Teori & Soal KSNP 2020

Hendra Bunyamin

Teknik Informatika
Fakultas Teknologi Informasi
Universitas Kristen Maranatha

13 Mei 2022

Outline

Outline dari Sesi ke-3

- Soal 1: Aritmetika Modular
- Soal 2: Himpunan
- Soal 3: Logika
- Soal 4: Masih Logika
- Soal 5: Logika Terus?

- Soal 6: Keliling Terkecil
- Soal 7: Jarak Terpendek
- Soal 8: Permutasi
- Soal 9: Relasi Rekursif
- Soal 10: Pemrograman Dinamis

Outline

Aritmatika Modular (1/2)

- **Modulo** adalah suatu operator matematika untuk mendapatkan sisa bagi suatu bilangan terhadap suatu bilangan lainnya (Aji and Gozali, 2011).

Aritmatika Modular (1/2)

- **Modulo** adalah suatu operator matematika untuk mendapatkan sisa bagi suatu bilangan terhadap suatu bilangan lainnya (Aji and Gozali, 2011).
- Operasi modulo bisa dilambangkan dengan `mod` pada bahasa Pascal atau % pada bahasa C/C++ atau Java.

Aritmatika Modular (1/2)

- **Modulo** adalah suatu operator matematika untuk mendapatkan sisa bagi suatu bilangan terhadap suatu bilangan lainnya (Aji and Gozali, 2011).
- Operasi modulo bisa dilambangkan dengan `mod` pada bahasa Pascal atau % pada bahasa C/C++ atau Java.
- Operasi a mod m biasa dibaca "a modulo m", dan memberikan sisa hasil bagi a oleh m.

Aritmatika Modular (1/2)

- **Modulo** adalah suatu operator matematika untuk mendapatkan sisa bagi suatu bilangan terhadap suatu bilangan lainnya (Aji and Gozali, 2011).
- Operasi modulo bisa dilambangkan dengan `mod` pada bahasa Pascal atau % pada bahasa C/C++ atau Java.
- Operasi a mod m biasa dibaca "a modulo m", dan memberikan sisa hasil bagi a oleh m.
- Contoh:

Aritmatika Modular (1/2)

- **Modulo** adalah suatu operator matematika untuk mendapatkan sisa bagi suatu bilangan terhadap suatu bilangan lainnya (Aji and Gozali, 2011).
- Operasi modulo bisa dilambangkan dengan `mod` pada bahasa Pascal atau % pada bahasa C/C++ atau Java.
- Operasi a mod m biasa dibaca "a modulo m", dan memberikan sisa hasil bagi a oleh m.
- Contoh:
  - 5 mod 3 = 2

Aritmatika Modular (1/2)

- **Modulo** adalah suatu operator matematika untuk mendapatkan sisa bagi suatu bilangan terhadap suatu bilangan lainnya (Aji and Gozali, 2011).
- Operasi modulo bisa dilambangkan dengan `mod` pada bahasa Pascal atau % pada bahasa C/C++ atau Java.
- Operasi a mod m biasa dibaca "a modulo m", dan memberikan sisa hasil bagi a oleh m.
- Contoh:
  - 5 mod 3 = 2
  - 10 mod 2 = 0

Aritmatika Modular (1/2)

- **Modulo** adalah suatu operator matematika untuk mendapatkan sisa bagi suatu bilangan terhadap suatu bilangan lainnya (Aji and Gozali, 2011).
- Operasi modulo bisa dilambangkan dengan `mod` pada bahasa Pascal atau % pada bahasa C/C++ atau Java.
- Operasi a mod m biasa dibaca "a modulo m", dan memberikan sisa hasil bagi a oleh m.
- Contoh:
  - 5 mod 3 = 2
  - 10 mod 2 = 0
  - 21 mod 6 = 3.

Aritmatika Modular (2/2)

Sifat-sifat dasar dari operasi modulo adalah

Aritmatika Modular (2/2)

Sifat-sifat dasar dari operasi modulo adalah

- $(a + b) \mod m = ((a \mod m) + (b \mod m)) \mod m$

Aritmatika Modular (2/2)

Sifat-sifat dasar dari operasi modulo adalah

- $(a + b) \mod m = ((a \mod m) + (b \mod m)) \mod m$
- $(a - b) \mod m = ((a \mod m) - (b \mod m)) \mod m$

Aritmatika Modular (2/2)

Sifat-sifat dasar dari operasi modulo adalah

- $(a + b) \mod m = ((a \mod m) + (b \mod m)) \mod m$
- $(a - b) \mod m = ((a \mod m) - (b \mod m)) \mod m$
- $(a \times b) \mod m = ((a \mod m) \times (b \mod m)) \mod m$

Sifat-sifat dasar dari operasi modulo adalah

- $(a+b) \mod m = ((a \mod m) + (b \mod m)) \mod m$
- $(a-b) \mod m = ((a \mod m) - (b \mod m)) \mod m$
- $(a \times b) \mod m = ((a \mod m) \times (b \mod m)) \mod m$
- $a^b \mod m = ((a \mod m)^b \mod m$

Aritmatika Modular (2/2)

Sifat-sifat dasar dari operasi modulo adalah

- $(a + b) \mod m = ((a \mod m) + (b \mod m)) \mod m$
- $(a - b) \mod m = ((a \mod m) - (b \mod m)) \mod m$
- $(a \times b) \mod m = ((a \mod m) \times (b \mod m)) \mod m$
- $a^b \mod m = ((a \mod m)^b \mod m$
- $(-a) \mod m = (-(a \mod m) + m) \mod m$

Aritmatika Modular (2/2)

Sifat-sifat dasar dari operasi modulo adalah

- $(a + b) \mod m = ((a \mod m) + (b \mod m)) \mod m$
- $(a - b) \mod m = ((a \mod m) - (b \mod m)) \mod m$
- $(a \times b) \mod m = ((a \mod m) \times (b \mod m)) \mod m$
- $a^b \mod m = ((a \mod m)^b \mod m$
- $(-a) \mod m = (-(a \mod m) + m) \mod m$

Sebagai contoh, Anda diberikan bilangan n dan k, lalu diminta menghitung hasil $n! \mod k$.

Aritmatika Modular (2/2)

Sifat-sifat dasar dari operasi modulo adalah

- $(a+b) \mod m = ((a \mod m) + (b \mod m)) \mod m$
- $(a-b) \mod m = ((a \mod m) - (b \mod m)) \mod m$
- $(a \times b) \mod m = ((a \mod m) \times (b \mod m)) \mod m$
- $a^b \mod m = ((a \mod m)^b \mod m$
- $(-a) \mod m = (-(a \mod m) + m) \mod m$

Sebagai contoh, Anda diberikan bilangan n dan k, lalu diminta menghitung hasil $n! \mod k$.
Pada contoh ini, $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$.

Aritmatika Modular (2/2)

Sifat-sifat dasar dari operasi modulo adalah

- $(a + b) \mod m = ((a \mod m) + (b \mod m)) \mod m$
- $(a - b) \mod m = ((a \mod m) - (b \mod m)) \mod m$
- $(a \times b) \mod m = ((a \mod m) \times (b \mod m)) \mod m$
- $a^b \mod m = ((a \mod m)^b \mod m$
- $(-a) \mod m = (-(a \mod m) + m) \mod m$

Sebagai contoh, Anda diberikan bilangan n dan k, lalu diminta menghitung hasil $n! \mod k$.
Pada contoh ini, $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \ldots \times 1$.
Seandainya kita menghitung $n!$ terlebih dahulu, kemudian baru dimodulo k, kemungkinan besar kita akan mendapatkan *integer overflow*.

Soal 1: Aritmatika Modular

Diberikan sebuah barisan, $1, 4, 5, 16, 17, 20, 21, \ldots$, yang terurut menaik dan terbentuk dari bilangan 4 pangkat atau penjumlahan dari bilangan 4 pangkat yang berbeda (contoh: $4^0, 4^1, 4^1 + 4^0, 4^2, 4^2 + 4^0, \ldots$).

Tentukan bilangan ke-2020 yang dimodulo dengan 31.

Solusi (1/4)

Desimal	Biner	Basis 4
1		
⋮	⋮	⋮

Solusi (1/4)

Desimal	**Biner**	**Basis 4**
1	01	
⋮	⋮	⋮

Solusi (1/4)

Desimal	**Biner**	**Basis 4**
1	01	4^0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Solusi (1/4)

Desimal	Biner	Basis 4
1	01	4^0
2		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Solusi (1/4)

Desimal	Biner	Basis 4
1	01	4^0
2	10	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Solusi (1/4)

Desimal	Biner	Basis 4
1	01	4^0
2	10	4^1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Solusi (1/4)

Desimal	Biner	Basis 4
1	01	4^0
2	10	4^1
3		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Solusi (1/4)

Desimal	Biner	Basis 4
1	01	4^0
2	10	4^1
3	11	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Solusi (1/4)

Desimal	Biner	Basis 4
1	01	4^0
2	10	4^1
3	11	$4^1 + 4^0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Solusi (1/4)

Desimal	Biner	Basis 4
1	01	4^0
2	10	4^1
3	11	$4^1 + 4^0$
4		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Solusi (1/4)

Desimal	**Biner**	**Basis 4**
1	01	4^0
2	10	4^1
3	11	$4^1 + 4^0$
4	100	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Solusi (1/4)

Desimal	Biner	Basis 4
1	01	4^0
2	10	4^1
3	11	$4^1 + 4^0$
4	100	4^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Solusi (1/4)

Desimal	Biner	Basis 4
1	01	4^0
2	10	4^1
3	11	$4^1 + 4^0$
4	100	4^2
5		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Solusi (1/4)

Desimal	**Biner**	**Basis 4**
1	01	4^0
2	10	4^1
3	11	$4^1 + 4^0$
4	100	4^2
5	101	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Solusi (1/4)

Desimal	**Biner**	**Basis 4**
1	01	4^0
2	10	4^1
3	11	$4^1 + 4^0$
4	100	4^2
5	101	$4^2 + 4^0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Solusi (1/4)

Desimal	Biner	Basis 4
1	01	4^0
2	10	4^1
3	11	$4^1 + 4^0$
4	100	4^2
5	101	$4^2 + 4^0$
6		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Solusi (1/4)

Desimal	**Biner**	**Basis 4**
1	01	4^0
2	10	4^1
3	11	$4^1 + 4^0$
4	100	4^2
5	101	$4^2 + 4^0$
6	110	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Solusi (1/4)

Desimal	Biner	Basis 4
1	01	4^0
2	10	4^1
3	11	$4^1 + 4^0$
4	100	4^2
5	101	$4^2 + 4^0$
6	110	$4^2 + 4^1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Solusi (1/4)

Desimal	Biner	Basis 4
1	01	4^0
2	10	4^1
3	11	$4^1 + 4^0$
4	100	4^2
5	101	$4^2 + 4^0$
6	110	$4^2 + 4^1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2020		

Solusi (1/4)

Desimal	Biner	Basis 4
1	01	4^0
2	10	4^1
3	11	$4^1 + 4^0$
4	100	4^2
5	101	$4^2 + 4^0$
6	110	$4^2 + 4^1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2020	11111100100	

Solusi (1/4)

Desimal	Biner	Basis 4
1	01	4^0
2	10	4^1
3	11	$4^1 + 4^0$
4	100	4^2
5	101	$4^2 + 4^0$
6	110	$4^2 + 4^1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2020	11111100100	?

Solusi (1/4)

Desimal	Biner	Basis 4
1	01	4^0
2	10	4^1
3	11	$4^1 + 4^0$
4	100	4^2
5	101	$4^2 + 4^0$
6	110	$4^2 + 4^1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2020	11111100100	?

Bilangan yang dicari adalah

Solusi (1/4)

Desimal	Biner	Basis 4
1	01	4^0
2	10	4^1
3	11	$4^1 + 4^0$
4	100	4^2
5	101	$4^2 + 4^0$
6	110	$4^2 + 4^1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2020	11111100100	?

Bilangan yang dicari adalah

$$(4^{10} + 4^9 + 4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^2) \mod 31 =$$

Solusi (1/4)

Desimal	Biner	Basis 4
1	01	4^0
2	10	4^1
3	11	$4^1 + 4^0$
4	100	4^2
5	101	$4^2 + 4^0$
6	110	$4^2 + 4^1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2020	11111100100	?

Bilangan yang dicari adalah

$$(4^{10} + 4^9 + 4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^2) \mod 31 =$$
$$((4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \times 4^2) \mod 31$$

Solusi (2/4)

$$((4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \times 4^2) \mod 31 =$$

Solusi (2/4)

$$((4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \times 4^2) \mod 31 =$$
$$(\underbrace{(4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \mod 31}_{\text{Bagian I}} \times (4^2 \mod 31))$$

Solusi (2/4)

$$((4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \times 4^2) \mod 31 = \\ (\underbrace{(4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \mod 31}_{\text{Bagian I}} \times (4^2 \mod 31))$$

Jadi di Bagian I ada

Solusi (2/4)

$$((4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \times 4^2) \mod 31 =$$
$$(\underbrace{(4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \mod 31}_{\text{Bagian I}} \times (4^2 \mod 31))$$

Jadi di Bagian I ada

$$4^8 \mod 31 =$$

Solusi (2/4)

$$
\begin{aligned}
&((4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \times 4^2) \mod 31 = \\
&\qquad (\underbrace{(4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \mod 31}_{\text{Bagian I}} \times (4^2 \mod 31))
\end{aligned}
$$

Jadi di Bagian I ada

$$4^8 \mod 31 = (4^4 \times 4^4) \mod 31$$

Solusi (2/4)

$$
\begin{aligned}
((4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \times 4^2) \mod 31 = \\
\underbrace{((4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \mod 31}_{\text{Bagian I}} \times (4^2 \mod 31))
\end{aligned}
$$

Jadi di Bagian I ada

$$
\begin{aligned}
4^8 \mod 31 &= (4^4 \times 4^4) \mod 31 \\
&= ((4^4 \mod 31) \times (4^4 \mod 31)) \mod 31
\end{aligned}
$$

$$((4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \times 4^2) \mod 31 =$$
$$\underbrace{((4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \mod 31}_{\text{Bagian I}} \times (4^2 \mod 31))$$

Jadi di Bagian I ada

$$\begin{aligned} 4^8 \mod 31 &= (4^4 \times 4^4) \mod 31 \\ &= ((4^4 \mod 31) \times (4^4 \mod 31)) \mod 31 \\ &= (8 \times 8) \mod 31 \end{aligned}$$

$$((4^8+4^7+4^6+4^5+4^4+4^3+1)\times 4^2) \mod 31 =$$
$$\underbrace{((4^8+4^7+4^6+4^5+4^4+4^3+1) \mod 31}_{\text{Bagian I}} \times (4^2 \mod 31))$$

Jadi di Bagian I ada

$$\begin{aligned}4^8 \mod 31 &= (4^4\times 4^4) \mod 31\\ &= ((4^4 \mod 31)\times(4^4 \mod 31)) \mod 31\\ &= (8\times 8) \mod 31\\ &= 2\end{aligned}$$

Solusi (2/4)

$$\begin{aligned}((4^8+4^7+4^6+4^5+4^4+4^3+1)\times 4^2) \mod 31 = \\ \underbrace{((4^8+4^7+4^6+4^5+4^4+4^3+1) \mod 31}_{\text{Bagian I}} \times (4^2 \mod 31))\end{aligned}$$

Jadi di Bagian I ada

$$\begin{aligned}4^8 \mod 31 &= (4^4 \times 4^4) \mod 31 \\ &= ((4^4 \mod 31) \times (4^4 \mod 31)) \mod 31 \\ &= (8 \times 8) \mod 31 \\ &= 2\end{aligned}$$

$$4^7 \mod 31 =$$

$$((4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \times 4^2) \mod 31 =$$
$$\underbrace{((4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \mod 31}_{\text{Bagian I}} \times (4^2 \mod 31))$$

Jadi di Bagian I ada

$$\begin{aligned} 4^8 \mod 31 &= (4^4 \times 4^4) \mod 31 \\ &= ((4^4 \mod 31) \times (4^4 \mod 31)) \mod 31 \\ &= (8 \times 8) \mod 31 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$4^7 \mod 31 = (4^3 \times 4^4) \mod 31$$

$$((4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \times 4^2) \mod 31 =$$
$$\underbrace{((4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \mod 31}_{\text{Bagian I}} \times (4^2 \mod 31))$$

Jadi di Bagian I ada

$$\begin{aligned} 4^8 \mod 31 &= (4^4 \times 4^4) \mod 31 \\ &= ((4^4 \mod 31) \times (4^4 \mod 31)) \mod 31 \\ &= (8 \times 8) \mod 31 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^7 \mod 31 &= (4^3 \times 4^4) \mod 31 \\ &= ((4^3 \mod 31) \times (4^4 \mod 31)) \mod 31 \end{aligned}$$

$$((4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \times 4^2) \mod 31 =$$
$$\underbrace{((4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \mod 31}_{\text{Bagian I}} \times (4^2 \mod 31))$$

Jadi di Bagian I ada

$$\begin{aligned} 4^8 \mod 31 &= (4^4 \times 4^4) \mod 31 \\ &= ((4^4 \mod 31) \times (4^4 \mod 31)) \mod 31 \\ &= (8 \times 8) \mod 31 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^7 \mod 31 &= (4^3 \times 4^4) \mod 31 \\ &= ((4^3 \mod 31) \times (4^4 \mod 31)) \mod 31 \\ &= (2 \times 8) \mod 31 \end{aligned}$$

Solusi (2/4)

$$((4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \times 4^2) \mod 31 =$$
$$\underbrace{((4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \mod 31}_{\text{Bagian I}} \times (4^2 \mod 31))$$

Jadi di Bagian I ada

$$\begin{aligned} 4^8 \mod 31 &= (4^4 \times 4^4) \mod 31 \\ &= ((4^4 \mod 31) \times (4^4 \mod 31)) \mod 31 \\ &= (8 \times 8) \mod 31 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^7 \mod 31 &= (4^3 \times 4^4) \mod 31 \\ &= ((4^3 \mod 31) \times (4^4 \mod 31)) \mod 31 \\ &= (2 \times 8) \mod 31 \\ &= 16. \end{aligned}$$

Solusi (3/4)

Kemudian,

Solusi (3/4)

Kemudian,

$$4^6 \mod 31 =$$

Solusi (3/4)

Kemudian,

$$4^6 \mod 31 = (4^3 \times 4^3) \mod 31$$

Solusi (3/4)

Kemudian,

$$
\begin{aligned}
4^6 \mod 31 &= (4^3 \times 4^3) \mod 31 \\
&= ((4^3 \mod 31) \times (4^3 \times 31)) \mod 31
\end{aligned}
$$

Solusi (3/4)

Kemudian,

$$\begin{aligned} 4^6 \mod 31 &= (4^3 \times 4^3) \mod 31 \\ &= ((4^3 \mod 31) \times (4^3 \times 31)) \mod 31 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Solusi (3/4)

Kemudian,

$$\begin{aligned}
4^6 \mod 31 &= (4^3 \times 4^3) \mod 31 \\
&= ((4^3 \mod 31) \times (4^3 \times 31)) \mod 31 \\
&= 4.
\end{aligned}$$

$$4^5 \mod 31 =$$

Kemudian,

$$\begin{aligned} 4^6 \mod 31 &= (4^3 \times 4^3) \mod 31 \\ &= ((4^3 \mod 31) \times (4^3 \times 31)) \mod 31 \\ &= 4. \end{aligned}$$

$$4^5 \mod 31 = (4^4 \times 4^1) \mod 31$$

Solusi (3/4)

Kemudian,

$$
\begin{aligned}
4^6 \mod 31 &= (4^3 \times 4^3) \mod 31 \\
&= ((4^3 \mod 31) \times (4^3 \times 31)) \mod 31 \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4^5 \mod 31 &= (4^4 \times 4^1) \mod 31 \\
&= ((4^4 \mod 31) \times (4^1 \mod 31)) \mod 31
\end{aligned}
$$

Solusi (3/4)

Kemudian,

$$\begin{aligned}4^6 \mod 31 &= (4^3 \times 4^3) \mod 31\\ &= ((4^3 \mod 31) \times (4^3 \times 31)) \mod 31\\ &= 4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4^5 \mod 31 &= (4^4 \times 4^1) \mod 31\\ &= ((4^4 \mod 31) \times (4^1 \mod 31)) \mod 31\\ &= (8 \times 4) \mod 31\end{aligned}$$

Solusi (3/4)

Kemudian,

$$
\begin{aligned}
4^6 \mod 31 &= (4^3 \times 4^3) \mod 31 \\
&= ((4^3 \mod 31) \times (4^3 \times 31)) \mod 31 \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4^5 \mod 31 &= (4^4 \times 4^1) \mod 31 \\
&= ((4^4 \mod 31) \times (4^1 \mod 31)) \mod 31 \\
&= (8 \times 4) \mod 31 \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Kemudian,

$$\begin{aligned}
4^6 \mod 31 &= (4^3 \times 4^3) \mod 31 \\
&= ((4^3 \mod 31) \times (4^3 \times 31)) \mod 31 \\
&= 4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4^5 \mod 31 &= (4^4 \times 4^1) \mod 31 \\
&= ((4^4 \mod 31) \times (4^1 \mod 31)) \mod 31 \\
&= (8 \times 4) \mod 31 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Sisanya:

Solusi (3/4)

Kemudian,

$$\begin{aligned} 4^6 \mod 31 &= (4^3 \times 4^3) \mod 31 \\ &= ((4^3 \mod 31) \times (4^3 \times 31)) \mod 31 \\ &= 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^5 \mod 31 &= (4^4 \times 4^1) \mod 31 \\ &= ((4^4 \mod 31) \times (4^1 \mod 31)) \mod 31 \\ &= (8 \times 4) \mod 31 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Sisanya:

$$4^4 \mod 31 = 8$$

Solusi (3/4)

Kemudian,

$$
\begin{aligned}
4^6 \mod 31 &= (4^3 \times 4^3) \mod 31 \\
&= ((4^3 \mod 31) \times (4^3 \times 31)) \mod 31 \\
&= 4.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4^5 \mod 31 &= (4^4 \times 4^1) \mod 31 \\
&= ((4^4 \mod 31) \times (4^1 \mod 31)) \mod 31 \\
&= (8 \times 4) \mod 31 \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Sisanya:

$$
\begin{aligned}
4^4 \mod 31 &= 8 \\
4^3 \mod 31 &= 2 \text{ dan } 1.
\end{aligned}
$$

Solusi (4/4)

Solusi (4/4)

Jadi Bagian I menjadi

Solusi (4/4)

Jadi Bagian I menjadi

$$(4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \mod 31 =$$

Solusi (4/4)

Jadi Bagian I menjadi

$$\begin{aligned}
(4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \mod 31 &= \\
(2 + 16 + 4 + 1 + 8 + 2 + 1) \mod 31 &=
\end{aligned}$$

Solusi (4/4)

Jadi Bagian I menjadi

$$\begin{aligned}
(4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \quad \text{mod } 31 &= \\
(2 + 16 + 4 + 1 + 8 + 2 + 1) \quad \text{mod } 31 &= \\
34 \quad \text{mod } 31 &=
\end{aligned}$$

Solusi (4/4)

Jadi Bagian I menjadi

$$\begin{aligned}
(4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) \quad \bmod 31 &= \\
(2 + 16 + 4 + 1 + 8 + 2 + 1) \quad \bmod 31 &= \\
34 \quad \bmod 31 &= 3.
\end{aligned}$$

Solusi (4/4)

Jadi Bagian I menjadi

$$\begin{aligned}
(4^8 + 4^7 + 4^6 + 4^5 + 4^4 + 4^3 + 1) &\mod 31 = \\
(2 + 16 + 4 + 1 + 8 + 2 + 1) &\mod 31 = \\
34 &\mod 31 = 3.
\end{aligned}$$

Jadi total semua adalah

Jadi Bagian I menjadi

$$\begin{aligned}(4^8+4^7+4^6+4^5+4^4+4^3+1) \mod 31 &= \\ (2+16+4+1+8+2+1) \mod 31 &= \\ 34 \mod 31 &= 3.\end{aligned}$$

Jadi total semua adalah

$$(\underbrace{3}_{\text{Bagian I}} \times (4^2 \mod 31)) \mod 31 = (3 \times (16 \mod 31)) \mod 31$$

Solusi (4/4)

Jadi Bagian I menjadi

$$\begin{aligned}(4^8+4^7+4^6+4^5+4^4+4^3+1) &\mod 31 = \\ (2+16+4+1+8+2+1) &\mod 31 = \\ 34 &\mod 31 = 3.\end{aligned}$$

Jadi total semua adalah

$$\begin{aligned}(\underbrace{3}_{\text{Bagian I}} \times (4^2 \mod 31)) \mod 31 &= (3 \times (16 \mod 31)) \mod 31 \\ &= (3 \times 16) \mod 31\end{aligned}$$

Solusi (4/4)

Jadi Bagian I menjadi

$$\begin{aligned}(4^8+4^7+4^6+4^5+4^4+4^3+1) \mod 31 &=\\ (2+16+4+1+8+2+1) \mod 31 &=\\ 34 \mod 31 &= 3.\end{aligned}$$

Jadi total semua adalah

$$\begin{aligned}(\underbrace{3}_{\text{Bagian I}} \times (4^2 \mod 31)) \mod 31 &= (3 \times (16 \mod 31)) \mod 31\\ &= (3 \times 16) \mod 31\\ &= 17.\end{aligned}$$

Solusi (4/4)

Jadi Bagian I menjadi

$$\begin{aligned}(4^8+4^7+4^6+4^5+4^4+4^3+1) \mod 31 &=\\ (2+16+4+1+8+2+1) \mod 31 &=\\ 34 \mod 31 &= 3.\end{aligned}$$

Jadi total semua adalah

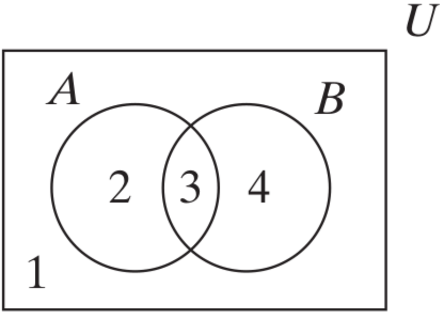
$$\begin{aligned}(\underbrace{3}_{\text{Bagian I}} \times (4^2 \mod 31)) \mod 31 &= (3 \times (16 \mod 31)) \mod 31\\ &= (3 \times 16) \mod 31\\ &= 17.\end{aligned}$$

Jadi hasil akhirnya adalah 17.

Outline

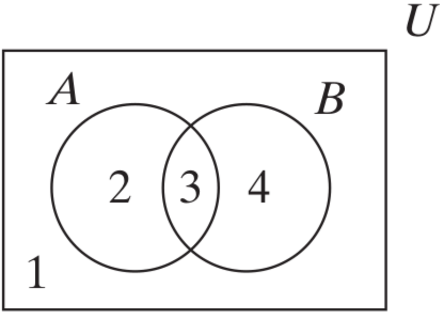
Soal 2: Diagram Venn (1/2)

Contoh diagram Venn (Johnsonbaugh, 2017):



Soal 2: Diagram Venn (1/2)

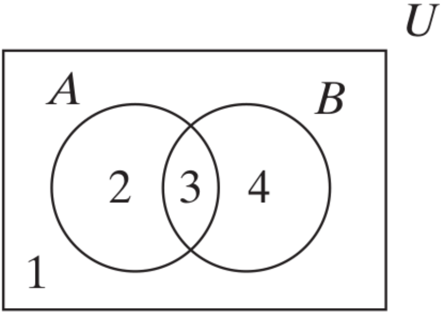
Contoh diagram Venn (Johnsonbaugh, 2017):



- In a Venn diagram, a rectangle depicts a universal set.

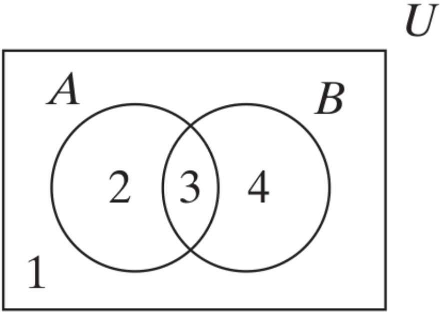
Soal 2: Diagram Venn (1/2)

Contoh diagram Venn (Johnsonbaugh, 2017):



- In a Venn diagram, a rectangle depicts a universal set.
- Subsets of the universal set are drawn as circles.

Contoh diagram Venn (Johnsonbaugh, 2017):



- In a Venn diagram, a rectangle depicts a universal set.
- Subsets of the universal set are drawn as circles.
- The inside of a circle represents the members of that set.

Soal 2: Diagram Venn (2/2)

Di sebuah sekolah terdapat 4 klub. Berikut penjelasan anggota tiap klub.

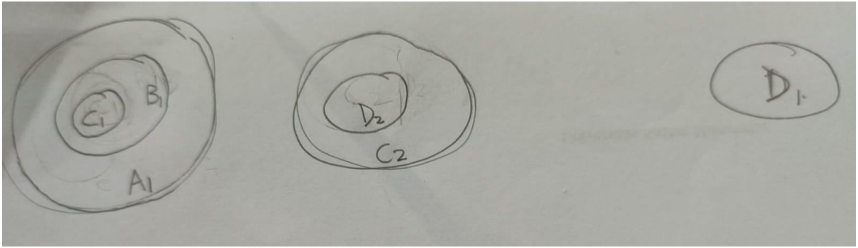
- Setiap siswa tergabung ke setidaknya satu klub.
- Setiap anggota klub B adalah anggota klub A.
- Sebagian anggota klub C adalah anggota klub B.
- Semua anggota klub C yang merupakan anggota klub A juga merupakan anggota klub B.
- Tidak ada anggota klub D yang merupakan anggota klub A.
- Sebagian anggota klub D adalah anggota klub C.
- Jumlah seluruh siswa adalah 140.
- Jumlah anggota klub A dan klub C adalah 125.
- Jumlah anggota klub B adalah 40.
- Jumlah anggota klub D adalah 35.

Soal 2: Diagram Venn (2/2)

Di sebuah sekolah terdapat 4 klub. Berikut penjelasan anggota tiap klub.

- Setiap siswa tergabung ke setidaknya satu klub.
- Setiap anggota klub B adalah anggota klub A.
- Sebagian anggota klub C adalah anggota klub B.
- Semua anggota klub C yang merupakan anggota klub A juga merupakan anggota klub B.
- Tidak ada anggota klub D yang merupakan anggota klub A.
- Sebagian anggota klub D adalah anggota klub C.
- Jumlah seluruh siswa adalah 140.
- Jumlah anggota klub A dan klub C adalah 125.
- Jumlah anggota klub B adalah 40.
- Jumlah anggota klub D adalah 35.

Berapa jumlah siswa yang merupakan anggota di 1 klub saja?



Jumlah anggota klub A dan C adalah 125 $\Rightarrow$

$$A_1 + \underbrace{C_1 + B_1}_{\text{anggota klub } B} + C_2 + D_2 = 125. \tag{1}$$

Jumlah anggota klub B adalah 40 $\Rightarrow C_1 + B_1 = 40$. Oleh karenanya, Persamaan (1) menjadi

$$A_1 + 40 + C_2 + D_2 = 125. \tag{2}$$

Solusi (2/2)

Jumlah seluruh siswa adalah 140 $\Rightarrow$

$$A_1 + 40 + C_2 + D_2 + D_1 = 140. \tag{3}$$

Substitusi Persamaan (2) ke Persamaan (3) menjadi

$$125 + D_1 = 140 \Longleftrightarrow D_1 = 15. \tag{4}$$

Jumlah anggota kelas D adalah 35, maka

$$D_1 + D_2 = 35 \Longleftrightarrow 15 + D_2 = 35 \Longleftrightarrow D_2 = 20. \tag{5}$$

Substitusi Persamaan (5) ke Persamaan (3) menjadi

$$\begin{aligned} A_1 + 40 + C_2 + 20 + D_1 = 40 &\Leftrightarrow A_1 + C_2 + D_1 + 60 = 140 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{A_1 + C_2 + D_1}_{\text{Anggota di satu klub saja}} = 80. \end{aligned}$$

Jadi jumlah siswa yang merupakan anggota di 1 klub saja adalah 80.

Outline

Ada 6 orang yaitu Albert, Budi, Caca, Danis, Eka, dan Farah, yang masing-masing mengeluarkan sebuah pernyataan yang hanya bisa bernilai benar atau salah saja.

Albert (A)	: Pernyataanku bernilai benar
Budi (B)	: Antara pernyataan Caca atau Albert
Caca (C)	: Pernyataanku bernilai benar
Danis (D)	: Pernyataan Budi bernilai benar
Eka (E)	: Pernyataan Caca bernilai benar
Farah (F)	: Pernyataanku bernilai benar

Jika *hanya ada tepat 1 pernyataan yang benar dari keenam pernyataan di atas*, pernyataan siapakah yang benar?

Solusi

Skenario I:

- A benar
- B kudu salah $\Rightarrow$
    - A salah & C salah $\Rightarrow$ ngga mungkin
    - A benar & C benar $\Rightarrow$ ngga bisa juga

Skenario II:

- A salah
- B benar
- C benar $\Rightarrow$ ngga bisa!

Skenario III:

- A salah
- B salah
- C salah
- D salah
- E salah
- **F benar** $\Rightarrow$ Jadi pernyataan **Farah** yang benar.

Outline

Tabel Kebenaran untuk *Jika-Maka*.

p	q	$p \longrightarrow q$
True	True	True
True	False	False
False	True	True
False	False	True

Tabel Kebenaran untuk *Exclusive-OR*.

p	q	$p \oplus q$
True	True	False
True	False	True
False	True	True
False	False	False

Kontrapositif (*Contrapositive*) adalah

$$p \longrightarrow q \Longleftrightarrow \text{NOT } q \longrightarrow \text{NOT } q$$

Soal 4: Analisis Kemungkinan dengan Logika (2/2)

Empat orang sekawan yaitu Kwak, Kwik, Kwek, dan Kwok akan berlibur ke kota Bandung. Akan tetapi karena satu dan lain hal, beberapa (bisa saja tidak ada) dari mereka gagal untuk berlibur ke Kota Bandung. Mereka akhirnya menetapkan aturan berikut untuk menentukan siapa yang akan berlibur ke Kota Bandung

- Jika Kwak pergi ke Bandung maka Kwik juga akan ikut ke Bandung.
- Hanya tepat salah satu dari Kwik atau Kwek yang akan pergi ke Bandung.
- Jika Kwek pergi ke Bandung maka Kwak dan Kwok keduanya harus pergi ke Bandung.
- Jika Kwok tidak pergi ke Bandung, maka Kwik juga tidak akan pergi ke Bandung.

Berapa banyak kemungkinan orang-orang yang akan pergi ke Bandung?

Solusi (1/2)

Kwak = Kwak pergi, Kwik = Kwik pergi, Kwek = Kwek pergi, dan Kwok = Kwok pergi.

1. Kwak $\longrightarrow$ Kwik
2. Kwik $\oplus$ Kwek
3. Kwek $\longrightarrow$ Kwak AND Kwok
4. NOT Kwok $\longrightarrow$ NOT Kwik.

Kuncinya adalah **poin 2**, yaitu (Kwik pergi) $\oplus$ (Kwek pergi).

Ketika Kwik pergi

Kwak	✓	Kwak	✗
Kwik	✓	Kwik	✓
Kwek	✗	Kwek	✗
Kwok	✓	Kwok	✓

Solusi (2/2)

Ketika Kwek pergi $\Rightarrow$ Kontradiksi untuk Kwak

Kwak	✗
Kwik	✗
Kwek	✓
Kwok	✓

Jadi hanya ada 2 kemungkinan, yaitu:

Kwak	✓	Kwak	✗
Kwik	✓	Kwik	✓
Kwek	✗	Kwek	✗
Kwok	✓	Kwok	✓

Outline

Soal 5: Operasi Logika

Perhatikan operasi logika berikut!

$P = (A \text{ AND } (\text{NOT } B)) \text{ OR } ((C \text{ OR } (\text{ NOT } D)) \text{ AND } (\text{ NOT } E))$
$Q = ((\text{NOT } A) \text{ OR } (\text{NOT } B)) \text{ AND } (((\text{NOT } C) \text{ AND } D) \text{ OR } (\text{NOT } E))$
$R = P \text{ AND } Q.$

Jika A = True, B = True, C = True, D = True, dan E = False.
Tentukan nilai P, Q, dan R berturut-turut?

Solusi

Silakan Teman-teman untuk mencobanya sendiri ya.

Jawaban yang saya peroleh adalah

$$\begin{aligned} P &= \text{True} \\ Q &= \text{False} \\ R &= \text{False}. \end{aligned}$$

Outline

Soal 6: Keliling Terkecil

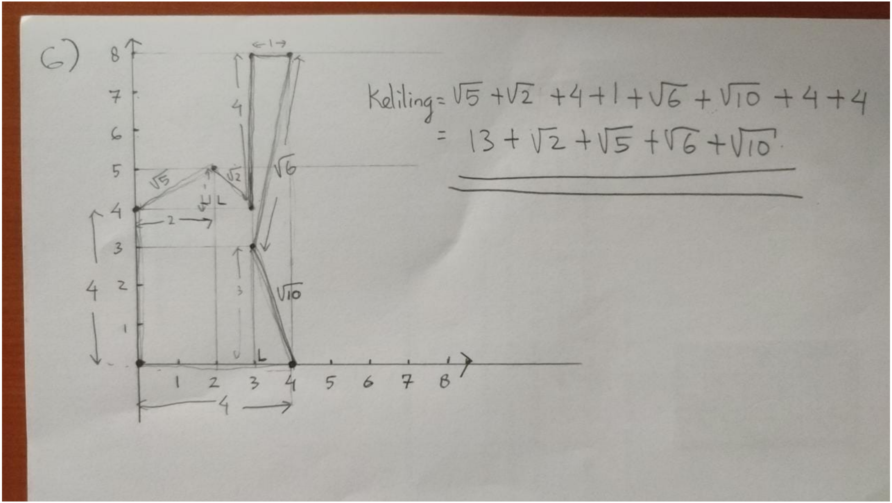
Pak Dengklek memiliki 8 titik yang terletak pada koordinat:

$$(2,5),(3,8),(3,4),(4,8),(4,0),(3,3),(0,4),(0,0)$$

Beliau ingin menutupi kedelapan titik tersebut dengan sebuah poligon sedemikian sehingga setiap titik milik Pak Dengklek berada di dalam (atau di tepi) poligon tersebut.

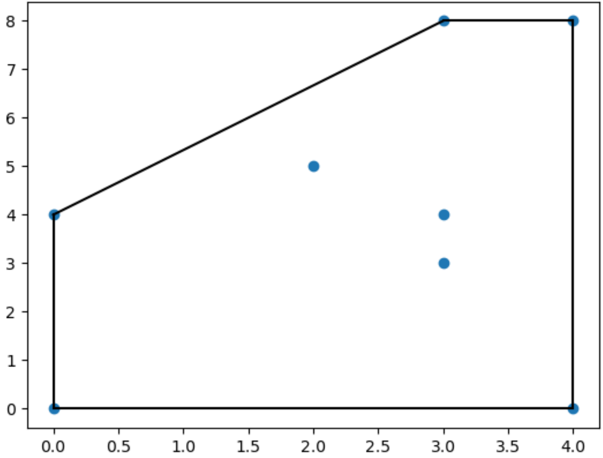
Berapa *keliling poligon terkecil* yang memenuhi keinginan Pak Dengklek?

Solusi Naïve



$$\text{Keliling} = 13 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{10} \approx 22,3$$

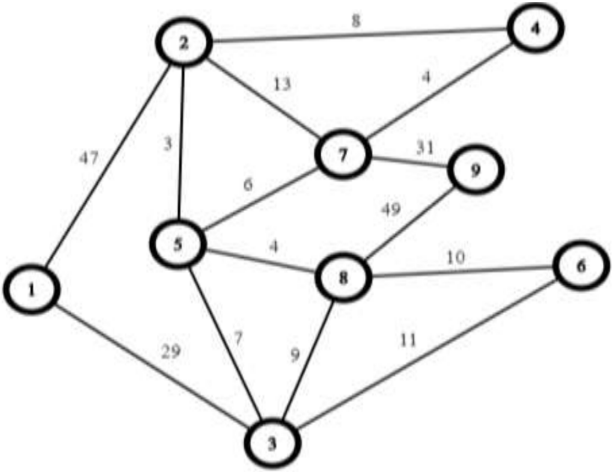
Solusi dengan Algoritma Graham's Scan



Keliling = 22 (Halim and Halim, 2013; Scipy.org, 2022)

Outline

Kerajaan Zidan sedang berperang melawan Kerajaan Ahmad. Salah satu mata-mata Kerajaan Zidan berhasil mendapatkan peta logistik Kerajaan Ahmad, yaitu sebagai berikut:



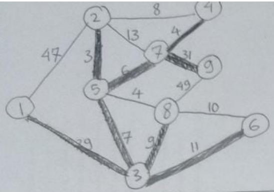
Soal 7: Algoritma Dijkstra (2/2)

Sumber logistik Kerajaan Ahmad berada di node bernomor 1 dan Kerajaan Ahmad berada di node bernomor 9. Kerajaan Zidan ingin memutus jalur logistik Kerajaan Ahmad agar memenangkan perang. Dengan kata lain, Kerajaan Zidan ingin menghancurkan beberapa jalan sedemikian sehingga tidak ada jalan yang bisa digunakan untuk mencapai node 9 dari node 1, dan sebaliknya. Bilangan yang tertera pada jalan merupakan biaya yang dibutuhkan Kerajaan Zidan untuk menghancurkan jalan tersebut.

Berapa total biaya minimum yang dibutuhkan Kerajaan Zidan?

Solusi (Epp, 2020)

7)



Step	V(T)	E(T)	F	L(1)	L(2)	L(3)	L(4)	L(5)	L(6)	L(7)	L(8)	L(9)
0	{1}	∅	{1}	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
1	{1}	∅	{2, 3}		47	29	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2	{1, 3}	{{1, 3}}	{2, 5, 6, 8}		47		∞	36	40	∞	38	∞
3	{1, 3, 5}	{{1, 3}, {3, 5}}	{2, 6, 7, 8}		39		∞		40	42	38	∞
4	{1, 3, 5, 8}	{{1, 3}, {3, 5} {3, 8}}	{2, 6, 7, 9}		39		∞		40	42		87
5	{1, 3, 5, 8, 2}	{{1, 3}, {3, 5}, {3, 8}, {5, 2}}	{4, 6, 7, 9}				47		40	42		87
6	{1, 3, 5, 8, 2, 6}	{{1, 3}, {3, 5}, {3, 8}, {5, 2}, {3, 6}}	{4, 7, 9}				47			42		87
7	{1, 3, 5, 8, 2, 6, 7}	{{1, 3}, {3, 5}, {3, 8}, {5, 2}, {3, 6}, {5, 7}}	{4, 9}				46					73
8	{1, 3, 5, 8, 2, 6, 7, 4}	{{1, 3}, {3, 5}, {3, 8}, {5, 2}, {3, 6}, {5, 7}, {7, 4}}	{9}									73

Outline

Soal 8: Permutasi

Terdapat 4 ekor bebek berwarna merah, 3 ekor bebek berwarna biru, dan 2 ekor bebek berwarna hijau. Kesembilan bebek tersebut diminta untuk berbaris oleh Pak Dengklek dengan ketentuan:

- Setiap bebek yang berwarna sama tidak bisa dibedakan.
- Untuk setiap pasang bebek yang berwarna sama, tidak boleh ada bebek lain yang warnanya berbeda yang berada di antara sepasang bebek tersebut.

Ada berapa macam posisikah yang mungkin dalam barisan bebek tersebut?

Solusi

Jawab:

$$\begin{aligned} 3! &= 3 \times 2 \times 1 \\ &= 6. \end{aligned}$$

Outline

Soal 9: Teknik Analisis Rekursif

Pak Dengklek memiliki sebuah fungsi f yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad n \leq 1 \\ f(\frac{n}{2}) * 2 + n, & \text{for} \quad n > 1 \end{cases}$$

Berapakah nilai $f(1048576)$?

Solusi (1/2) (Levitin, 2012)

Misalkan $n = 2^k$ maka $k = \log_2 n$ kemudian

Solusi (1/2) (Levitin, 2012)

Misalkan $n = 2^k$ maka $k = \log_2 n$ kemudian

$$f(2^k) = f(2^{k-1}) * 2 + 2^k, \text{ untuk } 2^k > 1.$$

Solusi (1/2) (Levitin, 2012)

Misalkan $n = 2^k$ maka $k = \log_2 n$ kemudian

$$f(2^k) = f(2^{k-1}) * 2 + 2^k, \;\; \text{untuk } 2^k > 1.$$

Selanjutnya,

Solusi (1/2) (Levitin, 2012)

Misalkan $n = 2^k$ maka $k = \log_2 n$ kemudian

$$f(2^k) = f(2^{k-1}) * 2 + 2^k, \quad \text{untuk } 2^k > 1.$$

Selanjutnya,

$$f(2^k) =$$

Solusi (1/2) (Levitin, 2012)

Misalkan $n = 2^k$ maka $k = \log_2 n$ kemudian

$$f(2^k) = f(2^{k-1}) * 2 + 2^k, \ \ \text{untuk } 2^k > 1.$$

Selanjutnya,

$$f(2^k) = f(2^{k-1}) * 2 + 2^k$$

Solusi (1/2) (Levitin, 2012)

Misalkan $n = 2^k$ maka $k = \log_2 n$ kemudian

$$f(2^k) = f(2^{k-1}) * 2 + 2^k, \text{ untuk } 2^k > 1.$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} f(2^k) &= f(2^{k-1}) * 2 + 2^k \\ &= (f(2^{k-2}) * 2 + 2^{k-1}) * 2 + 2^k \end{aligned}$$

Solusi (1/2) (Levitin, 2012)

Misalkan $n = 2^k$ maka $k = \log_2 n$ kemudian

$$f(2^k) = f(2^{k-1}) * 2 + 2^k, \ \text{ untuk } 2^k > 1.$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} f(2^k) &= f(2^{k-1}) * 2 + 2^k \\ &= (f(2^{k-2}) * 2 + 2^{k-1}) * 2 + 2^k \\ &= f(2^{k-2}) * 2^2 + 2^k + 2^k \end{aligned}$$

Solusi (1/2) (Levitin, 2012)

Misalkan $n = 2^k$ maka $k = \log_2 n$ kemudian

$$f(2^k) = f(2^{k-1}) * 2 + 2^k, \text{ untuk } 2^k > 1.$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
f(2^k) &= f(2^{k-1}) * 2 + 2^k \\
&= (f(2^{k-2}) * 2 + 2^{k-1}) * 2 + 2^k \\
&= f(2^{k-2}) * 2^2 + 2^k + 2^k \\
&= (f(2^{k-3}) * 2 + 2^{k-2}) * 2^2 + 2^k + 2^k
\end{aligned}$$

Solusi (1/2) (Levitin, 2012)

Misalkan $n = 2^k$ maka $k = \log_2 n$ kemudian

$$f(2^k) = f(2^{k-1}) * 2 + 2^k, \ \text{untuk } 2^k > 1.$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
f(2^k) &= f(2^{k-1}) * 2 + 2^k \\
&= (f(2^{k-2}) * 2 + 2^{k-1}) * 2 + 2^k \\
&= f(2^{k-2}) * 2^2 + 2^k + 2^k \\
&= (f(2^{k-3}) * 2 + 2^{k-2}) * 2^2 + 2^k + 2^k \\
&= f(2^{k-3}) * 2^3 + 2^k + 2^k + 2^k
\end{aligned}$$

Solusi (1/2) (Levitin, 2012)

Misalkan $n = 2^k$ maka $k = \log_2 n$ kemudian

$$f(2^k) = f(2^{k-1}) * 2 + 2^k, \;\; \text{untuk } 2^k > 1.$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
f(2^k) &= f(2^{k-1}) * 2 + 2^k \\
&= (f(2^{k-2}) * 2 + 2^{k-1}) * 2 + 2^k \\
&= f(2^{k-2}) * 2^2 + 2^k + 2^k \\
&= (f(2^{k-3}) * 2 + 2^{k-2}) * 2^2 + 2^k + 2^k \\
&= f(2^{k-3}) * 2^3 + 2^k + 2^k + 2^k \\
&= (f(2^{k-4}) * 2 + 2^{k-3}) * 2^3 + 2^k + 2^k + 2^k
\end{aligned}$$

Solusi (1/2) (Levitin, 2012)

Misalkan $n = 2^k$ maka $k = \log_2 n$ kemudian

$$f(2^k) = f(2^{k-1}) * 2 + 2^k, \ \ \text{untuk } 2^k > 1.$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
f(2^k) &= f(2^{k-1}) * 2 + 2^k \\
&= (f(2^{k-2}) * 2 + 2^{k-1}) * 2 + 2^k \\
&= f(2^{k-2}) * 2^2 + 2^k + 2^k \\
&= (f(2^{k-3}) * 2 + 2^{k-2}) * 2^2 + 2^k + 2^k \\
&= f(2^{k-3}) * 2^3 + 2^k + 2^k + 2^k \\
&= (f(2^{k-4}) * 2 + 2^{k-3}) * 2^3 + 2^k + 2^k + 2^k \\
&= f(2^{k-4}) * 2^4 + 2^k + 2^k + 2^k + 2^k
\end{aligned}$$

Solusi (1/2) (Levitin, 2012)

Misalkan $n = 2^k$ maka $k = \log_2 n$ kemudian

$$f(2^k) = f(2^{k-1}) * 2 + 2^k, \ \ \text{untuk } 2^k > 1.$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
f(2^k) &= f(2^{k-1}) * 2 + 2^k \\
&= (f(2^{k-2}) * 2 + 2^{k-1}) * 2 + 2^k \\
&= f(2^{k-2}) * 2^2 + 2^k + 2^k \\
&= (f(2^{k-3}) * 2 + 2^{k-2}) * 2^2 + 2^k + 2^k \\
&= f(2^{k-3}) * 2^3 + 2^k + 2^k + 2^k \\
&= (f(2^{k-4}) * 2 + 2^{k-3}) * 2^3 + 2^k + 2^k + 2^k \\
&= f(2^{k-4}) * 2^4 + 2^k + 2^k + 2^k + 2^k \\
&= f(2^{k-j}) * 2^j + j * (2^k).
\end{aligned}$$

Solusi (2/2)

Kita peroleh

Solusi (2/2)

Kita peroleh

$$f(2^k) = f(2^{k-j}) * 2^j + j * (2^k).$$

Solusi (2/2)

Kita peroleh

$$f(2^k) = f(2^{k-j}) * 2^j + j * (2^k).$$

Pilih $j = k$,

Solusi (2/2)

Kita peroleh

$$f(2^k) = f(2^{k-j}) * 2^j + j * (2^k).$$

Pilih $j = k$,

$f(2^k) =$

Solusi (2/2)

Kita peroleh

$$f(2^k) = f(2^{k-j}) * 2^j + j * (2^k).$$

Pilih $j = k$,

$$f(2^k) = f(2^0) * 2^k + (k) * 2^k$$

Solusi (2/2)

Kita peroleh

$$f(2^k) = f(2^{k-j}) * 2^j + j * (2^k).$$

Pilih $j = k$,

$$\begin{aligned} f(2^k) &= f(2^0) * 2^k + (k) * 2^k \\ &= 2^k + k * 2^k \end{aligned}$$

Solusi (2/2)

Kita peroleh

$$f(2^k) = f(2^{k-j}) * 2^j + j * (2^k).$$

Pilih $j = k$,

$$\begin{aligned} f(2^k) &= f(2^0) * 2^k + (k) * 2^k \\ &= 2^k + k * 2^k \\ &= 2^k * (1 + k) \end{aligned}$$

Solusi (2/2)

Kita peroleh

$$f(2^k) = f(2^{k-j}) * 2^j + j * (2^k).$$

Pilih $j = k$,

$$\begin{aligned} f(2^k) &= f(2^0) * 2^k + (k) * 2^k \\ &= 2^k + k * 2^k \\ &= 2^k * (1 + k) \\ &= n * (1 + \log_2 n) \qquad \text{dengan } n = 2^k \text{ dan } k = \log_2 n. \end{aligned}$$

Solusi (2/2)

Kita peroleh

$$f(2^k) = f(2^{k-j}) * 2^j + j * (2^k).$$

Pilih $j = k$,

$$\begin{aligned} f(2^k) &= f(2^0) * 2^k + (k) * 2^k \\ &= 2^k + k * 2^k \\ &= 2^k * (1 + k) \\ &= n * (1 + \log_2 n) \qquad \text{dengan } n = 2^k \text{ dan } k = \log_2 n. \end{aligned}$$

Jadi

Solusi (2/2)

Kita peroleh

$$f(2^k) = f(2^{k-j}) * 2^j + j * (2^k).$$

Pilih $j = k$,

$$\begin{aligned} f(2^k) &= f(2^0) * 2^k + (k) * 2^k \\ &= 2^k + k * 2^k \\ &= 2^k * (1 + k) \\ &= n * (1 + \log_2 n) \qquad \text{dengan } n = 2^k \text{ dan } k = \log_2 n. \end{aligned}$$

Jadi

$$f(n) = n * (1 + \log_2 n)$$

Kita peroleh

$$f(2^k) = f(2^{k-j}) * 2^j + j * (2^k).$$

Pilih $j = k$,

$$\begin{aligned} f(2^k) &= f(2^0) * 2^k + (k) * 2^k \\ &= 2^k + k * 2^k \\ &= 2^k * (1 + k) \\ &= n * (1 + \log_2 n) \qquad \text{dengan } n = 2^k \text{ dan } k = \log_2 n. \end{aligned}$$

Jadi

$$f(n) = n * (1 + \log_2 n)$$

dan

Solusi (2/2)

Kita peroleh
$$f(2^k) = f(2^{k-j}) * 2^j + j * (2^k).$$

Pilih $j = k$,
$$\begin{aligned} f(2^k) &= f(2^0) * 2^k + (k) * 2^k \\ &= 2^k + k * 2^k \\ &= 2^k * (1 + k) \\ &= n * (1 + \log_2 n) \qquad \text{dengan } n = 2^k \text{ dan } k = \log_2 n. \end{aligned}$$

Jadi
$$f(n) = n * (1 + \log_2 n)$$

dan
$$f(1048576) = 1048576 * (1 + \log_2 1048576)$$

Solusi (2/2)

Kita peroleh
$$f(2^k) = f(2^{k-j}) * 2^j + j * (2^k).$$

Pilih $j = k$,
$$\begin{aligned} f(2^k) &= f(2^0) * 2^k + (k) * 2^k \\ &= 2^k + k * 2^k \\ &= 2^k * (1 + k) \\ &= n * (1 + \log_2 n) \qquad \text{dengan } n = 2^k \text{ dan } k = \log_2 n. \end{aligned}$$

Jadi
$$f(n) = n * (1 + \log_2 n)$$

dan
$$\begin{aligned} f(1048576) &= 1048576 * (1 + \log_2 1048576) \\ &= 1048576 * (1 + \log_2 2^{20}) \end{aligned}$$

Kita peroleh

$$f(2^k) = f(2^{k-j}) * 2^j + j * (2^k).$$

Pilih $j = k$,

$$\begin{aligned} f(2^k) &= f(2^0) * 2^k + (k) * 2^k \\ &= 2^k + k * 2^k \\ &= 2^k * (1 + k) \\ &= n * (1 + \log_2 n) \qquad \text{dengan } n = 2^k \text{ dan } k = \log_2 n. \end{aligned}$$

Jadi

$$f(n) = n * (1 + \log_2 n)$$

dan

$$\begin{aligned} f(1048576) &= 1048576 * (1 + \log_2 1048576) \\ &= 1048576 * (1 + \log_2 2^{20}) \\ &= 1048576 * (1 + 20) = 22020096. \end{aligned}$$

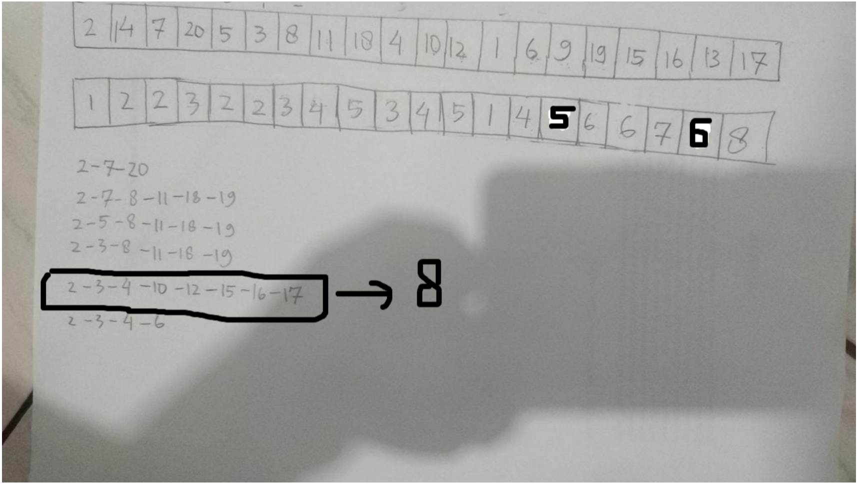
Outline

Soal 10: Pemrograman Dinamis

Pak Dengklek memiliki sebuah sekuens $S = \{2, 14, 7, 20, 5, 3, 8, 11, 18, 4, 10, 12, 1, 6, 9, 19, 15, 16, 13, 17\}$. Subsekuens dari sebuah sekuens S bisa didapatkan dengan menghilangkan beberapa elemen dari S namun dengan tetap mempertahankan urutannya. Sebagai Contoh: $\{2, 7, 13, 17\}$ adalah subsekuens dari S, sedangkan $\{14, 2, 20\}$ bukanlah subsekuens dari S karena urutannya berubah (2 muncul lebih dahulu dari 14 di S).

Pak Dengklek ingin mencari sebuah subsekuens menaik dari S. Sebuah subsekuens dikatakan menaik jika dan hanya jika elemen-elemen yang ada di dalam subsekuens tersebut tersusun secara menaik. Sebagai Contoh: $\{2, 7, 20\}$.

Berapa banyaknya elemen dari subsekuens menaik terpanjang yang bisa dibentuk dari sekuens S?



Algoritma pemrograman dinamis (Bang and Geeks for Geeks, 2022)

Daftar Pustaka I

Aji, A. F. and Gozali, W. (2011). Pemrograman kompetitif dasar: Panduan memulai osn informatika, acm-icpc, dan sederajat versi 1.9. https://toki.id/buku-pemrograman-kompetitif-dasar.

Bang, A. and Geeks for Geeks (2022). Longest increasing subsequence (dp-3). https://www.geeksforgeeks.org/longest-increasing-subsequence-dp-3/.

Epp, S. S. (2020). *Discrete Mathematics with Applications Fifth Edition*. Brooks Cole, Cengage Learning.

Halim, S. and Halim, F. (2013). *Competitive Programming 3: The New Lower Bound of Programming Contests*. Handbook for ACM ICPC and IOI Contestants.

Johnsonbaugh, R. (2017). *Discrete Mathematics 8th Edition*. Pearson.

Levitin, A. (2012). *Introduction to the Design & Analysis of Algorithms 3rd Edition*. Addison-Wesley.

Scipy.org (2022). scipy.spatial.convexhull. https://docs.scipy.org/doc/scipy-0.14.0/reference/generated/scipy.spatial.ConvexHull.html.