ME710

Alocação de portfólio em presença de outliers

Relatório Final - Técnico

Henrique Capatto RA:146406

Orientador: Mauricio Enrique Zevallos Herencia

Campinas, 24 de Novembro de 2017

1 Introdução

As consequências da crises econômicas têm sido alarmantes durantes os dois ultimos séculos, influenciando a vida de milhões de pessoas, gerando desemprego, fome, depressão e até guerra. Estima-se que na grande depressão (crise econômica de 1929) o nível de desemprego nos Estados Unidos da América ficou em torno de 25% da população e em outros lugares, chegou a 33% [7]. No Brasil ocorreu a queima de sacas de café, principal produto de exportação do país na época, devido a baixa nos preços deste produto no mercado internacional.

Dada esta contextualização histórica, percebe-se que muitas situações são imprevisíveis e que, para um investidor, este problema pode acarretar em uma perda monetária e, em casos extremos, até a falência. Logo, um método de investimento que leva em consideração esses riscos pode ser interessante como forma para proteção contra as vulnerabilidades que o mercado de ações oferece.

Neste relatório terá as seguntes partes: Objetivo, Metodologia, Resultados, Conclusão, Apêndice, onde se encontram as tabelas e gráficos referidos no texto, e Referências Bibliográficas.

2 Objetivo

O objetivo deste relatório final é ajustar os pesos, serão definidos posteriormente, que compoem um portfólio de ações e analisar quais ações trazem maiores lucros, no resto do relatório será definida e utilizada a terminologia retorno. Além disso, vamos analisar duas maneiras diferentes de se estimar a matriz de covariâncias, uma utilizando a matriz amostral e outra utilizando uma metodologia proposta por Ledoit e Wolf (2003) [ref]. Vamos otimizar dois portfólios com as dois métodos citados anteriormente para estimação da matriz de covariância, valendo-se do índice de Sharpe para indicar qual o melhor o portfólio e verificar qual delas traz um retorno maior sobre o risco tomado.

Junto a isto vamos testar alguns modelos de séries temporais a fim de comparação entre eles.

3 Metodologia

Desde o trabalho seminal de Markowitz (1952), a Teoria Moderna de Portfólio tem sido a maneira mais utilizada de se escolher ações para investimento. Os dois preceitos fundamentais são: o retorno esperado para cada ação, que representa ao gerente de portfólio capacidade de previsão de futuros movimentos de preços e a matriz de covariância do retorno de ações,configurando o controle de risco.

O modelo proposto pelo autor proporciona ao investidor uma alocação otimizada de recursos entre ações visando um equilíbrio entre risco e retorno. Essa construção teórica formaliza o princípio de que as únicas variáveis de decisão para a seleção de um ativo são o valor esperado e a variância das taxas de retorno no espaço de tempo considerado[4].

Um problema que ocorre é quando há uma observação discrepante no histórico de retorno, como Pode ser observado na Figura XX e assim a matriz de covariância amostral é estimada com erros, decorrendo que estes são superestimados, implicando em um mal ajuste na otimização da distribuição dos pesos de cada ação dentro do portfólio, gerando resultados desinteressantes ao acionista.

Para contornar o problema acima foi proposto um método, por Ledoit e Wolf(2004), para estimação da matriz de covariância do retornos que pode substituir a matriz de covariância amostral em qualquer aplicação do modelo de média-variância de Markovitz. Esse método é referido como “encolhimento” dos extremos para o centro.[2]

3.1 Modelo

O preço do i-ésimo investimento no tempo t é descrito como $P_{i,j}$ e o log-retorno do investimento i, no tempo t é definido como: $r_{i,t} = log(P_{i,t}) - log(P_{i,t-1})$

Para trabalhos envolvendo séries financeiras, é preferível a utilização da variável retorno ao invés do preço pois os retornos possuem características mais interessantes, como a estacionaridade e a presença de agrupamentos de volatilidade ao longo do tempo. Uma das principais características da volatilidade é o comportamento heterocedástico.

A série de retornos pode ser escritas como:

$r_t = \mu_t + \sqrt{h_t}\varepsilon_t$, com $\varepsilon_t \overset{i.i.d}{\sim} N(0,1)$, e a volatilidade é definida como: $h_t = E_{t-1}((r_t - \mu_t)^2)$,onde $\mu_t = E(r_t|F_{t-1}) = E_{t-1}(r_t)$ é o valor esperado condicionado a informação até o tempo $t-1$.

3.2 Construção de portfólios

Segundo o modelo proposto por Markovitz(1952) proporciona ao investidor uma alocação otimilizada de recursos entre ações visando um equilibrio entre risco e retorno. Essa construção teórica formaliza a princípio que as únicas variáveis de decisão para a seleção de um ativo são o valor esperado e a variância das taxas de retorno no espaço de tempo considerado[4].

Seja uma carteira de investimentos P composta de n ativos e os retornos relativos a ela sejam respectivamente $r_1, r_2, \ldots, r_n$ e os retornos esperados $R_1, R_2, \ldots, R_n$ e a matriz covariância Σ. É investido uma proporção ω_i na ação com retorno R_i, onde cada ω_i é chamado de peso ótimo tal que: $P = \sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i$, $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$.

Seja $\omega' = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, $R' = (R_1, R_2, \ldots, R_n)$, $r' = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ e $\Sigma = Cov(R)$. A média e variância do retorno P, denotadas respectivamente por μ e Σ são dadas por: $\mu = \sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i$ e $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \omega_i Cov(R_i, R_j) = \omega' \Sigma \omega$.

Há duas otimizações dentre as mais conhecidas para abordagem do problema em questão, as quais são:

1. Maximizar μ com um limitante superior para σ: $\sigma^2 < q$
2. Minimizar σ^2 com um valor objetivo para μ

3.3 Método de encolhimento da matriz de covariância

Como a otimização de portfólio depende da estimação da matriz de covariâncias e sabe-se que em casos onde se apresentam outliers, a matriz de covariâncias amostral não é bem estimada. Para exemplicar este caso, vamos utilizar as açoes de APPL, onde vemos no gráfico 1 que há um retorno que se destaca negativamente, nos anos entre 2014 e 2015, seu valor é de -1,93. Calculando o desvio padrão com esse observação vemos que este tem um valor de 0,04 e este valor sem a observação mais negativa e um possível outlier é de 0,02. Portanto, sem aquele outlier vemos que há uma redução no cálculo do desvio padrão de 0,4220782%. Logo, uma técnica que consiga se comportar melhor em relação a esses comportamento de outliers

Uma resolução deste problema consiste na utilização da seguinte fórmula de estimação da matriz de covariância "encolhida", que foi proposta por Ledoit e Wolf(2004) : $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{\mathbf{shrink}} = \delta^{*}\mathbf{F} + (1-\delta^{*})\mathbf{S}$, onde δ^{*} é uma constante de encolhimento. Esta constante é estimada e para maiores detalhes sobre a obtenção teórica deste estimador pode ser encontrada na referência(2004).

3.4 Índice de Sharpe

Para avaliação do desempenho da otimização do portfólio, utiliza-se o índice de Sharpe, calculado como: $I_s = \frac{(R_i - Rf)}{\sigma_i}$, onde R_i é o Retorno do Ativo, Rf é retorno livre de risco e σ_i é o Risco do Ativo. Sua interpretação é dada por:para cada 1 ponto de risco que o investidor teve no passado houve um prêmio de I_s pontos de rentabilidade acima daquela que ele receberia se tivesse optado por um investimento livre de risco. O retorno livre de risco considerado nas análises será de 0%.

3.5 Fronteira Eficiente

A fronteira eficiente descreve o relacionamento entre o retorno que pode ser esperado de uma carteira e da volatilidade da carteira. Pode ser extraída na forma de uma curva em um gráfico do risco de encontro a retorno previsto de uma carteira. A fronteira eficiente dá o melhor retorno que pode ser esperado para um dado nível de risco ou o mais baixo nível de risco necessário conseguir uma taxa de retorno prevista dada.

4 Resultados

Vamos estimar os pesos ótimos de dois portfólios: um deles, utilizando a matriz de covariância amostral e outro, com a matriz de covariância encolhida. Vamos compará-los atráves do índice de Sharpe e observando a Fronteira Eficiente, analisaremos qual deles traz maior retorno com o menor risco. O tipo de portfólio que ajustamos é o de mínima variância. Vale ressalatar que admitimos pesos negativos no ajuste dos portfólios.

Podemos interpretar o peso de ativo num portfólio como sendo a porcentagem que este detém dentro do conjunto de ações. Vemos na Tabela 1, que as estimativas dos pesos de um portfóio ajustado utilizando a matriz de covariância amostral tem valores espúrios pois algum pesos estão fora do intervalo (0,100%), que é o esperado para um portfófio bem ajustado. O mesmo caso não ocorre com o portfólio ajustado utilizando a matriz de convariâncias encolhida, onde observamos na Tabela 1 que os pesos estão contidos no referido intervalo. Podemos interpretar os pesos como sendo a porcentagem em que cada ação deve compor o portfólio, ou seja, quando positiva, deve-se comprar mais daquele ativo e quando negativo, deve-se negociar a ação.

5 Conclusão

6 Apêndice

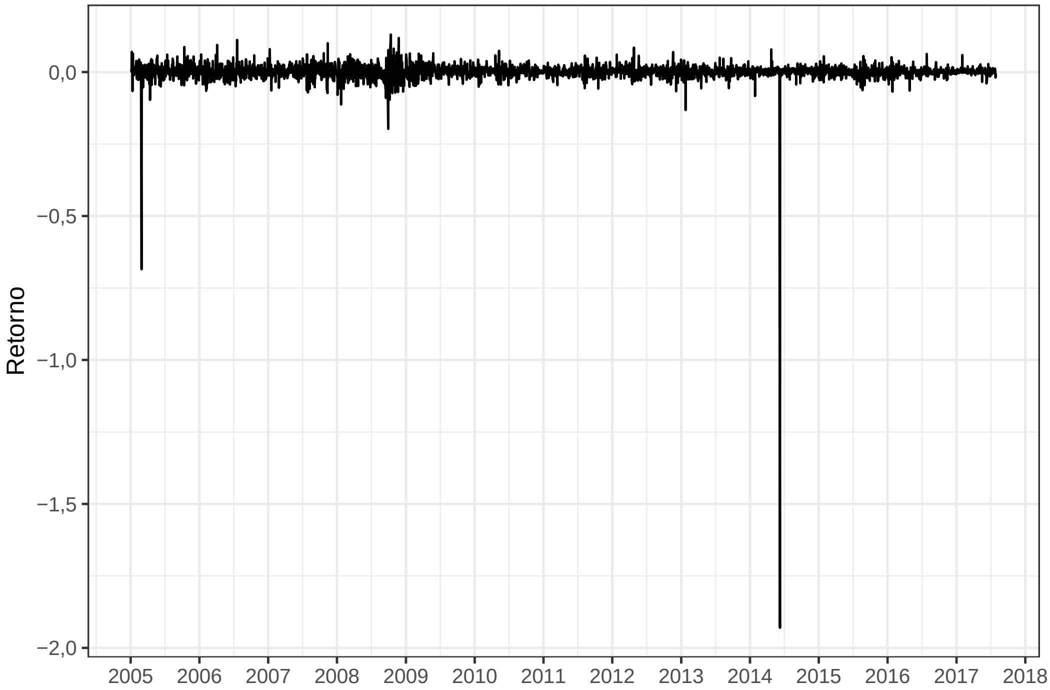

Figura 1: Retorno diário para as ação APPL

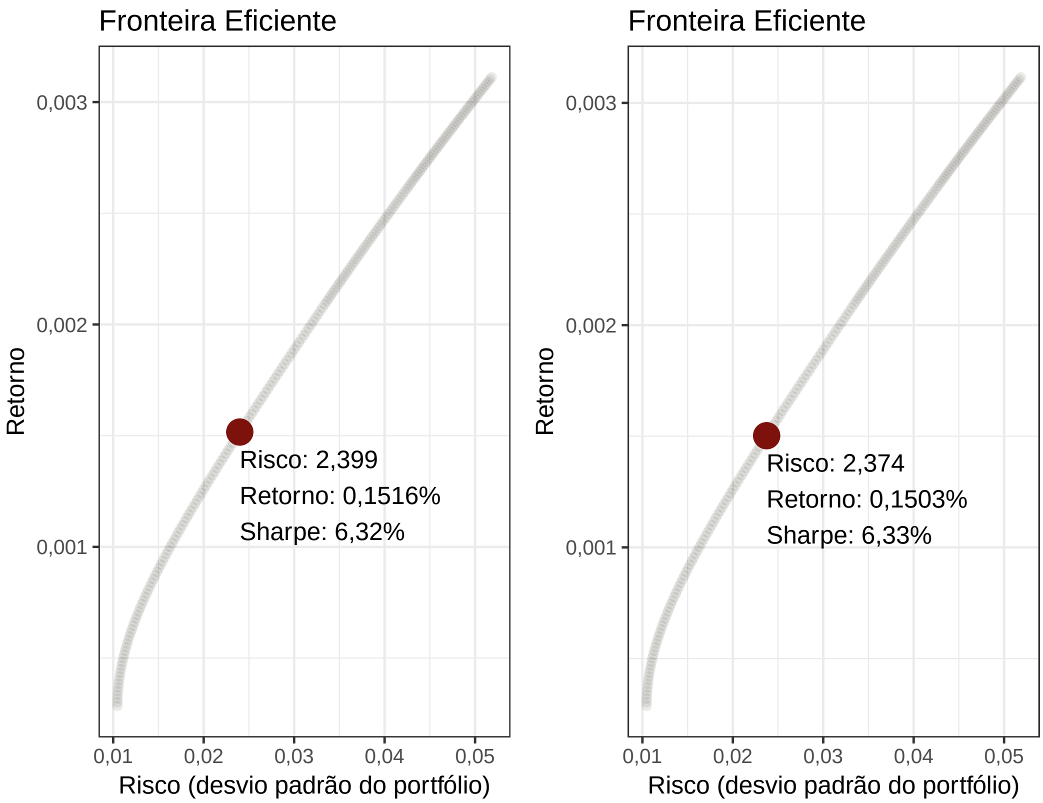

Figura 2: Fronteira Eficiente para os portfólis estimados: à esquerda, temos o otimizados usando a matriz de covariâncias amosrtal e à esquerda, temos o otimizados usando a matriz de covariâncias amosrtal

Tabela 1: Tabelas com os pesos ajustados do portfólio otimizado onde na primeira tabela estão os resultantes do ajuste com a matriz de covariância amostral e na segunda, com a matriz de covariância

Tabela 1:

940%	290%	-770%	100%	-1%
-390%	550%	-4%	1%	510%
40%	-120%	250%	-560%	-370%
-240%	2%	820%	-70%	840%
170%	220%	-290%	-350%	240%
820%	800%	-1%	-290%	-160%

Tabela 2:

44.1%	-29.8%	5.8%	-14.1%	-14.0%
-22.2%	8.4%	-1.7%	31.2%	-10.4%
5.3%	20.0%	-10.6%	3.2%	11.3%
1.4%	25.5%	2.3%	-55.3%	12.1%
26.1%	1.2%	-11.8%	-1.6%	19.5%
29.1%	34.7%	-10.0%	24.6%	-24.1%

encolhida

7 Referências

[1] Markowitz, H.M. (Março 1952). “Portfolio Selection”. The Journal of Finance. pags: 77–91

[2] Wolf M,Ledoit O.“Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix”. Journal of Portfolio Management, Volume 31, Number 1, Fall 2004

[3] Pedro A. Morettin , Econometria Financeira – Um curso em séries temporais financeiras. Editora Blucher 2008.

[4] Oswaldo Luiz do Valle Costa e Hugo Gonçalves Viera de Assunção , Análise de Risco e Retorno em Investimentos Financeiros. Editora manole 2005.

[5] https://cran.r-project.org/index.html

[6] https://www.rstudio.com/products/rstudio/download/

[7] Frank, Robert H.; Bernanke, Ben S. (2007). Principles of Macroeconomics (3rd ed.). Boston:

McGraw-Hill/Irwin

Henrique Capatto | Data

Mauricio Enrique Zevallos Herencia | Data