Artificial Intelligence (AI)

人工智能

模糊逻辑

主讲：王晓丽

Email：wangxiaoli@mail.xidian.edu.cn

提纲

命题逻辑	模糊逻辑
集　合	模糊集合
集合的表示	模糊集合的表示
集合的运算	模糊集合的运算
关　系	模糊关系
关系的表示	模糊关系的表示
关系的性质	模糊关系的性质

1.1 命题逻辑

- 例1 判断下列语句中哪些是命题？是真命题还是假命题？

(1)空集是任何集合的子集;

(2)若整数a是素数，则a是奇数;

(3)指数函数是增函数吗？

(4)若空间中两条直线不相交，则这两条直线平行;

(5) $\sqrt{(-2)^2}=2$

(6)x>15.

1.1 命题逻辑

□ 命题的概念

- 一般地,在数学中,我们把用语言、符号或式子表达的,可以判断真假的陈述句叫做命题.
- 判断为真的语句叫做真命题。
- 判断为假的语句叫做假命题。

1.1 命题逻辑

- 例1 判断下列语句中哪些是命题？是真命题还是假命题？

(1)空集是任何集合的子集； 真命题

(2)若整数a是素数，则a是奇数；假命题

(3)指数函数是增函数吗？ ✗

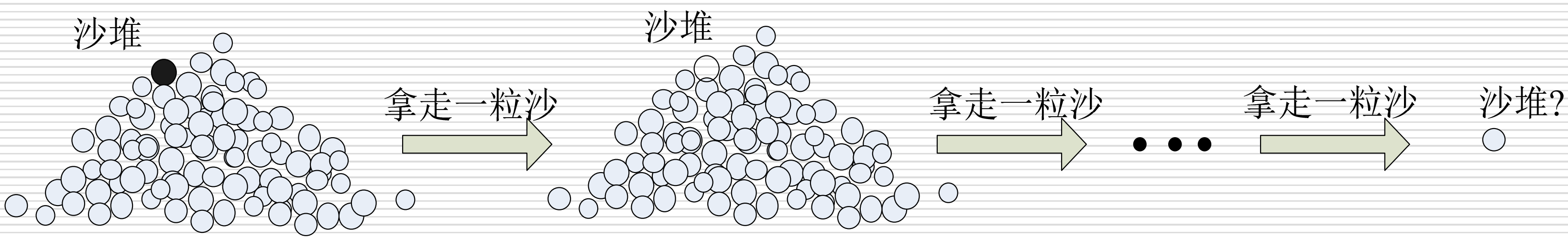
(4)若空间中两条直线不相交，则这两条直线平行；假命题

(5) $\sqrt{(-2)^2}=2$ 真命题

(6)x>15. ✗

1.2 模糊逻辑

- **沙堆问题：**
  - 命题：从一个沙堆里拿走一粒沙子，剩余的还是一个沙堆。
  - 真命题？假命题？



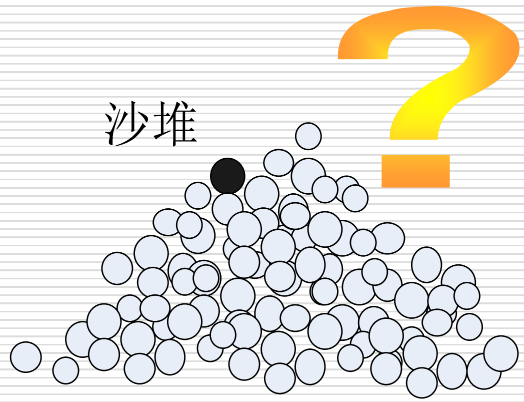
一粒沙子都没有也被称为沙堆？这显然有问题！

1.2 模糊逻辑

- 问题就在于：
  - “沙堆”这个概念是模糊的，没有一个清晰的界限将“沙堆”与“非沙堆”分开。
  - 我们没有办法明确指出，在这个不断拿走沙子的过程中，什么时候“沙堆”不再是“沙堆”。
  - 与“沙堆”相似的模糊概念还有“年轻人”、“小个子”、“大房子”等。
  - 这种在生活中常见的模糊概念，在用传统数学方法处理时，往往会出现问题。

1.2 模糊逻辑

- 如果尝试消除这些概念的模糊性，会怎样呢？
  - 如果规定沙堆只能由10000粒以上的沙子组成，“沙堆”这个概念的模糊性就消除了。
  - 10000粒沙子组成的是沙堆，9999粒沙子组成的不是沙堆：这在数学上没有任何问题。
  - 然而，仅仅取走微不足道的一粒沙子，就将“沙堆”变为“非沙堆”，这又不符合我们日常生活中的思维习惯。



1.2 模糊逻辑

□ 模糊性

- 现实世界中，许多事物可以依据精准的标准把它们分为界限分明的类别。如“石头不是食物”、“地球是星球”等。
- 但有一些事物无法找到精确的分类标准，如“年轻人”、“老年人”、“较高的温度”、“较低的温度”、“温度适中”等。这种事物从它属于一类到不属于一类是逐渐过渡而非突然改变的。
- 事物类属的这种不清晰性称为模糊性（Fuzziness），这类事物称为Fuzzy事物。

1.2 模糊逻辑

□ 模糊逻辑（Fuzzy Logic）

- 对于Fuzzy的事物，仅用0和1两个逻辑值是不够的，必须在0和1之间采用其他中间过渡的逻辑值来表示真假的程度。
- 也就是说，在模糊逻辑中，一个命题不再非真即假，它可以被认为是“部分的真”。

提纲

命题逻辑	模糊逻辑
集 合	模糊集合
集合的表示	模糊集合的表示
集合的运算	模糊集合的运算
关 系	模糊关系
关系的表示	模糊关系的表示
关系的性质	模糊关系的性质

2.1 集合

- 论域 $U=\{1,2,3,4,5\}$
  - A 表示“大”的数字的集合： $A=\{\,a\mid a>=5\,\}=\{5\}$
  - B 表示“小”的数字的集合： $B=\{\,b\mid b<=1\,\}=\{1\}$
- 设 A 是论域 U 上的一个集合，u 是一个元素，若 $u\in U$，记为1；否则 u 不属于 U，记为0。
- 数字1和0可以理解为元素对集合的隶属程度。
- 1=100%，0=0%：分别表示对集合100%的属于和100%的不属于，没有中间状态。

2.2 模糊集合

- 模糊集合把元素对集合隶属程度的取值范围从{0,1}推广到[0,1]上，从而使元素对集合的隶属程度拥有比经典集合更为精细的刻画。

- 如元素a对集合A的隶属程度为0.99，元素b对集合A的隶属程度为0.98。两者的差异仅为0.01。如此精细的程度是经典集合所不能及的。这就是Fuzzy集合论的基本思想。

2.2 模糊集合

- 模糊集合

设U是论域，μ_A是把任意$u \in$ U映射为[0,1]上某个值的函数，即

$$\mu_A : \mathrm{U} \rightarrow [0,1]$$

则称μ_A为定义在U上的一个隶属函数，

由$\mu_A(u)(u \in \mathrm{U})$所构成的集合A称为U上的一个模糊集合，

$\mu_A(u)$称为u对A的隶属度。

2.2 模糊集合

- 举例：
  - ✓ 论域 $U=\{1,2,3,4,5\}$，A 和 B 分别表示“大”与“小”的模糊集合，μ_A 和 μ_B分别为相应的隶属函数。
    - $\mu_A(1)=0$, $\mu_A(2)=0$, $\mu_A(3)=0.1$, $\mu_A(4)=0.6$, $\mu_A(5)=1$
    - $\mu_B(1)=1$, $\mu_B(2)=0.5$, $\mu_B(3)=0.01$, $\mu_B(4)=0$, $\mu_B(5)=0$

提纲

命题逻辑	模糊逻辑
集　合	模糊集合
集合的表示	模糊集合的表示
集合的运算	模糊集合的运算
关　系	模糊关系
关系的表示	模糊关系的表示
关系的性质	模糊关系的性质

3.1 集合的表示

- 集合的表示法主要有两种：
  - **枚举法：**

① 由20以内的质数组成的集合可以表示为：

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

② 自然数集合可以表示为：$N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

3.1 集合的表示

- 集合的表示法主要有两种：
  - **描述法：**

    使$P(x)$成立的一切 x 组成的集合可以表示为：

    $$\{\, x \mid P(x) \,\}$$

    如：实数可以表示为$\{\, x \mid -\infty < x < +\infty \,\}$

3.2 模糊集合的表示

- 扎德表示法：针对离散且有限论域

若论域 $U=\{u_1, \ldots, u_n\}$为离散论域，模糊集A表示为：

$$A = \mu_A(u_1)/u_1 + \mu_A(u_2)/u_2 + \ldots + \mu_A(u_n)/u_n$$

其中，/ 不表示分数，+ 也不表示求和。

注意：隶属度为0的元素可以不写。

例如：$C = 1/u_1 + 0.7/u_2 + 0/u_3 + 0.4/u_4$

$$= 1/u_1 + 0.7/u_2 + 0.4/u_4$$

3.2 模糊集合的表示

□ 扎德表示法举例

✓ 论域 $U=\{1,2,3,4,5\}$，A、B 分别表示“大”与“小”的模糊集合，μ_A，μ_B分别为相应的隶属函数。

- $\mu_A(1)=0$, $\mu_A(2)=0$, $\mu_A(3)=0.1$, $\mu_A(4)=0.6$, $\mu_A(5)=1$

  $A = 0.1/3 + 0.6/4 + 1/5$

- $\mu_B(1)=1$, $\mu_B(2)=0.5$, $\mu_B(3)=0.01$, $\mu_B(4)=0$, $\mu_B(5)=0$

  $B = 1/1 + 0.5/2 + 0.01/3$

3.2 模糊集合的表示

- **向量表示法：**

  用模糊向量 $A = (\mu_A(u_1),\ \mu_A(u_2),\ \ldots,\ \mu_A(u_n))$ 表示论域 $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ 上的模糊集 A

- 例：论域 $U = \{1,2,3,4,5\}$，A、B 分别表示“大”与“小”的模糊集合，μ_A，μ_B分别为相应的隶属函数。
  - $\mu_A(1)=0,\ \mu_A(2)=0,\ \mu_A(3)=0.1,\ \mu_A(4)=0.6,\ \mu_A(5)=1$

    $A = (0, 0, 0.1, 0.6, 1)$
  - $\mu_B(1)=1,\ \mu_B(2)=0.5,\ \mu_B(3)=0.01,\ \mu_B(4)=0,\ \mu_B(5)=0$

    $B = (1, 0.5, 0.01, 0, 0)$

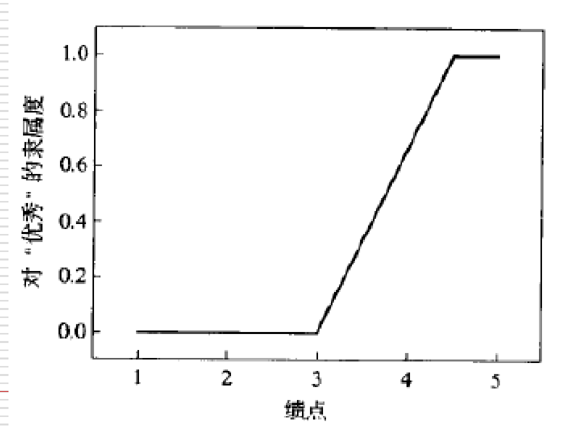
3.2 模糊集合的表示

□ 积分表示法：针对连续论域

$$A = \int_{u \in U} \mu_A(u) / u$$

- 只是借用了数学中的积分符号，并不表示积分。
- 例：学生成绩为[0,5]区间上的实数，4.5以上属于“优秀”，3以下属于不优秀，3到4.5之间可以看作是一定程度上属于“优秀”。

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 0 & \text{当} 0 \le u \le 3 \\ \dfrac{2}{3}u - 2 & \text{当} 3 < u < 4.5 \\ 1 & \text{当} 4.5 \le u \le 5 \end{cases}$$

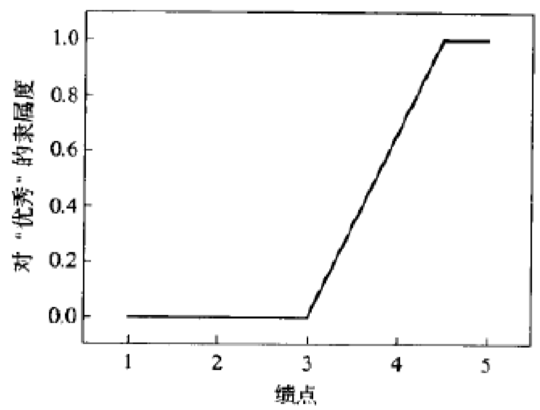


3.2 模糊集合的表示

□ 积分表示法：针对连续论域

- 例：学生成绩为[0,5]区间上的实数，4.5以上属于“优秀”，3以下属于不优秀， 3到4.5之间可以看作是一定程度上属于“优秀”。

$$\mu_A(u)=\begin{cases}0 & \text{当}0\le u\le 3\\ \dfrac{2}{3}u-2 & \text{当}3<u<4.5\\ 1 & \text{当}4.5\le u\le 5\end{cases}$$



$$A=\int_{0\le u\le 3}\frac{0}{u}+\int_{3<u<4.5}\frac{\frac{2}{3}u-2}{u}+\int_{4.5\le u\le 5}\frac{1}{u}$$

3.2 模糊集合的表示

- **序对表示法：**

$$A=\{(u,\mu_A(u))\,|\,u\in U\}$$

- 例：论域 $U=\{1,2,3,4,5\}$，A、B 分别表示“大”与“小”的模糊集合，μ_A，μ_B分别为相应的隶属函数。
  - $\mu_A(1)=0$，$\mu_A(2)=0$，$\mu_A(3)=0.1$，$\mu_A(4)=0.6$，$\mu_A(5)=1$

    $\boldsymbol{A=\{(3,0.1),(4,0.6),(5,1)\}}$
  - $\mu_B(1)=1$，$\mu_B(2)=0.5$，$\mu_B(3)=0.01$，$\mu_B(4)=0$，$\mu_B(5)=0$

    $\boldsymbol{B=\{(1,1),(2,0.5),(3,0.01)\}}$

3.2 模糊集合的表示

- **序对表示法：**

$$A=\{(u,\mu_A(u))\mid u\in U\}$$

- 例：学生成绩为[0,5]区间上的实数，4.5以上属于“优秀”，3以下属于不优秀，3到4.5之间可以看作是一定程度上属于“优秀”。

$$\mu_{\mathrm{A}}(u)=\begin{cases}0 & \text{当}0\le u\le 3\\ \dfrac{2}{3}u-2 & \text{当}3<u<4.5\\ 1 & \text{当}4.5\le u\le 5\end{cases}$$

$$A=\{(u,0)\mid 0\le u\le 3\}+\left\{(u,\frac{2}{3}u-2)\mid 3<u<4.5\right\}+\{(u,1)\mid 4.5\le u\le 5\}$$

提纲

命题逻辑	模糊逻辑
集 合	模糊集合
集合的表示	模糊集合的表示
集合的运算	模糊集合的运算
关 系	模糊关系
关系的表示	模糊关系的表示
关系的性质	模糊关系的性质

4.1 集合的运算

- U 是整个论域，A 和 B 是 U 上的两个集合，则

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{或} \ x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{且} x \in B\}$$

$$\neg A = \{x \mid x \in U \text{且} x \notin A\}$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$$

4.1 集合的运算

- 一个班有4个女生，U={a,b,c,d}，集合A表示漂亮的女生。集合B表示聪明的女生。
- A={a,c},B={c,d}
  - 聪明或漂亮的女生 $A \bigcup B = \{a, c, d\}$
  - 聪明且漂亮的女生 $A \bigcap B = \{c\}$
  - 不漂亮的女生 $\neg A = \{b, d\}$
  - 不聪明的女生 $\neg B = \{a, b\}$

4.2 模糊集合的运算

- 一个班有4个女生，U={a,b,c,d}。A和B分别是U上的两个模糊集合，集合A表示漂亮。集合B表示聪明。
- A={(a,1), (b,0.6), (c,1), (d,0.2)},
- B={(a,0.6), (b,0.3), (c,1), (d,1)},

  - 聪明或漂亮的女生 $A \cup B = \{(a,1),(b,0.6),(c,1),(d,1)\}$
  - 聪明且漂亮的女生 $A \cap B = \{(a,0.6),(b,0.3),(c,1),(d,0.2)\}$
  - 不漂亮的女生 $\neg A = \{(a,0),(b,0.4),(c,0),(d,0.8)\}$
  - 不聪明的女生 $\neg B = \{(a,0.4),(b,0.7),(c,0),(d,0)\}$

4.2 模糊集合的运算

- 设A和B分别是U上的两个模糊集合，并集A∪B、交集A∩B和A的补集¬A的隶属函数分别为：

$$A \cup B:\ \mu_{A\cup B}(u) = \max_{u\in U}\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$$

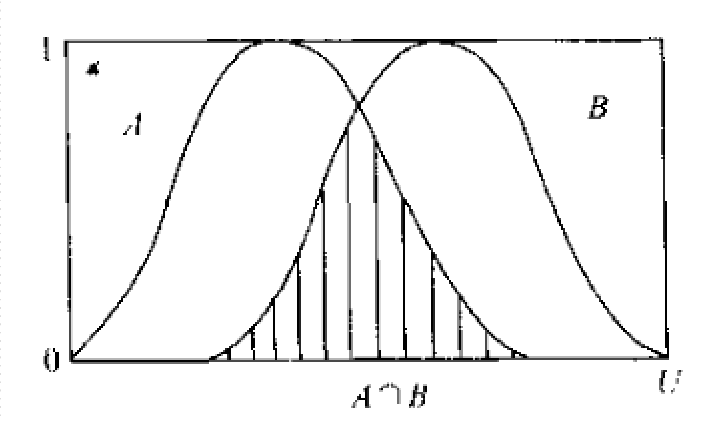
$$A \cap B:\ \mu_{A\cap B}(u) = \min_{u\in U}\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$$

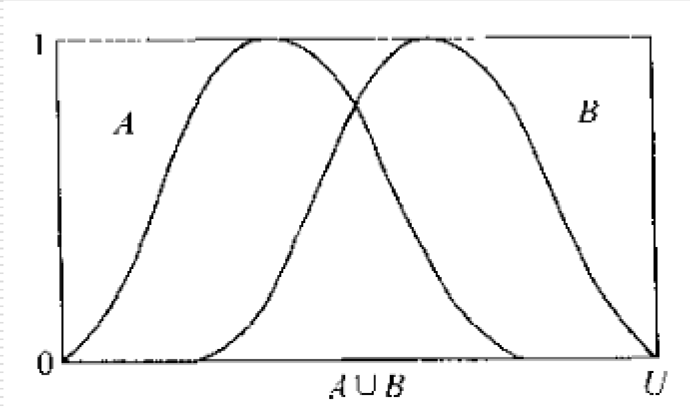
$$\neg A:\ \ \mu_{\neg A}(u) = 1 - \mu_A(u)$$

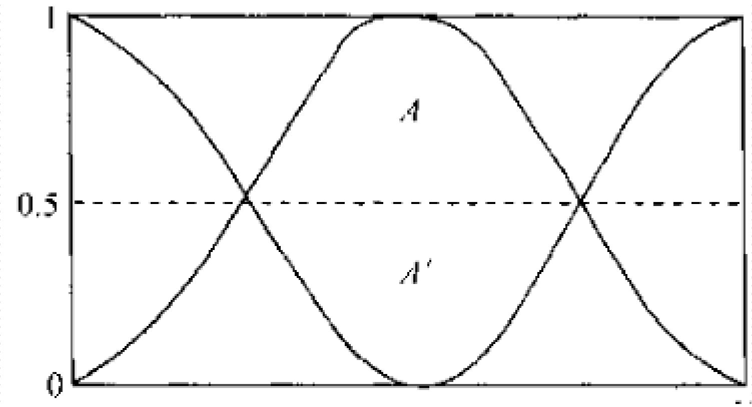
- A与B的包含关系定义如下：

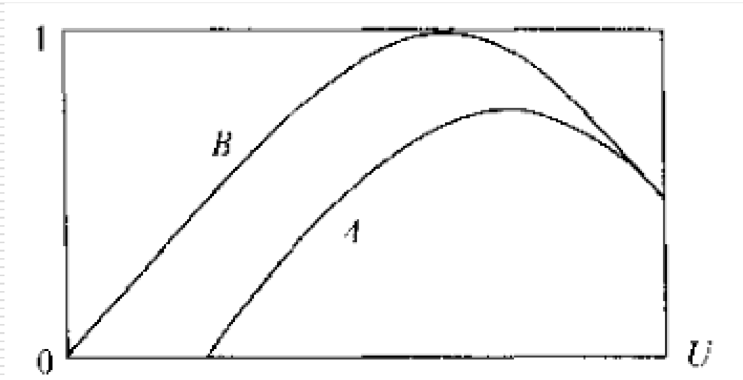
$$A \subseteq B:\ \forall u \in U,\ \mu_A(u) \le \mu_B(u)$$

4.2 模糊集合的运算









4.2 模糊集合的运算

- 举例
  - 设U={u_1, u_2, u_3}是3个品种的巡航导弹，且

    A=速度特别快的巡航导弹=$0.1/u_1+0.9/u_2+0.7/u_3$

    B=精确度特高的巡航导弹=$0.7/u_1+0.8/u_2+0.9/u_3$

    - 又快又准的巡航导弹
    - 或快或准的巡航导弹
    - 速度特慢的巡航导弹
    - 精确度特低的巡航导弹

4.2 模糊集合的运算

- 举例
  - ✓ 设U={u_1, u_2, u_3}是3个品种的巡航导弹，且

    A = 速度特别快的巡航导弹 = $0.1/u_1+0.9/u_2+0.7/u_3$

    B = 精确度特高的巡航导弹 = $0.7/u_1+0.8/u_2+0.9/u_3$

    - 又快又准的巡航导弹 = $0.1/u_1+0.8/u_2+0.7/u_3$
    - 或快或准的巡航导弹 = $0.7/u_1+0.9/u_2+0.9/u_3$
    - 速度特慢的巡航导弹 = $0.9/u_1+0.1/u_2+0.3/u_3$
    - 精确度特低的巡航导弹 = $0.3/u_1+0.2/u_2+0.1/u_3$

4.2 模糊集合的运算

□ 举例

- ✓ 设有论域 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$，$F$ 和 G 是 U 上的两个模糊集，且有：
- ✓ $F = 0.9/u_1 + 0.7/u_2 + 0.5/u_3 + 0.3/u_4$
- ✓ $G = 0.6/u_3 + 0.8/u_4 + 1/u_5$
- ✓ 分别计算 $F \cap G$，$F \cup G$，$\neg F$。

4.2 模糊集合的运算

- 举例
  - ✓ 设有论域 $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$，$F$ 和 G 是 U 上的两个模糊集，且有：
  - ✓ $F = 0.9/u_1 + 0.7/u_2 + 0.5/u_3 + 0.3/u_4$
  - ✓ $G = 0.6/u_3 + 0.8/u_4 + 1/u_5$

  - ➢ $F \cap G = 0.5/u_3 + 0.3/u_4$
  - ➢ $F \cup G = 0.9/u_1 + 0.7/u_2 + 0.6/u_3 + 0.8/u_4 + 1/u_5$
  - ➢ $\neg F = 0.1/u_1 + 0.3/u_2 + 0.5/u_3 + 0.7/u_4 + 1/u_5$

4.2 模糊集合的运算

- 举例
  - ✓ 设$U=\{u_1,u_2,u_3\}$，

$A=0.3/u_1+0.8/u_2+0.6/u_3$;

$B=0.6/u_1+0.9/u_2+0.7/u_3$

问，A是否包含于B？

对于u_1，$0.3<0.6$

对于u_2，$0.8<0.9$

对于u_3，$0.6<0.7$

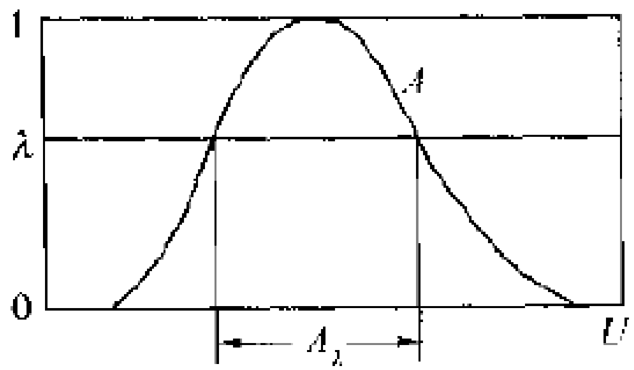
因此，A包含于B。

4.2 模糊集合的运算

- λ水平截集：
  - ✓ 设A是论域U上的模糊集，λ∈[0,1]，则称集合

$$A_\lambda = \{ u \mid u \in U, \mu_A(u) \geq \lambda \}$$

为A的λ水平截集，λ称为阈值或置信水平。



4.2 模糊集合的运算

- λ水平截集：
  - ✓ A的λ水平截集，$A_\lambda = \{ u \mid u \in U,\ \mu_A(u) \geq \lambda \}$。
  - ✓ 举例：

$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$, $A=0.9/x_1+1.0/x_2+0.2/x_3+0.5/x_4+0.7/x_5+0.3/x_6$

$A_1 \quad A_{0.8} \quad A_{0.6} \quad A_{0.4} \quad A_{0.2}$

4.2 模糊集合的运算

- λ水平截集：
  - A的λ水平截集，$A_\lambda = \{\ u \mid u\in U,\ \ \mu_A(u) \geqslant \lambda\ \}$。
  - 举例：

$U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$, $A=0.9/x_1+1.0/x_2+0.2/x_3+0.5/x_4+0.7/x_5+0.3/x_6$

$$A_1=\{x_2\}$$

$$A_{0.8}=\{x_1,x_2\}$$

$$A_{0.6}=\{x_1,x_2,x_5\}$$

$$A_{0.4}=\{x_1,x_2,x_4,x_5\}$$

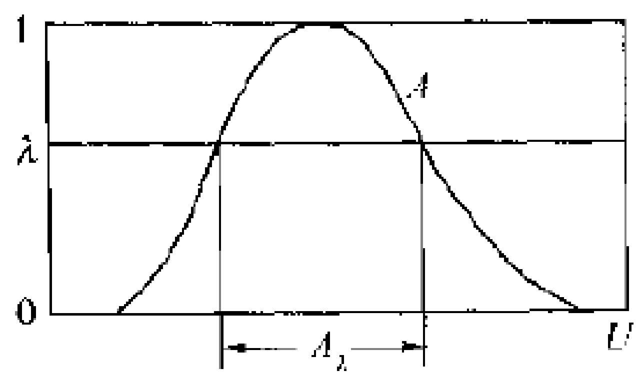
$$A_{0.2}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$$

4.2 模糊集合的运算

- λ水平截集：
  - ✓ 阈值λ越大，其水平截集A_λ越小。
  - ✓ 两条性质：(1) 若$\lambda_1 \le \lambda_2$,则$A_{\lambda_2} \subseteq A_{\lambda_1}$

    (2)$(A \bigcup B)_\lambda = A_\lambda \bigcup B_\lambda$，$(A \bigcap B)_\lambda = A_\lambda \bigcap B_\lambda$

$$A_1 = \{x_2\}$$
$$A_{0.8} = \{x_1, x_2\}$$
$$A_{0.6} = \{x_1, x_2, x_5\}$$
$$A_{0.4} = \{x_1, x_2, x_4, x_5\}$$
$$A_{0.2} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$$



提纲

命题逻辑	模糊逻辑
集　合	模糊集合
集合的表示	模糊集合的表示
集合的运算	模糊集合的运算
关　系	模糊关系
关系的表示	模糊关系的表示
关系的性质	模糊关系的性质

5.1 关系

- 在日常生活中，有许多事物是成对出现的，且具有一定的顺序。如二维空间中的一个点 (x, y)。
- 任意两个元素 x 与 y 配成一个有序的对 (x, y)，称为 x 与 y 的序对。有序是指当 $x \neq y$ 时，$(x, y) \neq (y, x)$。

5.1 关系

- 设 X 与 Y 是两个集合，由 X 的元素与 Y 的的元素配成的全体序对组成一个集合，称为 X 与 Y 的直积（笛卡尔乘积），记为 $X\times Y$，即

$$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X, y\in Y\}$$

- 例：设 $X=\{1,2\}$, $Y=\{0,2\}$

$$X\times Y=\{(1,0),(1,2),(2,0),(2,2)\},$$

$$Y\times X=\{(0,1),(0,2),(2,1),(2,2)\}.$$

$$X\times Y\neq Y\times X$$

5.1 关系

- 设 X 与 Y 是两个集合，由 X 的元素与 Y 的的元素配成的**全体序对**组成一个集合，称为 X 与 Y 的**直积（笛卡尔乘积）**，记为 $X \times Y$，即

$$X \times Y = \{ (x, y) \mid x \in X, y \in Y \}$$

- $X \times Y$ 上的**子集** R 称为 X 到 Y 的一个**关系**。
  - ✓ 如果$(x, y) \in R$，则记 xRy，即 x 与 y 有关系 R。
  - ✓ 若 $X = Y$，则说 R 是 X 上的一个关系。

5.1 关系

- 例：设 $X = \{1, 4, 7, 8\}$，$Y = \{2, 3, 6\}$，定义关系 $R = \{(x, y) \mid x < y, x \in X, y \in Y\}$， 称 R 为“小于”关系。试写出关系 R。

$$R = \{ (1, 2), (1, 3), (1, 6), (4, 6)\}$$

- 可以看出，“小于”关系 R 是直积 $X \times Y$ 的子集。

5.2 模糊关系

- 定义在模糊集合上的关系

  ✓ 设U与V是论域，U与V的笛卡尔乘积为

  $$U \times V = \{ (x, y) \mid x \in U, \ y \in V \}$$

  ✓ **U×V上的每一个模糊子集R，都叫做U到V的一个模糊关系。**

  ✓ **如果R(x,y)=a，则称x与y有关系R的程度为a。**

  ✓ **若U=V，则说R是U上的一个模糊关系。**

5.2 模糊关系

- 例：
  - ✓ U =｛张三，李四，王五｝
  - ✓ V =｛篮球，排球，足球，乒乓球｝
  - ✓ 模糊关系R表示某人对某项运动的擅长程度

	篮球	排球	足球	乒乓球
张三	0.7	0.5	0.4	0.1
李四	0	0.6	0	0.5
王五	0.5	0.3	0.8	0

提纲

命题逻辑	模糊逻辑
集 合	模糊集合
集合的表示	模糊集合的表示
集合的运算	模糊集合的运算
关 系	模糊关系
关系的表示	模糊关系的表示
关系的性质	模糊关系的性质

6.1 关系的表示

- 关系的表示方法有：**枚举法、表格法、有向图法、矩阵法**

- **例**：设 $X=\{1, 4, 7, 8\}$，$Y=\{2, 3, 6\}$，定义关系 $R=\{(x, y) \mid x<y, x \in X, y \in Y\}$，称 R 为“小于”关系。

$$R=\{(1, 2), (1, 3), (1, 6), (4, 6)\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.1 关系的表示

- 例：集合 $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, R 是 A 上的模3同余关系。请用以下方法表示 R。
  - **枚举法**
  - **矩阵法**
  - **有向图法**

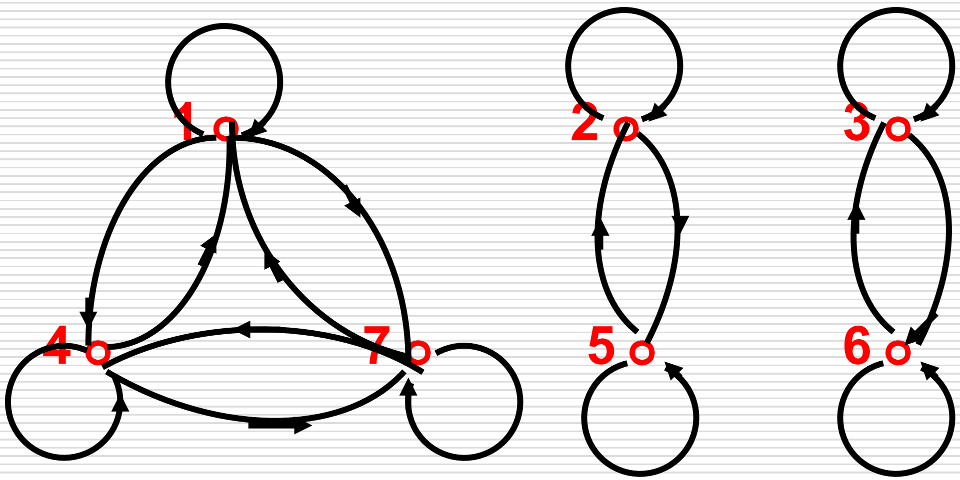
6.1 关系的表示

- $R = \{(1,1), (1,4), (1,7),$
  $(2,2), (2,5),$
  $(3,3), (3,6),$
  $(4,1), (4,4), (4,7),$
  $(5,2), (5,5),$
  $(6,3), (6,6),$
  $(7,1), (7,4), (7,7)\}$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.1 关系的表示

- $R = \{(1,1),(1,4), (1,7),(2,2),(2,5),(3,3),(3,6), (4,1), (4,4),(4,7),(5,2),(5,5),(6,3),(6,6),(7,1),(7,4),(7,7)\}$



6.2 模糊关系的表示

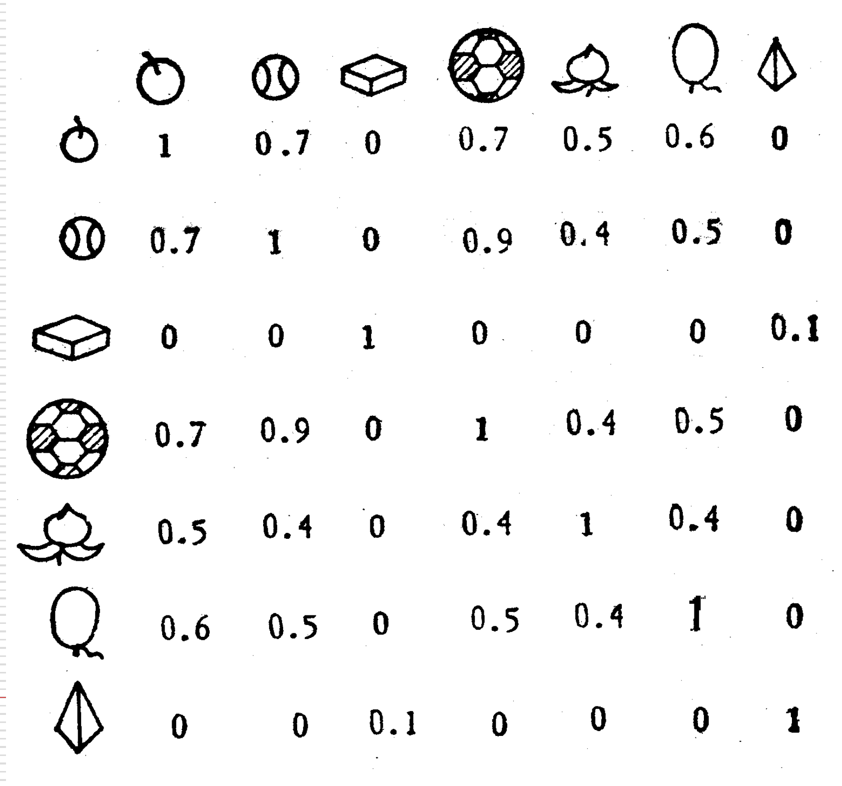
□ 模糊关系的矩阵表示

$$\begin{bmatrix} \mu_R(x_1, y_1), \mu_R(x_1, y_2), \ldots, \mu_R(x_1, y_n) \\ \mu_R(x_2, y_1), \mu_R(x_2, y_2), \ldots, \mu_R(x_2, y_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_R(x_m, y_1), \mu_R(x_m, y_2), \ldots, \mu_R(x_m, y_n) \end{bmatrix}$$

6.2 模糊关系的表示

模糊关系的矩阵表示

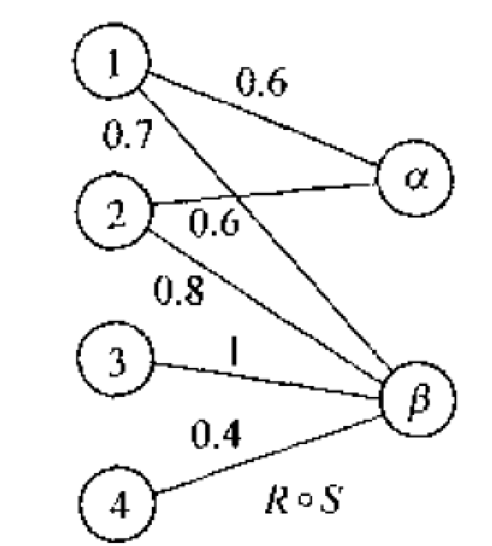
{苹果，球，……，四棱锥}7个对象，用模糊矩阵表示的的“相似”关系



	1	0.7	0	0.7	0.5	0.6	0
	0.7	1	0	0.9	0.4	0.5	0
	0	0	1	0	0	0	0.1
	0.7	0.9	0	1	0.4	0.5	0
	0.5	0.4	0	0.4	1	0.4	0
	0.6	0.5	0	0.5	0.4	1	0
	0	0	0.1	0	0	0	1

6.2 模糊关系的表示

- 模糊关系的图表示



提纲

命题逻辑	模糊逻辑
集　合	模糊集合
集合的表示	模糊集合的表示
集合的运算	模糊集合的运算
关　系	模糊关系
关系的表示	模糊关系的表示
关系的性质	模糊关系的性质

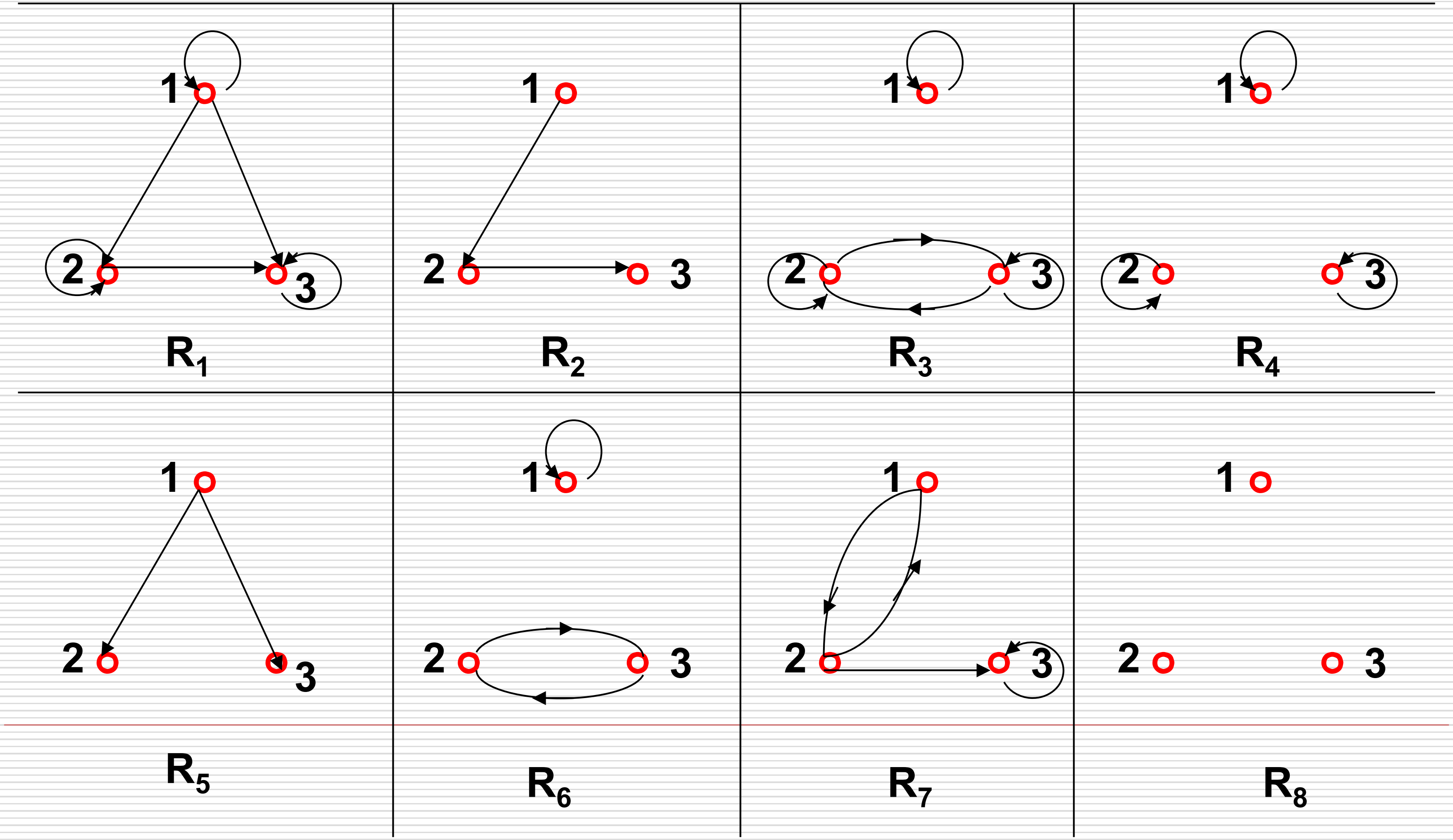
6.1 关系的性质

- 自反性：设 R 是集合 A 上的关系，如果对于任意 $x \in A$ 都有 $(x, x) \in R$ 即 xRx，则称 R 是 A 上的自反关系。
  - 例：在实数集合中，"≤"是自反关系，因为对任意实数 x，有 $x \le x$.
  - **从有向图看自反性:**
    每个结点都有环。
  - **从矩阵看自反性:**
    主对角线都为1。

6.1 关系的性质

□ 自反性

这八个关系中R_1、R_3、R_4是自反的



6.1 关系的性质

- 反自反性：设 R 是集合 A 上的关系，如果对于任意的 $x \in A$ 都有 $(x, x) \notin R$，则称 R 为 A 上的反自反关系。
  - 例如：实数的“>”关系是反自反的。.
  - 从关系有向图看反自反性:

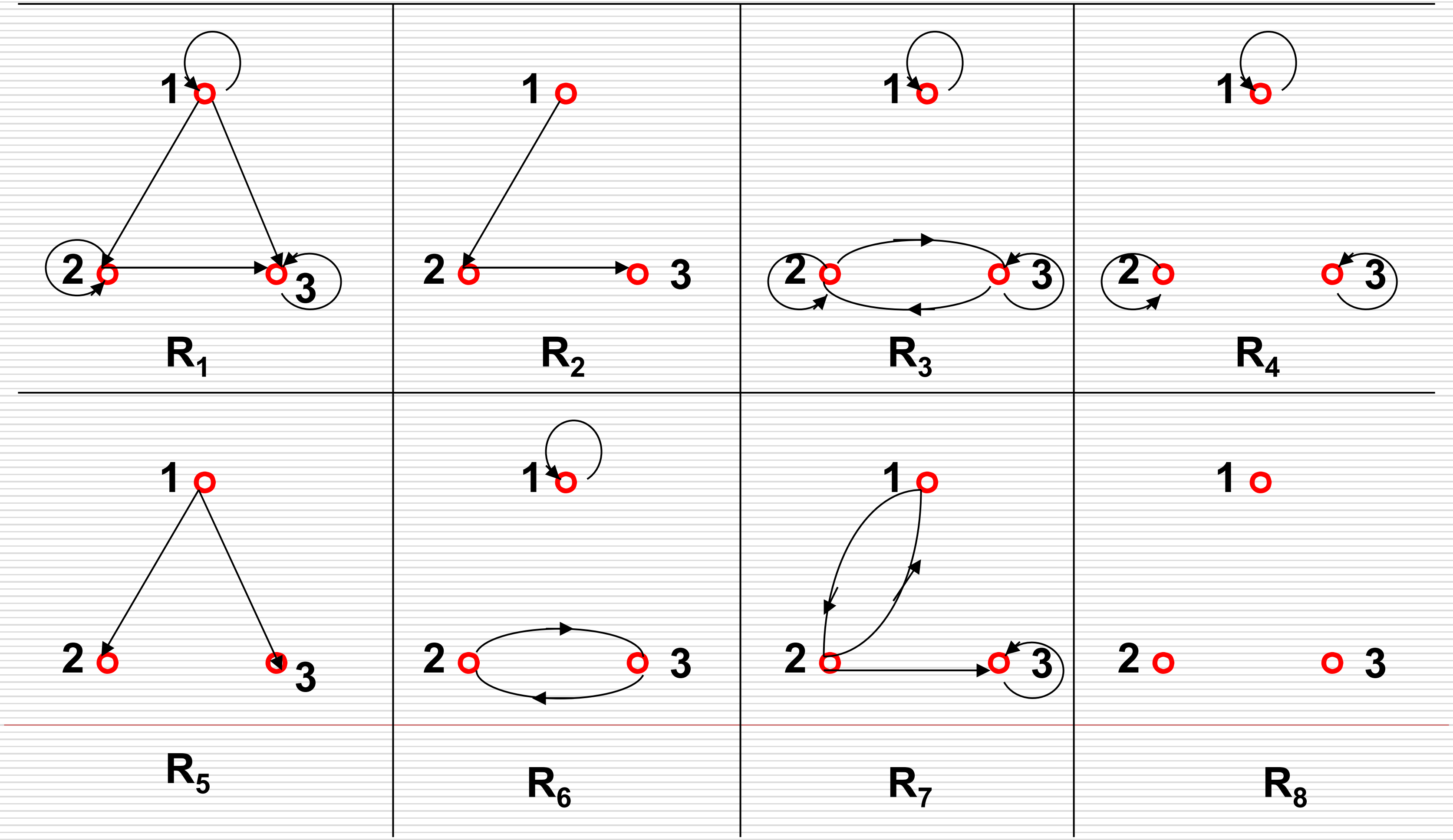
    每个结点都无环。
  - 从关系矩阵看反自反性：

    主对角线都为0。

6.1 关系的性质

□ 反自反性

这八个关系中R_2、R_5、R_8是反自反的



6.1 关系的性质

- **对称性**：R 是集合 A 上的关系，若对任意 $x, y \in A$, 如果有 xRy, 必有 yRx, 则称 R 为 A 上的对称关系。
  - 例如：邻居关系对称关系，朋友关系也是对称关系。
  - **从关系有向图看对称性:**

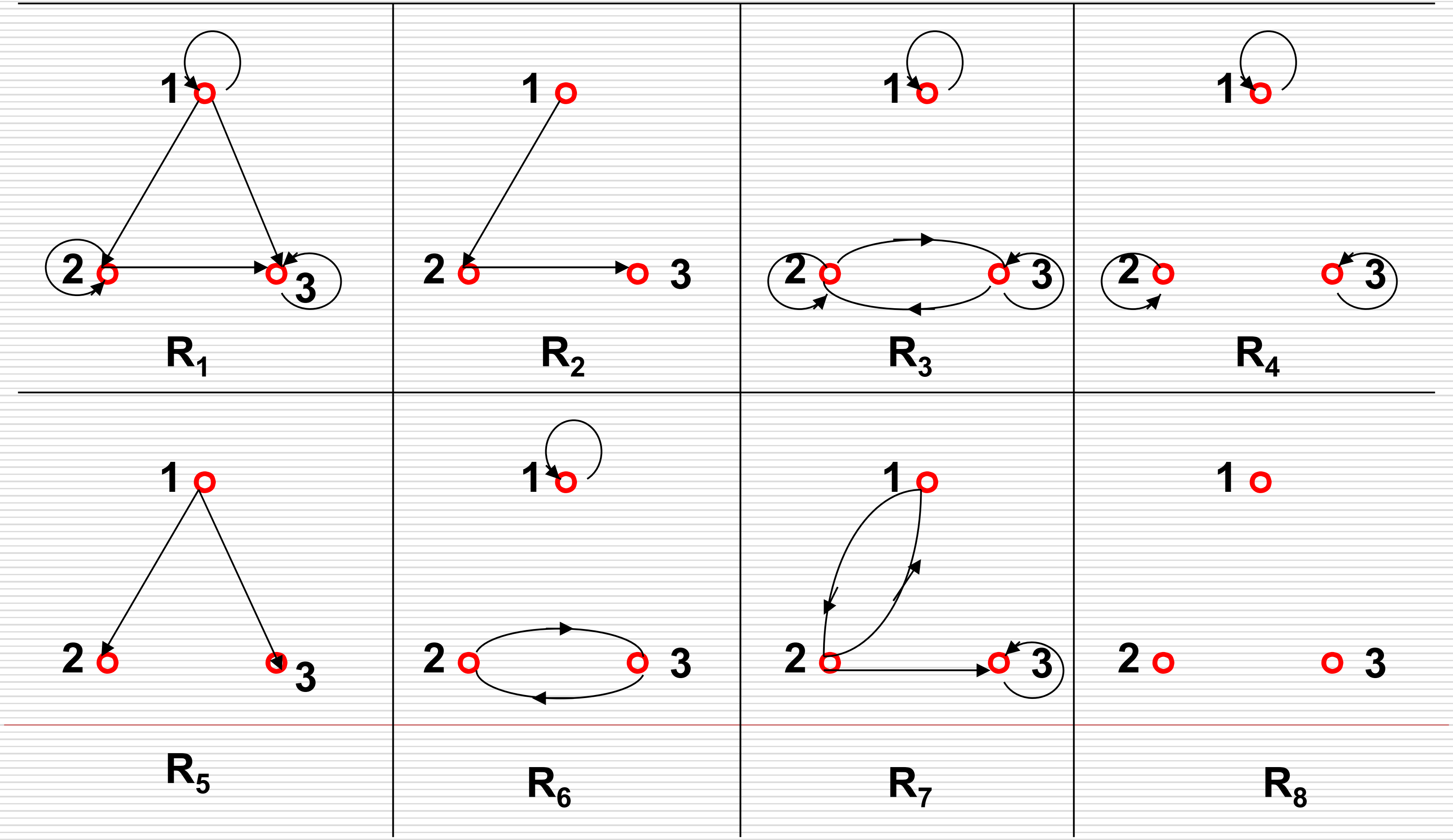
    在两个不同的结点之间，若有边的话，则有方向相反的两条边。
  - **从关系矩阵看对称性：**

    以主对角线为对称的矩阵。

6.1 关系的性质

□ 对称性

这八个关系中R_3、R_4、R_6、R_8是对称的



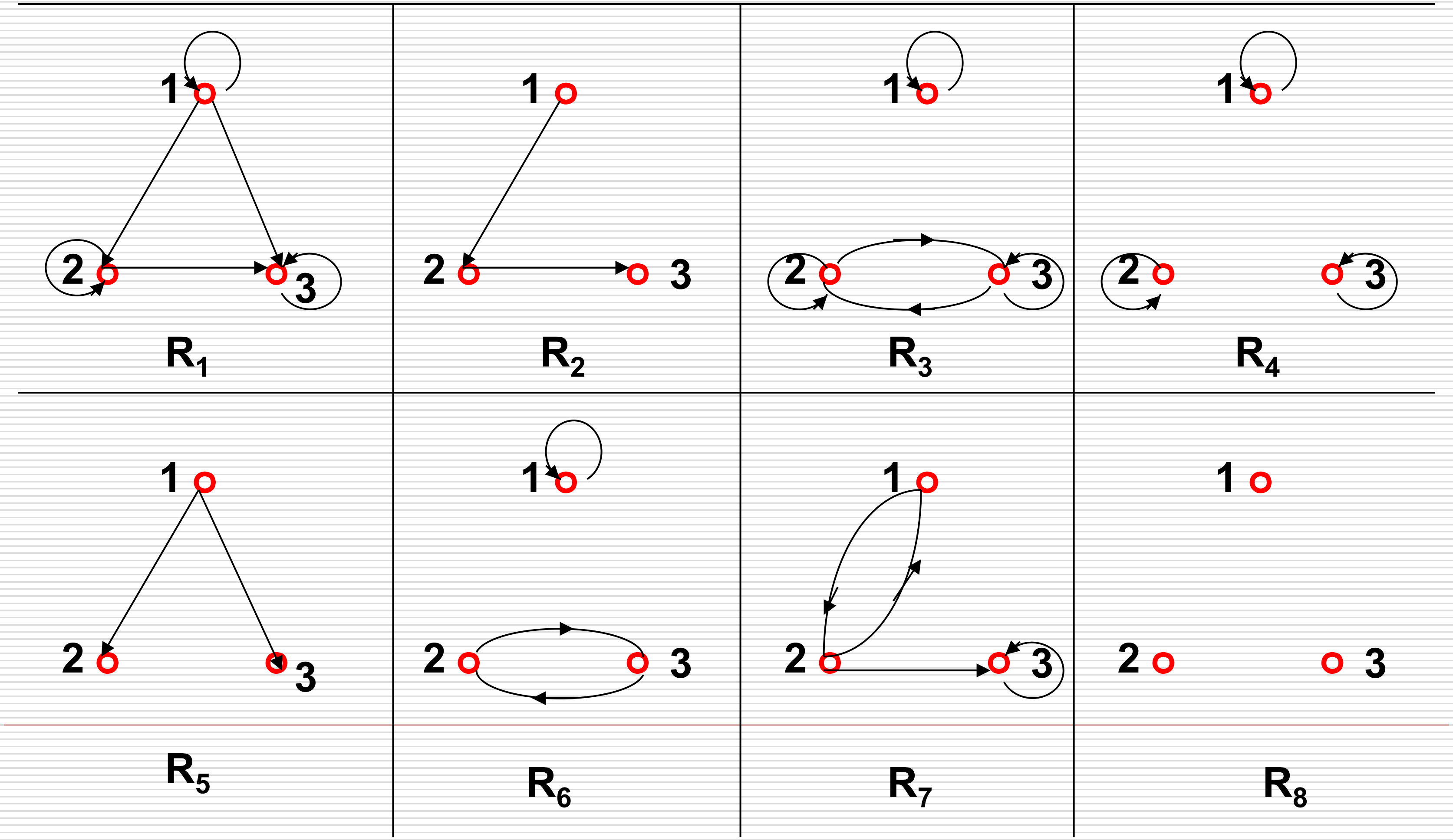
6.1 关系的性质

- **传递性**：R 是集合 A 上的关系，对任何 $x, y, z \in A$, 如果有 xRy 和 yRz，就有 xRz,则称 R 为 A 上的传递关系。
  - 例如：实数集中的"$\leq$"和"$<$"是传递的。
  - 从关系关系图和关系矩阵中不易看清是否有传递性。必须直接根据传递的定义来检查。
  - 检查时要特别注意：当条件为假时，结论为真。

6.1 关系的性质

□ 传递性

这八个关系中R_1、R_3、R_4、R_5、R_8是传递的



6.2 模糊关系的性质

- 自反性 $\mu_{\mathrm{R}}(x,x)=1$
- 对称性 $\mu_{\mathrm{R}}(x,y)=\mu_{\mathrm{R}}(y,x)$
  - 例：设 R 是 $U=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$上的模糊关系，试判断 R 是否具有自反性和对称性？

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}$$

6.2 模糊关系的性质

传递性 $\forall x, y, z \in R, \forall \lambda \in [0,1]$, 当$R(x,y) \geq \lambda$且$R(\mathrm{y},z) \geq \lambda$时, $R(x,z) \geq \lambda$.

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.8 & 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}$$

提纲

命题逻辑	模糊逻辑
集 合	模糊集合
集合的表示	模糊集合的表示
集合的运算	模糊集合的运算
关 系	模糊关系
关系的表示	模糊关系的表示
关系的性质	模糊关系的性质