



# Estudo Numérico de Equações em Meios Porosos

Henrique Casellato Vitorio Rodrigues da Costa

Departamento de Computação e Matemática  
(DCM/FFCLRP-USP)

Dezembro / 2025

# Estrutura da apresentação

- ① Definições gerais
- ② Modelagem de escoamentos monofásicos
- ③ Método de volumes finitos para equações elípticas
- ④ Introdução a problemas de transporte passivo em meios porosos
- ⑤ Método de volumes finitos para equações hiperbólicas
- ⑥ Referências

# Estrutura da apresentação

- ① Definições gerais
- ② Modelagem de escoamentos monofásicos
- ③ Método de volumes finitos para equações elípticas
- ④ Introdução a problemas de transporte passivo em meios porosos
- ⑤ Método de volumes finitos para equações hiperbólicas
- ⑥ Referências

# O que é um meio poroso?

Um meio poroso é caracterizado por sua **porosidade**  $\phi$ , a fração entre o volume dos espaços vazios  $V_p$  e o total  $V_t$ :

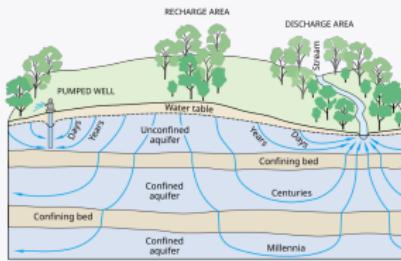
$$\phi = \frac{V_p}{V_t},$$

portanto sendo uma grandeza adimensional entre zero e um.



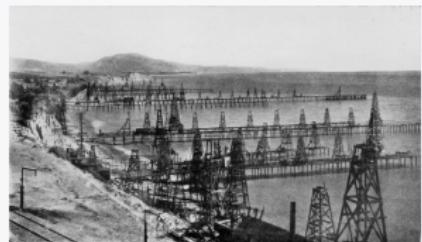
(a) Calcário (Torcal de Antequera)

Fonte: Fernando Domínguez Cerejido /  
Wikimedia Commons (CC BY-SA 4.0)



(b) Aquífero subterrâneo

Fonte: T.C. Winter et al., U.S. Geological  
Survey (Domínio Público)



(c) Reservatório de petróleo

Fonte: G.H. Eldridge (c. 1905) / NOAA  
(Domínio Público)

Figure: Exemplos de meios porosos.

# Compressibilidade e viscosidade

**Meios** podem ser considerados:

- **Incompressíveis**, se têm porosidade *estática*; e
- **Compressíveis**, se têm porosidade *dinâmica*.

Os **escoamentos**, por sua vez, podem ser classificados como:

- **Incompressíveis**: possui compressibilidade zero, o que implica uma massa específica constante independentemente da pressão;
- **Levemente compressíveis**: possui uma compressibilidade baixa e constante, com sua massa específica variando linearmente com a pressão; ou
- **Compressíveis**: possui compressibilidade alta e sua massa específica cresce com a pressão, tendendo a se estabilizar em altas pressões.

A **viscosidade** é a *medida da resistência de um fluido ao próprio escoamento*. Os gases apresentam baixa viscosidade, e os fluidos mais densos (óleo) apresentam alta viscosidade.

# Permeabilidade do meio

A **permeabilidade**  $K$  representa a *habilidade* do meio poroso em *transmitir um fluido através dos seus poros interconectados*, quando completamente saturado do mesmo. Quando somente dá um único fluido no meio poroso, esta propriedade recebe o nome de **permeabilidade absoluta**.

A permeabilidade é dada por um tensor *simétrico positivo definido*:

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix},$$

caso ela seja **isotrópica**,  $K$  é um escalar.

Quando  $K$  é espacialmente constante o meio se denomina **homogêneo** e caso contrário, **heterogêneo**.

# Lei de Darcy

Para introduzir a modelagem de escoamentos de fluidos, é preciso antes entender a **velocidade de Darcy**. Esta equação advém de estudos do fluxo físico da água em um filtro vertical de areia feitos por Henry Darcy em 1856.

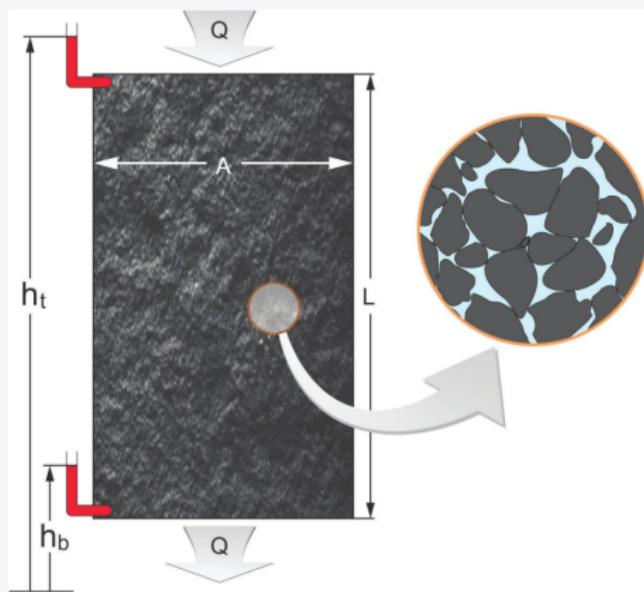


Figure: Experimento de Darcy, SOUZA e ROCHA (2022, p. 16).

# Lei de Darcy

Este fluxo representa o volume total do fluido pela área total por tempo, sendo também conhecido como **velocidade de Darcy** dada por:

$$\begin{aligned} u &= \frac{Q}{A} = \mathbf{k} \frac{h_t - h_b}{L} \check{e} = \frac{\rho g K}{\mu} \nabla h \\ &= \frac{\rho g K}{\mu} \nabla \left( -\frac{p}{\rho g} + z \right) \\ &= -\frac{K}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla z), \end{aligned} \tag{1.1}$$

sendo  $z$  a profundidade. Esta equação (1.1) é conhecida como **Lei de Darcy** e representa a conservação de quantidade de movimento, na qual duas forças governam o fluxo: a pressão e a gravidade.

# Estrutura da apresentação

- ① Definições gerais
- ② Modelagem de escoamentos monofásicos
- ③ Método de volumes finitos para equações elípticas
- ④ Introdução a problemas de transporte passivo em meios porosos
- ⑤ Método de volumes finitos para equações hiperbólicas
- ⑥ Referências

# Modelagem de escoamentos monofásicos

Quando se aplica uma pressão (ou fluxo) em um domínio saturado por apenas **um fluido**, é induzido o que se chama de **escoamento monofásico**. A conservação de massa do fluido implica uma lei de balanço:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \phi \rho \, dx + \int_{\partial V} \rho (u \cdot n) \, ds = \int_V q \, dx. \quad (2.1)$$

Aplicando-se o teorema da divergência, utilizando a Lei de Darcy e desenvolvendo-a, obtém-se a equação diferencial parcial de incógnitas  $p$  e  $\rho$ :

$$\rho \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left( \frac{\rho K}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla z) \right) = q, \quad (2.2)$$

onde  $c_t = c_f + c_r$  representa a compressibilidade total. Considerado um **escoamento incompressível**, a equação (2.2) torna-se uma equação elíptica com coeficientes variáveis:

$$-\nabla \cdot \left( \frac{\rho K}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla z) \right) = q. \quad (2.3)$$

# Condições auxiliares

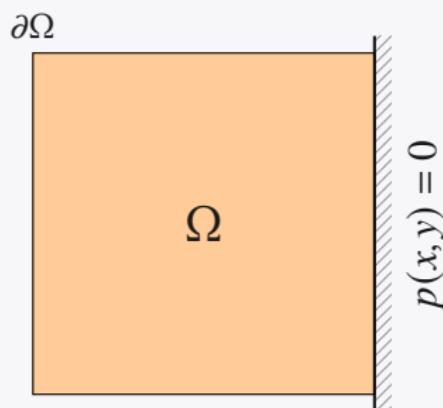
Além das equações que, de fato, modelam escoamentos monofásicos, faz-se necessário ainda condições de contorno. Estas condições podem ser classificadas principalmente em três tipos:

- **Dirichlet**, onde se dá pressão  $p(x)$ ;
- **Neumann**, onde o fluxo  $\nabla u \cdot n$  é dado; e
- **Robin** ou mista, onde é especificado  $\alpha u + \beta(\nabla u \cdot n)$ ;

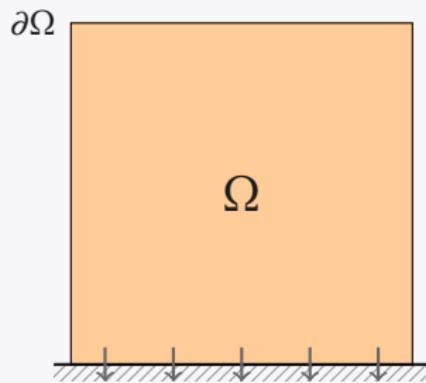
onde  $u$  é uma função escalar, como por exemplo a temperatura ou pressão. Estas condições podem ser **homogêneas**, quando o contorno é igual a zero, ou **heterogêneas**, quando são iguais a uma função  $g$ .

# Condições auxiliares

Para exemplificar os tipos de fronteiras nas bordas  $\partial\Omega = \partial\Omega_p \cup \partial\Omega_u$ , seguem as figuras:



(a) Contorno Dirichlet homogêneo.



(b) Contorno Neumann não homogêneo.

Figure: Exemplificação de tipos de contorno.

# Meios homogêneos e heterogêneos

Para classificar meios como homogêneos ou heterogêneos, considera-se uma simplificação de (2.3) para o escoamento monofásico, com as hipóteses do escoamento ser *incompressível, isotérmico e sem efeito gravitacional*, da forma que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot u = \frac{q}{\rho} & \text{em } \Omega \\ u = -\frac{K}{\mu} \nabla p & \text{em } \Omega \\ p = p_b & \text{em } \partial\Omega_p \\ u \cdot n = u_b & \text{em } \partial\Omega_u \end{array} \right. , \quad (2.4)$$

onde a viscosidade  $\mu$  e massa específica  $\rho$  são uniformes no caso incompressível e consideradas unitárias aqui. Também, onde  $\partial\Omega = \partial\Omega_p \cup \partial\Omega_u$  é a fronteira do domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  com  $d = \{1, 2, 3\}$ .

# Meios homogêneos e heterogêneos

Portanto, o meio pode ser classificado, principalmente entre:

- Um meio dito **homogêneo**, governado pelo sistema de escoamentos mono-fásicos (2.4), ocorre quando a permeabilidade absoluta  $K$  é constante e uniforme, logo não dependendo de  $x$ ; ou
- Quando o meio é **heterogêneo**, a permeabilidade absoluta  $K$  varia com  $x$  e então o escoamento tende a passar pelas regiões de alta permeabilidade e evitar as de baixa permeabilidade.

Também, é possível usar um modelo do projeto *SPE10* fornecido pela *Sociedade de Engenheiros de Petróleo*, utilizado como referência em simulações de reservatórios de petróleo.

# Método de volumes finitos

O **método de volumes finitos** é um método de discretização útil para simulações numéricas de leis de conservação de vários tipos: *elípticas, hiperbólicas ou parabólicas*, por exemplo. Este método tem alguns pontos importantes:

- Pode ser usado em **geometrias arbitrárias**;
- Pode ser usado em **malhas estruturadas ou não**; e
- **Conserva localmente os fluxos numéricos**, o que o faz particularmente interessante para problemas de mecânica dos fluidos.

Isso pode ser obtido, pois é baseado em uma abordagem "balanceada":

- Um balanço local é escrito em cada célula de discretização, que é frequentemente chamada de *volume de controle*;
- Pela fórmula de divergência, uma formulação da integral dos fluxos sobre a fronteira do volume de controle é obtida.

Os fluxos nas fronteiras são discretizados com respeito aos discretos "desconhecidos".

# Malha centrada em células

Durante o restante desse trabalho, será usada uma discretização **centrada em células**, onde é considerado que o *valor aproximado da função*, ou da média dos valores da célula, *está justamente no centro dela*.

Para visualizar melhor, toma-se o intervalo  $I = [0, 1]$  com três subintervalos de espaçamento uniforme:

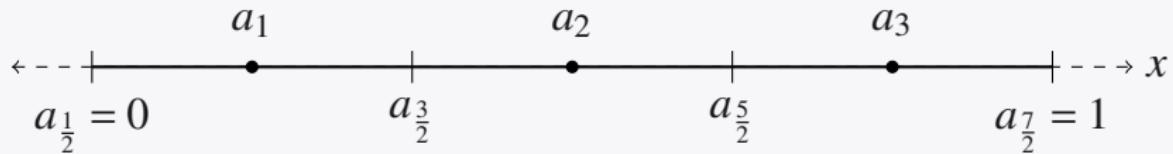


Figure: Intervalo  $I$  com discretização no centro da célula e contorno de Neumann.

Os valores dos nós  $a_i$  são vistos como os **centros** das células, então  $a_{i-1/2}$  e  $a_{i+1/2}$  seriam suas faces à esquerda e à direita. No caso de *contornos de Neumann* na primeira célula, durante a integração de  $[a_1/2, a_3/2]$ , o fluxo vindo de  $a_1/2$  seria a *imposição de fluxo da interface esquerda* do contorno de Neumann.

# Malha centrada em células

Geralmente, nos contornos de Dirichlet, inclui-se uma **célula fantasma** como na figura abaixo:

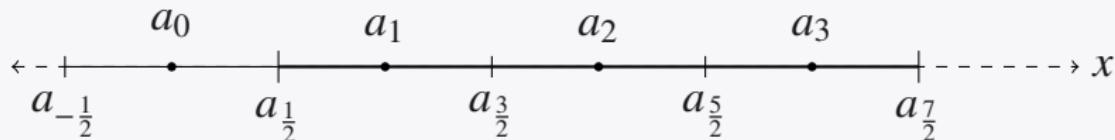
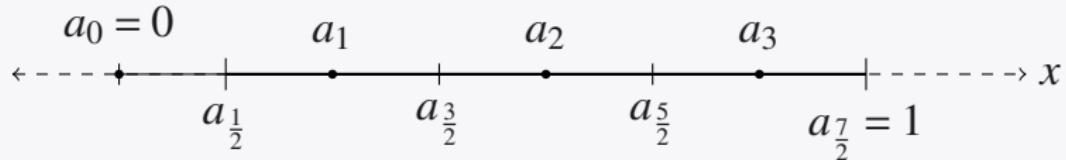


Figure: Intervalo  $I$  com discretização no centro da célula, contorno de Dirichlet à esquerda usando célula fantasma.

No exemplo do intervalo  $I$  descrito, a célula fantasma seria a célula com centro em  $a_0$ , então se utilizando desse valor na integração em  $[a_{\frac{1}{2}}, a_{\frac{3}{2}}]$ . Por simplicidade, o contorno à direita se manteve de Neumann.

Também, é possível usar meia célula, como em:



# Estrutura da apresentação

- ① Definições gerais
- ② Modelagem de escoamentos monofásicos
- ③ Método de volumes finitos para equações elípticas
- ④ Introdução a problemas de transporte passivo em meios porosos
- ⑤ Método de volumes finitos para equações hiperbólicas
- ⑥ Referências

# Método de volumes finitos para equações elípticas

O objetivo desta seção é aproximar numericamente a solução do sistema (2.3) com simplificações:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (K \nabla p) = q & \text{em } \Omega \\ p = p_b & \text{em } \partial\Omega_p, \\ (-K \nabla p) \cdot n = u_b & \text{em } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (3.1)$$

no caso de um escoamento monofásico, com as hipóteses de ser incompressível, isotérmico e sem efeito gravitacional, de viscosidade  $\mu$  e massa específica  $\rho$  constantes e unitárias.

Ademais, tem pressão relacionada a velocidade de Darcy

$$u = -K \nabla p. \quad (3.2)$$

# Caso unidimensional

Considerando um domínio unidimensional  $\Omega = [a, b]$  onde a primeira equação de (3.1) é escrita como

$$\frac{d}{dx} \left( K \frac{dp}{dx} \right) = q. \quad (3.3)$$

Na discretização por volumes finitos, têm-se uma partição do domínio em  $N$  intervalos  $V_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  e integrando a equação em qualquer  $V_i$ ,

$$-\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q \, dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{d}{dx} \left( K \frac{dp}{dx} \right) \, dx = K \frac{dp}{dx} \Big|_{x_{i+1/2}} - K \frac{dp}{dx} \Big|_{x_{i-1/2}}. \quad (3.4)$$

Considerando que  $\Delta x_{i+1} = \Delta x_i = \Delta x$ ,

$$K \frac{dp}{dx} \Big|_{x_{i+1/2}} = \frac{2K_i K_{i+1}}{K_i + K_{i+1}} \left( \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x} \right), \quad (3.5)$$

a equação (3.4) em cada volume  $V_i$  é dada por

$$-\frac{1}{\Delta x^2} (K_{i+1/2}(p_{i+1} - p_i) - K_{i-1/2}(p_i - p_{i-1})) = q_i. \quad (3.6)$$

## Caso unidimensional: Implementação

Para implementar o método de volumes finitos, considera-se o esquema numérico (3.6) escrito em forma matricial, com  $N$  células

$$Aw = d, \quad (3.7)$$

com  $w$  e  $d$  representando os vetores de valores aproximados para a pressão e os de injeção  $q$ . Por fim,  $A$  é uma matriz tridiagonal definida por

$$(Aw)_i = \frac{1}{\Delta x^2} \left( -K_{i-\frac{1}{2}} p_{i-1} + \left( K_{i-\frac{1}{2}} + K_{i+\frac{1}{2}} \right) p_i - K_{i+\frac{1}{2}} p_{i+1} \right), \quad (3.8)$$

para  $i = 2, \dots, N-1$ . No contexto de uma malha centrada em células, as linhas  $i=1$  e  $i=N$  da matriz são usadas para impor condições de contornos que, neste seguinte exemplo explicativo, são de Neumann à esquerda e de Dirichlet à direita.

# Caso unidimensional: Implementação

**Contorno de Neumann**, quando  $i = 1$ , a condição de contorno à esquerda estaria na célula  $x_{i-1/2} = x_{1/2}$ . Então, com

$$-K \frac{dp}{dx} \Big|_{x_{\frac{1}{2}}} = u_b,$$

para a primeira equação do sistema (3.7):

$$\frac{1}{\Delta x^2} \left( -K_{\frac{3}{2}} (p_2 - p_1) \right) = q_1 + \frac{u_b}{\Delta x}.$$

Em contrapartida, quando na face  $x_{N+1/2}$ , será utilizado **Contorno de Dirichlet** com pressão imposta

$$p|_{x_{N+1/2}} = p_b.$$

Portanto, usando uma discretização com meio volume de controle, a última equação do sistema (3.7) torna-se:

$$\frac{1}{\Delta x^2} \left( 2K_N p_N + K_{N-\frac{1}{2}} (p_N - p_{N-1}) \right) = q_1 + \frac{2K_N p_b}{\Delta x^2}.$$

## Caso unidimensional: Implementação

Portanto, a matriz  $A$  do sistema, considerando as duas condições de contorno (de Neumann pela esquerda e de Dirichlet pela direita) é dada por

$$A = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} K_{\frac{3}{2}} & -K_{\frac{3}{2}} & & & \\ -K_{\frac{3}{2}} & \left(K_{\frac{3}{2}} + K_{\frac{5}{2}}\right) & -K_{\frac{5}{2}} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -K_{N-\frac{3}{2}} & \left(K_{N-\frac{3}{2}} + K_{N-\frac{1}{2}}\right) & -K_{N-\frac{1}{2}} \\ & & & -K_{N-\frac{1}{2}} & \left(K_{N-\frac{1}{2}} + 2K_N\right) \end{bmatrix}$$

e

$$d^t = \left( q_1 + \frac{u_b}{\Delta x}, q_2, \dots, q_{N-1}, q_N + \frac{2K_N p_b}{\Delta x^2} \right).$$

# Caso unidimensional: Exemplo contínuo

## Exemplo

Dado um problema de valor de contorno unidimensional

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( K \frac{dp}{dx} \right) = -25 \cos(25x) & \text{em } \Omega = [0, 1] \\ p = x & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases},$$

onde a permeabilidade absoluta do meio é  $K(x) = 2 + \sin(25x)$  e solução exata  $p(x) = x$ . As fatorações produziram resultados próximos à solução exata, com erro de truncamento  $\epsilon \approx 0.355 \times 10^{-2}$ , e gráficos:

# Caso unidimensional: Exemplo contínuo

## Exemplo

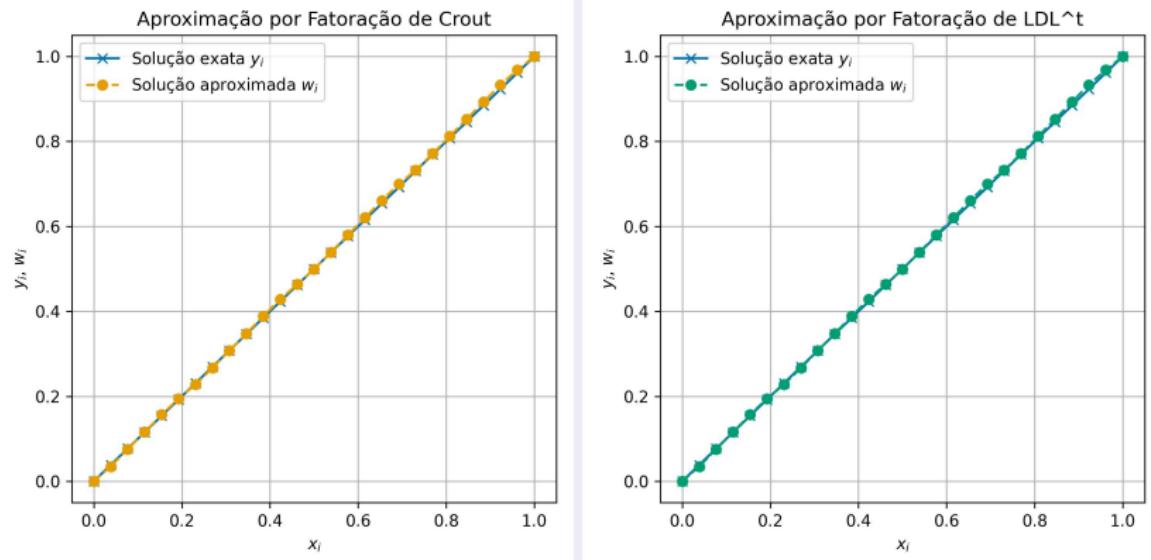


Figure: Solução por diferentes métodos de fatoração (Crout e  $LDL^t$ )

# Caso unidimensional: Análise dos métodos de fatoração

Foram realizados testes com os três algoritmos de fatoração:  $\text{LDL}^T$ , de **Crout** e de **Cholesky**. Pode-se ver que o método  $\text{LDL}^T$  performou melhor que a fatoração de Crout (pensando no problema do exemplo desta seção).

Subintervalos	$\text{LDL}^t$	Crout	Cholesky
$10^2$	$0.18247 \times 10^{-4} \text{ s}$	$0.18758 \times 10^{-4} \text{ s}$	$0.20147 \times 10^{-4} \text{ s}$
$10^3$	$0.86234 \times 10^{-4} \text{ s}$	$0.95469 \times 10^{-4} \text{ s}$	$0.98242 \times 10^{-4} \text{ s}$
$10^4$	$0.82834 \times 10^{-3} \text{ s}$	$0.92428 \times 10^{-3} \text{ s}$	$0.94293 \times 10^{-3} \text{ s}$
$10^5$	$0.72082 \times 10^{-2} \text{ s}$	$0.79367 \times 10^{-2} \text{ s}$	$0.83214 \times 10^{-2} \text{ s}$

Table: Tempos médios de métodos de fatoração diferentes.

Os três algoritmos possuem a mesma ordem de erro de truncamento  $O(h^2)$ .

# Caso bidimensional

A generalização do método de volumes finitos para uma dimensão maior segue um procedimento análogo ao da seção anterior. Ao final do desenvolvimento, a forma discreta para um problema bidimensional é

$$\begin{aligned} q_{i,j} = & -\frac{1}{\Delta y^2} K_{i,j+\frac{1}{2}} p_{i,j+1} - \frac{1}{\Delta y^2} K_{i,j-\frac{1}{2}} p_{i,j-1} \\ & - \frac{1}{\Delta x^2} K_{i+\frac{1}{2},j} p_{i+1,j} - \frac{1}{\Delta x^2} K_{i-\frac{1}{2},j} p_{i-1,j} \\ & + \left( \frac{1}{\Delta y^2} K_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\Delta y^2} K_{i,j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\Delta x^2} K_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{1}{\Delta x^2} K_{i-\frac{1}{2},j} \right) p_{i,j}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde se usam as médias harmônicas em  $K_{i,j\pm 1/2}$  e  $K_{i\pm 1/2,j}$ .

Após a pressão ser calculada, o campo de velocidades pode ser calculado usando a mesma estratégia de aproximação dos fluxos nas integrais em  $\partial V_{i,j}$ :

$$\begin{aligned} u_L &\simeq -K_{i+\frac{1}{2},j} \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x}, & u_O &\simeq -K_{i-\frac{1}{2},j} \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x} \\ v_N &\simeq -K_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y}, & v_S &\simeq -K_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta y}. \end{aligned}$$

# Caso bidimensional: Implementação

Considerando uma discretização  $M \times N$  células computacionais, o esquema (3.9) pode ser escrito na forma matricial

$$Aw = d$$

com  $w = (p_1, \dots, p_{MN})^t$  e  $b = (q_1, \dots, q_{MN})^t$ . Cada linha da matriz  $A$  está relacionada com uma célula  $(i,j)$  e leva em consideração as contribuições de seus quatro vizinhos. Por exemplo, em uma malha  $3 \times 3$ , as células podem ser ordenadas *por linhas* da esquerda para direita, de cima para baixo:

$i-1,j-1$ 7	$i,j$ 8	$i+1,j+1$ 9
$i-1,j-1$ 4	$i,j$ 5	$i+1,j+1$ 6
$i-1,j-1$ 1	$i,j$ 2	$i+1,j+1$ 3

Figure: Exemplo de ordenação para um problema bidimensional.

## Caso bidimensional: Implementação

Dessa forma, com essa ordenação, a matriz terá uma estrutura pentadiagonal, três diagonais sucessivas e duas a uma distância  $M$  da diagonal principal:

$$A_{9 \times 9} = \begin{bmatrix} x & x & & x \\ x & x & x & & x \\ & x & x & & & x \\ x & & x & x & & x \\ & x & x & x & x & & x \\ & & x & x & x & & x \\ & & & x & x & x & \\ & & & x & x & x & x \\ x & & & & x & x & x \end{bmatrix}.$$

Essa ordenação pode ser calculada por uma relação algébrica dada por

$$k = i + (j - 1)M,$$

onde  $k$  é o número da incógnita e correspondente linha da matriz,  $M$  o número de células em cada linha da malha,  $i = 1, 2, \dots, M$  e  $j = 1, 2, \dots, M$ .

## Caso bidimensional: Implementação

Nota-se que a matriz em questão é quadrada e pode ser descrita por blocos, haja vista

$$\mathbf{A}_{9 \times 9} = \begin{bmatrix} A & C & \\ B & A & C \\ & B & A \end{bmatrix},$$

e portanto, dadas certas propriedades, é possível fatorá-la em duas matrizes (diagonais inferior  $L$  e superior  $U$ ) da forma

$$\mathbf{A}_{9 \times 9} = LU = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 & & \\ \bar{B}_2 & \bar{A}_2 & \\ & \bar{B}_3 & \bar{A}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & \Gamma_1 & \\ & I_2 & \Gamma_2 \\ & & I_3 \end{bmatrix}.$$

Pensando em matrizes mais gerais, com  $Q = M \times N$ , o sistema  $Aw = d$ , então, teria também  $w$  e  $d$  em blocos

$$w = (w^{(1)}, \dots, w^{(Q)})^t \text{ e } d = (d^{(1)}, \dots, d^{(Q)})^t. \quad (3.10)$$

# Caso bidimensional: Exemplo

## Definição

Em um reservatório, quando se secciona uma porção deste lugar em um domínio  $\Omega$  com exatamente poço de injeção e outro de produção (onde se é extraído um fluido), esta porção é denominada como **a quarter of the five spot**. A injeção e produção são induzidas por um termo fonte  $q$

$$q = \begin{cases} \tilde{q} & \text{no poço de injeção} \\ -\tilde{q} & \text{no poço de produção} \\ 0 & \text{no restante do domínio} \end{cases},$$

aplicado em células localizadas em extremos de  $\Omega$ , geralmente a injeção no extremo inferior esquerdo e a produção no superior direito.

# Caso bidimensional: Exemplo

## Exemplo

Dado um problema elíptico bidimensional simplificado como (3.1), uma configuração **a quarter of the five spot** como na definição 1 e condições de contorno homogêneas de Neumann:

$$\begin{cases} \nabla \cdot u = q & \text{em } \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \\ u \cdot n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ -K\nabla p = u & (\text{Velocidade de Darcy}) \end{cases}.$$

Com uma permeabilidade absoluta  $K(x) = 1$  constante, termo fonte  $\tilde{q} = 1$ , poço de injeção na célula  $(1, 1)$  e poço de produção em  $(N, M)$ .

Para resolver com exatidão o problema, foi usado um recurso de **contorno Dirichlet local**, onde se impõe uma pressão em um ponto específico da matriz, nesse caso, o ponto  $(1, 1)$  por simplicidade.

# Caso bidimensional: Implementação

## Exemplo

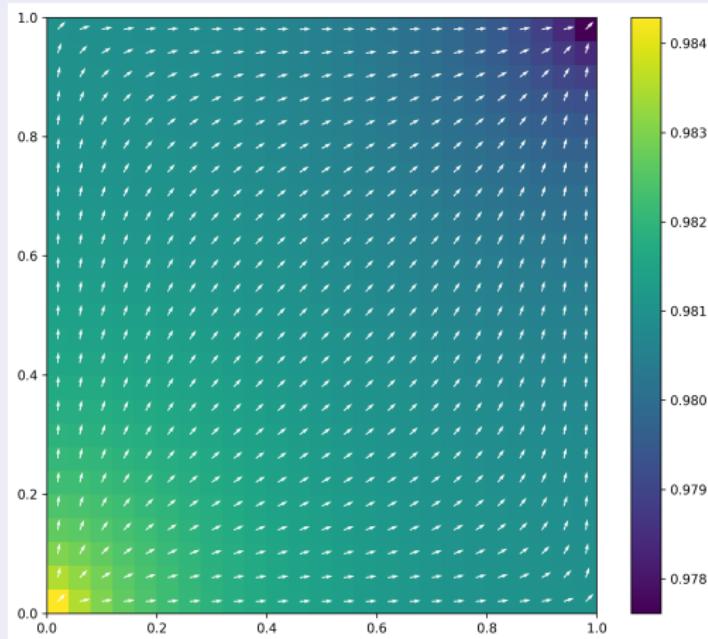


Figure: Campo de pressões e vetores do exemplo.

# Estrutura da apresentação

- ① Definições gerais
- ② Modelagem de escoamentos monofásicos
- ③ Método de volumes finitos para equações elípticas
- ④ Introdução a problemas de transporte passivo em meios porosos
- ⑤ Método de volumes finitos para equações hiperbólicas
- ⑥ Referências

# Problemas de transporte passivo em meios porosos

O movimento de um fluido em escoamento monofásico em meios porosos é descrito por um *problema de transporte passivo*, onde o **fluido marcado** segue o escoamento *sem alterar suas propriedades*.

Com a velocidade do fluido  $u$  obtida através da solução do problema elíptico dado por (3.1) e (1.1), esse deslocamento pode ser estimado pela seguinte equação hiperbólica:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\phi c) + \nabla \cdot (uc) = q & \text{em } \Omega \\ c(x, t=0) = c_0 & \text{em } \Omega \\ c(x, t) = c_b(x, t) & \text{em } \partial\Omega^- \end{cases}, \quad (4.1)$$

onde  $\phi$  é a porosidade,  $q$  é o termo fonte,  $c(x, t)$  é a concentração do contaminante,  $c_0$  é a condição inicial e  $c_b$  é a concentração nas bordas de entrada

$$\partial\Omega^- = \{x \in \partial\Omega; u \cdot n < 0\},$$

onde  $n$  é a normal exterior à fronteira  $\partial\Omega$ .

# Problemas de transporte passivo em meios porosos

Em simulações numéricas, geralmente o termo fonte da equação (4.1) leva em conta os poços de injeção e produção, os quais podem ser convertidos em condições de contorno adequadas, gerando a equação:

$$\begin{cases} \phi \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (uc) = 0 & \text{em } \Omega \\ c(x, t=0) = c_0 & \text{em } \Omega \\ c(x, t) = c_b(x, t) & \text{em } \partial\Omega^- \end{cases}, \quad (4.2)$$

onde a porosidade  $\phi = \phi(x)$  é constante no tempo. Caso a porosidade seja uniforme e constante no tempo, é possível escalarizar a primeira equação de (4.2) para

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + \nabla \cdot (uc) = 0, \quad (4.3)$$

onde  $\tau = t/\phi$ . Admitindo que a velocidade  $u$  é conhecida e não depende da concentração (considerando que  $K$  é constante), têm-se uma **lei de conservação hiperbólica linear**.

# Derivação de leis de conservação hiperbólicas

Aqui, deriva-se uma **lei de balanço** para determinar a conservação de *concentração*  $c(x, t)$  em um domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Essa lei de balanço estabelece que a variação temporal da quantidade  $c$  em um domínio  $\Omega$  é igual a taxa de fluxo de  $c$  por  $\partial\Omega$  mais o total de  $c$  injetado ou retirado de  $\Omega$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \phi c(x, t) \, dx = - \int_{\partial\Omega} f(c(x, t)) \cdot n \, ds + \int_{\Omega} q \, dx, \quad (4.4)$$

onde  $n$  é o vetor normal à  $\partial\Omega$ ,  $f(c)$  é a função de fluxo dependendo de  $c$  (não necessariamente linear) e  $q$  o termo fonte. Com o teorema da divergência:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\phi c(x, t)) + \nabla \cdot f(c(x, t)) - q \right) \, dx = 0. \quad (4.5)$$

Como a equação (4.5) vale para qualquer domínio arbitrário  $\Omega$  e a porosidade  $\phi = \phi(x)$  é constante no tempo, então é possível obter a forma diferencial:

$$\phi \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot f(c) = q \quad (4.6)$$

chamada, então, de **equação diferencial parcial hiperbólica**.

# Estrutura da apresentação

- ① Definições gerais
- ② Modelagem de escoamentos monofásicos
- ③ Método de volumes finitos para equações elípticas
- ④ Introdução a problemas de transporte passivo em meios porosos
- ⑤ Método de volumes finitos para equações hiperbólicas
- ⑥ Referências

# Método de volumes finitos para equações hiperbólicas

Considerando uma lei de conservação hiperbólica da forma (4.6) com  $\phi = 1$  e  $q = 0$ , têm-se a forma unidimensional

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(c) = 0. \quad (5.1)$$

Em cada  $t^n$ , define-se:

$$C_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} c(x, t^n) dx \quad \text{e} \quad \bar{F}_{i \pm \frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(c(x_{i \pm \frac{1}{2}}, t)) dt.$$

Integrando a lei de conservação (5.1) em  $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [t^n, t^{n+1}]$ , separando as integrais e utilizando o teorema fundamental do cálculo, têm-se:

$$C_i^{n+1} = C_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \bar{F}_{i+\frac{1}{2}}^n - \bar{F}_{i-\frac{1}{2}}^n \right). \quad (5.2)$$

Ou seja, a equação acima estabelece um princípio de conservação: *a variação média da concentração na célula é dada pela diferença dos fluxos nas fronteiras da mesma; ainda sem quaisquer tipos de aproximações.*

# Método upwind para aproximação de fluxos discretos

Para aproximar os fluxos discretos  $F_{i \pm 1/2}^n$ , pode-se usar diversos métodos, como:

- *Esquema central* (diferenças finitas);
- Método de *Lax-Friedrichs*; ou
- Método de *Lax-Wendroff*.

O método usado neste trabalho será o **método upwind**, que leva em conta a *estrutura da solução*, de modo que a informação em cada ponto é obtida olhando a direção na qual a mesma se propaga.

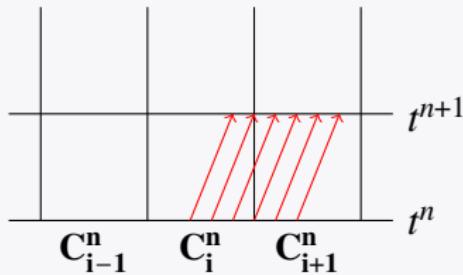


Figure: Propagação da informação em uma célula.

## Método upwind: Caso unidimensional

Considerando  $u^+ = \max\{u, 0\}$  e  $u^- = \min\{u, 0\}$ , é possível discretizar (5.2) no caso de **velocidades constantes**:

$$C_i^{n+1} = C_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (u^+ C_i^n + u^- C_{i+1}^n - u^+ C_{i-1}^n - u^- C_i^n). \quad (5.3)$$

Agora, no caso de **velocidades variáveis**:

$$\begin{aligned} C_i^{n+1} &= C_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left( u^+(x_{i+\frac{1}{2}}) - u^+(x_{i-\frac{1}{2}}) + u^-(x_{i+\frac{1}{2}}) - u^-(x_{i-\frac{1}{2}}) \right) C_i^n \right] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ u^-(x_{i-\frac{1}{2}}) W_{i-\frac{1}{2}} + u^+(x_{i+\frac{1}{2}}) W_{i+\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Também, é preciso satisfazer a **condição CFL**, uma condição necessária, mas não suficiente, para garantir convergência do método de volumes finitos para a equação diferencial. A convergência ocorre caso:

$$u \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1,$$

com  $u$  constante.

# Método upwind: Exemplo do caso unidimensional

## Exemplo

Dado o problema de contorno unidimensional (3.1), que modela o escoamento monofásico de um reservatório saturado, com sistema de equações dado por:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( K \frac{dp}{dx} \right) = -25 \cos(25x) & \text{em } \Omega_e = [0, 1] \\ p = x & \text{sobre } \partial\Omega_e \end{cases} \quad (5.5)$$

onde  $K(x) = 2 + \sin(25x)$ . Será simulado o fluxo de um contaminante com concentrações  $c(x, t)$ , governado pelo sistema:

$$\begin{cases} \partial_t c + u \partial_x c = 0 & \text{em } \Omega_h \\ c_0(x) = e^{-20(3x-.5)^2} + e^{-(3x-3.5)^2} & \text{em } \Omega_h \end{cases},$$

Utilizando a equação (5.4), é possível chegar numa solução visualizada pelos gráficos a seguir:

# Método upwind: Exemplo do caso unidimensional

## Exemplo

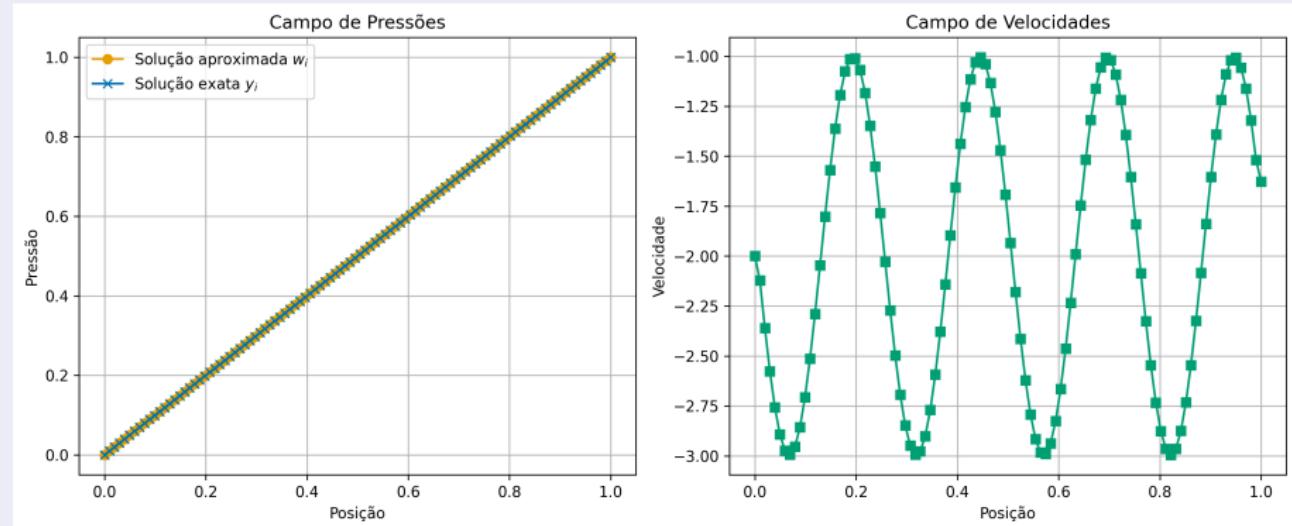


Figure: Campo de pressões e velocidades do exemplo.

# Método upwind: Exemplo do caso unidimensional

## Exemplo

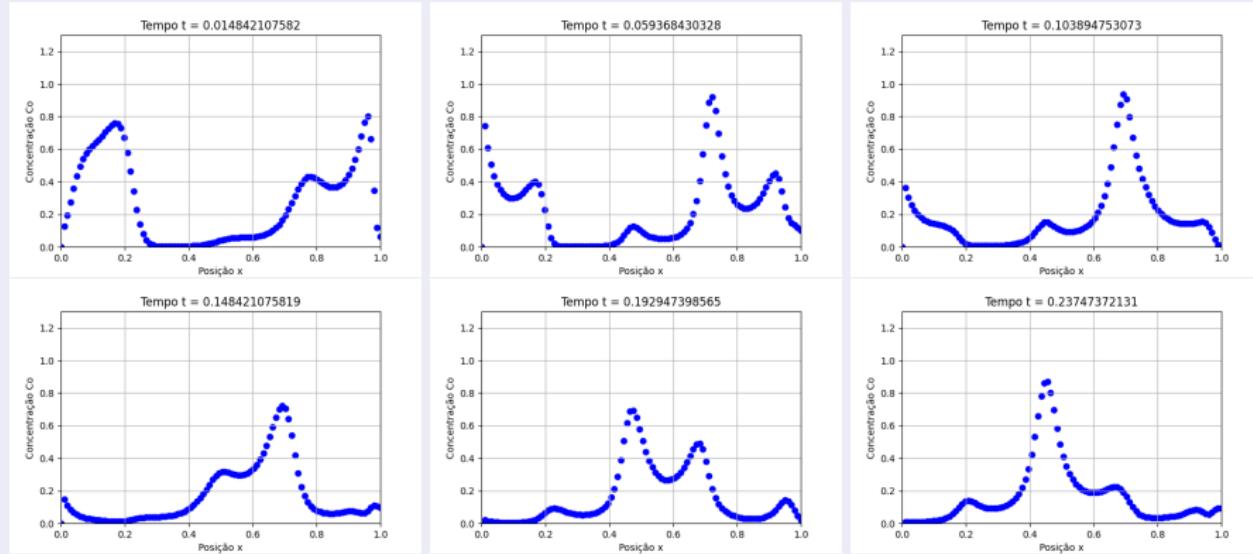


Figure: Gráficos de concentração em tempos diferentes.

# Método upwind: Exemplo do caso unidimensional

## Exemplo

## Método upwind: Caso bidimensional

Para problemas em duas dimensões, a lei de conservação (5.1) assume a forma

$$c_t + f_x(c) + g_y(c) = 0, \quad (5.6)$$

onde a concentração do fluido depende de  $x$ ,  $y$  e  $t$ . Definindo

$$\bar{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n = \frac{1}{\Delta t \Delta y} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} f(c(x_{i+\frac{1}{2}}, y, t)) dy dt \quad (5.7)$$

e

$$\bar{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} g(c(x, y_{j+\frac{1}{2}}, t)) dx dt, \quad (5.8)$$

têm-se

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \bar{F}_{i+\frac{1}{2},j}^n - \bar{F}_{i-\frac{1}{2},j}^n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left( \bar{G}_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \bar{G}_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (5.9)$$

onde os fluxos  $\bar{F}$  e  $\bar{G}$  podem ser aproximados por fluxos discretos em cada direção, assim como em (5.3) ou (5.4).

# Método upwind: Exemplos do caso bidimensional

## Exemplo

O primeiro exemplo é o mais simples: um problema elíptico bidimensional simplificado como (3.1), uma configuração *a quarter of the five spot* como na definição 1 e condições de contorno homogêneas de Neumann:

$$\begin{cases} \nabla \cdot u = q & \text{em } \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \\ u \cdot n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ -K\nabla p = u & (\text{Velocidade de Darcy}) \end{cases}.$$

Com uma permeabilidade absoluta  $K(x, y) = 1$  constante, termo fonte  $\tilde{q} = 1$ , poço de injeção na célula  $(1, 1)$  e poço de produção em  $(N, M)$ .

# Método upwind: Exemplos do caso bidimensional

## Exemplo

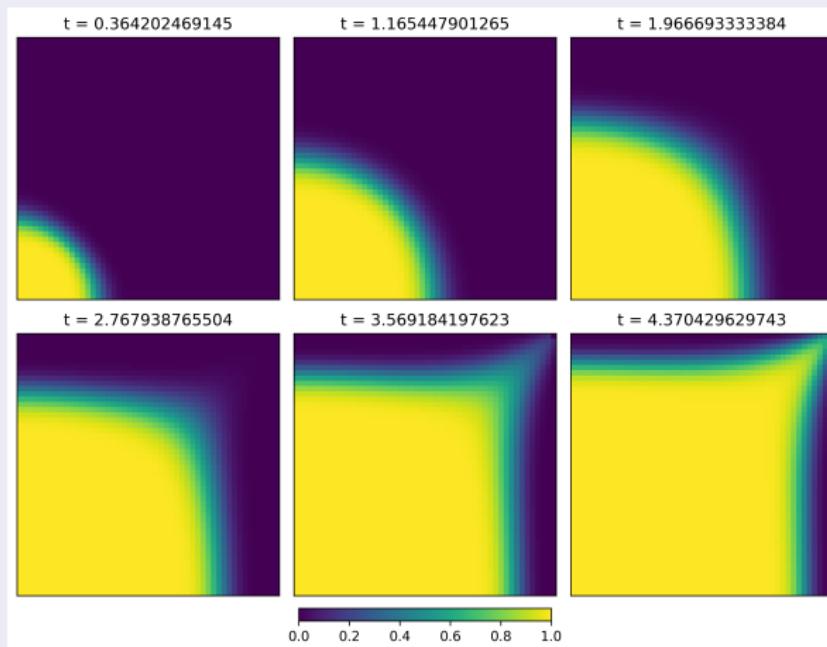


Figure: Painel de dispersão do contaminante para o exemplo.

# Método upwind: Exemplos do caso bidimensional

## Exemplo

# Método upwind: Exemplos do caso bidimensional

## Exemplo

Neste segundo exemplo, dado um problema elíptico bidimensional simplificado como (3.1), uma configuração *a quarter of the five spot*, campo de permeabilidade e de pressões e velocidades visualizados abaixo:

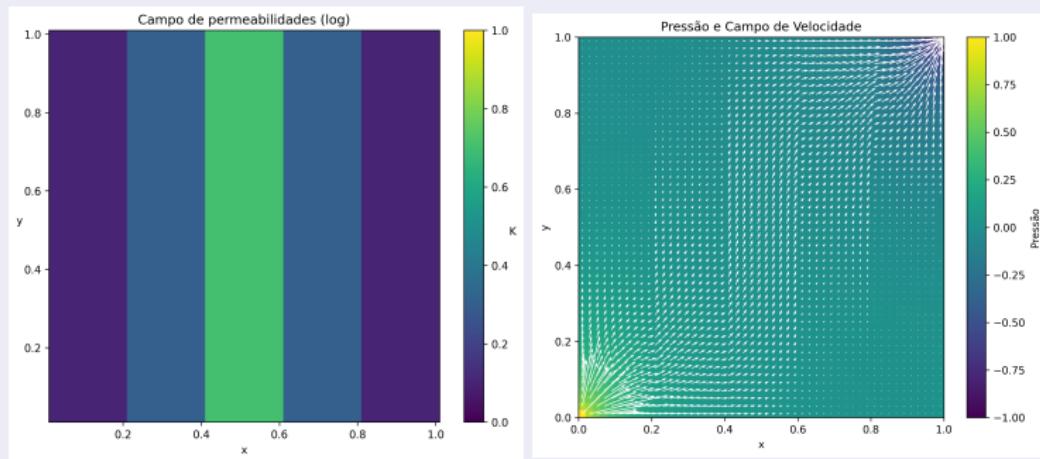


Figure: Gráficos de permeabilidade e de pressão com velocidades não normalizadas.

# Método upwind: Exemplos do caso bidimensional

## Exemplo

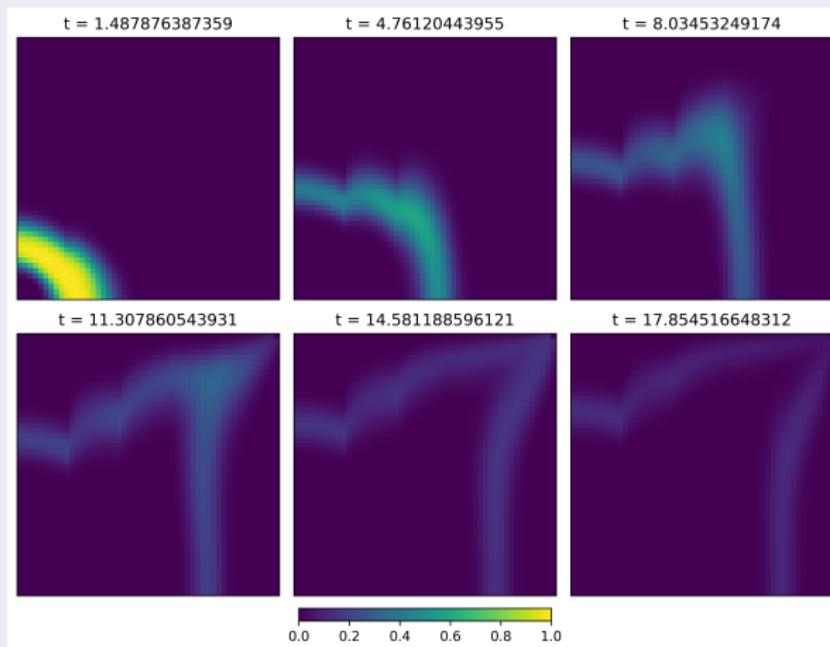


Figure: Painel de dispersão do contaminante para o exemplo.

# Método upwind: Exemplos do caso bidimensional

## Exemplo

# Estrutura da apresentação

- ① Definições gerais
- ② Modelagem de escoamentos monofásicos
- ③ Método de volumes finitos para equações elípticas
- ④ Introdução a problemas de transporte passivo em meios porosos
- ⑤ Método de volumes finitos para equações hiperbólicas
- ⑥ Referências

# Referências I

- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D.; BURDEN, A. M. **Análise Numérica**. 10. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. Tradução de: *Numerical Analysis*. 10. ed. ISBN 978-85-221-2341-4.
- EYMARD, R.; GALLOUËT, T.; HERBIN, R. **Finite Volume Methods**. Amsterdam: North-Holland, 2000. v. 7, p. 713–1020. (Handbook of Numerical Analysis). Título em inglês: "Finite Volume Methods". ISBN 978-0-444-50437-7. DOI: 10.1016/S1570-8659(00)07005-8.
- HIGHAM, N. J. **Accuracy and Stability of Numerical Algorithms**. 2. ed. Philadelphia, PA: Society for Industrial e Applied Mathematics (SIAM), 2002. (Other Titles in Applied Mathematics). ISBN 0-89871-521-0. DOI: 10.1137/1.9780898718027.
- ISAACSON, E.; KELLER, H. B. **Analysis of Numerical Methods**. New York: John Wiley & Sons, 1966. Reprinted by Dover Publications in 1994. ISBN 0-486-68029-0.
- MISHRA, S.; FJORDHOLM, U. S.; ABGRALL, R. **Numerical Methods for Conservation Laws and Related Equations**. [S.l.: s.n.], 2017. Notas de Aula. Acesso em: 23 ago. 2025. Disponível em: <[https://metaphor.ethz.ch/x/2019/hs/401-4671-00L/literature/mishra\\_hyperbolic\\_pdes.pdf](https://metaphor.ethz.ch/x/2019/hs/401-4671-00L/literature/mishra_hyperbolic_pdes.pdf)>.

## Referências II

- SOUSA, F. S.; ROCHA, F. F.** **Métodos de volumes finitos para modelagem computacional de reservatórios de petróleo.** São Carlos, SP: SBMAC, 2022. v. 96, p. 102. (Notas em Matemática Aplicada). ISBN 978-65-86388-18-3.
- STRAUSS, W. A.** **Partial Differential Equations: An Introduction.** 2. ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2008. ISBN 978-0470-05456-7.
- THOMAS, J. W.** **Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods.** New York: Springer, 1995. v. 22. (Texts in Applied Mathematics). ISBN 978-1-4899-7278-1.
- ZILL, D. G.** **A First Course in Differential Equations with Modeling Applications.** 9. ed. Boston, MA: Cengage Learning, 2017. ISBN 978-1-305-96573-6.

# Obrigado!