Fundamentos de Matemática Financeira

Uma abordagem interativa em Clojure

Henrique Carvalho Alves

March 1, 2021

Contents

1 Introdução

O objetivo do livro é construir uma intuição de como derivar fórmulas para cálculos de juros, fluxos de caixa e sistemas de amortização a partir de relações básicas, ao mesmo tempo em que demonstra como implementar em uma linguagem de programação.

Este livro acompanha código-fonte na linguagem `clojure`, que serve de suporte para as demonstrações e implementa as funções básicas de matemática financeira. Todas as fórmulas incluídas no livro são geradas a partir da definição canônica destas funções, e renderizadas em LaTeX utilizando a biblioteca `sicmutils`. O código-fonte do próprio livro está disponível em formato `org-mode` para `emacs`, e pode ser explorado de forma interativa seguindo as instruções de instalação.

2 Juros

2.1 Fundamentos

Dado o capital (ou valor presente) PV, a taxa de juros (%) i, o juro I e o montante (ou valor futuro) FV, as relações fundamentais são:

$$\begin{aligned} I &= PV\, i \\ FV &= PV\ (1 + i) \\ PV &= \frac{FV}{1 + i} \\ i &= \left(\frac{FV}{PV}\right) - 1 \end{aligned}$$

Exemplo:

Um capital de \$ 1000 aplicado durante um ano a uma taxa de 22% ao ano.

1. O juro é dado por:

   ```
   (* 1000 0.22M)
   ```

   ```
   220.00M
   ```

2. O montante ao fim do período é dado por:

   ```
   (* 1000 1.22M)
   ```

```
1220.0M
```

3. O capital que deve aplicar-se para obter \$ 1220 à mesma taxa é:

   ```
   (/ 1220 1.22M)
   ```

   ```
   1.0E+3M
   ```

4. E a taxa de juros pode ser inferida por:

   ```
   (- (/ 1220 1000) 1M)
   ```

   ```
   0.22M
   ```

Neste exemplo, o período da taxa i e o período de aplicação foi o mesmo. Quando aplicamos a taxa ao capital mais de uma vez, é preciso adotar um dos **regimes de capitalização**.

2.2 Juros simples

É o regime de capitalização em que aplica-se a taxa i a um mesmo capital PV, por n períodos, para obter o montante FV:

$$\begin{aligned} FV &= PV + PV\,i + PV\,i + PV\,i + \ldots \\ &= PV\ (1 + i\,n) \\ I &= PV\,i\,n \end{aligned}$$

Por analogia, faz-se a operação inversa para descontar a taxa i do montante FV e obter o capital PV:

$$PV = \frac{FV}{1 + i\,n}$$

Portanto, o **fator de capitalização** para juros simples é a função linear:

$$f\,(n) = 1 + i\,n$$

Exemplo:

Um capital de \$ 1000 aplicado a uma taxa de 8% ao mês segue a progressão:

$$FV = 1000 + 80.00 + 80.00 + 80.00 + \ldots$$

Portanto, o montante ao fim de 3 meses equivale a:

```
(* 1000 ((simple 0.08M) 3))
```

```
1240.0M
```

E o capital que equivale a este montante (ou ainda, o valor futuro trazido a valor presente) na mesma taxa é:

```
(/ 1240 ((simple 0.08M) 3))
```

```
1.0E+3M
```

2.3 Juros compostos

É o regime de capitalização em que aplica-se a taxa i sobre o capital PV para obter o primeiro montante, e a mesma taxa i sobre *este* montante, e assim por diante, um n número de vezes, até obter o montante final FV:

$$\begin{aligned} FV &= PV + PV\,i + \left(PV\,i^2 + PV\,i\right) + \left(PV\,i^3 + 2\,PV\,i^2 + PV\,i\right) + \dots \\ &= PV\,(1+i)^n \\ I &= PV\,(i+1)^n - PV \end{aligned}$$

Por analogia, faz-se a operação inversa para descontar a taxa i do montante FV e obter o capital PV:

$$PV = \frac{FV}{(1+i)^n}$$

Portanto, diferente dos juros simples, o **fator de capitalização** para juros compostos é a função *não-linear*:

$$f\,(n) = (1+i)^n$$

Exemplo:

Um capital de \$ 1000 aplicado a uma taxa de 8% ao mês segue a progressão:

$$FV = 1000 + 80.00 + 86.400 + 93.300 + \dots$$

Portanto, o montante ao fim de 3 meses equivale a:

```
(* 1000 ((compound 0.08M) 3))
```

```
1259.7M
```

E o capital que equivale a este montante (ou ainda, o valor futuro trazido a valor presente) na mesma taxa é:

```
(/ 1259.7M ((compound 0.08M) 3))
```

```
1E+3M
```

2.4 Fator de capitalização

Para aplicações que duram n períodos, podemos generalizar as equações para um **fator de capitalização** qualquer f em função de n, obtendo:

$$
\begin{aligned}
I\,(n) &= PV\,f\,(n) - PV \\
FV\,(n) &= PV\,f\,(n) \\
PV\,(n) &= \frac{FV}{f\,(n)}
\end{aligned}
$$

Exemplo:

Uma capital de \$ 1000 é aplicado a uma taxa progressiva de 2%, 4%, 6%, 8%, ... ao ano, conforme o tempo em que permanece aplicado.

Qual será o montante para cada ano aplicado, durante os 5 primeiros anos?

O fator de capitalização para essa taxa progressiva é dado por:

$$
\begin{aligned}
i &= 0.02 \\
f\,(n) &= 1 + i\,n^2
\end{aligned}
$$

Portanto:

```
(let [f (fn [n] (+ 1 (* 0.02M (expt n 2))))]
  (mapv #(fv f % 1000) (range 1 6)))
```

```
[1020.0M 1080.0M 1180.0M 1320.0M 1500.0M]
```

2.4.1 Frequência de capitalização

Quando a aplicação dura n períodos, a **frequência de capitalização** dita quantas vezes o montante será reaplicado durante o prazo.

Exemplo:

Assumindo uma taxa i de 100% ao ano, analisamos o fator de capitalização com aplicações anuais, mensais e diárias.

1. No caso do regime de juros simples, não há diferença entre frequências de capitalização diferentes.

   ```
   ((simple 1) 1.0)
   ((simple (/ 1 12)) 12.0)
   ((simple (/ 1 360)) 360.0)
   ((simple (/ 1 365)) 365.0)
   ```

   2.0
   2.0
   2.0
   2.0

2. No caso do regime de juros compostos, uma maior frequência de capitalização representa um rendimento maior:

   ```
   ((compound 1) 1)
   ((compound (/ 1 12)) 12.0)
   ((compound (/ 1 360)) 360.0)
   ((compound (/ 1 365)) 365.0)
   ```

   2
   2.6130352902246696
   2.7145160248748965
   2.714567482021534

   É possível observar que conforme aumenta a frequência de capitalização, aproximamos a função exponencial:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} f(n) &= (1+i/n)^n \\ &= e^{n(i/n)} \\ &= e^i\end{aligned}$$

```
((compound (/ 1 365)) 365.0)
(exp 1)
```

2.714567482021534
2.718281828459045

2.4.2 Taxa efetiva

Quando generalizamos o **fator de capitalização**, a fórmula para inferir a taxa i (apresentada anteriormente), agora nos dá a chamada **taxa efetiva**:

$$i_e = \left(\frac{FV}{PV}\right) - 1$$

Exemplo:

Um capital de \$ 1000 foi aplicado durante 12 meses a uma taxa nominal de 12% ao ano a juros compostos.

Qual foi a taxa efetiva neste ano?

```
(rate ((compound (/ 0.12M 12)) 12))
```

```
0.1268M
```

2.4.3 Taxa equivalente

São equivalentes as taxas nominais i_1 e i_2 quando, aplicadas nos períodos n_1 e n_2 relativos a duração das respectivas taxas, resultam no mesmo valor:

$$\begin{aligned} FV &= PV\, f_{i1}(n_1) \\ &= PV\, f_{i2}(n_2) \\ f_{i1}(n_1) &= f_{i2}(n_2) \end{aligned}$$

Exemplo:

Qual a taxa mensal equivalente a 21% ao ano:

1. A juros simples?

   ```
   (* 0.21M 1/12)
   ```

   ```
   0.017500M
   ```

Prova:

$$\left(1 + i_1 \frac{1}{12}\right) - 1 = (1 + i_2\, 12) - 1$$

```
(rate ((simple 0.017500M) 12))
```

```
0.2100M
```

2. A juros compostos?

```
(- (expt (+ 1 0.21M) 1/12) 1)
```

```
0.016011867773387367
```

Prova:

$$(1 + i_1)^{\frac{1}{12}} - 1 = (1 + i_2)^{12} - 1$$

```
(rate ((compound 0.01602M) 12))
```

```
0.2100M
```

2.5 Taxas variáveis

Quando a taxa de juros varia ao longo do tempo, podemos generalizar o **fator de capitalização** para um vetor de taxas i indexado pelo período n:

$$\begin{aligned} i &= \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{bmatrix} \\ f(n) &= (1 + i_1)\,(1 + i_2)\,(1 + i_3)\,(1 + \dots)\,(1 + i_n) \end{aligned}$$

Substituindo f nas relações fundamentais, temos:

$$\begin{aligned} FV &= PV\,(1 + i_1)\,(1 + i_2)\,(1 + i_3)\,(1 + \dots)\,(1 + i_n) \\ PV &= \frac{FV}{(1 + i_1)\,(1 + i_2)\,(1 + i_3)\,(1 + \dots)\,(1 + i_n)} \\ I &= PV\,((1 + i_1)\,(1 + i_2)\,(1 + i_3)\,(1 + \dots)\,(1 + i_n) - 1) \end{aligned}$$

Exemplo:

Em três meses consecutivos, uma aplicação de $ 16000 rendeu 1.3%, 1.7% e 2.1%.

Dada a função `compound-index` que retorna o produto das taxas:

```
((compound-index ['i_1 'i_2 'i_3]) 'n)
```

$(1 + i_1)\ (1 + i_2)\ (1 + i_3)$

1. Qual o valor do rendimento?

   ```
   (let [i (compound-index [0.013M 0.017M 0.021M])]
     (interest i 3 16000))
   ```

   ```
   828.80M
   ```

2. Qual a taxa efetiva no trimestre?

   ```
   (let [c 16000
         i (compound-index [0.013M 0.017M 0.021M])]
     (rate (fv i 3 c) c))
   ```

   ```
   0.0518M
   ```

2.6 Taxas corrigidas

Quando precisamos corrigir uma taxa i por outra taxa j indexada pelo período n, podemos calcular o produto:

$$j = \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_n \end{bmatrix}$$
$$I = (1 + i\, j_1)\ (1 + i\, j_2)\ (1 + i\, j_3)\ (1 + i\ \dots)\ (1 + i\, j_n)$$

Ou ainda, generalizando para i indexado por n, temos:

$$i = \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \end{bmatrix}$$
$$I = (1 + i_1\, j_1)\ (1 + i_2\, j_2)\ (1 + i_3\, j_3)\ (1 + \dots\ \dots)\ (1 + i_n\, j_n)$$

Exemplo:

Em três semestres consecutivos, uma aplicação rendeu 1%, 2% e 5%. Sabendo que o imposto de renda segue alíquotas semestrais progressivas de 22.5%, 20% e 17.5%, qual foi a taxa de rendimento líquido?

Primeiro, calculamos a taxa real de rendimento de cada mês, considerando o imposto de renda:

```
(let [interest [0.01M 0.02M 0.05M]
      ;; Recolher a alíquota equivale a render (1 - alíquota)
      tax [(- 1 0.225M) (- 1 0.20M) (- 1 0.175M)]]
  (mapv * interest tax))
```

```
[0.00775M 0.0160M 0.04125M]
```

Então, calculamos a taxa efetiva nos três semestres:

```
(let [i (compound-index [0.00775M 0.0160M 0.04125M])]
  (rate (i 3)))
```

```
0.0661M
```

Provando pela definição:

```
(let [interest ['i_1 'i_2 'i_3]
      tax [(- 1 't_1) (- 1 't_2) (- 1 't_3)]
      i (compound-index (mapv * interest tax))]
  (align (eq 'i_e (rate (i 'n)))))
```

$$i_e = (1 + i_1\ (1 - t_1))\ (1 + i_2\ (1 - t_2))\ (1 + i_3\ (1 - t_3)) - 1$$

3 Capitais

3.1 Fluxo de caixa

Denomina-se **fluxo de caixa**, de forma genérica, o conjunto de entradas e saídas de capitais de uma operação ao longo do tempo.

É útil representá-lo graficamente com o **diagrama de fluxo de caixa**, onde o eixo horizontal representa a dimensão do tempo, as setas para cima as entradas de capital, e as setas para baixo as saídas de capital.

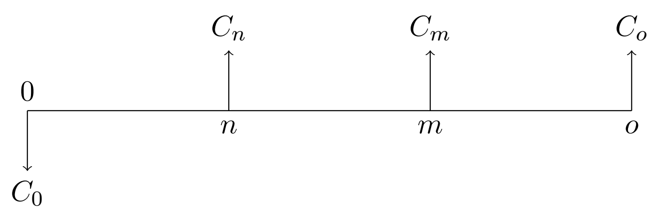
Exemplo:

$CF_1 = PV_0$

$CF_2 = -FV_n$

$CF_3 = CF_1 + CF_2 = PV_0 - FV_n$

$CF_4 = -C_0 + C_n + C_m + C_o$



3.1.1 Capitais equivalentes

Considere os capitais C_0 e C_n disponíveis no momento 0 e n, respectivamente:

Pelas definições anteriores de valor futuro e valor presente, serão equivalentes os capitais C_0 e C_n quando, pela taxa i...

1. a juros simples:

$$
\begin{aligned}
C_n &= C_0 \ (1 + i\,n) \\
C_0 &= \frac{C_n}{1 + i\,n}
\end{aligned}
$$

2. a juros compostos:

$$
\begin{aligned}
C_n &= C_0 \,(1 + i)^n \\
C_0 &= \frac{C_n}{(1 + i)^n}
\end{aligned}
$$

3. variável:

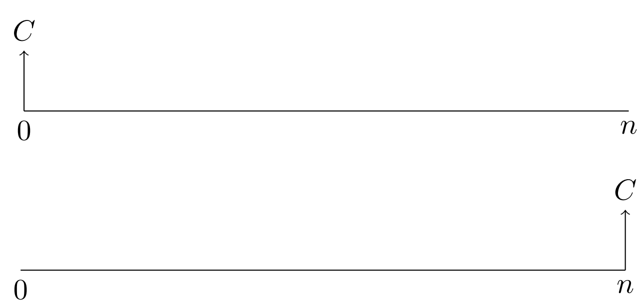
$$
\begin{aligned}
i &= \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{bmatrix} \\
C_n &= C_0 \ (1 + i_1) \ (1 + i_2) \ (1 + \ldots) \ (1 + i_n) \\
C_0 &= \frac{C_n}{(1 + i_1) \ (1 + i_2) \ (1 + \ldots) \ (1 + i_n)}
\end{aligned}
$$

Ou de forma geral, para qualquer fator de capitalização f:

$$
\begin{aligned}
C_n &= C_0 \, f\,(n) \\
C_0 &= \frac{C_n}{f\,(n)}
\end{aligned}
$$

1. Valor do capital no tempo

   Por analogia, se considerarmos o mesmo capital C em dois fluxos de caixa distintos...



... e algum fator de capitalização f positivo, então pela definição anterior de **equivalência de capitais**, obviamente valem as desigualdades:

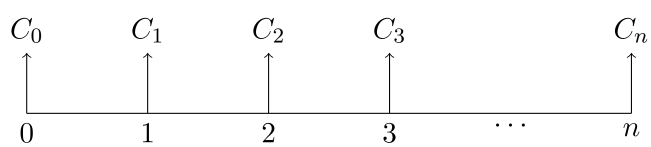
$$\begin{aligned} f(n) &> 0 \\ C &< C\,f(n) \\ C &> \frac{C}{f(n)} \end{aligned}$$

Ou seja, um capital de \$ 1000 hoje vale mais do que \$ 1000 no futuro devido ao seu potencial de rendimento a uma taxa apropriada. Da mesma forma, o adiantamento de um capital de \$ 1000 que a princípio seria pago no futuro deve ser descontado a uma taxa apropriada.

Esse conceito fundamental recebe o nome **valor do capital no tempo**.

3.1.2 Capitais equivalentes em sequência

Dada uma operação com o seguinte fluxo de caixa:

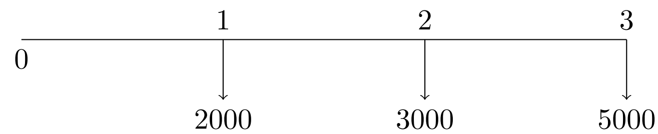


Então, pela definição de equivalência de capitais, podemos generalizar as equações de valor presente PV e valor futuro FV para este fluxo de caixa através de:

$$\begin{aligned} PV &= \left(\frac{C_0}{f(0)}\right) + \left(\frac{C_1}{f(1)}\right) + \left(\frac{C_2}{f(2)}\right) + \left(\frac{C_3}{f(3)}\right) + \ldots \\ &= \sum_{x \doteq 0}^{n} \left(\frac{C_x}{f(x)}\right) \\ FV &= C_0\,f(0) + C_1\,f(1) + C_2\,f(2) + C_3\,f(3) + \ldots \\ &= \sum_{x \doteq 0}^{n} \left(C_x\,f(x)\right) \end{aligned}$$

Exemplo:

Uma operação prevê o pagamento de \$ 2000, \$ 3000 e \$ 5000 em três meses consecutivos:



Qual o menor capital que, aplicado a uma taxa de 1.5% ao mês, faz frente a estes pagamentos?

```
(let [f (compound 0.015M)
      cf [2000 3000 5000]]
  (reduce + (map-indexed #(pv f (+ %1 1) %2) cf)))
```

```
9664.0M
```

Prova:

- No primeiro mês de aplicação, obtemos o montante:

  ```
  (fv (compound 0.015M) 1 9664M)
  ```

  ```
  9809.0M
  ```

- Se retiramos \$ 2000 e aplicamos o restante por mais um mês, obtemos:

  ```
  (fv (compound 0.015M) 1 (+ 9809M -2000M))
  ```

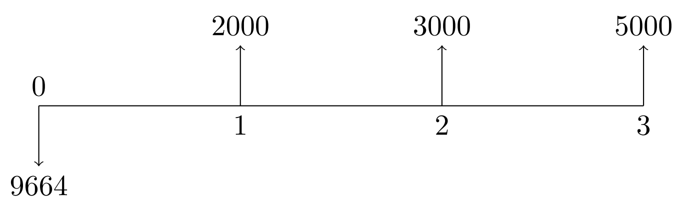
  ```
  7926.1M
  ```

- Se retiramos mais \$ 3000 e aplicamos o restante por mais um mês, obtemos:

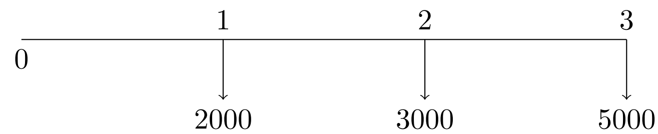
  ```
  (fv (compound 0.015M) 1 (+ 7926.1M -3000M))
  ```

  ```
  5000.0M
  ```

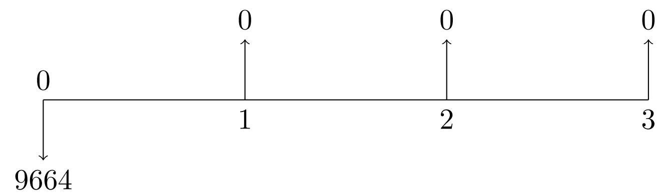
Obtendo então o seguinte fluxo de caixa da aplicação:



Que se somado ao fluxo de caixa dos pagamentos:



Equivale ao fluxo de caixa líquido:



3.1.3 Valor presente líquido

Dada uma operação com o seguinte fluxo de caixa:

Podemos analisar a rentabilidade (ou valor presente líquido) NPV dessa operação calculando:

$$NPV = \left(\frac{C_n}{f\,(n)}\right) - C_0$$

- Se $NPV > 0$, a operação é rentável;
- Se $NPV \leq 0$, a operação não é rentável;

4 Sistemas de Amortização

Amortização é o processo de pagamento de uma dívida em pagamentos periódicos programados, de modo que ao fim do prazo tenha-se reembolsado o capital, o juro, ou ambos. Denomina-se por **sistema de amortização** um programa de pagamentos em particular.

4.1 Sistema de Amortização Constante

É o sistema onde cada pagamento reembolsa uma fração igual do capital, mais o juro sobre o saldo devedor no período.

Ou seja, a amortização A segue a seguinte progressão:

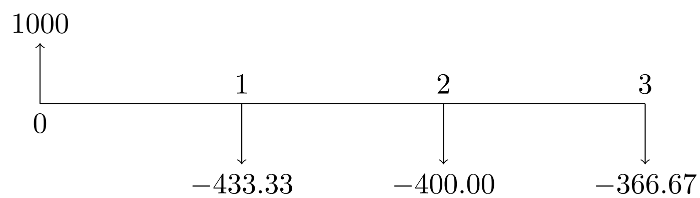
$$A = 0 + \left(\frac{-PV}{n}\right) + \left(\frac{-PV}{n}\right) + \left(\frac{-PV}{n}\right) + \ldots$$

E o fluxo de caixa CF segue a progressão:

$$CF = PV + \left(\frac{-PV\,i\,n - PV}{n}\right) + \left(\frac{-PV\,i\,n + PV\,i - PV}{n}\right) + \left(\frac{-PV\,i\,n + 2\,PV\,i - PV}{n}\right) + \ldots$$

Exemplo:

Para um desembolso de \$ 1000 a uma taxa de 10% ao mês reembolsado em 3 pagamentos, o fluxo de caixa esperado é:



Em formato tabela:

Pagamentos	Amortizações	Juros	Saldo
1000	0	0	1000
-433.33M	-333.33M	100.00M	666.67M
-400.00M	-333.33M	66.67M	333.34M
-366.67M	-333.33M	33.34M	0.01M

4.2 Sistema Price ou Francês

É o sistema onde cada pagamento reembolsa uma parte do capital e juro sobre o saldo devedor, de modo que todos os pagamentos sejam de igual valor.

Para isso, primeiro determinamos o valor dos pagamentos através da fórmula:

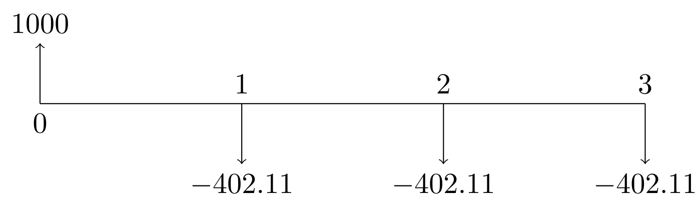
$$PMT = \frac{-PV\,i}{(i+1)^{(-n)} + -1}$$

Assim, o fluxo de caixa CF segue a seguinte progressão:

$$CF = PV + \left(\frac{PV\, i}{(i+1)^{(-n)} + -1} \right) + \left(\frac{PV\, i}{(i+1)^{(-n)} + -1} \right) + \left(\frac{PV\, i}{(i+1)^{(-n)} + -1} \right) + \ldots$$

Exemplo:

Para um desembolso de \$ 1000 a uma taxa de 10% ao mês reembolsado em 3 pagamentos, o fluxo de caixa esperado é:



Em formato tabela:

Pagamentos	Amortizações	Juros	Saldo
1000	0	0	1000
-402.11M	-302.11M	100.00M	697.89M
-402.11M	-332.32M	69.79M	365.57M
-402.11M	-365.55M	36.56M	0.02M

4.2.1 Período de Carência

Quando o primeiro pagamento não ocorre em um período inteiro, mas em c períodos, podemos ajustar a fórmula para obtenção do valor dos pagamentos multiplicando pelo valor futuro após o período de carência:

$$FV = PV\,(1+i)^c$$
$$PMT = \frac{-FV\, i}{(i+1)^{(-n)} + -1}$$
$$PMT = \frac{-PV\, i\,(i+1)^c}{(i+1)^{(-n)} + -1}$$

Exemplo:

Qual o valor do pagamento para um desembolso de $ 1000 a uma taxa de 10% ao mês, reembolsado em 3 pagamentos, com o primeiro pagamento em 2 meses?

```
(* (fv (compound 0.1M) 2 1000M) (pmt (compound 0.1M) 3))
```

```
486.55M
```

Assim, o programa de pagamentos fica:

Pagamentos	Amortizações	Juros	Saldo
1210.0M	0.0M	0.0M	1210.0M
-486.55M	-365.55M	121.00M	844.45M
-486.55M	-402.10M	84.45M	442.35M
-486.55M	-442.31M	44.24M	0.04M

5 Referências

References

[1] HAZZAN, Samuel; POMPEO, José Nicolau. *Matemática Financeira*. 6. ed. Editora Saraiva, 2007

[2] SODRÉ, Ulysses. *Matemática Essencial*, Julho de 2020. `http://www.uel.br/projetos/matessencial/basico/financeira/123financeira.html`