquad (t \text{ in Sekunden})$$

Aufgabe 4 – Fallschirmsprung

a) Berechne $v(0)$, $v(5)$ und $v(20)$. Interpretiere die Werte.

b) Bestimme die Beschleunigung $a(t) = v'(t)$.

c) Zeige, dass die Beschleunigung mit der Zeit abnimmt.

d) Welche Endgeschwindigkeit erreicht der Springer?

Kontext: Wirkstoffkonzentration

Nach der Einnahme eines Medikaments wird die Konzentration im Blut (in $\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{l}}$) modelliert durch:

$$c(t) = 5\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{l}\cdot\mathrm{h}} \cdot t \cdot e^{-0{,}5t} \qquad (t \text{ in Stunden})$$

Aufgabe 5 – Medikament

a) Bestimme $c'(t)$ mit der Produktregel.

b) Wann ist die Konzentration maximal? Wie hoch ist sie dann?

c) Berechne $c''(t)$ und bestimme den Wendepunkt. Was bedeutet er im Sachkontext?

Teil C: Modellierung und Transfer

Aufgabe 6 – PV-Anlage: Maximale Leistung

Die elektrische Leistung einer Solarzelle in Abhängigkeit von der Spannung U (in Volt) wird modelliert durch:

$$P(U) = U \cdot \left(6 - 0{,}3 \cdot U^2\right) \quad \text{für } 0 \leq U \leq 4$$

a) Bestimme $P'(U)$.

b) Bei welcher Spannung U_{MPP} wird die maximale Leistung abgegeben?
(*MPP = Maximum Power Point*)

c) Berechne die maximale Leistung.

d) Skizziere den Verlauf von $P(U)$ für $0 \leq U \leq 4$.

★ Spezialaufgabe – Optimale Dosierung (Plenum)

Ein Medikament wird über eine Infusion verabreicht. Die Konzentration im Blut wird modelliert durch:

$$c(t) = A \cdot t^2 \cdot e^{-kt} \quad \text{mit } A = 0{,}8\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{l}\cdot\mathrm{h}^2}, \quad k = 0{,}5\,\frac{1}{\mathrm{h}}$$

Der **therapeutische Bereich** liegt zwischen $1{,}0\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{l}}$ und $3{,}0\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{l}}$.

a) Bestimme $c'(t)$ (Produktregel + Kettenregel!) und den Zeitpunkt der maximalen Konzentration.

b) Berechne die maximale Konzentration. Liegt sie im therapeutischen Bereich?

c) Bestimme $c''(t)$ und die Wendepunkte. Interpretiere: Wann nimmt die Konzentration am schnellsten zu bzw. ab?

d) Bestimme näherungsweise (z. B. mit GeoGebra oder Einsetzen), wie lange die Konzentration im therapeutischen Bereich liegt.

e) **Diskussion:** Was passiert, wenn k größer wird (schnellerer Abbau)? Was ändert sich am Verlauf?

Tipp: Für c) benötigst du die Produktregel auf ein Produkt aus drei Faktoren, oder du fasst $A \cdot t^2$ und e^{-kt} zusammen.