Untersuchung von Quantensystemen mit gitterfeldtheoretischen Methoden

Eine Betrachtung von Quark Confinement im Rahmen der SU(2)-Eichsymmetrie

Heinrich v. Campe

17.09.2021

Das Pfadintegral – Erwartungswerte

- Ziel: Berechnung von Erwartungswerten

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathscr{D}[x] O[x] e^{-S[x]}, \; Z = \int \mathscr{D}[x] e^{-S[x]}.$$

- Ansatz: Generierung von $\{x^\alpha\}$ gem.

$$P^{\mathrm{Feyn}}[x]\mathscr{D}[x] = \frac{1}{Z} e^{-S[x]} \mathscr{D}[x]$$

$$\rightarrow \overline{O} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} O[x^\alpha] \xrightarrow{N \to \infty} \langle O \rangle.$$

Markov-Ketten

- Zustand charakterisiert durch x, Übergangswahrscheinlichkeit $W(x, x')$ mit $\int \mathrm{d}x'\, W(x, x') = 1\, \forall x$
- Wahrscheinlichkeit für mehrschrittigen Prozess:

$$W^{(2)}(x, x') = \int \mathrm{d}\tilde{x}\, W(x, \tilde{x}) W(\tilde{x}, x'),$$

Markov-Ketten

- Zustand charakterisiert durch x, Übergangswahrscheinlichkeit $W(x,x')$ mit $\int \mathrm{d}x'\, W(x,x') = 1\, \forall x$
- Wahrscheinlichkeit für mehrschrittigen Prozess:

$$\begin{aligned} W^{(n)}(x,x') &= \int \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_{n-1}\, W(x,x_1) W(x_1,x_2) \ldots W(x_{n-1},x') \\ &= \int \mathrm{d}\tilde{x}\, W^{(n-1)}(x,\tilde{x}) W(\tilde{x},x'). \end{aligned}$$

Gleichgewichtszustand

- Freedman & Creutz [1]: $\lim_{n\to\infty} W^{(n)}(x, x') = P(x')$
- „Eigenvektor":

$$\begin{aligned} P(x') &= \lim_{n+1\to\infty} W^{(n+1)}(x, x') \\ &= \lim_{n\to\infty} \int \mathrm{d}\tilde{x}\, W^{(n)}(x, \tilde{x}) W(\tilde{x}, x') \\ &= \int \mathrm{d}\tilde{x}\, P(\tilde{x}) W(\tilde{x}, x') \end{aligned}$$

Detailed Balance

- Bedingung:

$$\frac{W(x,x')}{W(x',x)} = \frac{P(x')}{P(x)}.$$

- Implikation der Eigenwertgleichung:

$$\int \mathrm{d}x\, P(x) W(x,x') = \int \mathrm{d}x\, P(x) \frac{P(x')}{P(x)} W(x',x) = P(x') \int \mathrm{d}x\, W(x',x).$$

- Anwendung auf P^{Feyn}:

$$\frac{W(x,x')}{W(x',x)} = \frac{e^{-S[x']}}{e^{-S[x]}} =: e^{-\Delta S[x',x]}$$

Metropolis-Algorithmus

- Kern: Übergangswahrscheinlichkeit

$$W(x,x') = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \Delta S < 0, \\ e^{-\Delta S} & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Einhaltung der Detailed Balance: Sei $S[x'] < S[x]$

$$W(x,x') = 1,\ W(x',x) = e^{-(S[x]-S[x'])} \rightarrow \frac{W(x,x')}{W(x',x)} = \frac{e^{-S[x']}}{e^{-S[x]}}.$$

...in der Praxis

- Trajektorie als Array $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$, genannt „Gitter“
- „Sweep“: eine Iteration über alle $x_i \in x$
- ΔS für einzelnes $x_i \mapsto x_i'$ leichter zu berechnen
- wähle x_i' „nah“ an x_i
- mehrere (N_{hit}) Iterationen je Element x_i

Rekapitulierung

1. Ziel: Berechnung von Erwartungswerten $\langle O \rangle$ mit Pfadintegralen
2. Ansatz: Generiere Trajektorien x^α, die nach P^{Feyn} verteilt sind
3. nutze den Metropolis-Algorithmus, hierfür die Wirkung S des betrachteten Systems benötigt

Yang-Mills-Wirkung

- Eichtransformation der Felder $\psi(x) \mapsto \Omega(x)\psi(x),\ \Omega(x) \in \mathrm{SU}(2)$
- kovariante Ableitung $D_\mu(x)\psi(x) \mapsto \Omega(x)D_\mu(x)\psi(x)$ benötigt Eichfeld $A(x)$
- Dynamik beschrieben durch

$$S_{\mathrm{YM}}[A] = \frac{1}{2g^2} \int \mathrm{d}^4x \,\mathrm{tr}\, \left[F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\right],$$

$$F_{\mu\nu}(x) = -i[D_\mu(x), D_\nu(x)] = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + i[A_\mu(x), A_\nu(x)]$$

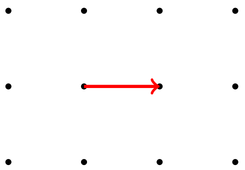
- vereinfachte Darstellung, für Details s. Gattringer & Lang [2]

Paralleltransporte

- betrachteter Raum:

$$\Lambda = \{0, 1, \ldots, L_\mathrm{t} - 1\}/(0 \sim L_\mathrm{t} - 1) \times (\{0, 1, \ldots, L_\mathrm{s} - 1\}/(0 \sim L_\mathrm{s} - 1))^3$$

- definiere Paralleltransporte

$U_\mu(x) =$ 

mit

$$U_\mu(x) \mapsto \Omega(x) U_\mu(x) \Omega(x + a_\mu)^\dagger$$

- dadurch kovariante numerische Ableitung möglich

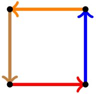
Wilson-Wirkung

- definiere

$$S_{\text{Wilson}} = \frac{\beta}{2} \sum_{x \in \Lambda} \sum_{\mu < \nu} \operatorname{Re} \operatorname{tr} \left[\mathbb{1} - U_{\mu\nu}(x) \right], \beta = \frac{2 N_c}{g^2} = \frac{4}{g^2}$$

- ...mit Plaquette

$$U_{\mu\nu}(x) =$$

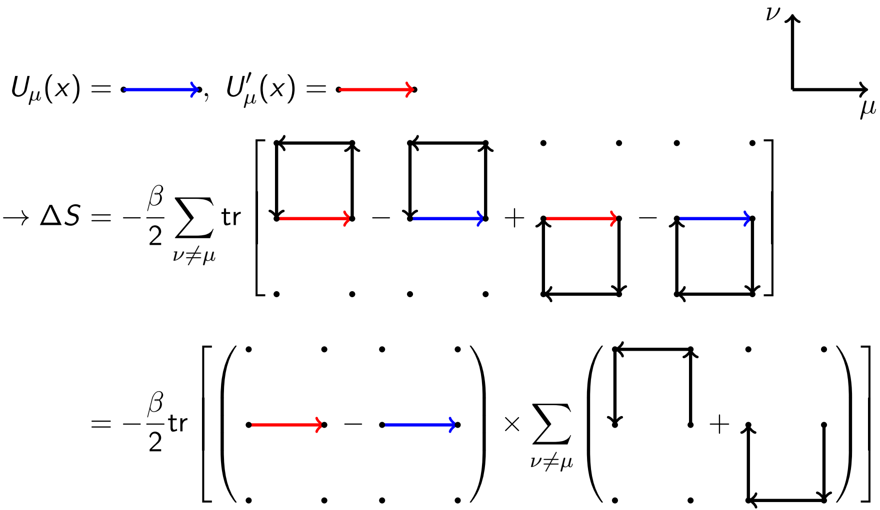


$$= U_\mu(x) U_\nu(x + a_\mu) U_\mu(x + a_\nu)^\dagger U_\nu(x)^\dagger$$

- man findet

$$S_{\text{Wilson}} \xrightarrow{a \to 0} S_{\text{YM}}$$

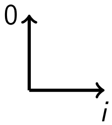
...in der Praxis



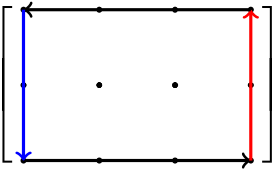
Rekapitulierung

1. Ziel: Berechnung von Erwartungswerten $\langle O \rangle$ mit Pfadintegralen
2. Ansatz: Generiere Trajektorien x^α, die nach P^{Feyn} verteilt sind
3. nutze den Metropolis-Algorithmus, hierfür die Wirkung S des betrachteten Systems benötigt
4. für das SU(2)-Eichfeld auf einem Gitter eignet sich S_{Wilson}.

Wilson-Loops



- Verallgemeinerung der Plaquette

$W(3,2) = \mathrm{tr}$ 

- Erwartungswert (Beweis s. Rothe [4])

$$\langle W(r,t) \rangle \xrightarrow{t \to \infty} A \cdot e^{-tV(r)}.$$

SU(2)-Matrizen

- Eigenschaften von Elementen $U \in SU(2)$:

$$U \in \mathbb{C}^{2\times 2}, U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{1}, \det U = 1$$

- Darstellung nach Urbach & Petschlies [3]:

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \; a, b \in \mathbb{C}, \; |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

- Zufallsgenerierung über Isomorphismus

$$\phi : S^3 \to \mathrm{SU}(2),$$
$$(x^0, \vec{x}) \mapsto x^0 \mathbb{1} + i\vec{x} \cdot \vec{\sigma},$$

$$\to \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\chi)\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\chi)\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \sin(\chi)\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\chi)\cos(\vartheta) \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \chi &\in (0, 2\pi \cdot \delta), \\ \varphi &\in (0, 2\pi), \\ \cos(\vartheta) &\in (-1, 1). \end{aligned}$$

Rekapitulierung

1. Ziel: Berechnung von Erwartungswerten $\langle O \rangle$ mit Pfadintegralen
2. Ansatz: Generiere Trajektorien x^α, die nach P^{Feyn} verteilt sind
3. nutze den Metropolis-Algorithmus, hierfür die Wirkung S des betrachteten Systems benötigt
4. für das SU(2)-Eichfeld auf einem Gitter eignet sich S_{Wilson} (unter Verwendung der Paralleltransporte $U_\mu(x)$).
5. Untersuchung des statischen Potentials mit Wilson-Loops als Observable:

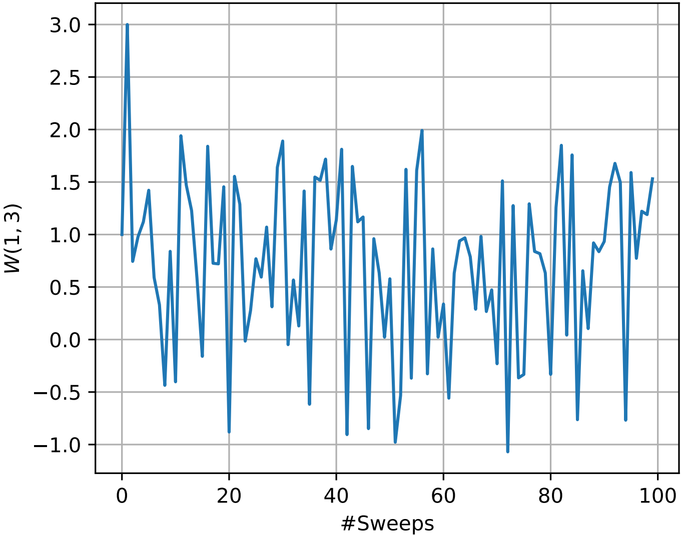
$$\langle W(r,t) \rangle \xrightarrow{t\to\infty} A \cdot e^{-tV(r)}.$$

Exemplarische main-Funktion

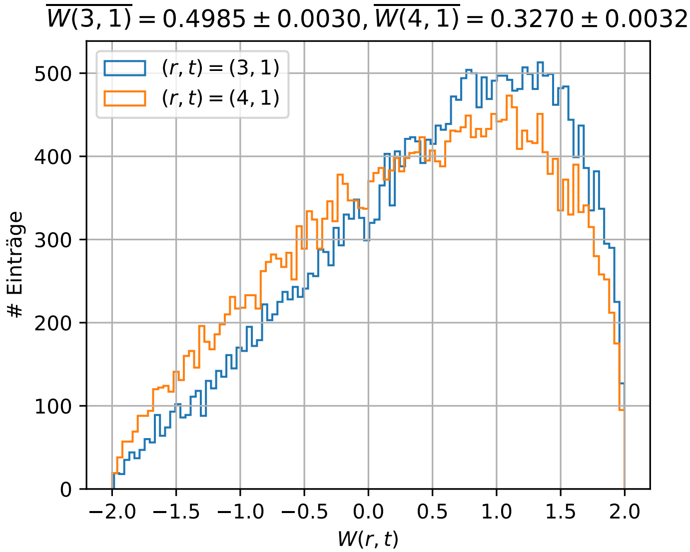
```
int main() {
  ...
  for (std::size_t i=0; i < 1000; i++) {
    sweep(U, beta, delta, iterationsPerSight, engine);
  }
  ...
  for (std::size_t i=0; i < 20000; i++) {
    results.push_back(getSqrt2Loop(U, 2));

    for (size_t j = 0; j < 5; j++) {
        sweep(U, beta, delta, iterationsPerSight, engine);
      }
  }
  ...
  return 0;
}
```

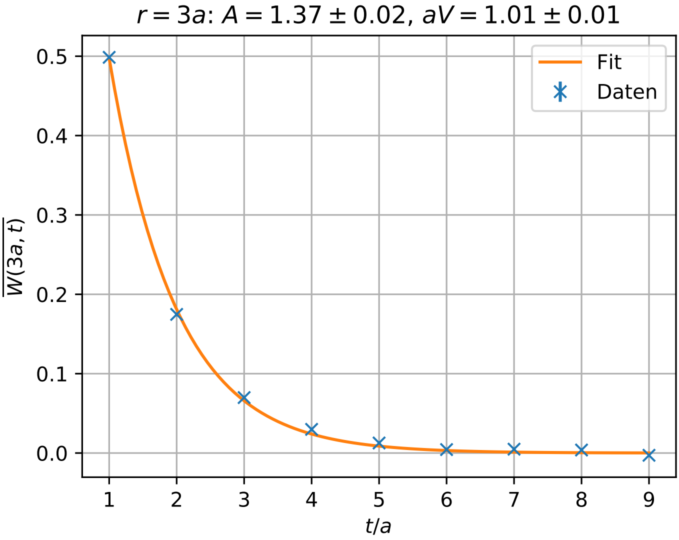
Einzelne Messungen



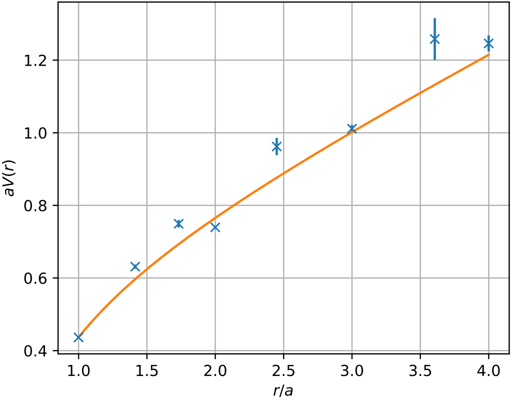
Verteilung der Messwerte



Extrahierung des statischen Potentials (i)



Extrahierung des statischen Potentials (ii)



Modell:

$$aV(r) = -\frac{A}{r} + B + \sigma \cdot r$$

Ergebnis:

$$A = (0.277 \pm 0.024)a$$

$$B = (0.524 \pm 0.034)$$

$$\sigma = (0.189 \pm 0.010)\frac{1}{a}$$

Was gibt es als Nächstes zu tun?

- Fehlerbetrachtung verbessern
- wirklich der Grundzustand? $\rightarrow$ größere Gitter vermessen, effektive Masse betrachten
- SU(3) untersuchen

Literatur

- M Creutz und B Freedman. „A statistical approach to quantum mechanics“. In: *Annals of Physics* 132.2 (1981), S. 427–462.
- Christof Gattringer und Christian Lang. *Quantum chromodynamics on the lattice: an introductory presentation*. Bd. 788. Lecture Notes in Physics. Springer Science & Business Media, 2009. Kap. 2, 3.
- M Petschlies und C Urbach. *Computational Physics*. 2020.
- Heinz J Rothe. *Lattice gauge theories: an introduction*. Bd. 74. World Scientific Publishing Company, 2005. Kap. 7.