随机过程与排队论

by xd_zhu

笔记

零、考试

- **时间**

> 1/10 13:00-15:00

- **题型**

> 10道大题（1-2题证明、应用题、流量整形算法、排队网络计算）
> 50%课本、50%补充

- **重点**

> 一、概率论和随机过程基本过程
> P3 随机过程基本定义、表达式、随机变量和随机向量的关系
> P7 泊松分布是否具有马尔可夫性（无后效性）
> P9 马尔可夫性的数学表达式
> P12 例1.8
> P15 马尔可夫链的5个性质，判断所有状态的性质（主要常返性）
> P20 例1.11、例1.12、例1.13
> 随机过程收敛于稳定状态的充分必要条件、稳定状态下的极限分布
> P36 最后一段
> 证明一：几何分布具有马尔可夫性
> 证明二：负指数分布具有马尔科夫性
> 证明三：泊松分布是否具有马尔可夫性
> 证明四：一步转移矩阵至少有一个特征值是1
>
> 二、排队现象建模
> 排队系统三大要素、六大输出（稳定状态下）、图的表示
> P44 肯达尔模型、含义、省略条件
> P47 符号
> P49 Litter公式证明
>
> 四、单服务窗排队系统
> P65 M/M/1/23为什么可以用生灭过程求解
> P65-69 重点、L、T计算
> P72-P83 可变服务速率、顾客到达速率可变、不耐烦顾客（只需要生灭过程）

> P84-87 有差错（重点）
> P88-90 成批到达（只需生灭过程 图4.14）
>
> 五、多服务窗排队系统
> P92 图5.2
> P94 例5.1、例5.2（重点）
> P97 服务窗口能力不等的M/M/2（重点）
>
> 补充
> 流量整形算法中平滑噪音数据的函数
> 令牌桶算法的生灭过程图、图上的转移概率
>
> 八、排队网络
> Jackson排队网络的四条性质
> 什么是开放网络、闭环网络、混合网络（例子的图）
> Jackson网络的应用举例
>
> 补充习题

一、随机过程简介

- **概率论回顾**

> 条件概率：$P(A \mid B)=\frac{P(A \bigcap B)}{P(B)}$, $P(B)>0$
> 全概率：$P(B)=P(B \mid A_1)P(A_1)+P(B \mid A_2)P(A_2)+\ldots+P(B \mid A_N)P(A_N)$
> Bayes公式：$P(E_i \mid A)=\frac{P(A|E_i)P(E_i)}{P(A)}=\frac{P(A|E_i)P(E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|E_i)P(E_i)}$
> 概率密度函数（连续）：$f_X(x)$
> 概率分布律（离散）：$P_X(k)=P(X=x_k)=p_k$
> 概率分布函数：$F_X(x)=P(X \leq x)$
> $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$
> $f_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}$
> 随机变量的独立性：
> ①$P\{X=x,Y=y\}=P\{X=X\}P\{Y=y\}$（离散）
> ②$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$（连续）

- **随机过程**

> 定义在给定概率空间上的一族随机变量$\{X(x),t \in T\}$
> 当t取遍参数集T中的每个值时，均有一个随机变量$X(t)$与之对应

- **随机向量**

> 随机向量包含了单个分量随机变量的完全信息
> 随机向量还包含单个分量随机变量之间的相关信息

- **几何分布**

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$$

$$E[x]=\frac{1}{p},D[x]=\frac{1-p}{p^2}$$

$$P\{X=n+m \mid X>n\}=P\{X=m\}$$

- **泊松分布**

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$E[x]=\lambda, D[x]=\lambda$$

$$P(X<t)=1-e^{-\lambda t}$$

$$P\{X=n+m \mid X>n\}=P\{X=m\}$$

- **负指数分布**

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

$$\mu_x=\frac{1}{\lambda},\sigma_x=\frac{1}{\lambda}$$

$$P\{X\leq s+T \mid X\geq t\}=P\{X\leq s\}$$

> 泊松事件流中的等待时间(某事件相继两次出现之间的时间间隔)服从指数分布

- **马尔可夫过程**

> 无后效性的随机过程

$$P\{X(t)\leq x \mid X(t_n)\leq x_n,\ldots,X(t_0)\leq x_0\}=P\{X(t)\leq x \mid X(t_n)\leq x_n\}$$

- **马尔可夫链**

> 离散状态空间的马尔可夫过程

$$p_{ij}^{(k)}(n)=p_{ij}(n,n+k)=p\{X(n+k)=j \mid X(n)=i\}$$

- **离散马尔可夫链性质**

> 可达性：对某个$n\geq 1,p_{ij}^{(n)}>0,i\rightarrow j$
> ①互通性：$i\rightarrow j$且$j\rightarrow i$,则$i\leftrightarrow j$，满足自反、对称、传递
> ②不可约：任意两个状态互通
> ③周期性：$p_{jj}^{(n)}>0$的所有$n(n\geq 1)$的最大公约数为状态j的周期d_j
> 若对一切$n\geq 1,p_{jj}^{(n)}=0$,则状态j非周期,$d_j=\infty$
> 若$i\leftrightarrow j$,则$d_i=d_j$
> 若某状态带有自环，则必为非周期
> ④常返性：正常反、零常返、非常返
> $f_j^{(n)}=P\{$在离开状态j后经过n步首次返回$j\}$
> $f_j=\sum_{n=1}^{\infty}f_j^{(n)}=P\{$不断返回$j\}$
> $M_j=\sum_{n=1}^{\infty}nf_j^{(n)}$

非常返：$f_j < 1$
零常返：$M_j = \infty$
正常反：$M_j < \infty$的常返态
不可约马尔可夫链的状态一致性：状态集E全非常返，或全零常返，或全正常返，每个状态周期相同
⑤遍历性：$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = p_j(\infty) = p_j$, 存在平衡状态, 且不依赖于$i$状态
非周期+正常反 = 遍历
不可约+所有状态遍历 = 遍历
⑥稳定状态分布
马尔可夫链遍历⇔ 其平稳分布必定存在、唯一、与初始分布无关且保持不变

- **生灭过程**

$p_{n,n+1}(\Delta t) = P\{N(t+\Delta t) = n+1 \mid N(t) = n\} = \lambda\Delta t + o(\lambda\Delta t), \lambda > 0, n \in E$
$p_{n,n-1}(\Delta t) = P\{N(t+\Delta t) = n-1 \mid N(t) = n\} = \lambda\Delta t + o(\mu\Delta t), \lambda > 0, n \in E/\{0\}$
$p_{i,j}(\Delta t) = P\{N(t+\Delta t) = j \mid N(t) = i\} = 1 - \sum_{j\neq i} p_{ij}(\Delta t) = 1 - (\lambda+\mu)\Delta t + o(\Delta t), j, i \in E$
$p_{i,j}(\Delta t) = P\{N(t+\Delta t) = j \mid N(t) = j\} = o(\lambda\Delta t), |j-i| \geq 2, j, i \in E$
“生”：从n增加一个，概率为$\lambda\Delta t$
“灭”：从n增加一个，概率为$\mu\Delta t$
“不灭”：群体个数n保持不变，概率为$(1-\lambda-\mu)\Delta t$

二、排队现象建模

- **三大输入**

①顾客到达
②服务时间
③排队模型

- **六大输出**

①平均系统队长L
②平均等待队列长度L_w
③平均服务队列长度L_s
④平均逗留时间T_{ws}
⑤平均等待时间T_w
⑥平均服务时间T_s

- **肯达尔模型**

A/B/C/D/E/F
A：顾客到达间隔时间的分布

> B：服务窗服务时间的分布
> C：服务窗个数
> D：系统中允许的最大顾客数，默认无穷
> E：顾客源中顾客数，默认为无穷
> F：服务规则，先来先服务时可省略

- **稳态性能指标**

> N：系统队长（总顾客数）
> N_W：系统的等待队长（顾客排队的人数）
> N_S：系统忙的服务员个数（接受服务的顾客数）
> $P_j: P(N=j),$ 系统队长为j的概率
> $N = N_W + N_S$
>
> $L = E(N)$：平均队长
> $L_w = E(N_w)$：平均等待队长
> $L_s = E(N_s)$：忙的服务员平均数
> $L = L_w + L_s$
>
> T_{ws}：任意到达的顾客的平均逗留时间
> T_w：任意到达的顾客的平均排队时间
> T_s：任意到达的顾客的平均接受服务时间
> $T_{ws} = T_w + T_s$
>
> A：绝对通过能力，单位时间内被服务完的顾客均值
> Q：相对通过能力，单位时间内被服务完顾客数与请求顾客数之比
> $P_{损}$：系统的损失率，即系统满员的概率

- **Little公式**

> ①排队系统能够进入稳定状态
> ②服务员的忙期与闲期交替出现，即系统不总会处于盲期
> ③系统中任意顾客不会永远等待，系统也不会永无顾客到
> $L = \lambda T$
> $L_w = \lambda_w T_w$
> $L_s = \lambda_s T_s$

四、单服务窗Poisson排队

- $M/M/1/23$

> ①输入过程Poisson流，平均到达速率λ
> ②对每个顾客服务时间独立负指数分布，平均服务时间$\frac{1}{\mu}$，单位时间服务μ人

③1个服务员
④系统容量为23

状态流图P66、状态守恒方程P67

$$P_0=\frac{1-\rho}{1-\rho^{24}}$$

$$P_k=\rho^k\frac{1-\rho}{1-\rho^{24}}$$

$$L_w=\sum_{k=0}^{22}kP_{k+1}=\frac{\rho}{1-\rho}-\frac{\rho+23\rho^{24}}{1-\rho^{24}}$$

$$L_s=1\times(1-P_0)+0\times P_0=\frac{\rho-\rho^{24}}{1-\rho^{24}}$$

$$L=L_w+L_s=\frac{\rho}{1-\rho}-\frac{24\rho^{24}}{1-\rho^{24}}$$

$$P_{损}=P_{23}$$

$$Q=1-P_{损}$$

$$\lambda_{有效}=\lambda Q$$

$$T_w=\frac{L_w}{\lambda_{有效}}=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}-\frac{23\rho^{23}}{\mu(1-\rho^{23})}-\frac{1}{\mu}$$

$$T_s=\frac{1}{\mu}$$

$$T_{ws}=\frac{L}{\lambda_{有效}}=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}-\frac{23\rho^{23}}{\mu(1-\rho^{23})}$$

- **可变服务速率的$M/M/1$**

排队长度 $\le n$（表示怀疑）时，服务速率μ_1
排队长度 $> n$时，服务速率μ_2（$\mu_2>\mu_1$）
状态流图P73、状态守恒方程P74

- **顾客到达速率可变的$M/M/1$**

> 顾客到达后加入队列的概率与队列长度k成反比 $\frac{1}{k+1}$
> 状态流图P79、状态守恒方程P79

- **具有不耐烦顾客的$M/M/1$**

> 顾客离开队伍的强度与队列的长度k有关，有k人排队，则已速率$k\Delta$按泊松分布离开队伍
> 状态流图P82、状态守恒方程P83

- **有差错服务的$M/M/1/m/m$**

> ①输入过程Poisson流，每个顾客要求服务的平均强度为λ，顾客源个数为m
> ②对每个顾客服务时间独立负指数分布，平均服务时间$\frac{1}{\mu}$，单位时间服务μ人
> ③1个服务员，服务成功的概率：ε
> ④系统容量为m
>
> 状态流图P85、状态守恒方程P86
>
> $$P_0=[\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{(m-k)!\varepsilon^k}\rho^k]^{-1}$$
>
> $$P_{损}=1-P_0$$
>
> $$L_s=1-P_0$$
>
> $$A=\varepsilon\mu(1-P_0)=\varepsilon\mu P_{损}$$
>
> $$Q=1$$
>
> $$\lambda_{有效}=\lambda(m-c)=\varepsilon\mu P_{损}=\varepsilon\mu(1-P_0)$$
>
> $$单位时间要求服务的顾客均值c=m-\frac{\varepsilon\mu(1-P_0)}{\lambda}$$
>
> $$L=c=m-\frac{\varepsilon\mu(1-P_0)}{\lambda}$$
>
> $$L_w=L-L_s=L-(1-P_0)=m-(1-P_0)(1+\frac{\varepsilon\mu}{\lambda})$$
>
> $$L_w=\sum_{k=1}^{m}(k-1)P_k=L-(1-P_0)$$
>
> $$T_w=\frac{L_w}{\lambda_{有效}}=\frac{m}{\varepsilon\mu(1-P_0)}-\frac{1}{\varepsilon\mu}-\frac{1}{\lambda}$$

$$T_s = \frac{L_s}{\lambda_{有效}} = \frac{1}{\varepsilon\mu}$$

$$T_{ws} = T_w + T_s = \frac{L}{\lambda_{有效}} = \frac{m}{\varepsilon\mu(1-P_0)} - \frac{1}{\lambda}$$

例5.1、例5.2

- **成批到达的$M^k/M/1$**

每批到达k个顾客
状态流图P89

五、多服务窗Poisson排队

- $M/M/N$

状态流图P92

$$\rho = \frac{\lambda}{N\mu}$$

$$P_0 = [\sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N\rho)^k}{k!} + \frac{(N\rho)^k}{N!} \frac{1}{1-\rho}]^{-1}$$

$$P_k = \begin{cases} \frac{N^k}{k!} \rho^k P_0 & 0 \le k < N \\ \frac{N^N}{N!} \rho^k P_0 & k \ge N \end{cases}$$

$$L_w = \sum_{k=0}^{\infty} kP_{k+N} = \rho \frac{(N\rho)^N}{N!} \frac{P_0}{(1-\rho)^2}$$

$$L_s = \sum_{k=0}^{N-1} kP_k + n \sum_{k=N}^{\infty} P_k = N\rho$$

$$L = L_w + L_s = \sum_{k=0}^{\infty} kP_{k+N} = N\rho + \rho \frac{(N\rho)^N}{N!} \frac{P_0}{(1-\rho)^2}$$

$$T_w = \frac{L_w}{\lambda}$$

$$T_s = \frac{1}{\mu}$$

$$T_{ws} = \frac{L}{\mu} = T_w + T_s$$

- **服务窗口能力不等的$M/M/2$**

1号窗口服务速率μ_1，2号窗口服务速率μ_2
选择1号窗口请求服务的概率φ，选择2号窗口请求服务的概率$1-\varphi$
状态流图P97、守恒方程P98

$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$a = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho[1+(1+a^2)\rho-(1-a^2)\varphi]/a(1+2\rho)}$$

$$P_{10} = \frac{\rho}{1+2\rho}\frac{1+a}{a}(\rho+1-\varphi)$$

$$P_{01} = \frac{\rho}{1+2\rho}\frac{1+a}{a}(\rho+1-\varphi)$$

$$P_2 = \frac{\rho^2}{1+2\rho}\frac{1+a}{a}[1+(1+a)\rho-(1-a)\varphi]P_0 - \rho(P_{10}-P_{01})$$

$$P_k = \rho P_{k-1} = \frac{\rho^k}{1+2\rho}\frac{1+a}{a}[1+(1+a)\rho-(1-a)\varphi]P_0(\text{表示怀疑})$$

$$L_w = \sum_{k=3}^{\infty}(k-2)P_k$$

$$L = P_{10} + P_{01} + \sum_{k=2}^{\infty} = \frac{\rho(1+a)}{1-\rho}\frac{1+(1+a)\rho-(1-a)\varphi}{a(1+2\rho)+\rho[1+(1+a^2)\rho-(1-a^2)\varphi]}$$

补充

- 流量整形算法

> $\lambda_{in} \rightarrow$（顾客流、数据流）预处理 $\rightarrow \lambda_{out}$
> 噪音数据：流量 $> \lambda_{max}$

$$\lambda_{in} = \begin{cases} configing & 流量 \leq \lambda_{max} \\ noconfiging & 流量 > \lambda_{max} \end{cases}$$

$$\lambda_{out} = \begin{cases} C & buffer空 \\ min\{\lambda_{in}, \lambda_{out}\} & buffer非空 \end{cases}$$

- **平滑函数**

> 弊端：删除了所有噪音数据

$$F(x, \lambda_{max}) = f(\lambda_{max}) + \frac{1}{2}\{1 - sgn[f(x) - f(\lambda_{max})]\}[f(x) - f(\lambda_{max})]$$

- **令牌桶算法**

> 当信元到达后，若有令牌,则信元与令牌一起离开，若无令牌，则信元在缓冲区等待
> 令牌以恒定速率产生，若有信元到来，则和信元一起离开，若无信元则令牌置于令牌同中
>
> 生灭过程图
> 令牌到达系统的速率（数据离开）：$a = \lambda_t$
> 令牌没有到达系统的速率（数据没有离开）：$b = 1 - \lambda_t$
> 令牌离开的速率（数据到达）：$c = \lambda_d$
> 令牌没有离开的速率（数据没有到达）：$d = 1 - \lambda_d$

八、排队网络

- **Jackson网络系统**

> 性质：
> ①所有的系统外的访问者，不会首先访问哪一个服务站，均服从泊松分布
> ②不论哪一个服务站，所有的服务时间，均服从指数分数
> ③所有的服务站，均可接待无限数量的顾客
> ④当一个顾客被完成了一个服务以后，其转移到另一个服务站的概率，与该顾客已接受的服务过程无关，与其

> 他的服务所在的服务站无关
>
> 分类：
> ①开环网络：至少有一个来自外部的输入顾客流和至少一个输出到外部的输出顾客流
> ②闭环网络：所有顾客永远在网络内循环流动
> ③混合网络：若所研究的排队网络对某些顾客流是开放的，而对其他顾客流是闭合的
>
> 举例：工作站（加工、细加工、装饰）、800电话系统