

Análisis Complejo

Hernán Castro



Instituto de Matemáticas
Universidad de Talca
<https://hcastro-cl.github.io/>
hcastro@utalca.cl.

Licenciado bajo Creative Commons
Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

Template de $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X} 2_{\epsilon}$ creado por Hernán Castro.

Edición del 7 de agosto de 2025

Índice general

1.	Conceptos básicos	1
1.1	Números complejos	1
1.2	Funciones complejas	4
1.2.1	Funciones holomorfas	6
1.2.2	Funciones complejo-diferenciables	9
1.2.3	Funciones analíticas: series de potencias	11
1.2.4	Algunas funciones importantes	18
1.3	Ejercicios	24
2.	Integrales de línea y el teorema de Cauchy	28
2.1	Integrales de línea	28
2.2	Antiderivadas holomorfas	33
2.3	Teorema y fórmula de Cauchy	36
2.3.1	Curvas C^1 a pedazos	39
2.4	Teorema de Goursat	43
2.5	Ejercicios	44
3.	Aplicaciones de la fórmula de Cauchy	47
3.1	Suavidad de las funciones holomorfas	47
3.2	Series de potencia y analiticidad	50
3.3	Estimaciones de Cauchy y el teorema de Liouville	52
3.4	Ceros de funciones holomorfas, parte I	54
3.5	Ejercicios	56
4.	Singularidades y el Teorema de los Residuos	60
4.1	Singularidades	60
4.2	Series de Laurent	62
4.3	Residuos	67
4.3.1	Aplicación: cálculo de integrales reales	72
4.4	Funciones meromorfas y singularidades en infinito	83
4.5	Ejercicios	85

5.	Mas sobre los ceros de funciones holomorfas	88
5.1	El principio del argumento	88
5.2	Aplicaciones del principio del argumento	91
5.3	Ejercicios	96
6.	Mapas Conformes y algo de geometría	98
6.1	Geometría en dimensión 2	98
6.1.1	Geometría Euclidiana o plana	98
6.1.2	Geometría Hiperbólica	99
6.1.3	Geometría Elíptica	99
6.2	Mapas conformes	100
6.2.1	Automorfismos del disco	102
6.2.2	Automorfismos del plano complejo	104
6.2.3	Automorfismos de la esfera de Riemann	106
6.2.4	Otras transformaciones conformes	109
6.3	El Teorema de Riemann	112
6.4	Ejercicios	112
7.	Funciones armónicas	115
7.1	Aspectos básicos	115
7.2	La fórmula de Poisson	117
7.3	Principio de reflexión de Schwarz	121
7.4	Ejercicios	123
A.	Algunos resultados de análisis real	126
	Bibliografía	129

Prefacio

Este apunte ha sido confeccionado para el curso trimestral *Análisis Complejo* dictado en los programas de Magister y Doctorado en Matemáticas de la Universidad de Talca. El propósito de este escrito es recopilar materias expuestas en diversos libros y organizarlas en la manera presentada por el autor en el transcurso del curso.

En este curso se diversos temas relacionados con el análisis complejo. En una primera parte se estudian funciones complejas y se introduce la noción de diferenciabilidad compleja a través de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Posteriormente se revisa el teorema y la fórmula de Cauchy para curvas que son C^1 a pedazos, así como los teoremas de Morera y de Goursat, que permiten ver que las distintas nociones de diferenciabilidad compleja son equivalentes. Adicionalmente se obtiene distintas aplicaciones del Teorema de Cauchy, como lo son las estimaciones de Cauchy y el teorema de Liouville.

Por otra parte, se hace una introducción al estudio de singularidades de funciones complejas donde se revisan el teorema de singularidades removibles de Riemann y el teorema de Casorati-Weierstrass para singularidades esenciales. También se hace un estudio de las series de Laurent donde se obtiene la respectiva fórmula de Cauchy, así como también se obtiene la fórmula de los residuos.

El curso concluye con una breve introducción a los aspectos geométricos de las funciones holomorfas, donde se clasifican los automorfismos del disco $D(0, 1)$, del plano complejo \mathbb{C} y del plano extendido $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Cabe mencionar que tanto algunos contenidos teóricos, como algunos ejemplos han sido extraídos de la bibliografía señalada, con el fin de que este apunte sea lo más auto-contenido posible. Además se han incorporado ejemplos y ejercicios de autoría de quién escribe este manuscrito para complementar los contenidos.

Finalmente, aclarar que este apunte está en permanente construcción, por lo que la exposición de algunas materias, tanto como la lista de ejercicios, puede variar en el tiempo. Además algunos contenidos pueden estar incompletos, y quizás se puedan encontrar algunos errores de tipeo.

Capítulo 1

Conceptos básicos

1.1. Números complejos

Durante este curso usaremos indistintamente diversas notaciones para los números complejos. La primera notación es la cual usa la identificación de \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 , esto es, \mathbb{C} se puede considerar como \mathbb{R}^2 equipado con las siguientes operaciones

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).\end{aligned}$$

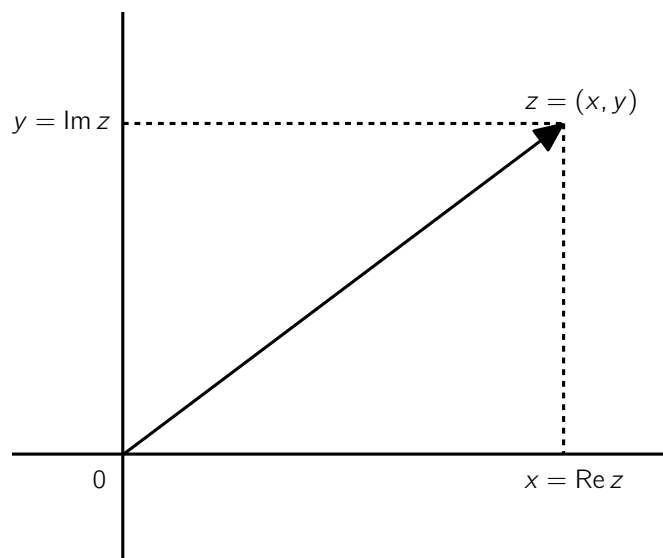


Figura 1.1: Representación vectorial de un número complejo.

Otra notación se obtiene de denotar por $1 = (1, 0)$ e $i = (0, 1)$ y usar estos elementos como base del espacio vectorial \mathbb{R}^2 sobre \mathbb{R} , es decir

$$(x, y) = x \cdot 1 + y \cdot i = x + iy,$$

y usualmente se denota $z \in \mathbb{C}$ como $z = x + iy$, donde $x = \operatorname{Re}(z)$ se dice que es la *parte real* de z e $y = \operatorname{Im}(z)$ es la *parte imaginaria* de z . Un ejercicio es verificar que con estas operaciones \mathbb{C} es un cuerpo y

1.1. NÚMEROS COMPLEJOS

que mediante la identificación $x = (x, 0)$ tenemos que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ como sub-cuerpo. Notar que bajo esta notación, las operaciones se escriben como

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2),\end{aligned}$$

de donde

$$i^2 = -1.$$

También definimos $\bar{z} = x - iy$, el *conjugado* de $z = x + iy \in \mathbb{C}$, que se deja como ejercicio verificar satisface

$$\begin{aligned}\overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w} \\ \overline{z \cdot w} &= \bar{z} \cdot \bar{w} \\ z + \bar{z} &= 2\operatorname{Re} z \\ z - \bar{z} &= 2i\operatorname{Im} z.\end{aligned}$$

Finalmente, usando la identificación de \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 podemos equipar a \mathbb{C} de la topología de la norma Euclidiana en \mathbb{R}^2 . Usando la notación de $z = x + iy$ tenemos que

$$|z| = \|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$$

define una norma que hace que \mathbb{C} sea un espacio métrico completo o de Banach (es isométrico a \mathbb{R}^2). Un ejercicio simple es probar que

$$\begin{aligned}|z|^2 &= z \cdot \bar{z}, \\ |z| &= |\bar{z}|, \\ |zw| &= |z| |w|, \\ |\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)| &\leq |z|,\end{aligned}$$

la identidad de Pitágoras

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re} z_1 \bar{z}_2,$$

y gracias a las propiedades de la norma Euclidiana se deduce que

(desigualdad triangular)

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(desigualdad de Cauchy-Schwarz)

$$\left| \sum_{k=1}^N z_k w_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^N |z_k|^2 \sum_{k=1}^N |w_k|^2$$

Observar que la noción de convergencia en \mathbb{C} está dada por

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z \Leftrightarrow |z_n - z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

que no es mas que la noción de convergencia en \mathbb{R}^2 mediante la norma Euclidiana. Dentro de los conceptos topológicos, usaremos la siguiente notación

$$\begin{aligned}D(z, r) &= \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\} \\ S(z, r) &= \{w \in \mathbb{C} : |z - w| = r\}\end{aligned}$$

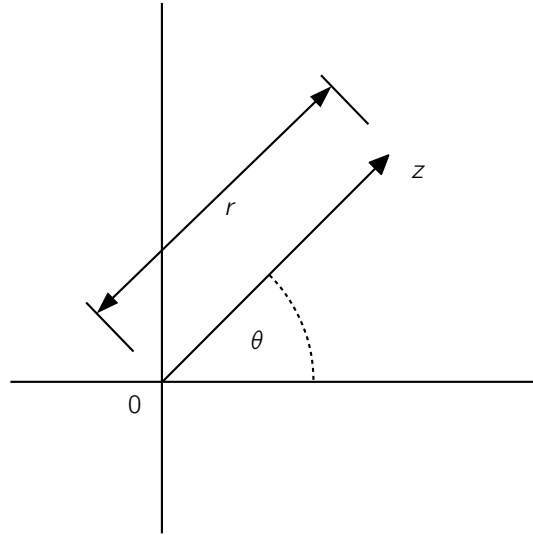


Figura 1.2: Representación polar de un número complejo.

para denotar las bolas (discos) abiertas y las esferas (círculos) cerradas en \mathbb{C} . Notar que $\partial D(z, r) = S(z, r)$ y que $\overline{D(z, r)} = D(z, r) \cup S(z, r)$.

Otra forma de representar números complejos es mediante coordenadas polares en \mathbb{R}^2 , esto es

$$(x, y) = (r, \theta),$$

donde $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, lo que en la notación $z \in \mathbb{C}$ se traduce en

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta),$$

lo que da pie para definir¹ $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Esta definición se puede motivar, al menos formalmente por ahora, de la siguiente manera: recordar que

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\ \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

de donde si usamos $x = i\theta$ tenemos que

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \dots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) \end{aligned}$$

¹Esta identidad se conoce como *identidad de Euler*. Algunas veces se denota $e^{i\theta} = \text{cis } \theta$

$$= \cos(\theta) + i \sin(\theta),$$

lo que dice que, al menos formalmente, nuestra definición tiene concordancia con las funciones reales conocidas.

Con lo anterior como motivación, también podemos *definir*

$$(1.1) \quad e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

y usando las propiedades de e^x , $\cos y$ y $\sin y$ se puede verificar que (ejercicio)

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

Notar que debido a la periodicidad de las funciones trigonométricas, tenemos que e^z es una función $2\pi i$ periódica, esto es

$$e^z = e^{z+2k\pi i} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Con lo anterior, la notación polar de números complejos es $z = r e^{i\theta}$, donde $r = |z|$ y $\theta \in [0, 2\pi)$ (notar que $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2\pi k)}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$). El valor de θ suele denominarse como un *argumento* de z y se denota como $\arg z$. No decimos que es el argumento, pues depende de como midamos los ángulos. Usualmente utilizaremos $\theta \in [0, 2\pi)$ ó $\theta \in (-\pi, \pi]$ (en este último caso se dice que θ es el *argumento principal* que denotaremos por $\text{Arg } z$). En cualquier caso, si pensamos en que los ángulos se miden *módulo* 2π , tenemos que si $z = r_1 e^{i\theta_1}$ y $w = r_2 e^{i\theta_2}$ entonces

$$z \cdot w = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

de donde se concluye que $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$, también conocida como la fórmula de *De Moivre*.

Una de las ventajas de esta notación es que nos permite calcular de manera sencilla las llamadas raíces de la unidad.

Ejemplo 1.1. Encuentre todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^N = 1$. Para resolver este problema, notemos que como $z^N = 1$ entonces $|z|^N = 1$ y por lo tanto $|z| = 1$. En particular z debe ser de la forma $z = e^{i\theta}$ para cierto $\theta \in \mathbb{R}$. Como además sabemos que $1 = e^{i\phi}$ si y solo si $\phi = 2\pi k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, obtenemos que θ debe satisfacer

$$N\theta = 2\pi k \Rightarrow \theta = \frac{2\pi k}{N},$$

luego las N -raíces de la unidad están dadas por $z = e^{i\theta}$ para

$$\theta \in \left\{ 0, \frac{2\pi}{N}, \frac{4\pi}{N}, \dots, \frac{2(N-1)\pi}{N} \right\}.$$

1.2. Funciones complejas

En lo que sigue, y salvo que se señale lo contrario, el conjunto Ω denotará un conjunto abierto en $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Definición 1.1. Decimos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es continua si $f(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(z)$ para todo $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z \in \Omega$. Denotamos a la clase de funciones continuas sobre Ω como $C(\Omega)$ o $C^0(\Omega)$.

Observación 1.1. Notar que si tenemos una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ entonces para cada $z \in \Omega$, $f(z) \in \mathbb{C}$, luego podemos definir

$$u(z) = \text{Re } f(z)$$

$$v(z) = \operatorname{Im} f(z),$$

de donde $f(z) = u(z) + iv(z)$. En este contexto, podemos utilizar la identificación $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ y notar que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es continua si y solo si $u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas.

Las siguientes proposiciones son resultados clásicos de análisis y topología (ver por ejemplo [12, 13].)

Proposición 1.1. *Límite uniforme de funciones continuas es continuo.*

Proposición 1.2 (“Criterio M” de Weierstrass). *Sean $f_k : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones acotadas (resp. continuas) tales que existe una sucesión $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de valores reales tales que*

- $\sup_{z \in \Omega} |f_k(z)| \leq M_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y
- $\sum_{k \in \mathbb{N}} M_k < +\infty$.

Entonces $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k(z)$ está bien definida para todo $z \in \Omega$ y es acotada (resp. continua) de Ω a \mathbb{C} .

Observación 1.2. La convergencia de $\sum_{k=1}^N f_k(z)$ a $\sum_{k \in \mathbb{N}} f_k(z)$ es uniforme en Ω .

Proposición 1.3. *$f : K \rightarrow \mathbb{C}$, f continua y K compacto (conexo), entonces $f(K)$ es compacto (conexo).*

Definición 1.2. *Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, decimos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 si $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ existen y son continuas sobre Ω . La clase de funciones que satisfacen esta propiedad se denotará como $C^1(\Omega)$. De manera similar definimos $C^k(\Omega)$ para $k \in \mathbb{N}$.*

Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es de clase $C^k(\Omega)$ si se puede escribir como $f = u + iv$, donde $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de clase $C^k(\Omega)$.

Ejemplo 1.2. ▪ $f(z) = 0$ es C^∞ .

- $f(z) = z$ y $g(z) = \bar{z}$ son C^∞ .
- $f(z) = |z|$ es C pero no C^1 .
- $f(z) = |z|^2$ es C^∞ .
- $P(z) = \sum_{j,k=0}^n a_{jk} z^j \bar{z}^k$ es C^∞ .

En \mathbb{R}^2 tenemos dos direcciones independientes, las direcciones “x” e “y”, y a partir de ellas podemos definir las respectivas derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial y}$. Una particularidad de estas derivadas parciales es que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial x} &= 1 & \frac{\partial y}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial x}{\partial y} &= 0 & \frac{\partial y}{\partial y} &= 1. \end{aligned}$$

En variable compleja, también podemos pensar que tenemos dos direcciones, la dirección “z” y la dirección “ \bar{z} ” (notar que $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ e $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$), y quisiéramos definir un concepto de derivada parcial que satisfaga

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial z} &= 1 & \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} &= 0 & \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} &= 1. \end{aligned}$$

1.2. FUNCIONES COMPLEJAS

Si recordamos que $z = x + iy$ entonces es natural pensar que $\frac{\partial}{\partial z} = a\frac{\partial}{\partial x} + ib\frac{\partial}{\partial y}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = c\frac{\partial}{\partial x} + id\frac{\partial}{\partial y}$. Si resolvemos el sistema de ecuaciones para a, b, c, d (ejercicio) obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Proposición 1.4. El operador $\frac{\partial}{\partial z}$ es lineal (escalares en \mathbb{C}), satisface la regla de Leibniz, la regla del cociente, y la regla de la cadena, esto es

$$\frac{\partial}{\partial z} (af + g) = a \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial z} g + f \frac{\partial g}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial z} g - f \frac{\partial g}{\partial z}}{g^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (f \circ g) = \frac{\partial f}{\partial z} \circ g \cdot \frac{\partial g}{\partial z}.$$

Lo mismo ocurre para $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Demostración. Ejercicio. ■

Corolario 1.5. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial z} (z^n) = nz^{n-1}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\bar{z}^n) = n\bar{z}^{n-1}$$

Además $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(k) = \frac{\partial}{\partial z}(k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{C}$.

Demostración. Argumentamos por inducción en n y notamos que el caso $n = 1$ es inmediato debido a la construcción de $\frac{\partial}{\partial z}$.

Si el resultado es cierto para n , entonces de la regla de Leibniz podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (z^{n+1}) &= \frac{\partial}{\partial z} (z \cdot z^n) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} (z) \cdot z^n + z \frac{\partial}{\partial z} (z^n) \\ &= z^n + z \cdot nz^{n-1} \\ &= (n+1)z^n. \end{aligned}$$

Esto prueba el resultado para $n \geq 0$. El caso en que $n < 0$ y la derivada respecto a \bar{z} se dejan como ejercicio. ■

1.2.1. Funciones holomorfas

Definición 1.3 (Función holomorfas). Diremos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa en Ω si f es una función de clase C^1 en Ω que además satisface

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

en todo punto de Ω .

Al conjunto de las funciones holomorfas sobre Ω lo denotaremos $\mathcal{H}(\Omega)$.

Ejemplo 1.3. ■ $f(z) = 0$ es holomorfa en \mathbb{C} .

- $f(z) = z$ es holomorfa en \mathbb{C} .
- $f(z) = |z|^2$ es de clase C^1 pero no es holomorfa.
- $f(z) = z^n$ es holomorfa en \mathbb{C} si $n \geq 0$, y en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ si $n < 0$.
- $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ es holomorfo en \mathbb{C} .
- $P(z) = \sum_{n,m=0}^{N,M} a_{n,m} z^n \bar{z}^m$ es holomorfo si y solo si $a_{n,m} = 0$ para todo $m \geq 1$.

Proposición 1.6 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann). Si $f = u + iv$ es holomorfa, entonces u, v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$(C-R) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si $u, v \in C^1(\Omega)$ que satisfacen (C-R) en todo Ω , entonces $f = u + iv$ es una función holomorfa en Ω .

Demostración. Si $f = u + iv$ es holomorfa, entonces $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, lo que se traduce en que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

es decir

$$f_x = -if_y,$$

pero $f_x = u_x + iv_x$ y $f_y = u_y + iv_y$, luego

$$u_x + iv_x = -i(u_y + iv_y) = v_y - iu_y,$$

de donde

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ v_x &= -u_y. \end{aligned}$$

■

Proposición 1.7. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} (f_x - if_y) \\ &= \frac{1}{2} ((u_x + iv_x) - i(u_y + iv_y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} ((u_x + iv_x) - i(-v_x + iu_x)) \\
 &= \frac{1}{2} (2u_x + 2iv_x) \\
 &= f_x \\
 &= -if_y.
 \end{aligned}$$

■

Proposición 1.8. Sea $f = u + iv : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función de clase C^2 que además es holomorfa, entonces $u_{xx} + u_{yy} = 0$ y $v_{xx} + v_{yy} = 0$.

Demostración. Como f es de clase C^2 , entonces u es de clase C^2 , y de las ecuaciones de Cauchy-Riemann tenemos que

$$\begin{aligned}
 u_x &= v_y \\
 v_x &= -u_y.
 \end{aligned}$$

derivando la primera identidad respecto a x y la segunda respecto a y obtenemos que

$$\begin{aligned}
 u_{xx} &= v_{yx} \\
 v_{xy} &= -u_{yy},
 \end{aligned}$$

pero como v es de clase C^2 se debe tener que $v_{xy} = v_{yx}$, de donde se sigue el resultado para u . La demostración para v es análoga. ■

Definición 1.4. Una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 se dice armónica si satisface $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$. El operador diferencial

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

se conoce como operador de Laplace o Laplaciano.

Proposición 1.9.

$$\Delta = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z}$$

Demostración. Sea u una función de clase C^2 , entonces

$$\begin{aligned}
 4 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right) &= 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
 &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
 &= u_{xx} + i u_{yx} - i u_{xy} + u_{yy} \\
 &= \Delta u.
 \end{aligned}$$

La otra identidad se obtiene de forma similar. ■

Volveremos sobre este tipo de funciones en el Capítulo 7.

1.2.2. Funciones complejo-diferenciables

Definición 1.5 (Diferenciabilidad). Diremos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable² en $z_0 \in \Omega$ si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existe. Cuando dicho límite existe, lo denotamos por $f'(z_0)$.

Observación 1.3. Notar que al igual que en análisis en \mathbb{R} , una función diferenciable en z_0 es continua en z_0 , esto ocurre pues existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |h| < \delta$

$$\left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) \right| < 1,$$

luego

$$|f(z_0 + h) - f(z_0)| < |h| (1 + |f'(z_0)|) \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0,$$

pues $f(z_0) \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 1.4. Veamos que $f(z) = z$ es diferenciable. Para ello, si $h \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$\frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \frac{z + h - z}{h} = 1,$$

luego $f'(z) = 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Por otra parte $f(z) = \bar{z}$, a pesar de ser una función de clase C^1 en todo \mathbb{C} , *no es diferenciable en $z_0 = 0$* . En efecto, notemos que si $h = t \in \mathbb{R}$ con $t \rightarrow 0$, entonces

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{t}{t} = 1,$$

pero si $h = it$, con $t \in \mathbb{R}$ y $t \rightarrow 0$, entonces

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{-it}{it} = -1,$$

luego f no puede ser diferenciable en $z_0 = 0$.

Proposición 1.10. Si f, g son diferenciables en z_0 , entonces $f + g, f - g, f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ son diferenciables en z_0 y las derivadas satisfacen las reglas respectivas.

Demostración. La demostración es la misma de diferenciabilidad en \mathbb{R} que se basa en las propiedades del límite. Los detalles se dejan como ejercicio. ■

Teorema 1.11. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función diferenciable en z_0 . Entonces $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen en z_0 y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en z_0 .

Demostración. Como f es diferenciable en $z_0 = x_0 + iy_0$ tenemos que $f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ y el límite se puede calcular con cualquier sucesión $h \rightarrow 0$. En particular podemos tomar $h = t$ con $t \in \mathbb{R}$ y obtener

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

²En algunos textos se enfatiza esta definición diciendo que f se dice *compleja-diferenciable*.

y si tomamos $h = it$ con $t \in \mathbb{R}$ obtenemos que

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + it) - f(z_0)}{it} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{it} = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0),$$

de donde se concluye que ambas derivadas parciales existen y que $f_x(z_0) = -if_y(z_0)$ que corresponde a las ecuaciones de Cauchy-Riemann en z_0 . ■

Observación 1.4. Recordar que en análisis real puede ocurrir que una función que sea diferenciable en todo punto y su derivada no es continua.

Basado en eso uno podría pensar que si una función que es diferenciable compleja en todo punto entonces no necesariamente es de clase C^1 , sin embargo veremos mas adelante (Teoremas de [Goursat](#) y [Morera](#)) que esta situación *no ocurre en análisis complejo*, es decir, una función que es diferenciable compleja en todo punto de un disco entonces ha de ser holomorfa en dicho disco (en particular será de clase C^1).

Corolario 1.12. Sea f una función diferenciable en z_0 , entonces $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

Teorema 1.13. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, entonces f es diferenciable en todo punto z_0 de Ω y

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f_x(z_0) = -if_y(z_0).$$

Demostración. Sea $z \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$ pequeño tal que si $h \in D(0, \varepsilon)$ entonces $z + h \in \Omega$. Debemos probar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}$$

existe. Para ello, probaremos que el límite existe y es igual a $f_x(z)$. Notemos que si $f = u + iv$ entonces

$$\frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \frac{u(z + h) - u(z)}{h} + i \frac{v(z + h) - v(z)}{h},$$

luego si consideramos $z = x + iy$, $h = \xi + i\eta$ y analizamos el primer término tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{u(z + h) - u(z)}{h} &= \frac{u(x + \xi, y + \eta) - u(x, y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{u(x + \xi, y + \eta) - u(x + \xi, y)}{\xi + i\eta} + \frac{u(x + \xi, y) - u(x, y)}{\xi + i\eta}. \end{aligned}$$

Gracias al teorema del valor medio, deben existir $t_1, t_2 \in [0, 1]$ tales que

$$\begin{aligned} u(x + \xi, y + \eta) - u(x + \xi, y) &= u_y(x + \xi, y + t_1\eta)\eta \\ u(x + \xi, y) - u(x, y) &= u_x(x + t_2\xi, y)\xi, \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{u(z + h) - u(z)}{h} = u_y(x + \xi, y + t_1\eta) \frac{\eta}{\xi + i\eta} + u_x(x + t_2\xi, y) \frac{\xi}{\xi + i\eta}.$$

De manera análoga existen $t_3, t_4 \in [0, 1]$ tales que

$$\frac{v(z + h) - v(z)}{h} = v_y(x + \xi, y + t_3\eta) \frac{\eta}{\xi + i\eta} + v_x(x + t_4\xi, y) \frac{\xi}{\xi + i\eta}.$$

Definamos $z_1 = x + \xi + i(y + t_1\eta)$, $z_2 = x + t_2\xi + iy$, $z_3 = x + \xi + i(y + t_3\eta)$ y $z_4 = x + t_4\xi + iy$, de donde podemos escribir

$$\frac{f(z + h) - f(z)}{h} = \frac{\eta}{\xi + i\eta} (u_y(z_1) + iv_y(z_3)) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} (u_x(z_2) + iv_x(z_4)),$$

y como queremos probar que esto converge a $f_x(z)$ debemos estimar

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_x(z)$$

pero gracias a que f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann ($if_x(z) = f_y(z)$), podemos escribir

$$\begin{aligned} f_x(z) &= \frac{h}{h} f_x(z) \\ &= \frac{\xi}{\xi + i\eta} f_x(z) + \frac{i\eta}{\xi + i\eta} f_x(z) \\ &= \frac{\xi}{\xi + i\eta} f_x(z) + \frac{\eta}{\xi + i\eta} f_y(z) \\ &= \frac{\xi}{\xi + i\eta} (u_x(z) + iv_x(z)) + \frac{\eta}{\xi + i\eta} (u_y(z) + iv_y(z)), \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_x(z) &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} [(u_y(z_1) - u_y(z)) + i(v_y(z_3) - v_y(z))] \\ &\quad + \frac{\xi}{\xi + i\eta} [(u_x(z_2) - u_x(z)) + i(v_x(z_4) - v_x(z))]. \end{aligned}$$

Pero si $h \rightarrow 0$ tenemos que $z_j \rightarrow z$, $j = 1, \dots, 4$, y por lo tanto, de la continuidad de u_x , u_y , v_x y v_y y el hecho que $\left| \frac{\xi}{\xi + i\eta} \right|, \left| \frac{\eta}{\xi + i\eta} \right| \leq 1$ concluimos que

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f_x(z) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

lo que demuestra la diferenciabilidad de f y además que $f'(z_0) = f_x(z_0) = -if_y(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$. ■

1.2.3. Funciones analíticas: series de potencias

Definición 1.6. Una serie de potencias es una serie (formal) con una cantidad numerable de términos de la forma

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

donde $c_k \in \mathbb{C}$ y $z, z_0 \in \mathbb{C}$.

Para que cobre sentido la definición anterior en análisis complejo, es necesario hablar de la convergencia de la serie formal. El primer resultado en dicho sentido es el siguiente:

Lema 1.14 (Abel). Sea $S(z) = \sum_{k \geq 0} c_k (z - z_0)^k$ una serie de potencias para la cual existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $S(z_1)$ es convergente. Entonces $S(z)$ es convergente (absolutamente) para todo $z \in D(z_0, r)$ donde $r = |z_0 - z_1|$.

Demostración. Ejercicio. ■

Este lema garantiza que si la serie es convergente en algún punto $z_1 \neq z_0$ entonces la serie converge en todo un disco en torno a z_0 . Esto da pie para definir:

Definición 1.7 (Radio de convergencia). Dada una serie de potencias $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, definimos su radio de convergencia como

$$R = \sup \{r \geq 0 : S(w) \text{ es convergente para } |w - z_0| = r\}.$$

Al disco $D(z_0, R)$ lo llamaremos el disco de convergencia de la serie.

Definición 1.8. Dada una serie de potencias $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ consideramos

$$L = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}.$$

Definimos la cantidad $\hat{R} = \frac{1}{L}$, donde asumimos que si $L = 0$ entonces $\hat{R} = +\infty$ y si $L = +\infty$ entonces $\hat{R} = 0$.

Esta definición está motivada por la siguiente

Proposición 1.15 (Criterio de la raíz). Sea $(c_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ una sucesión de números complejos.

- Si $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} < 1$, entonces la serie $\sum_{k \geq 0} c_k$ es convergente en \mathbb{C} .
- Si $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 1$, entonces la serie $\sum_{k \geq 0} c_k$ es divergente en \mathbb{C} .

Demostración. Ejercicio. ■

El siguiente teorema nos dice que $R = \hat{R}$:

Teorema 1.16 (Cauchy-Hadamard). Sea una $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ una serie de potencias tal que $\hat{R} > 0$.

1. Si $|z - z_0| < \hat{R}$, entonces $S(z)$ converge absolutamente.
2. Si $|z - z_0| > \hat{R}$, entonces $S(z)$ no converge.

Observación 1.5. El estudio de la convergencia de una serie de potencias en cuando $|z - z_0| = \hat{R}$ es un tema delicado y se debe realizar caso a caso, pues no hay una regla general. Ver por ejemplo los Ejercicios 1.18 a 1.20 y 1.23, y para profundizar mas en el tema ver [5, 6, 9].

Demostración. Veamos el caso $0 < \hat{R} < \infty$. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| < \hat{R}$. Luego debe existir $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| = \hat{R}(1 - 2\delta)$. Por otra parte, de la definición de \hat{R} tenemos que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{\hat{R}},$$

de donde

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{\frac{1}{k}} |z - z_0| = 1 - 2\delta.$$

De la definición de \limsup tenemos que debe existir $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0$ entonces

$$|c_k|^{\frac{1}{k}} |z - z_0| < 1 - \delta,$$

luego

$$|c_k| |z - z_0|^k < (1 - \delta)^k,$$

es decir, la cola de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| |z - z_0|^k$ está dominada por una serie geométrica convergente.

1.2. FUNCIONES COMPLEJAS

De manera similar, si $|z - z_0| > \hat{R}$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| = \hat{R}(1 + 2\delta)$, luego

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{\frac{1}{k}} |z - z_0| = 1 + 2\delta.$$

Con esto podemos construir una sucesión $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$|c_{k_n}|^{\frac{1}{k_n}} |z - z_0| > 1 + \delta,$$

de donde se deduce que una infinidad de términos de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ están dominados inferiormente (en valor absoluto) por valores mayores a 1, luego la serie no puede ser convergente (recordar que el término general de una serie convergente debe converger a 0).

El caso $\hat{R} = +\infty$ se deja como ejercicio. ■

Observación 1.6. Sea $S(z)$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Entonces para todo $0 < r < R$, la convergencia de la serie de potencias es uniforme en $D(0, r)$, lo que hace que $S(z)$ sea una función continua en $D(0, R)$. Esto es consecuencia del [criterio-M de Weierstrass](#).

En algunas situaciones puede ser conveniente tener herramientas alternativas para calcular el radio de convergencia de una serie, una de ellas es el criterio de los cocientes que es consecuencia del siguiente:

Lema 1.17. Sea $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de reales no-negativos. Entonces

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{c_{k+1}}{c_k} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} c_k^{\frac{1}{k}} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} c_k^{\frac{1}{k}} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{c_{k+1}}{c_k}.$$

Demostración. Ejercicio. ■

Corolario 1.18. Sea $(c_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

- Si $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} < 1$, entonces la serie $\sum_{k \geq 0} c_k$ es absolutamente convergente.
- Si $\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} > 1$, entonces la serie $\sum_{k \geq 0} c_k$ es divergente.

Además, si consideramos \tilde{R} dado por la relación

$$\frac{1}{\tilde{R}} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|c_{k+1}|}{|c_k|},$$

entonces la serie $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ es absolutamente convergente en $D(z_0, \tilde{R})$.

Observación 1.7. No se puede decir que la serie diverge si $|z - z_0| > \tilde{R}$ y por lo tanto, en general $\tilde{R} \leq R$.

Teorema 1.19. Sea $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Entonces S es diferenciable en $D(z_0, R)$ y su derivada está dada por

$$S'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1}.$$

Demostración. Sin perder generalidad supondremos que $z_0 = 0$, ya que podemos considerar $\tilde{S}(z) = S(z + z_0)$ y luego utilizar la regla de la cadena para concluir que $S'(z) = \tilde{S}'(z - z_0)$. Primero observemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} k c_k z^{k-1}$$

1.2. FUNCIONES COMPLEJAS

tienen radio de convergencia R . En efecto, como $\sqrt[k]{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 1$ tenemos que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k c_k} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{c_k} = L.$$

Veamos ahora que S es diferenciable si $0 < R < \infty$ (el caso $R = +\infty$ se deja como ejercicio). Sea $z \in D(0, R)$, debemos probar que para $h \neq 0$, pero cercano a 0 (de modo que $z + h \in D(0, R)$)

$$\frac{S(z+h) - S(z)}{h} - \sum_{k=0}^{\infty} k c_k z^{k-1} \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0,$$

para ello notemos que

$$\begin{aligned} \frac{S(z+h) - S(z)}{h} - \sum_{k=0}^{\infty} k c_k z^{k-1} &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{(z+h)^k - z^k}{h} - k z^{k-1} \right) \\ &= c_1 \left(\frac{h}{h} - 1 \right) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k \left(\frac{(z+h)^k - z^k}{h} - k z^{k-1} \right) \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} c_k \left(\frac{(z+h)^k - z^k}{h} - k z^{k-1} \right) \end{aligned}$$

Notar que si $z = 0$ entonces el factor que acompaña a c_k es igual a h^{k-1} para $k \geq 2$, de donde tenemos que

$$\frac{S(z+h) - S(z)}{h} - \sum_{k=0}^{\infty} k c_k z^{k-1} = \sum_{k=2}^{\infty} c_k h^{k-1} = h \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2} h^k = h \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k h^k$$

pero el radio de convergencia de la serie con \tilde{c}_k es R , luego como $h \in D(0, R)$ para h cercano a 0 de donde tenemos que

$$\left| \frac{S(z+h) - S(z)}{h} - \sum_{k=0}^{\infty} k c_k z^{k-1} \right| \leq C |h| \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0.$$

Supongamos ahora que $z \neq 0$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{(z+h)^k - z^k}{h} &= \frac{\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} z^{k-j} h^j - z^k}{h} \\ &= \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} z^{k-j} h^{j-1} \\ &= \binom{k}{1} z^{k-1} h^0 + \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} z^{k-j} h^{j-1} \\ &= k z^{k-1} + \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} z^{k-j} h^{j-1}, \end{aligned}$$

luego

$$\frac{(z+h)^k - z^k}{h} - k z^{k-1} = \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} z^{k-j} h^{j-1}$$

$$= h \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} z^{k-j} h^{j-2}.$$

Pero si $j \geq 2$

$$\begin{aligned} \binom{k}{j} &= \frac{k!}{j!(k-j)!} \\ &= \frac{k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-(j-1))}{j(j-1) \cdot \dots \cdot 1} \\ &= \frac{k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-(j-3))(k-(j-2))(k-(j-1))}{j(j-1)(j-2) \cdot \dots \cdot 1} \\ &= \frac{(k-(j-2))(k-(j-1))}{j(j-1)} \cdot \frac{k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-(j-3))}{(j-2) \cdot \dots \cdot 1} \\ &= \frac{(k-(j-2))(k-(j-1))}{j(j-1)} \cdot \binom{k}{j-2}, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que $j \geq 1$, $j-1 \geq 1$ y que $k-(j-2) \leq k$, $k-(j-1) \leq k$, luego

$$\frac{(k-(j-2))(k-(j-1))}{j(j-1)} \leq k^2,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \left| \frac{(z+h)^k - z^k}{h} - k z^{k-1} \right| &\leq |h| k^2 \sum_{j=2}^k \binom{k}{j-2} |z|^{k-j} |h|^{j-2} \\ &= |h| k^2 \sum_{l=0}^{k-2} \binom{k}{l} |z|^{k-l-2} |h|^l \\ &= \frac{|h| k^2}{|z|^2} \sum_{l=0}^{k-2} \binom{k}{l} |z|^{k-l} |h|^l \\ &\leq \frac{|h| k^2}{|z|^2} (|z| + |h|)^k, \end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$\left| \frac{S(z+h) - S(z)}{h} - \sum_{k=0}^{\infty} k c_k z^{k-1} \right| \leq \frac{|h|}{|z|^2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |c_k| (|z| + |h|)^k.$$

Finalmente, como $z \in D(0, R)$, tenemos que existe $\delta > 0$ tal que $|z| \leq R - 2\delta$ y si $h \in D(0, \delta)$, entonces $|z| + |h| \leq R - \delta$. Observando que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |c_k| w^k$$

también tiene radio de convergencia R , deducimos que para $w = R - \delta$ la serie de arriba es convergente y por lo tanto

$$\left| \frac{S(z+h) - S(z)}{h} - \sum_{k=0}^{\infty} k c_k z^{k-1} \right| \leq \frac{|h|}{|z|^2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |c_k| (R - \delta)^k \leq C \frac{|h|}{|z|^2},$$

de donde concluimos lo deseado cuando $h \rightarrow 0$. ■

Ejemplo 1.5. 1. $\sum_{k \geq 0} z^k$ tiene radio de convergencia 1.

2. $\sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k}$ tiene radio de convergencia 1.

3. $\sum_{k \geq 0} (1 + (-1)^k)^k z^k$ tiene radio de convergencia $\frac{1}{2}$.

4. $E(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!}$ tiene radio de convergencia $+\infty$, y además

$$E'(z) = E(z)$$

$$E(0) = 1$$

$$E(x) \in \mathbb{R} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Corolario 1.20. Una serie de potencias es infinitamente diferenciable en su dominio de convergencia.

Demostración. Notar que $S'(z) = \sum_{k \geq 0} k c_k z^{k-1}$ tiene el mismo radio de convergencia que S , luego se puede aplicar el resultado anterior a S' . ■

Observación 1.8. Este resultado demuestra que toda serie de potencias es holomorfa³ en su disco de convergencia.

Corolario 1.21. Supongamos que $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ tiene radio de convergencia $R > 0$. Entonces

$$c_j = \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!},$$

donde $f^{(j)}$ denota la j -ésima derivada.

Demostración. Notar que por definición $f(z_0) = c_0$. Si derivamos la serie obtenemos que

$$f'(z) = \sum_{k \geq 0} k c_k (z - z_0)^{k-1} = \sum_{k \geq 1} k c_k (z - z_0)^{k-1},$$

de donde $f'(z_0) = c_1$. De manera similar se tiene que

$$f''(z) = \sum_{k \geq 1} k(k-1) c_k (z - z_0)^{k-2} = \sum_{k \geq 2} k(k-1) c_k (z - z_0)^{k-2},$$

de donde $f''(z_0) = 2 \cdot 1 c_2 = 2! c_2$. En general se tiene que

$$f^{(j)}(z) = \sum_{k \geq j} k(k-1) \cdots (k-j+1) c_k (z - z_0)^{k-j} = \sum_{k \geq j} k! c_k (z - z_0)^{k-j},$$

de donde se concluye que

$$f^{(j)}(z_0) = j! c_j. \quad \blacksquare$$

Teorema 1.22 (Unicidad de la serie). Sea $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Suponga que existe $z_n \rightarrow z_0$, $z_n \neq z_0$ tal que $f(z_n) = 0$ para todo n . Entonces $c_k = 0$ para todo k .

³También es diferenciable, su derivada es continua y satisface Cauchy-Riemann.

Demostración. Como f es continua, tenemos que $0 = f(z_n) \rightarrow f(z_0) = c_0$. Esto dice que

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \\ &= c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_3(z - z_0)^3 + \dots \\ &= c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

luego

$$\frac{f(z)}{z - z_0} = c_1 + c_2(z - z_0) + \dots$$

por lo tanto

$$0 = \frac{f(z_n)}{z_n - z_0} = c_1 + c_2(z_n - z_0) + \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c_1.$$

De manera similar obtenemos que si hemos probado que $c_j = 0$ para todo $j = 0, 1, \dots, k$, entonces

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} = c_{k+1} + c_{k+2}(z - z_0) + \dots,$$

de donde concluimos que

$$0 = \frac{f(z_n)}{(z_n - z_0)^{k+1}} = c_{k+1} + c_{k+2}(z_n - z_0) + \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c_{k+1}.$$

■

Corolario 1.23. Supongamos que $\sum a_k(z - z_0)^k$ y $\sum b_k(z - z_0)^k$ son dos series de potencia con radios de convergencia $R > 0$ que coinciden en un conjunto que tiene a z_0 como punto de acumulación, entonces $a_k = b_k$ para todo k .

Demostración. Basta considerar la serie de potencias $\sum_{k \geq 0} (a_k - b_k)(z - z_0)^k$ a lo largo de una sucesión $z_n \rightarrow z_0$. ■

Definición 1.9. Una función $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ que se puede escribir como una serie de potencias en torno a cualquier punto de D se dice que es analítica.

Teorema 1.24. Toda serie de potencias $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k(z - z_0)^k$ con radio de convergencia $R > 0$ es analítica en su disco de convergencia $D(z_0, R)$.

Para demostrar este teorema es conveniente recordar el siguiente resultado

Lema 1.25. Sea $(a_{k,n})_{k,n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ una bi-sucesión tal que $\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^k |a_{k,n}|$ converge, entonces

- $\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^k a_{k,n}$ converge en \mathbb{C} .
- $\sum_{k \geq n} a_{k,n}$ converge para todo n fijo y $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \geq n} a_{k,n}$ converge.
- $\sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{n=0}^k a_{k,n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \geq n} a_{k,n}$.

Demostración del Teorema 1.24. Como antes, supondremos sin perder generalidad que $z_0 = 0$. Sea $w_0 \in D(0, R)$, veamos que f se puede escribir como una serie de potencias centrada en w_0 , esto es

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k (z - w_0)^k.$$

Para ello primero notemos que

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k = \sum_{k \geq 0} a_k (w_0 + z - w_0)^k = \sum_{k \geq 0} a_k \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} w_0^{k-n} (z - w_0)^n.$$

Por lo tanto, formalmente tenemos que

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k \geq 0} a_k \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} w_0^{k-n} (z - w_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} a_k w_0^{k-n} (z - w_0)^n \\ &= \sum_{0 \leq n \leq k < \infty} \binom{k}{n} a_k w_0^{k-n} (z - w_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} a_k w_0^{k-n} \right) (z - w_0)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} c_n (z - w_0)^n. \end{aligned}$$

Para justificar las igualdades usamos el Lema 1.25. Los detalles se dejan como ejercicios al lector. ■

Definición 1.10. Una función analítica sobre todo \mathbb{C} (radio de convergencia $R = +\infty$) se dice entera.

1.2.4. Algunas funciones importantes

La función exponencial

Recordemos que habíamos definido formalmente la exponencial de un número complejo $z = x + iy$ como

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

usando como inspiración las series de potencias (reales) de las funciones involucradas. A continuación veremos que esta definición se puede obtener por caminos completamente distintos y que tienen como punto de partida la restricción de que la función exponencial $E : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que definamos debe coincidir con la exponencial real e^x cuando se tome $z \in \mathbb{R}$.

Opción 1: Queremos encontrar una función E , continua y diferenciable en \mathbb{C} que satisfaga

$$\begin{aligned} E(z) &= e^z \quad \text{si } z \in \mathbb{R}, \\ E(z_1 + z_2) &= E(z_1)E(z_2) \quad \text{para todo } z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

De estas propiedades obtenemos que si $z = x + iy$ se debe cumplir que

$$E(z) = E(x + iy) = E(x)E(iy) = e^x E(iy),$$

y si escribimos $E(iy) = a(y) + ib(y)$ para funciones reales continuas $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces queremos que la función

$$E(z) = e^x a(y) + ie^x b(y)$$

sea continua y diferenciable en todo \mathbb{C} . Como vimos en el Teorema 1.11 la función $E(z)$ debe satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann (Teorema 1.11) en todo punto de \mathbb{C} , esto es

$$\begin{aligned} a &= b' \\ a' &= -b. \end{aligned}$$

Pero si suponemos que las funciones a, b son continuas, entonces se deduce de las igualdades que en realidad ambas funciones son de clase C^∞ y por lo tanto podemos resolver el sistema si resolvemos $a'' + a = 0 = b'' + b$. Esto implica que $a(y) = A \cos(y) + B \sin(y)$ y $b(y) = C \cos(y) + D \sin(y)$, pero como queremos que $E(x) = e^x$, esto se traduce en que $a(0) = 1$ y $b(0) = 0$, es decir

$$\begin{aligned} a(y) &= \cos(y) \\ b(y) &= \sin(y), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$E(z) = e^x (\cos y + i \sin y),$$

lo que hace que nuestra definición

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

cobre sentido. Además obtuvimos que la función resultante no es solo diferenciable, si no que es de clase C^∞ , en particular es holomorfa.

Opción 2: Queremos que \tilde{E} sea analítica en todo \mathbb{C} y satisfaga

$$\tilde{E}(x) = e^x \quad \text{si } x \in \mathbb{R}.$$

Como $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y como estamos suponiendo que \tilde{E} es analítica, por el teorema de unicidad de series de potencias debe ocurrir que como \tilde{E} admite una serie de potencias en torno a $z = 0$, y más aun ésta debe ser de la forma

$$\tilde{E}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Un ejercicio de series (ver Ejercicio 1.13) es probar que esta serie tiene radio de convergencia infinito (y por tanto define una función analítica en todo \mathbb{C}), y además satisface $\tilde{E}'(z) = \tilde{E}(z)$ y si $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\tilde{E}(z + w) = \tilde{E}(z)\tilde{E}(w),$$

es decir, la función \tilde{E} es una función que satisface las condiciones de la opción 1, y por lo tanto, $\sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} = \tilde{E}(z) = E(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$.

Opción 3: Como lo hicimos desde un comienzo, podemos definir la función

$$\hat{E}(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$$

que trivialmente verifica $\hat{E}(x) = e^x$ cuando $x \in \mathbb{R}$ y además es holomorfa en todo \mathbb{C} . Veremos mas adelante (ver Teoremas 2.28, 3.4 y 3.5) que esto implica que \hat{E} ha de ser analítica en \mathbb{C} , y por lo visto en la Opción 2 concluimos que en realidad $\hat{E} = \tilde{E} = E$ y cualquiera de las opciones que tomemos para hacer la definición de la función exponencial en \mathbb{C} lleva al mismo resultado.

Proposición 1.26. La función exponencial definida en (1.1) satisface las siguientes propiedades

1. $|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$.
2. $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
3. Para cada $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la ecuación $e^z = b$ tiene infinitas soluciones en \mathbb{C} .
4. $(e^z)' = \partial_z(e^z) = e^z$.

Demostración. Las primeras 3 propiedades son evidentes y se dejan su verificación al lector. Para ver que $(e^z)' = e^z$ notemos que por el cálculo anteriormente realizado $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y es de clase C^1 , por lo que e^z es diferenciable/holomorfa. Además

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial z} e^z = \frac{\partial}{\partial x} (e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^z.$$

■

Funciones trigonométricas e hiperbólicas

Con la función exponencial definida sobre todo \mathbb{C} se pueden definir las funciones trigonométricas sobre \mathbb{C} de la siguiente manera

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Estas definiciones se puede motivar de dos maneras. En primer lugar, como $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ y $e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y$, entonces se pueden despejar $\cos y$ y $\operatorname{sen} y$ para obtener

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i},$$

y luego simplemente pensar en que esto debe valer para todo $z \in \mathbb{C}$. Tal como en el caso de la exponencial, hay distintos caminos para hacer estas definiciones, los cuales llevan al mismo resultado. Por ejemplo, Cuando lleguemos al Teorema 3.5 confirmaremos que se pueden hacer definiciones análogas usando las series de potencias que se conocen en \mathbb{R} para obtener definiciones en \mathbb{C} , esto es

$$\cos z = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} z = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1},$$

mas aún, estas funciones satisfacen propiedades análogas a las funciones reales sobre las cuales están basadas, por ejemplo satisfacen (ver Ejercicio 1.14)

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1 \quad \text{y} \quad (\operatorname{sen}(z))' = \cos z.$$

De manera análoga se se pueden definir las funciones $\cosh z$ y $\sinh z$ de tal modo que coincidan con sus versiones reales y que satisfagan identidades del tipo (ver el Ejercicio 1.15)

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \quad \text{y} \quad \cosh(z+w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w.$$

Logaritmos y raíces

Para $z \in \mathbb{C}$ queremos definir un concepto de logaritmo de $\log z$, en el sentido de que $\log z$ debe satisfacer que $e^{\log z} = z$, es decir, que la función $\log z$ es una inversa (por la derecha) para la función exponencial. Para que esto se cumpla sea $z \neq 0$ y supongamos que $\log z = u(z) + iv(z)$ para $u, v \in \mathbb{R}$, luego debemos resolver para u, v en la ecuación

$$e^{u(z)+iv(z)} = z.$$

Para poder hacer esto, escribimos $z \neq 0$ en notación polar $z = re^{i\theta}$ y notamos que $e^{u+iv} = e^u e^{iv}$ y por lo tanto

$$e^u e^{iv} = re^{i\theta}.$$

En consecuencia $e^u = r = |z|$ y $v = \theta + 2\pi ki$, o dicho de otra forma

$$u(z) = \ln |z| \quad \text{y} \quad v(z) = \arg z,$$

para *algún* $\arg z$. De inmediato notamos que el proceso anteriormente descrito tiene como obstáculo el hecho de que $\arg z$ es multivaluado, en el sentido de que $\arg z$ se puede escoger de distintas maneras. Por ejemplo, $\arg_1 z$ es un argumento y si $\log z = \ln |z| + i \arg_1 z$ entonces

$$\tilde{\log} z = \ln |z| + i(\arg_1 z + 2\pi)$$

define un nuevo logaritmo que satisface la misma propiedad de ser inversa (por la derecha) de la función exponencial. En consecuencia, cualquier definición que hagamos de un logaritmo, debe hacerse cargo de dicha situación.

Dado lo anterior, podemos hacer la siguiente

Definición 1.11. Diremos que $L : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ es una rama del logaritmo si es que escogemos un argumento univaluado $\arg z : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ y definimos

$$L(z) = \log(z) = \ln |z| + i \arg z.$$

El caso en que $\arg z = \text{Arg } z$ sea la rama principal del argumento, es decir $\text{Arg } z \in (-\pi, \pi]$, diremos que estamos en presencia de la rama principal del logaritmo y la denotaremos por $\text{Log } z$.

Observación 1.9. Notar que la rama principal satisface propiedades como

- $\text{Log}(x) = \log x$ si $x > 0$, esto pues $\text{Arg } x = 0$ si $x > 0$.
- $\text{Log}(-1) = i\pi$.
- Esta rama principal no es continua en $(-\infty, 0)$ pues $\text{Arg } z$ no es continua en este conjunto. Sin embargo, un ejercicio simple nos dice que $\text{Arg } z$ si es continua en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.
- No es necesariamente cierto que si $z, w \neq 0$ entonces $\text{Log}(zw) = \text{Log } z + \text{Log } w$ pues podemos considerar

$$(1.2) \quad 0 = \text{Log } 1 = \text{Log}(-1)(-1) \neq \text{Log}(-1) + \text{Log}(-1) = 2\pi i.$$

En general, sea cual sea la elección de $\arg z$ entonces no se cumple que

$$\log(zw) = \log z + \log w,$$

esto pues $\arg(zw) = \arg z + \arg w \pmod{2\pi}$. A modo de ejemplo de este fenómeno notar que para el argumento principal se cumple que $0 = \text{Arg}(1) = \text{Arg}((-1)(-1))$ en tanto que $\text{Arg}(-1) + \text{Arg}(-1) = \pi + \pi = 2\pi$. El mismo razonamiento nos permite establecer que para $n \in \mathbb{N}$

$$\log z^n = n \log z \pmod{2\pi i}.$$

En adición a lo anterior, quisiéramos que el logaritmo que definamos sea una función diferenciable y que además se satisficiera que $(\log z)' = \frac{1}{z}$. Sin embargo, dado que $\arg z$ no se puede definir de manera continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ esta tarea es imposible si no hacemos alguna modificación a nuestra definición. En lo que sigue, diremos que $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es un *dominio* si Ω es un conjunto abierto y conexo.

Definición 1.12. Dado un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, decimos que $L : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una rama holomorfa de $\log z$ si

1. L es holomorfa en Ω .
2. L es una inversa (por la derecha) de la función exponencial en Ω , esto es, $e^{L(z)} = z$ para todo $z \in \Omega$.

Notar que por lo ya mencionado, si L es una rama holomorfa del logaritmo, entonces

$$\tilde{L}(z) = L(z) + 2k\pi i$$

también lo es. Adicionalmente, dado que $e^w \neq 0$ para todo $w \in \mathbb{C}$ tenemos que $\log 0$ no se puede definir, y por lo tanto no se puede definir un logaritmo (holomorfo o no) en ninguna vecindad que contenga al origen.

En vista de los cálculos hechos, tenemos que cualquier rama del logaritmo ha de ser de la forma

$$L(z) = \ln |z| + i \arg z,$$

y como $\ln |z|$ define una función continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ el problema de la continuidad de cualquier rama del logaritmo se encuentra en la función $\arg z$. Esto motiva la siguiente

Proposición 1.27 (Ramas holomorfas del logaritmo). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo tal que $0 \notin \Omega$ y $\arg z$ es una función continua en Ω . Si consideremos $\log : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$\log z = \ln |z| + i \arg z,$$

entonces $\log z$ es una función holomorfa en Ω con

$$(\log z)' = \frac{\partial}{\partial z}(\log z) = \frac{1}{z}.$$

Demostración. Como tenemos que $z = e^{\log z}$ para todo $z \neq 0$, entonces para $z \in \Omega \setminus \{0\}$ consideramos $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $z + h \neq 0$ y escribimos que $\log z = w \Leftrightarrow e^w = z$ y $\log(z + h) = w + k_h \Leftrightarrow e^{w+k_h} = z + h$. Como $\log z$ es continuo tenemos que si $h \rightarrow 0$ entonces $k_h \rightarrow 0$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(z + h) - \log z}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w + k_h - w}{e^{w+k_h} - e^w} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k_h}{e^{w+k_h} - e^w} \\ &= \frac{1}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k_h}{e^{w+k_h} - e^w}} \\ &= \frac{1}{e^w} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{z},$$

pues $(e^w)' = e^w$.

Notar además que como la función $\frac{1}{z}$ es continua en Ω (pues $0 \notin \Omega$), entonces $\log z$ es una función diferenciable y además la derivada es una función de clase C^1 en Ω y por lo tanto es holomorfa en Ω . ■

Observación 1.10. Tal como mencionamos antes, $\arg z$ se puede definir de manera continua sobre $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, y en cuyo $\text{Log } z = \ln |z| + i \text{Arg } z$ denota la rama principal holomorfa del logaritmo).

Lo mismo ocurre sobre $\mathbb{C} \setminus \{tz_0 : t \in [0, \infty)\}$ donde $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, esto es, sobre el plano complejo pero removiendo un rayo que parte de 0.

Mas adelante veremos que se pueden construir ramas holomorfas del logaritmo en cualquier conjunto *simplemente conexo* en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, por ejemplo en $\mathbb{C} \setminus \Gamma([0, \infty))$, donde $\Gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ es una función de clase C^1 tal que $\Gamma(0) = 0$ y $|\Gamma(r)| \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} +\infty$.⁴

Raíces y potencias

Una vez definida una rama del logaritmo, se pueden definir ramas de otras funciones tradicionales definidas a partir de logaritmos, como \sqrt{z} , o en general z^α para $\alpha \in \mathbb{C}$, funciones del tipo $z^{f(z)}$, etc. Por ejemplo, se puede definir la rama principal de \sqrt{z} como

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\text{Log } z},$$

donde $\text{Log } z$ es la rama principal del logaritmo. Notar que en este caso se tiene que

$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} \log |z| + i \frac{\text{Arg } z}{2}} = \sqrt{|z|} e^{i \frac{\text{Arg } z}{2}},$$

es decir, si $z \in \mathbb{R}_+$, entonces la raíz coincide con la raíz real pues $\text{Arg } z = 0$, en tanto que si $x \in \mathbb{R}_-$ entonces $\text{Arg } x = \pi$ y por lo tanto $\sqrt{x} = \sqrt{|x|} e^{i \frac{\pi}{2}} = i \sqrt{|x|}$. Sin embargo sucede lo mismo que con la rama principal del logaritmo (ver (1.2)), ya que no es cierto que

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{-1} \sqrt{-1} = i^2 = -1.$$

Adicionalmente, la no continuidad del argumento se traspasa a la función \sqrt{z} y por tanto \sqrt{z} no es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Para obtener una rama holomorfa, se debe considerar una rama holomorfa del logaritmo, como por ejemplo la rama principal holomorfa. Una dificultad que esto genera es que al hacer esta elección, entonces $\sqrt{-1}$ no está definida para esta rama principal. Sin embargo, para cualquier $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existe una rama holomorfa de la raíz cuadrada definida en una vecindad de z donde además se satisface que

$$(\sqrt{z})' = (e^{\frac{1}{2}\text{Log } z})' = \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}\text{Log } z} \cdot \frac{1}{z} = \frac{e^{\frac{1}{2}\text{Log } z}}{2e^{\text{Log } z}} = \frac{1}{2e^{\frac{1}{2}\text{Log } z}} = \frac{1}{2\sqrt{z}}.$$

Notar que si bien el logaritmo puede tener infinitas ramas holomorfas (por ejemplo $\text{Log } z + 2k\pi i$), solo hay 2 ramas holomorfas de \sqrt{z} , esto pues si $\log z$ es cualquier rama holomorfa del logaritmo, entonces

$$e^{\frac{1}{2} \log z} = e^{\frac{1}{2} \log z + k\pi i}$$

⁴[2, Def 8.1] dice que un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es simplemente conexo si para todo $a \in \Omega^c$ y todo $\varepsilon > 0$ existe una curva continua $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

- $\gamma([0, \infty)) \subseteq B_\varepsilon(\Omega^c)$,
- $\gamma(0) = z_0$ y $|\gamma(+\infty)| = +\infty$.

1.3. EJERCICIOS

para cada k par y si k es impar obtenemos la otra rama pues

$$-e^{\frac{1}{2}\log z} = e^{\frac{1}{2}\log z + i\pi} = e^{\frac{1}{2}\log z + k\pi i},$$

es decir, las ramas holomorfas son \sqrt{z} y $-\sqrt{z}$.

Finalmente, observar que se pueden definir otras funciones holomorfas a partir de una rama holomorfa del logaritmo. Por ejemplo se puede considerar una rama holomorfa de la función z^z como

$$z^z = e^{z \log z},$$

en particular para la rama principal se tiene que $i^i = e^{i \log i} = e^{-\frac{\pi}{2}}$, y en general

$$i^i = \left\{ \dots, e^{-\frac{5\pi}{2}}, e^{-\frac{\pi}{2}}, e^{\frac{3\pi}{2}}, \dots \right\}$$

1.3. Ejercicios

Ejercicio 1.1. Encuentre todas las soluciones de $z^N = 2i$.

Ejercicio 1.2. Muestre que

$$\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}.$$

Ejercicio 1.3. Sean $z_1, z_2 \in \overline{D(0, 1)}$ tales que $|z_1 - z_2| \geq 1$. Muestre que

$$|z_1 + z_2| \leq \sqrt{3}.$$

Ejercicio 1.4. Muestre que si $a_n \in \mathbb{R}_+$ satisface $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L$ entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = L$.

Ejercicio 1.5. Considere la función compleja definida como

$$\varphi(z) = i \frac{1-z}{1+z}.$$

Muestre que φ es una biyección entre $D(0, 1)$ y $\{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$.

Ejercicio 1.6. Un polinomio complejo es una función compleja que es polinomial en las variables z y \bar{z} , es decir

$$P(z, \bar{z}) = \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^M c_{jk} z^j \bar{z}^k.$$

Muestre que $P(z, \bar{z})$ es holomorfo si y solo si P no contiene términos con \bar{z} , es decir, $c_{jk} = 0$ para todo $j \in \{0, 1, \dots, M\}$ si $k \geq 1$.

Ejercicio 1.7. Sean $P, Q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ polinomios holomorfos tales que Q tiene n raíces distintas a_1, \dots, a_n y P tiene grado $< n$. Muestre que

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{P(z)}{Q'(a_k)(z - a_k)}$$

Ejercicio 1.8. Suponga que $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función de clase C^1 . Muestre que

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}.$$

Ejercicio 1.9. Encuentre **todas** las funciones holomorfas $f = u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen:

1. $u(z) = k$ para algún $k \in \mathbb{R}$.
2. $v(z) = k$ para algún $k \in \mathbb{R}$.
3. $u(z) = v(z)^2$.

Ejercicio 1.10. 1. Considere $\sum_{k \geq 0} a_k$ y $\sum_{l \geq 0} b_l$ dos series absolutamente convergentes, y defina

$$c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l.$$

Muestre que la serie $\sum_{n \geq 0} c_n$ es absolutamente convergente.

2. Sean $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ y $\sum_{k \geq 0} b_k z^k$ dos series de potencias con disco de convergencia $D(0, R_1)$ y $D(0, R_2)$ respectivamente. Considere el producto de Cauchy $\sum_{k \geq 0} c_k z^k$ donde

$$c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}.$$

Muestre que si $r < \min\{R_1, R_2\}$ entonces la serie $\sum_{k \geq 0} c_k z^k$ converge absolutamente para todo $z \in D(0, r)$.

Ejercicio 1.11. Sean $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}, (b_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ dos sucesiones tales que

- La sucesión de sumas parciales $s_N = \sum_{k=1}^N a_k$ es acotada en \mathbb{C} ,
- $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$,
- $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$.

Muestre que $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k b_k$ es convergente.

Ejercicio 1.12. Sea $E : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- E satisface la ecuación $E'(z) = E(z)$ con $E(0) = 1$.
- E satisface $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(h)-1}{h} = 1$ y $E(z+w) = E(z)E(w)$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 1.13. Considere la serie $E(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!}$.

1. Muestre que la serie tiene radio de convergencia $R = +\infty$.
2. Muestre que $E'(z) = E(z)$.
3. Muestre que si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ entonces $E(z_1 + z_2) = E(z_1)E(z_2)$. Ayuda: Ver el Ejercicio 1.10 o bien Ejercicio 1.12.

Ejercicio 1.14. Verifique que las funciones $\cos z$ y $\sin z$ satisfacen

1. $(\sin z)' = \cos z$ y $(\cos z)' = -\sin z$.
2. $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

1.3. EJERCICIOS

3. $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$.

Ejercicio 1.15. Defina las funciones $\cosh z$ y $\sinh z$ para $z \in \mathbb{C}$, y verifique las identidades

1. $(\cosh z)' = \sinh z$ y $(\sinh z)' = \cosh z$.

2. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$,

3. $\cosh(z + w) = \cosh z \cosh w + \sinh z \sinh w$

Ejercicio 1.16. Para cada $x \in \mathbb{R}$ defina la serie

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{2^k \cos(kx)}{k!}.$$

Muestre que la serie converge absoluta y uniformemente, y que es igual a la función $e^{2 \cos x} \cos(2 \sin x)$.
Ayuda: Considere la función $F(z) = e^{2e^z}$ y la serie de potencias $E(z)$ del Ejercicio 1.13.

Ejercicio 1.17. Muestre que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-k} + \frac{1}{k} \right)$$

converge para todo $z \notin \mathbb{N}$. Mas aún, muestre que la serie converge uniformemente en cualquier compacto $C \subseteq \mathbb{C}$ tal que $C \cap \mathbb{N} = \emptyset$.

Ejercicio 1.18. Considere la función definida como

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k.$$

1. Encuentre R , el radio de convergencia de f .

2. Estudie como se comporta la serie cuando $|z| = R$. Analice si la convergencia es absoluta y/o uniforme.

Ejercicio 1.19. Considere la función definida como

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}.$$

1. Encuentre R , el radio de convergencia de f .

2. Estudie como se comporta la serie cuando $|z| = R$. Analice si la convergencia es absoluta y/o uniforme.

Ejercicio 1.20. Considere la función definida como

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}.$$

1. Encuentre R , el radio de convergencia de f .

2. Estudie como se comporta la serie cuando $|z| = R$. Analice si la convergencia es absoluta y/o uniforme.

Ejercicio 1.21. Encuentre el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{k \geq 0} k^{(-1)^k} z^k.$$

Ejercicio 1.22. Sea $r \in \mathbb{R}$ tal que $|r| < 1$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Encuentre una fórmula cerrada para la serie

$$S(r, \theta) = \sum_{k \geq 0} r^k \sin k\theta.$$

Ejercicio 1.23. Muestre que la función $f(z) = \sum_{k \geq 0} 2^{-k} z^{2^k}$ es holomorfa en $D(0, 1)$ y continua en $\overline{D(0, 1)}$. Muestre además que si w es una 2^N raíz de la unidad, entonces

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} |f'(rw)| = +\infty.$$

Ejercicio 1.24. Muestre que la serie

$$\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k + |z|}$$

no es absolutamente convergente en \mathbb{C} , pero si es uniformemente convergente en \mathbb{C} .

Ejercicio 1.25. Muestre que la serie

$$\sum_{k \geq 1} \frac{z}{(1 + |z|)^k}$$

converge absolutamente en \mathbb{C} , pero que la convergencia no es uniforme en compactos de \mathbb{C} .

Ejercicio 1.26. Encuentre una serie de potencias en torno a $p = 0$ para la función $f(z) = e^z \cos z$ de modo que

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k, \quad \text{para todo } z \in D(0, R)$$

donde a_k son números **reales**. Encuentre el radio de convergencia R de la serie antes señalada. *Ayuda:* Recuerde que $\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz})$.

Ejercicio 1.27. Determine el conjunto donde la serie $\sum_{k \geq 0} \left(\frac{z}{z+1}\right)^k$ converge absolutamente.

Capítulo 2

Integrales de linea y el teorema de Cauchy

2.1. Integrales de linea

Definición 2.1. Dada $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diremos que $\phi \in C^1([a, b])$ si ϕ es una función continua en $[a, b]$, diferenciable en (a, b) , con derivada continua en (a, b) tal que

$$\begin{aligned}\phi'(a^+) &= \lim_{t \rightarrow a^+} \phi'(t) \\ \phi'(b^-) &= \lim_{t \rightarrow b^-} \phi'(t)\end{aligned}$$

existen.

Observación 2.1. Notar que bajo esta definición tenemos que si $\phi \in C^1([a, b])$, entonces se satisface el teorema fundamental del cálculo

$$\int_a^b \phi'(t) dt = \phi(b) - \phi(a).$$

Definición 2.2. Diremos que $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es $C^1([a, b])$, si $\gamma = u + iv$ para $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ con $u, v \in C^1([a, b])$, y además tenemos que

$$\frac{d\gamma}{dt} = \left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt} \right) = \frac{du}{dt} + i \frac{dv}{dt}.$$

Si γ satisface lo anterior, diremos que γ es una curva de clase C^1 . Si además $\frac{d\gamma}{dt} \neq 0$ en todo $[a, b]$, diremos que γ es una curva suave.

Ejemplo 2.1. ■ $\gamma(t) = e^{2\pi it}$, $t \in [0, 1]$ es C^1 y suave.

■ $\gamma(t) = t^2 + it^3$, $t \in [-1, 1]$ es C^1 pero no es suave pues $\frac{d\gamma}{dt}(0) = 0$.

Definición 2.3. Dada $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ función continua tal que $\psi = u + iv$, definimos

$$\int_a^b \psi(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

Proposición 2.1. 1. $\int_a^b (\alpha f + g) dz = \alpha \int_a^b f dz + \int_a^b g dz$ para f, g funciones y $\alpha \in \mathbb{C}$.

2. Si $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ uniformemente en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n dz.$$

Demostración. Ejercicio. ■

Proposición 2.2. Sea $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua (integrable), entonces

$$\left| \int_a^b \phi(t) dt \right| \leq \int_a^b |\phi(t)| dt.$$

Demostración. Consideremos $z = \int_a^b \phi(t) dt \in \mathbb{C}$. Si $z = 0$ no hay nada que demostrar, por lo que supondremos que $z \neq 0$.

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \ni |z|^2 &= z\bar{z} \\ &= \int_a^b \bar{z}\phi(t) dt \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}(\bar{z}\phi(t)) dt \\ &\leq \int_a^b |\bar{z}\phi(t)| dt \\ &= |z| \int_a^b |\phi(t)| dt, \end{aligned}$$

de donde se concluye el resultado. ■

Observación 2.2. Notar que gracias a las definiciones anteriores, se tiene que si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es de clase $C^1([a, b])$, entonces

$$\int_a^b \frac{d\gamma}{dt} dt = \gamma(b) - \gamma(a).$$

Proposición 2.3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva suave de clase C^1 , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función de clase C^1 , entonces si $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ tenemos que

$$\int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma}{dt} dt = \int_a^b (f_x(\gamma(t)) \frac{d\gamma_1}{dt}(t) + f_y(\gamma(t)) \frac{d\gamma_2}{dt}(t)) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Demostración. Basta notar que la función $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es de clase C^1 y satisface la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \frac{d\gamma}{dt} = f_x(\gamma(t)) \frac{d\gamma_1}{dt}(t) + f_y(\gamma(t)) \frac{d\gamma_2}{dt}(t).$$
■

Observación 2.3. Si $f = u + iv$ es holomorfa en $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, en particular $f_y = if_x$, entonces

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \frac{\partial f}{\partial z}(\gamma(t)) \frac{d\gamma}{dt}(t) = f'(\gamma(t)) \frac{d\gamma}{dt}(t),$$

lo que permite escribir

$$\int_a^b f'(\gamma(t)) \frac{d\gamma}{dt}(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Todo lo anterior, nos lleva a definir de la siguiente forma la integración sobre curvas

Definición 2.4. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva suave de clase C^1 . Para $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua definimos

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \frac{d\gamma}{dt}(t)dt.$$

Corolario 2.4. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ una curva suave de clase C^1 , entonces

$$\int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z}(z)dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

de donde además, si γ es cerrada ($\gamma(b) = \gamma(a)$) se tiene que

$$\int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z}(z)dz = 0$$

Demostración. Ver Ejercicio 2.3. ■

Proposición 2.5 (Desigualdad M - L). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, $f \in C(\Omega)$ y $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ de clase C^1 . Luego

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq L(\gamma) \sup_{z \in \gamma[a, b]} |f(z)|,$$

donde

$$L(\gamma) = \int_a^b \left| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right| dt$$

es el largo de la curva γ .

Demostración.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \frac{d\gamma}{dt}(t)dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \left| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right| dt \\ &\leq L(\gamma)M(f), \end{aligned}$$

donde $M(f) = \sup_{z \in \gamma[a, b]} |f(z)|$. ■

Proposición 2.6. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua, $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ y $\tilde{\gamma} : [c, d] \rightarrow \Omega$ tales que existe $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ difeomorfismo con $\phi'(t) > 0$ y $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi$, entonces

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz.$$

Decimos que $\tilde{\gamma}$ es una reparametrización de γ .

Demostración. La demostración es una aplicación del teorema de cambio de variables aplicado a las partes real e imaginarias de la integral. Los detalles se dejan como ejercicio. ■

Observación 2.4. En vista de esta proposición, en lo que sigue supondremos que todas las curvas serán de la forma $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{C}$.

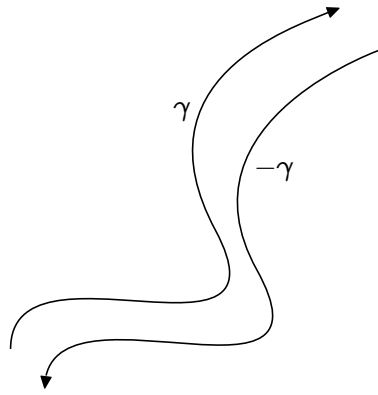


Figura 2.1: La curva $-\gamma$ es el mismo conjunto de puntos que γ pero recorridos en el sentido opuesto.

Corolario 2.7. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ y definamos $-\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ como $-\gamma(t) = \gamma(1 - t)$, luego

$$\int_{\gamma} f = - \int_{-\gamma} f$$

para toda $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua (integrable).

Ejemplo 2.2. Sean $f(z) = x^2 + iy^2$, $\gamma(t) = (1 + i)t$ para $t \in [0, 1]$, entonces

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_0^1 (t^2 + it^2)(1 + i)dt = \frac{1+i}{3} (t^3 + it^3) \Big|_0^1 = \frac{2i}{3}.$$

Ejemplo 2.3. Sea $\gamma(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}$ para $t \in [0, 2\pi]$.

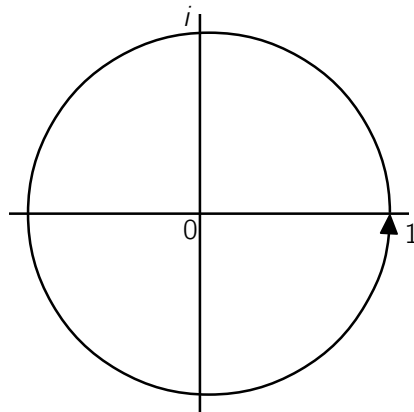


Figura 2.2: La curva $\gamma(t) = \cos t + i \sin t$ describe una circunferencia centrada 0 con radio 1 y recorrida en sentido anti-horario.

- Si $f(z) = z$, entonces

$$\int_{\gamma} f dz = \int_0^{2\pi} e^{it} i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} e^{2it} i dt = \frac{1}{2} e^{2it} \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

debido a la periodicidad de e^z .

- En general, como $\left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)' = z^n$ para $n \neq -1$, y como z^{n+1} es holomorfa en \mathbb{C} si $n \geq 0$ y en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ si $n \leq -1$ tenemos que

$$\int_{\gamma} z^n dz = \int_{\gamma} \left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)' dz = 0,$$

gracias al Corolario 2.4 (esto pues $\gamma \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$).

- Para el caso $n = -1$ tenemos que $f(z) = \frac{1}{z}$

$$\int_{\gamma} f dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} = 2\pi i.$$

Con la teoría de integrales de linea podemos dar otra demostración de que una función holomorfa debe ser diferenciable.

Teorema 2.8 (Holomorfa \Rightarrow Diferenciable). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces f es diferenciable para todo $z \in \Omega$ y se cumple que*

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z).$$

Demostración. Sea $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subseteq \Omega$. Consideremos para $z \in D(z_0, r)$ la curva $\gamma(t) = z_0 + t(z - z_0)$ con $t \in [0, 1]$ como muestra la Figura 2.3.

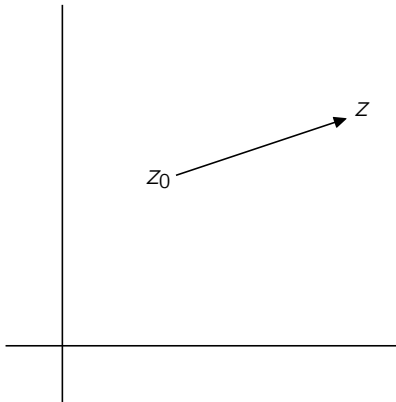


Figura 2.3: La curva $\gamma(t) = z_0 + t(z - z_0)$ es un segmento que va de z_0 a z .

Entonces

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial z}(z) dz \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0) dt \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(z_0 + t(z - z_0)) dt \\ &= \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial z}(z_0 + t(z - z_0)) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \right) dt, \end{aligned}$$

2.2. ANTIDERIVADAS HOLOMORFAS

pero de la continuidad de $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ obtenemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|w - z_0| < \delta$ entonces

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(w) - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \right| < \varepsilon,$$

luego si tomamos $r < \delta$, tenemos que $w = z_0 + t(z - z_0)$ satisface lo anterior para todo $t \in [0, 1]$, de donde concluimos que

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) \right| \leq \varepsilon,$$

es decir f es diferenciable en z_0 y $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)$. ■

En este punto es bueno recordar que hasta ahora tenemos las siguientes nociones:

1. f holomorfa $\Leftrightarrow f \in C^1$ y satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann: $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.
2. f satisface Cauchy-Riemann (C-R) $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow i \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$
3. f diferenciable en $z \Leftrightarrow$ si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z+h)}{h}$ existe.
4. f analítica $\Leftrightarrow f$ se puede escribir como una serie de potencias.

Hasta ahora hemos visto que si f es de clase C^1 en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ entonces

$$f \text{ holomorfa} \Leftrightarrow f \text{ satisface (C-R)} \Leftrightarrow f \text{ es diferenciable} \Leftrightarrow f \text{ analítica.}$$

Una pregunta interesante es que sucede si f es solo continua y diferenciable. ¿Es cierto que f es holomorfa? Veremos mas adelante que la respuesta a esta pregunta es afirmativa.

Otra pregunta que queda por responder es si las funciones holomorfas son analíticas. Responderemos esta pregunta y la respuesta también será afirmativa.

2.2. Antiderivadas holomorfas

Teorema 2.9 (Existencia de antiderivadas holomorfas I). *Sea $f : D(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, entonces existe $H : D(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que*

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = f.$$

El resultado sigue siendo cierto si se reemplaza $D(z_0, r)$ por un rectángulo.

Para demostrar este resultado, primero recurrimos a un resultado de análisis real

Proposición 2.10. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un disco o un rectángulo. Sean $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 en Ω tales que*

$$f_y = g_x \quad \text{en } \Omega.$$

Entonces existe $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 en Ω tal que

$$h_x = f$$

$$h_y = g$$

en Ω .

2.2. ANTIDERIVADAS HOLOMORFAS

Demostración. Sea $(a, b) \in \Omega$ fijo, para cada $(x, y) \in \Omega$ definimos

$$h(x, y) = \int_a^x f(t, b)dt + \int_b^y g(x, s)ds.$$

Gracias al teorema fundamental del cálculo tenemos que $h_y = g$ y $\partial_x \int_a^x f(t, b)dt = f(x, b)$. Por otra parte, como g es de clase C^1 tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_b^y g(x, s)ds \right) = \int_b^y g_x(x, s)ds = \int_b^y f_y(x, s)ds = f(x, y) - f(x, b),$$

de donde se sigue que $h_x = f$. Finalmente como f, g son de clase C^1 tenemos que h es de clase C^2 ■

Demostración del Teorema 2.9. Sea $F(z) = u(z) + iv(z)$ y denotemos $f = u$ y $g = -v$, luego de las ecuaciones de Cauchy-Riemann obtenemos que $f_y = g_x$, luego Proposición 2.10 garantiza la existencia de una función $h_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $\frac{\partial h_1}{\partial x} = f = u$ y $\frac{\partial h_1}{\partial y} = g = -v$.

De manera análoga, para $f = v$ y $g = u$ tenemos que existe una función $h_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $\frac{\partial h_2}{\partial x} = v$ y $\frac{\partial h_2}{\partial y} = u$. Finalmente, la función $H(z) = h_1(z) + ih_2(z)$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann, por lo que es holomorfa, y además

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial z} &= \frac{1}{2} (\partial_x - i\partial_y) (h_1 + ih_2) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_x h_1 + \partial_y h_2) + \frac{i}{2} (\partial_x h_2 - \partial_y h_1) \\ &= u + iv \\ &= F. \end{aligned}$$

Observación 2.5. Observemos que si $f : D(p, r) \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y $\gamma : [0, 1] \rightarrow D(p, r)$ es una curva cerrada, entonces por lo anterior existe una función holomorfa $H : D(p, r) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f = \frac{\partial H}{\partial z}$, luego

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} \frac{\partial H}{\partial z}(z)dz = H(\gamma(1)) - H(\gamma(0)) = 0.$$

Esta propiedad es una versión débil del teorema de Cauchy que veremos mas adelante.

Tenemos como objetivo demostrar la fórmula y el teorema de Cauchy y para ello debemos mejorar el Teorema 2.9.

Teorema 2.11 (Existencia de antiderivadas holomorfas II). *Sea $f : D(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ continua en $D(z_0, R)$ y holomorfa en $D(z_0, R) \setminus \{p\}$ para algún $p \in D(z_0, R)$, entonces existe $H : D(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que*

$$\frac{\partial H}{\partial z} = f.$$

El resultado sigue siendo cierto si se reemplaza $D(z_0, R)$ por un rectángulo.

Veamos primero unos resultados de análisis real

Lema 2.12. *Sea $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ y $H, F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que existe $p \in (a, b)$ de modo que H' existe en $(a, b) \setminus \{p\}$ y $H'(x) = F(x)$ para todo $x \in (a, b) \setminus \{p\}$. Entonces $H'(x)$ existe para todo $x \in (a, b)$ y $H' = F$ en (a, b) .*

Demostración. Consideremos $a < \alpha < \beta < b$ tales que $p \in [\alpha, \beta]$ y definamos para $x \in [\alpha, \beta]$ la función

$$K(x) = H(\alpha) + \int_{\alpha}^x F(t)dt.$$

Gracias al teorema fundamental del cálculo, la función K es diferenciable en (α, β) y $K' = F$, por lo tanto

$$(K - H)'(x) = 0 \quad \forall x \in (\alpha, \beta) \setminus \{p\}.$$

Esto implica que la función $K - H$ debe ser constante en cada componente conexa de $(\alpha, \beta) \setminus \{p\}$, pero como además ambas funciones son continuas en (α, β) , debe ocurrir que

$$K - H = \text{constante} \quad \forall x \in (\alpha, \beta),$$

pero como $H(\alpha) = K(\alpha)$ deducimos que $K = H$ en (α, β) , lo que concluye la demostración. ■

Proposición 2.13. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un disco o un rectángulo y sea $p \in \Omega$. Sean $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 en $\Omega \setminus \{p\}$ tales que

$$f_y = g_x \quad \text{en } \Omega \setminus \{p\}.$$

Entonces existe $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 en Ω tal que

$$h_x = f$$

$$h_y = g$$

en Ω .

Demostración. Fijemos $(a, b) \in \Omega \setminus \{p\}$ y definamos

$$h(x, y) = \int_a^x f(t, b)dt + \int_b^y g(x, s)ds.$$

Del teorema fundamental del cálculo se tiene que $h_y = g$, pero para h_x debemos tener cuidado si es que p es parte de la línea recta que va de (x, b) a x, y .

Si p no es parte de esa recta, entonces procedemos como en la demostración del Teorema 2.9 y tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_b^y g(x, s)ds &= \int_b^y g_x(x, s)ds \\ &= \int_b^y f_y(x, s)ds \\ &= f(x, y) - f(x, b), \end{aligned}$$

de donde h cumple lo requerido.

En caso de que $p = (p_1, p_2)$ sea parte de la línea de integración, utilizamos el Lema 2.12, pues para cada y fijo, las funciones $H(x) = h(x, y)$ y $F(x) = f(x, y)$ son continuas y satisfacen $H' = \frac{dH}{dx} = F$ salvo en el punto p_1 , luego el lema garantiza que la igualdad también se satisface en p_1 . ■

Demostración del Teorema 2.11. Análoga a la demostración del Teorema 2.9, solo que ahora utilizamos la Proposición 2.13 en vez de la Proposición 2.10. ■

Ejemplo 2.4. La función $\frac{1}{z}$ es continua y holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ pero no existe H holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $H'(z) = \frac{1}{z}$. Esto pues, en caso de existir dicha función H tendríamos que

$$2\pi i = \int_{S(0,1)} \frac{1}{z} dz = \int_{S(0,1)} H'(z) dz = 0.$$

2.3. Teorema y fórmula de Cauchy

Lema 2.14. Sea $\gamma(t) = p + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ y $z \in D(p, r)$, entonces

$$\int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw = 2\pi i.$$

Demostración. Definamos

$$I(z) = \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw,$$

Nuestro propósito es demostrar que $I(z)$ es constante para todo $z \in D(p, r)$, e $I(z) = 2\pi i$. Para ello, primero notemos que

$$I(p) = \int_{\gamma} \frac{1}{w-p} dw = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} rie^{it} dt = 2\pi i.$$

Por otra parte, por el teorema de diferenciación bajo el signo integral (ver Corolario A.7) tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} I(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{w-z} \right) dw = 0$$

y por el Corolario 2.4 obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} I(z) &= \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{w-z} \right) dw \\ &= \int_{\gamma} \frac{1}{(w-z)^2} dw \\ &= \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial w} \left(-\frac{1}{w-z} \right) dw \\ &= \frac{-1}{\gamma(2\pi) - z} - \frac{-1}{\gamma(0) - z} \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo que demuestra que la función $I(z)$ es holomorfa y constante, en particular $I(z) = I(p) = 2\pi i$ para todo $z \in D(p, r)$. ■

Teorema 2.15 (Fórmula de Cauchy I). Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa con Ω tal que $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p, r)} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

Demostración. Tenemos que gracias al Teorema 2.11 existe $H : D(p, r + \epsilon) \subseteq \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{z}}(w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} & \text{si } w \neq z \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(w) & \text{si } w = z, \end{cases}$$

luego

$$0 = \int_{S(p, r)} \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} dw = \int_{S(p, r)} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw = \int_{S(p, r)} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \int_{S(p, r)} \frac{1}{w-z} dw$$

de donde se concluye el resultado gracias al Lema 2.14. ■

Teorema 2.16 (Teorema integral de Cauchy I). Sea $f : D(p, r) \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y $\gamma \subseteq D(p, r)$ una curva C^1 cerrada, entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Demostración. Tal como lo mencionamos en la Observación 2.5 basta notar que existe $H : D(p, r) \rightarrow \mathbb{C}$ antiderivada de f , es decir $H'(z) = f(z)$ y por lo tanto

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma} H' dz = H(\gamma(1)) - H(\gamma(0)) = 0$$

■

Si bien los Teoremas 2.15 y 2.16 suelen ser suficientes para muchas aplicaciones, nos gustaría tener a disposición versiones un tanto mas generales. Una de las cosas que nos interesan es poder integrar sobre curvas mas generales que una circunferencia, o curvas cerradas en un círculo.

Por ejemplo, nos interesa el caso de que γ sea una curva C^1 , cerrada y simple (sin auto-intersecciones) y orientada positivamente. Si Ω es la región encerrada por γ (ver Figura 2.4), entonces quisiéramos poder

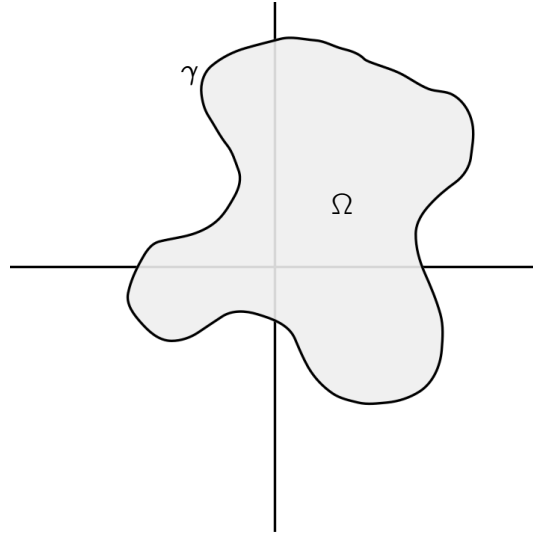


Figura 2.4: La curva γ divide al plano en dos regiones.

demostrar que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

y si $w \in \Omega$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

para toda $f : U \supset \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, donde U es un abierto.

Una versión que se puede demostrar es consecuencia del teorema de Green¹.

¹Si le interesa la demostración de este resultado puede ver [10, 14].

Teorema 2.17 (Teorema de Green). Sea γ una curva cerrada, simple y C^1 . Sea Ω la región acotada encerrada²³ por γ . Si $P, Q : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de clase C^1 entonces

$$\int_0^1 \left(P(\gamma(t)) \frac{d\gamma_1}{dt} + Q(\gamma(t)) \frac{d\gamma_2}{dt} \right) dt = \int_{\gamma} Pdx + Qdy = \iint_{\Omega} (Q_x - P_y) dx dy$$

Corolario 2.18 (Teorema de Cauchy para curvas de Jordan C^1). Sea γ una curva cerrada, simple, C^1 y suave. Sea Ω la región (acotada) encerrada por γ . Sea U un abierto tal que $\bar{\Omega} \subseteq U$ y sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Demostración. Si $f = u + iv$ es holomorfa en $\bar{\Omega}$, entonces satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$, luego por el teorema de Green

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_{\gamma} udx - vdy + i \int_{\gamma} vdx + udy \\ &= \iint_{\Omega} (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_{\Omega} (u_x - v_y) dx dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Corolario 2.19 (Fórmula de Cauchy para curvas de Jordan C^1). Sea γ una curva cerrada, simple y C^1 . Sea Ω la región (acotada) encerrada por γ . Sea U un abierto tal que $\bar{\Omega} \subseteq U$ y sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dz$$

para todo $z \in \Omega$.

Demostración. Sea $z \in \Omega$ y sea $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{D(z, \varepsilon)} \subseteq \Omega$ y definamos $\Omega_{\varepsilon} = \Omega \setminus \overline{D(z, \varepsilon)}$. Con esto la función $w \mapsto \frac{f(w)}{w - z}$ es holomorfa en una vecindad de Ω_{ε} , de donde el Corolario 2.18⁴ nos dice que

$$\int_{\partial\Omega_{\varepsilon}} \frac{f(w)}{w - z} dw = 0.$$

Como $\partial\Omega_{\varepsilon} = \partial\Omega \cup S(z, \varepsilon) = \gamma \cup S(z, \varepsilon)$, deducimos que

$$\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{S(z, \varepsilon)} \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_{\partial\Omega_{\varepsilon}} \frac{f(w)}{w - z} dw = 0,$$

²³Si $\varphi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ continua e inyectiva $\Leftrightarrow \varphi(\mathbb{S}^1)$ es una curva de Jordan

³Que una curva continua, simple y cerrada divide al plano en dos regiones, una acotada y una no-acotada es exactamente el teorema de las curvas de Jordan.

⁴Para poder decir esto, debemos aplicar una versión un poco mas general del Teorema de Green: Si γ_1 es la curva que encierra Ω orientada en sentido anti-horario, y γ_2 es una curva que está dentro de Ω orientada en sentido anti-horario encerrando a una región Ω_2 , entonces

$$\int_{\gamma_1} Pdx + Qdy - \int_{\gamma_2} Pdx + Qdy = \iint_{\Omega \setminus \Omega_2} Q_x - P_y$$

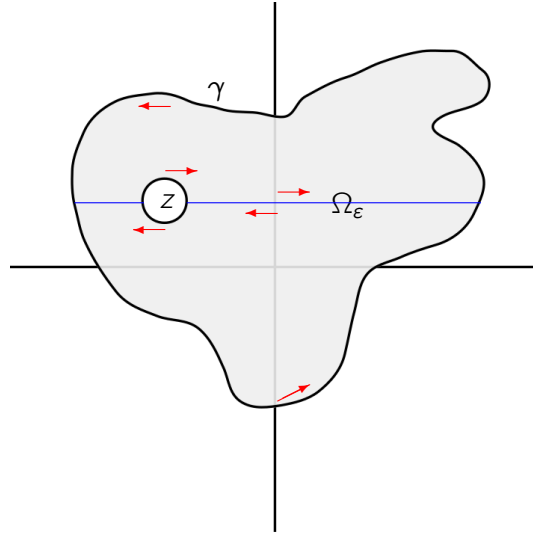


Figura 2.5: El teorema de Green vale en el conjunto Ω_ϵ .

pero

$$\begin{aligned} \int_{S(z,\epsilon)} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \int_{S(z,\epsilon)} \frac{f(z)}{w-z} dw + \int_{S(z,\epsilon)} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw \\ &= 2\pi i f(z) + \int_{S(z,\epsilon)} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw \\ &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 2\pi i f(z), \end{aligned}$$

pues de la Proposición 2.5 tenemos que

$$\left| \int_{S(z,\epsilon)} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw \right| \leq 2\pi\epsilon \sup_{w \in \bar{\Omega}} \left| \frac{f(w) - f(z)}{w-z} \right| \leq C\epsilon,$$

pues f es holomorfa en $U \supseteq \bar{\Omega}$, luego el cociente $\frac{f(w) - f(z)}{w-z}$ es acotado. ■

2.3.1. Curvas C^1 a pedazos

Otra generalización que es útil es la de relajar la condición de que las curvas sean de clase C^1 . Un primer paso es permitir que las curvas sean C^1 por pedazos

Definición 2.5. Decimos que una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es C^1 a pedazos si es que γ es continua en $[a, b]$ y existe una partición $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_N = b$ tales que

$$\gamma|_{[a_k, a_{k+1}]} \in C^1([a_k, a_{k+1}]) \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, N-1\}.$$

Con esto podemos definir

Definición 2.6. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva C^1 a pedazos y $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua (integrable). Definimos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\gamma|_{[a_k, a_{k+1}]}} f(z) dz.$$

2.3. TEOREMA Y FÓRMULA DE CAUCHY

Observación 2.6. Se deja como ejercicio verificar que mediante un cambio de variables afin se puede asumir que todas las curvas están parametrizadas en el intervalo $[0, 1]$ y que la definición de la integral no depende de la partición que se utilice para definir la curva a pedazos. Ver Ejercicios 2.1 y 2.2.

Observación 2.7. También es importante notar que la versión del Teorema fundamental del cálculo para curvas C^1 que demostramos en el Corolario 2.4 sigue siendo cierta para curvas C^1 a pedazos pues una vez probada que la definición de la integral no depende de la partición, basta aplicar el Corolario 2.4 a cada sumando.

Como mencionamos en un principio, la idea es generalizar el teorema y la fórmula de Cauchy para curvas que son C^1 a pedazos. Para ello demostraremos una versión débil del teorema de Cauchy general.

Definición 2.7. Decimos que la función C^1 a pedazos $\mu : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ es una ε -deformación de $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ si existe $t_0 \in (0, 1)$ y $\delta > 0$ tales que $\mu(t) = \gamma(t)$ para todo $t \in [0, 1] \setminus (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

$$|\mu(t) - \gamma(t)| \leq \varepsilon \quad \text{si } t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta).$$

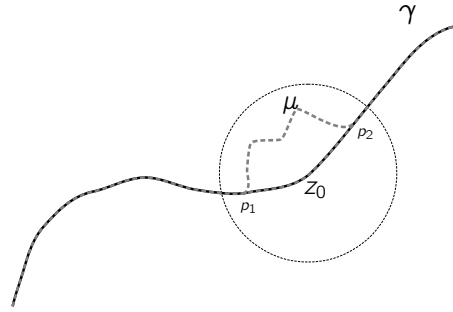


Figura 2.6: La curva μ es una ε -deformación de γ donde $z_0 = \gamma(t_0)$.

Proposición 2.20. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ una curva C^1 a pedazos. Entonces para cada $\mu : [0, 1] \rightarrow \Omega$ ε -deformación C^1 a pedazos de γ tenemos que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\mu} f(z) dz.$$

Demostración. Notar que basta considerar el escenario descrito por la Figura 2.6. Gracias al Teorema 2.9 tenemos que en $D(z_0, \varepsilon)$ existe H holomorfa tal que $\frac{\partial H}{\partial z} = f$, y por la observación anterior el Corolario 2.4 vale para curvas C^1 a pedazos, y por lo tanto

$$\int_{\gamma \cap D(z_0, r)} f(z) dz = H(p_2) - H(p_1) = \int_{\mu \cap D(z_0, r)} f(z) dz.$$

■

Corolario 2.21. Sea $f : \mathbb{C} \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y sea $\gamma_r(t) = p + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Luego para todo $0 < r_1 < r_2$ se tiene que

$$\int_{\gamma_{r_1}} f(z) dz = \int_{\gamma_{r_2}} f(z) dz.$$

2.3. TEOREMA Y FÓRMULA DE CAUCHY

Corolario 2.22. Sea $f : D(p, R_2) \setminus \overline{D(p, R_1)} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y sea $\gamma_r(t) = p + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Luego para todo $0 < R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ se tiene que

$$\int_{\gamma_{r_1}} f(z)dz = \int_{\gamma_{r_2}} f(z)dz$$

Demostración. Notar que en ambos casos se puede transformar γ_{r_1} en γ_{r_2} solo mediante ε -transformaciones.

■

Observación 2.8. Notar que las ε -deformaciones se deben realizar “dentro” del conjunto Ω . En la Figura 2.7 se muestran dos curvas que no son ε -equivalentes en un conjunto Ω .

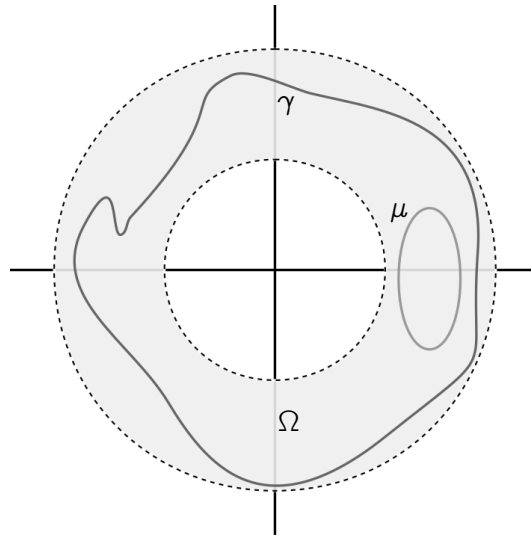


Figura 2.7: γ y μ no son ε -equivalentes en Ω .

Como corolario de la Proposición 2.20 tenemos la siguiente versión del teorema y la fórmula de Cauchy.

Teorema 2.23 (Teorema de Cauchy). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ una curva C^1 a pedazos y cerrada tal que se puede ε -deformar en Ω por curvas C^1 a pedazos a $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$, entonces

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Teorema 2.24 (Fórmula de Cauchy). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Sea $p \in \Omega$ y sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega \setminus \{p\}$ una curva simple C^1 a pedazos y cerrada tal que se puede ε -deformar en $\Omega \setminus \{p\}$ por curvas C^1 a pedazos a $S(p, r)$ orientada positivamente con $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$, entonces

$$f(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - p} dw$$

Finalmente, concluimos con el enunciado de la versión general del teorema de Cauchy que aplica no solo a ε -deformaciones, si no que a cualquier familia de curvas homotópicas.

Teorema 2.25 (Teorema de Cauchy homotópico). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Sea $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ una función continua. Para cada $s \in [0, 1]$ denotemos por $\gamma_s : [0, 1] \rightarrow \Omega$ definida como $\gamma_s(t) = H(s, t)$ y supongamos que

- $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, y
- $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$.

Entonces entonces la función $I : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$I(s) = \int_{\gamma_s} f(z) dz$$

es constante para $s \in [0, 1]$. En particular, si γ_0 y γ_1 son dos curvas cerradas en Ω y que son homotópicas

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Para demostrar este teorema se requiere desarrollar primer una teoría de integración de línea sobre funciones solo continuas. En general esto no se puede hacer para cualquier función f sin agregar ciertas hipótesis adicionales como por ejemplo que las curvas sobre las que se integran sean *rectificables* (en cuyo caso los resultados anteriormente vistos siguen siendo válidos). Sin embargo, cuando las funciones a integrar son *holomorfas*, se puede relajar dicha condición y permitir curvas continuas como caminos de integración. Al lector interesado se le recomienda mirar, por ejemplo, [8, Ch III, p110].

Corolario 2.26. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ una curva cerrada que es homotópica en Ω a un punto $p \in \Omega$. Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Un corolario de la versión general del teorema de Cauchy es el teorema de existencia de antiderivadas holomorfas en conjuntos simplemente conexos.

Definición 2.8. Decimos que $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es simplemente conexo si Ω es conexo por caminos, y dadas dos curvas continuas $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega$ con $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ y $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, entonces existe $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ continua tal que

$$\begin{aligned} H(0, t) &= \gamma_0(t) \quad \forall t \in [0, 1], \\ H(1, t) &= \gamma_1(t) \quad \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Observación 2.9. Como consecuencia de la definición se puede verificar que si Ω es simplemente conexo y si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ es una curva cerrada, entonces γ se puede deformar al punto $\{p = \gamma(0)\}$.

Teorema 2.27 (Existencia de antiderivadas holomorfas III). Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω conjunto abierto simplemente conexo. Entonces existe $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F' = f$.

Demostración. Fijamos $p \in \Omega$, y para cada $z \in \Omega$ consideramos $\gamma_z : [0, 1] \rightarrow \Omega$ tal que $\gamma_z(0) = p$ y $\gamma_z(1) = z$. Nuestro candidato a antiderivada de f está dada por

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w) dw,$$

pero para que este candidato sea válido, primero debemos hacernos cargo de que la definición esté bien hecha: $F(z)$ no puede depender del camino que se escoja. Para ello notamos que si $\tilde{\gamma}_z$ es otro camino en Ω que conecte p con z , gracias a que Ω es simplemente conexo podemos usar el Teorema 2.25 y concluir que

$$\int_{\gamma_z} f(w) dw = \int_{\tilde{\gamma}_z} f(w) dw,$$

2.4. TEOREMA DE GOURSAT

lo que hace que F esté bien definida.

Ahora bien, dado $z \in \Omega$ consideramos $r > 0$ pequeño de modo que $D(z, r) \subseteq \Omega$, luego para $h \in D(0, r)$ tenemos que $z + h \in D(z, r)$ y por lo tanto podemos escribir

$$F(z + h) - F(z) = \int_{\gamma_{z+h}} f(w)dw - \int_{\gamma_z} f(w)dw,$$

pero dado que la definición de $F(z + h)$ no depende del camino que conecte p con $z + h$, podemos suponer que $\gamma_{z+h} = \gamma_z + [z, z + h]$, donde $[z, z + h]$ denota el segmento rectilíneo que conecta z con $z + h$ (que está dentro de $D(z, r)$ por ser convexo). En consecuencia

$$F(z + h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(w)dw = \int_0^1 f(z + th)h dt,$$

y por lo tanto

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} = \int_0^1 f(z + th)dt.$$

Ahora bien, como f es continua, dado $\varepsilon > 0$ debe existir $\delta > 0$ tal que si $|w - z| < \delta$ entonces $|f(w) - f(z)| < \varepsilon$. Luego, si $|h| < \delta$ entonces $|f(z + th) - f(z)| < \varepsilon$ y tenemos que

$$\left| \frac{F(z + h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \int_0^1 |f(z + th) - f(z)| dt \leq \varepsilon,$$

lo que demuestra que $F' = f$. Finalmente, dado que F es diferenciable, entonces por el Teorema 1.11 tenemos que $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ existen y además $\frac{\partial F}{\partial z} = F' = f$. Como f es holomorfa, entonces es de clase C^1 y por lo tanto F' también ha de serlo, y en consecuencia F también es de clase C^1 y como ya vimos que es diferenciable, entonces ha de ser holomorfa. ■

2.4. Teorema de Goursat

Teorema 2.28 (Goursat). Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función diferenciable. Si $R \subseteq \Omega$ es un rectángulo entonces

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

Demostración. Para $S \subseteq \Omega$ rectángulo consideramos la función

$$\mu(S) = \int_{\partial S} f(z)dz,$$

donde la orientación de ∂S es anti-horaria. Bisectamos ambos lados del rectángulo R para obtener 4 rectángulos R_1, \dots, R_4 y observamos que

$$\mu(R) = \sum_{k=1}^4 \mu(R_k) \Rightarrow |\mu(R)| \leq \sum_{k=1}^4 |\mu(R_k)|,$$

debido a que las integrales sobre los lados comunes se cancelan por estar orientadas en sentidos opuestos. Por lo tanto debe existir $k \in \{1, \dots, 4\}$ tal que $|\mu(R_k)| \geq \frac{1}{4} |\mu(R)|$. Sin perder generalidad supongamos que esto ocurre para $k = 1$. Repetimos el procedimiento de bisección para R_1 y obtenemos un nuevo rectángulo, que llamamos R_2 que satisface

$$|\mu(R_2)| \geq \frac{1}{4} |\mu(R_1)| \geq \frac{1}{4^2} |\mu(R)|.$$

2.5. EJERCICIOS

Siguiendo de esta forma, podemos construir una sucesión de rectángulos encajonados $R \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots$ tales que

$$\mu(R_k) \geq \frac{1}{4^k} \mu(R).$$

Además, los centros de los rectángulos R_k están todos contenidos en el rectángulo R , que es un conjunto cerrado y acotado en \mathbb{C} , luego el teorema de Bolzano-Weierstrass garantiza que la sucesión $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de los centros de cada rectángulo tiene un punto de acumulación p_0 , que además debe estar contenido en todos los rectángulos R_k .

Como f es diferenciable en todo punto de Ω , lo es en p_0 , luego dado $\varepsilon > 0$ debe existir $\delta > 0$ tal que $D(p_0, \delta) \subseteq \Omega$ y tal que

$$\left| \frac{f(p) - f(p_0)}{p - p_0} - f'(p_0) \right| \leq \varepsilon \quad \forall p \in D(p_0, \delta).$$

Por otra parte, sabemos del teorema de Cauchy para curvas cerradas C^1 a pedazos que

$$\int_{\partial R_k} 1 dz = 0 = \int_{\partial R_k} z dz = 0,$$

pues las funciones 1 y z son holomorfas. Luego si consideramos k suficientemente grande tal que $R_k \subseteq D(p_0, \delta)$, entonces

$$|\mu(R_k)| = \left| \int_{\partial R_k} f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial R_k} (f(z) - f(p_0) - f'(p_0)(z - p_0)) dz \right|.$$

Sea P el perímetro de R y D el largo de su diagonal, luego el perímetro de R_k es $2^{-k}P$ y el largo de la diagonal es $2^{-k}D$, de donde deducimos que si $z \in \partial R_k$, entonces

$$|(f(z) - f(p_0) - f'(p_0)(z - p_0))| \leq \varepsilon |z - p_0| \leq 2^{-k}D\varepsilon,$$

y como $L(\partial R_k) = 2^{-k}P$, gracias a la Proposición 2.5 obtenemos que

$$|\mu(R)| \leq 4^k |\mu(R_k)| \leq 4^k 2^{-k}P \cdot 2^{-k}D\varepsilon = PD\varepsilon,$$

de donde concluimos que $\mu(R) = 0$ pues $\varepsilon > 0$ era arbitrario. ■

Este teorema, junto con el Teorema de Morera (Teorema 3.4) que veremos mas adelante nos permitirá concluir que

$$\text{Diferenciable} \Rightarrow \text{Holomorfo}$$

sin la necesidad de suponer que la función es de clase C^1 .

2.5. Ejercicios

Ejercicio 2.1. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva C^1 a pedazos y $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua (integrable). Mostrar que la definición de $\int_{\gamma} f$ no depende de la partición que se use para definir γ . Es decir, si $a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$ y $a = \tilde{a}_0 < \tilde{a}_1 < \dots < \tilde{a}_M = b$ son tales que $\gamma|_{[a_k, a_{k+1}]}$ y $\gamma|_{[\tilde{a}_l, \tilde{a}_{l+1}]}$ son de clase C^1 para $k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ y $l \in \{0, 1, \dots, M-1\}$, entonces

$$\sum_{k=0}^{N-1} \int_{\gamma|_{[a_k, a_{k+1}]}} f(z) dz = \sum_{k=0}^{M-1} \int_{\gamma|_{[\tilde{a}_k, \tilde{a}_{k+1}]}} f(z) dz.$$

Ejercicio 2.2. Sea $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ una función C^1 a pedazos estrictamente creciente y sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva C^1 a pedazos. Muestre que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma \circ \phi} f(z)dz$$

para toda f continua (integrable).

Ejercicio 2.3. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva C^1 a pedazos y sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, entonces

$$\int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)dz = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)).$$

Ejercicio 2.4. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua tal que $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Muestre que si $|f(z)| \leq 1$ y si $\Gamma = \{e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$ entonces

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq 4.$$

Ayuda: Muestre que

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq \int_0^{2\pi} |\sin t| dt.$$

Ejercicio 2.5. Calcule la integral

$$\int_{\Gamma} (\bar{z} + z^2 \bar{z})dz$$

donde Γ es el cuadrado de vértices $1 + i$, $1 - i$, $-1 - i$ y $-1 + i$ recorrido en sentido horario.

Ejercicio 2.6. Sea $R > 0$ y $f : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Para cada $z \in D(0, R)$ considere el camino $\gamma_z : [0, 1] \rightarrow D(0, R)$ definido como

$$\gamma_z(t) = tz.$$

Defina

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)dw$$

y muestre, sin usar el teorema de Cauchy, que F es holomorfa y que $F'(z) = f(z)$.

Ejercicio 2.7. Sea $f : D(p, r) \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Para cada $z \in D(p, r)$ considere una curva C^1 a pedazos $\gamma_z : [0, 1] \rightarrow D(p, r)$ tal que $\gamma_z(0) = p$ y $\gamma_z(1) = z$.

1. Defina

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)dw,$$

y muestre que F está bien definida (no depende de la elección del camino γ_z) y que $F'(z) = f(z)$.

2. Generalice lo anterior, suponiendo que $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ donde U es un conjunto simplemente conexo en \mathbb{C} .

Ejercicio 2.8. Muestre que el teorema de integración por partes vale en el siguiente sentido: sean f, g funciones holomorfas y sea γ una curva C^1 y suave va de z_1 a z_2 , entonces

$$\int_{\gamma} f'(z)g(z)dz = f(z_2)g(z_2) - f(z_1)g(z_1) - \int_{\gamma} f(z)g'(z)dz$$

Ejercicio 2.9. Calcule $\int_{\gamma} \frac{2w^4 + 3w^3}{w - 2} dw$ donde $\gamma = S(1, 5)$ orientada en sentido horario.

Ejercicio 2.10. Sea $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Si $z \notin [0, 1]$ defina

$$f(z) = \int_0^1 \frac{g(t)}{t - z} dt.$$

1. Use la definición para demostrar que $f : \mathbb{C} \setminus [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable y obtenga una fórmula para $f'(z)$.
2. Demuestre que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$. Recuerde que $z \rightarrow \infty$ ssi $|z| \rightarrow \infty$.
3. Calcule explícitamente $f(z)$ para $g \equiv 1$. Ayuda: Considere $z = x + iy$ y estudie los casos $y = 0$ e $y \neq 0$. Puede que tenga que usar cambios de variables trigonométricos.
4. Siga suponiendo que $g \equiv 1$. Para $x \in (0, 1)$ y $z = x + iy$ vea que sucede con $\lim_{y \rightarrow 0^+} f(z)$ y $\lim_{y \rightarrow 0^-} f(z)$. Ayuda: Estudie $\operatorname{Im} f(z)$.

Capítulo 3

Aplicaciones de la fórmula de Cauchy

3.1. Suavidad de las funciones holomorfas

En nuestra definición de función holomorfa siempre hemos supuesto que f es de clase C^1 . Una de las principales consecuencias del teorema y la fórmula de Cauchy es que una función holomorfa es de hecho de clase C^∞ como muestra el siguiente

Teorema 3.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces $f \in C^\infty(\Omega)$. Además, si $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$ y $z \in D(p, r)$, entonces

$$f^{(k)}(z) = \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{S(p, r)} \frac{f(w)}{(w - z)^{k+1}} dw$$

Demostración. Si $z \in D(p, r)$, entonces la función $w \mapsto \frac{f(w)}{w - z}$ es continua en $S(p, r)$ pues

$$|w - z| \geq r - |z - p| > 0.$$

Además se verifica que

$$\frac{1}{h} \left(\frac{f(w)}{w - z - h} - \frac{f(w)}{w - z} \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{f(w)}{(w - z)^2}$$

uniformemente en w . Luego, si aplicamos la fórmula de Cauchy, obtendremos que

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{S(p, r)} \left(\frac{f(w)}{w - z - h} - \frac{f(w)}{w - z} \right) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p, r)} \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw. \end{aligned}$$

De manera análoga, si aplicamos la misma idea a $\frac{f'(z + h) - f'(z)}{h}$ obtendremos que

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_{S(p, r)} \frac{f(w)}{(w - z)^3} dw \stackrel{\text{def}}{=} \Psi(z),$$

donde además la función $\Psi(z)$ es continua pues

$$\frac{f(w)}{(w - t)^3} \xrightarrow{t \rightarrow z} \frac{f(w)}{(w - z)^3}$$

uniformemente en w . De donde deducimos que $f \in C^2(\Omega)$.

En resumen hemos demostrado que f' es una función de clase C^1 que es diferenciable en todo punto. En particular por el Teorema 1.11 tenemos que f' debe ser holomorfa.

La demostración termina iterando el procedimiento anterior para concluir que f es una función de clase C^k para todo $k \in \mathbb{N}$. ■

Corolario 3.2. Si f es holomorfa, entonces f' es holomorfa.

Además, siguiendo la misma demostración de Teorema 3.1 obtenemos la siguiente

Proposición 3.3. Sea $g : S(p, r) \rightarrow \mathbb{C}$ continua, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p,r)} \frac{g(w)}{w-z} dw$$

es holomorfa en $D(p, r)$.

Esta proposición nos permite construir funciones holomorfas a partir de funciones solamente continuas. Sin embargo, la “extensión” holomorfa que se obtiene no tiene por que ser efectivamente una extensión de la función.

Ejemplo 3.1. Notar que si $g(z) = \bar{z}$, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(0,1)} \frac{g(w)}{w-z} dw = 0$$

para todo $z \in D(0, 1)$.

Teorema 3.4 (Morera). Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua con $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Si

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

para todo rectángulo R tal que \bar{R} esté contenido en Ω . Entonces f es diferenciable en Ω , mas aún f es holomorfa.

Demostración. Sea $p \in \Omega$, vamos a demostrar que si $D(p, r) \subseteq \Omega$ entonces f es holomorfa en $D(p, r)$.

Sea $q \in D(p, R)$ y consideremos un camino $\rho_{p,q}$ en $D(p, R)$ que conecte p con q compuesto solo por segmentos verticales y horizontales (ver Figura 3.1) para definir la función $F : D(p, r) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$F(q) = \int_{\rho_{p,q}} f(w) dw.$$

Como $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para toda γ que es frontera de rectángulo en Ω , entonces la función $F(q)$ no depende del camino que tomemos para ir de p a q en tanto que este sea de la forma descrita. En efecto, si $\tilde{\rho}_{p,q}$ es otro camino que va de p a q , entonces, la curva

$$\rho = \rho_{p,q} + (-\tilde{\rho}_{p,q})$$

es una curva cerrada que describe una unión de fronteras de rectángulos (ver la Figura 3.2).

Veamos que F es diferenciable en q . Como $D(p, r)$ es abierto, tenemos que para $\tilde{r} > 0$ suficientemente pequeño, $D(q, \tilde{r}) \subseteq D(p, r)$, luego si $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}$ es tal que $|h| < \tilde{r}$, entonces $q + h \in D(p, r)$ y se puede conectar q con $q + h$ mediante un camino compuesto por segmento horizontal seguido de uno vertical.

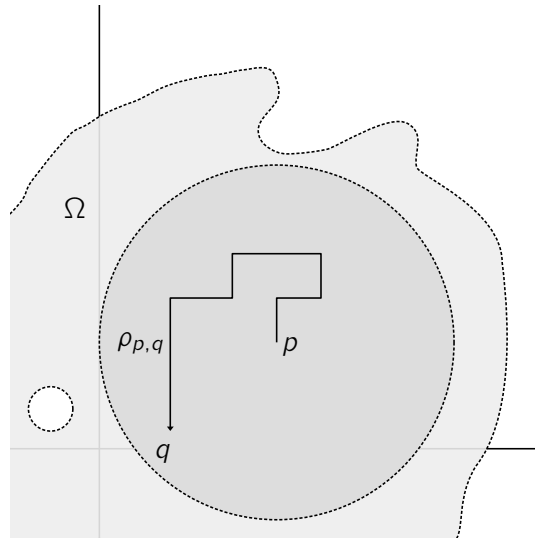


Figura 3.1: Camino $\rho_{p,q}$ que une p con q .

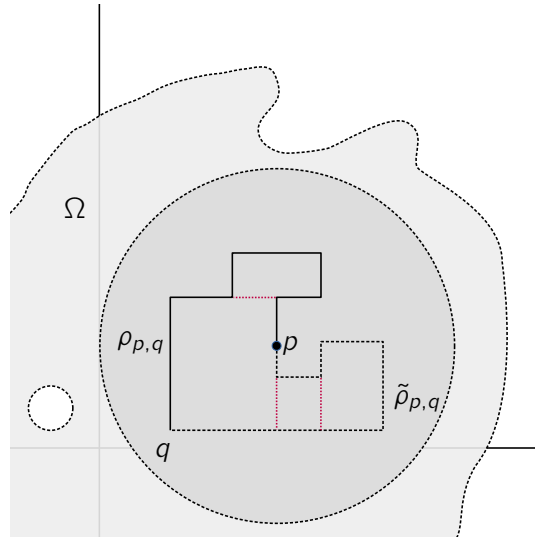


Figura 3.2: La curva $\rho_{p,q}$ y la curva $\tilde{\rho}_{p,q}$.

Sea $\rho_{q,q+h}$ dicha curva que la parametrizamos en dos segmentos: primero como $\rho_{q,q+h_1}(t) = q + th_1$ y luego como $\rho_{q,q+h}(t) = q + h_1 + ith_2$ con $t \in [0, 1]$. De la definición de F , y como F no depende del camino que escojamos en tanto esté compuesto solo por segmentos verticales y horizontales, tenemos que

$$F(q+h) = \int_{\rho_{p,q+h}} f(z)dz = \int_{\rho_{p,q}} f(z)dz + \int_{\rho_{q,q+h}} f(z)dz = F(q) + \int_{\rho_{q,q+h}} f(z)dz$$

y por lo tanto

$$\left| \frac{F(q+h) - F(q)}{h} - f(q) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{\rho_{q,q+h}} f(z)dz - f(q) \right|$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \frac{1}{h} \left(h_1 \int_0^1 f(q + th_1) dt + ih_2 \int_0^1 f(q + h_1 + ith_2) dt \right) - \frac{\overbrace{h_1 + ih_2}^1}{h} f(q) \right| \\
 &\leq \frac{1}{|h|} \left(|h_1| \int_0^1 |f(q + th_1) - f(q)| dt + |h_2| \int_0^1 |f(q + h_1 + ith_2) - f(q)| dt \right) \\
 &\leq \int_0^1 |f(q + th_1) - f(q)| dt + \int_0^1 |f(q + h_1 + ith_2) - f(q)| dt
 \end{aligned}$$

pero de la continuidad de f obtenemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta < \tilde{r}$ tal que si $|\xi| < \delta$ entonces

$$|f(q + \xi) - f(q)| < \varepsilon,$$

en particular como $t \in [0, 1]$ tenemos que si $|h| < \delta$ entonces $|th_1| < \delta$ y $|h_1 + ith_2| < \delta$, por lo tanto

$$\left| \frac{F(q + h) - F(q)}{h} - f(q) \right| < 2\varepsilon.$$

Esto demuestra que F es diferenciable en q y $F'(q) = f(q)$, luego gracias al Teorema 1.11 tenemos que F es satisfice las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Como $q \in D(p, r)$ era arbitrario, lo antes demostrado también dice que F es diferenciable en todo $D(p, r)$ y además es de clase C^1 (pues f es continua y $F' = f$), en consecuencia F ha de ser una función holomorfa $D(p, r)$. Pero gracias al Corolario 3.2, tenemos que $F' = f$ también es holomorfa en $D(p, r)$, lo que concluye la demostración. ■

Observación 3.1. Si juntamos los teoremas de Morera y Goursat podemos escribir la siguiente cadena de equivalencias

$$\text{Holomorfa} \Leftrightarrow \text{Cauchy-Riemann} + C^1 \Leftrightarrow C^0 + \text{Diferenciable}$$

por lo que de ahora en adelante hablaremos indistintamente de funciones holomorfas o diferenciables.

3.2. Series de potencia y analiticidad

Hasta ahora teníamos que si f es una función analítica en Ω , entonces f es (infinitamente) diferenciable en Ω . A continuación veremos que toda función diferenciable es analítica, y para ello recordamos la siguiente

Definición 3.1. Decimos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica si para cada $p \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que $D(p, r) \subseteq \Omega$ y existe una sucesión $(a_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{C}$ tales que

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - p)^k \quad \forall z \in D(p, r).$$

Teorema 3.5. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Entonces f es analítica en Ω .

Demostración. Sin perder generalidad¹ supondremos que $0 \in \Omega$ y que $p = 0$.

El Teorema 3.1 nos dice que toda función holomorfa es de clase C^∞ , y en particular podemos definir

$$a_k = \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(0)$$

¹considerar la función $\tilde{f}(z) = f(z - p)$ en $\Omega - p$.

3.2. SERIES DE POTENCIA Y ANALITICIDAD

para todo $k \geq 0$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(0, r)} \subseteq \Omega$ y sea $z \in D(0, r)$, de la fórmula de Cauchy tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(0, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

pero como $|z| < |w| = r$ tenemos que $|\frac{z}{w}| < 1$, luego

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{w}} = \frac{1}{w} \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{w^k},$$

y la serie converge uniformemente. Por lo tanto, usando el Teorema 3.1 tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(0, r)} f(w) \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{w^{k+1}} dw = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{S(0, r)} \frac{f(w)}{w^{k+1}} dw \right) z^k = \sum_{k \geq 0} a_k z^k.$$

■

Observación 3.2. A partir de ahora, podemos utilizar indistintamente los términos holomorfa, diferenciable o analítica para referirnos a una función con alguna de esas características.

Ejemplo 3.2. Consideremos $f : \mathbb{C} \setminus \{-2i\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $f(z) = \frac{1}{z + 2i}$. Notar que si $p = 0$, entonces

$$f(z) = \frac{1}{z + 2i} = \frac{1}{2i(1 - \frac{iz}{2})}$$

luego, si $|\frac{iz}{2}| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$, de la serie geométrica tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{2i} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{iz}{2} \right)^k = \sum_{k \geq 0} \frac{i^{k-1}}{2^{k+1}} z^k.$$

Por otra parte, si $p = 1$, tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{z + 2i} = \frac{1}{1 + 2i + z - 1} = \frac{1}{(1 + 2i)(1 + \frac{z-1}{1+2i})},$$

luego si $|\frac{z-1}{1+2i}| < 1 \Leftrightarrow |z-1| < \sqrt{5}$, nuevamente de la serie geométrica concluimos que

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(1 + 2i)^{k+1}} (z - 1)^k.$$

Cálculos similares se pueden realizar para todo $p \neq -2i$.

Ejemplo 3.3. Encuentre una formula cerrada para la serie

$$\sum_{k \geq 0} k^2 z^k$$

cuando $|z| < 1$. De la serie geométrica tenemos que para $|z| < 1$

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{k \geq 0} z^k,$$

derivando a ambos lados tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^2} &= \sum_{k \geq 1} k z^{k-1} \\ &= \sum_{k \geq 0} (k+1) z^k \\ &= \sum_{k \geq 0} k z^k + \sum_{k \geq 0} z^k \\ &= \sum_{k \geq 0} k z^k + \frac{1}{1-z}.\end{aligned}$$

Finalmente, volvemos a derivar esta igualdad y obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{2}{(1-z)^3} &= \sum_{k \geq 0} k^2 z^{k-1} + \frac{1}{(1-z)^2} \\ &= \sum_{k \geq 1} k^2 z^{k-1} + \frac{1}{(1-z)^2} \\ &= \sum_{k \geq 0} (k+1)^2 z^k + \frac{1}{(1-z)^2} \\ &= \sum_{k \geq 0} k^2 z^k + 2 \sum_{k \geq 0} k z^k + \sum_{k \geq 0} z^k + \frac{1}{(1-z)^2} \\ &= \sum_{k \geq 0} k^2 z^k + 2 \left(\frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z} \right) + \left(\frac{1}{1-z} \right) + \frac{1}{(1-z)^2} \\ &= \sum_{k \geq 0} k^2 z^k + \frac{3}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z}\end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$\sum_{k \geq 0} k^2 z^k = \frac{2}{(1-z)^3} - \frac{3}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z} = \frac{2 - 3(1-z) + (1-z)^2}{(1-z)^3} = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

3.3. Estimaciones de Cauchy y el teorema de Liouville

Teorema 3.6 (Estimaciones de Cauchy). Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, $p \in \Omega$ y $R > 0$ tal que $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$. Si $M = \sup_{w \in S(p, r)} |f(w)|$, entonces

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(p) \right| \leq \frac{M k!}{r^k}.$$

Demostración. Recordar que

$$\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(p) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{S(p, r)} \frac{f(w)}{(w-p)^{k+1}} dw,$$

luego

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(p) \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \sup_{w \in S(p, r)} \frac{|f(w)|}{|w-p|^{k+1}} \cdot 2\pi r = \frac{k!}{2\pi} \sup_{w \in S(p, r)} \frac{|f(w)|}{r^{k+1}} \cdot 2\pi r \leq \frac{M k!}{r^k}.$$

■

Observación 3.3. Notar que de este resultado obtenemos que

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(p) \right|^{\frac{1}{k}} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{M}{r^k} \right|^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{r},$$

de donde sale que el radio de convergencia R de la serie de Taylor

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(p)(z - p)^k$$

satisface

$$R \geq r$$

para todo $r > 0$ tal que $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$, es decir

$$R \geq \text{dist}(p, \Omega^c).$$

Lema 3.7. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, donde Ω es abierto y conexo. Si $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, entonces f constante.

Demostración. Sea $z \in \Omega$ y sea $p \in \Omega$ fijo. Entonces $0 = \int_{\gamma} f'(w)dw$ donde γ es cualquier curva (rectificable), en particular para una curva que va de p a z . Luego del teorema fundamental del cálculo complejo tenemos que $f(z) = f(p)$. ■

Teorema 3.8 (Liouville). Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función entera y acotada (i.e. existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \mathbb{C}$), entonces f es constante.

Demostración. Del Teorema 3.6 tenemos que para todo $p \in \mathbb{C}$ y todo $r > 0$ se puede escribir

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right| \leq \frac{M}{r}.$$

Como esto vale para todo $r > 0$, se concluye que $f'(p) = 0$ para todo $p \in \mathbb{C}$, luego f debe ser constante. ■

Teorema 3.9. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función entera tal que $|f(z)| \leq M|z|^N$ para todo $|z| > R$ entonces f es un polinomio de grado a lo mas N .

Demostración. Ver Ejercicio 3.11. ■

Corolario 3.10 (Teorema fundamental del álgebra). Sea $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio holomorfo. Entonces P es constante o P tiene una raíz en \mathbb{C} .

Demostración. Si P no es constante, demostremos que P debe tener una raíz. Supongamos por contradicción que P es no constante y $P(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, luego

$$g(z) = \frac{1}{P(z)}$$

es una función entera. Se deja como ejercicio verificar que $|P(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} +\infty$. Lo que implica que $|g(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} 0$, de donde se concluye que g debe ser acotada. Luego el teorema de Liouville implica que g debe ser constante. Lo que es una contradicción. ■

Corolario 3.11. Si $f_n \rightarrow f$ uniformemente en compactos de Ω y f_n es holomorfa, entonces f es holomorfa.

Demostración. Sea $p \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$. Luego $f_n \rightarrow f$ uniformemente en $\overline{D(p, r)}$, de donde f es continua en $D(p, r)$. Finalmente, notar que como la convergencia es uniforme se puede escribir

$$\begin{aligned} f(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p, r)} \frac{f_n(w)}{w - z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p, r)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(w)}{w - z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw, \end{aligned}$$

luego por la Proposición 3.3 concluimos que f debe ser holomorfa. ■

Corolario 3.12. Sean f_n y f como antes, entonces

$$\frac{\partial^k f_n}{\partial z^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}$$

uniformemente en compactos de Ω .

Demostración. Sea $K \subseteq \Omega$ un compacto, y sea $r = \frac{1}{2} \min \{\text{dist}(K, \Omega^c), 1\} > 0$. Notemos que

$$K_r = \bigcup_{p \in K} \overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$$

y K_r es compacto.

Ahora, para $z \in K$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} (f_n(z) - f_m(z)) \right| &\leq \frac{k!}{r^k} \sup_{w \in D(z, r)} |f_n(w) - f_m(w)| \\ &\leq \frac{k!}{r^k} \sup_{w \in K_r} |f_n(w) - f_m(w)| \end{aligned}$$

gracias al Teorema 3.6. Pero f_n es una sucesión de Cauchy uniforme en K_r , de donde concluimos que $\frac{\partial^k f_n}{\partial z^k}$ es una sucesión de Cauchy uniforme en K . ■

3.4. Ceros de funciones holomorfas, parte I

Teorema 3.13. Dado $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y conexo, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa. Si $Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$, el conjunto de ceros de f , tiene un punto de acumulación en Ω entonces $f \equiv 0$.

Demostración. Supongamos que existen $z_n, z_0 \in Z(f)$ tales que $z_n \neq z_0$ y $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$. Veamos primero que $f^{(k)}(z_0) = 0$ para todo $k \geq 0$. De no ser así, podemos definir

$$k_0 = \min \{k : f^{(k)}(z_0) \neq 0\}$$

y tendríamos que $k_0 \geq 1$ (pues $f(z_0) = 0$). Como f es analítica, tenemos que existe $r > 0$ tal que

$$f(z) = \sum_{k \geq k_0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

para todo $z \in D(z_0, r)$. Como $k_0 \geq 1$, podemos definir la función

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k_0}} = \sum_{k \geq k_0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-k_0}$$

que es analítica en $D(z_0, r)$ y además

$$(3.1) \quad g(z_0) = \frac{f^{(k_0)}(z_0)}{k_0!} \neq 0$$

Además es claro que $g(z_n) = \frac{f(z_n)}{(z_n - z_0)^{k_0}} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego g es una serie de potencias que tiene una sucesión de ceros con un punto de acumulación, de donde concluimos que $g \equiv 0$ en $D(z_0, r)$ gracias al Teorema 1.22, lo que es una contradicción con (3.1).

Lo anterior nos dice que el conjunto

$$E = \left\{ z \in \Omega : f^{(k)}(z) = 0 \text{ para todo } k \geq 0 \right\}$$

es no-vacío ($z_0 \in E$), y además es claramente un conjunto cerrado pues

$$E = \bigcap_{k \geq 0} \left(f^{(k)} \right)^{-1} (\{0\}).$$

Afirmamos que E es abierto, en efecto, si $w \in E$ y como f es analítica, tenemos que

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(w)}{k!} (z - w)^k = 0 \quad \forall z \in D(w, \delta),$$

para cierto $\delta > 0$, de donde se concluye que $D(w, \delta) \subseteq E$. Así, como Ω es conexo, debe ocurrir que $\Omega = E$. ■

Veamos algunos corolarios del Teorema 3.13.

Corolario 3.14. *Los ceros de una función holomorfa no constante son aislados.*

Corolario 3.15. *Si $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ son funciones holomorfas, sobre Ω abierto y conexo, que coinciden en un conjunto con un punto de acumulación entonces $f \equiv g$.*

Corolario 3.16. *Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa sobre Ω abierto y conexo. Si existen $p \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $f|_{D(p, r)} = 0$, entonces $f \equiv 0$.*

Corolario 3.17. *Si f y g son funciones enteras que coinciden en \mathbb{R} , entonces $f \equiv g$.*

Ejemplo 3.4. Como $f(z) = \cos^2(z) + \sin^2(z)$ y $g(z) = 1$ coinciden en \mathbb{R} , entonces deben coincidir en \mathbb{C} .

Lo mismo ocurre con otras identidades que satisfacen funciones reales que se extienden al plano complejo. Como por ejemplo que $e^z = \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!}$.

Corolario 3.18. *Si $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ son holomorfas, Ω es abierto y conexo, son tales que $f \cdot g \equiv 0$, entonces $f \equiv 0$ o $g \equiv 0$.*

3.5. EJERCICIOS

Demostración. Si $f(z_0) \neq 0$ para algún $z \in \mathbb{C}$ entonces por la continuidad de $|f(z)|$ debe existir $r > 0$ tal que $f(z) \neq 0$ para $z \in D(z_0, r)$. Luego $g(z) = 0$ en $D(z_0, r)$. ■

Observación 3.4. En lenguaje algebraico si denotamos por

$$\mathcal{H}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es holomorfa}\}$$

tenemos que $\mathcal{H}(\Omega)$ es un anillo para las operaciones $+$ y \cdot . Y el corolario anterior nos dice que $\mathcal{H}(\Omega)$ no tiene divisores de cero cuando Ω es abierto y conexo.

Corolario 3.19. Si f es holomorfa y existe p tal que $f^{(k)}(p) = 0$ para todo $k \geq 0$, entonces $f \equiv 0$.

Observación 3.5. Los dos resultados anteriores no son ciertos en análisis real para funciones C^∞ . Considerar la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Un cálculo sencillo muestra que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \geq 0$ y que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Además, tomando

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

entonces $f \cdot g \equiv 0$.

3.5. Ejercicios

Ejercicio 3.1. Calcule la integral $\int_{S(0,1)} \frac{e^z}{z^k} dz$ para $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3.2. Sea $f : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, con $R > 1$. Calcule

$$\int_{S(0,1)} (2 \pm (w + w^{-1})) \frac{f(w)}{w} dw$$

de dos formas distintas y deduzca que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) dt = f(0) + \frac{1}{2} f'(0)$$

y

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) dt = f(0) - \frac{1}{2} f'(0).$$

Ejercicio 3.3. Encuentre la serie de potencias en torno a $z = 0$ para $f(z) = \frac{z^2}{(1 - z^2)^3}$.

Ejercicio 3.4. Explique por qué las siguientes igualdades son incorrectas:

$$\frac{d^2}{dx^2} \int_{-1}^1 \log|x-t| dt = \int_{-1}^1 \frac{d^2}{dx^2} (\log|x-t|) dt = - \int_{-1}^1 \frac{1}{(x-t)^2} dt.$$

Ejercicio 3.5. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, $z_0 \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{N}$.

3.5. EJERCICIOS

1. Muestre que existe una constante $C > 0$, que **no depende de** k , tal que

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z_0) \right| \leq C k!.$$

La constante puede depender de f y de z_0 .

2. Muestre que no puede existir un polinomio $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z_0) \right| \leq P(k).$$

Ayuda: Considere $f(z) = e^{Rz}$.

Ejercicio 3.6. 1. Sea $f : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Muestre que

$$|f(0)| \leq \frac{1}{R\sqrt{\pi}} \left(\int_{D(0,R)} |f(x, y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ayuda: Justifique que $f^2 : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y luego use la fórmula integral de Cauchy para obtener que

$$(*) \quad f(0)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^2(se^{i\theta}) d\theta,$$

para cualquier $0 < s < R$. Multiplique $(*)$ por s e integre para $s \in (0, R)$ para luego pasar a coordenadas cartesianas.

2. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $K \subseteq \Omega$ un compacto. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Muestre que existe una constante $C > 0$ (que depende solo de Ω y K , **pero no de** f) tal que

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq C \left(\int_{\Omega} |f(x, y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ayuda: Generalice la parte a) para que aplique a una función con dominio $D(z_0, r)$ y luego aplíquela para $z_0 \in K$ y $r > 0$ apropiado. Recuerde que la integral de una función real positiva es monótona si se agranda el dominio de integración.

Ejercicio 3.7 (Existencia de logaritmos). Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω conjunto abierto simplemente conexo tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Muestre que existe $L : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $e^{L(z)} = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. Ayuda: Note que de existir dicha función L entonces satisface $L'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$.

Ejercicio 3.8. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ y consideremos $L = \Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Suponga que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en todo Ω pero solo es holomorfa en $\Omega \setminus L$. Muestre que f es holomorfa en todo Ω . Ayuda: Use el teorema de Morera.

Ejercicio 3.9. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, y sean $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funciones holomorfas tales que

$$|f_n(z)| \leq 2^{-n}.$$

Muestre que la serie definida como $\sum_{n \geq 0} f_n(z)$ define una función holomorfa en Ω .

Ejercicio 3.10. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que existen $C > 0$ y $\alpha \in (0, 1)$ de modo que

$$|f(z)| \leq C |z|^\alpha, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Muestre que f debe ser constante. *Ayuda: Use el Teorema 3.6.*

Ejercicio 3.11. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función entera tal que $|f(z)| \leq M |z|^N$ para todo $|z| > R$ entonces f es un polinomio de grado a lo mas N . *Ayuda: Use el Teorema 3.6.*

Ejercicio 3.12. Una función holomorfa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice de tipo exponencial si existen $A, C, R > 0$ tales que

$$|f(z)| \leq C e^{A|z|} \quad \forall |z| > R.$$

Muestre que el conjunto de funciones de tipo exponencial es cerrado bajo diferenciación.

Ejercicio 3.13. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $f(z+i) = f(z) = f(z+1)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Muestre que f es constante. *Ayuda: Use el Teorema 3.8.*

Ejercicio 3.14. Suponga que la serie de Taylor de una función entera F converge *uniformemente* a F en *todo* \mathbb{C} . Muestre que F debe ser un polinomio.

Ejercicio 3.15. Sea f una función entera no constante. Muestre que $f(\mathbb{C})$ es denso en \mathbb{C} . *Ayuda: Argumente por contradicción y use el Teorema 3.8.*

Ejercicio 3.16. Sea f una función entera que satisface $|\operatorname{Re} f(z)| \leq |\operatorname{Im} f(z)|$. Muestre que f es constante. *Ayuda: Use el Ejercicio 3.15.*

Ejercicio 3.17 (Teorema de Montel). Se dice que un conjunto \mathcal{F} de funciones holomorfas en Ω es localmente acotado si para todo compacto $K \subseteq \Omega$ existe $M > 0$ tal que

$$\max_K |f| \leq M \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

Muestre que \mathcal{F} es un conjunto de funciones holomorfas localmente acotado en Ω si y solo si \mathcal{F} es precompacto (visto como subconjunto de $C(\Omega)$). *Ayuda: Para probar que \mathcal{F} es localmente acotado argumente por contradicción. Para probar que \mathcal{F} es precompacto, use la fórmula de Cauchy y el teorema de Arzela-Ascoli.*

Ejercicio 3.18. Una función $f : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice analítica real o de clase C^ω si para cada $a \in U$ existe $\delta > 0$ con $(a - \delta, a + \delta) \subseteq U$ y existe una sucesión $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} c_n (x - a)^n, \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta).$$

1. Encuentre una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ que no es analítica real. *Ayuda: Use la función $e^{\frac{1}{x}}$.*

2. Muestre que $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es analítica real en todo \mathbb{R} , pero no existen $x_0 \in \mathbb{R}$ ni $(a_k)_{k \geq 0}$ tales que $f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k (x - x_0)^k$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule la serie de potencias de f en torno a $x_0 = 0$ y su radio de convergencia.

3. Suponga que $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es abierto y conexo. Suponga que $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y que $F(\Omega \cap \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Muestre que si $U = \Omega \cap \mathbb{R}$ entonces $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = F(x) \quad x \in U$$

es analítica real.

3.5. EJERCICIOS

4. Suponga que $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es analítica real para cierto $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto y conexo. Muestre que existe $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y conexo y una función holomorfa $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\Omega \cap \mathbb{R} = U$ y $f = F|_U$.
5. Muestre que un teorema de Liouville es falso para funciones analíticas reales, para ellos encuentre una función analítica real que es acotada y no constante.
6. Sea $\varepsilon > 0$ y defina $S_\varepsilon \subseteq \mathbb{C}$ como $S_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \varepsilon\}$. Construya una función analítica real $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para la cual no existe ninguna función holomorfa $F_\varepsilon : S_\varepsilon \rightarrow \mathbb{C}$ de modo que $F_\varepsilon|_{\mathbb{R}} = f$.

Capítulo 4

Singularidades y el Teorema de los Residuos

En este capítulo estudiaremos funciones holomorfas que pueden tener singularidades, como por ejemplo

$$\frac{1}{z}, \frac{1}{z^k}, \frac{1}{(z-p)^k(z-q)^l}, e^{\frac{1}{z}}, \text{ etc.}$$

4.1. Singularidades

Definición 4.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, $p \in \Omega$ y $f : \Omega \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función. Diremos que p es una singularidad aislada para f si existe $r > 0$ tal que $D(p, r) \subseteq \Omega$ y $f|_{D(p,r) \setminus \{p\}}$ es holomorfa.

En vista de la definición anterior, notamos que hay tres posibilidades mutuamente excluyentes:

S.1 $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \overline{D(p, R)} \setminus \{p\}$.

S.2 $\lim_{z \rightarrow p} |f(z)| = +\infty$.

S.3 Ni [S.1](#) ni [S.2](#) ocurren.

Cada uno de estos casos da pie para la siguiente definición.

Definición 4.2. Sea $f : \Omega \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa con singularidad aislada p . Decimos que

- p es una singularidad removible para f si [S.1](#) ocurre.
- p es un polo para f si [S.2](#) ocurre.
- p es una singularidad esencial si [S.3](#) ocurre.

Teorema 4.1 (Teorema de las singularidades removibles de Riemann). Sea $f : D(p, r) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y acotada, entonces

- $\lim_{z \rightarrow p} f(z)$ existe, y
- La función

$$\hat{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \neq p, \\ \lim_{z \rightarrow p} f(z) & \text{si } z = p, \end{cases}$$

es holomorfa.

4.1. SINGULARIDADES

Demostración. Definamos $g : D(p, r) \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$g(z) = \begin{cases} (z-p)^2 f(z) & \text{si } z \neq p \\ 0 & \text{si } z = p. \end{cases}$$

Claramente g es continua en $D(p, r)$ y diferenciable en $D(p, r) \setminus \{p\}$, veamos que también es diferenciable en p . Para $h \in D(0, r)$ escribimos

$$\frac{g(p+h) - g(p)}{h} = \frac{h^2 f(p+h)}{h} = hf(p+h),$$

como f es acotada en $D(p, r) \setminus \{p\}$ tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(p+h) - g(p)}{h} = 0,$$

luego gracias a los teoremas de Goursat y Morera tenemos que g debe ser holomorfa en $D(p, r)$ y además

$$|g(z)| \leq M|z-p|^2,$$

donde $|f(z)| \leq M$ si $z \neq p$. Ahora bien, como g es analítica en $D(p, r)$ debe existir $(a_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{C}$ tal que

$$g(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z-p)^k,$$

y como

$$\left| \frac{g(z)}{(z-p)^2} \right| \leq M,$$

concluimos que $a_0 = a_1 = 0$. Así podemos definir la función holomorfa

$$\hat{f}(z) = \sum_{k \geq 2} a_k (z-p)^{k-2} = \sum_{k \geq 0} a_{k+2} (z-p)^k,$$

y claramente $\hat{f}(z) = f(z)$ si $z \neq p$. ■

Observación 4.1. Se puede omitir el uso de los teoremas de Goursat y Morera si se prueba que la función $g(z)$ es de clase C^1 y satisface Cauchy-Riemann. Esto se deja como ejercicio al lector.

Observación 4.2. Notar que la función $f(z) = \sin\left(\frac{1}{|z|}\right)$ es acotada y C^∞ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, sin embargo no se puede extender a $z = 0$ de manera continua. Esto muestra que la condición de ser holomorfa agrega una hipótesis fundamental en el teorema.

Antes de enunciar el siguiente teorema, estudiemos que sucede con la función $e^{\frac{1}{z}}$. Claramente, esta función es holomorfa en todo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, lo que hace que $z = 0$ sea una singularidad aislada. Veremos que para cualquier $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y cualquier $r > 0$, la ecuación $\alpha = e^{\frac{1}{z}}$ tiene una solución en $D(0, r) \setminus \{0\}$.

En efecto, notemos que existe $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $e^w = \alpha$, y gracias a la periodicidad de la función exponencial, tenemos que $e^{w+2\pi i k} = \alpha$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. En particular, si k es suficientemente grande tendremos que $w + 2\pi i k \neq 0$ y que se puede definir $z_k = \frac{1}{w + 2\pi i k}$. Evidentemente, si $k \rightarrow \infty$ tenemos que $z_k \rightarrow 0$, por lo que $z_k \in D(0, r)$ para k grande, y además $e^{\frac{1}{z_k}} = \alpha$.

El cálculo anterior nos muestra que para cualquier número complejo no nulo α y cualquier $r > 0$ existe $z_\alpha \in D(0, r)$ tal que $e^{\frac{1}{z_\alpha}} = \alpha$. Dicho de otra manera, la imagen de cualquier disco $D(0, r) \setminus \{0\}$ a través de la función $e^{\frac{1}{z}}$ es exactamente $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, lo que nos dice que 0 no puede ser una singularidad removible ni un polo.

El siguiente teorema muestra que lo expuesto anteriormente es genérico cerca de singularidades *esenciales*.

Teorema 4.2 (Casorati-Weierstrass). Sea $f : D(p, R) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa con p singularidad esencial. Entonces para todo $0 < r < R$ el conjunto $f(D(p, r) \setminus \{p\})$ es denso en \mathbb{C} .

Demostración. Argumentamos por contradicción. Supongamos que el teorema falla para $r = r_0$, luego existen $w_0 \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon_0 > 0$ tales que

$$|f(z) - w_0| > \varepsilon_0 \quad \forall D(p, r_0) \setminus \{p\}.$$

Consideremos la función $g : D(p, r_0) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}.$$

Notar que g es holomorfa en $D(p, r_0) \setminus \{p\}$ y

$$|g(z)| < \frac{1}{\varepsilon_0} \quad \forall D(p, r_0) \setminus \{p\},$$

es decir $z = p$ es una singularidad removible para g . Del Teorema 4.1 deducimos que existe $\hat{g} : D(p, r_0) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que $g = \hat{g}$ en $D(p, r_0) \setminus \{p\}$, y como $\hat{g}(z) = g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0} \neq 0$ si $z \neq p$ obtenemos que

$$f(z) = w_0 + \frac{1}{\hat{g}(z)}, \quad \forall z \neq p.$$

Pero hay solo dos posibilidades para $\hat{g}(p)$:

1. Si $\hat{g}(p) = 0$, entonces p sería un polo para f , lo que es una contradicción.
2. Si $\hat{g}(p) \neq 0$, entonces p sería removible para f , lo que también es una contradicción.

■

Un teorema mas fuerte que el de Casorati-Weierstrass es el resultado demostrado por Picard

Teorema 4.3 (Picard). Sea $f : D(p, R) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa con p singularidad esencial. Entonces $f(D(p, r) \setminus \{p\}) = \mathbb{C}$ ó existe $q \in \mathbb{C}$ tal que $f(D(p, r) \setminus \{p\}) = \mathbb{C} \setminus \{q\}$.

Este resultado escapa a los contenidos del curso, pero el lector interesado puede mirar [7].

4.2. Series de Laurent

Definición 4.3. Diremos que una función $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ es una bi-sucesión y la denotaremos por $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$.

Definición 4.4. Dada una bi-sucesión $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ decimos que la serie $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k$ es (absolutamente) convergente si las series $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$ y $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{-k}$ son (absolutamente) convergentes.

Definición 4.5 (Serie de Laurent). Una serie de Laurent centrada en $p \in \mathbb{C}$ es una serie formal de la forma

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z - p)^k = \dots + \frac{a_{-2}}{(z - p)^2} + \frac{a_{-1}}{z - p} + a_0 + a_1(z - p) + a_2(z - p)^2 \dots$$

donde $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ es una bi-sucesión.

Teorema 4.4 (Convergencia de series de Laurent). *Dada $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ una bi-sucesión, entonces la serie de potencias $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(z - p)^k$ es absolutamente convergente para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $R_1 < |z - p| < R_2$, donde*

$$R_1 = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_{-k}|^{\frac{1}{k}}$$

$$R_2 = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}}.$$

Además, si $A_{R_1, R_2}(p) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - p| < R_2\}$, entonces la función $f : A_{R_1, R_2}(p) \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(z - p)^k$ es holomorfa, y la serie de Laurent converge uniformemente en compactos de $A_{R_1, R_2}(p)$.

Demostración. Basta considerar el caso $p = 0$ y replicar el análisis hecho en el Teorema 1.16. ■

Ejemplo 4.1. 1. $\sum_{\substack{k \geq -10 \\ k \neq 0}} \frac{z^k}{k^2}$. En este caso $R_1 = 0$ y $R_2 = 1$. Además la serie converge absolutamente si

$$|z| = 1.$$

2. $\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{z^k}{k^2}$. En este caso $R_1 = R_2 = 1$. La serie converge absolutamente si $|z| = 1$.

3. $\sum_{k \leq 0} \frac{(z - p)^k}{(-k)!}$. En este caso $R_1 = 0$ y $R_2 = \infty$, y por tanto la serie es absolutamente convergente en $\mathbb{C} \setminus \{p\}$.

Proposición 4.5 (Unicidad de la serie de Laurent). *Sea $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(z - p)^k$ una serie de Laurent con anillo de convergencia $A_{R_1, R_2}(p)$ no vacío. Entonces para cada $R_1 < r < R_2$ se tiene que*

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p, r)} \frac{f(w)}{(w - p)^{k+1}} dw.$$

Demostración. Como la serie converge uniformemente en compactos de $K \subseteq A_{R_1, R_2}(p)$, en particular esto aplica a $K = S(p, r)$, para $R_1 < r < R_2$, luego

$$\int_{S(p, r)} \frac{f(w)}{(w - p)^{k+1}} dw = \int_{S(p, r)} \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m (w - p)^{m-k-1} dw = \sum_{m \in \mathbb{N}} a_m \int_{S(p, r)} (w - p)^{m-k-1} dw,$$

pero sabemos que

$$\int_{S(p, r)} (w - p)^{m-k-1} dw = ir^{m-k} \int_0^{2\pi} e^{i(m-k)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq k, \\ 2\pi i & \text{si } m = k, \end{cases}$$

de donde se sigue el resultado. ■

Proposición 4.6 (Fórmula de Cauchy en anillos). *Sea $f : A_{R_1, R_2}(p) \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Entonces para cada $R_1 < r_1 < |z - p| < r_2 < R_2$ se tiene que*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p, r_1)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p, r_2)} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

4.2. SERIES DE LAURENT

Demostración. Para $z \in A_{R_1, R_2}(p)$ fijo, la función

$$g_z(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

tiene una singularidad removible en $w = z$, y por lo tanto se puede extender de manera holomorfa a $w = z$ de modo que $g_z(z) = f'(z)$.

Del teorema de Cauchy (Corolario 2.21) tenemos que

$$\int_{S(p, r_1)} g_z(w) dw = \int_{S(p, r_2)} g_z(w) dw.$$

Pero

$$\int_{S(p, r_1)} g_z(w) dw = \int_{S(p, r_1)} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{S(p, r_1)} \frac{1}{w - z} dw = \int_{S(p, r_1)} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

pues $z \notin D(p, r_1)$ y por tanto $w \mapsto \frac{1}{w - z}$ es holomorfa en $D(p, |z - p|) \supseteq S(p, r_1)$. Similarmente, gracias a la fórmula de Cauchy para la función $h(z) = 1$ obtenemos que

$$\int_{S(p, r_2)} g_z(w) dw = \int_{S(p, r_2)} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{S(p, r_2)} \frac{1}{w - z} dw = \int_{S(p, r_2)} \frac{f(w)}{w - z} dw - 2\pi i f(z),$$

pues $z \in D(p, r_2)$, de donde se sigue el resultado. ■

Proposición 4.7 (Existencia series de Laurent). *Sea $f : A_{R_1, R_2}(p) \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, entonces existe una bi-sucesión $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ tal que*

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z - p)^k.$$

Además, la serie converge absolutamente y uniformemente en $A_{r_1, r_2}(p)$ para todo $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$.

Demostración. De la Proposición 4.6 tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p, r_2)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p, r_1)} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

de donde basta estudiar ambas integrales. Por una parte, como $|z - p| < r_2$ tenemos para $w \in S(p, r_2)$ se cumple que $\left| \frac{z - p}{w - p} \right| = \frac{|z - p|}{r_2} < 1$ de manera independiente de w , luego

$$\begin{aligned} \int_{S(p, r_2)} \frac{f(w)}{w - z} dw &= \int_{S(p, r_2)} \frac{f(w)}{w - p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - p}{w - p}} dw \\ &= \int_{S(p, r_2)} \frac{f(w)}{w - p} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{z - p}{w - p} \right)^k dw \\ &= \sum_{k \geq 0} \left[\int_{S(p, r_2)} \frac{f(w)}{(w - p)^{k+1}} dw \right] (z - p)^k. \end{aligned}$$

Y similarmente para $w \in S(p, r_1)$, como $r_1 < |z - p|$, tenemos que

$$\int_{S(p, r_1)} \frac{f(w)}{w - z} dw = - \int_{S(p, r_1)} \frac{f(w)}{z - p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w - p}{z - p}} dw$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_{S(p, r_1)} \frac{f(w)}{z-p} \sum_{j \geq 0} \left(\frac{w-p}{z-p} \right)^j dw \\
 &= - \sum_{j \geq 0} \left[\int_{S(p, r_1)} \frac{f(w)}{(w-p)^{-j}} dw \right] (z-p)^{-j-1} \\
 &= - \sum_{k \leq -1} \left[\int_{S(p, r_1)} \frac{f(w)}{(w-p)^{k+1}} dw \right] (z-p)^k,
 \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. ■

Observación 4.3. Notar que gracias al Corolario 2.21 tenemos que

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p, r)} \frac{f(w)}{(w-p)^{k+1}} dw$$

para cualquier $r_1 \leq r \leq r_2$, pues $S(p, r)$ se puede ε -deformar a $S(p, r_1)$ y $S(p, r_2)$ en $A_{R_1, R_2}(p)$

Como resumen de lo anterior tenemos el siguiente resultado respecto a la expansión en series de una función holomorfa en torno a una de sus singularidades aisladas.

Teorema 4.8. *Sea $f : D(p, R) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Entonces f tiene una única serie de Laurent $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z-p)^k$ que converge absoluta y uniformemente en cada compacto de $D(p, R) \setminus \{p\}$. Además*

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_s} \frac{f(w)}{(w-p)^{k+1}} dw,$$

donde $\gamma_s = S(p, s)$ y $s \in (0, R)$.

El teorema anterior nos dice que las funciones holomorfas se comportan como una serie de Laurent en torno a sus singularidades aisladas. Esto nos permite volver a clasificar los tipos de singularidades, ahora en términos de los coeficientes de la serie de Laurent.

Teorema 4.9. *Sea $f : D(p, R) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y sea $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z-p)^k$ su serie de Laurent. Entonces*

- S.1** $a_k = 0$ para todo $k < 0$ si y solo si p es una singularidad removible.
- S.2** $a_k = 0$ para todo $k < -k_0$ para cierto $k_0 \geq 1$ si y solo si p es un polo.
- S.3** Existen infinitos a_k 's con $k \leq 0$ y $a_k \neq 0$ si y solo si p es una singularidad esencial.

Demostración. Veamos las distintas equivalencias:

- (Removible \Rightarrow S.1) Si p es una singularidad removible para f , entonces existe \hat{f} holomorfa en todo $D(p, r)$ tal que $f = \hat{f}$ si $z \neq p$. Como f es holomorfa, admite una serie de potencias en torno a p de la forma $\sum_{k \geq 0} b_k (z-p)^k$ y por unicidad de la serie de Laurent se debe cumplir que $a_k = b_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, en particular $a_k = 0$ para todo $k < 0$.
- (S.1 \Rightarrow Removible) Si f admite una serie de Laurent con $a_k = 0$ para todo $k \leq 0$, entonces f coincide con una serie de potencias tradicional en $D(p, r) \setminus \{p\}$, por lo tanto la singularidad debe ser removible.

- (Polo \Rightarrow S.2) Si p es un polo para f , entonces $|f(z)| \xrightarrow{z \rightarrow p} +\infty$, luego debe existir $r > 0$ tal que $|f(z)| > 1$ para todo $|z - p| < r$, y por lo tanto se puede definir la función $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ que satisface $|g(z)| \leq 1$ para todo $0 < |z - p| < r$ y $\lim_{z \rightarrow p} g(z) = 0$, es decir, g tiene una singularidad removible en $z = p$. Por lo anterior podemos suponer que g es holomorfa en todo $D(p, r)$. Esto dice que g tiene una serie de potencias de la forma $\sum_{k \geq k_0} a_k(z - p)^k$, donde a_{k_0} es el primer coeficiente no nulo de la serie con $k_0 \geq 1$ (pues $g(0) = 0$). Esto implica que $g(z) = (z - p)^{k_0} G(z)$ donde G es una función holomorfa que no se anula, por lo tanto

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = (z - p)^{-k_0} \cdot \frac{1}{G(z)} = (z - p)^{-k_0} \sum_{j \geq 0} b_j(z - p)^j.$$

- (S.2 \Rightarrow Polo) Si $f(z) = \sum_{k \geq -k_0} a_k(z - p)^k$ con $a_{-k_0} \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| a_{-k_0}(z - p)^{-k_0} + \sum_{k \geq -k_0+1} a_k(z - p)^k \right| \\ &\geq |z - p|^{-k_0} \left(|a_{-k_0}| - \left| \sum_{k+k_0 \geq 1} a_k(z - p)^{k+k_0} \right| \right), \end{aligned}$$

luego $|f(z)| \xrightarrow{z \rightarrow p} +\infty$.

- La otra equivalencia es evidente pues son las únicas alternativas que quedan.

■

Definición 4.6. En el caso en que ocurra S.2, y si denotamos

$$k_0 = -\min \{k \in \mathbb{Z} : a_k \neq 0\},$$

diremos que p es un polo de orden k_0 para f .

Lema 4.10. Sea $f : D(p, r) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que p es un polo. Entonces p es un polo de orden k_0 si y solo si $(z - p)^{k_0} f(z)$ es acotada y

$$\lim_{z \rightarrow p} |(z - p)^k f(z)| = +\infty \quad \forall k < k_0.$$

Demostración. Basta notar que f tiene un polo de orden k_0 en p si y solo si

$$f(z) = \sum_{k \geq -k_0} a_k(z - p)^k,$$

con $a_{-k_0} \neq 0$.

■

Proposición 4.11. Sea $f : D(p, r) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que p es un polo de orden k_0 para f . Entonces

$$a_k = \lim_{z \rightarrow p} \frac{1}{(k + k_0)!} \cdot \frac{\partial^{k+k_0}}{\partial z^{k+k_0}} ((z - p)^{k_0} f(z))$$

para todo $k \geq k_0$.

4.3. RESIDUOS

Demostración. Basta notar que $(z - p)^{k_0} f(z)$ tiene una singularidad removible en p y la fórmula para los coeficientes se sigue de la fórmula de Taylor. Los detalles se dejan como ejercicio. ■

Ejemplo 4.2. 1. Sea $f(z) = \frac{z}{z-1}$. Encontremos la serie de Laurent de f en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Para ello, notemos que $z = 1 + (z-1)$ luego

$$f(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1} (1 + (z-1)) = \frac{1}{z-1} + 1,$$

que tiene anillo de convergencia $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

2. Notar que $g(z) = \frac{e^z}{(z-i)^3(z+2)^2}$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{i, -2\}$, donde la función tiene polos de orden 3 y 2 respectivamente (se deja al lector verificar esta afirmación como ejercicio).

En torno a $z = i$ tenemos que

$$\begin{aligned} a_{-3} &= \frac{e^z}{(z+2)^2} \Big|_{z=i} = \frac{e^i}{(2+i)^2} \\ a_{-2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^z}{(z+2)^2} \right) \Big|_{z=i} = \frac{ie^i}{(2+i)^3} \\ a_{-1} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{e^z}{(z+2)^2} \right) \Big|_{z=i} = \frac{e^i}{2(2+i)^4}. \end{aligned}$$

3. Si $f(z) = \frac{e^z}{\sin z}$ entonces $\sin z = 0$ si y solo si $e^{iz} = e^{-iz}$ lo que implica que $e^{-\operatorname{Im} z} = |e^{iz}| = |e^{-iz}| = e^{\operatorname{Im} z}$, es decir debe ocurrir que $\operatorname{Im} z = 0$, y por lo tanto $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$.

Como se cumple que $\lim_{z \rightarrow k\pi} |f(z)| = +\infty$ y

$$(z - k\pi)f(z) = \frac{z - k\pi}{\sin z} e^z = \frac{z - k\pi}{\sin z - \sin(k\pi)} e^z \xrightarrow{z \rightarrow k\pi} \frac{e^{k\pi}}{\cos(k\pi)}$$

entonces $z = k\pi$ es un polo de orden 1 para f , si $f(z) = \sum_{j \geq -1} a_j (z - k\pi)^j$ es la serie de Laurent en torno a $k\pi$ se tiene que

$$a_{-1} = \frac{e^{k\pi}}{\cos(k\pi)} = (-1)^k e^{k\pi}.$$

4.3. Residuos

Definición 4.7 (Índice de una curva). Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ una curva C^1 a pedazos, suave y cerrada. Sea $p \in \mathbb{C}$ tal que $p \notin \gamma([0, 1])$. Definimos el índice de γ con respecto a p como

$$\operatorname{Ind}(\gamma, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w - p} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - p} ds.$$

Lema 4.12. Sean γ y p como en la Definición 4.7. Entonces $\operatorname{Ind}(\gamma, p) \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Consideremos la función $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(t) = (\gamma(t) - p) \exp \left[- \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - p} ds \right].$$

4.3. RESIDUOS

Se deja como ejercicio verificar que γ es una función continua y que además g es una función diferenciable en cada punto donde γ lo es con

$$g'(t) = \gamma'(t) \exp \left[- \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - p} ds \right] + (\gamma(t) - p) \exp \left[- \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - p} ds \right] \cdot \frac{-\gamma'(t)}{\gamma(t) - p} = 0,$$

y como $[0, 1]$ es conexo, deducimos que $g(t)$ debe ser constante, en particular

$$g(0) = (\gamma(0) - p) = (\gamma(1) - p) \exp \left[- \int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - p} ds \right] = g(1),$$

pero como $\gamma(0) = \gamma(1)$, la única posibilidad es que $\exp \left[- \int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - p} ds \right] = 1$, de donde obtenemos que

$$\int_0^1 \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - p} ds = 2\pi i k$$

para cierto $k \in \mathbb{Z}$. ■

Observación 4.4. A modo de ejemplo, notar que si $\gamma(t) = e^{kit}$ con $t \in [0, 2\pi]$ entonces

$$\text{Ind}(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ike^{kit}}{e^{ikt}} dt = k,$$

y que γ es la curva que describe la circunferencia de centro 0 y radio 1 recorrida en sentido anti-horario (resp. horario) si $k > 0$ (resp. $k < 0$) recorrida $|k|$ veces. En otras palabras, la cantidad $\text{Ind}(\gamma, 0)$ cuenta la cantidad de vueltas que la curva γ da en torno al $p = 0$, considerando el sentido anti-horario como vueltas “positivas” y el sentido horario como vueltas “negativas”.

Para el caso de una curva cerrada general γ la situación es análoga, es decir el índice cuenta la cantidad de veces que la curva γ se enrolla en torno a p , contando las vueltas en sentido horario como negativas y en sentido anti-horario como positivas.

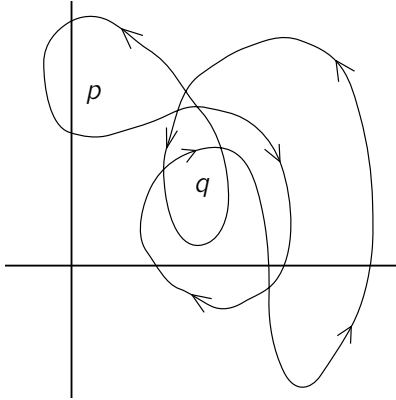


Figura 4.1: La curva γ tiene índice 1 respecto a p e índice 0 respecto a q .

Lema 4.13. Sean γ y p como en la Definición 4.7. Sea $\tilde{\gamma}$ una ε -deformación de γ en $\Omega \setminus \{p\}$. Entonces

$$\text{Ind}(\gamma, p) = \text{Ind}(\tilde{\gamma}, p).$$

4.3. RESIDUOS

Demostración. Notar que la función $w \mapsto \frac{1}{w-p}$ es holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$, luego, gracias a la Proposición 2.20 tenemos que

$$\int_{\gamma} \frac{1}{w-p} dw = \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{w-p} dw.$$

■

Observación 4.5. El lema anterior es un caso particular de un resultado de topología algebraica, que dice que si $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{p\}$ es una función continua entonces la función

$$I(t) = \text{Ind}(H(\cdot, t), p)$$

es constante. Esta versión del resultado se puede demostrar usando el Teorema 2.25.

Lema 4.14. Si γ es una curva C^1 a pedazos, suave y cerrada, entonces la función

$$\begin{aligned} I : \mathbb{C} \setminus \gamma &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ p &\longmapsto I(p) = \text{Ind}(\gamma, p) \end{aligned}$$

es continua.

Demostración. Ejercicio.

■

Observación 4.6. Intuitivamente, si se tiene una curva cerrada en el plano complejo, entonces el conjunto $\mathbb{C} \setminus \gamma$ estará dividido en N regiones conexas, una de las cuales es no-acotada. Si juntamos esto con los resultados anteriores obtenemos que el índice de dicha curva ha de ser constante en cada una de esas regiones conexas. De cierto modo, esto reafirma que el índice no depende tanto del punto, si no mas bien de la “región” donde se encuentre ese punto respecto a la curva.

Definición 4.8 (Residuo). Sea $f : D(p, R) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa con serie de Laurent $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(z-p)^k$. Definimos el residuo de f en p como

$$\text{Res}_f(p) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p,r)} f(w) dw,$$

con $0 < r < R$.

Proposición 4.15 (Teorema del Residuo I). Sea $f : D(p, r) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa y sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow D(p, r) \setminus \{p\}$ una curva C^1 a pedazos, suave y cerrada. Entonces

$$\int_{\gamma} f(w) dw = 2\pi i \text{Res}_f(p) \text{Ind}(\gamma, p).$$

Demostración. Denotemos por $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k(z-p)^k$ a la serie de Laurent de f en torno a p y definamos

$$s(z) = \sum_{k < 0} a_k(z-p)^k,$$

que es holomorfa en $D(p, r) \setminus \{p\}$. Con esto, para $z \neq p$ podemos escribir

$$f(z) = f(z) - s(z) + s(z),$$

4.3. RESIDUOS

pero la función $f - s$ tiene una singularidad removible en p (es una serie de potencias tradicional), en particular podemos pensar que es holomorfa en $D(p, r)$, luego gracias al Teorema 2.23 (Teorema de Cauchy) tenemos que

$$\int_{\gamma} (f(z) - s(z)) dz = 0.$$

Finalmente, observemos que gracias a que s converge uniformemente en compactos de $D(p, r) \setminus \{p\}$ (en particular en γ)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} s(z) dz &= \int_{\gamma} \sum_{k < 0} a_k (z - p)^k dz \\ &= \sum_{k < 0} a_k \int_{\gamma} (z - p)^k dz \\ &= a_{-1} \int_{\gamma} \frac{1}{z - p} dz \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_f(p) \operatorname{Ind}(\gamma, p), \end{aligned}$$

pues la función

$$z \mapsto \frac{1}{(z - p)^j}$$

tiene antiderivada holomorfa en $D(p, r) \setminus \{p\}$ para todo $j \geq 2$, luego

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z - p)^j} dz = 0 \quad \forall j \geq 2.$$

■

Teorema 4.16 (Teorema del Residuo II). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo y consideremos $p_1, \dots, p_N \in \Omega$. Entonces para $f : \Omega \setminus \{p_1, \dots, p_N\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega \setminus \{p_1, \dots, p_N\}$ curva C^1 a pedazos, suave y cerrada. Entonces*

$$\int_{\gamma} f(w) dw = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_f(p_k) \operatorname{Ind}(\gamma, p_k).$$

Demostración. Para cada p_k , denotemos por s_k a la parte principal de la serie de Laurent de f en torno a p_k . Notar que s_k es holomorfa en p_j si $k \neq j$, luego s_k define una función holomorfa en $D(p_k, r_k) \setminus \{p_k\}$, lo que nos permite escribir

$$f = f - \sum_{k=1}^N s_k + \sum_{k=1}^N s_k.$$

Por otra parte la función $g = f - \sum_{k=1}^N s_k$ tiene singularidades removibles en todos los p_k 's y como $p_k \notin \gamma$, el teorema de Cauchy garantiza que

$$\int_{\gamma} g = \int_{\gamma} \left(f - \sum_{k=1}^N s_k \right) = 0,$$

y por tanto se tiene que

$$\int_{\gamma} f = \sum_{k=1}^N \int_{\gamma} s_k.$$

Ahora bien, para cada $k \in \{1, \dots, N\}$ se tiene que s_k es de la forma

$$s_k(z) = \sum_{j < 0} a_j (z - p_k)^j,$$

y la serie es uniformemente convergente en γ pues $p_k \notin \gamma$ y por lo tanto

$$\int_{\gamma} s_k = 2\pi i \text{Res}_f(p_k) \text{Ind}(\gamma, p_k),$$

gracias al teorema anterior. ■

Proposición 4.17. Sea f una función holomorfa con un polo de orden k en p , entonces

$$\text{Res}_f(p) = \lim_{z \rightarrow p} \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} ((z-p)^k f(z))$$

Demostración. Se obtiene directo de la Proposición 4.11 para a_{-1} . ■

Ejemplo 4.3. Consideremos $f(z) = \frac{z}{(z+3i)^3(z+2)^2}$ y la curva dada por la Figura 4.2.

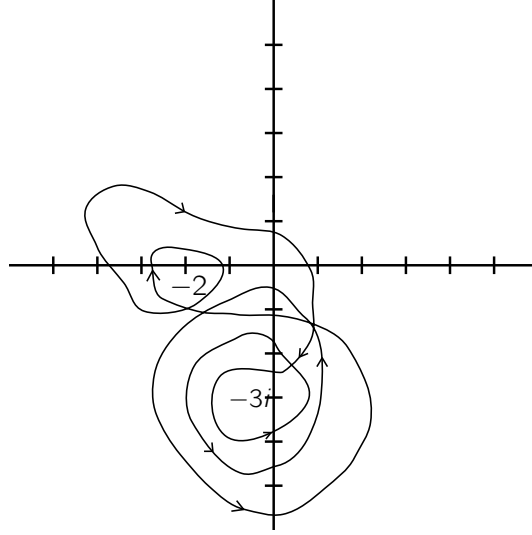


Figura 4.2: Curva para el Ejemplo 4.3.

Es claro que f tiene un polo de orden 2 en $z = -2$ y un polo de orden 3 en $z = -3i$. Calculemos los respectivos residuos usando la Proposición 4.17. Por una parte, para $z = -3i$ tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Res}_f(-3i) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{z}{(z+2)^2} \right) \Big|_{z=-3i} \\ &= -\frac{8+6i}{2(2-3i)^4}, \end{aligned}$$

y de manera similar tenemos que para $z = -2$

$$\text{Res}_f(-2) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{(z+3i)^3} \right) \Big|_{z=-2}$$

$$= -\frac{4+3i}{(3i-2)^4}.$$

Además, del dibujo deducimos que $\text{Ind}(\gamma, -3i) = 3$ e $\text{Ind}(\gamma, -2) = -2$, luego

$$\int_{\gamma} f(z)dz = -2\pi i \cdot \frac{20+15i}{(3i-2)^4}$$

4.3.1. Aplicación: cálculo de integrales reales

Mostraremos algunos ejemplos que ilustran como utilizar el teorema del residuo para calcular distintos tipos de integrales reales. En las técnicas que se presentan hay esencialmente tres pasos a seguir

1. Complexificar el integrando.
2. Escoger un camino de integración.
3. Verificar que el camino de integración “contiene” al segmento real de interés.

Funciones racionales I

La idea que ilustraremos aplica para integrales del tipo

$$(4.1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

donde P y Q son polinomios tales que $\text{gr}(Q) \geq \text{gr}(P) + 2$ y Q no tiene raíces reales de modo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

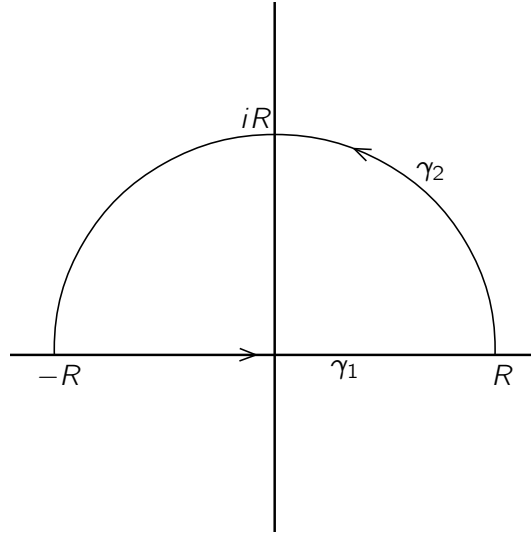


Figura 4.3: Para funciones $\frac{P(z)}{Q(z)}$ o $\frac{P(z)}{Q(z)}e^{iz}$ consideramos una semi-circunferencia orientada positivamente.

Para calcular una integral del tipo (4.1) se considera la función compleja $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ que tiene singularidades aisladas en los ceros de Q que denotamos z_k , que supondremos no son ceros de P . Si consideramos la curva $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ dada por la Figura 4.3 tenemos que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}_f(z_k) \text{Ind}(\gamma, z_k).$$

Como la identidad vale para todo $R > 0$ tal que γ_2 no pasa por un cero de Q podemos considerar el resultado cuando $R \rightarrow +\infty$. Pero en estas condiciones

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

y como $\text{gr}(Q) \geq \text{gr}(P) + 2$ tenemos que

$$\left| \int_{\gamma_2} f(x)dx \right| \leq \int_0^{\pi} \left| \frac{P(Re^{it})Rie^{it}}{Q(Re^{it})} \right| dt \leq \frac{C}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

de donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\substack{p \text{ es cero de } Q \\ \text{Im}(p) > 0}} \text{Res}_f(p).$$

Ejemplo 4.4. Calculemos $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$.

Para ello, sea $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ y γ como en la Figura 4.3 para $R > 1$. En este caso, la curva γ solo encierra las singularidades $p_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $p_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ de f con índice 1. Además tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Res}_f(p_1) &= -\frac{1}{8}(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) \\ \text{Res}_f(p_2) &= -\frac{1}{8}(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}), \end{aligned}$$

de donde

$$(4.2) \quad \int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i(\text{Res}_f(p_1) + \text{Res}_f(p_2)) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Por otra parte

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$$

y, como $R > 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} f(z)dz \right| &= \left| \int_0^{\pi} \frac{Rie^{it}}{1+R^4 e^{4ti}} dt \right| \\ &\leq \int_0^{\pi} \left| \frac{Rie^{it}}{1+R^4 e^{4ti}} \right| dt \\ &\leq \pi \frac{R}{R^4 - 1} \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

de donde, como (4.2) vale para todo $R > 1$, se obtiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Funciones racionales trigonometricas I

Ahora consideramos integrales del tipo

$$(4.3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(x) dx \quad \text{o} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(x) dx,$$

donde P y Q son polinomios tales que $\text{gr}(Q) \geq \text{gr}(P) + 1$ y Q no tiene raíces reales.

Para calcular (4.3) consideramos la función

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}$$

y la integramos sobre el camino descrito en la Figura 4.3. Como antes, el teorema del residuo garantiza que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}_f(z_k) \text{Ind}(\gamma, z_k).$$

Para concluir notamos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx \\ &= \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(x) dx + i \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(x) dx \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(x) dx \end{aligned}$$

y debemos probar que

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

para ello consideramos $\gamma_{2,1} = \{z \in \gamma_2 : \text{Im } z \geq h\}$ y $\gamma_{2,2} = \{z \in \gamma_2 : 0 \leq \text{Im } z < h\}$. Por una parte

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_{2,1}} f(z) dz \right| &\leq L(\gamma_{2,1}) \max_{z \in \gamma_{2,1}} |f(z)| \\ &\leq R\pi \max_{z \in \gamma_{2,1}} \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| |e^{iz}| \\ &\leq C\pi \max_{z \in \gamma_{2,1}} |e^{-\text{Im } z}| \\ &\leq C e^{-h}, \end{aligned}$$

y por otra parte

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_{2,2}} f(z) dz \right| &\leq L(\gamma_{2,2}) \max_{z \in \gamma_{2,2}} |f(z)| \\ &\leq 2\theta R \cdot \frac{C}{R} \max_{z \in \gamma_{2,2}} |e^{-\text{Im } z}| \\ &\leq C\theta, \end{aligned}$$

donde $\sin \theta = \frac{h}{R}$. Si consideramos $h = \sqrt{R}$ entonces $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{R}}$ pero además, como $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tenemos que $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ $\sin \theta \leq \frac{2}{\sqrt{R}}$ y por lo tanto

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{\gamma_{2,1}} f(z) dz \right| + \left| \int_{\gamma_{2,2}} f(z) dz \right|$$

$$\leq C(e^{-\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{R}})$$

$$\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(x) dx = 2\pi i \sum_{\substack{p \text{ es cero de } Q \\ \operatorname{Im}(p) > 0}} \operatorname{Res}_f(p),$$

de donde para calcular cada integral basta ver las partes reales e imaginarias.

Ejemplo 4.5. Calculemos $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$.

Sea $f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$ y γ como en la Figura 4.3, que solo tiene a $z = i$ como polo encerrado por la curva. Luego

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_f(i) = 2\pi i \left(\frac{1}{2ei} \right) = \frac{\pi}{e},$$

además

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx$$

y como $R > 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^{\pi} \frac{Rie^{iRe^{it}+it}}{1+R^2e^{2it}} dt \right| \\ &\leq \int_0^{\pi} \left| \frac{Rie^{iRe^{it}+it}}{1+R^2e^{2it}} \right| dt \\ &\leq \frac{R}{R^2-1} \int_0^{\pi} |e^{iRe^{it}}| dt \\ &= \frac{R}{R^2-1} \int_0^{\pi} e^{-R \sin t} dt, \end{aligned}$$

pero para $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^{-R \sin t} dt &= \int_0^{\theta} e^{-R \sin t} dt + \int_{\theta}^{\pi-\theta} e^{-R \sin t} dt + \int_{\pi-\theta}^{\pi} e^{-R \sin t} dt \\ &\leq \theta + \int_{\theta}^{\pi-\theta} e^{-R \sin t} dt + \theta \\ &\leq 2\theta + e^{-R \sin \theta} (\pi - 2\theta), \end{aligned}$$

luego, gracias a la concavidad de $\sin \theta$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$ tenemos que $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ tenemos que

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \leq \frac{R}{R^2-1} (\pi \sin \theta + \pi e^{-R \sin \theta}),$$

pero si escogemos θ de modo que $\sin \theta = \frac{\sqrt{R}}{R} = \frac{1}{\sqrt{R}}$ obtenemos que

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

En conclusión se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sen x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e},$$

pero como $\frac{\sen x}{1+x^2}$ es impar $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sen x}{1+x^2} dx = 0$, así

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{e}.$$

Funciones racionales trigonometricas II

Otro tipo de integrales que se puede calcular con el teorema del residuo son integrales de funciones racionales de funciones trigonométrica de la forma

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sen t) dt,$$

donde $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ es una función racional. La idea en este caso es complexificar las funciones trigonométricas como $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ y $\sen t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$. Notar que si $t \in [0, 2\pi]$ y $z = e^{it}$, entonces $\cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ y $\sen t = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$, por lo tanto podemos escribir

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sen t) dt = \int_{S(0,1)} R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right) \frac{1}{iz} dz$$

y si $f(z) = R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right) \frac{1}{iz}$ y si f no tiene singularidades en $S(0, 1)$ entonces el teorema del residuo nos dice que

$$\int_{S(0,1)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{p \text{ es singularidad} \\ \text{de } f \text{ en } D(0,1)}} \text{Res}_f(p).$$

Ejemplo 4.6. Calcular la integral $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \sen \theta} d\theta$.

Sea $f(z) = \frac{2}{1 + 4iz - z^2}$. Esta función tiene singularidades en $p_1 = (2 - \sqrt{3})i$ y en $p_2 = (2 + \sqrt{3})i$, donde solo $p_1 \in D(0, 1)$, por lo que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \sen \theta} d\theta &= \int_{S(0,1)} f(z) dz \\ &= 2\pi i \text{Res}_f(p_1) \\ &= 2\pi i \cdot \frac{1}{\sqrt{3}i} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Observación 4.7. En algunos casos puede ser conveniente considerar $z = p + re^{it}$ y $S(p, r)$ en vez del disco unitario.

Funciones con radicales

Ejemplo 4.7. Calcular la integral $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2} dx$.

Para calcular esta integral primero debemos complexificar la función $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}$. El candidato natural es

$$f(z) = \frac{\sqrt[3]{z}}{1+z^2},$$

sin embargo, la función $\sqrt[3]{z}$ no se puede definir¹ de manera holomorfa en ninguna región abierta que contenga al 0 en su interior, por lo tanto nuestro primer objetivo es escoger una definición acorde al problema que queremos resolver. Como vimos en el Apartado 1.2.4, una manera de hacer esto es considerar la forma polar de $z = re^{i\theta}$, donde $r = |z|$ y $\theta = \arg z$, teniendo cuidado de definir de manera correcta $\arg z$ para que quede univaluado y continuo.

Para este ejemplo en particular consideramos

$$\sqrt[3]{z} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[3]{r} e^{i\frac{\theta}{3}},$$

para $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, que define una función holomorfa² en la región $\mathbb{C} \setminus \{it : t \in (-\infty, 0]\}$ y con ello considerar

$$f(z) = \frac{\sqrt[3]{z}}{1+z^2}$$

que tiene polos simples en $z = \pm i$.

Con esto en mente, para poder usar el teorema del residuo debemos utilizar una curva que esté completamente contenida en $\mathbb{C} \setminus \{it : t \in (-\infty, 0]\}$ y que además nos permita calcular $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2} dx$. Un candidato es utilizar la curva descrita en la Figura 4.4, que solo encierra al polo $z = i$ cuando $R > 1$.

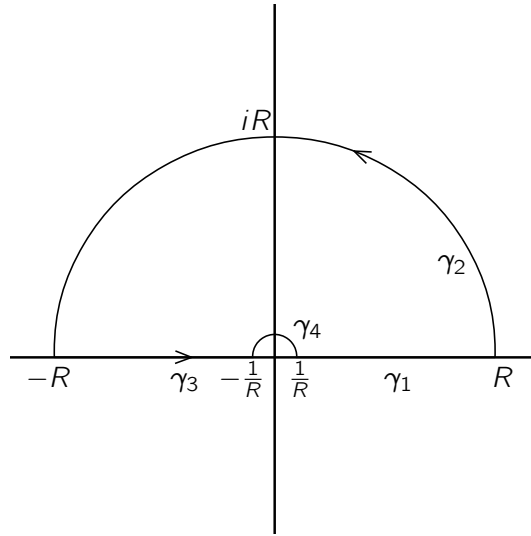


Figura 4.4: Usamos este tipo de caminos para evitar el 0 y/o el conjunto $\{it : t \in (-\infty, 0]\}$.

Bajo estas condiciones, no es difícil verificar que

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2} dx,$$

¹Verifique esta afirmación como ejercicio.

²Verifique esto usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar.

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_3} f(z)dz &= \int_{-R}^{-\frac{1}{R}} \frac{t^{\frac{1}{3}}}{1+t^2} dt = e^{i\frac{\pi}{3}} \int_{\frac{1}{R}}^R \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2} dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} e^{i\frac{\pi}{3}} \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2} dx, \\ \left| \int_{\gamma_2} f(z)dz \right| &\leq \frac{\sqrt[3]{R}}{R^2-1} \cdot \pi R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \\ \left| \int_{\gamma_4} f(z)dz \right| &\leq \frac{R^{\frac{5}{3}}}{R^2-1} \cdot \frac{\pi}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,\end{aligned}$$

de donde concluimos que

$$(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}) \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2} dx = 2\pi i \text{Res}_f(i) = \pi e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Funciones racionales II

También se pueden calcular integrales de la forma

$$\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

cuando $\text{gr}(Q) \geq \text{gr}(P) + 2$ y Q sin raíces reales positivas, pero permitiendo que tengan raíces reales negativas. Una idea para este tipo de problemas es complexificar mediante la función

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \log z,$$

donde $\log z = \ln |z| + i \arg z$ y $\arg z \in (0, 2\pi)$, así f es una función holomorfa en \mathbb{C} salvo en el eje real positivo y en las singularidades que vengan de Q . Para recuperar la integral real que nos interesa, consideramos la curva de la Figura 4.5, que encierra a todas las singularidades de $\frac{P}{Q}$ si R es suficientemente grande.

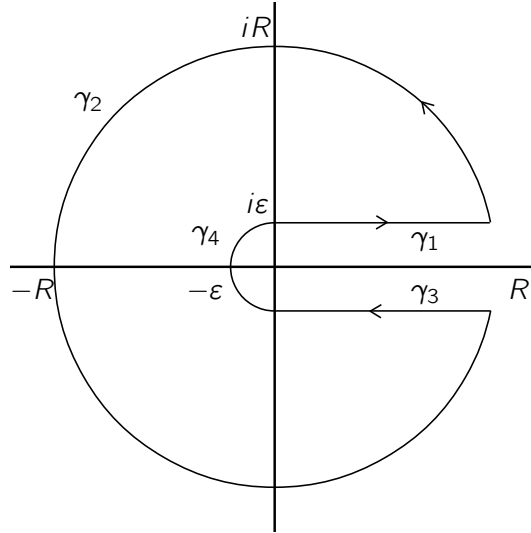


Figura 4.5: Camino indicado para evitar raíces reales negativas.

Si parametrizamos γ_1 y notamos que $\arg(x + i\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} 0$ tendremos que

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^R \frac{P(x + i\epsilon)}{Q(x + i\epsilon)} \log(x + i\epsilon) dx$$

$$= \int_0^R \frac{P(x+i\varepsilon)}{Q(x+i\varepsilon)} \left(\ln \sqrt{x^2 + \varepsilon^2} + i \arg(x+i\varepsilon) \right) dx$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^R \frac{P(x)}{Q(x)} \ln x dx,$$

y como $\arg(x-i\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2\pi$ se obtiene

$$\int_{\gamma_3} f(z) dz = - \int_0^R \frac{P(x-i\varepsilon)}{Q(x-i\varepsilon)} \log(x-i\varepsilon) dx$$

$$= - \int_0^R \frac{P(x-i\varepsilon)}{Q(x-i\varepsilon)} \left(\ln \sqrt{x^2 + \varepsilon^2} + i \arg(x-i\varepsilon) \right) dx$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} - \int_0^R \frac{P(x)}{Q(x)} (\ln x + 2\pi i) dx$$

y por lo tanto

$$(4.4) \quad \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} -2\pi i \int_0^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

y si lo juntamos con que

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z) dz \right| \leq \pi R \max_{z \in \gamma_2} |f(z)|$$

$$\leq C \pi \frac{\ln R}{R}$$

$$\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

(4.5)

y

$$\left| \int_{\gamma_4} f(z) dz \right| \leq \pi \varepsilon \max_{z \in \gamma_4} |f(z)|$$

$$\leq C \pi \varepsilon |\ln \varepsilon|$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

(4.6)

obtendremos que

$$\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx = - \sum_{\substack{p \text{ es singularidad} \\ \text{de } \frac{P}{Q} \text{ en } \mathbb{C} \setminus [0, \infty)}} \text{Res}_f(p)$$

Ejemplo 4.8. Calcular $\int_0^\infty \frac{1}{(x+2)(x+4)} dx$.

Claramente $f(z) = \frac{\log z}{(z+2)(z+4)}$ tiene polos simples en $z = -2$ y $z = -4$, y además

$$\text{Res}_f(-2) = \frac{\log(-2)}{2} = \frac{\ln 2 + \pi i}{2}$$

$$\text{Res}_f(-4) = \frac{\log(-4)}{-2} = -\frac{\ln 4 + \pi i}{2},$$

de donde para $R > 4$ y $\varepsilon < 2$ obtenemos que

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \left(\frac{\ln 2 + \pi i}{2} - \frac{\ln 4 + \pi i}{2} \right) = -\pi i \ln 2.$$

4.3. RESIDUOS

Finalmente, un cálculo no muy complicado permite verificar (4.4), (4.5) y (4.6) para este caso particular, lo que implica que

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x+2)(x+4)} dx = \frac{\ln 2}{2}.$$

Ejemplo 4.9. Otra manera que a veces sirve para calcular $\int_0^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ es complexificar directamente $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ y considerar un camino como el de la Figura 4.6 donde el ángulo $\theta_0 \in (0, 2\pi)$ se escoge de manera tal que

$$\int_{\gamma_3} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \alpha \int_0^{\infty} f(x) dx$$

para cierto $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\alpha \neq -1$.

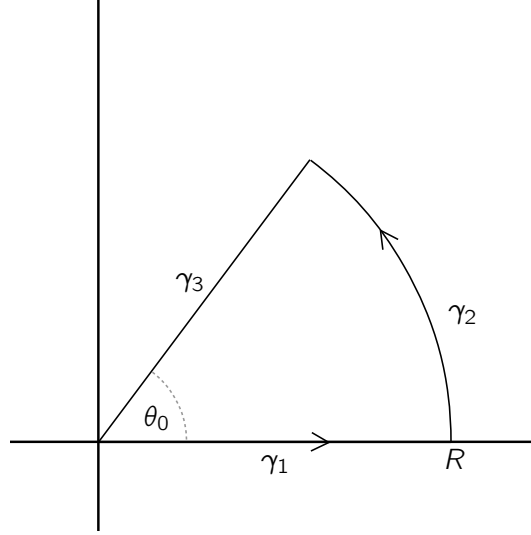


Figura 4.6: Un sector circular a veces es apropiado.

Este método se puede ilustrar al calcular por ejemplo

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$$

usando $\theta_0 = \frac{2\pi}{3}$. Al hacer esto, la integral sobre γ_3 queda de la forma

$$\int_{\gamma_3} \frac{1}{1+z^3} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+(e^{\frac{2\pi i}{3}} x)^3} dx = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx,$$

como además $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ es el único polo encerrado por esta curva (los otros son $z = -1$ y $z = e^{i\frac{5\pi}{3}}$ que no son encerrados por esta curva), y si además uno verifica que

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{1+z^3} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

entonces uno obtendrá que

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx = 2\pi i \text{Res}_f(e^{i\frac{\pi}{3}}),$$

y en consecuencia, luego de despejar y hacer unos cálculos se obtiene que

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Series de números

Concluimos esta sección de aplicaciones con el cálculo de series de números de la forma

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k),$$

donde $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ es una bi-sucesión tal que $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ no tiene singularidades en \mathbb{Z} y existen constantes $C, R, \delta > 0$ tales que³

$$(4.7) \quad |f(z)| \leq \frac{C}{|z|^{1+\delta}}, \quad \forall |z| \geq R$$

La idea es utilizar el teorema de residuo de forma “inversa” a la que hemos venido utilizando, en el sentido que queremos encontrar una función F y una curva γ de modo que

$$\sum_{p \text{ es singularidad de } F} \text{Res}_F(p) \text{Ind}(\gamma, p)$$

nos entregue como sub-producto la serie buscada. Una manera de hacer esto es considerar la función

$$F(z) = \pi \cot(\pi z) f(z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} f(z),$$

con la observación de que la función $g(z) = \pi \cot(\pi z)$ tiene polos simples en $k \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{Res}_F(k) &= \lim_{z \rightarrow k} (z - k) g(z) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow k} \frac{\pi z - \pi k}{\sin(\pi z)} \cos(\pi z) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow k} \frac{\pi z - \pi k}{\sin(\pi z) - \sin(k\pi)} \cos(\pi z) f(z) \\ &= \frac{1}{\cos(k\pi)} \cos(k\pi) f(k) \\ &= f(k). \end{aligned}$$

Con esto en mente, tenemos que si γ es como en la Figura 4.7 entonces

$$\sum_{p \text{ es singularidad de } F \text{ encerrada por } \gamma} \text{Res}_F(p) = \sum_{k=-N}^N f(k) + \sum_{p \notin \mathbb{Z} \text{ es singularidad de } f \text{ encerrada por } \gamma} \text{Res}_F(p),$$

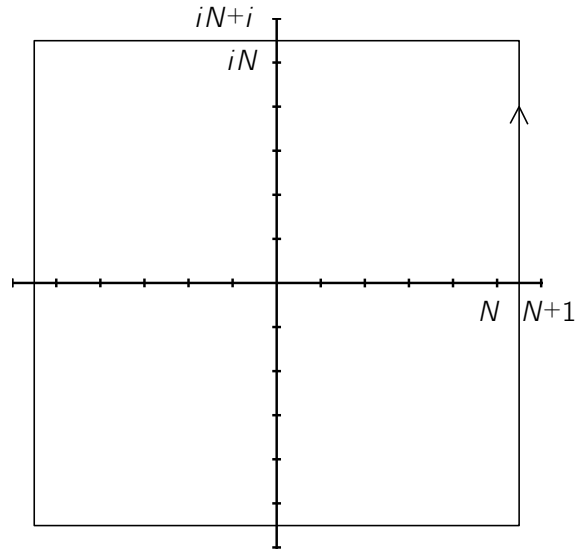
luego si $N \rightarrow \infty$ la serie buscada aparece. Por otra parte, el teorema del residuo nos dice que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(z) dz = \sum_{p \text{ es singularidad de } F \text{ encerrada por } \gamma} \text{Res}_F(p),$$

por lo que debemos estimar $\int_{\gamma} F(z) dz$. Afirmamos que si $N \rightarrow \infty$ entonces dicha integral tiende a 0. Para ello notemos que

$$|\cot(\pi z)| = \left| \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \right| = \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| = \left| \frac{e^{2\pi iz} + 1}{e^{2\pi iz} - 1} \right|,$$

³Esto es para garantizar la convergencia de la serie.

Figura 4.7: La curva γ utilizada para el cálculo de series.

y si $z = x + i(N + \frac{1}{2})$ tenemos que para N suficientemente grande se tiene que

$$|\cot(\pi z)| = \left| \frac{e^{2\pi i(x+i(N+\frac{1}{2}))} + 1}{e^{2\pi i(x+(N+\frac{1}{2}))} - 1} \right| = \left| \frac{e^{2\pi i x - \pi(2N+1)} + 1}{e^{2\pi i x - \pi(N+1)} - 1} \right| \leq \frac{1 + e^{-\pi(2N+1)}}{1 - e^{-\pi(2N+1)}} \leq 2$$

pues $\frac{1+e^{-\pi(2N+1)}}{1-e^{-\pi(2N+1)}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$. Además como $\cot(-z) = -\cot(z)$ se tiene que para $z = -(x + i(N + \frac{1}{2}))$ también se cumple que

$$|\cot(\pi z)| \leq 2,$$

si N es suficientemente grande. Por otra parte, si $z = (N + \frac{1}{2}) + iy$ tenemos que

$$|\cot(\pi z)| = \left| \frac{e^{2\pi i((N+\frac{1}{2})+iy)} + 1}{e^{2\pi i((N+\frac{1}{2})+iy)} - 1} \right| = \left| \frac{e^{2\pi i(N+\frac{1}{2})-2\pi y} + 1}{e^{2\pi i(N+\frac{1}{2})-2\pi y} - 1} \right| \leq \left| \frac{e^{\pi i} e^{-2\pi y} + 1}{e^{\pi i} e^{-2\pi y} - 1} \right| = \left| \frac{1 - e^{-2\pi y}}{1 + e^{-2\pi y}} \right| \leq 1,$$

pues $e^{-2\pi y} > 0$. Similarmente se tiene que

$$|\cot(\pi z)| \leq 1,$$

cuando $z = -(N + \frac{1}{2}) + iy$, y en consecuencia concluimos que

$$|\cot(\pi z)| \leq 2,$$

cada vez que $z \in \gamma$. Esto, junto con la condición 4.7 nos permite demostrar que para $N \geq R$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} F(z) dz \right| &\leq 8(N + \frac{1}{2}) \cdot \max_{\gamma} |F(z)| \\ &= 8(N + \frac{1}{2}) \cdot \max_{\gamma} |f(z) \pi \cot(\pi z)| \\ &\leq 8(N + \frac{1}{2}) 2\pi \cdot \max_{\gamma} |f(z)| \\ &\leq \frac{CN}{N^{1+\delta}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

En resumen, obtenemos luego de mandar N a infinito que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) = - \sum_{\substack{p \text{ es singularidad} \\ \text{de } f \text{ en } \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}}} \text{Res}_F(p).$$

Ejemplo 4.10. Si consideramos la función $\frac{\pi}{z^2} \cot(\pi z)$ tenemos que gracias a lo anterior se verifica que

$$\sum_{p \text{ polo de } F} \text{Res}_F(p) = 0,$$

pero los polos de F son exactamente los enteros $k \in \mathbb{Z}$. El polo en $z = 0$ es de orden 3 y podemos calcular que

$$\text{Res}_F(0) = -\frac{\pi^2}{3},$$

en tanto que los polos en $z = k$, $k \neq 0$, son de orden 1 y verifican

$$\text{Res}_F(k) = \frac{1}{k^2},$$

de donde se obtiene que

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{3} = 0,$$

y por lo tanto

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4.4. Funciones meromorfas y singularidades en infinito

Definición 4.9. Decimos que un conjunto $S \subseteq \mathbb{C}$ es discreto si para cada $s \in S$ existe $r > 0$ tal que

$$S \cap D(s, r) = \{s\}.$$

Definición 4.10. Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ con conjunto singular $S \subseteq \Omega$ se dice meromorfa si

1. S es cerrado y discreto.
2. $f : \Omega \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa.
3. Si $S \cap D(s, r) = \{s\}$ entonces $f|_{D(s, r)}$ tiene un polo en s .

Lema 4.18. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa no idénticamente nula, y sea $Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$, entonces $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$F(z) = \frac{1}{f(z)}$$

es una función meromorfa con conjunto singular $Z(f)$.

4.4. FUNCIONES MEROMORFAS Y SINGULARIDADES EN INFINITO

Demostración. Vimos que $Z(f)$ es un conjunto sin puntos de acumulación, lo que lo hace ser discreto y cerrado. Además, es claro que $F(z) = \frac{1}{f(z)}$ es holomorfa en $\Omega \setminus Z(f)$.

Finalmente, si $s \in S$ y $r > 0$ son tales que $D(s, r) \subseteq \Omega$ y $D(s, r) \cap Z(f) = \{s\}$, entonces

$$|F(z)| = \frac{1}{|f(z)|} \xrightarrow{z \rightarrow s} +\infty,$$

es decir, s es un polo para F . ■

Lema 4.19. Si denotamos por $\mathcal{M}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es meromorfa}\}$, entonces $(\mathcal{M}(\Omega), +, \cdot)$ es un cuerpo.

Demostración. Ejercicio. ■

Definición 4.11 (Singularidad en infinito). Sea $\Omega \supseteq D(0, R)^c$ un abierto, y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Si $G : D(0, \frac{1}{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ está definida como $G(z) = f(\frac{1}{z})$, entonces decimos que f tiene una singularidad removible (resp. polo, esencial) en $+\infty$ y G tiene una singularidad removible (resp. polo, esencial) en 0.

Notar que si $G(z)$ tiene una serie de Laurent $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k$ en torno a $p = 0$, entonces $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{-k} z^k$ es una serie de Laurent para f en torno a $p = \infty$. Con esto en mente, las singularidades en ∞ se caracterizan por los coeficientes que acompañan a las potencias positivas de z en la función G .

Teorema 4.20. Suponga que f es una función entera. Entonces

- $|f(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} +\infty$ (es decir f tiene un polo en infinito) si y solo si f es un polinomio no constante.
- f tiene una singularidad removible en ∞ si y solo si f es constante.

Demostración. Notar que como f es entera, entonces $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ converge para todo $z \in \mathbb{C}$, luego $G(z) = f(\frac{1}{z}) = \sum_{k \geq 0} a_k z^{-k}$ es la serie de Laurent de G en torno a $z = 0$, por lo tanto

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$$

es la serie de Laurent de f en torno a ∞ . Luego si ∞ es un polo, la serie debe tener solo un número finito de términos, por lo que f debe ser un polinomio. De manera similar, si ∞ es removible, entonces f debe ser acotada, luego f es entera y acotada, luego f es constante por el teorema de Liouville. ■

Como consecuencia del teorema anterior obtenemos que si f es una función entera no polinomial o constante, entonces f ha de tener una singularidad esencial en ∞ .

Definición 4.12. Dado $\Omega \supseteq D(0, R)^c$, una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se dice meromorfa en ∞ si $G(z) = f(\frac{1}{z})$ es meromorfa en $D(0, \frac{1}{R})$.

Teorema 4.21. Una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa es también meromorfa en ∞ si y solo si es una función racional (cociente de polinomios).

Demostración. Supongamos primero que f tiene un polo en infinito. Al ser una singularidad aislada, entonces cualquier otro polo debe estar contenido en $\overline{D}(0, R)$ para cierto $R > 0$. Dicho conjunto de polos en $\overline{D}(0, R)$ debe ser un conjunto finito (de lo contrario tendría un punto de acumulación en $\overline{D}(0, R)$, lo que contradice que tal conjunto sea discreto).

4.5. EJERCICIOS

Si la singularidad en infinito es removible, entonces f es acotada en $\overline{D}(0, R)^c$ para cierto $R > 0$ y por lo tanto se concluye igual que antes que los polos de f han de estar contenidos en $\overline{D}(0, R)$ y por tanto son un conjunto finito.

En cualquiera de los casos, tenemos que el conjunto de polos $\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ de la función es finito y por lo tanto tenemos que

$$G(z) = f(z) \prod_{k=1}^m (z - p_k)$$

solo tiene singularidades removibles en \mathbb{C} y por tanto podemos suponer que es entera, y solo basta probar que G es racional.

Si G tiene una singularidad removible en infinito entonces G ha de ser constante (racional) gracias al Teorema 4.20. Si G tiene un polo en infinito, entonces G debe ser un polinomio (racional) gracias al Teorema 4.20. Finalmente, G no puede tener una singularidad esencial en infinito, de ser así f la tendría, pero estamos suponiendo que f es meromorfa en infinito y por lo tanto ∞ solo puede ser un polo o removible.

Verificar que una función racional es meromorfa en infinito se deja como ejercicio. ■

El concepto de funciones meromorfas queda mejor si trabajamos en la compactificación de Alexandroff de \mathbb{C} , es decir, en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, y trata a ∞ como *un punto mas*. En este formalismo una función f tiene un polo en p si $f(p) = \infty$ y f es holomorfa en una vecindad de p .

En este contexto, y si por ejemplo consideremos un polinomio holomorfo $P(z)$, entonces P es meromorfa en ∞ con $P(\infty) = \infty$. Similarmente, si $f : D(p, r) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ tiene un polo en p entonces podemos pensar que lo que ocurre es que $f : D(p, r) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es holomorfa con $f(p) = \infty$.

Volveremos a estudiar un poco mas en detalle la compactificación $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en el Capítulo 6.

4.5. Ejercicios

Ejercicio 4.1. Encuentre y clasifique las singularidades aisladas de las siguientes funciones:

1. $\sin \frac{1}{z}$.
2. $\frac{\sin z}{z}$.
3. $ze^{\frac{1}{z}} e^{-\frac{1}{z^2}}$.
4. $\frac{\sum_{k \geq 2} 2^k z^k}{z^3}$.

Ejercicio 4.2. Muestre que

$$\sum_{k \geq 1} 2^{-2^k} z^{-k}$$

converge absolutamente si $z \neq 0$, que define una función que tiene una singularidad esencial en $p = 0$.

Ejercicio 4.3. Encuentre el anillo de convergencia de la serie $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{z^k}{k^k}$.

Ejercicio 4.4. Muestre que si f tiene un polo en P , entonces $\frac{1}{f}$ tiene una singularidad removible en P .

Ejercicio 4.5. Muestre que si $g : D(P, R) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y no acotada, y si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(z - P)^m g(z)$ es acotada, entonces g tiene un polo en P .

Ejercicio 4.6. Muestre que si $f : D(0, R) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y tiene una singularidad esencial en $P = 0$, entonces $z^m f(z)$ tiene una singularidad esencial en $P = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4.7. Muestre que la serie de Laurent (en torno a $P = 0$) para la función $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ es de la forma

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^k,$$

para ciertos $B_{2k} \in \mathbb{R}$. Calcule explícitamente B_2 y B_4 .

Ejercicio 4.8. Considere la función $f(z) = \frac{1}{z^2 - 4z}$. Determine la serie de Laurent o de potencias, según corresponda, de f en los siguientes dominios.

1. $|z| > 4$.
2. $|z - 2| < 2$.

Ejercicio 4.9. Encuentre y clasifique todas las singularidades aisladas de $f(z) = \frac{1}{z^2(e^z - 1)}$. Si la singularidad es un polo, determine su orden y residuo.

Ejercicio 4.10. En la demostración del Lema 4.12, muestre que

$$g(t) = (\gamma(t) - p) \exp \left[- \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - p} ds \right]$$

define una función continua.

Ejercicio 4.11. Demuestre el Lema 4.14.

Ejercicio 4.12. Sea γ una curva C^1 a pedazos, suave y cerrada. Muestre que

$$\text{Ind}(\gamma, p) \xrightarrow{|p| \rightarrow \infty} 0,$$

y concluya que $\text{Ind}(\gamma, q) = 0$ para todo q en la región no-acotada determinada por γ .

Ejercicio 4.13. Calcular la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Para ello considere $f(z) = z^{-1}e^{iz}$ y note que $z = 0$ es un polo para la función y el camino de la Figura 4.3 pasa por dicho polo. Para evitar eso, y poder utilizar el teorema del residuo, considere el camino señalado en la Figura 4.4.

Ejercicio 4.14. Dada $f(z) = \frac{\sin z}{z^3(z-2)(z+1)}$, calcule $\text{Res}_f(0)$.

Ejercicio 4.15. Calcule $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(z+1)(z+2)} dz$, donde γ es el triángulo con vértices $1 \pm i$ y -3 recorrido de manera horaria.

Ejercicio 4.16. Use el teorema de los residuos para calcular las siguientes integrales

1. $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$.
2. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin \theta} d\theta$.
3. $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^{10}} dx$. Ayuda: Use el Ejercicio 1.7 para calcular el residuo.

4.5. EJERCICIOS

4. $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n} dx$ para $n \geq 2$. Ayuda: Use un sector circular que tenga al segmento $[0, R]$ como uno de sus lados y que solo encierre 1 polo de la función.
5. $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$. Ayuda: Primero use integración por partes.
6. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+(\sin \theta)^2} d\theta$.

Ejercicio 4.17. Encuentre todos los polos de la función $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{1-z})}$ en $D(0, 1)$.

Ejercicio 4.18.

1. Encuentre y clasifique todas las singularidades aisladas de la función

$$f(z) = \pi z^{-2} \cot(\pi z).$$

En el caso de los polos, calcule su orden y su residuo.

2. Use lo anterior para calcular $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$.

Ejercicio 4.19. Calcular la serie $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{1+k^4}$.

Ejercicio 4.20. Calcular la serie $\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2}$. Ayuda: Considere la función $f(z) = \frac{\pi \csc(\pi z)}{z^2}$

Ejercicio 4.21. Para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ calcule la serie $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2 - x^2}$. Ayuda: Considere la función $f(z) = \frac{\cot(\pi z)}{z(\pi z - x)}$

Ejercicio 4.22. Demuestre que dados puntos distintos $p_1, p_2, \dots, p_N \in \mathbb{C}$ y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}$, entonces existe una función $f : \mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_N\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa tal que p_i es un polo para f y $\text{Res}(f, p_i) = \alpha_i$ para todo $i = 1, \dots, N$.

Capítulo 5

Mas sobre los ceros de funciones holomorfas

5.1. El principio del argumento

Recordemos que de la fórmula de Cauchy tenemos que si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa y $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p, r)} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

vale para todo $z \in D(p, r)$. En particular, es importante notar que los valores de f en $D(p, r)$ están completamente determinados por los valores de f sobre $S(p, r)$. Con esto, si queremos saber si una función f se anula en algún punto del disco, basta estudiar lo que ocurre en la frontera del disco.

Por otra parte, recordemos que los ceros de una función holomorfa son aislados, luego si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa no idénticamente nula tal que $f(p) = 0$ para cierto $p \in \Omega$, entonces existe $r > 0$ tal que $f|_{D(p, r)}$ solo se anula en p . Además, como f es analítica con $f(p) = 0$, debemos tener que

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - p)^k = \sum_{k \geq 1} a_k (z - p)^k,$$

lo que nos dice que

$$\frac{f(z)}{z - p}$$

tiene una singularidad removible en $z = p$. Si además suponemos que $a_k = 0$ para todo $k = 1, \dots, n-1$ y $a_n \neq 0$, entonces

$$\frac{f(z)}{(z - p)^n} = \sum_{k \geq 0} a_{j+n} (z - p)^k$$

también tiene una singularidad removible en $z = p$. Sin embargo, la función

$$\frac{f(z)}{(z - p)^{n+1}} = \frac{a_n}{z - p} + \sum_{k \geq 0} a_{j+n+1} (z - p)^k$$

tiene un polo simple en $z = p$. Este análisis da pie para la siguiente

Definición 5.1. Dada una función holomorfa $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ y un cero p de f , decimos que p es un cero de orden n (o multiplicidad n) si f se puede escribir como la serie de potencias

$$f(z) = \sum_{k \geq n} a_k (z - p)^k,$$

con $a_n \neq 0$.

y al siguiente

Lema 5.1. Si f tiene un cero de orden n en p , entonces la función

$$F(z) = \frac{f(z)}{(z-p)^n}$$

tiene una singularidad removible en $z = p$.

Observación 5.1. La definición y el lema nos dan a entender que cerca de sus ceros, las funciones holomorfas se comportan de manera muy similar a un polinomio en el sentido que $f(z) \approx (z-p)^n$ para cierto $n \in \mathbb{N}$.

El siguiente resultado nos dice como encontrar el orden de un cero p en $D(p, r)$ solo conociendo los valores de f en $S(p, r)$.

Lema 5.2. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$ con p es un cero de orden n (y su único cero en $\overline{D(p, r)}$). Entonces

$$n = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p, r)} \frac{f'(w)}{f(w)} dw.$$

Demostración. Como vimos, si p es un cero de orden n , entonces $f(z) = \sum_{k \geq n} a_k (z-p)^k$ con $a_n \neq 0$, de donde

$$H(z) = \frac{f(z)}{(z-p)^n},$$

coincide con la función holomorfa $\sum_{k \geq n} a_k (z-p)^{k-n}$ para $z \neq p$ y satisface $H(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{D(p, r)}$. Un cálculo directo nos dice que para $w \neq p$

$$\frac{f'(w)}{f(w)} = \frac{H'(w)}{H(w)} + \frac{n}{w-p},$$

pero como H no se anula en $\overline{D(p, r)}$ tenemos que $\frac{H'(w)}{H(w)}$ es holomorfa en $\overline{D(p, r)}$, luego el teorema de Cauchy implica que

$$\int_{S(p, r)} \frac{f'(w)}{f(w)} dw = \int_{S(p, r)} \frac{H'(w)}{H(w)} dw + \int_{S(p, r)} \frac{n}{w-p} dz = 0 + 2\pi i n,$$

■

El resultado anterior se generaliza fácilmente para obtener

Proposición 5.3. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in S(p, r)$. Si $\{z_k\}_{k=1}^l$ son los ceros de f en $D(p, r)$ con multiplicidades $\{n_k\}_{k=1}^l$ respectivamente, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S(p, r)} \frac{f'(w)}{f(w)} dw = \sum_{k=1}^l n_k.$$

Demostración. Considerar

$$H(z) = \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n_1} (z-z_2)^{n_2} \cdots (z-z_l)^{n_l}}$$

y notar que H coincide con una función holomorfa en $\overline{D(p, r)} \setminus \{z_k\}_{k=1}^l$ que satisface

$$\frac{f'(w)}{f(w)} = \frac{H'(w)}{H(w)} + \sum_{k=1}^l \frac{n_k}{w-z_k},$$

de donde se concluye el resultado.

■

5.1. EL PRINCIPIO DEL ARGUMENTO

La integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{S(p,r)} \frac{f'(w)}{f(w)} dw$ también sirve para detectar polos de funciones

Lema 5.4. Sea $f : \Omega \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa que no se anula tal que $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$ y p es un polo de orden m para f . Entonces

$$-m = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p,r)} \frac{f'(w)}{f(w)} dw.$$

Demostración. En este caso, basta considerar la función $H(z) = (z - p)^m f(z)$ no nula y argumentar como antes. ■

El lema anterior se generaliza para obtener

Proposición 5.5. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa tal que $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$ que satisface $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{D(p, r)}$. Si $\{p_j\}_{j=1}^{\tilde{l}}$ son los polos de f en $D(p, r)$ con órdenes $\{m_j\}_{j=1}^{\tilde{l}}$ respectivamente, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S(p,r)} \frac{f'(w)}{f(w)} dw = - \sum_{j=1}^{\tilde{l}} m_j.$$

Demostración. Considerar $H(z) = (z - p_1)^{m_1} (z - p_2)^{m_2} \cdots (z - p_{\tilde{l}})^{m_{\tilde{l}}} f(z)$ ■

Si juntamos los resultados anteriores tenemos el siguiente

Teorema 5.6 (Principio del Argumento). Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa que no tiene ni ceros ni polos en $S(p, r)$ con $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S(p,r)} \frac{f'(w)}{f(w)} dw = \sum_k n_k - \sum_j m_j,$$

donde n_k son los órdenes de los ceros de f en $D(p, r)$ y m_j son los órdenes de los polos de f en $D(p, r)$.

Observación 5.2. Este teorema se conoce como el principio del argumento pues si notamos que

$$(\text{Log } f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)},$$

y como $\text{Log } z = \log |z| + i \text{Arg } (z)$ tenemos que si $\gamma = S(p, r)$ entonces

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\gamma} (\text{Log } f(z))' dz = \text{Log } f(z) \Big|_{\text{punto inicial}}^{\text{punto final}} = i \text{Arg } (f(z)) \Big|_{\text{punto inicial}}^{\text{punto final}}$$

para cierto $k \in \mathbb{Z}$. En otras palabras la integral mide como cambia el argumento de f a lo largo de la curva γ , y el resultado anterior nos dice que dicho cambio corresponde a la suma de los órdenes entre ceros y polos.

Observación 5.3. Otra manera de ver esto es considerar el cambio de variables $w = f(z)$ y escribir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{f(\gamma)} \frac{1}{w} dw,$$

donde la integral obtenida no es otra cosa que el índice de la curva $f \circ \gamma$ respecto al punto $w = 0$.

En particular, si f es una función holomorfa cualquiera y γ es una curva cerrada que no contiene ni ceros ni singularidades de f , entonces la cantidad $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ debe ser un entero gracias al Lema 4.12.

Observación 5.4. El principio del argumento vale si se cambia $S(p, r)$ por cualquier curva γ que es homotópicamente equivalente a $S(p, r)$ y que no contenga ni ceros ni polos de f . La suma se realizará sobre los polos y ceros encerrados por γ .

5.2. Aplicaciones del principio del argumento

Dentro de los corolarios importantes del principio del argumento se encuentra el hecho de que las funciones holomorfas son abiertas

Proposición 5.7 (Teorema función abierta). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa no constante, entonces $f(\Omega)$ es abierto.*

Demostración. Sea $q \in f(\Omega)$, queremos demostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $D(q, \varepsilon) \subseteq f(\Omega)$, o en otras palabras, para cada $z \in D(q, \varepsilon)$ debemos encontrar $w \in \Omega$ tal que $f(w) - z = 0$.

Como $q \in f(\Omega)$ tenemos que debe existir $p \in \Omega$ tal que $f(p) = q$, de donde podemos definir la función $g(z) = f(z) - f(p) = f(z) - q$ que satisface $g(p) = 0$. Dado que f no es constante, tenemos que debe existir $r > 0$ tal que $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$ y $g(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{D(p, r)} \setminus \{p\}$. Sea $k_0 \geq 1$ el orden del cero p de g , luego el Teorema 5.6 nos dice que

$$k_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p, r)} \frac{g'(w)}{g(w)} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p, r)} \frac{f'(w)}{f(w) - q} dw.$$

Como el conjunto $S(p, r)$ es compacto tenemos que $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \min_{w \in S(p, r)} |f(w) - q| > 0$, luego, para todo $z \in D(q, \varepsilon)$ y todo $w \in S(p, r)$ tenemos que

$$|f(w) - z| = |f(w) - q + q - z| \geq |f(w) - q| - |z - q| \geq \varepsilon - |z - q| > 0,$$

uniformemente en w . Por lo tanto la función $N : D(q, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$N(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p, r)} \frac{f'(w)}{f(w) - z} dw$$

está bien definida y se puede verificar que es continua en $D(q, \varepsilon)$. Además, para cada z fijo, el valor de $N(z)$ corresponde al número de ceros (contados con multiplicidad) de la función $w \mapsto f(w) - z$ dentro de $D(p, r)$. En particular $N(z) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Lo anterior nos dice que $N : D(q, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{N}$ y como ya sabemos que es continua, por lo tanto debe ser constante, ya que $D(q, \varepsilon)$ es conexo. Como $N(q) = k_0$, tenemos que $N(z) = k_0$ para todo $z \in D(q, \varepsilon)$. En otras palabras tenemos que para cada $z \in D(q, \varepsilon)$ la ecuación $f(w) - z = 0$ tiene k_0 soluciones (contadas con multiplicidad) en $D(p, r)$, en particular $z \in f(D(p, r))$ para todo $z \in D(q, \varepsilon)$, lo que demuestra que $D(q, \varepsilon) \subseteq f(D(p, r)) \subseteq f(\Omega)$. ■

Otra consecuencia importante del principio del argumento es el teorema de Rouché, que permite detectar ceros de funciones holomorfas en base a una comparación con otra función.

Teorema 5.8 (Rouché). *Sean $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funciones holomorfas sobre $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Si $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$ es tal que*

$$(5.1) \quad |f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad \forall z \in S(p, r),$$

entonces

$$\#Z(f, D(p, r)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p, r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p, r)} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \#Z(g, D(p, r)).$$

Dicho de otra manera, el teorema de Rouché nos dice que si somos capaces de verificar la desigualdad (5.1), entonces la cantidad de ceros de f en $D(p, r)$ es la misma que la cantidad de ceros de g en $D(p, r)$, en ambos casos contadas con multiplicidad.

Demostración. Primero observemos que (5.1) implica que $|f| > 0$ y $|g| > 0$ en $S(p, r)$, así para $w \in S(p, r)$ se puede definir $h(w) = \frac{f(w)}{g(w)}$. Veamos que $h \notin \mathbb{R}_-$, en efecto, si existe $w \in S(p, r)$ tal que $h(w) = -\lambda$ para cierto $\lambda \geq 0$, entonces

$$\begin{aligned} |h(w) - 1| &= |-\lambda - 1| \\ &= \lambda + 1 \\ &= |h(w)| + 1, \end{aligned}$$

de donde se contradice la desigualdad estricta en (5.1).

Si definimos $H : [0, 1] \times S(p, r) \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$H(t, w) = tf(w) + (1 - t)g(w),$$

entonces la observación anterior nos dice que $H(t, w) \neq 0$ para todo $(t, w) \in [0, 1] \times S(p, r)$. En efecto, si existe $(t, w) \in (0, 1) \times S(p, r)$ tal que $tf(w) + (1 - t)g(w) = 0$ entonces

$$0 = tf(w) + (1 - t)g(w) = \frac{t}{g(w)} \left(h(w) + \frac{1 - t}{t} \right) \Rightarrow h(w) = -\frac{1 - t}{t}.$$

Por lo anterior la función $I : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$I(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p, r)} \frac{\frac{\partial H}{\partial w}(t, w)}{H(t, w)} dw$$

está bien definida. Gracias a que $H(t, w)$ nunca es cero se puede demostrar (ejercicio para el lector) que la función I es continua en el intervalo $[0, 1]$. Como además la cantidad $I(t)$ cuenta los ceros de la función $H(t, \cdot)$ en $D(p, r)$ tenemos que $I(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, de donde deducimos que I debe ser constante, lo que concluye la demostración. ■

Usualmente se utiliza la siguiente versión del teorema de Rouché que requiere una condición mas fuerte que (5.1).

Corolario 5.9 (Rouché). Sean $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funciones holomorfas sobre $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto. Si $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$ es tal que

$$(5.2) \quad |f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad \forall z \in S(p, r),$$

entonces

$$\#Z(f, D(p, r)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p, r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p, r)} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \#Z(g, D(p, r)).$$

Ejemplo 5.1. Sea $f(z) = z^5 + 5z^3 - z - 2$. El teorema de Rouché nos permite determinar cuando ceros tiene f en el disco $D(0, 1)$. En efecto, si consideramos $g(z) = 5z^3$ tenemos que para $|z| = 1$

$$|f(z) - g(z)| = |z^5 - z - 2| \leq |z|^5 + |z| + 2 = 4 < 5 = |5z^3| = |g(z)|$$

de donde concluimos que la cantidad de ceros de f en $D(0, 1)$ debe ser la misma que la cantidad de ceros de g . Pero g tiene solo a $z = 0$ como cero, con multiplicidad 3, luego f debe tener 3 ceros (contados con multiplicidad) en $D(0, 1)$.

Notar que además se puede determinar que las 3 raíces en realidad son las únicas en el disco $D(0, 2)$ pues si $|z| = 2$ entonces

$$|f(z) - g(z)| = |z^5 - z - 2| \leq 36 < 40 = |5z^3| = |g(z)|$$

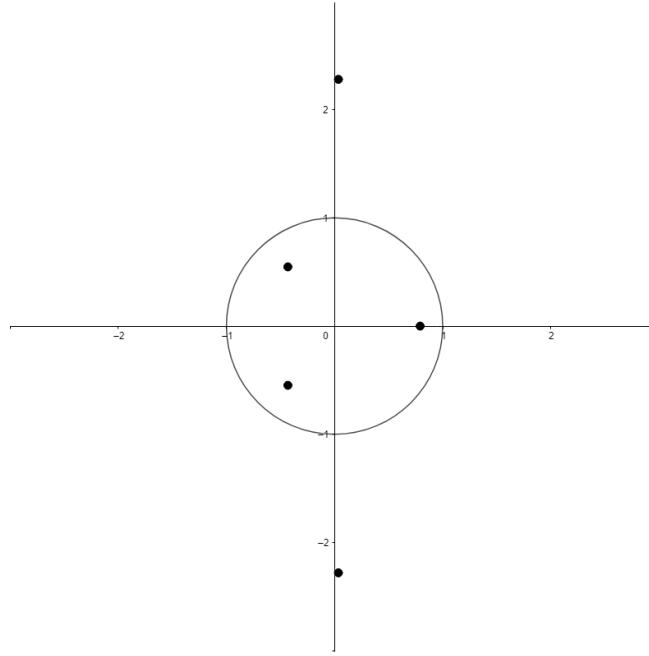


Figura 5.1: Raíces de la función $f(z) = z^5 + 5z^3 - z - 2$ respecto al disco unitario.

Ejemplo 5.2. Sea $f(z) = 2z^{10} + 4z^2 + 1$, determine el número de ceros de f en $D(0, 1)$. Notar que si $g(z) = 4z^2$ y si $|z| = 1$ entonces

$$|f(z) - g(z)| = |2z^{10} + 1| \leq 3 < 4 = |4z^2| = g(z),$$

de donde concluimos que f tiene la misma cantidad de ceros que g , es decir 2.

Observación 5.5. Tal como en el principio del argumento, se puede generalizar el teorema de Rouché usando el Teorema de Cauchy, es decir, el resultado siguen siendo válido si se cambia la circunferencia $S(p, r)$ por una curva γ homotópicamente equivalente a $S(p, r)$ en Ω de modo que f no tenga ceros sobre γ .

Corolario 5.10 (Teorema fundamental del álgebra). Sea $P(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ un polinomio con coeficientes complejos. Entonces P tiene n raíces en \mathbb{C} .

Demostración. Consideremos $g(z) = z^n$, luego si $R \geq \max \left\{ 1, 2 \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right\}$ tenemos que para $|z| = R$

$$\left| \frac{P(z) - g(z)}{g(z)} \right| = \frac{\left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right|}{|z|^n} \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| R^{k-n} \leq \frac{1}{R} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \leq \frac{1}{2} < 1$$

de donde $|P - g| < |g|$ sobre $S(0, R)$. Luego el teorema de Rouché garantiza que P debe tener la misma cantidad de ceros que g en $D(0, R)$, pero g tiene exactamente n ceros en $D(0, R)$ ($z = 0$ tiene multiplicidad n). ■

Corolario 5.11 (Teorema función inversa). Suponga que f es holomorfa en una vecindad de z_0 con $f'(z_0) \neq 0$. Entonces f admite una inversa holomorfa en una vecindad de $f(z_0)$.

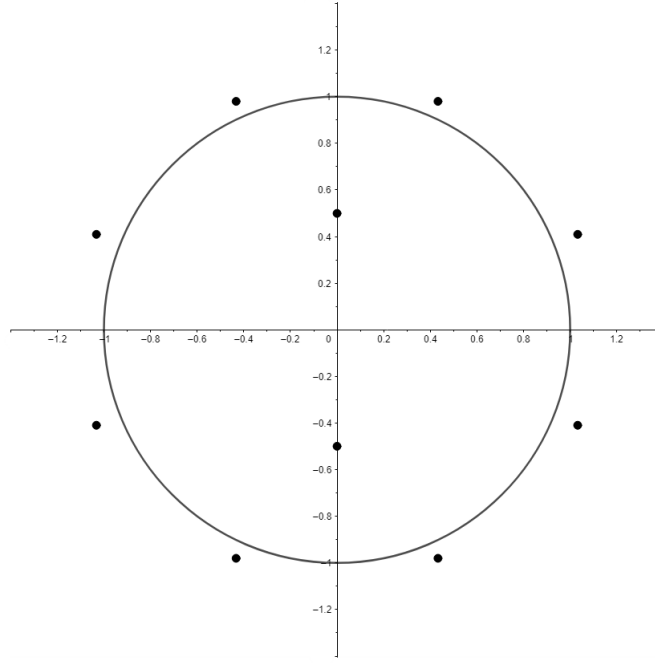


Figura 5.2: Raíces de la función $f(z) = 2z^{10} + 4z^2 + 1$ respecto al disco unitario.

Demostración. Sin perder generalidad se puede suponer que $z_0 = 0$ y $f(z_0) = 0$. Como f es analítica se tiene que

$$f(z) = \sum_{k \geq 1} a_k z^k = a_1 z + \sum_{k \geq 2} a_k z^k$$

pues $f(0) = 0$ y $f'(0) = a_1 \neq 0$. Si consideramos $\tilde{f} = \frac{1}{a_1} f$ podemos suponer que $f'(0) = a_1 = 1$, es decir

$$f(z) = z + z^2 \sum_{k \geq 0} a_{k+2} z^k = z + z^2 h(z).$$

Si $|z| \leq r$ es suficientemente pequeño, por la continuidad de h en $z = 0$ tenemos que $|h(z)| \leq M$ para cierto $M > 0$ y por lo tanto

$$|f(z) - z| \leq M |z|^2.$$

Ahora bien, queremos demostrar que si b es cercano a $f(z_0) = 0$ entonces se puede encontrar una única solución z , cercana a $z_0 = 0$, para la ecuación $f(z) = b$. Para ello, consideremos la función $f_b(z) = f(z) - b$ y la función $g_b(z) = z - b$. Tenemos que para $|z| = r$ podemos escribir

$$|f_b(z) - g_b(z)| = |f(z) - z| \leq M r^2,$$

y queremos que $M r^2 < |g_b(z)| = |z - b|$ para poder usar el Teorema 5.8, pero esto ocurre por ejemplo si $M r^2 < r - |b| \Leftrightarrow |b| < r - M r^2 = r^2(\frac{1}{r} - M)$, de donde si $r < \frac{1}{M}$ obtenemos que la cantidad de ceros de f_b en $D(0, r)$ es la misma que la de g_b en $D(0, r)$, pero ésta última función tiene exactamente un cero, $z = b \in D(0, r)$.

Lo anterior demuestra que si $r < \frac{1}{M}$, entonces para todo $b \in D(0, r - M r^2)$ existe una única solución a la ecuación $f(z) = b$ en $D(0, r)$, es decir la función f es localmente biyectiva.

5.2. APLICACIONES DEL PRINCIPIO DEL ARGUMENTO

Como ya sabemos que f es una función abierta, entonces tenemos que donde existe, la función f^{-1} es continua. Para ver que es holomorfa basta notar que

$$\frac{f^{-1}(w_1) - f^{-1}(w_2)}{w_1 - w_2} = \frac{z_1 - z_2}{f(z_1) - f(z_2)},$$

donde $f(z_j) = w_j$, y el límite cuando $w_1 \rightarrow w_2 \Leftrightarrow z_1 \rightarrow z_2$ existe si $f'(z_2) \neq 0$, lo que está garantizado en una vecindad de z_0 pues ahí $f'(z_0) \neq 0$. ■

Una consecuencia importante del teorema de la función abierta tiene que ver con los máximos de funciones holomorfas

Teorema 5.12 (Principio del módulo máximo). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Si existe $p \in \Omega$ tal que*

$$|f(z)| \leq |f(p)| \quad \forall z \in \Omega,$$

entonces f debe ser constante.

Observación 5.6. Este resultado dice que el módulo de las funciones holomorfas no puede tener máximos globales interiores. Sin embargo, tampoco pueden haber máximos *relativos* interiores, esto pues de haber uno en $z = p$, la función $f|_{D(p,r)}$ tendría un máximo global en $z = p$, por lo que debe ser constante en $D(p, r)$ e igual a $f(p)$. Pero esto implicaría que la función $F(z) = f(z) - f(p)$ es idénticamente igual a cero en $D(p, r)$, lo que implica que $F \equiv 0$ en todo Ω .

Demostración. Si f no es constante y como Ω es abierto y conexo, tenemos que $f(\Omega)$ es abierto, lo que implica que debe existir $w \in f(\Omega)$ con $|w| > |f(p)|$, lo que es una contradicción. ■

Teorema 5.13. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, conexo y acotado. Si $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa sobre Ω y continua sobre $\bar{\Omega}$, entonces*

$$\max_{w \in \bar{\Omega}} |f(w)| = \max_{w \in \partial\Omega} |f(w)|.$$

Demostración. Si f es constante, no hay nada que demostrar. Si f no es constante, entonces $|f|$ no puede tener un máximo interior en Ω , luego el máximo debe alcanzarse en la frontera. ■

Teorema 5.14 (Principio del módulo mínimo). *Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa sobre Ω abierto conexo tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Si existe $p \in \Omega$ tal que*

$$|f(p)| \leq |f(z)| \quad \forall z \in \Omega,$$

entonces f es constante.

Demostración. Basta considerar $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ y aplicar el Teorema 5.13. ■

Concluimos esta sección con el Lema de Schwarz que nos permitirá caracterizar las funciones bi-holomorfas en el disco unitario.

Teorema 5.15 (Lema de Schwarz). *Sea $f : D(0, 1) \rightarrow \overline{D(0, 1)}$ una función holomorfa tal que $f(0) = 0$. Entonces*

$$1. |f(z)| \leq |z|.$$

2. $|f'(0)| \leq 1$.

Si además existe $p \in D(0, 1)$ tal que $|f(p)| = |p|$, ó bien $|f'(0)| = 1$, entonces $f(z) = e^{i\theta}z$ para cierto $\theta \in [0, 2\pi)$.

Demostración. Como $f(0) = 0$, tenemos que la función $g : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

es una función holomorfa. Si $|w| = r < 1$, entonces

$$|g(w)| = \left| \frac{f(w)}{w} \right| \leq \frac{1}{|w|} = \frac{1}{r},$$

luego el Teorema 5.13 implica que

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r} \quad \forall z \in D(0, r).$$

Como esto vale para todo $0 < r < 1$, concluimos que $|g(z)| \leq 1$ para todo $z \in D(0, 1)$ de donde se obtiene la primera parte del resultado.

Si suponemos que existe $p \in D(0, 1)$ tal que $|f(p)| = |p|$ (o bien si $|f'(0)| = 1$), entonces $|g(p)| = 1$ (o bien $|g(0)| = 1$), o sea $|g|$ tiene un máximo interior, de donde se concluye que g debe ser constante, es decir

$$g(z) = \alpha \in \mathbb{C},$$

pero como $|g(p)| = 1$ se concluye que $|\alpha| = 1$, en otras palabras, $\alpha = e^{i\theta}$ para cierto $\theta \in [0, 2\pi)$. ■

5.3. Ejercicios

Ejercicio 5.1. Determine la cantidad de soluciones que tiene la ecuación $z^8 - 5z^3 = 2 - z$ en la región $1 < |z| < 2$.

Ejercicio 5.2. Determine la cantidad de ceros (contados con multiplicidad) que tiene el polinomio $f(z) = z^8 - 6z^3 + 3z + 1$ en la región $|z| > 1$.

Ejercicio 5.3. Determine la cantidad de ceros de la función $f(z) = 2 + z^2 + e^{iz}$ en \mathbb{H} .

Ejercicio 5.4. Verifique de manera explícita que el módulo de la función $f(z) = e^z$ alcanza su máximo y su mínimo en la frontera de cualquier conjunto compacto.

Ejercicio 5.5. Use el principio del modulo mínimo para demostrar el Teorema Fundamental del Álgebra.

Ejercicio 5.6. Suponga que f es holomorfa en $\Omega \supseteq \bar{D}(0, 1)$ y que satisface

- $|f(z)| \leq 4$ si $|z| = 1$ e $\operatorname{Im} z \geq 0$, y
- $|f(z)| \leq 5$ si $|z| = 1$ e $\operatorname{Im} z < 0$.

Muestre que $|f(0)| \leq 2\sqrt{5}$. Ayuda: Considere $g(z) = f(z)f(-z)$.

Ejercicio 5.7. Sean f, g dos funciones holomorfas en Ω y sea $U \subseteq \Omega$ un abierto acotado. Considere la función $r(z) = |f(z)| + |g(z)|$ y muestre que

$$\max_{z \in \bar{U}} r(z) = \max_{z \in \partial U} r(z).$$

Ejercicio 5.8. Muestre que no existe una función holomorfa $f : D(0, 1) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z)^2 = z$ para todo $z \in D(0, 1) \setminus \{0\}$. *Ayuda: Argumente por contradicción y utilice el lema de Schwarz apropiadamente.*

Ejercicio 5.9. Muestre que no existe una función holomorfa $f : A_0(1, 2) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z)^2 = z$ para todo $z \in A_0(1, 2)$.

Ejercicio 5.10. Muestre que no existe una función holomorfa $f : \mathbb{H} = \{\operatorname{Im} z > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z)^2 = z^2 + i$ para todo $z \in \mathbb{H}$.

Ejercicio 5.11 (Teorema de Hurwitz). Sea Ω un dominio y sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas tales que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en compactos de Ω .

1. Suponga que cada f_n no tiene ceros en Ω , muestre que $f(z) \equiv 0$ o bien f no tiene ceros en Ω .
2. Suponga ahora que cada f_n es inyectiva. Muestre que o bien f es constante o f es inyectiva.

Ejercicio 5.12. Sea Ω un dominio y $p \in \Omega$. Suponga que $f : \Omega \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa e inyectiva.

1. Muestre que si p es removible para f entonces la extensión $\hat{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dada por el Teorema 4.1 también es inyectiva. *Ayuda: Suponga por contradicción que existe $q \in \Omega \setminus \{p\}$ tal que $a = f(q) = \hat{f}(q) = \hat{f}(p)$ y use el teorema de la aplicación abierta con vecindades de p y q disjuntas en Ω .*
2. Demuestre que p no puede ser una singularidad esencial. *Ayuda: Use el teorema de la aplicación abierta para contradecir el Teorema 4.2.*

Ejercicio 5.13. Para $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto, considere $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Muestre que para cada $p \in \Omega$ tal que $f'(p) \neq 0$ existe $r > 0$ tal que

$$\frac{2\pi i}{f'(p)} = \int_{S(p,r)} \frac{1}{f(w) - f(p)} dw.$$

Ayuda: Escriba $f(w) = f(p) + f'(p)(w - p) + \dots$.

Capítulo 6

Mapas Conformes y algo de geometría

6.1. Geometría en dimensión 2

En esta sección haremos una muy breve introducción a distintos tipos de geometría que se pueden implementar en el plano. Cada uno de estos tipos los reconoceremos en el plano complejo estudiando el comportamiento de las funciones holomorfas en distintos subconjuntos de \mathbb{C} .

6.1.1. Geometría Euclidiana o plana

Es la geometría tradicional que se puede implementar en $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Algunas de las propiedades fundamentales de esta geometría son:

- El concepto de “recta” es el habitual del plano.
- Dados una recta L y un punto p fuera de esa recta existe una única recta paralela \tilde{L} que pasa por p .
- Los triángulos formados verifican que la suma de sus ángulos interiores es exactamente π .
- El largo del vector z es $|z|$ y corresponde al largo del segmento de la “recta” que conecta z con 0 .
- La “curvatura del espacio” es 0 .

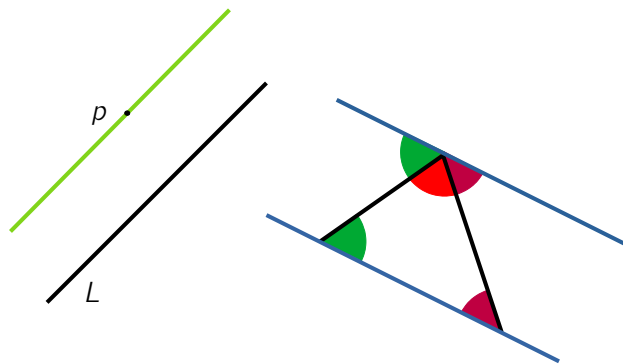


Figura 6.1: En una geometría plana, existe una única recta paralela y los ángulos de un triángulo suman π .

6.1.2. Geometría Hiperbólica

Esta es una geometría que se puede implementar en un disco D (disco de Poincaré) o en un semi-plano (plano de Poincaré). Algunas de las propiedades fundamentales de esta geometría (cuando se ve en el disco $D(0, 1)$) son:

- El concepto de “recta” corresponde a: los segmentos de recta que pasan por 0, y además los arcos de circunferencia que llegan a $S(0, 1)$ de manera perpendicular.
- Dados una recta L y un punto p fuera de esa recta existen al menos dos rectas paralelas que pasan por p (infinitas).
- Los triángulos verifican que la suma de sus ángulos interiores es menor que π .
- El largo del vector $z \in D$ es $\tanh^{-1} |z|$ ó $\frac{1+|z|}{1-|z|}$ y corresponde al largo del segmento de la “recta” que conecta z con 0.
- La “curvatura del espacio” es negativa.

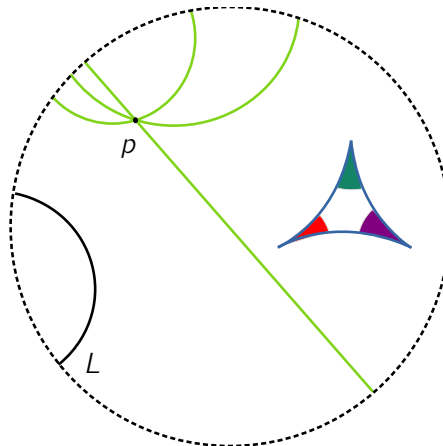


Figura 6.2: En una geometría hiperbólica, existen infinitas rectas paralelas y los ángulos de un triángulo suman $< \pi$.

6.1.3. Geometría Elíptica

Esta es una geometría que se puede implementar en una esfera S . Algunas de las propiedades fundamentales de esta geometría (en la esfera unitaria \mathbb{S}^2) son:

- El concepto de “recta” corresponde a los grandes círculos en la esfera S .
- Dados una recta L y un punto p fuera de esa recta no existen rectas paralelas que pasan por p (todas las rectas se intersectan).
- Los triángulos verifican que la suma de sus ángulos interiores es mayor que π .
- El largo de un vector $w = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ es $\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ y corresponde al largo del segmento de la “recta” que conecta w con el “polo sur” $S = (0, 0, -1)$.
- La “curvatura del espacio” es positiva.

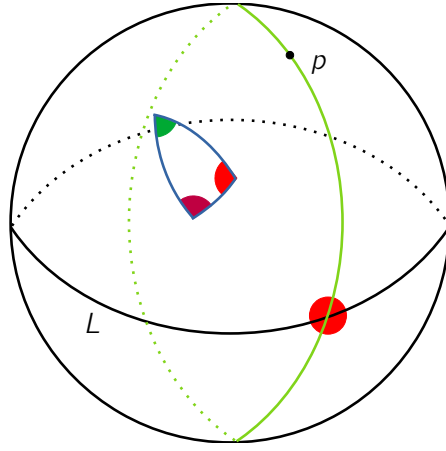


Figura 6.3: En una geometría esférica, no existen rectas paralelas y los ángulos de un triángulo suman $> \pi$.

6.2. Mapas conformes

Definición 6.1. Sean $\Omega, \tilde{\Omega} \subseteq \mathbb{C}$ dos conjuntos abiertos, y sea $f : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ una función holomorfa. Decimos que f es conforme o bi-holomorfa si f es biyectiva y f^{-1} es holomorfa.

Observación 6.1. Si f es inyectiva, entonces se debe cumplir que $f'(p) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Esto pues la ecuación $f(z) - q = 0$ tiene exactamente una solución $p \in \Omega$, dicho de otra forma, $z = p$ es un cero de orden 1 para $f(z) - f(p)$ y por tanto se debe satisfacer (cerca de p) que

$$f(z) - f(p) = \sum_{k \geq 1} a_k (z - p)^k = a_1 (z - p) + (z - p)^2 h(z)$$

con $a_1 = f'(p) \neq 0$ y $h(z) = \sum_{k \geq 0} a_{k+2} (z - p)^k$.

Este comentario implica que f^{-1} es automáticamente diferenciable en todo punto $q = f(p) \in \tilde{\Omega}$ con

$$(f^{-1})'(q) = \frac{1}{f'(p)}.$$

Esto se puede ver al escribir $f(z) = w$, $f(p) = q$ y notar que

$$\begin{aligned} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(q)}{w - q} &= \frac{z - p}{f(z) - f(p)} \\ &= \frac{z - p}{a_1(z - p) + (z - p)^2 h(z)} \\ &= \frac{1}{a_1 + (z - p)h(z)} \\ &\xrightarrow[\substack{w \rightarrow q \\ z \rightarrow p}]{\frac{1}{a_1}}. \end{aligned}$$

Observación 6.2. Si $f : D(p, r) \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa y si $w_1, w_2 \in S(0, 1)$ son dos direcciones, entonces si $f'(p) = r_0 e^{i\theta_0} \neq 0$

1. $|D_{w_1} f(p)| = |D_{w_2} f(p)|$, donde

$$D_w f(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tw) - f(p)}{t} = f'(p)w \Rightarrow |D_w f(p)| = r_0 |w| = r_0.$$

denota la derivada direccional de f en la dirección w . Esto dice que desde el punto de vista geométrico, la función f estira/comprime de la misma forma en todas las direcciones.

Otra manera de ver esto es si consideramos $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como la función real $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donde $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, y notamos que la multiplicación de números complejos $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$ corresponde a la multiplicación matricial

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd \\ bc + ad \end{pmatrix}.$$

Estas consideraciones hacen que la multiplicación $f'(z)w$ se pueda representar como la multiplicación matricial

$$\begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{Re} w \\ \operatorname{Im} w \end{pmatrix}$$

y la matriz no es otra cosa que la matriz Jacobiana de F (gracias a las ecuaciones de Cauchy-Riemann).

La matriz Jacobiana de F tiene la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ y si suponemos que $f'(z) \neq 0$ entonces $\det F = a^2 + b^2 \neq 0$ y por tanto esta matriz se puede escribir en la forma

$$\begin{pmatrix} \sqrt{a^2 + b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2 + b^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{pmatrix}$$

y como $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \in [-1, 1]$ entonces podemos suponer que existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \operatorname{sen} \theta &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \end{aligned}$$

y si denotamos $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ concluimos que

$$f'(z) \simeq \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

donde la multiplicación por primera matriz corresponde a una dilatación por $r > 0$, y la segunda matriz es una matriz de rotación en ángulo θ en torno al origen.

2. Además, si $f'(p) \neq 0$, entonces

$$\angle(w_1, w_2) = \angle(D_{w_1} f(p), D_{w_2} f(p)),$$

pues $D_{w_j} f(p) = r_0 e^{i(\theta_j + \theta_0)}$. Esto dice que la función f preserva los ángulos entre curvas en $D(p, r)$.

3. Las consideraciones anteriores nos dicen que los mapas conformes no alteran la geometría local del conjunto (los ángulos infinitesimales se preservan).

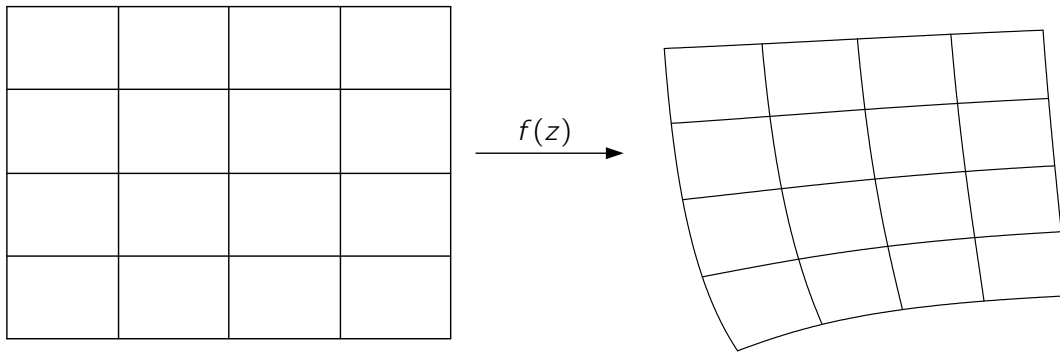


Figura 6.4: Las funciones holomorfas preservan ángulos cuando $f'(p) \neq 0$.

Definición 6.2. Dado $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, definimos el grupo de automorfismos de Ω como

$$\text{Aut}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \Omega : f \text{ es conforme}\}.$$

Proposición 6.1. $(\text{Aut}(\Omega), \circ)$ es un grupo.

Demostración. Ejercicio. ■

Proposición 6.2. Sean $U, V, W \subseteq \mathbb{C}$.

1. Si $f : U \rightarrow V$ y $g : V \rightarrow W$ son conformes, entonces $g \circ f : U \rightarrow W$ es conforme.
2. Si $f, g : U \rightarrow V$ son conformes, entonces existe $h \in \text{Aut}(V)$ tal que $g = h \circ f$.
3. Si existe $f : U \rightarrow V$ conforme, entonces $\text{Aut}(U) \cong \text{Aut}(V)$.

Demostración. Ejercicio. ■

6.2.1. Automorfismos del disco

En virtud de la Proposición 6.2 y si $D(p, r)$ es cualquier disco, entonces $\Psi : D(0, 1) \rightarrow D(p, r)$ definida como

$$\Psi(z) = rz + p$$

es un mapa conforme. Por lo tanto para caracterizar $\text{Aut}(D(p, r))$ basta hacerlo para $p = 0$ y $r = 1$. En lo que sigue $D = D(0, 1)$.

Lema 6.3. $f : D \rightarrow D$ es una función conforme con $f(0) = 0$ si y solo si $f(z) = e^{i\theta}z$ para cierto $\theta \in [0, 2\pi)$.

Demostración. Claramente si $f(z) = e^{i\theta}z$ entonces f es conforme de D a D y $f(0) = 0$, por lo que solo demostraremos la implicación en el otro sentido.

Si $f : D \rightarrow D$ es conforme, entonces $f^{-1} : D \rightarrow D$ también es conforme y satisface $f(0) = 0$ y $f^{-1}(0) = 0$, luego el Teorema 5.15 aplica tanto a f como a f^{-1} para decir que

$$\begin{aligned} |f'(0)| &\leq 1 \\ |(f^{-1})'(0)| &\leq 1, \end{aligned}$$

pero además, tenemos que $f \circ f^{-1}(z) = z$, de donde se deduce que

$$|f'(0)(f^{-1})'(0)| = 1,$$

luego la única posibilidad es que $|f'(0)| = |(f^{-1})'(0)| = 1$, pero gracias al Lema de Schwarz esto implica el resultado. ■

Lema 6.4. Sea $a \in D$ y definamos $\varphi_a : D \rightarrow \mathbb{C}$ como $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Entonces $\varphi_a(D) = D$, φ_a es biyectiva y su inversa es φ_{-a} . Además

$$\varphi'_a(z) = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}.$$

Demostración. Para $a \in D(0, 1)$ entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| < 1 &\Leftrightarrow |z-a| < |1-\bar{a}z| \\ &\Leftrightarrow |z-a|^2 < |1-\bar{a}z|^2 \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + |a|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z) < 1 + |a|^2|z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{a}z) \\ &\Leftrightarrow 0 < (1-|z|^2)(1-|a|^2) \\ &\Leftrightarrow |z|^2 < 1, \end{aligned}$$

y por lo tanto $\varphi_a(D(0, 1)) = D(0, 1)$. Y evidentemente φ_{-a} es su inversa. ■

Observación 6.3. Notar que φ_a está definida en $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{\bar{a}}\}$, donde $\frac{1}{\bar{a}} = \frac{a}{|a|^2}$ es el llamado *punto de inversión* de a respecto a la circunferencia $S(0, 1)$. Ver Figura 6.5.

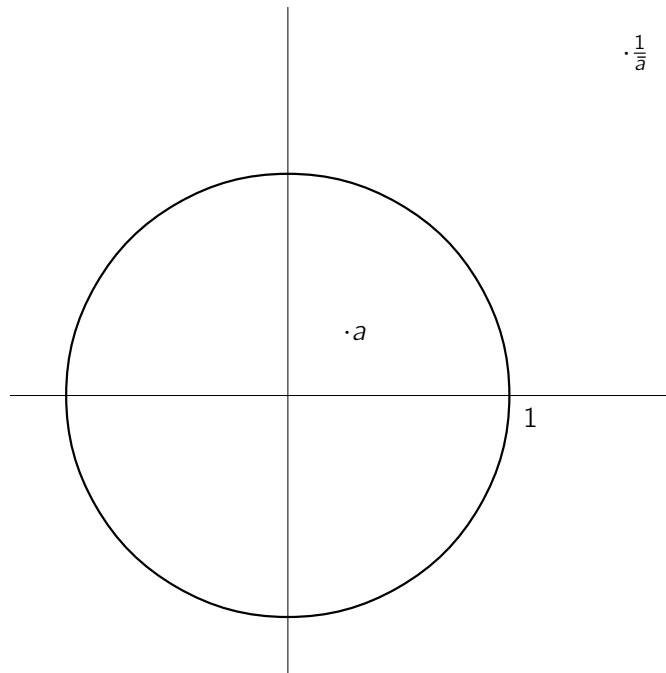


Figura 6.5: Los puntos a y $\frac{1}{\bar{a}}$.

Teorema 6.5.

$$\text{Aut}(D) = \{e^{i\theta}\varphi_a(z) : \theta \in [0, 2\pi), a \in D\}$$

Demostración. La inclusión \supseteq es un corolario del Lema 6.4, por lo que solo demostraremos la otra inclusión.

Si $f \in \text{Aut}(D)$ entonces definamos $b = f(0) \in D$, luego $\varphi_b \circ f \in \text{Aut}(D)$ y satisface

$$\varphi_b \circ f(0) = 0,$$

luego del Lema 6.3 concluimos que

$$\varphi_b \circ f(z) = \alpha z,$$

para cierto $\alpha \in S(0, 1)$. En otras palabras, hemos demostrado que

$$f(z) = \varphi_{-b}(\alpha z) = \alpha \frac{z + \frac{b}{\alpha}}{1 + \frac{\bar{b}}{\alpha}z} = \alpha \varphi_a(z)$$

para $a = -\frac{b}{\alpha}$. ■

Corolario 6.6 (Lema de Schwarz-Pick). Sea $f : D(0, 1) \rightarrow \overline{D(0, 1)}$ una función holomorfa. Si $a \in D(0, 1)$ y $b = f(a)$, entonces

$$|f'(a)| \leq \frac{1 - |b|^2}{1 - |a|^2}.$$

Demostración. Para $c \in D(0, 1)$ la función $\varphi_c(z) = \frac{z - c}{1 - \bar{c}z}$ es holomorfa, biyectiva con inversa $(\varphi_c)^{-1} = \varphi_{-c}$ que también es holomorfa (ver el Lema 6.4). Con esto basta considerar

$$\tilde{f}(z) = \varphi_b \circ f \circ \varphi_{-a}(z)$$

y aplicar el Teorema 5.15, pues $\tilde{f}(0) = \varphi_b \circ f \circ \varphi_{-a}(0) = \varphi_b \circ f(a) = \varphi_b(b) = 0$, y como

$$\tilde{f}'(z) = \varphi'_b(f \circ \varphi_{-a}(z))f'(\varphi_{-a}(z))\varphi'_{-a}(z)$$

se tiene que

$$\tilde{f}'(0) = \varphi'_b(f \circ \varphi_{-a}(0))f'(\varphi_{-a}(0))\varphi'_{-a}(0) = \varphi'_b(b)f'(a)(1 - |a|^2) = f'(a)\frac{1 - |a|^2}{1 - |b|^2}.$$
■

6.2.2. Automorfismos del plano complejo

De acuerdo al teorema de Liouville, no puede existir un mapa conforme $f : \mathbb{C} \rightarrow D(0, 1)$, por lo que $\text{Aut}(\mathbb{C}) \not\cong \text{Aut}(D(0, 1))$ (de hecho, no puede existir ningún mapa conforme entre \mathbb{C} y un conjunto acotado). Veamos como son los automorfismos de \mathbb{C} .

Teorema 6.7.

$$\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{az + b : a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}\}$$

Demostración. Es claro que si $f(z) = az + b$ para cierto $a \neq 0$ entonces $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$, por lo que solo demostraremos la otra inclusión.

Dada $f \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ una función conforme, veamos primero que $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$, es decir f tiene un polo en infinito. En efecto, sea $M > 1$ y consideremos

$$K = \bar{D}(0, M)$$

que es compacto en \mathbb{C} . Como f es conforme, la función f^{-1} es continua y por lo tanto $f^{-1}(K)$ es un conjunto compacto en \mathbb{C} , por lo que debe existir $R > 0$ tal que $f^{-1}(K) \subseteq D(0, R)$. En otras palabras, hemos demostrado que si $w \in f^{-1}(K)$ entonces $|w| < R$, afirmación que es equivalente a decir que si $|w| \geq R$ entonces $w \notin f^{-1}(K)$, pero $w \notin f^{-1}(K) \Leftrightarrow f(w) \notin K \Leftrightarrow |f(w)| > M$.

Veamos ahora que $|f(z)|$ tiene crecimiento a lo mas lineal en infinito, es decir, existen constantes $R_1 > 0$ y $C > 0$ tales que si $|z| > R_1$, entonces $|f(z)| \leq C|z|$. Para ello consideremos la función

$$g(z) = \frac{1}{f(\frac{1}{z})}.$$

Dado que $|f(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \infty$ tenemos que g está bien definida y es holomorfa en alguna vecindad del 0 de la forma $D(0, r) \setminus \{0\}$. Ahora bien, como $|f(z)| \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \infty$, debe existir $r_1 > 0$ tal que si $|w| > r_1$, entonces $|f(w)| > 1$. En consecuencia, para $z \in D(0, \frac{1}{r_1}) \setminus \{0\}$ se tiene que

$$|g(z)| \leq 1,$$

en otras palabras, $z = 0$ es una singularidad removible para g con $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = 0$. Así la función

$$\hat{g}(z) = \begin{cases} g(z) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

es holomorfa en $D(0, \frac{1}{r_1})$. Además, como f es inyectiva, se debe tener que \hat{g} también lo es y en particular $\hat{g}'(0) \neq 0$, de donde se obtiene que

$$0 \neq \hat{g}'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(z)}{z},$$

luego debe existir $\delta > 0$ tal que si $|z| < \delta$, entonces

$$\left| \frac{g(z)}{z} \right| \geq \frac{1}{2} |\hat{g}'(0)|,$$

o en términos de f , tenemos que

$$\left| \frac{1}{f(\frac{1}{z})z} \right| \geq \frac{1}{2} |\hat{g}'(0)| \Leftrightarrow \left| f\left(\frac{1}{z}\right) \right| \leq \frac{2}{|\hat{g}'(0)|} \cdot \frac{1}{|z|} \Leftrightarrow |f(w)| \leq \frac{2}{|\hat{g}'(0)|} \cdot |w|$$

cuando $|w| > \delta^{-1}$. Esto demuestra nuestra afirmación para $R_1 = \frac{1}{\delta}$ y $C = \frac{2}{|\hat{g}'(0)|}$.

Dicho esto, podemos concluir gracias al Teorema 3.9 que $f(z) = az + b$, y como f es inyectiva, debe ocurrir que $a \neq 0$. ■

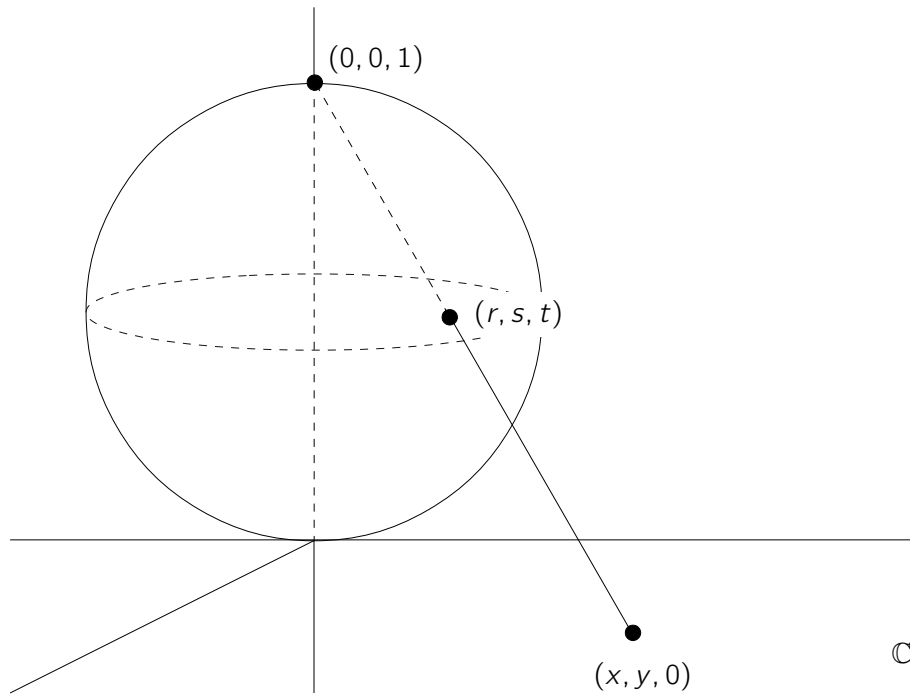


Figura 6.6: Esfera de Riemann.

6.2.3. Automorfismos de la esfera de Riemann

Para hablar de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es conveniente introducir el concepto de la *esfera de Riemann*. Esta es una visualización de la compactificación de Alexandroff del plano complejo donde se identifica el punto “ ∞ ” con el punto $(0, 0, 1)$ de la esfera, en tanto que cualquier otro punto del plano complejo se puede identificar con un punto en dicha esfera mediante la proyección estereográfica (ver Figura 6.6).

En vista de la Figura 6.6 y algunas consideraciones geométricas (que se dejan como ejercicio al lector) permiten calcular que

$$x = \frac{r}{1 - t},$$

$$y = \frac{s}{1 - t},$$

de donde podemos deducir que

$$r = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1},$$

$$s = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1},$$

$$t = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}.$$

De estas fórmulas no es difícil demostrar la siguiente

Proposición 6.8. Sea S una circunferencia en la esfera de Riemann, esto es, la intersección de la esfera con un plano de la forma $Ar + Bs + Ct = D$, entonces la proyección estereográfica de S es una circunferencia o bien un recta.

La afirmación recíproca también es cierta.

Demostración. Notar que gracias a la proyección estereográfica se cumple que

$$\begin{aligned} Ar + Bs + Ct = D &\Leftrightarrow A \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} + B \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} + C \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1} = D \\ &\Leftrightarrow Ax + By + C(x^2 + y^2) = D(x^2 + y^2 + 1) \\ &\Leftrightarrow (C - D)(x^2 + y^2) + Ax + By = D. \end{aligned}$$

Si $C = D$ entonces en el plano tenemos la ecuación de una recta, mientras que en la esfera se cumple que

$$Ar + Bs + C(t - 1) = 0$$

que es un plano que corta a la esfera en el punto $(0, 0, 1)$.

Si $C \neq D$ entonces $(C - D)(x^2 + y^2) + Ax + By = D$ se puede escribir como

$$\left(x + \frac{A}{2(C - D)}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2(C - D)}\right)^2 = \frac{4D(C - D) + A^2 + B^2}{4(C - D)^2},$$

pero $4D(C - D) + A^2 + B^2 > 0$ si y solo si la distancia del plano $Ar + Bs + Ct = D$ al punto $(0, 0, \frac{1}{2})$, que está dada por $\frac{|D - \frac{C}{2}|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, es menor a $\frac{1}{2}$. ■

En vista de lo anterior, es interesante estudiar lo que ocurre con la esfera de Riemann, que no es conforme ni a $D(0, 1)$ ni a \mathbb{C} (pues es un compacto).

Definición 6.3 (Transformación de Möbius/Transformación lineal fraccionaria). Dados $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tales que $ad - bc \neq 0$ definimos la aplicación $\psi : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ como

$$\psi(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Observación 6.4. Es pertinente detenernos en mencionar que estamos pensando que ψ está definida en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con valores en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tal como lo hicimos en la Apartado 4.4. En particular, este supuesto equivale a decir que

$$c = 0 \Rightarrow f(\infty) = \infty$$

o bien

$$c \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, \\ f(\infty) = \frac{a}{c}. \end{cases}$$

Lema 6.9. El conjunto

$$\text{Mob}(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) = \left\{ \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad \neq bc \right\}$$

es un subgrupo de $\text{Aut}(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$.

Demostración. Basta notar que si $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ entonces $f^{-1}(w) = \frac{b-wd}{cw-a} \in \text{Mob}(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$. El resto de los detalles se dejan como ejercicio al lector. ■

Teorema 6.10.

$$\text{Aut}(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \cong \text{Mob}(\mathbb{C} \cup \{\infty\}).$$

Demostración. Sea $f \in \text{Aut}(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$, luego $f(z_0) = \infty$ para cierto $z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, además existe $\psi \in \text{Mob}(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$ tal que $\psi(\infty) = z_0$ pues si $z_0 = \infty$ basta tomar $\psi(z) = z$ y si $z_0 \in \mathbb{C}$ se puede considerar $\psi(z) = \frac{z_0 z + 1}{z}$. Con esto la función $g = f \circ \psi$ manda ∞ en ∞ , luego $g|_{\mathbb{C}} \in \text{Aut}(\mathbb{C})$, es decir

$$g(z) = az + b \in \text{Mob}(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$$

para ciertos $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Pero de acá deducimos que

$$f(z) = (az + b) \circ \psi^{-1}(z) \in \text{Mob}(\mathbb{C} \cup \{\infty\}).$$

Observación 6.5. Vale la pena notar que $\text{Aut}(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$ contiene (como sub-grupos) a $\text{Aut}(D(0, 1))$ y $\text{Aut}(\mathbb{C})$.

Proposición 6.11. Si denotamos por $\mathcal{C} = \{\text{circunferencias en } \mathbb{C}\} \cup \{\text{rectas en } \mathbb{C}\}$, y si $f \in \text{Mob}(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$, entonces

$$f(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{C}.$$

Demostración. Notar que si $f \in \text{Mob}(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$ entonces f se puede escribir como una composición de funciones de la forma

- $f(z) = az$, que corresponde a *dilataciones y rotaciones*,
- $f(z) = z + b$, que son *traslaciones*
- $f(z) = \frac{1}{z}$, la llamada *inversión*.

y por lo tanto basta demostrar el resultado para cada una de estas funciones.

En primer lugar, notar que si $f(z) = az$, entonces lo que hace está función es rotar y estirar/contraer respecto a 0 cada punto del plano, por lo que es evidente que si $C \in \mathcal{C}$, entonces $f(C) \in \mathcal{C}$. De la misma forma, si $f(z) = z + b$, entonces lo único que pasa es que se trasladan los puntos, por lo que $f(C) \in \mathcal{C}$.

Ahora, si $f(z) = \frac{1}{z}$ y si $C = \{z = (x, y) \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}$, entonces

$$f(C) = \left\{ w = (u, v) \in \mathbb{C} : \frac{1}{w} \in C \right\}.$$

Pero si $z = \frac{1}{w}$ y $z = (x, y)$, entonces $x = \text{Re}(\frac{1}{w}) = \frac{u}{u^2+v^2}$ y $y = \text{Im}(\frac{1}{w}) = -\frac{v}{u^2+v^2}$, de donde obtenemos que

$$\frac{u}{u^2+v^2} + \frac{-v}{u^2+v^2} + \alpha \frac{u}{u^2+v^2} + \beta \frac{-v}{u^2+v^2} + \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma(u^2+v^2) + \alpha u - \beta v + 1 = 0,$$

que es una ecuación de un círculo $\gamma \neq 0$ o de una recta $\gamma = 0$. ■

Lema 6.12. Sea $f \in \text{Mob}(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$ distinta de la identidad. Entonces f tiene a lo mas dos puntos fijos en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Demostración. Basta notar que cuando $c \neq 0$, la ecuación

$$\frac{az + b}{cz + d} = z$$

es una ecuación cuadrática en z , por lo que tiene a lo mas dos soluciones distintas.

Si $c = 0$, entonces es una ecuación lineal, que tiene a ∞ como solución, y si $a \neq d$, también tiene a $z = \frac{b}{d-a}$ como otra solución. ■

Corolario 6.13. *Dados $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ distintos entre si entonces existe una única transformación de Möbius L que satisfice*

$$L(z_k) = w_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Demostración. Veamos primero la unicidad. Si hubiesen 2 transformaciones L_1, L_2 , entonces $L = L_1^{-1} \circ L_2 \in \text{Mob}(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$ satisfice $L(z_k) = z_k$ para $k = 1, 2, 3$, por lo que L tendría 3 puntos fijos distintos, así $L = id$.

Para la existencia, definamos $\Lambda \in \text{Mob}(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$ como

$$\Lambda_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1},$$

que satisfice $\Lambda_1(z_1) = 0$, $\Lambda_1(z_2) = \infty$ y $\Lambda_1(z_3) = 1$. De manera similar, definimos

$$\Lambda_2(w) = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}$$

que satisfice la propiedad análoga. Finalmente la función $L = \Lambda_2^{-1} \circ \Lambda_1$ satisfice lo requerido. ■

6.2.4. Otras transformaciones conformes

Las transformaciones de Möbius, así como otras funciones biholomorfas nos permiten encontrar los mapas conformes entre $D(0, 1)$ y algunas regiones simplemente conexas, caracterizando así de manera explícita el llamado teorema de Riemann. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 6.1 (Transformación de Cayley). Sea $\Psi(z) = \frac{z - i}{z + i}$. Como $\Psi \in \text{Mob}(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$, basta ver que le hace a rectas y circunferencias para detectar su imagen.

En este caso, notemos que $\Psi(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = S(0, 1)$, pues $\Psi(-1) = i$, $\Psi(0) = -1$ y $\Psi(1) = -i$. Además como $\Psi(i) = 0$ deducimos que $\Psi : \mathbb{H} \rightarrow D(0, 1)$, donde $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$.

Gracias a la Proposición 6.2 podemos concluir que \mathbb{H} y $D(0, 1)$ tienen el mismo grupo de automorfismos.

Ejemplo 6.2. Consideremos la función $F(z) = z^2$. Esta función es holomorfa en \mathbb{C} , pero no es biyectiva en \mathbb{C} . Sin embargo, la podemos restringir a $C_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0, \text{Im } z > 0\}$ y obtener una función biyectiva a su imagen. Esto pues en C_+ se puede definir $F(z) = |z|^2 e^{2i \arg z}$ con $\arg z \in (0, \frac{\pi}{2})$ y por lo tanto $F(z)$ tiene inversa holomorfa $F^{-1}(w) = \sqrt{|w|} e^{i \frac{1}{2} \arg w}$ con $\arg w \in (0, \pi)$.

No es difícil ver que $F(C_+) = \mathbb{H}$. En efecto, notemos que si $z = re^{i\theta}$ para $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, entonces $F(z) = r^2 e^{2i\theta} = r^2 e^{i\alpha}$ para $\alpha \in (0, \pi)$.

Ejemplo 6.3. La función $G(z) = \frac{1+z}{1-z}$ es una transformación de Möbius, por lo que si la restringimos a un subconjunto de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ será conforme a la respectiva imagen.

Si consideramos $D^+ = D(0, 1) \cap \mathbb{H}$, entonces no es difícil de verificar que $G(D^+) = C_+$. Para ello basta ver que $G(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $G(S(0, 1)) = i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

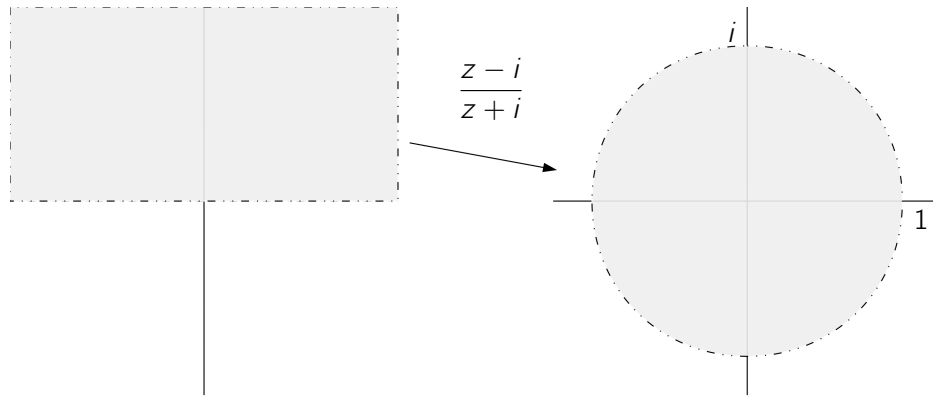


Figura 6.7: El semi-plano superior \mathbb{H} es conforme a $D(0,1)$.

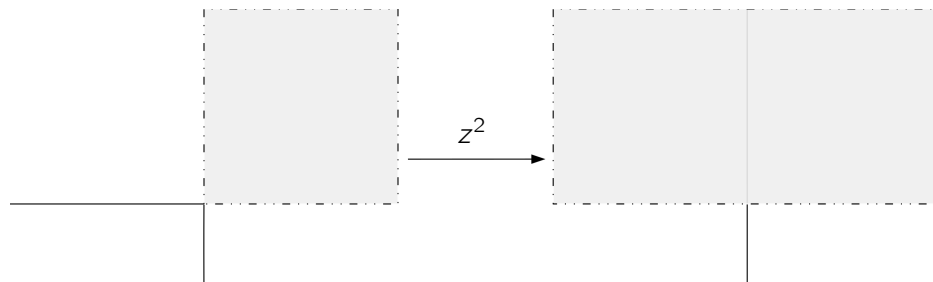


Figura 6.8: El cuadrante positivo C_+ es conforme a \mathbb{H} .

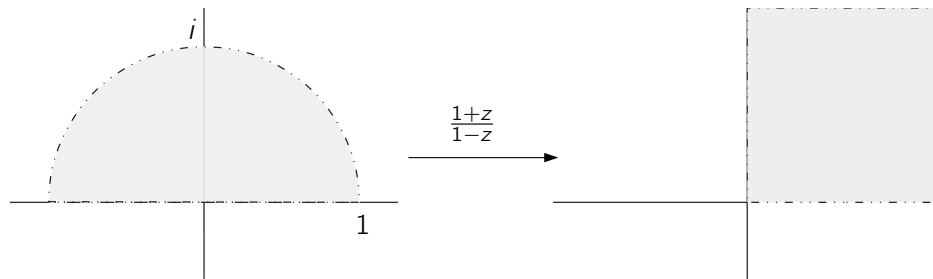


Figura 6.9: El semi-círculo D_+ es conforme a C_+ .

Ejemplo 6.4. Sin juntamos los Ejemplos 6.2 y 6.3 obtenemos que la función

$$H(z) = \left(\frac{1+z^2}{1-z^2} \right)^2$$

es un mapa conforme entre el cuarto de disco $D \cap C_+$ y \mathbb{H} .

Ejemplo 6.5. Un ejemplo importante es el que nos entrega la función exponencial e^z . Como hemos visto, esta función no es invertible, debido a su periodicidad, puesto que $e^{z+2\pi ik} = e^z$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Sin embargo, si la restringimos a un dominio donde no exista tal periodicidad podemos definir su inversa $\log z$.

Por ejemplo, si definimos $\text{Log } z = \ln |z| + i \text{Arg } z$, donde $\text{Arg } z \in (-\pi, \pi)$ denota el argumento principal de z , entonces

$$\text{Log}(D^+) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z < 0, 0 < \text{Im } z < \pi\}.$$

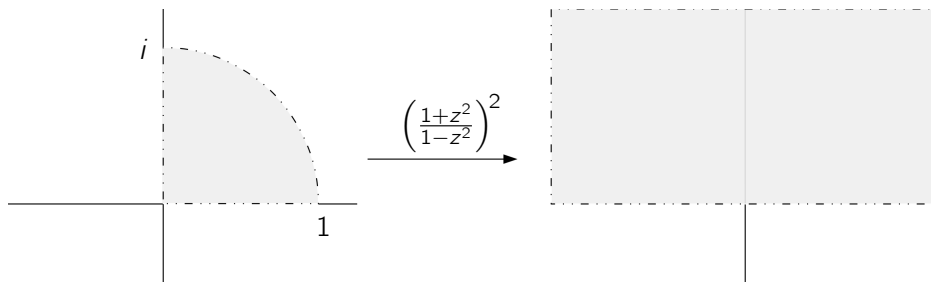


Figura 6.10: El cuarto de círculo $D \cap C_+$ es conforme a \mathbb{H} .

En efecto, si para $0 < r < 1$ y $\theta \in (0, \pi)$ consideramos $z = re^{i\theta} \in D^+$, entonces $\text{Log } z = \ln r + i\theta$ y por tanto $\text{Re}(\text{Log } z) = \ln r < 0$ e $\text{Im}(\text{Log } z) = \theta \in (0, \pi)$.

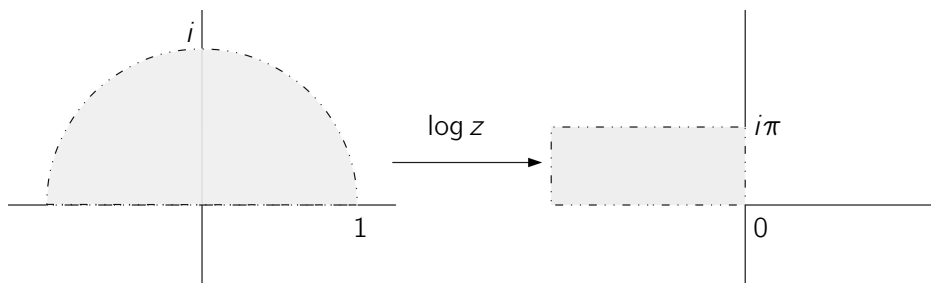


Figura 6.11: El semi-círculo D^+ es conforme a la semi-banda infinita $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z < 0, 0 < \text{Im } z < \pi\}$.

Ejemplo 6.6. La función e^z también transforma la banda $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im } z < \pi i\}$ en \mathbb{H} . Para ver esto notamos que la parte de la frontera de S que corresponde al eje real, es transformado en el eje real ($e^{\mathbb{R}} = \mathbb{R}_+$). La parte de la frontera S que corresponde a la línea $\mathbb{R} + i\pi$ es transformada en $e^{\mathbb{R}} e^{\pi i} = \mathbb{R}_-$.

Ejemplo 6.7. Tal como en el caso de la exponencial/logaritmo, la función $\text{sen } z$ no es invertible en \mathbb{C} , sin embargo si la restringimos al conjunto $-\frac{\pi}{2} < \text{Re}(z) < \frac{\pi}{2}$ la función queda inyectiva, de donde obtenemos por ejemplo que

$$\text{sen}\left(\left\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \text{Re}(z) < \frac{\pi}{2}, \text{Im } z > 0\right\}\right) = \mathbb{H}.$$

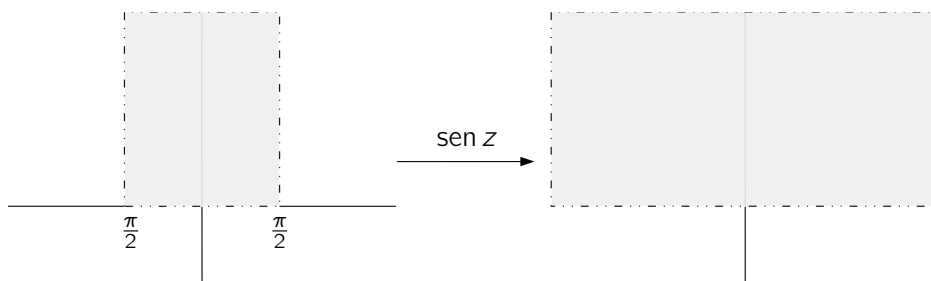


Figura 6.12: La semi-banda infinita $\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \text{Re}(z) < \frac{\pi}{2}, \text{Im } z > 0\}$ es conforme a \mathbb{H} .

6.3. El Teorema de Riemann

Concluimos esta introducción a los mapas conformes con el famoso teorema de Riemann:

Teorema 6.14 (Riemann). Sean $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo, entonces existe una función $f : \Omega \rightarrow D(0, 1)$ biholomorfa. En particular,

$$\text{Aut}(\Omega) \cong \text{Aut}(D(0, 1)).$$

El lector interesado, puede buscar la demostración de este teorema en [1, Chapter 6] o [4, Section 6.7]. Una versión mas general de este resultado es el teorema de Uniformización de Riemann:

Teorema 6.15 (Riemann). Sea M una superficie de Riemann simplemente conexa, entonces Ω es biholomorfo a exactamente uno de los siguientes

- \mathbb{C} ,
- $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ó
- $D(0, 1)$.

6.4. Ejercicios

Ejercicio 6.1. Para $a \in D(0, 1)$ considere la aplicación $\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$. Muestre que $\varphi_a : \bar{D}(0, 1) \rightarrow \bar{D}(0, 1)$ es una biyección tal que $\varphi_a(S(0, 1)) = S(0, 1)$.

Ejercicio 6.2. Sea $f : D(0, r) \rightarrow \overline{D(0, R)}$ una función holomorfa. Muestre que para cada $p \in D(0, r)$ se cumple que

$$|f'(p)| \leq \frac{r}{R} \cdot \frac{R^2 - |f(p)|^2}{r^2 - |p|^2}.$$

Ejercicio 6.3. Sea $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una función holomorfa. Demuestre que para todo $a \in \mathbb{H}$ se cumple que

$$|f'(a)| \leq \frac{\text{Im } f(a)}{\text{Im } a}.$$

Ejercicio 6.4. Sea $f : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $|f(z)| \leq 1$ tal que $f(\frac{1}{2}) = 0$. Muestre que $|f(\frac{3}{4})| \leq \frac{2}{5}$.

Ejercicio 6.5. Considere $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ una función holomorfa que tiene dos puntos fijos distintos. Muestre que f debe ser la identidad.

Ejercicio 6.6. Sea $f : D(0, 1) \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ una función holomorfa con $f(0) = i$. Muestre que

1. $\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$.
2. $|f'(0)| \leq 2$.

Ejercicio 6.7. 1. Señale una transformación conforme de $\mathbb{H} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ a $D(0, 1)$.

2. Sea H un semi-plano abierto en \mathbb{C} , es decir

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{C} : ax + by + c > 0\}$$

para ciertos $a, b, c \in \mathbb{R}$ con a y b no simultáneamente iguales 0, y sea D cualquier disco abierto ($D = D(p, R)$ para cierto $p \in \mathbb{C}$ y $R > 0$). Señale un mapa conforme de H a D .

3. Muestre que $\text{Aut}(\mathbb{H}) \cong \left\{ \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ y } ad - bc > 0 \right\}$.

Ejercicio 6.8. Considere $f(z) = \log z$ la rama principal del logaritmo. Calcule $f(D_+)$, donde $D_+ = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \text{Im } z > 0\}$.

Ejercicio 6.9. Describa $\text{Aut}(D(0, 1) \setminus \{0\})$.

Ejercicio 6.10. Sea $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y sea $f : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ un mapa conforme.

1. Muestre que si $z = 0$ es una singularidad removible para f , entonces $f(z) = az$ para algún $a \in \mathbb{C}^\times$.
Ayuda: Recuerde el Ejercicio 5.12.
2. ¿Qué sucede si $z = 0$ es un polo para f ? *Ayuda: Considere $g(z) = \frac{1}{f(z)}$.*
3. ¿Puede ser $z = 0$ una singularidad esencial para f ? *Ayuda: Recuerde el Ejercicio 5.12.*
4. Concluya con una descripción de $\text{Aut}(\mathbb{C}^\times)$.
5. Muestre que $\text{Aut}(\mathbb{C}^\times) \cong \text{Aut}(\mathbb{C} \setminus \{p\})$ para cualquier $p \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 6.11. Sea $\mathbb{C}^{\times\times} = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Y sea $f : \mathbb{C}^{\times\times} \rightarrow \mathbb{C}^{\times\times}$ un mapa conforme.

1. Muestre que ni $z = 0$ ni $z = 1$ pueden ser singularidades esenciales.
2. Muestre que $z = 0$ y $z = 1$ no pueden ser simultáneamente polos para f . *Ayuda: Considere la función $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ y use el Ejercicio 5.12.*
3. Describa f si $z = 1$ es removible.
4. Describa $\text{Aut}(\mathbb{C}^{\times\times})$.
5. Muestre que si $p \neq q$ entonces $\text{Aut}(\mathbb{C}^{\times\times}) \cong \text{Aut}(\mathbb{C} \setminus \{p, q\})$.

Ejercicio 6.12. Considere el conjunto $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z - \frac{2}{5}| > \frac{2}{5}\}$ y el anillo $A_0(\frac{1}{2}, 1) = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 1\}$. Muestre $\text{Aut}(\Omega) \cong \text{Aut}(A_0(\frac{1}{2}, 1))$. *Ayuda: Considere una función del tipo $\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ para $a \in \mathbb{C}$ apropiado.*

Ejercicio 6.13. 1. Verifique que la función $\psi(z) = \frac{z - 1}{z + 1}$ es conforme entre $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus [-1, 1]$ y $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

2. Concluya que existe una función holomorfa $f : \mathbb{C} \setminus [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z)^2 = z^2 - 1$.

Ejercicio 6.14 (Transformación de Joukowski). Considere la función $J(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.

1. Muestre que si $r > 1$ entonces $J(S(0, r)) = E_r$, donde E_r es la elipse dada por la ecuación

$$\frac{u^2}{\left(\frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\right)^2} = 1$$

6.4. EJERCICIOS

2. Muestre que $J(S(0, 1)) = [-1, 1]$.
3. Demuestre que si $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ entonces $\text{Aut}(\Omega) \cong \text{Aut}(\mathbb{C} \setminus [-1, 1])$. *Ayuda: Use el Ejercicio 6.13 para definir una inversa holomorfa de J .*

Capítulo 7

Funciones armónicas

7.1. Aspectos básicos

Definición 7.1. Dado $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 , decimos que u es armónica si se satisface

$$\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Anteriormente vimos que si $f = u + iv$ es una función holomorfa, entonces $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$ son funciones armónicas, sin embargo no es necesariamente cierto que si u es armónica entonces ha de ser la parte real de una función holomorfa. Esto se puede ver considerando la función

$$u(z) = \log |z|,$$

que se puede demostrar (Ejercicio 7.1) es armónica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ pero no es la parte real de ninguna función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (Ejercicio 7.2). Sin embargo, tenemos la siguiente

Proposición 7.1. Sea u una función armónica en Ω , entonces

- $\frac{\partial u}{\partial x}$ es la parte real de una función holomorfa en Ω .
- Si Ω es simplemente conexo, entonces u es la parte real de una función holomorfa en Ω .

Demostración. Para la primera parte, consideremos $f = u_x - iu_y$. Entonces, como $u \in C^2(\Omega)$ se tiene que $u_{xy} = u_{yx}$ y como $u_{xx} = -u_{yy}$ se tiene que

$$f_x = u_{xx} - iu_{yx} = -u_{yy} - iu_{xy} = -i(u_{xy} - iu_{yy}) = -if_y,$$

es decir, f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Para la segunda parte, como ya sabemos que $f = u_x - iu_y$ es holomorfa, entonces ha de existir F holomorfa tal que $F' = f$, pero si $F = U + iV$ entonces se debe cumplir que

$$F' = F_x = U_x + iV_x = f = u_x - iu_y,$$

por lo tanto $U_x = u_x$ y de manera similar $U_y = u_y$, por lo tanto debe existir una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $U = u + c$ y en consecuencia u es la parte real de la función holomorfa $F - c$. ■

Definición 7.2. Si u es armónica en Ω , decimos que $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es un conjugado armónico de u si la función $f = u + iv$ es holomorfa.

Corolario 7.2. Si Ω es simplemente conexo y si u es armónica en Ω , entonces $u \in C^\infty(\Omega)$.

Demostración. De la proposición anterior tenemos que $u = \operatorname{Re} F$, para F holomorfa. Pero ya sabemos que F es de clase C^∞ (ver Teorema 3.1). ■

Los resultados anteriores nos permiten llevar propiedades de las funciones holomorfas a las funciones armónicas. Los siguientes teoremas son quizás los mas importantes de la teoría:

Teorema 7.3 (Propiedad de la media). Supongamos que u es armónica en $D(p, R)$, entonces

$$u(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p + re^{it}) dt$$

para todo $r < R$.

Demostración. Como $D(p, R)$ es simplemente conexo tenemos que $u = \operatorname{Re} F$ para cierta función holomorfa, y dado que $F = u + iv$ es holomorfa, satisface la fórmula de Cauchy

$$F(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p,r)} \frac{f(w)}{w-p} dw.$$

Luego si parametrizamos $S(p, r)$ por $w = p + re^{it}$ tenemos que

$$u(p) + iv(p) = F(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + re^{it}) dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p + re^{it}) dw + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(p + re^{it}) dw.$$

■

Teorema 7.4 (Principio del máximo). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un dominio y u una función armónica en Ω no constante. Entonces u no alcanza ni su máximo ni su mínimo en Ω .

Demostración. Sea $p \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$ tal que $D(p, \varepsilon) \subseteq \Omega$. Como u es armónica en $D(p, \varepsilon)$ que es simplemente conexo, ha de existir $F = u + iv$ holomorfa no constante tal que $u = \operatorname{Re} F$.

Gracias al teorema de la función abierta (Proposición 5.7) sabemos que $F(D(p, \varepsilon))$ es un abierto que contiene a $F(p) = u(p) + iv(p)$, y en particular deben existir $w_1, w_2 \in D(p, \varepsilon)$ tales que $u(w_1) < u(p) < u(w_2)$, es decir $u(p)$ no puede ser ni máximo ni mínimo. ■

Corolario 7.5. Si $u \in C(\bar{\Omega})$ es armónica, entonces

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u,$$

y

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Demostración. Si $p \in \Omega$ es tal que $u(p)$ es máximo (resp. mínimo) entonces u debe ser constante, en cuyo caso el resultado es cierto, en tanto que si $p \in \partial\Omega$ es tal que $u(p)$ es máximo (resp. mínimo) entonces no hay nada que demostrar. ■

Corolario 7.6. Sean u_1, u_2 funciones armónicas en el dominio Ω , tales que $u_1, u_2 \in C(\bar{\Omega})$. Si $u_1 = u_2$ en $\partial\Omega$ entonces $u_1 = u_2$ en $\bar{\Omega}$.

Demostración. Notar que $u = u_1 - u_2$ es armónica y $u = 0$ en $\partial\Omega$. Pero del corolario anterior, u alcanza su máximo y mínimo en $\partial\Omega$, por lo tanto $0 \leq u \leq 0$, lo que demuestra el resultado. ■

7.2. La fórmula de Poisson

En la sección anterior vimos la propiedad de la media que en términos generales nos dice que el valor de una función armónica u en p se puede determinar si conocemos los valores de u en $S(p, r)$, y mas aún, gracias al principio del máximo, una función armónica en Ω está *unicamente* determinada por sus valores en $\partial\Omega$. El propósito de esta sección es poder determinar una función armónica u en Ω para la cual solo conocemos sus valores en $\partial\Omega$.

Teorema 7.7 (Fórmula integral de Poisson). *Sea u una función armónica en Ω con $\Omega \supseteq \bar{D}(0, 1)$. Entonces para cada $z \in D(0, 1)$ se tiene que*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2} dt,$$

o en notación polar para $z = re^{i\theta}$

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2} dt.$$

Observación 7.1. La cantidad

$$\mathcal{P}(t, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2}$$

o bien

$$\mathcal{P}(t, r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2}$$

se denota *Kernel de Poisson* para el disco unitario.

Antes de demostrar este teorema, recordemos el Lema 6.4 que nos dice que para $a \in D(0, 1)$ la función $\varphi_a : D \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

es un automorfismo del disco cuya inversa es φ_{-a} y $\varphi_a(a) = 0$, además un ejercicio sencillo (Ejercicio 7.3) nos dice que si u es armónica y F es holomorfa entonces $u \circ F$ es armónica.

Demostración. Para $z \in D(0, 1)$ consideremos la función armónica $v(w) = u \circ \varphi_{-z}(w)$ y usemos la propiedad de la media para esta función, es decir

$$u(z) = u(\varphi_{-z}(0)) = v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varphi_{-z}(e^{it})) dt.$$

Ahora bien, esta última integral es la integral parametrizada de la integral de línea

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S(0,1)} \frac{u(\varphi_{-z}(w))}{w} dw,$$

pero si consideramos el cambio de variable $w = \varphi_z(\zeta)$ obtenemos que

$$\int_{S(0,1)} \frac{u(\varphi_{-z}(w))}{w} dw = \int_{S(0,1)} \frac{u(\varphi_{-z}(\varphi_z(\zeta)))}{\varphi_z(\zeta)} \varphi'_z(\zeta) d\zeta,$$

pues $\varphi_z(\zeta)$ es un difeomorfismo C^1 en $\bar{D}(0, 1)$, donde además $\varphi_z(S(0, 1)) = S(0, 1)$ (Ejercicio 6.1). Notando que si $|\zeta| = 1$ se obtiene que

$$\frac{\varphi'_z(\zeta)}{\varphi_z(\zeta)} = \frac{\frac{1 - |z|^2}{(1 - \bar{z}\zeta)^2}}{\frac{\zeta - z}{1 - \bar{z}\zeta}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 - |z|^2}{1 - \bar{z}\zeta} \frac{1}{\zeta - z} \\
 &= \frac{1 - |z|^2}{\zeta(\bar{\zeta} - \bar{z})} \frac{1}{\zeta - z} \\
 &= \frac{1 - |z|^2}{\zeta(\bar{\zeta} - \bar{z})} \frac{1}{\zeta - z} \\
 &= \frac{1 - |z|^2}{\zeta |\zeta - z|^2},
 \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
 u(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S(0,1)} \frac{u(\zeta)}{\varphi_z(\zeta)} \varphi'_z(\zeta) d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S(0,1)} u(\zeta) \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \frac{d\zeta}{\zeta} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} dt.
 \end{aligned}$$

■

Como vimos en la Proposición 3.3, dada cualquier función continua $g : S(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ se puede encontrar una función holomorfa $G : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(0,1)} \frac{g(w)}{w - z} dz,$$

sin embargo no necesariamente se obtiene que $G(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} g(z_0)$ cuando $z_0 \in S(0, 1)$. Este fenómeno no ocurre para funciones armónicas, de hecho lo que ocurre es que dada $g : S(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, entonces la fórmula de Poisson

$$G(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2} dt$$

define una función armónica que además satisface $G(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} g(z_0)$ para todo $z_0 \in S(0, 1)$, y este es el resultado del siguiente

Teorema 7.8 (Solución al problema de Dirichlet en el disco unitario). *Sea $g : S(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y definamos $u : \bar{D}(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$*

$$u(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2} dt & \text{si } z \in D(0, 1), \\ g(z) & \text{si } z \in S(0, 1). \end{cases}$$

Entonces u es continua en $\bar{D}(0, 1)$ y armónica en $D(0, 1)$.

Demostración. Veamos primero que u es armónica en $D(0, 1)$. Para ello, notemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2} &= \frac{1 - |z|^2 + |z - e^{it}|^2}{(z - e^{it})(\bar{z} - e^{-it})} - 1 \\
 &= \frac{2 - ze^{-it} - \bar{z}e^{it}}{(z - e^{it})(\bar{z} - e^{-it})} - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{it}}{e^{it} - z} + \frac{e^{-it}}{e^{-it} - \bar{z}} - 1 \\ &= \frac{e^{it}}{e^{it} - z} + \frac{\overline{e^{it}}}{\overline{e^{it} - z}} - 1 \end{aligned}$$

luego

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) \frac{e^{it}}{e^{it} - z} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{g(e^{it})} \frac{e^{it}}{e^{it} - z} dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) dt.$$

Notar que el último término es constante y por lo tanto armónico. Por otra parte, si $|z| < 1$, gracias al teorema de diferenciación bajo el signo integral (Corolario A.7) tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\int_0^{2\pi} g(e^{it}) \frac{e^{it}}{e^{it} - z} dt \right) = \int_0^{2\pi} g(e^{it}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{e^{it}}{e^{it} - z} \right) dt = 0,$$

pues la función $z \mapsto \frac{e^{it}}{e^{it} - z}$ es holomorfa en $D(0, 1)$. Luego

$$\Delta \left(\int_0^{2\pi} g(e^{it}) \frac{e^{it}}{e^{it} - z} dt \right) = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\int_0^{2\pi} g(e^{it}) \frac{e^{it}}{e^{it} - z} dt \right) = 0.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \Delta \left(\overline{\int_0^{2\pi} g(e^{it}) \frac{e^{it}}{e^{it} - z} dt} \right) &= 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{\int_0^{2\pi} g(e^{it}) \frac{e^{it}}{e^{it} - z} dt} \right) \\ &= 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\int_0^{2\pi} g(e^{it}) \frac{e^{it}}{e^{it} - z} dt \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

de donde concluimos que u es armónica en $D(0, 1)$.

Veamos ahora que u es continua en $\overline{D(0, 1)}$, para ello analicemos el kernel de Poisson $P(t, z)$ con un poco mas de detalle. En primer lugar, si aplicamos la fórmula de Poisson a la función armónica $v \equiv 1$ obtenemos que

$$(7.1) \quad \int_0^{2\pi} P(t, z) dt = 1 \quad \forall z \in D(0, 1).$$

También tenemos que si $z \in D(0, 1)$ entonces $P(t, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2} > 0$. Por otra parte para cualquier $\delta > 0$ pequeño y $\psi \in [0, 2\pi]$ se verifica que

$$(7.2) \quad \int_0^{\psi - \delta} P(t, z) dt + \int_{\psi + \delta}^{2\pi} P(t, z) dt \xrightarrow{z = re^{i\theta} \rightarrow e^{i\psi}} 0,$$

esto pues si $|\psi - t| > \delta$ entonces

$$1 - 2r \cos(\theta - t) + r^2 = (1 - r)^2 + 2r(1 - \cos(\theta - t)) \geq r(1 - \cos(\delta)) > 0$$

y por lo tanto $0 \leq P(t, z) \leq C(1 - |z|^2) \xrightarrow{z \rightarrow e^{i\psi}} 0$ uniformemente en t .

En virtud de lo anteriormente discutido, tenemos que si $z = re^{i\theta}$ con $r < 1$ y si $\psi \in [0, 2\pi]$ entonces podemos escribir

$$u(z) - g(e^{i\psi}) = \int_0^{2\pi} (g(e^{it}) - g(e^{i\psi})) P(t, z) dt,$$

ahora de la continuidad de g tenemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|t - \psi| < \delta$ entonces $|g(e^{it}) - g(e^{i\psi})| < \varepsilon$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} |u(z) - g(e^{i\psi})| &= \left| \int_0^{2\pi} (g(e^{it}) - g(e^{i\psi})) P(t, z) dt \right| \\ &\leq \int_0^{\psi-\delta} |g(e^{it}) - g(e^{i\psi})| P(t, z) dt + \int_{\psi-\delta}^{\psi+\delta} |g(e^{it}) - g(e^{i\psi})| P(t, z) dt \\ &\quad + \int_{\psi+\delta}^{2\pi} |g(e^{it}) - g(e^{i\psi})| P(t, z) dt \\ &\leq 2M \left(\int_0^{\psi-\delta} P(t, z) dt + \int_{\psi+\delta}^{2\pi} P(t, z) dt \right) + \varepsilon \int_{\psi-\delta}^{\psi+\delta} P(t, r, \theta) dt \\ &\leq 2M \left(\int_0^{\psi-\delta} P(t, z) dt + \int_{\psi+\delta}^{2\pi} P(t, z) dt \right) + \varepsilon, \end{aligned}$$

donde $M = \max_{S(0,1)} |g|$, y por lo tanto

$$\limsup_{z \rightarrow e^{i\psi}} |u(z) - g(e^{i\psi})| \leq \varepsilon,$$

lo que concluye la demostración. ■

Observación 7.2. Notar que gracias al Teorema 6.14, si Ω es simplemente conexo, entonces existe $\Psi : \Omega \rightarrow D(0, 1)$ biholomorfo y si $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica, entonces $u \circ \Psi^{-1}$ es una función armónica en $D(0, 1)$ y por lo tanto

$$u \circ \Psi^{-1}(z) = \int_0^{2\pi} u \circ \Psi^{-1}(e^{it}) P(t, z) dt,$$

para todo $z \in D(0, 1)$. En consecuencia, si consideramos $z = \Psi(w)$ para $w \in \Omega$ obtenemos una fórmula de Poisson en Ω , esto es

$$u(w) = \int_0^{2\pi} u \circ \Psi^{-1}(e^{it}) P(t, \Psi(w)) dt.$$

En la práctica esta fórmula es inservible si no se conoce dicho mapa Ψ , y solo en algunos casos podemos decir algo mas. Por ejemplo, si Ω es el semi-plano complejo $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ entonces se puede verificar que

$$u(x + iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \frac{y}{(t - x)^2 + y^2} dt.$$

Esto se puede obtener usando la transformada de Cayley $\Psi : \mathbb{H} \rightarrow D(0, 1)$ dada por $\Psi(z) = \frac{z - i}{z + i}$ (ver Ejemplo 6.1). Otra manera de obtener esto mismo está dada en el Ejercicio 7.12

A continuación veremos que una función que satisface la propiedad de la media ha de ser armónica

Teorema 7.9. *Supongamos que u es continua en un dominio Ω y satisface*

$$u(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p + re^{it}) dt$$

para todo $p \in \Omega$ y todo $r > 0$ tal que $\bar{D}(p, r) \subseteq \Omega$, entonces u es armónica en Ω .

Para demostrar este teorema, veremos primero que una función que satisface las hipótesis del teorema entonces satisface el principio del máximo, es decir:

Proposición 7.10. *Supongamos que u es continua en un dominio Ω y satisface*

$$u(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(p + re^{it}) dt$$

para todo $p \in \Omega$ y todo $r > 0$ tal que $\bar{D}(p, r) \subseteq \Omega$. Si existe $q \in \Omega$ tal que $u(q) = \sup_{\Omega} u$, entonces u es constante.

Demostración. Definimos el conjunto $A = \{q \in \Omega : u(q) = \sup_{\Omega} u\}$. Por hipótesis tenemos que $q \in A$ y como u es continua, entonces A es un conjunto cerrado. Para ver que u es constante, veremos que $A = \Omega$ usando la conexidad de Ω , es decir, nos basta probar que A es abierto.

Sea $q \in A$ y sea $r_0 > 0$ tal que $\bar{D}(q, r) \subseteq \Omega$, luego, para $r < r_0$

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} u &= u(q) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(q + re^{it}) dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sup_{\Omega} u dt \\ &= \sup_{\Omega} u, \end{aligned}$$

por lo tanto la única posibilidad es que $u(q + re^{i\theta}) = \sup_{\Omega} u$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$ y todo $r < r_0$. En otras palabras $D(q, r) \subseteq A$, y por lo tanto A es un conjunto abierto. ■

Demostración del Teorema 7.9. Sea D un disco tal que $\bar{D} \subseteq \Omega$. Gracias al Teorema 7.8 podemos encontrar una función armónica $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h|_{\partial D} = u|_{\partial D}$. El teorema será demostrado si somos capaces de demostrar que $u = h$ en D .

Consideremos la función $v = u - h$ que satisface $v|_{\partial D} = 0$ y además v satisface la propiedad de la media (pues u y h la satisfacen) en D . Luego, gracias a la Proposición 7.10 podemos concluir que $v \leq 0$ en D . De manera análoga tenemos que $-v \leq 0$ en D , y por lo tanto $v = u - h = 0$ en todo D , lo que nos dice que u es de clase C^2 y además es armónica. ■

7.3. Principio de reflexión de Schwarz

Sea O un conjunto abierto tal que $L = O \cap \mathbb{R}$ es un intervalo. Consideramos $\Omega = O \cap \mathbb{H}$ y este escenario, definimos la reflexión de Ω a través de L como

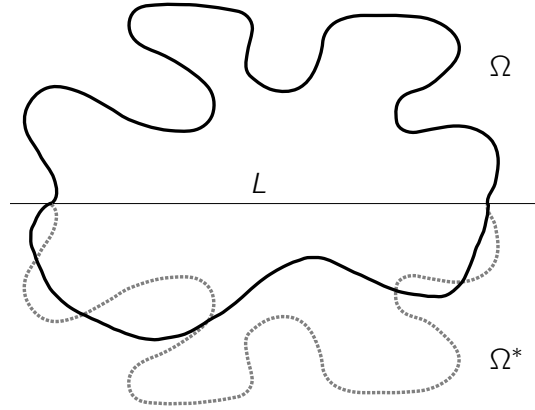
$$\Omega^* = \{z \in \Omega : \bar{z} \in \Omega\},$$

y consideramos el conjunto $U = \Omega \cup L \cup \Omega^*$ (ver Figura 7.1).

Teorema 7.11 (Principio de reflexión de Schwarz). *Sea $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $f(L) \subseteq \mathbb{R}$. Entonces la función $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ definida como*

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in \Omega \cup L, \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{si } z \in \Omega^*, \end{cases}$$

es holomorfa en U .


 Figura 7.1: Los conjuntos L , Ω y Ω^*

Demostración. Notar que si $z \in \Omega$ entonces $g = f$ y por tanto es diferenciable en dicho conjunto.

Si $z \in \Omega^*$ y si h es cercano a 0 de modo que $z + h \in \Omega^*$ entonces

$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \frac{f(\bar{z} + \bar{h}) - f(\bar{z})}{h} = \overline{\left(\frac{f(\bar{z} + \bar{h}) - f(\bar{z})}{\bar{h}} \right)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \overline{f'(\bar{z})},$$

y por tanto g es diferenciable en Ω^* .

Para concluir usamos el Ejercicio 3.8 que garantiza que g debe ser holomorfa en todo U . ■

Corolario 7.12. Si $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ es simétrico respecto al eje real, y si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa con $f(x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \Omega \cap \mathbb{R}$ entonces

$$f(z) = \overline{f(\bar{z})}.$$

Demostración. Notar que la función $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ es holomorfa en Ω y coincide con f en el segmento $\Omega \cap \mathbb{R}$, luego por el teorema de unicidad concluimos que $g = f$. ■

Tal como hay un principio de reflexión de Schwarz para funciones holomorfas, también hay una versión que es válida para funciones armónicas

Teorema 7.13. Sea Ω como en la introducción, y sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica tal que $u(x) = 0$ para todo $x \in L$. Si definimos

$$v(z) = \begin{cases} u(z) & \text{si } z \in \Omega, \\ 0 & \text{si } z \in L, \\ -u(\bar{z}) & \text{si } z \in \Omega^*. \end{cases}$$

Entonces v es armónica en $U = \Omega \cup L \cup \Omega^*$.

Demostración. Claramente la función v es continua en U , así que para ver que es armónica usamos el Teorema 7.9.

Es claro que tanto si $z \in U \cup U^*$ entonces v es armónica en una pequeña vecindad de z , pues u es armónica y si $z = (x, y)$ con $y > 0$ entonces $\Delta u(\bar{z}) = \Delta u(x, -y) = \Delta u(x, y)$ gracias a la regla de la cadena. Por lo tanto, v satisface la propiedad de la media en puntos de $\Omega \cup \Omega^*$.

7.4. EJERCICIOS

Por otra parte, si $p \in L$ entonces para $r > 0$ suficientemente pequeño de modo que $D(p, r) \subseteq U$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} v(p + re^{it}) dt &= \int_0^{\pi} v(p + re^{it}) dt + \int_{\pi}^{2\pi} v(p + re^{it}) dt \\
 &= \int_0^{\pi} v(p + re^{it}) dt + \int_0^{\pi} v(p + re^{i(t+\pi)}) dt \\
 &= \int_0^{\pi} u(p + re^{it}) dt - \int_0^{\pi} u(\overline{p + re^{i(t+\pi)}}) dt \\
 &= \int_0^{\pi} u(p + re^{it}) dt - \int_0^{\pi} u(p + re^{i(\pi-t)}) dt, \\
 &= \int_0^{\pi} u(p + re^{it}) dt - \int_0^{\pi} u(p + re^{it}) dt, \\
 &= 0 \\
 &= v(p),
 \end{aligned}$$

es decir, v satisface la propiedad de la media en p , y por lo tanto es armónica en p . ■

7.4. Ejercicios

Ejercicio 7.1. Verifique que la función $u(z) = \log |z|$ es una función armónica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ejercicio 7.2. Demuestre que la función $u(z) = \log |z|$ no puede ser la parte real de una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ejercicio 7.3. Si u es armónica y f es holomorfa muestre que $u \circ f$ es armónica.

Ejercicio 7.4. Muestre que la función $u(x, y) = y \cos y \sinh x + x \sin y \cosh x$ es armónica en \mathbb{C} . Encuentre un conjugado armónico para u .

Ejercicio 7.5. Muestre que la función, escrita en coordenadas polares, $u(r, \theta) = r\theta \cos \theta + r \sin \theta \ln r$ es armónica en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Encuentre un conjugado armónico para u .

Ejercicio 7.6. Sea Ω un dominio. Muestre que no existe u función armónica no constante en Ω tal que u^2 es armónica en Ω .

Ejercicio 7.7. Sea u una función armónica en un dominio \mathbb{C} tal que $u \cdot v$ es armónica para toda función armónica v . Muestre que u es constante

Ejercicio 7.8. Suponga que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones armónicas en un dominio Ω y que existe una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ uniformemente en compactos de Ω . Muestre que u es armónica. *Ayuda: Use la propiedad de la media.*

Ejercicio 7.9. Muestre que el kernel de Poisson en el disco se puede escribir como

$$P(t, r, \theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ik\theta}.$$

Ejercicio 7.10 (Desigualdad de Harnack). Sea $u : \bar{D}(0, 1) \rightarrow [0, \infty)$ una función continua y armónica en $D(0, 1)$. Entonces para cada $z \in D(0, 1)$ se cumple que

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} u(0) \leq u(z) \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} u(0).$$

Obtenga una desigualdad similar si u es armónica en $D(p, r)$.

Ejercicio 7.11 (Principio de Harnack). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo, y sea $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones armónicas en Ω tales que $u_n \leq u_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Muestre que, o bien $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$ uniformemente en compactos, o bien existe u armónica tal que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u$ uniformemente en compactos.

Ayuda: Muestre que los conjuntos

$$\Omega_1 = \left\{ z \in \Omega : u_n(z) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty \right\},$$

$$\Omega_2 = \{ z \in \Omega : (u_n(z))_{n \in \mathbb{N}} \text{ es convergente en } \mathbb{R} \},$$

son abiertos en Ω .

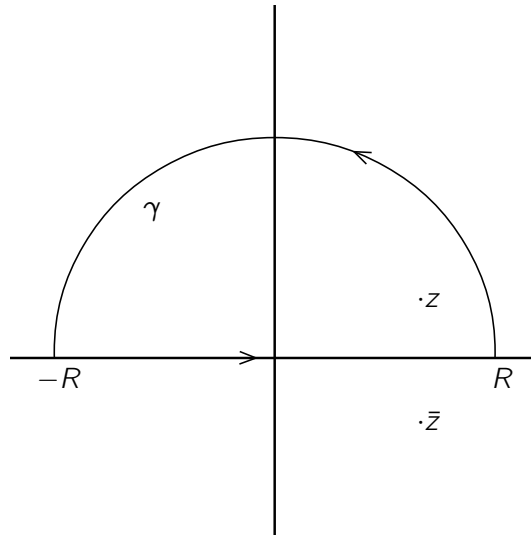


Figura 7.2: Método de las imágenes

Ejercicio 7.12. Considere $u : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica tal que $u = \operatorname{Re} f$ para cierta función holomorfa acotada. Muestre que si $y > 0$ entonces

$$u(x + iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \frac{y}{(t - x)^2 + y^2} dt.$$

Ayuda: Verifique primero que si $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa acotada y si $z \in \mathbb{H}$ entonces

$$2\pi i f(z) = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - \bar{z}} dw,$$

donde γ es la curva dada en la Figura 7.2. Aplique lo anterior cuando f es una función holomorfa tal que $u = \operatorname{Re} f$.

Ejercicio 7.13. Obtenga la fórmula

$$u(x + iy) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \frac{y}{(t-x)^2 + y^2} dt,$$

del ejercicio anterior para una función armónica en \mathbb{H} y continua en $\bar{\mathbb{H}}$, ahora usando un mapa conforme de \mathbb{H} al disco $D(0, 1)$ y la fórmula de Poisson en el disco.

Ejercicio 7.14. Suponga que f es holomorfa en $\bar{D}_+ = \bar{D}(0, 1) \cap \mathbb{H}$ y que satisface que $f(S(0, 1) \cap \mathbb{H}) \subseteq \mathbb{R}$. Muestre que si

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in \bar{D}_+ \\ f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) & \text{si } z \in D(0, 1)^c \cap \mathbb{H}, \end{cases}$$

entonces g es holomorfa en \mathbb{H} .

Ejercicio 7.15. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto. Muestre que $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica si y solo si u es continua y para todo $p \in \Omega$ existe $r_0 > 0$ tal que si $0 < r < r_0$ entonces

$$u(p) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D(p, r)} u(x, y) dx dy.$$

Ejercicio 7.16. Sea Ω un abierto y sea u una función armónica en Ω . Muestre que si $D(z_0, r) \subseteq \Omega$ entonces para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ existe una constante $C_k > 0$ tal que

$$|\partial^k u(z)| \leq \frac{C_k}{r^{2+k}} \int_{D(z_0, r)} |u(x, y)| dx dy,$$

donde ∂^k denota cualquier operador diferencial parcial del tipo $\frac{\partial^k}{\partial x^l \partial y^{k-l}}$ para $l \in \{0, 1, \dots, k\}$.

Ejercicio 7.17 (Teorema de Liouville). Suponga que u es una función armónica en \mathbb{C} que es acotada. Muestre que u es constante.

Ejercicio 7.18. Encuentre todas las funciones armónicas en \mathbb{C} tal que $\frac{\partial u}{\partial x} \leq 0$.

Ejercicio 7.19. Sea u una función armónica en Ω abierto. Muestre que u es analítica *real*, es decir, para cada $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ existen $r > 0$ y $(a_{j,k})_{j,k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$u(x, y) = \sum_{j,k \geq 0} a_{j,k} (x - x_0)^j (y - y_0)^k \quad \forall (x, y) \in D(z_0, r).$$

Ayuda: Muestre que u coincide con su serie de Taylor usando el Ejercicio 7.16.

Ejercicio 7.20. Sea $f : S(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(e^{it}) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \pi) \\ -1 & \text{si } t \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Encuentre una función armónica $u : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{r \rightarrow 1^-} u(re^{it}) = f(e^{it})$ para todo $t \in [0, 2\pi)$.

*

Apéndice A

Algunos resultados de análisis real

Los resultados aquí enunciados pueden ser encontrados en los libros de Rudin [12, 13]

Definición A.1 (Ínfimo). *Dado un conjunto A en \mathbb{R} , decimos que m es una cota inferior para A si*

$$m \leq a \quad \forall a \in A.$$

Decimos que una cota inferior para A es el ínfimo de A y se denota por $\inf A$ si

- $\inf A$ es una cota inferior para A ,
- Si m es una cota inferior para A , entonces $m \leq \inf A$.

Definición A.2 (Supremo). *Dado un conjunto A en \mathbb{R} , decimos que M es una cota superior para A si*

$$M \geq a \quad \forall a \in A.$$

Decimos que una cota superior para A es el supremo de A y se denota por $\sup A$ si

- $\sup A$ es una cota superior para A ,
- Si M es una cota superior para A , entonces $M \geq \sup A$.

Teorema A.1. *Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y supongamos que los ínfimos y supremos de A y B existen. Entonces*

1. $m = \inf A$ si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $a_\varepsilon \leq m + \varepsilon$.
2. $M = \sup A$ si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $a_\varepsilon \geq M - \varepsilon$.
3. Si $A \subseteq B$, entonces $\inf A \geq \inf B$ y $\sup A \leq \sup B$.
4. Si $\lambda \geq 0$ entonces $\inf \lambda A = \lambda \inf A$ y $\sup \lambda A = \lambda \sup A$.
5. Si $\lambda < 0$ entonces $\inf \lambda A = \lambda \sup A$ y $\sup \lambda A = \lambda \inf A$.
6. $\inf A + B = \inf A + \inf B$ y $\sup A + B = \sup A + \sup B$ cuando las cantidades son finitas.

Observación A.1. Notar que gracias a las primeras 2 propiedades del teorema anterior, si $m = \inf A$ y $M = \sup A$, entonces siempre se pueden construir sucesiones (a_n) y (b_n) de elementos en A tales que

$$\begin{aligned} a_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} m \\ b_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} M. \end{aligned}$$

Dichas sucesiones usualmente se denotan como sucesiones minimizantes (resp. maximizantes) para A .

Definición A.3. Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, denotamos por

1. $\sup_A f = \sup \{f(x) : x \in A\}$,
2. $\inf_A f = \inf \{f(x) : x \in A\}$.

Teorema A.2. Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funciones acotadas, entonces

1. $\sup_A f + g \leq \sup_A f + \sup_A g$,
2. $\inf_A f + g \geq \inf_A f + \inf_A g$.

Observación A.2. En general no se tiene la igualdad en el teorema anterior. Considerar $A = [0, 1]$, $f(x) = x$ y $g(x) = 1 - x$.

Observación A.3. Recordar que una sucesión real (a_n) es una función $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, por lo que

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = \inf_{\mathbb{N}} a = \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\},$$

y todas las propiedades antes enunciadas aplican.

Definición A.4 (Límites superior e inferior). Dada una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ definimos

1. $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k$,
2. $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq n} a_k$.

Teorema A.3. Dadas dos sucesiones $(a_n), (b_n)$ de números reales, tenemos que

1. $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k$,
2. $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k$,
3. $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, y si

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existe y es igual a L .

4. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ existe, entonces

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

5. $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$,
6. $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$,
7. $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$.

Teorema A.4 (Criterio de Weierstrass). Sean (X, d) un espacio métrico e $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Si $f_k : (X, d) \rightarrow (Y, \|\cdot\|)$ es una sucesión de funciones en $B(X, Y)$ tales que $\|f_k\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f_k(x)\| \leq M_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, donde $\sum_{k \in \mathbb{N}} M_k < \infty$. Entonces la serie

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} f_k$$

converge absoluta y uniformemente, esto es

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|f_k(x)\| \quad (\text{convergencia absoluta})$$

es convergente en \mathbb{R} , y

$$\sup_{x \in X} \left\| \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) - \sum_{k=1}^N f_k(x) \right\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{convergencia uniforme}).$$

Teorema A.5. Sea $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas tales que $f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f$ uniformemente en $[a, b]$. Entonces

1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, y
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(t) dt = \int_a^b f(t) dt$.

Corolario A.6. Sea $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas tales que $\sum_{k=1}^N f_k(t)$ converge uniformemente a $F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$ cuando $N \rightarrow \infty$, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(t) dt = \int_a^b F(t) dt = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) dt.$$

Corolario A.7. Sea $F : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ que es continua en sus dos variables (x, t) . Suponga que para cada $x \in [a, b]$ fijo la función $F(x, \cdot)$ es diferenciable y

$$\sup_{\substack{x \in [a, b] \\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}} \left| \frac{F(x, t+h) - F(x, t)}{h} - \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) \right| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

de manera uniforme en x y t . Entonces

$$\frac{d}{dt} \int_a^b F(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) dx.$$

Observación A.4. Notar que gracias al teorema del valor medio tenemos (teorema de Taylor con resto) que existe $\xi \in [t, t+h]$ tal que

$$F(x, t+h) - F(x, t) - \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) \cdot h = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x, \xi) \cdot h^2,$$

luego si $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$ es acotada en $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ por $2M$ entonces

$$\sup_{\substack{x \in [a, b] \\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon)}} \left| \frac{F(x, t+h) - F(x, t)}{h} - \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) \right| \leq M |h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Una versión un poco mas general es la siguiente

Proposición A.8. Sea $O \subseteq \mathbb{R}$ un abierto y sea Ω un espacio de medida. Si $f : O \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisface

- Para todo $x \in O$ se tiene que $f(x, w)$ es integrable en Ω ,
- Para casi todo $w \in \Omega$ y todo $x \in X$ existe la derivada parcial $\partial_x f(x, w)$,
- Existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|\partial_x f(x, w)| \leq g(w)$ para todo $x \in O$, c.t.p. en Ω .

Entonces

$$\frac{d}{dx} \int_{\Omega} f(x, w) dw = \int_{\Omega} \partial_x f(x, w) dw$$

Bibliografía

1. Ahlfors, L. V. *Complex analysis* Third. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, International Series in Pure and Applied Mathematics, xi+331. isbn: 0-07-000657-1 (McGraw-Hill Book Co., New York, 1978).
2. Bak, J. y Newman, D. J. *Complex analysis* Third, xii+328. isbn: 978-1-4419-7287-3. <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-7288-0> (Springer, New York, 2010).
3. Conway, J. B. *Functions of one complex variable* Second, xiii+317. isbn: 0-387-90328-3 (Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978).
4. Greene, R. E. y Krantz, S. G. *Function theory of one complex variable* Third, x+504. isbn: 0-8218-3962-4. <http://dx.doi.org/10.1090/gsm/040> (American Mathematical Society, Providence, RI, 2006).
5. Herzog, F. y Piranian, G. Sets of convergence of Taylor series. I. *Duke Math. J.* **16**, 529-534. issn: 0012-7094. <http://projecteuclid.org/euclid.dmj/1077475672> (1949).
6. Herzog, F. y Piranian, G. Sets of convergence of Taylor series. II. *Duke Math. J.* **20**, 41-54. issn: 0012-7094. <http://projecteuclid.org/euclid.dmj/1077465063> (1953).
7. Krantz, S. G. *Complex analysis: the geometric viewpoint* Second, xviii+219. isbn: 0-88385-035-4. <http://dx.doi.org/10.5948/UP09780883859681> (Mathematical Association of America, Washington, DC, 2004).
8. Lang, S. *Complex analysis* Fourth, xiv+485. isbn: 0-387-98592-1. <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4757-3083-8> (Springer-Verlag, New York, 1999).
9. Mazurkiewicz, S. Sur les séries de puissances. French. *Fundam. Math.* **3**, 52-58. issn: 0016-2736 (1922).
10. Munkres, J. R. *Analysis on manifolds* xiv+366. isbn: 0-201-51035-9 (Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1991).
11. Narasimhan, R. y Nievergelt, Y. *Complex analysis in one variable* Second, xiv+381. isbn: 0-8176-4164-5. <http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-0175-5> (Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001).
12. Rudin, W. *Principles of mathematical analysis* Third. International Series in Pure and Applied Mathematics, x+342 (McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976).
13. Rudin, W. *Real and complex analysis* Third, xiv+416. isbn: 0-07-054234-1 (McGraw-Hill Book Co., New York, 1987).
14. Spivak, M. *Calculus on manifolds. A modern approach to classical theorems of advanced calculus* xii+144 (W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1965).
15. Stein, E. M. y Shakarchi, R. *Complex analysis* xviii+379. isbn: 0-691-11385-8 (Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003).