# 随机过程与排队论

**任课教师:**

**魏静萱 副教授**

[**wjx@xidian.edu.cn**](mailto:wjx@xidian.edu.cn)

**曾勇 副教授**

1. **排队现象**

**例一：电话系统：主叫用户和被叫用户之间提供语音服务，该服务承载于某条通信信道之上，即两个用户需要一条通道，3个用户需要3个通道，4个用户需要6个通道。一般的，n个用户需要个通道。 地球人口60亿，需要？通道。 海量通信接近天文数字。**

**解决：信道“公用” 导致 拥挤排队现象**

**例二：排队现象举例**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **服务系统** | **公共资源** | **排队现象** |
| **电话** | **交换机** | **呼叫等待** |
| **机场** | **跑道** | **飞机等待起飞** |
| **火车售票处** | **售票员** | **售票大厅人满为患** |
| **加工车间** | **机床** | **零件** |

**排队系统的三大要素：1. 输入过程 2. 排队规则：队列允许的最大长度 3. 服务窗：顾客是怎样接受服务的**

1. **输入过程：顾客按什么规则进入系统？一个个？成批？**

**到达过程和到达时间间隔符合一定的分布，称到达分布。**

**假设：到达过程和到达时间是独立同分布的。到达过程假定为平稳的，对时间是齐次的。**

**注：Markov齐次过程 如果一个过程只依赖于现在，而不是过去。。。。**

**表1 输入过程的三种随机过程描述**

|  |  |
| --- | --- |
| **名称** | **含义** |
|  | **在时间间隔(0,t) 内到达系统的顾客人数** |
| **{,n=1,2,,,}** | **Sn表示第n个到达系统的顾客的到达时间** |
| **{，n=1,2,…}** | **, 表示第n个顾客与前一个顾客的到达时间间隔** |

**按顾客到达过程的不同概率特性分类：**

**① 定长输入（D）：顾客等间隔到达，**

**的分布函数为 **

**②Poisson流输入(M): 系统的输入过程{M(t)>0}是Poission流**

**满足4个条件：a) M(t)取值为非负数**

**b) P(M(0)=0)=1, 即时间间隔为0时到达系统 的人数为0**

**c) 过程{M(t)} 具有平稳独立增量性**

**d) 每一个增量M(a+t)-M(a)非负，且服从参数为的泊松分布 **

**③ k阶Erlang输入(Ek)**

**④ 一般独立输入(G)：顾客的到达过程{}是独立同分布的随机变量序列，其分布函数可以是任意函数。**

**⑤ 成批到达系统：顾客一批批到达系统，每批相继到达的时间间隔为上述各种分布之一。**

1. **排队与服务规则**

**① 损失制 （无排队队列）：顾客到达时，系统被占用，顾客离去，不再回来。例：？**

**② 排队制 （等待制）先到先服务、先到后服务、随机服务、优先服务(VIP)、多服务台(?)**

**③混合制：**

* **排队长度有限：**
* **等待时间有限：血浆生物制剂**
* **逗留时间有限（等待时间语）：药品的有效期**

1. **服务机构**

**服务机构包括：**

* **服务员个数**
* **服务机构的结构形式：串联、并联、混联**
* **服务过程：即服务时间**

**3.1 详解**

**服务机构的结构形式：单队列单服务员 （图）**

**多服务员**

**服务过程：第n个顾客在系统里接受服务的时间**

****

* **定长分布(D): 每个顾客被服务的时间是常数C,其分布函数为：**

****

* **负指数分布(M): 每个顾客的服务时间v1,v2,….vn都是独立同负指数分布**
* **Erlang服务分布()**
* **一般独立服务分布(G): 顾客接受服务时间是独立同分布的非负随机变量，分布函数任意。**

1. **排队系统的分类与符号**

**1953年由英国数学家肯达尔提出------肯达尔模型。**

**组成：A/B/C/D/E/F**

**A: 顾客到达间隔时间的分布 （输入过程）**

**B：服务窗服务时间的分布 （服务过程）**

**C：服务窗个数**

**D：系统中允许的最大顾客数，默认无穷**

**E：顾客源中顾客数，默认无穷**

**F：服务规则：先来先服务时刻省略不写**

**例：M/M/C/K排队系统意义**

**例：G/E3/2/排队系统意义**

**2.4 排队论的特性指标**

1. **瞬态特性指标: 对于任意时刻的t的对长（系统内的顾客数，包括排队等服务员的顾客数加上接受服务的顾客数）、顾客在系统中的等待时间、逗留时间等。上述指标绝大多数都是随机变量或随机过程，因此主要关注他们的概率特性分布与期望特性。**

表2.3 排队论的瞬态特性指标

|  |  |
| --- | --- |
|  | t时刻系统的队长（总顾客数） |
|  | t时刻系统的等待队长（顾客排队的人数） |
|  | t时刻系统忙的服务员个数（接受服务的顾客数目） |
|  | t时刻系统队长为j的概率 |
|  | t时刻系统的平均队长 |
|  | t时刻系统的平均等待队长 |
|  | t时刻系统忙的服务员平均个数 |
|  | t时刻到达系统的顾客在系统中的逗留时间 |
|  | t时刻到达系统的顾客在系统中的等待时间（排队时间） |
|  | t时刻到达系统的顾客在系统中接受服务时间 |
|  | t时刻到达系统的顾客在系统中的平均逗留时间 |
|  | t时刻到达系统的顾客在系统中的平均等待时间（排队平均时间） |
|  | t时刻到达系统的顾客在系统中接受服务平均时间 |

**由上表可得以下公式：**

****

**2．稳态特性指标**

**一个排队系统，在其运行的初始阶段，各个特性指标和t密切相关，受初始条件的影响较大（瞬态过程）。但在经过足够长的运行时间后，系统地工作状态趋于平稳，各特性指标不再和实间t有关，受初始条件影响较弱，则称排队系统已由过渡阶段进入平稳状态（重点）**

**表2.4 排队论的稳态特性指标**

|  |  |
| --- | --- |
|  | 系统队长（总顾客数） |
|  | 系统的等待队长（顾客排队的人数） |
|  | 系统忙的服务员个数（接受服务的顾客数目） |
|  | 系统队长为j的概率 |
|  | 系统的平均队长 |
|  | 系统的平均等待队长 |
|  | 系统忙的服务员平均个数 |
|  | 到达系统的任一顾客在系统中的逗留时间 |
|  | 到达系统的任一顾客在系统中的等待时间（排队时间） |
|  | 到达系统的任一顾客在系统中接受服务时间 |
|  | 到达系统的任一顾客在系统中的平均逗留时间 |
|  | 到达系统的任一顾客唉系统中的平均等待时间（排队平均时间） |
|  | 到达系统的任一顾客在系统中接受服务平均时间 |
|  | 绝对通过能力：单位时间内被服务完成顾客的均值 |
|  | 相对通过能力：单位时间内被服务完顾客数与请求顾客数之比值 |
|  | 系统的损失概率，即系统满员的概率 |

**由上表得出：**

****

**当系统趋于稳定时：**

****

=到达率

顾客到达

队列



分配规则

服务员

离开







图2.6 单服务员队列稳态指标

**2.6 LIttLe 公式**

**对一个排队系统，一般假定满足以下3个条件：**

1. **排队系统能够进入稳定状态**
2. **服务员的忙期与闲期交替出现，即系统不总会处于盲期**
3. **系统中任意顾客不会永远等待，系统也不会永无顾客到达**

**若上述假设成立，则有little公式：**

****

**注意：1。只关注三个量的平均统计值**

**2．对顾客的到达时间间隔分布、服务时间分布、排队规则不做要求**

**3．必须针对同一顾客群**

**直观的解释**







排队系统

****

**综上两个公式和little公式，得知，只要求得或，再知道四个指标中的任一个，其他3个就可以立即求出，从而解得排队系统。 通常容易从统计中获得，而容易从理论中获得。**

* **概率论回顾**

**Markov过程：当随机过程在时刻所处的状态为已知，过程在大于的时刻所处的概率只与有关，而于以前的时刻无关，此性质为无后效性。**

****

**Markov Chain (MC)**

**Discrete-time Markov Chain (DTMC)**

**Continuous-time Markov Chain (CTMC)**

**马尔科夫链n时刻的k步转移概率：n时刻MC处于状态i, 经过k步时间，系统处于j状态的概率：**

**转移概率特点：**

**特别的，当k=1时，得到一步转移概率**

****

**其一步转移概率矩阵P(1)为：**

的状态



的

状

态

**K步转移概率矩阵记为P(k)**

**本课程研究时间齐次马尔可夫过程：系统行为不依赖于观测时间，即马尔科夫过程中的条件分布函数不随观察起始时刻的变化而变化，我们可以任选时间轴为起点。**

**N时刻的k步转移概率：**

**从状态i到状态j的概率和时刻n无关，称这类MC为时齐马尔科夫链。**

* 1. **只传输数字0和1的串联系统。如下图所示，设每一级的传真率为p，误码率为q=1-p,设一个单位时间传输一级，X0是第一级的输入，Xn是第n级的输出。**











…

1

2

n

…

0-1传输系统

**分析：****是一个随机过程， 状态空间I={0，1} 是一个齐次马尔科夫过程，转移概率和一步转移概率矩阵为：**

****

**一步转移概率矩阵**

****

**例1.2 一维随机游动 设一质点在如图所示的直线的点集I={1，2，3，4，5}上随机游动，并仅在1秒、2秒等整秒时刻发生游动。**

1

2

3

4

5

一维随机游动

**游动规则是：如果Q现在位于点i(1<i<5),则下一时刻各以1/3的概率向左或向右移动一格，或以1/3的概率留在原处；如果Q位于1（或5）这点上，则下一时刻就以概率1游动到2 （或4）这一点上。1和5这两点称为反射壁，上述现象为带有两个反射壁的随机游动。**

**分析：表示时刻n时Q的位置，不同的位置就是的状态。所处的状态的概率分布只与=i有关，而与Q在时刻n之前如何到达状态i无关，因此该过程是马尔科夫过程，并是齐次的。**

**一步转移概率：**



* 1. **初始时Z0=（1，0），状态转移概率， 问n步后的状态？**

****

**问题：一步转移矩阵最终收敛到稳态，且收敛有快有慢，这与矩阵的什么有关？？**

**例 1.4 排队模型 设服务系统由一个服务员和只可容纳2人的等候室组成，服务规则是：先到先服务，后来者须在等候室依次排队。假定一个需要服务的顾客到达系统时发现系统内已有3个顾客（一个正在接受服务，两个在等待时排队），则该顾客离去。设时间间隔内将有一个顾客进入系统的概率为q,有一原来被服务的顾客离开系统（服务完毕）的概率为p. 又设当充分小时，在这一时间间隔内多于一个顾客进入或离开系统实际上是不可能的。该系统是马尔科夫链。**

**设表示时刻时，系统内的顾客数，即系统的状态。是一个随机过程，状态空间I={0,1,2,3}. 下面来计算此马尔可夫链的一步转移概率。**

**????**

**例1.9 某计算机机房的一台计算机经常出现故障，研究者每隔15分钟观察一次计算机的运行状态，收集了24小时的数据（共作97次观察），用1表示正常状态，用0表示不正常状态，所得的数据序列如下：**

**1110010011111110011110111111001111111110001101101**

**111011011010111101110111101111110011011111100111**

**设Xn为第n（n=1，2，…，97）个时段的计算机状态，可以认为它是一个齐次马尔可夫链，状态空间I={0，1}，96次状态转移的情况是：**



**因此，一步转移概率可用频率近似地表示为：**

****

**马尔可夫特性隐含的重要结论：过程在任何状态的逗留时间（Sojourn Time， ST）的分布必定具有无记忆性（Memoryless Property）。若过程未来的演化只依赖于过程当前的状态，则状态的剩余逗留时间必定与过程在该状态已经花费的时间无关。**

在例1.9中，若计算机在前一时段（15分钟）的状态为0，问从本时段起此计算机能够连续正常工作一个小时的概率是多少？

* 1. **离散事件马尔科夫链的性质**

**五个基本性质：互通性、周期性、常反性、遍历性和稳定状态的分布。**

1. **互通性**

**互通性：若有两个状态i和j, ij同时ji 则称i和j状态相通，记为**

**可达性：某俩个状态i和j的n步转移概率大于0,即**

**，则称状态i可以到达j, 记为**

**图1所示。**

**互通性满足三条性质：**

1. **自反性：ii 每个状态0步转移到自己**
2. **对称性：ij 当且仅当ji**
3. **传递性：若ik且kj, 则ij**

**例1：**

**例1.2 一维随机游动 设一质点在如图所示的直线的点集I={1，2，3，4，5}上随机游动，并仅在1秒、2秒等整秒时刻发生游动。**

1

2

3

4

5

一维随机游动

**游动规则是：如果Q现在位于点i(1<i<5),则下一时刻各以1/3的概率向左或向右移动一格，或以1/3的概率留在原处；如果Q位于1（或5）这点上，则下一时刻就以概率1游动到2 （或4）这一点上。1和5这两点称为反射壁，上述现象为带有两个反射壁的随机游动。**

**一步转移概率：**



**我们画出其状态转移图，图中每条有向边上的数值即为一步转移概率。图2。每条边上的值为一步转移概率。**

1. **不可约**

**不可约：若一个马尔科夫链的任意两个状态都互通，则此马尔科夫链为不可约马尔科夫链。 图3**

1. **周期性**

**周期：对于一个状态j,若，即过程可以经过n步，从状态j返回状态j,则定义所有正整数n的最大公约数为状态j的周期，记为。**

* **若>1 状态j是周期性状态**
* **若=1 状态j是非周期状态**
* **若 状态j的周期**

**定理：若， 则 ， 互通的状态有相同的周期**

**判断非周期的充分条件：**

* **若此状态带有自环，则必为非周期的**
* **若此状态与一个非周期的状态相通，则必为非周期的**

**图4**

1. **常返性**

**常返性考察马尔科夫链由一个状态出发能否载回到本状态的特性。**

* **正常返 （必定会返回，平均返回时间为有限值，）**
* **零常返 (必定会返回，平均返回时间为，)**
* **非常返 （可能不再返回）**

**=P{在离开状态j后经过n步走首次返回j}**

**=P{不断返回j}**

**若， 则称j为常返态； 若，状态j为非常返。**

**: 离开状态j后第一次返回状态j所需要的平均步数。**

**例2： 例3**

1. **遍历性**

**马尔科夫遍历性：在马尔可夫链中，如果n步转移概率对一切i ,j存在不依赖于i的极限，即，则称马尔科夫链具有遍历性。其中表示在极限时间（平衡状态）系统处于状态j的概率，系统处于状态j的概率。**

**定理：如果其次马尔可夫链的一个状态j是非周期的、正常返的、，则此状态j是遍历的。**

**例4；设马尔科夫链的状态空间为S={1,2,3…}, 转移概率为：**

**研究各状态的分类。**

**例5: 设其次马尔科夫链的状态空间为{1，2，3，4}, 一步转移矩阵为：**

**试研究各状态关系**

**性质6：稳定状态分布**

**如何求解平稳状态分布**

**性质1：一步转移概率矩阵各行和为1**

**性质2：**

**性质3：至少有一个特征值为1**

**问题：系统是否存在平稳分布？若存在如何求解？**

**平稳分布 **

**若中无零元，则存在平稳分布**

**定理:马尔可夫链是遍历的其平稳性分布必定存在、唯一**

**与初始分布无关且保持不变。**

**例： p24**

****

****

**一般的：**

**所以此链不具有稳态，不具有遍历性。**

**例： 是否具有稳态？p25**

**例：由上例存在否？**

**生灭过程**

**生灭过程是一种特殊的马尔科夫链，即每一次状态转移都发生在相邻状态之间，齐状态的变化只可能有三种：加（1）生，减(1)灭和不变， 如图：**

****

**在间隔为的一个充分小的时间内，忽略高阶无穷小后，以表示时刻t系统内某群体的个数，则该群体个数n的状态转移：**

**“生”：从n增加一个，其概率为；**

**“灭”：从n减小一个，其概率为；**

**“不变”：群体个数n保持不变，其概率为；**

**而特性（4）则说明在充分小的时间段内，群体个数的变化大于等于2的情况在概率上可忽略。生灭过程的命名理由即在于此。**

**M/M/1/1 近代解析法**

**在计算机系统，通信系统以及军事作战的系统中，排队现象比较复杂，要想用古典解析法以获得这些系统的瞬时状态概率比较困难。我们以M/M/1/1为例，介绍直接求解稳态特性的近代解析法------生灭过程法或Markov过程。**

1. **把排队过程看作生灭过程**

**设N(t)表示t时刻系统的队长 （总顾客数）。系统容量为1，即单个服务窗无排队，故N(t)只有两个可能（0-服务窗空闲）以及（1—服务窗忙）并系统只能在这两种状态切换，要么从0增加到1，要么从1减少到0。**

**考虑系统到达平衡时，每个状态的流入量等于流出量，有：**

|  |  |
| --- | --- |
| **名称** | **流出=流入** |
| **状态0** |  |
| **状态1** |  |

**为系统处于状态0的概率，系统处于状态1的概率。**

****

**概率归一化，即系统每个状态的概率之和为1**

1. **由生灭过程求概率**

**由上表，将其代入归一化条件，可以求得系统状态分布**

|  |  |
| --- | --- |
| **名称** | **流出=流入** |
| **状态0** |  |
| **状态1** |  |

1. **由状态分布求系统中平均顾客数**

**上表所描述的就是在统计平衡状态下，系统内有0个人的概率与系统内有1个人概率，显然系统中平均顾客数量即为数学期望----均值，有：**

****

**注意到，当系统中已经有一个顾客时，新来的顾客只能离去，因此就是系统的损失率:**

****

**单位时间真正进入系统地顾客速率为：**

****

**单位时间内到达系统但是因为系统内有人而离开的速率为**

****

**显然有**

**求M/M/1/5各个状态的概率？**