Lösungen: Anwendungen der Ableitungsregeln

Produkt- und Kettenregel in Technik und Naturwissenschaft

Mathematik GK – 12NP

Februar 2026

Teil A: Warm-Up

Lösung 1 – Ableitungen

a) $f(x) = x^2 \cdot e^x$ (Produktregel: $u = x^2$, $v = e^x$)

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x(2x + x^2) = \boxed{e^x \cdot x(x+2)}$$

b) $g(x) = (3x+1)^4$ (Kettenregel: äußere u^4, innere $3x+1$, innere Abl. $= 3$)

$$g'(x) = 4(3x+1)^3 \cdot 3 = \boxed{12(3x+1)^3}$$

c) $h(x) = e^{-2x}$ (Kettenregel: innere $-2x$, innere Abl. $= -2$)

$$h'(x) = e^{-2x} \cdot (-2) = \boxed{-2e^{-2x}}$$

d) $k(x) = x^3 \cdot (2x-5)^2$ (Produktregel + Kettenregel)

$$\begin{aligned} k'(x) &= 3x^2 \cdot (2x-5)^2 + x^3 \cdot 2(2x-5) \cdot 2 \\ &= 3x^2(2x-5)^2 + 4x^3(2x-5) \\ &= x^2(2x-5)\left[3(2x-5) + 4x\right] \\ &= x^2(2x-5)(10x-15) = \boxed{5x^2(2x-5)(2x-3)} \end{aligned}$$

e) $m(x) = e^{x^2}$ (Kettenregel: innere x^2, innere Abl. $= 2x$)

$$m'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = \boxed{2x \cdot e^{x^2}}$$

Lösung 2 – Tangente

a) $f(x) = x \cdot e^{-x}$ (Produktregel + Kettenregel)

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot (-1) \cdot e^{-x} = e^{-x}(1-x) = \boxed{(1-x) \cdot e^{-x}}$$

b) $f(0) = 0 \cdot e^0 = 0$, also $P(0 \mid 0)$.
$f'(0) = (1-0) \cdot e^0 = 1$.
Tangente: $\boxed{y = x}$

c) Steigung Null: $f'(x) = 0$
$(1 - x) \cdot e^{-x} = 0$. Da $e^{-x} > 0$ für alle x, gilt: $1 - x = 0$, also $\boxed{x = 1}$.
Das ist gleichzeitig das Maximum von f mit $f(1) = e^{-1} \approx 0{,}368$.

Teil B: Physikalisch-technische Anwendungen

Lösung 3 – Kondensator-Entladung

$U(t) = 12 \cdot e^{-t}$

a) Kettenregel (innere Abl. $= -1$):

$$U'(t) = 12 \cdot (-1) \cdot e^{-t} = \boxed{-12 \cdot e^{-t}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}}$$

$U'(t)$ beschreibt die **Änderungsrate der Spannung** – physikalisch ist $U'(t)$ proportional zum **Entladestrom** ($I = C \cdot U'$).

b) $U(1) = 12 \cdot e^{-1} \approx \boxed{4{,}41\,\mathrm{V}}$
$U'(1) = -12 \cdot e^{-1} \approx \boxed{-4{,}41\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}}$
Die Spannung sinkt zu diesem Zeitpunkt um ca. 4,4 Volt pro Sekunde.

c) $U'(t) = -1$:

$$-12 \cdot e^{-t} = -1 \implies e^{-t} = \frac{1}{12} \implies -t = \ln\frac{1}{12} \implies \boxed{t = \ln 12 \approx 2{,}48\,\mathrm{s}}$$

Lösung 4 – Fallschirmsprung

$v(t) = 50(1 - e^{-0{,}2t})$

a) $v(0) = 50(1 - 1) = \boxed{0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$ (Start aus der Ruhe)
$v(5) = 50(1 - e^{-1}) \approx 50 \cdot 0{,}632 = \boxed{31{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$
$v(20) = 50(1 - e^{-4}) \approx 50 \cdot 0{,}982 = \boxed{49{,}1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$ (fast Endgeschwindigkeit)

b) Kettenregel:

$$a(t) = v'(t) = 50 \cdot 0{,}2 \cdot e^{-0{,}2t} = \boxed{10 \cdot e^{-0{,}2t}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}$$

c) $a'(t) = 10 \cdot (-0{,}2) \cdot e^{-0{,}2t} = -2 \cdot e^{-0{,}2t}$.
Da $e^{-0{,}2t} > 0$ für alle t, ist $a'(t) < 0$ für alle $t \implies$ $\boxed{\text{Beschleunigung nimmt streng monoton ab.}}$
Physikalisch: Der Luftwiderstand nimmt mit der Geschwindigkeit zu und bremst stärker.

d) $\lim_{t\to\infty} v(t) = 50 \cdot (1 - 0) = \boxed{50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \approx 180\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

Lösung 5 – Medikament

$c(t) = 5t \cdot e^{-0{,}5t}$

a) Produktregel mit $u = 5t$, $v = e^{-0{,}5t}$:

$$\begin{aligned} c'(t) &= 5 \cdot e^{-0{,}5t} + 5t \cdot (-0{,}5) \cdot e^{-0{,}5t} \\ &= e^{-0{,}5t}(5 - 2{,}5t) = \boxed{2{,}5 \cdot e^{-0{,}5t} \cdot (2-t)} \end{aligned}$$

b) $c'(t) = 0$: Da $e^{-0{,}5t} > 0$, muss $2 - t = 0$, also $\boxed{t = 2\,\text{h}}$.
$c(2) = 5 \cdot 2 \cdot e^{-1} = 10 \cdot e^{-1} \approx \boxed{3{,}68\,\frac{\text{mg}}{\text{l}}}$

c) $c'(t) = 2{,}5 \cdot e^{-0{,}5t} \cdot (2-t)$. Produktregel auf $e^{-0{,}5t} \cdot (2-t)$:

$$\begin{aligned} c''(t) &= 2{,}5\big[(-0{,}5) \cdot e^{-0{,}5t} \cdot (2-t) + e^{-0{,}5t} \cdot (-1)\big] \\ &= 2{,}5 \cdot e^{-0{,}5t}\big[-0{,}5(2-t) - 1\big] \\ &= 2{,}5 \cdot e^{-0{,}5t}\big[-1 + 0{,}5t - 1\big] \\ &= \boxed{2{,}5 \cdot e^{-0{,}5t}(0{,}5t - 2)} \end{aligned}$$

$c''(t) = 0$: $0{,}5t - 2 = 0 \implies \boxed{t = 4\,\text{h}}$.
$c(4) = 20 \cdot e^{-2} \approx 2{,}71\,\frac{\text{mg}}{\text{l}}$.
Interpretation: Bei $t = 4\,\text{h}$ ist die **Abnahmerate am größten** (betragsgrößtes c'). Für $2 < t < 4$: Konzentration fällt **immer schneller** ($c'' < 0$). Für $t > 4$: Konzentration fällt weiter, aber **immer langsamer** ($c'' > 0$).

Teil C: Modellierung und Transfer

Lösung 6 – PV-Anlage: MPP

$P(U) = U \cdot (6 - 0{,}3U^2) = 6U - 0{,}3U^3$

a) $\boxed{P'(U) = 6 - 0{,}9U^2}$

b) $P'(U) = 0$:

$$6 - 0{,}9U^2 = 0 \implies U^2 = \frac{6}{0{,}9} = \frac{20}{3} \implies \boxed{U_{\text{MPP}} = \sqrt{\frac{20}{3}} \approx 2{,}58\,\text{V}}$$

Nachweis Maximum: $P''(U) = -1{,}8U$, also $P''(2{,}58) = -4{,}65 < 0$ ✓

c) $P(U_{\text{MPP}}) = 2{,}58 \cdot (6 - 0{,}3 \cdot \frac{20}{3}) = 2{,}58 \cdot (6-2) = 2{,}58 \cdot 4 \approx \boxed{10{,}3\,\text{W}}$

d) Skizze (im Intervall $0 \le U \le 4$): Einzige Nullstelle bei $U = 0$. Graph steigt von 0, hat ein Maximum bei $U \approx 2{,}58$ mit $P \approx 10{,}3\,\text{W}$, fällt danach wieder auf $P(4) = 4{,}8\,\text{W}$.

★ Spezialaufgabe – Optimale Dosierung

$c(t) = 0{,}8 \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}5t}$

a) Produktregel: $u = 0{,}8t^2$, $v = e^{-0{,}5t}$

$$\begin{aligned} c'(t) &= 1{,}6t \cdot e^{-0{,}5t} + 0{,}8t^2 \cdot (-0{,}5) \cdot e^{-0{,}5t} \\ &= e^{-0{,}5t}(1{,}6t - 0{,}4t^2) \\ &= \boxed{0{,}4t \cdot e^{-0{,}5t} \cdot (4-t)} \end{aligned}$$

$c'(t) = 0$: $t_1 = 0$ (Beginn, kein Extremum) oder $t_2 = 4$.
$\boxed{t_{\max} = 4\,\text{h}}$

b) $c(4) = 0{,}8 \cdot 16 \cdot e^{-2} = 12{,}8 \cdot e^{-2} \approx \boxed{1{,}73\,\frac{\text{mg}}{\text{l}}}$
Ja, das Maximum liegt im therapeutischen Bereich $(1{,}0 \le 1{,}73 \le 3{,}0)$ ✓

c) $c'(t) = 0{,}4 \cdot e^{-0{,}5t} \cdot (4t - t^2)$. Wir leiten $g(t) = 4t - t^2$ und $h(t) = e^{-0{,}5t}$ nochmal ab:

$$\begin{aligned} c''(t) &= 0{,}4\big[(-0{,}5)e^{-0{,}5t}(4t - t^2) + e^{-0{,}5t}(4-2t)\big] \\ &= 0{,}4 \cdot e^{-0{,}5t}\big[-2t + 0{,}5t^2 + 4 - 2t\big] \\ &= 0{,}4 \cdot e^{-0{,}5t}(0{,}5t^2 - 4t + 4) \end{aligned}$$

$c''(t) = 0$: $0{,}5t^2 - 4t + 4 = 0 \implies t^2 - 8t + 8 = 0$

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{64-32}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{32}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

$\boxed{t_1 \approx 1{,}17\,\text{h}}$ und $\boxed{t_2 \approx 6{,}83\,\text{h}}$

Interpretation:

- Bei $t_1 \approx 1{,}2\,\text{h}$: Die Konzentration nimmt am schnellsten **zu** (Wendepunkt im Anstieg).
- Bei $t_2 \approx 6{,}8\,\text{h}$: Die Konzentration nimmt am schnellsten **ab** (Wendepunkt im Abstieg).

d) Therapeutischer Bereich: $c(t) \ge 1{,}0$
Durch Einsetzen/GeoGebra: $c(t) = 1{,}0$ bei $t \approx 1{,}7\,\text{h}$ und $t \approx 7{,}6\,\text{h}$.
Kontrolle: $c(1{,}7) \approx 0{,}99$, $c(1{,}8) \approx 1{,}07$, $c(7{,}5) \approx 1{,}05$, $c(7{,}7) \approx 0{,}98$.
$\boxed{\text{Therapeutischer Bereich: ca. } 1{,}7\,\text{h} \le t \le 7{,}6\,\text{h, also etwa 5,9 Stunden.}}$

e) **Diskussion:** Größeres k bedeutet:

- Die e-Funktion fällt schneller $\implies$ Maximum rückt nach links (früher)
- Die maximale Konzentration wird **niedriger** (weniger Zeit zur Anreicherung)
- Das therapeutische Fenster wird **kürzer**
- Konsequenz: Häufigere Dosierung nötig oder höhere Dosis A