



Estudo Numérico de Equações em Meios Porosos

Henrique Casellato Vitorio Rodrigues da Costa

Departamento de Computação e Matemática
(DCM/FFCLRP-USP)

Dezembro / 2025

Estrutura da apresentação

- ① Definições gerais
- ② Modelagem de escoamentos monofásicos
- ③ Método de volumes finitos para equações elípticas
- ④ Introdução a problemas de transporte passivo em meios porosos
- ⑤ Método de volumes finitos para equações hiperbólicas
- ⑥ Referências

Estrutura da apresentação

- ① Definições gerais
- ② Modelagem de escoamentos monofásicos
- ③ Método de volumes finitos para equações elípticas
- ④ Introdução a problemas de transporte passivo em meios porosos
- ⑤ Método de volumes finitos para equações hiperbólicas
- ⑥ Referências

O que é um meio poroso?

Um meio poroso é caracterizado por sua **porosidade** ϕ , a fração entre o volume dos espaços vazios V_p e o total V_t :

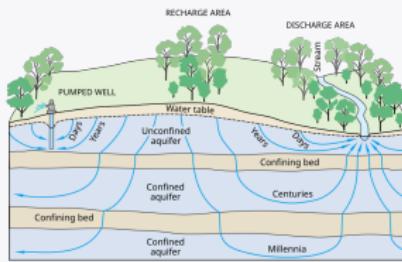
$$\phi = \frac{V_p}{V_t},$$

portanto sendo uma grandeza adimensional entre zero e um.



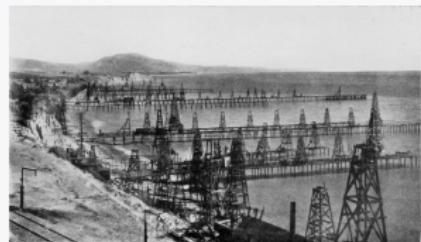
(a) Calcário (Torcal de Antequera)

Fonte: Fernando Domínguez Cerejido /
Wikimedia Commons (CC BY-SA 4.0)



(b) Aquífero subterrâneo

Fonte: T.C. Winter et al., U.S. Geological
Survey (Domínio Público)



(c) Reservatório de petróleo

Fonte: G.H. Eldridge (c. 1905) / NOAA
(Domínio Público)

Figure: Exemplos de meios porosos.

Compressibilidade e viscosidade

Meios podem ser considerados:

- **Incompressíveis**, se têm porosidade *estática*; e
- **Compressíveis**, se têm porosidade *dinâmica*.

Os **escoamentos**, por sua vez, podem ser classificados como:

- **Incompressíveis**: possui compressibilidade zero, o que implica uma massa específica constante independentemente da pressão;
- **Levemente compressíveis**: possui uma compressibilidade baixa e constante, com sua massa específica variando linearmente com a pressão; ou
- **Compressíveis**: possui compressibilidade alta e sua massa específica cresce com a pressão, tendendo a se estabilizar em altas pressões.

A **viscosidade** é a *medida da resistência de um fluido ao próprio escoamento*. Os gases apresentam baixa viscosidade, e os fluidos mais densos (óleo) apresentam alta viscosidade.

Permeabilidade do meio

A **permeabilidade** K representa a *habilidade* do meio poroso em *transmitir um fluido através dos seus poros interconectados*, quando completamente saturado do mesmo. Quando somente dá um único fluido no meio poroso, esta propriedade recebe o nome de **permeabilidade absoluta**.

A permeabilidade é dada por um tensor *simétrico positivo definido*:

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix},$$

caso ela seja **isotrópica**, K é um escalar.

Quando K é espacialmente constante o meio se denomina **homogêneo** e caso contrário, **heterogêneo**.

Lei de Darcy

Para introduzir a modelagem de escoamentos de fluidos, é preciso antes entender a **velocidade de Darcy**. Esta equação advém de estudos do fluxo físico da água em um filtro vertical de areia feitos por Henry Darcy em 1856.

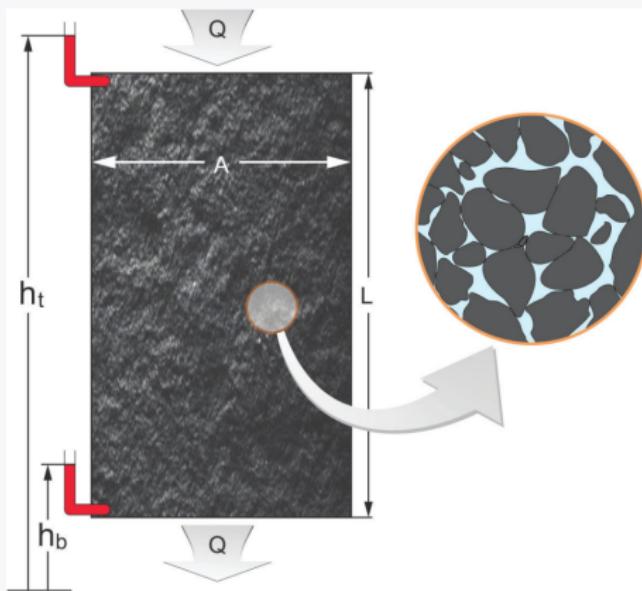


Figure: Experimento de Darcy, SOUZA e ROCHA (2022, p. 16).

Lei de Darcy

Este fluxo representa o volume total do fluido pela área total por tempo, sendo também conhecido como **velocidade de Darcy** dada por:

$$\begin{aligned} u &= \frac{Q}{A} = \mathbf{k} \frac{h_t - h_b}{L} \check{e} = \frac{\rho g K}{\mu} \nabla h \\ &= \frac{\rho g K}{\mu} \nabla \left(-\frac{p}{\rho g} + z \right) \\ &= -\frac{K}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla z), \end{aligned} \tag{1.1}$$

sendo z a profundidade. Esta equação (1.1) é conhecida como **Lei de Darcy** e representa a conservação de quantidade de movimento, na qual duas forças governam o fluxo: a pressão e a gravidade.

Estrutura da apresentação

- ① Definições gerais
- ② Modelagem de escoamentos monofásicos
- ③ Método de volumes finitos para equações elípticas
- ④ Introdução a problemas de transporte passivo em meios porosos
- ⑤ Método de volumes finitos para equações hiperbólicas
- ⑥ Referências

Modelagem de escoamentos monofásicos

Quando se aplica uma pressão (ou fluxo) em um domínio saturado por apenas **um fluido**, é induzido o que se chama de **escoamento monofásico**. A conservação de massa do fluido implica uma lei de balanço:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \phi \rho \, dx + \int_{\partial V} \rho (u \cdot n) \, ds = \int_V q \, dx. \quad (2.1)$$

Aplicando-se o teorema da divergência, utilizando a Lei de Darcy e desenvolvendo-a, obtém-se a equação diferencial parcial de incógnitas p e ρ :

$$\rho \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{\rho K}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla z) \right) = q, \quad (2.2)$$

onde $c_t = c_f + c_r$ representa a compressibilidade total. Considerado um **escoamento incompressível**, a equação (2.2) torna-se uma equação elíptica com coeficientes variáveis:

$$-\nabla \cdot \left(\frac{\rho K}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla z) \right) = q. \quad (2.3)$$

Condições auxiliares

Além das equações que, de fato, modelam escoamentos monofásicos, faz-se necessário ainda condições de contorno. Estas condições podem ser classificadas principalmente em três tipos:

- **Dirichlet**, onde se dá pressão $p(x)$;
- **Neumann**, onde o fluxo $\nabla u \cdot n$ é dado; e
- **Robin** ou mista, onde é especificado $\alpha u + \beta(\nabla u \cdot n)$;

onde u é uma função escalar, como por exemplo a temperatura ou pressão. Estas condições podem ser **homogêneas**, quando o contorno é igual a zero, ou **heterogêneas**, quando são iguais a uma função g .

Meios homogêneos e heterogêneos

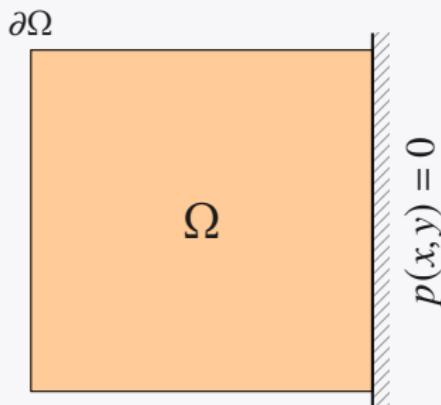
Para classificar meios como homogêneos ou heterogêneos, considera-se uma simplificação de (2.3) para o escoamento monofásico, com as hipóteses do escoamento ser *incompressível, isotérmico e sem efeito gravitacional*, da forma que:

$$\begin{cases} \nabla \cdot u = \frac{q}{\rho} & \text{em } \Omega \\ u = -\frac{K}{\mu} \nabla p & \text{em } \Omega \\ p = p_b & \text{em } \partial\Omega_p \\ u \cdot n = u_b & \text{em } \partial\Omega_u \end{cases}, \quad (2.4)$$

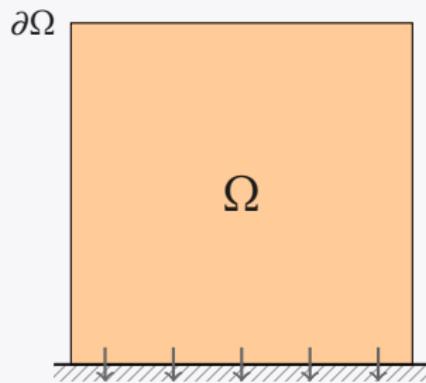
onde a viscosidade μ e massa específica ρ são uniformes no caso incompressível e consideradas unitárias aqui. Também, onde $\partial\Omega = \partial\Omega_p \cup \partial\Omega_u$ é a fronteira do domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $d = \{1, 2, 3\}$.

Meios homogêneos e heterogêneos

Para exemplificar os tipos de fronteiras nas bordas $\partial\Omega = \partial\Omega_p \cup \partial\Omega_u$, seguem as figuras:



(a) Contorno Dirichlet homogêneo.



(b) Contorno Neumann não homogêneo.

Figure: Exemplificação de tipos de contorno.

Meios homogêneos e heterogêneos

Portanto, o meio pode ser classificado, principalmente entre:

- Um meio dito **homogêneo**, governado pelo sistema de escoamentos monofásicos (2.4), ocorre quando a permeabilidade absoluta K é constante e uniforme, logo não dependendo de x ; ou
- Quando o meio é **heterogêneo**, a permeabilidade absoluta K varia com x e então o escoamento tende a passar pelas regiões de alta permeabilidade e evitar as de baixa permeabilidade.

Também, é possível usar um modelo do projeto *SPE10* fornecido pela *Sociedade de Engenheiros de Petróleo*, utilizado como referência em simulações de reservatórios de petróleo.

Método de volumes finitos

O **método de volumes finitos** é um método de discretização útil para simulações numéricas de leis de conservação de vários tipos: *elípticas, hiperbólicas ou parabólicas*, por exemplo. Este método tem alguns pontos importantes:

- Pode ser usado em **geometrias arbitrárias**;
- Pode ser usado em **malhas estruturadas ou não**; e
- **Conserva localmente os fluxos numéricos**, o que o faz particularmente interessante para problemas de mecânica dos fluidos.

Isso pode ser obtido, pois é baseado em uma abordagem "balanceada":

- Um balanço local é escrito em cada célula de discretização, que é frequentemente chamada de *volume de controle*;
- Pela fórmula de divergência, uma formulação da integral dos fluxos sobre a fronteira do volume de controle é obtida.

Os fluxos nas fronteiras são discretizados com respeito aos discretos "desconhecidos".

Malha centrada em células

Durante o restante desse trabalho, será usada uma discretização **centrada em células**, onde é considerado que o *valor aproximado da função*, ou da média dos valores da célula, *está justamente no centro dela*.

Para visualizar melhor, toma-se o intervalo $I = [0, 1]$ com três subintervalos de espaçamento uniforme:

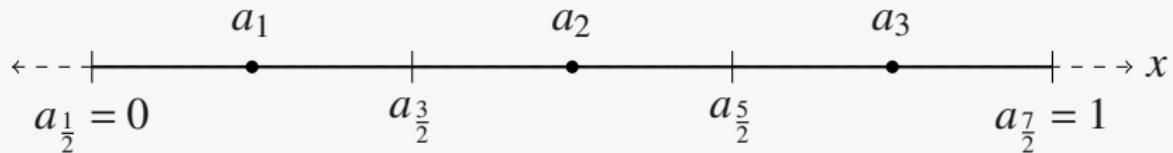


Figure: Intervalo I com discretização no centro da célula e contorno de Neumann.

Os valores dos nós a_i são vistos como os **centros** das células, então $a_{i-1/2}$ e $a_{i+1/2}$ seriam suas faces à esquerda e à direita. No caso de *contornos de Neumann* na primeira célula, durante a integração de $[a_1/2, a_3/2]$, o fluxo vindo de $a_1/2$ seria a *imposição de fluxo da interface esquerda* do contorno de Neumann.

Malha centrada em células

Geralmente, nos contornos de Dirichlet, inclui-se uma **célula fantasma** como na figura abaixo:

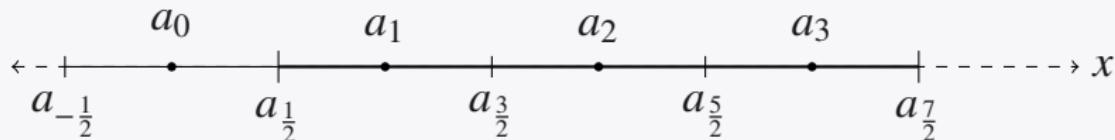
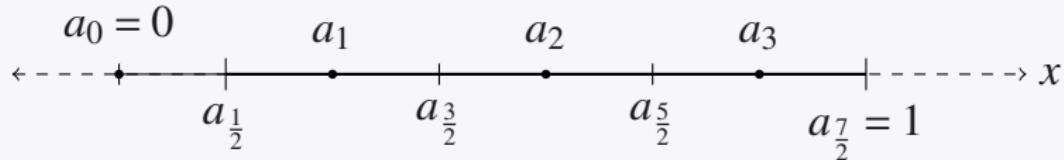


Figure: Intervalo I com discretização no centro da célula, contorno de Dirichlet à esquerda usando célula fantasma.

No exemplo do intervalo I descrito, a célula fantasma seria a célula com centro em a_0 , então se utilizando desse valor na integração em $[a_{\frac{1}{2}}, a_{\frac{3}{2}}]$. Por simplicidade, o contorno à direita se manteve de Neumann.

Também, é possível usar meia célula, como em:



Estrutura da apresentação

- ① Definições gerais
- ② Modelagem de escoamentos monofásicos
- ③ Método de volumes finitos para equações elípticas
- ④ Introdução a problemas de transporte passivo em meios porosos
- ⑤ Método de volumes finitos para equações hiperbólicas
- ⑥ Referências

Método de volumes finitos para equações elípticas

O objetivo desta seção é aproximar numericamente a solução do sistema (2.3) com simplificações:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (K \nabla p) = q & \text{em } \Omega \\ p = p_b & \text{em } \partial\Omega_p, \\ (-K \nabla p) \cdot n = u_b & \text{em } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (3.1)$$

no caso de um escoamento monofásico, com as hipóteses de ser incompressível, isotérmico e sem efeito gravitacional, de viscosidade μ e massa específica ρ constantes e unitárias.

Ademais, tem pressão relacionada a velocidade de Darcy

$$u = -K \nabla p. \quad (3.2)$$

Caso unidimensional

Considerando um domínio unidimensional $\Omega = [a, b]$ onde a primeira equação de (3.1) é escrita como

$$\frac{d}{dx} \left(K \frac{dp}{dx} \right) = q. \quad (3.3)$$

Na discretização por volumes finitos, têm-se uma partição do domínio em N intervalos $V_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ e integrando a equação em qualquer V_i ,

$$-\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q \, dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{d}{dx} \left(K \frac{dp}{dx} \right) \, dx = K \frac{dp}{dx} \Big|_{x_{i+1/2}} - K \frac{dp}{dx} \Big|_{x_{i-1/2}}. \quad (3.4)$$

Considerando que $\Delta x_{i+1} = \Delta x_i = \Delta x$,

$$K \frac{dp}{dx} \Big|_{x_{i+1/2}} = \frac{2K_i K_{i+1}}{K_i + K_{i+1}} \left(\frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x} \right), \quad (3.5)$$

a equação (3.4) em cada volume V_i é dada por

$$-\frac{1}{\Delta x^2} (K_{i+1/2}(p_{i+1} - p_i) - K_{i-1/2}(p_i - p_{i-1})) = q_i. \quad (3.6)$$

Caso unidimensional: Implementação

Para implementar o método de volumes finitos, considera-se o esquema numérico (3.6) escrito em forma matricial, com N células

$$Aw = d, \quad (3.7)$$

com w e d representando os vetores de valores aproximados para a pressão e os de injeção q . Por fim, A é uma matriz tridiagonal definida por

$$(Aw)_i = \frac{1}{\Delta x^2} \left(-K_{i-\frac{1}{2}} p_{i-1} + \left(K_{i-\frac{1}{2}} + K_{i+\frac{1}{2}} \right) p_i - K_{i+\frac{1}{2}} p_{i+1} \right), \quad (3.8)$$

para $i = 2, \dots, N-1$. No contexto de uma malha centrada em células, as linhas $i=1$ e $i=N$ da matriz são usadas para impor condições de contornos que, neste seguinte exemplo explicativo, são de Neumann à esquerda e de Dirichlet à direita.

Caso unidimensional: Implementação

Contorno de Neumann, quando $i = 1$, a condição de contorno à esquerda estaria na célula $x_{i-1/2} = x_{1/2}$. Então, com

$$-K \frac{dp}{dx} \Big|_{x_{\frac{1}{2}}} = u_b,$$

para a primeira equação do sistema (3.7):

$$\frac{1}{\Delta x^2} \left(-K_{\frac{3}{2}} (p_2 - p_1) \right) = q_1 + \frac{u_b}{\Delta x}.$$

Em contrapartida, quando na face $x_{N+1/2}$, será utilizado **Contorno de Dirichlet** com pressão imposta

$$p|_{x_{N+1/2}} = p_b.$$

Portanto, usando uma discretização com meio volume de controlea, última equação do sistema (3.7) torna-se:

$$\frac{1}{\Delta x^2} \left(2K_N p_N + K_{N-\frac{1}{2}} (p_N - p_{N-1}) \right) = q_1 + \frac{2K_N p_b}{\Delta x^2}.$$

Caso unidimensional: Implementação

Portanto, a matriz A do sistema, considerando as duas condições de contorno (de Neumann pela esquerda e de Dirichlet pela direita) é dada por

$$A = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} K_{\frac{3}{2}} & -K_{\frac{3}{2}} & & & \\ -K_{\frac{3}{2}} & \left(K_{\frac{3}{2}} + K_{\frac{5}{2}}\right) & -K_{\frac{5}{2}} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -K_{N-\frac{3}{2}} & \left(K_{N-\frac{3}{2}} + K_{N-\frac{1}{2}}\right) & -K_{N-\frac{1}{2}} \\ & & & -K_{N-\frac{1}{2}} & \left(K_{N-\frac{1}{2}} + 2K_N\right) \end{bmatrix}$$

e

$$d^t = \left(q_1 + \frac{u_b}{\Delta x}, q_2, \dots, q_{N-1}, q_N + \frac{2K_N p_b}{\Delta x^2} \right).$$

Caso unidimensional: Implementação

Foram realizados testes com os três algoritmos de fatoração: LDL^T , de **Crout** e de **Cholesky**. Pode-se ver que o método LDL^T performou melhor que a fatoração de Crout (pensando no problema do exemplo desta seção).

Subintervalos	LDL^t	Crout	Cholesky
10^2	$0.18247 \times 10^{-4} \text{ s}$	$0.18758 \times 10^{-4} \text{ s}$	$0.20147 \times 10^{-4} \text{ s}$
10^3	$0.86234 \times 10^{-4} \text{ s}$	$0.95469 \times 10^{-4} \text{ s}$	$0.98242 \times 10^{-4} \text{ s}$
10^4	$0.82834 \times 10^{-3} \text{ s}$	$0.92428 \times 10^{-3} \text{ s}$	$0.94293 \times 10^{-3} \text{ s}$
10^5	$0.72082 \times 10^{-2} \text{ s}$	$0.79367 \times 10^{-2} \text{ s}$	$0.83214 \times 10^{-2} \text{ s}$

Table: Tempos médios de métodos de fatoração diferentes.

Os três algoritmos possuem a mesma ordem de erro de truncamento $O(h^2)$.

Caso unidimensional: Exemplo contínuo

Exemplo

Dado um problema de valor de contorno unidimensional

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(K \frac{dp}{dx} \right) = -25 \cos(25x) & \text{em } \Omega = [0, 1] \\ p = x & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

onde a permeabilidade absoluta do meio é $K(x) = 2 + \sin(25x)$ e solução exata $p(x) = x$. As fatorações produziram resultados próximos à solução exata, com erro de truncamento $\epsilon \approx 0.355 \times 10^{-2}$, e gráficos:

Caso unidimensional: Exemplo contínuo

Exemplo

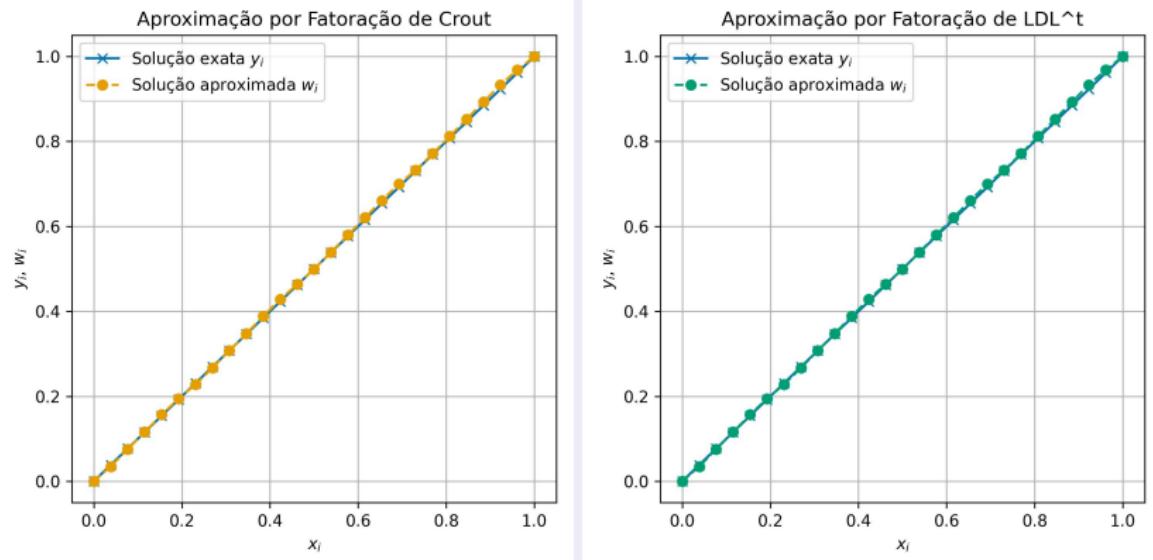


Figure: Solução por diferentes métodos de fatoração (Crout e LDL^t)

Caso bidimensional

A generalização do método de volumes finitos para uma dimensão maior segue um procedimento análogo ao da seção anterior. Ao final do desenvolvimento, a forma discreta para um problema bidimensional é

$$\begin{aligned} q_{i,j} = & -\frac{1}{\Delta y^2} K_{i,j+\frac{1}{2}} p_{i,j+1} - \frac{1}{\Delta y^2} K_{i,j-\frac{1}{2}} p_{i,j-1} \\ & - \frac{1}{\Delta x^2} K_{i+\frac{1}{2},j} p_{i+1,j} - \frac{1}{\Delta x^2} K_{i-\frac{1}{2},j} p_{i-1,j} \\ & + \left(\frac{1}{\Delta y^2} K_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\Delta y^2} K_{i,j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\Delta x^2} K_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{1}{\Delta x^2} K_{i-\frac{1}{2},j} \right) p_{i,j}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde se usam as médias harmônicas em $K_{i,j\pm 1/2}$ e $K_{i\pm 1/2,j}$.

Após a pressão ser calculada, o campo de velocidades pode ser calculado usando a mesma estratégia de aproximação dos fluxos nas integrais em $\partial V_{i,j}$:

$$\begin{aligned} u_L &\simeq -K_{i+\frac{1}{2},j} \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x}, & u_O &\simeq -K_{i-\frac{1}{2},j} \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x} \\ v_N &\simeq -K_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y}, & v_S &\simeq -K_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta y}. \end{aligned}$$

Caso bidimensional: Implementação

Considerando uma discretização $M \times N$ células computacionais, o esquema (3.9) pode ser escrito na forma matricial

$$Aw = d$$

com $w = (p_1, \dots, p_{MN})^t$ e $b = (q_1, \dots, q_{MN})^t$. Cada linha da matriz A está relacionada com uma célula (i,j) e leva em consideração as contribuições de seus quatro vizinhos. Por exemplo, em uma malha 3×3 , as células podem ser ordenadas *por linhas* da esquerda para direita, de cima para baixo:

$i-1,j-1$ 7	i,j 8	$i+1,j+1$ 9
$i-1,j-1$ 4	i,j 5	$i+1,j+1$ 6
$i-1,j-1$ 1	i,j 2	$i+1,j+1$ 3

Figure: Exemplo de ordenação para um problema bidimensional.

Caso bidimensional: Implementação

Dessa forma, com essa ordenação, a matriz terá uma estrutura pentadiagonal, três diagonais sucessivas e duas a uma distância M da diagonal principal:

$$A_{9 \times 9} = \begin{bmatrix} x & x & & x \\ x & x & x & & x \\ & x & x & & & x \\ x & & x & x & & x \\ & x & x & x & x & & x \\ & & x & x & x & & x \\ & & & x & x & x & \\ & & & x & x & x & x \\ x & & & & x & x & x \end{bmatrix}.$$

Essa ordenação pode ser calculada por uma relação algébrica dada por

$$k = i + (j - 1)M,$$

onde k é o número da incógnita e correspondente linha da matriz, M o número de células em cada linha da malha, $i = 1, 2, \dots, M$ e $j = 1, 2, \dots, M$.

Caso bidimensional: Implementação

Nota-se que a matriz em questão é quadrada e pode ser descrita por blocos, haja vista

$$\mathbf{A}_{9 \times 9} = \begin{bmatrix} A & C & \\ B & A & C \\ & B & A \end{bmatrix},$$

e portanto, dadas certas propriedades, é possível fatorá-la em duas matrizes (diagonais inferior L e superior U) da forma

$$\mathbf{A}_{9 \times 9} = LU = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & & \\ \bar{B}_2 & \bar{A}_2 & \\ & \bar{B}_3 & \bar{A}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & \Gamma_1 & \\ & I_2 & \Gamma_2 \\ & & I_3 \end{bmatrix}.$$

Pensando em matrizes mais gerais, com $Q = M \times N$, o sistema $Aw = d$, então, teria também w e d em blocos

$$w = (w^{(1)}, \dots, w^{(Q)})^t \text{ e } d = (d^{(1)}, \dots, d^{(Q)})^t. \quad (3.10)$$

Caso bidimensional: Exemplo

Definição

Em um reservatório, quando se secciona uma porção deste lugar em um domínio Ω com exatamente poço de injeção e outro de produção (onde se é extraído um fluido), esta porção é denominada como **a quarter of the five spot**. A injeção e produção são induzidas por um termo fonte q

$$q = \begin{cases} \tilde{q} & \text{no poço de injeção} \\ -\tilde{q} & \text{no poço de produção} \\ 0 & \text{no restante do domínio} \end{cases},$$

aplicado em células localizadas em extremos de Ω , geralmente a injeção no extremo inferior esquerdo e a produção no superior direito.

Caso bidimensional: Exemplo

Exemplo

Dado um problema elíptico bidimensional simplificado como (3.1), uma configuração **a quarter of the five spot** como na definição 1 e condições de contorno homogêneas de Neumann:

$$\begin{cases} \nabla \cdot u = q & \text{em } \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \\ u \cdot n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ -K\nabla p = u & (\text{Velocidade de Darcy}) \end{cases}.$$

Com uma permeabilidade absoluta $K(x) = 1$ constante, termo fonte $\tilde{q} = 1$, poço de injeção na célula $(1, 1)$ e poço de produção em (N, M) .

Para resolver com exatidão o problema, foi usado um recurso de **contorno Dirichlet local**, onde se impõe uma pressão em um ponto específico da matriz, nesse caso, o ponto $(1, 1)$ por simplicidade.

Caso bidimensional: Implementação

Exemplo

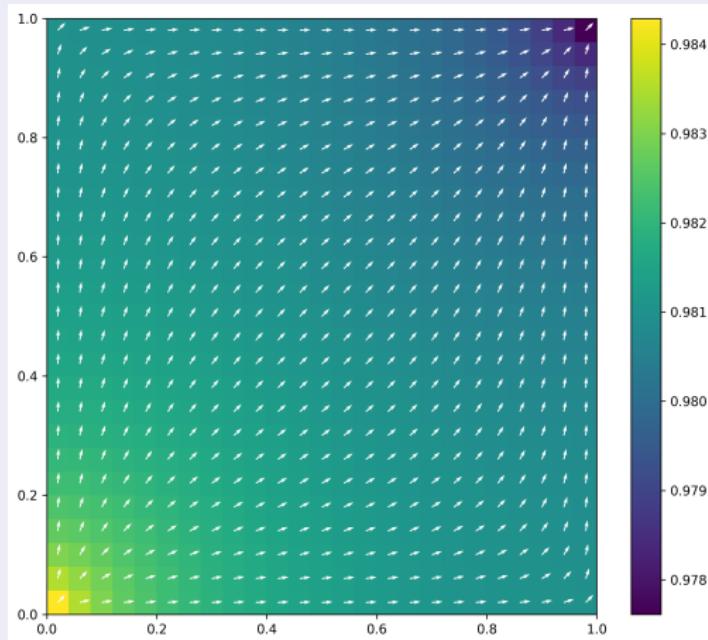


Figure: Campo de pressões e vetores do exemplo.

Estrutura da apresentação

- ① Definições gerais
- ② Modelagem de escoamentos monofásicos
- ③ Método de volumes finitos para equações elípticas
- ④ Introdução a problemas de transporte passivo em meios porosos
- ⑤ Método de volumes finitos para equações hiperbólicas
- ⑥ Referências

Problemas de transporte passivo em meios porosos

O movimento de um fluido em escoamento monofásico em meios porosos é descrito por um *problema de transporte passivo*, onde o **fluido marcado** segue o escoamento *sem alterar suas propriedades*.

Com a velocidade do fluido u obtida através da solução do problema elíptico dado por (3.1) e (1.1), esse deslocamento pode ser estimado pela seguinte equação hiperbólica:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\phi c) + \nabla \cdot (uc) = q & \text{em } \Omega \\ c(x, t=0) = c_0 & \text{em } \Omega \\ c(x, t) = c_b(x, t) & \text{em } \partial\Omega^- \end{cases}, \quad (4.1)$$

onde ϕ é a porosidade, q é o termo fonte, $c(x, t)$ é a concentração do contaminante, c_0 é a condição inicial e c_b é a concentração nas bordas de entrada

$$\partial\Omega^- = \{x \in \partial\Omega; u \cdot n < 0\},$$

onde n é a normal exterior à fronteira $\partial\Omega$.

Problemas de transporte passivo em meios porosos

Em simulações numéricas, geralmente o termo fonte da equação (4.1) leva em conta os poços de injeção e produção, os quais podem ser convertidos em condições de contorno adequadas, gerando a equação:

$$\begin{cases} \phi \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (uc) = 0 & \text{em } \Omega \\ c(x, t=0) = c_0 & \text{em } \Omega \\ c(x, t) = c_b(x, t) & \text{em } \partial\Omega^- \end{cases}, \quad (4.2)$$

onde a porosidade $\phi = \phi(x)$ é constante no tempo. Caso a porosidade seja uniforme e constante no tempo, é possível escalarizar a primeira equação de (4.2) para

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + \nabla \cdot (uc) = 0, \quad (4.3)$$

onde $\tau = t/\phi$. Admitindo que a velocidade u é conhecida e não depende da concentração (considerando que K é constante), têm-se uma **lei de conservação hiperbólica linear**.

Derivação de leis de conservação hiperbólicas

Aqui, deriva-se uma **lei de balanço** para determinar a conservação de *concentração* $c(x, t)$ em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Essa lei de balanço estabelece que a variação temporal da quantidade c em um domínio Ω é igual a taxa de fluxo de c por $\partial\Omega$ mais o total de c injetado ou retirado de Ω :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \phi c(x, t) \, dx = - \int_{\partial\Omega} f(c(x, t)) \cdot n \, ds + \int_{\Omega} q \, dx, \quad (4.4)$$

onde n é o vetor normal à $\partial\Omega$, $f(c)$ é a função de fluxo dependendo de c (não necessariamente linear) e q o termo fonte. Com o teorema da divergência:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\phi c(x, t)) + \nabla \cdot f(c(x, t)) - q \right) \, dx = 0. \quad (4.5)$$

Como a equação (4.5) vale para qualquer domínio arbitrário Ω e a porosidade $\phi = \phi(x)$ é constante no tempo, então é possível obter a forma diferencial:

$$\phi \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot f(c) = q \quad (4.6)$$

chamada, então, de **equação diferencial parcial hiperbólica**.

Estrutura da apresentação

- ① Definições gerais
- ② Modelagem de escoamentos monofásicos
- ③ Método de volumes finitos para equações elípticas
- ④ Introdução a problemas de transporte passivo em meios porosos
- ⑤ Método de volumes finitos para equações hiperbólicas
- ⑥ Referências

Método de volumes finitos para equações hiperbólicas

Considerando uma lei de conservação hiperbólica da forma (4.6) com $\phi = 1$ e $q = 0$, têm-se a forma unidimensional

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(c) = 0. \quad (5.1)$$

Em cada t^n , define-se:

$$C_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} c(x, t^n) dx \quad \text{e} \quad \bar{F}_{i \pm \frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(c(x_{i \pm \frac{1}{2}}, t)) dt.$$

Integrando a lei de conservação (5.1) em $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [t^n, t^{n+1}]$, separando as integrais e utilizando o teorema fundamental do cálculo, têm-se:

$$C_i^{n+1} = C_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^n \right). \quad (5.2)$$

Ou seja, a equação acima estabelece um princípio de conservação: *a variação média da concentração na célula é dada pela diferença dos fluxos nas fronteiras da mesma; ainda sem quaisquer tipos de aproximações.*

Método upwind para aproximação de fluxos discretos

Para aproximar os fluxos discretos $F_{i \pm 1/2}^n$, pode-se usar diversos métodos, como:

- *Esquema central* (diferenças finitas);
- Método de *Lax-Friedrichs*; ou
- Método de *Lax-Wendroff*.

O método usado neste trabalho será o **método upwind**, que leva em conta a *estrutura da solução*, de modo que a informação em cada ponto é obtida olhando a direção na qual a mesma se propaga.

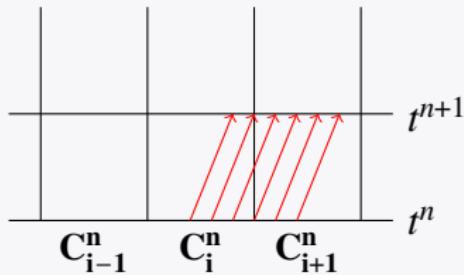


Figure: Propagação da informação em uma célula.

Método upwind: Caso unidimensional

Considerando $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \min\{u, 0\}$, é possível discretizar (5.2) no caso de **velocidades constantes**:

$$C_i^{n+1} = C_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (u^+ C_i^n + u^- C_{i+1}^n - u^+ C_{i-1}^n - u^- C_i^n). \quad (5.3)$$

Agora, no caso de **velocidades variáveis**:

$$\begin{aligned} C_i^{n+1} &= C_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(u^+(x_{i+\frac{1}{2}}) - u^+(x_{i-\frac{1}{2}}) + u^-(x_{i+\frac{1}{2}}) - u^-(x_{i-\frac{1}{2}}) \right) C_i^n \right] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[u^-(x_{i-\frac{1}{2}}) W_{i-\frac{1}{2}} + u^+(x_{i+\frac{1}{2}}) W_{i+\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Também, é preciso satisfazer a **condição CFL**, uma condição necessária, mas não suficiente, para garantir convergência do método de volumes finitos para a equação diferencial. A convergência ocorre caso:

$$u \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1,$$

com u constante.

Método upwind: Exemplo do caso unidimensional

Exemplo

Dado o problema de contorno unidimensional (3.1), que modela o escoamento monofásico de um reservatório saturado, com sistema de equações dado por:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(K \frac{dp}{dx} \right) = -25 \cos(25x) & \text{em } \Omega_e = [0, 1] \\ p = x & \text{sobre } \partial\Omega_e \end{cases} \quad (5.5)$$

onde $K(x) = 2 + \sin(25x)$. Será simulado o fluxo de um contaminante com concentrações $c(x, t)$, governado pelo sistema:

$$\begin{cases} \partial_t c + u \partial_x c = 0 & \text{em } \Omega_h \\ c_0(x) = e^{-20(3x-.5)^2} + e^{-(3x-3.5)^2} & \text{em } \Omega_h \end{cases},$$

Utilizando a equação (5.4), é possível chegar numa solução visualizada pelos gráficos a seguir:

Método upwind: Exemplo do caso unidimensional

Exemplo

Método upwind: Caso bidimensional

Para problemas em duas dimensões, a lei de conservação (5.1) assume a forma

$$c_t + f_x(c) + g_y(c) = 0, \quad (5.6)$$

onde a concentração do fluido depende de x , y e t . Definindo

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n = \frac{1}{\Delta t \Delta y} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} f(c(x_{i+\frac{1}{2}}, y, t)) dy dt \quad (5.7)$$

e

$$\bar{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} g(c(x, y_{j+\frac{1}{2}}, t)) dx dt, \quad (5.8)$$

têm-se

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\bar{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n - \bar{F}_{i-\frac{1}{2},j}^n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(\bar{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \bar{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (5.9)$$

onde os fluxos \bar{F} e \bar{G} podem ser aproximados por fluxos discretos em cada direção, assim como em (5.3) ou (5.4).

Método upwind: Exemplo do caso bidimensional

Exemplo

O primeiro exemplo é o mais simples: um problema elíptico bidimensional simplificado como (3.1), uma configuração *a quarter of the five spot* como na definição 1 e condições de contorno homogêneas de Neumann:

$$\begin{cases} \nabla \cdot u = q & \text{em } \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \\ u \cdot n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ -K\nabla p = u & (\text{Velocidade de Darcy}) \end{cases}.$$

Com uma permeabilidade absoluta $K(x, y) = 1$ constante, termo fonte $\tilde{q} = 1$, poço de injeção na célula $(1, 1)$ e poço de produção em (N, M) .

Exemplo

Método upwind: Exemplo do caso bidimensional

Exemplo

Neste segundo exemplo, dado um problema elíptico bidimensional simplificado como (3.1), uma configuração *a quarter of the five spot*, campo de permeabilidade e de pressões e velocidades visualizados abaixo:

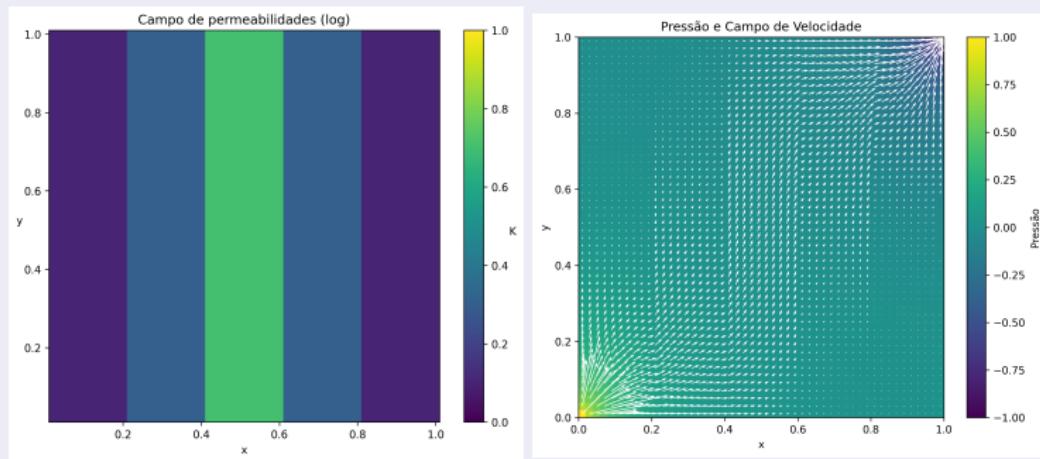


Figure: Gráficos de permeabilidade e de pressão com velocidades não normalizadas.

Exemplo

Estrutura da apresentação

- ① Definições gerais
- ② Modelagem de escoamentos monofásicos
- ③ Método de volumes finitos para equações elípticas
- ④ Introdução a problemas de transporte passivo em meios porosos
- ⑤ Método de volumes finitos para equações hiperbólicas
- ⑥ Referências

Referências I

- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D.; BURDEN, A. M. **Análise Numérica**. 10. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. Tradução de: *Numerical Analysis*. 10. ed. ISBN 978-85-221-2341-4.
- EYMARD, R.; GALLOUËT, T.; HERBIN, R. **Finite Volume Methods**. Amsterdam: North-Holland, 2000. v. 7, p. 713–1020. (Handbook of Numerical Analysis). Título em inglês: "Finite Volume Methods". ISBN 978-0-444-50437-7. DOI: 10.1016/S1570-8659(00)07005-8.
- HIGHAM, N. J. **Accuracy and Stability of Numerical Algorithms**. 2. ed. Philadelphia, PA: Society for Industrial e Applied Mathematics (SIAM), 2002. (Other Titles in Applied Mathematics). ISBN 0-89871-521-0. DOI: 10.1137/1.9780898718027.
- ISAACSON, E.; KELLER, H. B. **Analysis of Numerical Methods**. New York: John Wiley & Sons, 1966. Reprinted by Dover Publications in 1994. ISBN 0-486-68029-0.
- MISHRA, S.; FJORDHOLM, U. S.; ABGRALL, R. **Numerical Methods for Conservation Laws and Related Equations**. [S.l.: s.n.], 2017. Notas de Aula. Acesso em: 23 ago. 2025. Disponível em: <https://metaphor.ethz.ch/x/2019/hs/401-4671-00L/literature/mishra_hyperbolic_pdes.pdf>.

Referências II

- SOUSA, F. S.; ROCHA, F. F.** **Métodos de volumes finitos para modelagem computacional de reservatórios de petróleo.** São Carlos, SP: SBMAC, 2022. v. 96, p. 102. (Notas em Matemática Aplicada). ISBN 978-65-86388-18-3.
- STRAUSS, W. A.** **Partial Differential Equations: An Introduction.** 2. ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2008. ISBN 978-0470-05456-7.
- THOMAS, J. W.** **Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods.** New York: Springer, 1995. v. 22. (Texts in Applied Mathematics). ISBN 978-1-4899-7278-1.
- ZILL, D. G.** **A First Course in Differential Equations with Modeling Applications.** 9. ed. Boston, MA: Cengage Learning, 2017. ISBN 978-1-305-96573-6.

Obrigado!