Métodos Variacionales

y algunas aplicaciones a E.D.P.

Hernán Castro Z.

Instituto de Matemáticas
Universidad de Talca
https://hcastro-cl.github.io/
hcastro@utalca.cl.

Template de $\LaTeX\,2_\varepsilon$ creado por Hernán Castro Z..

Edición del 7 de agosto de 2025

Índice general

1. Preliminares 1

1.1 Diferenciabilidad en espacios normados 1

1.1.1 Derivadas de orden superior 8

1.2 Dos teoremas importantes en espacios de Banach 9

1.3 Integración en espacios normados 12

1.3.1 Medibilidad y el teorema de Pettis 13

1.3.2 Integral de Bochner 13

1.4 Introducción a la geometría diferencial 15

1.5 Algunos criterios de compacidad 20

1.5.1 Medidas de Radon 22

1.6 Conceptos básicos sobre espacios de Sobolev 25

2. Métodos de minimización 28

2.1 Funciones semi-continuas inferiores 28

2.2 Multiplicadores de Lagrange en espacios de Banach 30

2.2.1 Motivación: Lagrange en dimensión $N = 2$ 30

2.2.2 El teorema de los multiplicadores de Lagrange 31

2.3 Una aplicación del teorema de Lagrange 34

2.3.1 Formulación variacional de ciertas EDP 36

2.4 Otra aplicación del teorema de Lagrange 39

2.5 Principio variacional de Ekeland 39

2.6 Una aplicación del principio variacional de Ekeland 41

2.7 Concentración compacidad 42

2.8 Una aplicación de concentración compacidad 46

3. Métodos minimax 47

3.1 Lema de deformaciones 47

3.2 Paso de la montaña 51
3.3 Una aplicación del teorema del paso de la montaña 52
3.4 Algunos conceptos sobre grado topológico 52
3.5 Teorema del punto silla 54
3.6 Una aplicación del teorema del punto silla 55

Bibliografía 56

Prefacio

Este documento ha sido elaborado para el curso trimestral *Métodos Variacionales*, impartido por el autor en los programas de Magíster y Doctorado en Matemáticas de la Universidad de Talca. El objetivo de este texto es compilar y organizar de manera sistemática los contenidos presentados en diversos libros y artículos, siguiendo la estructura propuesta por el autor durante el desarrollo del curso.

Muchos problemas relevantes en análisis pueden formularse de la siguiente manera: encontrar $u \in E$ tal que

$$f(u) = 0, \tag{1}$$

donde, generalmente, E es un espacio de Banach y f es una función no lineal. Un caso particular de estos problemas es el de las ecuaciones de tipo Euler-Lagrange, que adoptan la forma

$$DF(u) = 0, \tag{2}$$

donde F es una función (Fréchet) diferenciable en un espacio de Banach y DF denota su derivada. Cuando una ecuación del tipo (1) puede reescribirse en la forma (2), decimos que dicha ecuación posee una *formulación variacional*. El principal propósito de este documento es exponer algunos métodos para resolver ecuaciones que admiten tal formulación.

La formulación variacional no solo facilita la interpretación de muchos problemas no lineales desde un punto de vista funcional, sino que también proporciona una base sólida para el desarrollo de métodos numéricos y teóricos. A lo largo de este apunte, exploraremos diferentes enfoques y herramientas que permiten abordar problemas variacionales, con énfasis en su aplicabilidad a problemas reales en el estudio de Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Es importante señalar que tanto los contenidos teóricos como algunos ejemplos han sido extraídos de la bibliografía indicada, con el fin de que este texto sea lo más autocontenido posible. Asimismo, se han incluido ejemplos y ejercicios originales elaborados por el autor, con el objetivo de complementar los temas tratados.

Finalmente, cabe mencionar que este documento está en constante desarrollo. La presentación de ciertos temas, así como la lista de ejercicios, puede sufrir modificaciones a lo largo del tiempo. Además, algunos contenidos pueden estar incompletos y es posible que contenga errores tipográficos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Diferenciabilidad en espacios normados

En lo que sigue los espacios vectoriales son sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ que puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición 1.1 (Derivada de Gateaux)**.** *Sean E, F espacios vectoriales normados, sea $U \subset E$ un abierto y $f : U \to F$ una función continua. Diremos que f es Gateaux diferenciable (G-diferenciable) en $x_0 \in U$ si*

- *Para todo $h \in E$ el límite*
$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}} \frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}$$
existe en F, en cuyo caso lo denotamos por $A_{x_0}(h)$.

- *A_{x_0} es un operador $\mathbb{K}$-lineal y continuo, es decir, $A_{x_0} \in \mathcal{L}(E,F)$.*

Cuando ambas condiciones ocurren denotamos[1] *por $\delta f(x_0)$ al operador A_{x_0} y lo llamamos la derivada de Gateaux de f en x_0.*

Observación 1.1. Puede ocurrir que $A_{x_0}(h)$ sea un operador no lineal, incluso en dimensión finita. Basta considerar cualquier función continua en $x_0 = 0$, que sea no-lineal y además homogénea de grado 1, i.e. $f(tx) = tf(x)$ para todo t. Con esto, $f(0) = 0$ y por lo tanto

$$A_0(h) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}} \frac{f(th)}{t} = f(h).$$

Un ejemplo de tal función puede ser $f(x,y) = \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ y definida como $f(0,0) = 0$.

[1] Algunos autores escriben $A_{x_0}(h) = \delta(x_0; h)$ y denotan a este límite la derivada direccional de f en x_0 en la dirección h. Puede ocurrir que este operador no-lineal, o lineal y no acotado.

El mismo tipo de ejemplo sirve en dimensión infinita para ilustrar que A_{x_0} puede ser un operador lineal, pero no acotado. Basta tomar E un espacio vectorial de dimensión infinita y $f : E \to \mathbb{C}$ un funcional lineal discontinuo[2]. Dicho funcional satisface

$$A_0(h) = f(h),$$

que es lineal, pero no continuo.

Ejemplo 1.1. Supongamos que H es un espacio de Hilbert y que $f : H \to \mathbb{C}$ tiene una derivada de Gateaux $\delta f(x_0)$ en $x_0 \in H$. Entonces $\delta f(x_0) \in \mathcal{L}(H, \mathbb{C})$ que gracias al teorema de Riesz tiene un representante $u \in H$ en el sentido que

$$\langle \delta f(x_0), x\rangle = (x, u) \qquad \forall\, x \in H.$$

A tal u se le llama *gradiente* de f en x_0 y se anota $\nabla f(x_0)$, es decir

$$\langle \delta f(x_0), x\rangle = (x, \nabla f(x_0)) \qquad \forall\, x \in H.$$

Definición 1.2. *Sean E, F espacios vectoriales normados, sea $U \subset E$ un abierto y $f : U \to F$ una función continua. Diremos que f es Frèchet diferenciable (F-diferenciable) en $x_0 \in U$ si existe un operador $\mathbb{K}$-lineal continuo $A : E \to F$ tal que*

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah\|_F}{\|h\|_E} = 0.$$

En caso de cumplirse lo anterior denotamos por $A = Df(x_0) = f'(x_0)$ y lo llamamos la derivada de Frèchet de f en x_0.

Si además la aplicación $x \to Df(x)$ es continua diremos que $f \in C^1(U)$.

Definición 1.3 (Notaciones O y o)**.** *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función.*

1. *Si ocurre que existe una constante tal que $|f(h)| \leq C\,|h|$ diremos que $f \in O(h)$. Habitualmente abusaremos de la notación y escribiremos $f(h) = O(h)$.*

2. *Si ocurre que*
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$$
diremos que $f \in o(h)$. También abusaremos de la notación y escribiremos $f(h) = o(h)$.

Observación 1.2. Note que $O(h^q) \subseteq o(h)$ cada vez que $q > 1$.

Observación 1.3. Usando la notación o podemos escribir que f es F-diferenciable en x_0 si y solo si existe $A \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que

$$f(x) - f(x_0) - A(x - x_0) = o(\|x - x_0\|),$$

y en este caso volveremos a abusar de la notación y escribiremos

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0).$$

[2]Que existe gracias al teorema de Hahn-Banach.

Observación 1.4. En el caso particular que $F = \mathbb{R}$ usualmente se estudia la diferenciabilidad en $t = 0$ de la función $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ definida como $g(t) = f(x + th)$. Así g es diferenciable si y solo si f es G-diferenciable y se cumple que

$$g'(0) = \delta f(x_0)h.$$

Notar además que en esta situación $\delta f(x_0) \in E^*$.

Observación 1.5. Es claro de las definiciones que si f es F-diferenciable en x_0 entonces también es G-diferenciable en x_0 con

$$Df(x_0) = \delta f(x_0).$$

Observación 1.6. Cuando se trabaja en espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$, hay que distinguir entre la derivada (compleja) de la función $f : E \to F$ y la derivada real de la función $f : E_{\mathbb{R}} \to F$. En el primer caso se obtiene el operador $\mathbb{C}$ lineal $Df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$, mientras que en el segundo el operador $\mathbb{R}$ lineal $D^{\mathbb{R}}f(a) \in \mathcal{L}(E, F)$.

Es claro que si una función es F-diferenciable (compleja), entonces también es F-diferenciable real, sin embargo puede ocurrir que una función tenga derivada real, pero no compleja. Esto se ilustra en el caso $E = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ con la función $f(z) = f(x, y) = (x, -y) = \bar{z}$.

Tal como ocurre en análisis complejo hay una relación entre ambos conceptos dada por la siguiente

Proposición 1.1 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann)**.** *Sean E, F espacios de Banach sobre $\mathbb{C}$ y sea $f : U \subseteq E_{\mathbb{R}} \to F_{\mathbb{R}}$ una función diferenciable real en $x = a$ con derivada real $D^{\mathbb{R}}f(a)$. Si definimos los operadores*

$$\partial_z f(a)h = \frac{1}{2}\left(D^{\mathbb{R}}f(a)(h) - iD^{\mathbb{R}}f(a)(ih)\right)$$

y

$$\partial_{\bar{z}} f(a)h = \frac{1}{2}\left(D^{\mathbb{R}}f(a)(h) + iD^{\mathbb{R}}f(a)(ih)\right)$$

para cada $h \in E_{\mathbb{C}}$ y se cumple que $\partial_{\bar{z}} f(a) = 0$ entonces f es diferenciable (compleja) en $x = a$ con

$$Df(a) = \partial_z f(a).$$

Demostración. Ver [20, Proposition 13.15]. ■

Definición 1.4. *Una función $f : U \subseteq E \to F$ se dice G-holomorfa*[3] *en a si para todo $h \in E$ la aplicación $z \to f(a + zh)$ es complejo diferenciable en $z = 0$, es decir el límite*

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in \mathbb{C}}} \frac{f(a + zh) - f(a)}{z}$$

existe.

[3] Esta G es por Goursat.

Teorema 1.2. *Son equivalentes*

1. *f es analítica en $x = a$, en el sentido de f tiene una expansión en series de potencias de la forma*
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x-a),$$
donde $P_k(y)$ es un polinomio de grado[4] k

2. *f es G-holomorfa y continua.*

Demostración. Ver [20, Theorem 8.7] ■

Definición 1.5. *Un mapa se dice débilmente analítico (resp. G-holomorfo) si $\varphi \circ f$ es analítico (resp. G-holomorfo) para todo $\varphi \in F^*$.*

Teorema 1.3. *Sea $U \subseteq E$ un abierto*

1. *f es G-holomorfo si y solo si f es débilmente G-holomorfo.*

2. *f es holomorfo si y solo si f es débilmente holomorfo.*

Demostración. Ver [20, Theorem 8.12] ■

Teorema 1.4. *f es $\mathbb{C}$ diferenciable si y solo si es analítico.*

Demostración. Ver [20, Theorem 13.16] ■

Ejemplo 1.2. Consideremos H un espacio de Hilbert complejo y la función $f(u) = |u|^2$. Notemos que
$$f(u+h) - f(u) - 2\mathrm{Re}\,(h,u) = |h|^2 = o(h),$$
donde el mapa $h \mapsto 2\mathrm{Re}\,(h,u)$ es $\mathbb{R}$-lineal y continuo, por lo tanto f es diferenciable real (y por tanto G-diferenciable real) con $D^{\mathbb{R}}f(u)h = D^{\mathbb{R}}_G f(u)h = 2\mathrm{Re}\,(h,u)$.

Sin embargo la función $f(u) = |u|^2$ no es G-diferenciable (compleja), pues
$$\frac{f(u+th) - f(u)}{t} = 2\frac{\mathrm{Re}\,t(h,u)}{t} + \bar{t}\,|h|^2$$
así para $t \in \mathbb{R}$ entonces $\dfrac{f(u+th) - f(u)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 2\mathrm{Re}\,(h,u)$, y para $t = i\varepsilon$ con $\varepsilon \in \mathbb{R}$ entonces $\dfrac{f(u+i\varepsilon h) - f(u)}{i\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2i\mathrm{Im}\,(h,u)$.

Esto se ilustra aun mas claramente al mirar $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ y la función $f(z) = f(x,y) = x^2+y^2 = |z|^2 = z\bar{z}$. Si miramos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ entonces f es diferenciable real con $\nabla f(x,y) = 2(x,y)^T$, sin embargo si miramos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ entonces f no es holomorfa ya que $\partial_{\bar{z}} f(z) = z \neq 0$.

[4] $P_k(y) = Ay^k = A(y, y, \ldots, y)$, donde A es un mapa k-lineal de $A : E^k \to F$ continuo.

Dado que el interés principal de este curso es trabajar en espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ no volveremos a tocar este tema. El lector interesado puede revisar la referencia [20].

Ejemplo 1.3. Si estamos en un espacio de Hilbert real, entonces el ejemplo anterior nos dice que para $f(u) = |u|^2$ es F-diferenciable con $\nabla f(u) = 2u$ en el sentido que

$$Df(u)h = (h, \nabla f(u)) = 2(h, u) = 2(u, h) \qquad \forall\, h \in H.$$

Ejemplo 1.4. Sea $L \in \mathcal{L}(E, F)$, entonces $DL(a) = L$ para todo $a \in E$ pues

$$\|L(a+h) - L(a) - L(h)\| = 0.$$

Ejemplo 1.5. Veamos que ocurre con $f : L^p \to \mathbb{R}$ definida como $f(u) = \int |u|^p$ cuando $1 < p < \infty$. Si consideramos $g(t) = \int |u + th|^p$ entonces al diferenciar bajo el signo integral tenemos que (formalmente)

$$g'(0) = p \int |u|^{p-2}\, uh,$$

los que nos lleva a definir $A(u) : L^p \to \mathbb{R}$ como $A(u)h = p \int |u|^{p-2}\, uh$. Claramente $A(u)$ es lineal y satisface

$$|A(u)h| = \left| p \int |u|^{p-2}\, uh \right| \leq p \int |u|^{p-1} |h| \leq p \|u\|_p^{p-1} \|h\|_p\,,$$

entonces $A(u)$ es un buen candidato para $Df(u)$ que verifica $\|A(u)\|_{\mathcal{L}(L^p,\mathbb{R})} \leq p \|u\|_p^{p-1}$. Si notamos que $\mathcal{L}(L^p, \mathbb{R}) \cong L^{p'}$ y usamos el Ejercicio 1.2 para obtener

$$\begin{aligned}
|f(u+h) - f(u) - A(u)h| &= \left| \int |u+h|^p - \int |u|^p - p \int |u|^{p-2}\, uh \right| \\
&\leq C_p \left(\int |h|^p + \int |u|^{p-2} |h|^2 \right) \\
&\leq C_p \left(\|h\|_p^p + \|u\|_p^{p-2} \|h\|_p^2 \right) \\
&= o(h)
\end{aligned}$$

concluimos que f es F-diferenciable para $p \geq 2$ con $Df = A$.

Para el caso $1 < p < 2$ notamos que para casi todo $x \in \Omega$ existe $t_x \in [0, 1]$ tal que

$$|u+h|^p - |u|^p = p\, |u + t_x h|^{p-2} (u + t_x h) h,$$

de donde podemos escribir

$$\begin{aligned}
|f(u+h) - f(u) - A(u)h| &= \left| \int |u+h|^p - \int |u|^p - p \int |u|^{p-2}\, uh \right| \\
&= \left| p \int |u + t_x h|^{p-2} (u + t_x h) h - p \int |u|^{p-2}\, uh \right|
\end{aligned}$$

$$\leq p \int \left| |u + t_x h|^{p-2} (u + t_x h) - |u|^{p-2} u \right| |h|$$

pero gracias al Ejercicio 1.3 para $1 < p < 2$ se cumple que

$$\left| |x|^{p-2} x - |y|^{p-2} y \right| \leq C_p |x - y|^{p-1},$$

y por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} |f(u+h) - f(u) - \delta f(u)h| &\leq p \left| \int \left| |u + t_x h|^{p-2} (u + t_x h) - |u|^{p-2} u \right| |h| \right| \\ &\leq C_p \int |t_x|^{p-1} |h|^p \\ &\leq C_p \int |h|^p \\ &= O(h^p) \\ &= o(h) \end{aligned}$$

lo que demuestra nuevamente que f es F-diferenciable con $DF = A$.

Ejercicio 1.1. Para $p \geq 2$ y $u, v \in L^p$ defina $g(t) = \int |u + th|^p$. Muestre que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable y calcule $g'(t)$.

Ejercicio 1.2. Muestre que para todo $2 \leq p < \infty$ existe $C_p > 0$ tal que

$$\left| |a + b|^p - |a|^p - p |a|^{p-2} ab \right| \leq C_p \left(|a|^{p-2} |b|^2 + |b|^p \right)$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$. *Ayuda: Basta estudiar el caso $b = 1$, ¿por qué?*

Ejercicio 1.3. Muestre que para $1 < p < 2$ se cumple que

$$\left| |x|^{p-2} x - |y|^{p-2} y \right| \leq C_p |x - y|^{p-1}.$$

Ejercicio 1.4. Estudie la diferenciabilidad de la función $f : L^1 \to \mathbb{R}$ dada por $f(u) = \int |u|$.

Teorema 1.5 (Regla de la cadena)**.** *Sean E, F, G espacios vectoriales normados y $g : E \to F$ una función G-diferenciable (resp. F-diferenciable) y $f : F \to G$ una función F-diferenciable, entonces $f \circ g : E \to G$ es G-diferenciable (resp. F-diferenciable) con*

$$\delta(f \circ g)(x_0)h = Df(g(x_0)) \circ \delta g(x_0)h \quad (\textit{resp. } D(f \circ g)(x_0)h = Df(g(x_0)) \circ Dg(x_0)h)$$

Demostración. Ver [7, Theorem 3.2.12] ■

Teorema 1.6 (Teorema del valor medio)**.** *Sea E un espacio de Banach y sea $f : U \to F$ una función G-diferenciable en un conjunto abierto y convexo $U \subseteq E$. Entonces para todo $x, y \in U$ se tiene que*

$$\|f(y) - f(x)\|_F \leq \sup_{t\in[0,1]} \|\delta f(x + t(y - x))\| \, \|y - x\|_E \, .$$

Demostración. Sea $\varphi \in F^* \setminus \{0\}$ y consideremos la función auxiliar $l : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $l(t) = \varphi(f(x + t(y - x)))$. Esta función está bien definida ya que $x + t(y - x)$ está contenido en U para todo $t \in [0, 1]$ debido a la convexidad de U. Además, l es continua y diferenciable en $(0, 1)$ gracias al Teorema 1.5, con

$$l'(t) = \varphi \circ \delta f(x + t(y - x))(y - x),$$

pues $D\varphi(a) = \varphi$ para cualquier $a \in F$.

Por el teorema del valor medio del cálculo diferencial en una dimensión, existe $c \in (0, 1)$ tal que

$$l(1) - l(0) = l'(c),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} |l(f(y) - f(x))| &\leq |l \circ \delta f(x + c(y - x))(y - x)| \\ &\leq \|l\| \, \|\delta f(x + c(y - x))\| \, \|y - x\|_E \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\|_F &= \sup_{l\in F^*\setminus\{0\}} \frac{|l(f(y) - f(x))|}{\|l\|} \\ &\leq \|Df(x + c(y - x))\| \, \|y - x\|_E \\ &\leq \sup_{t\in[0,1]} \|Df(x + t(y - x))\| \, \|x - y\|_E \end{aligned}$$

■

Teorema 1.7. *Sean E, F y f como antes, y suponga que f es G-diferenciable en $B(a, r)$ para cierto $r > 0$ y que la aplicación $A : B(a, r) \to \mathcal{L}(E, F)$ definida como $Ax = \delta f(x)$ es continua. Entonces f es F-diferenciable en $x = a$ con $Df(a) = \delta f(a)$.*

Demostración. (Ver [7, Proposition 3.2.15]) De la demostración del Teorema 1.6 tenemos que existe $t \in [0, 1]$ tal que

$$\begin{aligned} |\varphi(f(a + h) - f(a) - \delta f(a)h)| &= |\varphi \circ (\delta f(a + th)h - \delta f(a)h)| \\ &\leq \|\varphi\| \, \|\delta f(a + th) - \delta f(a)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \, \|h\| \end{aligned}$$

Así
$$\frac{\|f(a + h) - f(a) - \delta f(a)h\|}{\|h\|} \leq \|\delta f(a + th) - \delta f(a)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \xrightarrow[\|h\|\to 0]{} 0$$

pues δf es continuo en $x = a$ ■

Definición 1.6 (Derivadas parciales). *Sea $f : E_1 \times E_2 \to F$ una función continua y para $a_i \in E_i$ consideramos las funciones $f_1 : E_1 \to F$ definida como $f_1(x) = f(x, a_2)$, y $f_2 : E_2 \to F$ definida como $f_2(x) = f(a_1, x)$. Si f_i tiene una derivada de Gateaux (resp. Frechet) en a_i entonces $\delta f_i(a_i)$ se dice que es la derivada parcial de f respecto a la variable i-ésima y la denotamos*

$$\delta_i f(a_1, a_2) \quad (\text{resp. } D_i f(a_1, a_2))$$

Proposición 1.8. *Si $f : E_1 \times E_2 \to F$ es G-diferencible en (a_1, a_2) entonces*

$$\delta_1 f(a_1, a_2)h = \delta f(a_1, a_2)(h, 0) \quad y \quad \delta_2 f(a_1, a_2)k = \delta f(a_1, a_2)(0, k),$$

en particular

$$\delta f(a_1, a_2)(h, k) = \delta_1 f(a_1, a_2)h + \delta_2 f(a_1, a_2)k.$$

Si f es F-diferenciable en (a_1, a_2) entonces

$$D_1 f(a_1, a_2)h = Df(a_1, a_2)(h, 0) \quad y \quad D_2 f(a_1, a_2)k = \delta f(a_1, a_2)(0, k),$$

y

$$Df(a_1, a_2)(h, k) = D_1 f(a_1, a_2)h + D_2 f(a_1, a_2)k.$$

Teorema 1.9. *Suponga que f es tal que $\delta_2 f : E_1 \times E_2 \to \mathcal{L}(E_2, F)$ es un operador continuo y que $\delta_1 f$ (resp. $D_1 f$) existe en (a_1, a_2). Entonces f es G-diferenciable (resp. F-diferenciable) en (a_1, a_2).*

Demostración. Ver [7, Proposition 3.2.15] ■

1.1.1. Derivadas de orden superior

Definición 1.7. *Para $f : \Omega \subseteq E \to F$ considere la función $g : (-\varepsilon, \varepsilon)^2 \to F$ definida como $g(t, s) = f(x_0 + th + sk)$. Si*

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial g}{\partial t}(0, s)\right)\Big|_{s=0}$$

existe y si el operador

$$(h, k) \mapsto \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial g}{\partial t}(0, s)\right)\Big|_{s=0}$$

es bi-lineal y continuo, entonces diremos que f es dos veces Gateaux diferenciable en x_0 e, en cuyo caso la denotamos a dicho operador como $\delta^2 f(x_0)(h, k)$.

Definición 1.8. *Diremos que $f : E \to F$ es 2 veces F-diferenciable si es 1 vez F-diferenciable, y el mapa $Df : E \to \mathcal{L}(E, F)$ es diferenciable. Denotamos a esta segunda derivada como $D^2 f$.*

Observación 1.7. Notar que para cada $x \in E$ se cumple que $D^2 f(x) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$. Sin embargo, se puede demostrar que

$$\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F)) \cong \mathcal{L}(E \times E, F)$$

el espacio de los operadores bilineales continuos.

Proposición 1.10 (Schwarz)**.** *Suponga que f es 2 veces F-diferenciable en x_0, entonces*

$$D^2 f(x_0)(h, k) = D^2 f(x_0)(k, h).$$

Demostración. Ver [14, Theorem 5.3]. ■

Teorema 1.11. *Si f es 2 veces G-diferenciable y el mapa $x \mapsto \delta_G^2 f(x)$ es continuo en $B(a, r)$, entonces f es 2 veces F-diferenciable en $x = a$ con*

$$D^2 f(a) = \delta^2 f(a).$$

Observación 1.8. En general, para $f : E \to F$ una función m veces F-diferenciable, con $m \geq 2$ el operador $D^m f(a) : E^m \to F$ es un operador multilineal continuo y que satisface

$$D^m f(a)(h_1, \dots, h_m) = D^m f(a)(h_{\sigma(1)}, \dots, h_{\sigma(m)}) \qquad \forall\, (h_1, \dots, h_k) \in E^k,$$

para cualquier permutación σ de n elementos. Además se cumple que para todo operador lineal continuo $L : F \to G$

$$D^m (L \circ f)(x) = L \circ D^m f(x)$$

donde $D^m (L \circ f)(x) : E^m \to G$. Ver [14, Chapter XIII - Section 6].

1.2. Dos teoremas importantes en espacios de Banach

Definición 1.9. *Sea $f : U \subset E \to F$ una función continua, diremos que f es localmente C^k invertible en torno a un punto $x_0 \in U$ si es que existe $r > 0$ tal que $f : B(x_0, r) \to f(B(x_0, r))$ es un difeomorfismo*[5] *de clase C^k.*

Observación 1.9.
1. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 y satisface $f'(x_0) \neq 0$, entonces $f'(x) > 0$ (o bien < 0) para todo x cercano a x_0 y por lo tanto es monótona cerca de x_0. Como es monótona, entonces existe una inversa que gracias a la regla de la cadena tiene la misma regularidad de f.

2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 y $f'(x) \neq 0$ para todo x entonces f es inyectiva.

[5] Una función biyectiva se dice difeomorfismo de clase C^k si tanto la función como su inversa son funciones de clase C^k

3. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es de clase C^1 y $Df(x)$ es invertible para todo x entonces no necesariamente es inyectiva. Por ejemplo se puede tomar $f(z) = e^z$ con $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ que es periódica y además
$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{bmatrix}$$
que es invertible en todo punto pues $\det Df(x,y) = e^{2x} > 0$.

Teorema 1.12 (Teorema de la función inversa (local))**.** *Sean E, F espacios de Banach y $f : U \subset E \to F$ una función de clase C^k. Si $Df(x_0) \in L(E,F)$ es un operador invertible, entonces f es localmente C^k invertible en torno a x_0.*

Observación 1.10. Este teorema dice que para todo y cerca de $f(x_0)$ la ecuación $f(x) = y$ tiene una única solución $x = g(y)$ y además la función g es de clase C^k.

Demostración. [6]
Si $L = Df(x_0)$ y $g = L^{-1}f$ entonces $\tilde{f} : U \subset E \to E$ con $D\tilde{f}(x_0) = L^{-1} \circ L = I_E$, por lo que basta suponer que $Df(x_0) = I_E$ y $f : U \subset E \to E$. Adicionalmente, sin perder generalidad supondremos que $x_0 = 0$ y $U = B(0, R)$ para cierto $R > 0$.

Sea $h(x) = x - f(x)$ que satisface $h(0) = 0$ y $Dh(0) = 0$. Como Dh es un operador continuo, entonces existe $\delta > 0$ tal que $\|Dh(x)\| \leq \frac{1}{2}$ para todo $\|x\| < 2\delta$. Del Teorema 1.6 concluimos que
$$\|h(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x\|,$$
es decir $h(\bar{B}(0,r)) \subset h(\bar{B}(0,\frac{r}{2}))$. Sea ahora $y \in \bar{B}(0,\frac{r}{2})$ y consideremos $\tilde{h}(x) = y + h(x)$, luego nuevamente por el Teorema 1.6
$$\left\|\tilde{h}(x_1) - \tilde{h}(x_2)\right\| = \|h(x_1) - h(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|,$$
es decir $\tilde{h}$ es una contracción estricta, y además si $\|x\| \leq r$
$$\left\|\tilde{h}(x)\right\| \leq \|y\| + \|h(x)\| \leq r,$$
por lo que $\tilde{h}$ satisface las condiciones del teorema del punto fijo de Banach, es decir, para todo $y \in \bar{B}(0,\frac{r}{2})$ existe un único $\bar{x} \in \bar{B}(0,r)$ tal que $y + h(x) = x \Leftrightarrow y = f(x)$, en otras palabras existe una función $g : \bar{B}(0,\frac{r}{2}) \to \bar{B}(0,r)$ tal que
$$y = f(g(y)).$$

Esta función g es (Lipschitz) continua pues
$$\|x_1 - x_2\| = \|x_1 + f(x_1) - x_2 - f(x_2) + f(x_2) - f(x_1)\|$$

[6] [14, Theorem 1.2 en p. 361].

$$\le \|f(x_2) - f(x_1)\| + \|h(x_1) - h(x_2)\|$$
$$\le \|f(x_2) - f(x_1)\| + \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$$

de donde

$$\|x_1 - x_2\| \le 2\|f(x_2) - f(x_1)\| \Leftrightarrow \|g(y_1) - g(y_2)\| \le 2\|y_1 - y_2\|. \tag{1.1}$$

Finalmente, como f es de clase C^1 tenemos que para todo $x, x_1 \in \bar{B}(0,r)$ se cumple que

$$f(x) = f(x_1) + Df(x_1)(x - x_1) + o(\|x - x_1\|)$$

además como el conjunto $Inv(E) := \{L \in \mathcal{L}(E,E) : L \text{ es invertible}\}$ es abierto, por lo tanto achicando r de ser necesario podemos suponer que $Df(x_1)$ es invertible y en consecuencia, gracias a (1.1) podemos escribir para $x = g(y)$ e $x_1 = g(y_1)$

$$\begin{aligned}
\left\|g(y) - g(y_1) - Df(x_1)^{-1}(y - y_1)\right\| &= \left\|x - x_1 - Df(x_1)^{-1}(f(x) - f(x_1))\right\| \\
&= \left\|x - x_1 - Df(x_1)^{-1} \circ (Df(x_1)(x - x_1) + o(\|x - x_1\|))\right\| \\
&= \left\|Df(x_1)^{-1} o(\|x - x_1\|)\right\| \\
&= \left\|Df(x_1)^{-1} o(\|y - y_1\|)\right\| \\
&= o(y - y_1)
\end{aligned}$$

pues el operador $Df(x_1)^{-1}$ es acotado. Esto demuestra que g es F-diferenciable en y_1 y que

$$Dg(y_1) = Df(g(y_1))^{-1}.$$

Como la aplicación $(\cdot)^{-1}$ es continua (de hecho es analítica) en $Inv(E)$ y en $C(E,E)$, y como Df es continua, entonces Dg también lo es, es decir g es de clase C^1. E inductivamente se sigue que si f es de clase C^k entonces también lo es g. ■

Teorema 1.13 (Teorema de la función implícita)**.** *Sean E, F, G espacios de Banach, $U \subset E$, $V \subset F$ abiertos y $f : U \times V \to G$ una función de clase C^k tal que*

- $f(x_0, y_0) = 0$,
- $\partial_y f(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(F, G)$ *es invertible.*

Entonces existe una vecindad de $x_0 \in U_0 \subset U$ y una única[7] *función $g : U_0 \to V$ de clase C^k tal que $g(x_0) = y_0$ y*

$$f(x, g(x)) = 0 \qquad \forall\, x \in U_0$$

[7] La unicidad es en el siguiente sentido: Si $\tilde{g} : \tilde{U}_0 \to V$ es otra función que satisface lo mismo, entonces $g = \tilde{g}$ en $U_0 \cap \tilde{U}_0$

Demostración. [8]

Como antes, considerando $L = D_2 f(x_0, y_0)^{-1}$ y $\tilde{f} = L \circ f$ podemos suponer que $D_2 f(x_0, y_0) = I_F$ y que $f : U \times V \subseteq E \times F \to F$. Definimos $\psi : E \times F \to E \times F$

$$\psi(x, y) = (x, f(x, y)),$$

que satisface

$$D\psi(x_0, y_0)(h, k) = (h, D_1 f(x_0, y_0)h + k) \Leftrightarrow D\psi(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} I_E & 0 \\ D_1 f(x_0, y_0) & I_F \end{bmatrix}$$

y que claramente es un operador invertible pues

$$D\psi(x_0, y_0)^{-1}(a, b) = (a, -D_1 f(x_0, y_0)a + b). \Leftrightarrow D\psi(x_0, y_0)^{-1} = \begin{bmatrix} I_E & 0 \\ -D_1 f(x_0, y_0) & I_F \end{bmatrix}$$

Por lo tanto el Teorema 1.12 nos dice que existe una inversa local para ψ, esto es

$$(x, y) = \psi(\psi^{-1}(x, y)) = (\psi_1^{-1}(x, y), f(\psi^{-1}(x, y))),$$

por lo que $\psi_1^{-1}(x, y) = x$ y por lo tanto $\psi^{-1}(x, y) = (x, h(x, y))$ para cierta función h de clase C^k que satisface $h(x, 0) = y_0$. Si definimos $g(x) = h(x, 0)$ entonces

$$(x, 0) = \psi(x, h(x, 0)) = \psi(x, g(x)) = (x, f(x, g(x)))$$

es decir $f(x, g(x)) = 0$ para todo x en la vecindad donde está definida ψ^{-1}.

La unicidad de g se deja como ejercicio. ■

Ejercicio 1.5. Sea E un espacio de Banach y $Inv(E) := \{L \in \mathcal{L}(E, E) : L \text{ es invertible}\}$.

1. Muestre que $Inv(E)$ es un conjunto abierto en $\mathcal{L}(E, E)$.

2. Muestre además que el mapa $(\cdot)^{-1} : Inv(E) \to Inv(E)$ es analítico.

Ejercicio 1.6. Muestra la unicidad de la función g en el Teorema 1.13.

1.3. Integración en espacios normados[9]

Si tenemos cálculo diferencial en espacios de Banach, entonces es razonable pensar que podemos tener un cálculo integral. Esto nos lleva a intentar generalizar la integral de Lebesgue para poder tener algo que se pueda parecer a un Teorema del valor medio integral o un Teorema Fundamental del Cálculo.

[8] [14, Theorem 2.1 en p.364].

[9] Esta sección está solo como referencia.

1.3.1. Medibilidad y el teorema de Pettis

En esta sección $(X, \mathcal{B})$ denotará un espacio medible y E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de normado. La familia $\mathcal{B}(X)$ es la σ álgebra de Borel en X.

Definición 1.10 (Función medible). *Diremos que una función $f : X \to E$ es Pettis medible si para cada abierto $U \in \mathcal{B}(X)$ se cumple que $f^{-1}(U) \in \mathcal{B}$.*

Definición 1.11 (Funciones $\mathcal{B}$-simples). *Diremos que $f : X \to E$ es una función simple si es que existe una partición finita de X compuesta por conjuntos medibles E_i, y elementos $f_i \in E$ tales que*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i 1_{E_i}(x).$$

Al conjunto de las funciones $\mathcal{B}$-simples lo denotamos por $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$.

Definición 1.12 (Función fuertemente medible). *Diremos que f es fuertemente medible, si existe una suceción de funciones $\mathcal{B}$ simples tales que*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \text{para todo } x \in X$$

Definición 1.13 (Funcion *separable*). *Diremos que $f : X \to E$ es separable si existe $E_0 \subset E$ subespacio cerrado y separable tal que $f(X) \subseteq E_0$.*

Definición 1.14 (Funcion débilmente medible). *Diremos que $f : X \to E$ es débilmente medible si las funciones $g \circ f : X \to \mathbb{C}$ son medibles para cada $g \in E^*$.*

Definición 1.15 (Subespacio normante). *Diremos que $N \subseteq E^*$ es normante en E si*

$$\|x\| = \sup_{g\in N} \frac{|\langle g, x\rangle|}{\|g\|}$$

Teorema 1.14 (Pettis). *Son equivalentes*

1. *f es fuertemente medible*

2. *f es separante y f es débilmente medible.*

3. *Existe $N \subseteq E^*$ normante tal que f es separante y $g \circ f$ es medible para todo $g \in N$.*

1.3.2. Integral de Bochner

En esta sección $(X, \mathcal{B}, \mu)$ denotará un espacio de medida y E un espacio vectorial de normado.

Definición 1.16 (Funciones μ-simples)**.** *Diremos que $f : X \to E$ es una función simple si es que existe una partición finita de X compuesta por conjuntos medibles E_i, y elementos $f_i \in E$ tales que*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i 1_{E_i}(x).$$

Al conjunto de las funciones simples que satisface $\mu(E_i) < \infty$ para todo i lo denotamos por $\mathcal{S}$

Definición 1.17. *Definimos el operador $\int \,\mathrm{d}\mu : S \to E$*

$$\int f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{N} \mu(E_i) f_i$$

Definición 1.18 (Fuertemente μ-medible)**.** *Diremos que una función $f : X \to E$ es Bochner medible si es que existe un subespacio E_0 separable de E y una función $g : X \to E_0$ tales que*

$$g^{-1}(U) \in \mathcal{B} \qquad \forall\, U \text{ es abierto en } E$$

y

$$\mu\left(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}\right) = 0.$$

Proposición 1.15. *f es Bochner medible si existe una sucesión (S_n) de funciones tales que*

- *$f(x) = \text{lím}_{n\to\infty} S_n(x)$ para casi todo $x \in X$.*
- *Cada S_n es de la forma $S(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} S_k 1_{E_k}$, $E_k \in \mathcal{B}$*

Definición 1.19 (Integral de Bochner)**.** *Diremos que una función Bochner medible $f : X \to E$ es Bochner integrable si existe una sucesión s_n de funciones simples tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \int \|f - s_n\| \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

donde esta última integral es la integral de Lebesgue para funciones de $X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$. Si esto ocurre, definimos

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Proposición 1.16. *f es Bochner integrable si y solo si $\|f\|$ es Lebesgue integrable. Adicionalmente se cumple que*

$$\left\| \int f \mathrm{d}\mu \right\| \leq \int \|f\| \,\mathrm{d}\mu.$$

Teorema 1.17 (Comuntatividad de $\int$ con operadores lineales)**.** *Sean E, F espacios normados y sea $T : E \to F$ un operador lineal continuo*[10]*. Si $f : X \to E$ es Bochner integrable, entonces $T \circ f : X \to F$ es Bochner integrable y se cumple que*

$$\int T \circ f \mathrm{d}\mu = T\Big(\int f \mathrm{d}\mu\Big)$$

[10] También vale para operadores cerrados. Ver Teorema de Hille.

Teorema 1.18 (Convergencia dominada). *Sea (f_n) una sucesión de funciones Bochner integrables sobre un espacio de medida completo, $f : X \to E$ una función tales que*

- $f_n(x) \to f(x)$ *para casi todo* $x \in X$,
- $\|f_n(x)\| \leq g(x)$ *para cierto* $g \in L^1(X)$ *(función Lebesgue integrable).*

Entonces f es Bochner integrable y para cada $A \in \mathcal{B}$ se cumple que

$$\int_A \|f_n - f\| \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

y

$$\int_A f_n \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_A \mathrm{d}\mu.$$

1.4. Introducción a la geometría diferencial[11]

Definición 1.20 (Sub-variedad diferenciable). *Diremos que $M \subseteq \mathbb{R}^k$ es una sub-variedad diferenciable de clase C^l y dimensión m si es que para cada $p \in M$ hay una carta local de clase C^l, es decir, existe una vecindad $p \in U_0 \subset \mathbb{R}^k$ tal que $U_0 \cap M$ es difeomorfo C^l a algún abierto $\Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^m$.*

Tal difeomorfismo $\phi_p : U_0 \cap M \to \Omega_0$ de clase C^l se dice que es una carta local *para M en p, y su inversa $\psi_p := \phi_p^{-1}$ se dice que es una parametrización de $U_0 \cap M$.*

Lema 1.19. *Si $M \subseteq \mathbb{R}^k$ es una sub-variedad diferenciable no vacía, entonces $m \leq k$.*

Idea de la demostración. Sea $p \in M$ y ϕ_p una carta local para M en p. Como ϕ_p es un difeomorfismo, su inversa $\psi_p : \Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^m \to U_0 \cap M \subseteq \mathbb{R}^k$ también lo es y para todo x en una vecindad de $\phi(p)$ se cumple que

$$\phi_p(\psi_p(x)) = x \Rightarrow D\phi_p(\psi_p(x)) \circ D\psi_p(x) = I_{\mathbb{R}^m}$$

es decir el mapa $D\psi_p(x)$ tiene una inversa por la izquierda y por lo tanto debe ser inyectivo, pero $D\psi_p(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, es decir, se debe cumplir que $m \leq k$. ■

Teorema 1.20. *Sean $0 \leq m \leq k$ y $M \subseteq \mathbb{R}^k$ un conjunto con $p_0 \in M$. Son equivalentes:*

1. *Existe un abierto $p_0 \in U_0 \subseteq M$ y un difeomorfismo $\phi_0 : U_0 \to \varphi(U_0) \subset \mathbb{R}^m$.*
2. *Existen abiertos $U, \Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ y un difeomorfismo $\phi : U \to \Omega$ tal que $p_0 \in U$ y*

$$\phi(U \cap M) = \Omega \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

[11] Lo expuesto en esta sección es una adaptación de lo que aparece en [23, Chapter 2]

3. *Existe un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^k$ y una función diferenciable $f : U \to \mathbb{R}^{k-m}$ tal que $p_0 \in U \cap M$, la derivada $Df(p) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k-m}$ es sobreyectiva para todo $p \in U \cap M$ y*

$$U \cap M = f^{-1}(0) = \{x \in U : f(x) = 0\}.$$

En el caso de que 1 sea cierta, entonces el difeomorfismo de 2 se puede escoger de tal manera que $U \cap M \subseteq U_0$ y $\phi(x) = (\phi_0(x), 0)$ para todo $x \in U \cap M$.

Ejemplo 1.6. Sea $M = \mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$:

(1): Sea $U_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z > 0\}$ y $\Omega_0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Definimos $\phi : U_0 \to \Omega_0$ como

$$\phi_0(x, y, z) = (x, y),$$

que tiene como inversa

$$\psi_0(a, b) = (a, b, \sqrt{1 - a^2 - b^2}).$$

(2): Sean $U = \{(x, y, z) : z > 0\}$ y $\phi : U \to \mathbb{R}^3$ definida como

$$\phi(x, y, z) = (x, y, 1 - x^2 - y^2 - z^2).$$

Claramente ϕ es una biyección de U a $\phi(U) = \Omega = \{(a, b, c) : c < 1 - a^2 - b^2\}$ con inversa

$$\psi(a, b, c) = (a, b, \sqrt{1 - c - a^2 - b^2})$$

Además si $(x, y, z) \in U \cap M$ entonces $x^2 + y^2 = 1 - z^2 < 1$ y

$$\phi(x, y, z) = (x, y, 1 - x^2 - y^2 - z^2) = (x, y, 0) \in \Omega \cap \mathbb{R}^2 \times \{0\} = \left\{(a, b, 0) : a^2 + b^2 < 1\right\},$$

y si $(a, b, 0) \in \Omega \cap \mathbb{R}^2 \times \{0\} = \{(a, b, 0) : a^2 + b^2 < 1\}$ entonces se puede definir

$$x = a, \;\; y = b, \;\; z = \sqrt{1 - a^2 + b^2}$$

y se obtiene que

$$\phi(x, y, z) = (a, b, 1 - a^2 - b^2 - \left(1 - a^2 + b^2\right)) = (a, b, 0)$$

(3): Sea $U = \{(x, y, z) : z > 0\}$ y $f : U \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2,$$

luego si $(x, y, z) \in M \cap U$ entonces $z > 0$ y $Df(x, y, z)(0, 0, c) = -2zc$ es decir $Df(x, y, z)$ es sobreyectivo. Además

$$U \cap M = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \;\; z > 0\right\} = \{(x, y, z) \in U : f(x, y, z) = 0\}.$$

Usando los conjuntos $\{z < 0\}, \{y > 0\}, \{y < 0\}, \{x > 0\}, \{x < 0\}$ y mapas similares, se puede encontrar un atlas para S^2 compuesto de 6 cartas locales.

Idea de la demostración del Teorema 1.20. [12]

(2⇒1): Si $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_k)$ basta tomar $U_0 = U \cap M$ y $\phi_0 = (\phi_1, \dots, \phi_m)|_{U_0}$, con $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^m : (x, 0) \in \Omega\}$.

(2⇒3): Si $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_k)$ basta tomar $f = (\phi_{m+1}, \dots, \phi_k)$.

(1⇒2): Si $\phi_0 : U_0 \to \Omega_0$ es un difeomorfismo y ψ_0 es su inversa, entonces como vimos en el Lema 1.19 $D\psi_0(x_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ es inyectiva. Esto quiere decir[13] que se puede aumentar la matriz $D\psi_0(x_0)$ mediante una matriz $B \in \mathbb{R}^{k\times(k-m)}$ de modo que $[D\psi(x_0) \,|\, B]$ es invertible en $\mathbb{R}^{k\times k}$. Con esto si definimos mapa $\psi : \Omega_0 \times \mathbb{R}^{m-k} \to \mathbb{R}^k$ como

$$\psi(x, y) = \psi_0(x) + By.$$

se tiene que $D\psi(x_0, 0) = [D\psi_0(x_0) \,|\, B]$ es invertible y por el teorema de la función inversa, ha de existir una vecindad $\tilde{\Omega}$ de $(x_0, 0)$ tal que $\psi\big|_{\tilde{\Omega}}$ es un difeomorfismo. Notando que

$$\tilde{U}_0 = \left\{\psi_0(x) : x \in \Omega_0, (x, 0) \in \tilde{\Omega}\right\} = \left\{p \in U_0 : (\phi_0(p), 0) \in \tilde{\Omega}\right\}$$

es abierto en M y por lo tanto existe W abierto en $\mathbb{R}^k$ tal que $\tilde{U}_0 = W \cap M$. Con esto podemos definir $U = \psi(\tilde{\Omega}) \cap W$ y $\Omega = \tilde{\Omega} \cap \psi^{-1}(W)$ y notar que $\psi : \Omega \to U$ es un difeomorfismo.

Falta verificar que $p = \psi(x, y) \in U \cap M \Leftrightarrow y = 0$. Como $p \in U_0$ entonces $(\phi_0(p), 0) \in \tilde{\Omega}$, de donde

$$\psi(\phi_0(p), 0) = \psi_0(\phi_0(p)) = p = \psi(x, y),$$

y como ψ es un difeomorfismo, entonces en inyectivo y por lo tanto $x = \phi_0(p)$ e $y = 0$. De la definición de ψ es evidente que $y = 0 \Rightarrow \psi(x, y) = \psi_0(x) \in M \cap U$.

(3⇒2): Sea f como en el enunciado, entonces $Df(p_0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k-m}$ es sobreyectivo, luego existe[14] una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$ tal que la matriz aumentada

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A \\ Df(p_0) \end{bmatrix}$$

es invertible en $\mathbb{R}^{k\times k}$. Si definimos $\phi : U \to \mathbb{R}^k$ como

$$\phi(p) = \begin{bmatrix} Ap \\ f(p) \end{bmatrix}$$

entonces $D\phi(p_0) = \tilde{A}$ y nuevamente gracias al teorema de la función inversa, existe una vecidad de $p_0 \in \tilde{U}$, tal que $\phi\big|_{\tilde{U}}$ es un difeomorfismo. Como

$$\left\{p \in \tilde{U} : f(p) = 0\right\} = \left\{p \in \tilde{U} : \phi(p) \in \mathbb{R}^m \times \{0\}\right\}$$

[12] Ver [23, Theorem 2.1.10].

[13] Versión simple del hecho de que un operador inyectivo admite una inversa (continua) por la izquierda cuando el rango es cerrado y admite un complemento, que es evidente en dimensión finita (pero no siempre cierto en dimensión infinita, incluso en espacios de Hilbert).

[14] Versión simplie del hecho de que un operador sobreyectivo admite una inversa (continua) por la derecha cuando el núcleo admite un complemento, que es evidente en dimensión finita (o un espacio de Hilbert).

se concluye lo pedido. ∎

Definición 1.21 (Valor regular)**.** *Para $m \leq k$ sea $f : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k-m}$ una función de clase C^1. Diremos que $c \in \mathbb{R}^{k-m}$ es un valor regular para f si para todo $p \in U$ que satisface $f(p) = c$, entonces $Df(p) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k-m}$ es sobreyectivo. En caso contrario diremos que c es un valor crítico.*

Proposición 1.21. *Si c es un valor regular para f entonces $M := f^{-1}(c)$ es una sub-variedad diferenciable de dimension m en $\mathbb{R}^k$*

Demostración. Aplicar el Teorema 1.20. ∎

Definición 1.22. *Sea $M \subseteq \mathbb{R}^N$ una variedad diferenciable de dimensión m y sea $p \in M$. Diremos que $h \in \mathbb{R}^N$ es tangente a M en p si existe $\delta > 0$ y*[15] *$\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ una función suave tal que*

$$\gamma(0) = p, \quad y \quad \dot{\gamma}(0) = h.$$

Denotamos por T_pM al conjunto de todos los vectores tangentes y lo llamamos el espacio tangente a M en el punto p.

Observación 1.11. También se puede definir

$$\mathcal{T}_p = \left\{\gamma : \gamma \in C^1,\ \gamma : (-\delta, \delta) \to M,\ \gamma(0) = p\right\}$$

y la relación de equivalencia $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0)$, entonces

$$T_pM \cong \mathcal{T}_p \Big/ \sim .$$

Teorema 1.22. *T_pM es un sub-espacio vectorial de dimensión m en $\mathbb{R}^k$.*

Demostración. [16] Sea $U_0 \subset M$ un abierto, $p \in U_0$ y $\phi_0 : U_0 \to \Omega_0 \subset \mathbb{R}^m$ una carta local. Sea ψ_0 la inversa de ϕ_0, que satisface $D\psi_0 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ y veamos que

$$T_pM = R(D\psi_0(x_0))$$

donde $x_0 = \phi(p_0)$. En efecto, sea $\xi \in \mathbb{R}^m$ y $\delta > 0$ pequeño de modo que $x_0 + t\xi \in \Omega_0$ para todo $|t| < \delta$ (Ω_0 es abierto). Sea $\gamma(t) = \psi_0(x_0 + t\xi)$ y notemos entonces que

$$\dot{\gamma}(0) = D\psi_0(x_0)\xi,$$

es decir $R(D\psi_0(x_0)) \subset T_pM$.

[15] Se puede reparametrizar γ para que su dominio sea todo $\mathbb{R}$.
[16] Ver [23, Theorem 2.2.3].

Sea ahora $h \in T_pM$, luego existe una curva suave tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = h$. Usando la equivalencia 2 del Teorema 1.20 tenemos que existe $U \subset \mathbb{R}^k$ abierto y un difeomorfismo ϕ tal que

$$\phi(U \cap M) = \Omega \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

Como $p \in U$ es abierto, podemos suponer que $\gamma(t) \in U$ para todo $|t| < \delta_1$, de donde

$$\phi(\gamma(t)) \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \qquad \forall\ |t| < \delta_1,$$

y por lo tanto

$$D\phi(p)h = D\phi(\gamma(0))\dot{\gamma}(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi(\gamma(t)) \in \mathbb{R}^m \times \{0\},$$

y así

$$h \in (D\phi(p))^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

En resumen tenemos que

$$R(D\psi_0(x_0)) \subset T_pM \subset (D\phi(p))^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}),$$

pero $\dim(R(D\psi_0(x_0))) = m = \dim((D\phi(p))^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\}))$ de donde la única posibilidad es que todos los conjuntos sean iguales, y por lo tanto T_pM es un espacio vectorial de dimensión m. ■

Lema 1.23. *Sea $U \subset \mathbb{R}^k$ un abierto que contiene a p y $f : U \to \mathbb{R}^{k-m}$ una función C^1 tal que 0 es un valor regular para f y $M \cap U = f^{-1}(\{0\})$, entonces $T_pM = N(Df(p))$.*

Demostración. [17] Como 0 es un valor regular para f entonces M es una sub-variedad de dimensión $k - (k - m) = m$ en $\mathbb{R}^k$ y por lo tanto $\dim T_pM = m$.

Ahora, si $h \in T_pM$ entonces existe una curva $\gamma \subseteq M$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = h$. Así $f(\gamma(t)) = 0$ para todo t pequeño, de donde al derivar y evaluar en $t = 0$ se concluye que

$$Df(p)h = Df(\gamma(0))\dot{\gamma}(0) = 0,$$

es decir $T_pM \subset N(Df(p))$. Adicionalmente, como $k = \dim N(Df(p)) + \dim R(Df(p)) = \dim N(Df(p)) + (k - m)$ concluimos que $\dim(N(Df(p))) = m = \dim T_pM$ y por tanto los espacios deben coincidir. ■

Ejemplo 1.7. Si consideramos $M = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ y $p = (0, 0, 1) \in M$ entonces $M \cap U = f^{-1}(0)$ donde $U = \{z > 0\}$ para

$$f(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Así $Df(p) = (0, 0, -2)$ es sobreyectivo y por lo tanto

$$T_pM = N(Df(p)) = span\{(0, 0, -1)\}^{\perp} = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} = R(D\psi_0(0, 0)).$$

[17] Ver [23, Theorem 2.2.3].

1.5. Algunos criterios de compacidad

Teorema 1.24 (Heine-Borel-Lebesgue)**.** *$K \subseteq \mathbb{K}^N$ es compacto si y solo si K es cerrado y acotado.*

Demostración. Ver [11, Chapter 0]. ■

Teorema 1.25 (Arzela-Ascoli)**.** *Sea X un espacio regular*[18] *localmente compacto, (Y, d_Y) un espacio métrico*[19] *y $K \subset C(X, Y)$ un conjunto que satisface*

- *K es equicontinuo en todo punto, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ y todo $x_0 \in X$ existe una vecindad $V \ni x_0$ tal que*

$$y \in V \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(y)) < \varepsilon \qquad \forall f \in K.$$

- *$K(x) := \{f(x) : f \in K\}$ es relativamente compacto en Y para todo $x \in X$.*

Entonces $\overline{K}$ es compacto en $C(X, Y)$ bajo la topología de convergencia uniforme en compactos[20] *de X.*

Demostración. Ver [13, Theorem 17 en p.233]. ■

Observación 1.12*.* Caso típicos en que se usa este teorema:

- X un espacio compacto, así se puede usar la convergencia uniforme en $C(X, Y)$,
- Y un espacio métrico completo, así se puede caracterizar los conjuntos relativamente compactos por los totalmente acotados[21],
- Y es un espacio vectorial normado de dimensión finita, así los conjuntos relativamente compactos son los conjuntos acotados.

Teorema 1.26 (Banach-Alaouglu-Bourbaki)**.** *Sea X un espacio de Banach, entonces el conjunto*

$$B_{X^*} = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$$

es compacto para la topología $\sigma(X^*, X)$.

Demostración. Ver [2, Capítulo 3] ■

[18] Un espacio topológico es regular si se pueden separar puntos de conjuntos cerrados.

[19] Se puede relajar a pedir que sea un espacio Haussdorf *uniforme* (Ver [13, Chapter 6]) que es una generalización de la idea de espacio métrico.

[20] $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in K} d_Y(f_n(x), f(x)) = 0$ para todo $K \subseteq X$ compacto.

[21] Ver [11, Theorem 0.25].

Corolario 1.27. *Sea X un espacio de Banach y sea $K \subseteq X^*$ un conjunto cerrado (fuerte) y acotado. Entonces K es compacto en $\sigma(X^*, X)$.*

Proposición 1.28. *Sea X un espacio de Banach separable y (f_n) un sucesión acotada en X^*. Entonces (f_n) tiene una sub-sucesión convergente en la topología $\sigma(X^*, X)$.*

Demostración. Ver [2, Corollary 3.30]. ■

Teorema 1.29 (Kakutani)**.** *Sea X un espacio de Banach, entonces X es reflexivo si y solo si*

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

es compacto para la topología $\sigma(X, X^*)$.

Demostración. Ver [2, Theorem 3.17] ■

Proposición 1.30. *Sea X un espacio de Banach reflexivo y (x_n) un sucesión acotada en X. Entonces (x_n) tiene una sub-sucesión convergente en la topología $\sigma(X, X^*)$.*

Demostración. Ver [2, Corollary 3.18]. ■

Proposición 1.31. *Sea X un espacio de Banach reflexivo y $C \subseteq X$ un convexo, cerrado y acotado. Entonces C es compacto en $\sigma(X, X^*)$.*

Demostración. Ver [2, Corollary 3.22]. ■

Teorema 1.32 (Kolmogorov-Riesz-Frechet)**.** *Sea $1 \leq p < \infty$ y $K \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ un conjunto acotado que verifica*[22]

$$\lim_{|h|\to 0} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^p} = 0 \qquad \textit{uniformemente para } f \in K, \tag{1.2}$$

entonces para todo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ con medida finita se cumple que

$$K\big|_{\Omega} = \left\{f\big|_{\Omega} : \Omega \to \mathbb{R} : f \in K\right\}$$

tiene clausura compacta en $L^p(\Omega)$.

Demostración. Ver [2, Theorem 4.26]. ■

Corolario 1.33. *Sea $1 \leq p < \infty$ y $K \subseteq L^p(\mathbb{R}^N)$. Si se verifica (1.2) y además*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \Omega \subseteq \mathbb{R}^N, \;\; |\Omega| < \infty \; \forall f \in K \quad \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)} < \varepsilon,$$

entonces K tiene clausura compacta en $L^p(\mathbb{R}^N)$.

[22] Esta propiedad es una versión de equicontinuidad en L^p.

Demostración. Ver [2, Corollary 4.27]. ■

Teorema 1.34 (Dunford-Pettis)**.** *Sea $K \subseteq L^1(\Omega)$ un conjunto acotado que es equi-integrable, esto es*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, A \subseteq \Omega,\ \ |A| < \delta\ \forall\, f \in K \quad \int_A |f| < \varepsilon, \tag{1.3}$$

y

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \omega \subseteq \Omega,\ \ |\omega| < \infty\ \forall\, f \in K \quad \int_{\Omega\setminus\omega} |f| < \varepsilon, \tag{1.4}$$

entonces $\overline{K}$ es compacto en la topología débil $\sigma(L^1, L^\infty)$.

Demostración. Ver [24, Chapter 19 - Theorem 12] para el caso $|\Omega| < \infty$ y [2, Problem 23] en general. ■

1.5.1. Medidas de Radon

En esta parte X es un espacio topológico Haussdorf localmente compacto.

Definición 1.23 (Medidas de Radon)**.** *Sea $\mathcal{B}$ una σ-álgebra Boreliana en X y una medida $\mu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}_+}$, diremos que μ es una medida de Radon si se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *$\mu(K) < \infty$ para todo K compacto.*
2. *μ es regular exterior, es decir, para todo $A \in \mathcal{B}$*
$$\mu(A) = \text{ínf}\,\{\mu(O) : A \subseteq O,\ O \text{ abierto}\}\,.$$
3. *μ es regular interior sobre los abiertos, es decir, para todo abierto O*
$$\mu(O) = \sup\,\{\mu(K) : K \subseteq O,\ K \text{ compacto}\}\,.$$

Denotamos por $\mathcal{M}^+(X)$ al conjunto de las medidas de Radon sobre X.

Ejemplo 1.8. La medida de Lebesgue $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}, \mathrm{d}x)$ es una medida de Radon.

Definición 1.24. *Diremos que $I : C_c(X) \to \mathbb{R}$ un funcional lineal es no-negativo si*

$$I(f) \geq 0 \qquad \forall\, f \geq 0$$

Proposición 1.35. *Sea I un funcional lineal no-negativo sobre $C_c(X)$, entonces para cada $K \subset X$ compacto, existe una constante $C_K > 0$ tal que*

$$|I(f)| \leq C_k \left\| f \right\|_\infty,$$

para todo f tal que $\operatorname{supp} f \subset K$.

Demostración. Ver [11, Proposition 7.1]. ■

Teorema 1.36 (Representación de Riesz-Markov I). *Sea I un funcional lineal no-negativo sobre $C_c(X)$, entonces existe una única medida $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ tal que*

$$I(f) = \int f \mathrm{d}\mu \qquad \forall f \in C_c(X).$$

Idea de la demostración. Definir para cada $U \subseteq X$ abierto la función de conjuntos

$$\mu_f(U) = \sup \{I(f) : f \in C_c(U) \text{ y } 0 \leq f \leq 1_U\},$$

y luego verificar que

$$\mu_f^*(A) = \text{ínf} \{\mu_f(U) : U \supseteq A, U \text{ abierto}\}$$

es una medida exterior.

Ver [11, Theorem 7.2] para los detalles. ■

Teorema 1.37 (Descomposición de Jordan). *Dada una medida con signo ν entonces existen únicas medidas positivas $\nu_\pm$ tales que*[23] $\nu_+ \perp \nu_-$ *y*

$$\nu = \nu_+ - \nu_-$$

Demostración. Ver [11, Theorem 3.4]. ■

Definición 1.25. *Una función*[24] $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ *se dice medida compleja si* $\mu(\varnothing) = 0$ *y*

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n),$$

donde la serie converge absolutamente en $\mathbb{C}$. Para una medida compleja μ se define la variación total $|\mu|$ como

$$|\mu|(B) = \sup \left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} |\mu(B_n)| : \textit{los } B_n\textit{'s son disjuntos y } B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \right\}$$

Proposición 1.38. *Si μ es una medida compleja entonces $|\mu|(X) < \infty$.*

Demostración. Ver [26, Theorem 6.4] ■

Definición 1.26. *Diremos que μ es una medida de Radon compleja si es que se puede escribir como $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ con $\mu_k = \mu_k^+ - \mu_k^-$ y cada $\mu_k^\pm$ es una medida de Radon finita. Denotamos por $M(X)$ al conjunto de las medidas de Radon complejas y se equipa con la norma*[25]

$$\|\mu\| = |\mu|(X),$$

donde $|\mu|$ es la variación total de μ. El espacio de las medidas de Radon complejas se denota $\mathcal{M}(X)$.

[23] Recodar que $\mu \perp \nu$ si es que existen $A \cap B = \varnothing$ tales que $X = A \cup B$ y $\mu(B) = \nu(A) = 0$

[24] Notar que a diferencia de las medidas *"reales"*, no se permite el valor $+\infty$

[25] Ver [11, Propostion 7.16].

Teorema 1.39 (Representación de Riesz-Markov II)**.** *Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto y denotemos por $C_0(X)$ a la clausura de $C_c(X)$ bajo la norma uniforme. Entonces la aplicación $\mathcal{I} : M(X) \to C_0(X)^*$ definida como $\mathcal{I}(\mu) = I_\mu$ donde*

$$I_\mu(f) = \int f \mathrm{d}\mu,$$

es un isomorfismo isométrico.

Demostración. Ver [11, Theorem 7.17]. ■

Observación 1.13. Cuando $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es acotado entonces se puede ver a $L^1(\Omega)$ como subconjunto de $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ mediante la siguiente identificación: dado $f \in L^1(\Omega)$ consideramos $Tf \in C(\overline{\Omega})^*$ definida como

$$\langle Tf, u\rangle = \int_\Omega fu\mathrm{d}x,$$

que define un mapa lineal e isométrico, pues

$$\|Tf\|_{C(\overline{\Omega})^*} = \sup_{u\in C(\overline{\Omega})} \frac{\int fu}{\|u\|_\infty} = \|f\|_{L^1},$$

y el teorema de Riesz nos dice que $f \cong Tf \cong \mu_f$ para la medida de Radon μ_f dada por

$$\mu_f(B) = \int_B f\mathrm{d}x \qquad \forall\, B \subseteq \Omega \text{ medible.}$$

Dado que el teorema de Riesz permite identificar $M(X)$ con $C_0(X)^*$ entonces en $M(X)$ podemos usar la topología débil-* heredada de $C_0(X)$, en otra palabras, podemos escribir $\mu_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ si y solo si

$$\int f\mathrm{d}\mu_n \to \int f\mathrm{d}\mu \qquad \forall\, f \in C_0(X).$$

Definición 1.27. *Diremos que $\mu_n \to \mu$* tenuemente[26] *si $\mu_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ en la topología débil-* $\sigma(\mathcal{M}(X), C_0(X))$.*

Observación 1.14. Al tratarse de la topología débil-* podemos usar el Teorema 1.26 para caracterizar los compactos en $M(X)$ con la topología tenue: son los conjuntos tenuemente cerrados y acotados.

Corolario 1.40 (Compacidad débil-* en L^1)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto y sea (f_n) una sucesión acotada en $L^1(\Omega)$. Entonces existe una subsucesión (f_{n_k}) y una medida de Radon μ tal que*

$$f_{n_k} \xrightharpoonup[k\to\infty]{*} \mu \quad \text{en } \sigma(\mathcal{M}(\Omega), C_0(\Omega)) \Leftrightarrow \int gf_{n_k}\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} \int g\mathrm{d}\mu \quad \forall\, g \in C_0(\Omega).$$

[26] En inglés se usa *vaguely*, la traducción literal sería *vagamente* pero es común usar *débilmente*, pero tiene la desventaja de que puede generar confusión si no se entiende bien el contexto.

Proposición 1.41. *Sea $\mu_n, \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ y $F_n(x) = \mu_n((-\infty, x])$ y $F(x) = \mu((-\infty, x])$.*

- *Si $\sup_n \|\mu_n\| < \infty$ y $F_n(x) \to F(x)$ para todo x punto de continuidad de F entonces $\mu_n \to \mu$ tenuemente.*

Demostración. Ver [11, Proposition 7.19]. ■

1.6. Conceptos básicos sobre espacios de Sobolev

En esta sección U denotará un abierto conexo[27] en $\mathbb{R}^N$. En la mayoría de los casos se agregará la hipótesis de que U tiene frontera *suave*, esto quiere decir que si vemos el conjunto ∂U como una sub-variedad de $\mathbb{R}^N$, entonces esta es una variedad de clase C^k para cualquier $k \in \mathbb{N}$. Esta hipótesis es mucho mas fuerte de la necesaria en algunos casos, pero es útil para evitar complicaciones técnicas.

El propósito de esta sección es recopilar algunos resultados que aparecerán en algunos ejemplos posteriores. El lector interesado en el tema deberá consultar referencias apropiadas como lo pueden ser [2] y [10].

Definición 1.28 (Derivada débil)**.** *Diremos que la función[28] $f \in L^1_{loc}(U)$ tiene una derivada parcial débil respecto a x_i si es que existe una función $g \in L^1_{loc}(U)$ que verifica*

$$\int_U f \partial_{x_i} \varphi = -\int_U g\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(U),$$

en cuyo caso escribimos $\partial_{x_i} f = g$.

Definición 1.29 (Espacios de Sobolev)**.** *Para cada $1 \le p \le \infty$ definimos el espacio*

$$W^{1,p}(U) = \{f \in L^p(U) : f \text{ tiene todas su derivadas parciales débiles en } L^p(U)\}.$$

Cuando $p = 2$ denotamos $W^{1,2}(U) = H^1(U)$

A continuación se listarán los aspectos fundamentales de estos espacios.

Teorema 1.42. *Para cada $1 \le p \le \infty$ el espacio $W^{1,p}(U)$ es un espacio de Banach cuando se equipa con la norma*

$$\|u\|_{1,p}^p = \|u\|_p + \sum_{i=1}^N \|\partial_{x_i} u\|_p = \|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p.$$

Cuando $p = 2$, $H^1(U)$ es un espacio de Hilbert si se usa el producto interno

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^N (\partial_{x_i} u, \partial_{x_i} v)_{L^2} = (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla u)_{L^2}.$$

Si $1 \le p < \infty$ entonces $W^{1,p}(U)$ es separable, y si $1 < p < \infty$ entonces $W^{1,p}(U)$ es reflexivo.

[27] A los abiertos conexos usualmente se les conoce como *dominios*.

[28] Diremos que $f \in L^1_{loc}(U)$ si $f \in L^1(K)$ para todo $K \subseteq U$ compacto.

Demostración. Ver [2, Theorem 9.1] ∎

Teorema 1.43 (Densidad)**.** *Si $1 \leq p < \infty$, el espacio $W^{1,p}(U) \cap C^\infty(U)$ es denso en $W^{1,p}(U)$*

Demostración. Este es un resultado profundo debido a Meyers y Serrin [19]. ∎

Teorema 1.44 (Inclusiones)**.** *Sea $1 \leq p \leq \infty$ y U un abierto suave (con frontera acotada), entonces*

1. *(Sobolev-Gagliardo-Nirenberg) Si $p < N$ entonces $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(U)$ es una inclusión continua para todo $p \leq q \leq \frac{Np}{N-p}$.*
2. *Si $p = N$ entonces $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(U)$ es una inclusión continua para todo $p \leq q < \infty$.*
3. *(Morrey) Si $p > N$ entonces $W^{1,p}(U) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{U})$ es una inclusión continua para todo $0 < \alpha \leq 1 - \frac{N}{p}$.*

Adicionalmente, si U es acotado entonces

1. *(Rellich-Kondrachov) Si $p < N$ entonces $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(U)$ es una inclusión compacta para todo $1 \leq q < \frac{Np}{N-p}$.*
2. *Si $p = N$ entonces $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(U)$ es una inclusión compacta para todo $1 \leq q < \infty$.*
3. *Si $p > N$ entonces $W^{1,p}(U) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{U})$ es una inclusión compacta para todo $0 \leq \alpha < 1 - \frac{N}{p}$.*

Demostración. Ver [2, Theorems 9.9, 9.11, 9.12, 9.16 y Corollaries 9.10, 9.14]. ∎

Definición 1.30 (Espacios $W_0^{1,p}$)**.** *La clausura del espacio $C_c^\infty(U)$ en $W^{1,p}(U)$ se denota por $W_0^{1,p}(U)$, y cuando U es suave corresponde*[29] *al espacio de funciones de* traza *nula, es decir*

$$u \in W_0^{1,p}(U) \quad \Leftrightarrow \quad u \in W^{1,p}(U) \quad y \quad u = 0 \text{ c.t.p. en } \partial U.$$

Cuando $p = 2$ se denota $W_0^{1,p}(U) = H_0^1(U)$.

Teorema 1.45 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Para $1 \leq p < \infty$, U acotado y todo $u \in W_0^{1,p}(U)$ se cumple que*

$$\|u\|_p \leq C \|\nabla u\|_p ,$$

en particular $\|\nabla u\|_p$ (resp. $(u, v) = (\nabla u, \nabla v)$) define una norma (resp. producto interno) equivalente en $W_0^{1,p}(U)$ (resp. $H_0^1(U)$).

Demostración. Ver [2, Corollary 9.19]. ∎

[29] Ver [2, Theorem 9.17].

Para cada $1 \leq p \leq \infty$ se puede considerar el espacio dual de $W^{1,p}(U)$, sin embargo, la situación mas común ocurre cuando $1 \leq p < \infty$ y para el sub-espacio $W_0^{1,p}(U)$ en cuyo caso el espacio dual se puede caracterizar de la siguiente manera

Teorema 1.46 (Dual de $W_0^{1,p}$)**.** *Para $1 \leq p < \infty$ denotamos por $W^{-1,p'}(U)$ al espacio dual de $W_0^{1,p}(U)$. Además, para cada $F \in W^{-1,p'}(U)$ existen funciones $f_k \in L^{p'}(U)$, $k = 0, 1, \ldots, N$ tales que*

$$\langle F, u \rangle = \int_U f_0 u + \sum_{k=1}^{N} \int_U f_k \partial_{x_k} u, \qquad \forall\, u \in W_0^{1,p}(U),$$

con

$$\|F\|_{W^{-1,p'}(U)} = \max_{k=0,\ldots,p} \|f_k\|_{L^{p'}(U)} .$$

En caso en que U sea acotado, se puede considerar $f_0 \equiv 0$.

Demostración. Ver [2, Proposition 9.20]. ■

Observación 1.15. El teorema anterior dice que, al menos formalmente, que

$$F = f_0 - \sum_{k=1}^{N} \partial_{x_k} f_k \in W^{-1,p'}(U),$$

es decir, $L^{p'}$ y las *derivadas* de funciones en $L^{p'}$ están en $W^{-1,p'}$. Con este razonamiento se puede observar que cuando $p = 2$

$$H_0^1(U) \hookrightarrow L^2 \hookrightarrow H^{-1}(U),$$

y que todas las inclusiones continuas, pero estrictas. Para $p \neq 2$ se cumple que

$$W_0^{1,p}(U) \hookrightarrow L^p(U) \quad \text{y} \quad L^{p'}(U) \hookrightarrow W^{-1,p'}(U),$$

con inclusiones continuas pero estrictas, y si U es acotado y $p > 2$ entonces

$$W_0^{1,p}(U) \hookrightarrow L^p(U) \hookrightarrow L^{p'}(U) \hookrightarrow W^{-1,p'}(U),$$

pues $p' < 2 < p$.

Capítulo 2

Métodos de minimización

2.1. Funciones semi-continuas inferiores

Definición 2.1. *Dado X espacio topológico y $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, diremos que f es semi-continua inferior (L.S.C.) si para todo $a \in \mathbb{R}$ el conjunto*

$$E = \{x \in X : f(x) > a\}$$

es abierto.

La siguiente proposición muestra algunas caracterizaciones y propiedades de las funciones semi-continuas inferiores

Proposición 2.1. *En un espacio topológico cualquiera*

1. *Se cumple que*

$$f \text{ es L.S.C.} \Leftrightarrow \operatorname{Epi}(f) = \{(x, y) : y \geq f(x)\} \text{ es cerrado en } X \times \mathbb{R}$$

2. *Se cumple que*[1]

$$f \text{ es L.S.C.} \Leftrightarrow f(\lim x_\alpha) \leq \liminf f(x_\alpha) \text{ para cada red convergente } (x_\alpha)_{\alpha \in A}.$$

3. *Si f, g son L.S.C. y $f, g > -\infty$ entonces $f + g$ es L.S.C..*

4. *Si f es L.S.C. y $r > 0$ entonces rf es L.S.C..*

5. *Si f_1, f_2 son L.S.C entonces $f(x) = \min\{f_1(x), f_2(x)\}$ es L.S.C..*

6. *Si $f(x) = \sup_{\alpha \in A} f_\alpha(x)$ y cada f_α es L.S.C, entonces f es L.S.C..*

7. *Si $f_n \to f$ uniformemente y cada f_n es L.S.C y finita. entonces f es L.S.C..*

[1] Ver [13, Chapter 2] para el concepto de red.

8. *Si X es un espacio topológico normal y $f \geq 0$ es una una función L.S.C. finita, entonces*

$$f(x) = \sup \{g(x) : g \text{ es continua y } g(x) \leq f(x)\}$$

En un espacio métrico

9. *Se cumple que*

$$f \text{ es L.S.C. } \Leftrightarrow f(x) \leq \liminf_{x_n \to x} f(x_n)$$

10. *En un espacio de Banach y si f es convexa*

$$f \text{ es L.S.C. } \Leftrightarrow \{x \in X : f(x) > a\} \text{ es abierto en } \sigma(E, E^*).$$

Si $\{x \in X : f(x) > a\}$ es abierto en $\sigma(E, E^*)$ para una función cualquiera, diremos que tal función es débilmente semi-continua inferior (w.L.S.C.).

11. *En un espacio de Banach, si f es continua y convexa, entonces es w.L.S.C.*

Demostración. Ver por ejemplo [11, Proposition 7.11] o [21, Chapter 1]. ■

Teorema 2.2. *Sea X un espacio topológico compacto y $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ una función L.S.C. Entonces existe $x_0 \in X$ tal que*

$$f(x_0) = \inf \{f(x) : x \in X\}.$$

Demostración. Sea $C = f(X)$ y para cada $c \in C$ definimos

$$F_c = \{x \in X : f(x) \leq c\}.$$

Como f es L.S.C. entonces F_c es un conjunto cerrado para cada $c \in C$. Si tomamos $c_1, \ldots, c_n \in C$ entonces

$$\bigcap_{k=1}^{n} F_{c_n} = F_c \neq \varnothing,$$

donde $c = \min c_k$. Es decir la colección $\{F_c\}_{c \in C}$ satisface la propiedad de la intersección finita, y como X es compacto entonces

$$F := \bigcap_{c \in C} F_c \neq \varnothing.$$

Pero si $x_0 \in F$ entonces $f(x_0) \leq c$ para todo $c \in C$ de donde concluimos que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in X$. ■

Ejercicio 2.1. Sea X un Banach reflexivo y $f : M \subseteq X \to \mathbb{R}$ w.L.S.C.. Si M es acotado y cerrado débil[2], entonces f alcanza su ínfimo.

[2] Se puede cambiar la hipótesis por M es cerrado (fuerte), acotado y convexo

Ejercicio 2.2. Sea X un Banach reflexivo, $f : M \subset X \to \mathbb{R}$ convexa L.S.C. Si M es convexo y cerrado, y además f es coercitiva, es decir

$$f(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty,$$

entonces f alcanza su ínfimo.

Ejercicio 2.3. Sea X un Banach reflexivo, $f : M \subset X \to \mathbb{R}$ w.L.S.C. Si M es cerrado débil, y además f es coercitiva entonces f alcanza su ínfimo.

Ejercicio 2.4. Sea X un espacio normado, $M \subset X$ un convexo abierto y $f : M \to \mathbb{R}$ una función 2 veces G-diferenciable. Son equivalentes

1. f es convexa
2. f satisface $f(y) \geq f(x) + \delta f(x)(y - x)$ para todo $x, y \in M$.
3. $\delta^2 f$ satisface $\delta^2 f(x)(h, h) \geq 0$ para todo $x \in M$, $h \in X$.

Ejercicio 2.5. Sea X un Banach reflexivo, $M \subset X$ un convexo, y $f : M \to \mathbb{R}$ una función convexa que es G-diferenciable. Entonces f es secuencialmente w.L.S.C..

Ejercicio 2.6. Sea X un Banach reflexivo, y sea $f : M \subseteq X \to \mathbb{R}$ una función convexa y G-diferenciable. Si M es convexo cerrado y acotado entonces f alcanza su mínimo en M.

2.2. Multiplicadores de Lagrange en espacios de Banach

2.2.1. Motivación: Lagrange en dimensión $N = 2$

Partamos por recordar lo que ocurre en dimensión $N = 2$: dadas funciones $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 nos interesa resolver el problema

$$\min_{x\in M} f(x), \qquad M = g^{-1}(\{0\}) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : g(x) = 0\right\},$$

y el teorema de los multiplicadores de Lagrange en este contexto dice que si dicho mínimo ocurre en $x_0 \in M$ entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0).$$

Veamos una idea de la demostración de este hecho. Para $\delta > 0$ consideremos $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ una curva de clase C^1 tal que $\gamma(0) = x_0$ y notemos que la función $h = f \circ \gamma : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo interior en $t = 0$, es decir se debe cumplir que

$$h'(0) = \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = 0. \tag{2.1}$$

Como γ era una curva arbitraria, entonces de acuerdo a la Definición 1.22 tenemos que (2.1) dice que

$$\nabla f(x_0) \in T_{x_0}M^{\perp}.$$

Finalmente, recordamos que el gradiente de una función es siempre ortogonal a sus curvas de nivel[3], en particular

$$\nabla g(x_0) \in T_{x_0}M^{\perp},$$

y como $\dim(M) = 1 = \dim T_{x_0}M$ se debe cumplir que $\dim T_{x_0}M^{\perp} = 1$ y en consecuencia existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0).$$

2.2.2. El teorema de los multiplicadores de Lagrange

Sea E un espacio de Banach, $f : E \to \mathbb{R}$ y $g : E \to F$ funciones de clase C^1. Nos interesa estudiar el problema

$$\min_{x\in M} f(x) \qquad \text{donde } M = g^{-1}(\{0\}) = \{x \in E : g(x) = 0\}.$$

Como vimos en el caso $N = 2$, es relevante estudiar el espacio tangente a M en un punto $x_0 \in M$ donde $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in M$. Inspirados en el caso finito dimensional, repetimos la definición de T_pM, es decir

Definición 2.2. *Sea $M \subseteq E$ un conjunto cerrado y sea $p \in M$. Diremos que h es tangente a M es p si existe $\delta > 0$ y $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ una curva de clase C^1 tal que*

$$\gamma(0) = p, \quad y \quad \dot{\gamma}(0) = h,$$

y denotamos por T_pM al conjunto de todos los vectores tangentes y lo llamamos el espacio tangente a M en el punto p.

En esta generalidad solo se puede demostrar que T_pM es un espacio vectorial, pero no se puede hacer *conteo de dimensión*, por lo que por ejemplo no se puede usar el Lema 1.23 para decir que si 0 es un valor regular para[4] g entonces

$$T_pM = N(Dg(p))$$

para p tal que $g(p) = 0$. Sin embargo, siempre se cumple que

Lema 2.3. *Sea $g : E \to F$ una función de clase C^1 y definamos $M = g^{-1}(\{0\}) = \{x \in E : g(x) = 0\}$. Entonces $T_pM \subseteq N(Dg(p))$.*

[3] $g(r(t)) = c \Rightarrow \nabla g(x_0) \cdot r'(t_0) = 0$ para cualquier curva C^1 en el conjunto $\{g(x) = c\}$

[4] Al igual que en dimensión finita, c es valor regular para g si para todo $p \in g^{-1}(\{c\})$ se tiene que $Dg(p)$ es sobreyectivo.

Demostración. Si $h \in T_pM$ entonces existe una curva C^1 en M tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = h$. Como $g(\gamma(t)) = 0$ entonces por la regla de la cadena tenemos que

$$Dg(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = 0,$$

de donde al evaluar en $t = 0$ se concluye que $Dg(p)h = 0$, es decir $h \in N(Dg(p))$. ■

Para poder probar la inclusión $T_pM \supseteq N(Dg(p))$, debemos considerar $h \in N(Dg(p))$ y construir una curva $\gamma \in C^1$ en M tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = h$. Una manera de hacer esto es considerar

$$\gamma(t) = p + th + R(t)$$

para cierta función R a determinar que garantice que $\gamma(t) \in M$ para todo t cercano a 0. La existencia de tal función R puede no estar garantizada en espacios de dimensión infinita, por lo que debemos incorporar alguna condición adicional sobre la función g que define M. Una condición suficiente para tener esta inclusión es muy similar a la que aparece en dimensión finita, es decir

Proposición 2.4. *Si* 0 *es un valor regular para* g*,* $p \in M := g^{-1}(\{0\})$ *y* $N(Dg(p))$ *admite un complemento topológico*[5] *en* E*, entonces* $T_pM = N(Dg(p))$*.*

Demostración. Como 0 es valor regular, entonces para cada $p \in M$ se tiene que $Dg(p) : E \to F$ es un operador sobreyectivo y si adicionalmente $N(Dg(p))$ admite un complemento topológico en E, entonces el [2, Theorem 2.12] nos dice que $Dg(p)$ admite una inversa (continua) por la derecha. Sea entonces $L \in \mathcal{L}(F, E)$ tal que

$$Dg(p) \circ L = I_F$$

y definamos $G : E \times F \to F$ como $G(x, y) = g(x + Ly)$, que es de clase C^1 y satisface

$$G(p, 0) = g(p) = 0, \qquad DG(p, 0) = Dg(p) \circ L = I_F,$$

es decir la función G satisface las condiciones del teorema de la función implícita (Teorema 1.13), por lo tanto existe $\varphi : B(p, r) \to \varphi(B(p, r))$ difeomorfismo de clase C^1 tal que

$$\varphi(p) = 0 \quad \text{y} \quad G(x, \varphi(x)) = g(x + L\varphi(x)) = 0 \qquad \forall x \in B(p, r). \tag{2.2}$$

Como todas las funciones involucradas son de clase C^1 podemos derivar la segunda ecuación para obtener

$$0 = Dg(x + L\varphi(x)) \circ (I_E + L \circ D\varphi(x)),$$

y por lo tanto, para $x = p$ y cada $h \in N(Dg(p))$ se cumple que

$$0 = Dg(p) \circ (h + L \circ D\varphi(p)h) = Dg(p) \circ L \circ D\varphi(p)h = I_F \circ D\varphi(p)h = D\varphi(p)h,$$

[5] $E = N(Dg(p)) \oplus \tilde{E}$ con $\tilde{E}$ sub-espacio vectorial cerrado en E

lo que demuestra que $N(Dg(p)) \subseteq N(D\varphi(p))$.

Finalmente, para $h \in N(Dg(p)) \subseteq N(D\varphi(p))$ consideramos la curva definida como $\gamma(t) = p + th + L\varphi(p + th)$ y notamos que

$$\gamma(0) = p \quad \text{y } \dot{\gamma}(0) = h + L \circ D\varphi(p)h = h.$$

Además para $|t| < \delta_h$ de modo que $|th| < r$ entonces $p + th \in B(p, r)$ y por lo tanto gracias a (2.2) obtenemos que $\gamma(t) \in M$ para todo $|t| < \delta_h$. En otras palabras, hemos demostrado que $h \in T_pM$. ■

Teorema 2.5 (Multiplicadores de Lagrange)**.** *Sean $f : E \to \mathbb{R}$ y $g : E \to F$ funciones de clase C^1. Si p es tal que*

1. *$R(Dg(p))$ es cerrado,*
2. *$N(Dg(p))$ admite un complemento topológico en E,*
3. *Para $M = g^{-1}(\{0\})$ se cumple que $p \in M$ y*

$$f(p) = \inf_{x \in M} f(x),$$

entonces existen $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in F^*$ tales que $|\lambda_0| + \|\lambda\| \neq 0$ y

$$\lambda_0 Df(p) + \lambda \circ Dg(p) = 0$$

Demostración. Si $R(Dg(p)) \neq F$, entonces el teorema de Hahn-Banach[6] dice que existe $\lambda \in F^* \setminus \{0\}$ tal que $\lambda(y) = 0$ para todo $y \in R(Dg(p))$, por lo que basta tomar $\lambda_0 = 0 \in \mathbb{R}$ para tener que

$$0 \cdot Df(p) + \lambda \circ Dg(p) = 0.$$

Si $R(Dg(p)) = F$ y $N(Dg(p))$ admite un complemento topológico, entonces estamos en el escenario de la Proposición 2.4 y para cada $h \in N(Dg(p)) = T_pM$ podemos construir una curva $\gamma \in M$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\dot{\gamma}(0) = h$. Con esto tenemos que la función (real) $s(t) = f(\gamma(t))$ tiene un mínimo interior en $t = 0$ y por lo tanto

$$0 = s'(0) = Df(p)h,$$

como $h \in N(Dg(p))$ es arbitrario, esto demuestra que[7] $Df(p) \in N(Dg(p))^\perp = R(Dg(p)^*)$. Esto quiere decir que existe $\lambda \in F^*$ tal que $Df(p) = Dg(p)^* \circ \lambda$ de donde para todo $v \in E$ se cumple que

$$Df(p)v = \langle Df(p), v\rangle_{E^*,E} = \langle Dg(p)^* \circ \lambda, v\rangle_{E^*,E} = \langle \lambda, Dg(p)v\rangle_{F^*,F} = \lambda \circ Dg(p)v,$$

gracias a la definición del operador adjunto. ■

[6] [2, Corollary 1.8]
[7] [2, Theorem 2.19]

Observación 2.1. Se puede demostrar una versión del Teorema 2.5 que no requiere la existencia de un complemento topológico para $N(Dg(p))$ para probar que $T_pM = N(Dg(p))$. Ver [6, Section 26]

El teorema de los multiplicadore de Lagrange da una condición necesaria para que $p \in M$ sea un mínimo para f. Si queremos una condición suficiente, entonces necesitamos una condición de segundo orden

Teorema 2.6. *Sean E, F espacios de Banach, $f : B(p, r) \subset E \to \mathbb{R}$ y $g : B(p, r) \to F$ funciones de clase C^2. Si definimos el* Lagrangiano *$L : E \times F^* \to \mathbb{R}$ como*

$$L(x, \lambda^*) = f(x) + \lambda^* \circ g(x)$$

y se cumple que

1. *$g(p) = 0$ y 0 es un valor regular,*
2. *$D_1L(p, \lambda_0^*) = Df(p) + \lambda_0^* \circ Dg(p) = 0$ para algún $\lambda_0^* \in F^*$,*
3. *$D_1^2L(p, \lambda_0^*)(h, h) = D^2f(p)(h, h) + \lambda_0^* \circ D^2g(p)(h, h) \geq c \|h\|^2$ para todo $h \in N(Dg(p))$,*

entonces existe $0 < s < r$ tal que

$$f(p) = \min_{x \in M \cap B(p,r)} f(x).$$

Demostración. Ver [6, Section 26]. ■

2.3. Una aplicación del teorema de Lagrange

Consideremos el siguiente problema. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto, conexo, suave y acotado, y definamos el funcional $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ como

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 = \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1}^2 .$$

Como $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, sabemos que J es F-diferenciable con

$$DJ(u)h = (u, h)_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \nabla h \qquad \forall\, h \in H_0^1(\Omega),$$

mas aún, J es 2 veces F-diferenciable, con

$$D^2J(u)(h, k) = (h, k)_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla h \nabla k \qquad \forall\, h, k \in H_0^1(\Omega)$$

Adicionalmente, J es una función convexa[8] y G-diferenciable, y por lo tanto es secuencialmente[9] w.L.S.C. gracias al Ejercicio 2.5.

Consideremos ahora $g : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida como $g(u) = \int |u|^2 \, dx - 1$ y

$$M = g^{-1}(0) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \int |u|^2 = 1 \right\}.$$

La función g es F diferenciable con $Dg(u)h = 2(u,h)_{L^2}$ y como estamos en un espacio de Hilbert

$$N(Dg(u)) = \left\{ h \in H_0^1(\Omega) : \int uh = 0 \right\}$$

admite un complemento topológico. Además

$$R(Dg(u)) = \left\{ \int uh : h \in H_0^1 \right\} \supseteq \left\{ t \int |u|^2 : t \in \mathbb{R} \right\}$$

pues se puede tomar $h = tu$, luego $R(DGg(u)) = \mathbb{R}$ cada vez que $u \not\equiv 0$, por lo que $T_u M = N(Dg(u))$ para cada $u \in M$.

Finalmente consideramos el problema

$$\inf_{u \in M} J(u),$$

veamos que existe $u_0 \in M$ tal que $J(u_0) = \inf_{u \in M} J(u)$. Para ello podríamos intentar usar alguna versión del Teorema 2.2, sin embargo es ilustrativo hacer la demostración *a mano*. Se deja como ejercicio al lector escribir un teorema *general* que englobe la técnica utilizada.

En primer lugar notamos que $\inf_{u \in M} J(u) \geq 0$ y como $M \neq \emptyset$ entonces $\inf_{u \in M} J(u) < \infty$. Sea ahora (u_n) una sucesión minimizante en M, es decir $\int |u_n|^2 = 1$ y $J(u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \inf_{u \in M} J(u)$. Como $\inf_{u \in M} J(u)$ es finito, entonces la sucesión $(J(u_n))$ es acotada, por lo tanto existe $L > 0$ tal que

$$J(u_n) = \frac{1}{2} \int |\nabla u_n|^2 = \frac{1}{2} \|u_n\|_{H_0^1}^2 \leq L, \tag{2.3}$$

es decir la sucesión (u_n) es acotada en $H_0^1(\Omega)$. Como $H_0^1(\Omega)$ es un *espacio de Hilbert*, entonces existe una subsucesión (denotada igual) y $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_n \underset{n \to \infty}{\rightharpoonup} u_0 \quad \text{débilmente en } H_0^1(\Omega),$$

adicionalmente, como la inclusión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es *compacta*, pasando a una nueva subsucesión tenemos que existe $v \in L^2(\Omega)$ tal que

$$u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} v \quad \text{fuertemente en } L^2(\Omega)$$

[8] Notar que también $D^2 J(u)(h,h) = \|h\|_{H_0^1}^2 \geq 0$

[9] Notar que cualquier norma en un espacio de Banach satisface esto también [2, Proposition 3.5], mas aún, como la norma es convexa y continua (en particular L.S.C.) entonces también es w.L.S.C. gracias la Proposición 2.1.

Ahora bien, sabemos que[10] $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ mediante la función $g \mapsto \langle g, \cdot \rangle$ definida como $\langle g, f \rangle = \int gf$ para todo $f \in H_0^1(\Omega)$. Con esto para cada $g \in L^2$ se cumple que

$$\int gu_n = \langle g, u_n \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle g, u_0 \rangle = \int gu_0,$$

pues $u_n \rightharpoonup u_0$, lo que dice que

$$u_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u_0 \text{ débilmente en } L^2(\Omega),$$

pero como $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v$ fuerte en L^2, la unicidad del límite débil nos dice que $v = u_0$. Finalmente, como J es (secuencialmente) w.L.S.C. entonces

$$J(u_0) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_{u\in M} J(u),$$

y además $u_0 \in M$ pues $1 = \int |u_n|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \int |u|^2$ por la convergencia fuerte en L^2. Es decir

$$J(u_0) = \liminf_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_{u\in M} J(u).$$

Todo lo anterior junto con el teorema de Lagrange nos permite decir que existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$DJ(u_0) = \lambda_1 Dg(u_0) \Leftrightarrow \int \nabla u_0 \nabla h = \lambda_1 \int u_0 h \qquad \forall\, h \in H_0^1(\Omega).$$

¿Qué representa λ_1?

Respuesta: λ_1 corresponde al primer valor propio del operador $-\Delta$ bajo condición de tipo Dirichlet homogénea, esto es, del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

¿Cómo se verifica esto?

Para ello debemos hacer una digresión hacia EDPs.

2.3.1. Formulación variacional de ciertas EDP

Si pensamos que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ es una solución de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

[10] Ver la Observación 1.15.

podemos multiplicar la ecuación por $v \in C_c^1(\Omega)$ y luego integrar por partes para obtener que u satisface

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f v \qquad \forall\, v \in C_0^1(\Omega), \tag{2.6}$$

la cantidad $(u, v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ corresponde al producto interno del espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ visto en la Definición 1.30. Notamos además que, usando la densidad de $C_c^1(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$, (2.6) se puede escribir ahora como

$$(u, v)_{H_0^1} = \varphi(v) \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),$$

donde $(u, v)_{H_0^1} = \int \nabla u \cdot \nabla v$, y $\varphi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es lineal y φ está definida como $\varphi(v) = (f, v)_{L^2}$. Notar que si $f \in C(\overline{\Omega})$ entonces $|\varphi(v)| \leq \|v\|_2 \|f\|_2 \leq C \|v\|_{H_0^1} \|f\|_\infty$, es decir $\varphi \in (H_0^1(\Omega))^* = H^{-1}(\Omega)$. Si definimos $\tilde{J}(u) = \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - \varphi(u)$ entonces es claro que $\tilde{J} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es de clase C^1, y se verifica que (2.6) es equivalente a

$$D\tilde{J}(u) = (u, \cdot) - \varphi = 0,$$

es decir, el problema tiene una estructura variacional: encontrar una solución[11] de (2.5) se puede hacer encontrando puntos críticos del funcional $\tilde{J}$.

Ahora bien, gracias al teorema de representación de Riesz, para cada $\varphi \in H^{-1}(\Omega)$, en particular para $f \in L^2$, existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(u, v)_{H_0^1} = \varphi(v) \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \qquad \text{y} \qquad \|u\|_{H_0^1} = \|\varphi\|_{H^{-1}} \leq C \|f\|_2\,, \tag{2.7}$$

en otras palabras, se ha construido un operador lineal continuo[12] $T : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ definido como $Tf = u$. Este operador T se puede componer con la inclusión $\mathcal{I} : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ para formar el operador (denotado igual)

$$T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

definido como $Tf = u$. Notar que $\mathcal{I}$ es un operador compacto gracias al teorema de Rellich-Kondrachov, y por lo tanto T es un operador compacto de L^2 a L^2. Mas aun, dados $f, g \in L^2$ entonces $Tf, Tg \in H_0^1$ y podemos escribir

$$(g, Tf)_{L^2} = \varphi_g(Tf) = (Tg, Tf)_{H_0^1} = (Tf, Tg)_{H_0^1} = \varphi_f(Tg) = (f, Tg)_{L^2},$$

lo que nos dice que T es auto-adjunto.

Gracias a algunos resultados importantes de la teoría de EDPs[13] se puede probar que en realidad $Tf \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ donde $H^2(\Omega)$ es el espacio de las funciones en $H^1(\Omega)$ que

[11] Este tipo de soluciones se conocen como soluciones *débiles*.

[12] Haciendo la identificación $L^2(\Omega) \subseteq H^{-1}(\Omega)$, este operador no es mas que la restricción a L^2 del isomorfismo de Riesz $T : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ definido como $T\varphi = u$ en (2.7).

[13] Teoría elíptica, ver [10, Chapter 6]

tienen sus segundas derivadas débiles en $L^2(\Omega)$. Esto permite volver a integrar por partes para obtener

$$\int fv = \int \nabla(Tf)\nabla v = -\int \Delta(Tf)v \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \supseteq C_c^1(\Omega)$$

de donde se concluye que

$$\begin{cases} -\Delta(Tf) = f & \text{c.t.p. en } \Omega, \\ Tf = 0 & \text{c.t.p. en } \partial\Omega, \end{cases}$$

en otras palabras T es la inversa por la derecha del operador no acotado[14] $-\Delta_D : D(-\Delta_D) \subset L^2 \to L^2$, donde $D(-\Delta_D) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Ahora bien, gracias al teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos en espacios de Hilbert [2, Theorems 6.8 y 6.11], L^2 tiene una base de Hilbert[15] compuesta por funciones propias del operador T. Además la secuencia de valores propios μ_n se puede ordenar de tal modo que[16]

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots > 0$$

y se satisface $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Pero por lo anterior, si $\mu \neq 0$ es un valor propio de T y u una función propia asociada a μ, entonces

$$u = -\Delta_D(Tu) = -\Delta_D(\mu u) = -\mu\Delta_D u,$$

es decir $\lambda := \frac{1}{\mu}$ es valor propio para $-\Delta_D$ y u una función propia.

Ejercicio 2.7. [17] Se cumple que

$$\lambda_1 = \frac{1}{\mu_1} = \min_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int |\nabla u|^2}{\int |u|^2} = \min_{u\in M} \int |\nabla u|^2 ,$$

donde $M = \left\{u \in H_0^1(\Omega) : \int |u|^2 = 1\right\}$.

Corolario 2.7. λ_1 *es el multiplicador de Lagrange asociado al problema minimización*

$$\min_{u\in M} J(u),$$

donde $M = \left\{u \in H_0^1(\Omega) : \int |u|^2 = 1\right\}$.

Adicionalmente, $\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1} > 0$ *es la mejor constante posible en la desigualdad de Poincaré Teorema 1.45 cuando* $p = 2$ *ya que*

$$\int_\Omega |u|^2 \leq \mu_1 \int_\Omega |\nabla u|^2 \qquad \forall\, u \in H_0^1(\Omega)$$

y para la función propia u_0 *se cumple*

$$\int_\Omega |u_0|^2 = \mu_1 \int_\Omega |\nabla u_0|^2 \qquad \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

[14] Este es el Laplaciano Dirichlet en L^2.

[15] [2, Theorem 9.31]

[16] Se puede probar gracias al principio del máximo que μ_1 es un valor propio simple, en el sentido que $N(T - \mu_1 I) = span\{u_1\}$, y además se puede tomar $u_1(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$. Ver [10, Chapter 6].

[17] Ver [2, Problem 37].

Ejercicio 2.8. Para $1 < p < \infty$ y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ conjunto abierto suave y acotado, demostrar la existencia de $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^p = \inf_{u \in M} \int_\Omega |\nabla u|^p \,, \qquad u_0 \in M$$

donde $M = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \int |u|^p = 1 \right\}$. Verifique que se cumplen las condiciones para utilizar el teorema de Lagrange en u_0 y muestre que el multiplicador de Lagrange verifica

$$\lambda_{1,p} = \int_\Omega |\nabla u_0|^p \,.$$

Identifique la ecuación diferencial que se obtiene para u_0, suponiendo (sin demostrar) que u_0 es suficientemente regular para integrar por partes.

2.4. Otra aplicación del teorema de Lagrange

2.5. Principio variacional de Ekeland[18]

Teorema 2.8 (Principio variacional de Ekeland)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $\phi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función L.S.C., acotada por abajo y no idénticamente $+\infty$. Sea $\varepsilon > 0$ y $\bar{u} \in X$ tal que*

$$\phi(\bar{u}) \le \inf_X \phi + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces para cada $\delta > 0$ existe $u_\delta = u_{\delta,\varepsilon,\bar{u}} \in X$ tal que

$$\phi(u_\delta) \le \phi(\bar{u}) \tag{2.8}$$

$$d(u_\delta, \bar{u}) \le \delta \tag{2.9}$$

$$\phi(u_\delta) < \phi(u) + \frac{\varepsilon}{\delta} d(u, u_\delta), \qquad \forall\, u \neq u_\delta. \tag{2.10}$$

Demostración. [19] Para simplificar la notación, dado $\delta > 0$ denotamos $d_\delta(x, y) = \frac{1}{\delta} d(x, y)$.

Usando el funcional ϕ no es difícil verificar que

$$u \le v \Leftrightarrow \phi(u) \le \phi(v) - \varepsilon d_\delta(u, v)$$

define un orden parcial en X. Usando este orden y denotando $u_1 = \bar{u}$ definimos

$$S_1 = \{u \in X : u \le u_1\}\,,$$

y consideramos $u_2 \in S_1$ tal que

$$\phi(u_2) \le \inf_{S_1} \phi + \frac{\varepsilon}{2^2}.$$

[18] Ver [8].

[19] Ver [27, Chapter 1 - Section 5].

Inductivamente, construimos
$$S_n = \{u \in X : u \leq u_n\}$$
y $u_{n+1} \in S_n$ tal que
$$\phi(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} \phi + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Claramente se tiene que $S_{n+1} \subseteq S_n$, y además cada S_n es cerrado pues si $x_k \to x$ con $x_k \in S_n$ entonces como ϕ es L.S.C. se tiene que
$$\phi(x) \leq \liminf_{j\to\infty} \phi(x_j) \leq \liminf_{j\to\infty} (\phi(u_n) - \varepsilon d_\delta(x_j, u_n)) = \phi(u_n) - \varepsilon d_\delta(x, u_n)$$
por lo que $x \in S_n$.

Ahora bien, para cada $x \in S_n$ se tiene que $x \in S_{n-1}$ por lo que
$$\phi(u_n) \leq \inf_{S_{n-1}} \phi + \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \phi(x) + \frac{\varepsilon}{2^n},$$
como además $x \leq u_n$ entonces
$$\phi(x) \leq \phi(u_n) - \varepsilon d_\delta(x, u_n) \leq \phi(x) + \frac{\varepsilon}{2^n} - \varepsilon d_\delta(x, u_n),$$
de donde obtenemos que
$$d_\delta(x, u_n) \leq 2^{-n}$$
y por lo tanto para $m \geq n$, como $u_m \in S_n$ se cumple que
$$d(u_m, u_n) \leq \delta 2^{-n},$$
es decir (u_n) es de Cauchy y por lo tanto debe existir $u_\delta \in \bigcap S_n$ tal que $d(u_\delta, u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, mas aún se tiene que
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n = \{u_\delta\}$$
pues $\operatorname{diam}(S_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Ahora bien, como $u_\delta \in S_1$ entonces
$$u_\delta \leq u_1 \Leftrightarrow \phi(u_\delta) \leq \phi(\bar{u}) - \varepsilon d_\delta(u_\delta, \bar{u}) \leq \phi(\bar{u}),$$
lo que demuestra (2.8). Para (2.10) notar que si $u \neq u_\delta$ entonces $u \not\leq u_\delta$ pues de lo contrario $u \leq u_\delta$ y por lo tanto $u \in \bigcap S_n \Rightarrow u = u_\delta$. Así entonces debe verificarse que
$$\phi(u) > \phi(u_\delta) - \varepsilon d_\delta(u, u_\delta).$$
Finalmente, notar que
$$d_\delta(\bar{u}, u_n) \leq \sum_{j=1}^{n+1} d_\delta(u_j, u_{j+1}) \leq \sum_{j=1}^{n+1} 2^{-j}$$
de donde
$$d_\delta(\bar{u}, u_\delta) \leq 1 \Leftrightarrow d(\bar{u}, u_\delta) \leq \delta$$
lo que demuestra (2.9). ■

Corolario 2.9. *Sea E un espacio de Banach y $\phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ una función acotada por abajo*[20]. *Entonces existe una sucesión minimizante (u_n) tal que*

$$\phi(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf_E \phi, \qquad D\phi(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ en } E^*.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $v_n \in E$ tal que

$$\phi(v_n) \leq \inf_E \phi + \frac{1}{n^2}$$

y gracias al Teorema 2.8 tenemos que para $\delta = \frac{1}{n}$ existe u_n tal que

$$\phi(u_n) \leq \phi(v_n) \leq \inf_E \phi + \frac{1}{n^2}$$

y

$$\phi(u_n) < \phi(u) + \frac{1}{n}\|u - u_n\|, \qquad \forall\, u \neq u_n.$$

De la primera parte obtenemos que (u_n) es minimizante, mientras que de la segunda podemos escribir para $\|w\| = 1$

$$D\phi(u_n)w = \lim_{t\to 0^+} \frac{\phi(u_n + tw) - \phi(u_n)}{t} \geq -\frac{1}{n},$$

como lo anterior vale para todo $\|w\| = 1$ deducimos que

$$\|D\phi(u_n)\|_{E^*} \leq \frac{1}{n}$$

lo que concluye la demostración. ∎

2.6. Una aplicación del principio variacional de Ekeland

Ejercicio 2.9. Para $1 < q < 2$ considere $E : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido como

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{q}\int_\Omega |u|^q.$$

Muestre que E es de clase C^1 con

$$DE(u)v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega |u|^{q-2}\, uv.$$

[20] Se puede cambiar la hipótesis a ϕ es L.S.C. y G-diferenciable.

2.7. Concentración compacidad[21]

¿Qué ocurre si $p = \frac{2N}{N-2}$ y $\lambda = 0$?

Si tratamos de repetir el argumento anterior, es decir, considerar

$$M = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \int |u|^p = 1 \right\}$$

y el problema de minimización

$$S_p(\Omega) := \inf_{u \in M} \int |\nabla u|^2$$

notamos que ahora la inclusión $H_0^1(\Omega) \to L^p(\Omega)$ no es compacta por lo que para una sucesión minimizante $u_n \rightharpoonup u$ débil en H_0^1 no se cumplirá que $1 = \int |u_n|^p \to \int |u|^p$.

A pesar de esta dificultad, si se puede hacer algo. Lo primero es dado que ya no se tiene la compacidad de la inclusión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ cuando Ω es acotado, no perdemos nada en eliminar la hipótesis de que Ω es acotado. Adicionalmente, con el fin de tener una mejor opción de encontrar un mínimo para $S_p(\Omega)$ es conveniente buscarlo en un espacio un poco mas grande que $H_0^1(\Omega)$, para ello consideramos el espacio[22]

$$D^{1,2}(\Omega) = \overline{C_c^1(\Omega)}^{\|\nabla u\|_{L^2}}.$$

Al igual que $H_0^1(\Omega)$, el espacio $D^{1,2}(\Omega)$ es un espacio de Hilbert bajo el producto interno $(u, v) = \int \nabla u \nabla v$ y las funciones de este espacio satisfacen[23]

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |u|^{2^*} < \infty$$

gracias a la desigualdad de Sobolev-Gagliardo-Nirenberg. Con esto a la vista nos interesa entonces encontrar $u \in D^{1,2}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega |u|^{2^*} = 1 \quad \text{y} \quad \int_\Omega |\nabla u|^2 = S_{2^*}(\Omega) = \inf_{v \in M} \int_\Omega |\nabla v|^2$$

donde $M = \left\{ v \in D^{1,2}(\Omega) : |v|^{2^*} = 1 \right\}$. Para lograr esto, primero notamos que

Proposición 2.10. *Para todo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y $p = \frac{2N}{N-2} = 2^*$, se cumple que $S_p(\Omega) = S_p(\mathbb{R}^N)$.*

Demostración. Notar que como $C_c^1(\Omega) \subseteq C_c^1(\mathbb{R}^N)$ entonces $D^{1,2}(\Omega) \subseteq D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ y por lo tanto

$$S_p(\Omega) \geq S_p(\mathbb{R}^N).$$

[21] [15-18]

[22] Se tiene la inclusión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow D^{1,2}(\Omega)$ con igualdad si Ω es acotado gracias a la desigualdad de Poincaré.

[23] Se cumple que $D^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)$ pero no necesariamente $D^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $q \neq \frac{2N}{N-2}$.

Para la otra desigualdad, sea $\varepsilon > 0$ y $u \in C_c(\mathbb{R}^N)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p = 1$ y

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \leq S_p(\mathbb{R}^N) + \varepsilon.$$

Como $\operatorname{supp} u$ es compacto, existe $R > 0$ tal que $\operatorname{supp} u \subset B_R$, por lo que para cualquier $m > 0$ podemos definir

$$v(y) = m^{\frac{N}{p}} u(my) = m^{\frac{N}{2}-1} u(my)$$

que satisface $\operatorname{supp} v \subset B_{\frac{R}{m}}$ y

$$\int_{B_{\frac{R}{m}}} |v|^p = \int_{B_R} |u|^p = 1$$

$$\int_{B_{\frac{R}{m}}} |\nabla v|^2 = \int_{B_R} |\nabla u|^2 \leq S_p(\mathbb{R}^N) + \varepsilon.$$

Finalmente, si Ω es una abierto cualquiera y $x_0 \in \Omega$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subseteq \Omega$ y podemos considerar

$$w(y) = v(x_0 + y)$$

que tiene soporte en $B(x_0, \delta)$ para m suficientemente grande y satisface

$$\int_{\Omega} |w|^p = \int_{B(x_0,\delta)} |w|^p = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p = 1$$

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 = \int_{B(x_0,\delta)} |\nabla w|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \leq S_p(\mathbb{R}^N) + \varepsilon,$$

de donde

$$S_p(\Omega) \leq \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \leq S_p(\mathbb{R}^N) + \varepsilon.$$

■

Para probar que existe $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p = 1$ y $S_{2^*}(\mathbb{R}^N) = \int |\nabla u|^2$ debemos utilizar y mejorar lo mencionado en el Apartado 1.5.1 sobre medidas de Radon $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ para Ω acotado.

El resultado que usaremos está inspirado en el lema de concentración compacidad de Pierre-Louis Lions[24] [15, 16].

Teorema 2.11. *Sea $(\mu_n) \subseteq \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^N)$ una sucesión de medidas de probabilidad. Entonces existe una subsucesión (denotada igual) (μ_n) tal que exactamente una de las siguientes alternativas ocurre:*

[24] Ganador de la medalla Fields en 1994, e hijo de Jacques-Louis Lions. Ambos matemáticos de renombre en el área de las EDPs.

1. *(Compacidad) Existe $x_n \in \mathbb{R}^n$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que*
$$\mu_n(B(x_n, R)) \geq 1 - \varepsilon \qquad \forall\, n.$$
2. *(Fuga) Para todo $R > 0$*
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \mu_n(B(x, R)) = 0.$$
3. *(Dicotomía) Existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $R > 0$ y $x_n \in \Omega$ tales que para todo $R' > R$ existen medidas μ_n^1, μ_n^2 que satisfacen*
$$0 \leq \mu_n^1 + \mu_n^2 \leq \mu_n$$
$$\operatorname{supp} \mu_n^1 \subseteq B(x_n, R), \quad \operatorname{supp} \mu_n^2 \subseteq B(x_n, R')^c,$$
y
$$\limsup_{n\to\infty} \left(\left|\lambda - \mu_n^1(\mathbb{R}^N)\right| + \left|1 - \lambda - \mu_n^2(\mathbb{R}^N)\right|\right) \leq \varepsilon$$

Demostración. [25] Dada una medida de probabilidad μ consideramos la función de concentración de Levy
$$Q_\mu(r) = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \mu(B_r(x))$$
y notemos que se verifican las siguientes propiedades:

- $Q_\mu(r) \geq 0$ para todo $r \geq 0$,
- $s \leq r \Rightarrow Q_\mu(r) \leq Q_\mu(s)$,
- $\lim_{r\to\infty} Q_\mu(r) = \mu(\mathbb{R}^N) = 1$.

Si ahora $Q_n(r) = Q_{\mu_n}(r)$ entonces lo anterior nos dice que (Q_n) es una sucesión de funciones no-decrecientes uniformemente acotadas. Por lo tanto el teorema de selección de Helly[26] nos dice que existe una subsucesión (denotada igual) y una función no-decreciente y continua por la izquierda Q tal que
$$Q_n(r) \to Q(r) \quad \text{para casi todo } r \geq 0.$$

Sea $\lambda = \lim_{r\to+\infty} Q(r) \in [0, 1]$ y pueden ocurrir 3 casos:

1. Si $\lambda = 0$, entonces $\lim_{r\to+\infty} Q(r) = 0 \Rightarrow Q(r) = 0$ ya que Q es no-decreciente. Por lo tanto
$$\lim_{n\to\infty} Q_n(r) = 0 \Leftrightarrow \text{(Fuga)}.$$

[25] Ver [27, Theorem 4.3]
[26] [25, Chapter 7 - Exercise 13]

2. Si $\lambda = 1$, entonces $\lim_{r\to+\infty} Q(r) = 1$ y $Q(0) = 0$ por lo tanto[27] debe existir $R_0 > 0$ tal que $Q(R_0) > \frac{1}{2}$. Como $Q_n(R_0) = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \mu_n(B(x, R_0))$, entonces debe existir x_n tal que
$$Q_n(R_0) \leq \mu_n(B(x_n, R_0)) + \frac{1}{n}.$$
Similarmente, para $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ podemos tomar $R_1 > R_0$ tal que $Q(R_1) > 1 - \varepsilon > \frac{1}{2}$ e $y_n \in \mathbb{R}^N$ tal que
$$Q_n(R_1) \leq \mu_n(B(y_n, R_1)) + \frac{1}{n},$$
de donde
$$\begin{aligned}\mu_n(B(x_n, R_0)) + \mu_n(B(y_n, R_1)) &\geq Q_n(R_0) + Q_n(R_1) - \frac{2}{n}\\ &= Q(R_0) + Q(R_1) + o(1)\\ &> \frac{1}{2} + 1 - \varepsilon + o(1)\\ &> 1 \qquad \forall\, n \gg 1\\ &= \mu_n(\mathbb{R}^N)\end{aligned}$$
Como μ_n es una medida, debe ocurrir que $B(x_n, R_0) \cap B(y_n, R_1) \neq \varnothing$ de donde
$$B_{R_1}(y_n) \subseteq B_{R_0+2R_1}(x_n),$$
y por lo tanto para n suficientemente grande
$$\begin{aligned}1 - \varepsilon < Q(R_1) &\leq Q_n(R_1) + \varepsilon\\ &\leq \mu_n(B_{R_1}(y_n)) + \frac{1}{n} + \varepsilon\\ &\leq \mu_n(B_{R_0+2R_1}(x_n)) + \frac{1}{n} + \varepsilon\\ &\Leftrightarrow \text{(Compacidad)}\end{aligned}$$
para $R = R_0 + 2R_1$ y todo n grande. Agrandando R aun más se puede incorporar la parte finita de la sucesión.

3. Si $\lambda \in (0, 1)$ entonces para todo $\varepsilon > 0$ pequeño existen $R > 0$ y $R_n > R$ tales que $R_n \to +\infty$ y que para todo $n \geq n_\varepsilon$
$$\lambda - \varepsilon < \mu_n(B_R(x_n)) \leq Q_n(R) \leq Q_n(R_n) < \lambda + \varepsilon.$$
Sea ahora $R' > R$ y n grande de modo que $R' < R_n$. Para $A \subseteq \mathbb{R}^N$ medible definamos
$$\mu_n^1(A) = \mu_n(A \cap B_R(x_n)) \quad \text{y} \quad \mu_n^2(A) = \mu_n(A \cap B_{R_n}(x_n)^c).$$

[27] Lo que justifica esto es que Q_n es una función de variación acotada y por lo tanto Q también debe serlo.

Así claramente $0 \leq \mu_n^1 + \mu_n^1 \leq \mu_n$ y para cada n grande (dependiendo de $\varepsilon > 0$) se cumple que

$$\operatorname{supp} \mu_n^1 \subseteq B_R(x_n) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{supp} \mu_n^2 \subseteq B_{R_n}(x_n)^c \subseteq B_{R'}(x_n)$$

y que

$$\begin{aligned} \left|\lambda - \mu_n^1(\mathbb{R}^N)\right| + \left|1 - \lambda - \mu_n^2(\mathbb{R}^N)\right| &= |\lambda - \mu_n(B_R(x_n))| + |1 - \lambda - \mu_n(B_{R_n}(x_n)^c)| \\ &= |\lambda - \mu_n(B_R(x_n))| + |\mu_n(B_{R_n}(x_n)) - \lambda| \\ &< 2\varepsilon \\ &\Leftrightarrow \text{(Dicotomía)}. \end{aligned}$$

■

2.8. Una aplicación de concentración compacidad

Ejercicio 2.10. Muestre que para $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ la función $(\xi, r) \mapsto \int_{B(\xi,r)} |f|$ es continua y satisface para cada $r > 0$ fijo

$$\int_{B(\xi,r)} |f| \xrightarrow[|\xi| \to \infty]{} 0.$$

Muestre además que

$$Q(r) = \sup_{\xi} \int_{B(\xi,r)} |f| \,.$$

es continua.

Capítulo 3

Métodos minimax

3.1. Lema de deformaciones

Definición 3.1 (Condicion de Palais-Smale)**.** *Sea E un espacio de Banach real e $I \in C^1(E,\mathbb{R})$. Diremos que I satisface la condición de Palais-Smale (PS) si cada sucesión (u_n) tal que $I(u_n)$ es acotada e $I'(u_m) \to 0$ posee una subsucesión convergente en E.*

Observación 3.1. Para $c \in \mathbb{R}$ consideramos el conjunto de puntos críticos al nivel c

$$K_c = \{u \in E : I(u) = c, I'(u) = 0\}.$$

Si I satisface (PS) entonces K_c es compacto.

Ejemplo 3.1. Consideremos un espacio de Hilbert real H y la función $I : H \to \mathbb{R}$ dada por $I(u) = |u|^2$, que satisface $I'(u) = 2u$. Notemos que I satisface (PS) pues si $I(u_n) = |u_n|^2$ es acotada, entonces existe $u \in H$ y una subsucesión (denotada igual) tal que $u_n \rightharpoonup u$ débilmente, pero además tenemos que $I'(u_n) = 2u_n \to 0$, por lo tanto $u = 0$ y $u_n \to 0$.

Antes de enunciar y demostrar el lema de deformaciones veamos una motivación de lo que se busca probar. Como en el ejemplo anterior consideramos la función $I : H \to \mathbb{R}$ dada por $I(u) = |u|^2$ y $c \in \mathbb{R}$. El conjunto de puntos críticos al nivel c está dado por

$$K_c := \{u \in E : I(u) = c, I'(u) = 0\} = \begin{cases} \varnothing & \text{si } c \neq 0, \\ \{0\} & \text{si } c = 0, \end{cases}$$

mientras que los conjuntos de nivel de I satisfacen

$$A_s := \{u \in E : I(u) \leq s\} = \begin{cases} \bar{B}(0, \sqrt{s}) & \text{si } s > 0, \\ \{0\} & \text{si } s = 0, \\ \varnothing & \text{si } s < 0. \end{cases}$$

Notar que si $s_1, s_2 > 0$ o $s_1, s_2 < 0$ entonces los conjuntos A_{s_1} y A_{s_2} son homotópicos, mientras que no lo son si es que $s_1 > 0$ y $s_2 < 0$ y precisamente en $c = 0$ hay un nivel crítico no vacío.

El Teorema 3.1 dice que si K_c es vacío, entonces los conjuntos $A_{c-\varepsilon}$ y $A_{c+\varepsilon}$ son homotópicos para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño cuando I satisface (PS).

Teorema 3.1. *Sea E un espacio de Banach real e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ una función que satisface (PS). Para $s, c \in \mathbb{R}$ consideramos los conjuntos*

$$K_c = \{u \in E : I(u) = c, I'(u) = 0\},$$
$$A_s = \{u \in E : I(u) \leq s\}.$$

Si[1] $K_c = \varnothing$, *entonces para cada $\varepsilon > 0$ pequeño existe $\delta \in (0, \varepsilon)$ y una función $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ que satisface*

1. $\eta(0, u) = u$ *para todo* $u \in E$,
2. $\eta(t, u) = u$ *para todo u tal que* $u \notin I^{-1}((c - \varepsilon, c + \varepsilon))$,
3. $I(\eta(t, u)) \leq I(u)$ *para todo $u \in E$ y todo* $t \in [0, 1]$,
4. $\eta(1, A_{c+\delta}) \subseteq A_{c-\delta}$.

Veremos solo la demostración en el caso en que $E = H$, un espacio de Hilbert e $I \in C^2$ (para el caso general ver [27, Chapter II - Theorem 3.4]). La idea es para cada $u \in E$ considerar η como la solución a la EDO de primer orden

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = -g(\eta(t)) I'(\eta(t)), \\ \eta(0) = u, \end{cases} \tag{3.1}$$

para cierta función $g : E \to [0, 1]$ que satisface $g(u) = 0$ para todo $u \notin I^{-1}((c - \varepsilon, c + \varepsilon))$ y $g(u) = 1$ para todo u tal que[2] $u \in I^{-1}([c - \delta, c + \delta])$.

Si denotamos a la solución de la EDO por $\eta(t, u)$ entonces por construcción se verifica $\eta_u(0) = \eta(0, u) = u$ y además η es constante en el conjunto donde $g(u) = 0$, es decir $\eta(t, u) = u$ para todo $u \notin I^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$. Adicionalmente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(I(\eta(t, u))\right) &= \langle I'(\eta(t, u)), \dot{\eta}(t, u) \rangle \\ &= -g(u) \left| I'(\eta(t, u)) \right|^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto $I(\eta(t, u)) \leq I(\eta(0, u)) = I(u)$ para todo t y todo u. Finalmente, si $u \in A_{c+\delta}$ entonces lo anterior nos dice que $I(\eta(t, u)) \leq c + \delta$ para todo t, por lo que solo quedan dos alternativas, o bien $I(\eta(t, u)) < c - \delta$ para algún $t \in [0, 1]$ (de donde $\eta(1, A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}$) o bien

$$c - \delta \leq I(\eta(t, u)) \leq c + \delta \qquad \forall\, t \in [0, 1].$$

[1] Es decir, c no es un valor critico para I.

[2] $\delta > 0$ por fijar.

En este último caso tenemos que $g(\eta(t,u)) = 1$ y por lo tanto

$$\frac{d}{dt}\left(I(\eta(t,u))\right) = -\left|I'(\eta(t,u))\right|^2$$

y si somos capaces de probar que existe $\sigma > 0$ tal que $\|I'(w)\| \geq \sigma$ para cualquier $c - \varepsilon \leq I(w) \leq c + \varepsilon$ entonces

$$I(\eta(1,u)) - I(\eta(0,u)) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(I(\eta(t,u))\right) \leq -\sigma^2 \Rightarrow I(\eta(1,u)) \leq c + \delta - \sigma^2$$

así para $0 < 2\delta < \sigma^2$ obtenemos que $I(\eta(1,u)) \leq c - \delta \Leftrightarrow \eta(1,u) \in A_{c-\delta}$.

Lo anterior funcionaría solo en el caso de que efectivamente se pueda resolver la EDO (3.1) y se cumplan las estimaciones mencionadas. A continuación se da dicho detalle:

Demostración. [3] La demostración tiene varios pasos:
Paso 1: Existencia de $0 < \varepsilon_0, \sigma < 1$ tales que

$$|I'(u)| \geq \sigma \qquad \forall\, u \in A_{c+\varepsilon_0} \setminus A_{c-\varepsilon_0}.$$

Para demostrar esto, argumentamos por contradicción y suponemos que existen $\varepsilon_k, \sigma_k \to 0$ y $u_k \in A_{c+\varepsilon_k} \setminus A_{c-\varepsilon_k}$ tales que

$$|I'(u_k)| < \sigma_k.$$

Lo anterior garantiza que $I(u_k)$ es acotada y $I'(u_k) \to 0$ de donde podemos pasar a una subsucesión y probar que existe $u \in H$ tal que $u_k \to u$, $I(u) = c$ e $I'(u) = 0$, es decir $u \in K_c$ lo que contradice que c no es un nivel crítico.
Paso 2: Definición de la función g. Para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ consideramos $0 < \delta < \varepsilon$ y $0 < \delta < \frac{\sigma^2}{2}$, y definimos los conjuntos

$$A = I^{-1}((c-\varepsilon, c+\varepsilon))^c = \{u \in H : I(u) \geq c + \varepsilon\} \cup \{u \in H : I(u) \leq c - \varepsilon\}$$

y

$$B = I^{-1}([c-\delta, c+\delta]) = \{u \in H : c - \delta \leq I(u) \leq c + \delta\},$$

de modo que A y B son cerrados y disjuntos. Si A y B son no vacíos, entonces consideremos la función

$$g(u) = \frac{d(u,A)}{d(u,A) + d(u,B)},$$

que satisface $g : H \to [0,1]$, $g(u) = 0$ para todo $u \in A$ y $g(u) = 1$ para todo $u \in B$. Además g es localmente Lipschitz continua gracias al Ejercicio 3.1.
Paso 3: Resolver una EDO.

[3] Ver [10, Section 8.5 - Theorem 1]

Para poder garantizar la existencia y unicidad de la solución de la EDO, y las estimaciones posteriores, es que debemos introducir la función $h : [0, \infty) \to [0, 1]$ definida como

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ t^{-1} & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

que es Lipschitz continua, acotada y verifica $|t|\, h(|t|) \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Con lo anterior consideramos la función $V(w) = -g(w)h(|I'(w)|)I'(w)$ y la EDO

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) = V(\eta(t)), \\ \eta(0) = u, \end{cases} \tag{3.2}$$

Dado que I es de clase C^2 y tanto g como h son funciones localmente Lipschitz continuas se obtiene que V es localmente Lipschitz, por lo tanto el teorema de existencia y unicidad para EDOs garantiza la existencia de η solución local para (3.2). Con un poco mas de trabajo se puede verificar que el intervalo maximal de la solución es de hecho todo[4] $\mathbb{R}$

<u>Paso 4:</u> Conclusión.

Denotamos $\eta(t, u)$ a la solución de (3.2). Por construcción se satisface $\eta(0, u) = u$ para todo $u \in H$ mientras que si $I(u) > c - \varepsilon$ o $I(u) < c - \varepsilon$ entonces $g(u) = 0$ y por lo tanto $\eta(t, u) = u$ cuando $u \notin I^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$.

Adicionalmente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(I(\eta(t, u))\right) &= (I'(\eta(t, u)), \dot{\eta}(t, u)) \\ &= -g(u)h(|I'(\eta(t, u))|)\, |I'(\eta(t, u))|^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

por lo tanto se verifica que $I(\eta(t, u)) \leq I(u)$ para todo $t \geq 0$. Finalmente, para $u \in A_{c+\delta}$ solo hay dos alternativas, o bien $I(\eta(t, u)) < c - \delta$ para algún $t \in [0, 1]$ (de donde $\eta(1, u) \in A_{c-\delta}$ pues I decrece en la curva solución) o bien

$$c - \delta \leq I(\eta(t, u)) \leq c + \delta \qquad \forall\, t \in [0, 1].$$

[4] El argumento es *típico*: se supone que el intervalo maximal para $\eta(\cdot, u)$ es (t^-, t^+). Si $t^+ < \infty$, como $|V(w)| \leq 1$ para cada sucesión $t_n \to t^+$ se obtiene que

$$|\eta(t_n, u) - \eta(t_m, u)| = \left| \int_{t_m}^{t_n} V(\eta(t, u)) \right| \leq |t_n - t_m|$$

de donde $\eta(t_n, u) \to \bar{u}$ para cierto $\bar{u} \in H$. Luego se puede considerar la solución de (3.2) para $\eta(t^+) = \bar{u}$ y volver a aplicar el teorema de existencia local para extender la solución $\eta(t, u)$ a una vecindad de t^+. Lo mismo si $t^- > -\infty$.

Si no se cumpliese el acotamiento de V, entonces solo se tendría existencia local y no se podría garantizar que la solución exista para $t = 1$. Para obtener la existencia global es que se usa la función h.

En este último caso tenemos que $g(\eta(t,u)) = 1$ y por lo tanto

$$\frac{d}{dt}\left(I(\eta(t,u))\right) = -h(|I'(\eta(t,u))|)\,|I'(\eta(t,u))|^2$$

pero si $|I'(\eta(t,u))| \geq 1$, dado que $0 < \sigma < 1$, tenemos que

$$\frac{d}{dt}\left(I(\eta(t,u))\right) = -\,|I'(\eta(t,u))| \leq -\sigma \leq -\sigma^2$$

y si $|I'(\eta(t,u))| \leq 1$

$$\frac{d}{dt}\left(I(\eta(t,u))\right) = -\,|I'(\eta(t,u))|^2 \leq -\sigma^2$$

y en cualquier caso se verifica que

$$I(\eta(1,u)) - I(\eta(0,u)) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(I(\eta(t,u))\right) \mathrm{d}t \leq -\sigma^2 \Rightarrow I(\eta(1,u)) \leq c + \delta - \sigma^2 \leq c - \delta$$

pues $0 < \delta < \frac{\sigma^2}{2}$. ■

Ejercicio 3.1. Sean A y B como en la demostración del Teorema 3.1 para I de clase C^2. Muestre que

$$g(u) = \frac{d(u,A)}{d(u,A) + d(u,B)}$$

es una función localmente Lipschitz. *Notar que si I es de clase C^2 entonces I' es localmente Lipchitz y en particular I' es acotada en conjuntos acotados.*

3.2. Paso de la montaña

Teorema 3.2. *Sea E un espacio de Banach real e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ un función que satisface (PS). Supongamos que $I(0) = 0$ y*

- *existen $r, a > 0$ tales que $I(u) \geq a$ para todo $\|u\| = r$,*
- *existe $v \in E$ tal que $\|v\| > r$ e $I(v) \leq 0$.*

Entonces I tiene un valor crítico $c \geq a$ que puede ser caracterizado como

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma([0,1])} I(u), \tag{3.3}$$

donde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v\}$.

Demostración. [5] Como $\Gamma \neq \varnothing$ tenemos que $c < \infty$. Además, como $I(u) \geq a$ para todo $\|u\| = r$ entonces

$$\max_{u \in \gamma([0,1])} I(u) \geq a \qquad \forall \gamma \in \Gamma,$$

[5] Ver [10, Section 8.5 - Theorem 2]

de donde $c \geq a$.

Supongamos que c no es un valor crítico para I, luego del Teorema 3.1 tenemos que para $0 < \varepsilon < \frac{a}{2}$ existen $0 < \delta < \varepsilon$ y una función continua $\eta(u) := \eta(1, u)$ que satisface

$$\eta(A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}$$

y

$$\eta(u) = u \quad \forall\, u \notin I^{-1}((c-\varepsilon, c+\varepsilon)). \tag{3.4}$$

De la definición de c existe $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$\max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)) \leq c+\delta \Leftrightarrow \gamma(t) \in A_{c+\delta}\ \forall\, t \Rightarrow \eta(\gamma(t)) \in A_{c-\delta}\ \forall\, t \Leftrightarrow I(\eta(\gamma(t))) \leq c-\delta\ \forall\, t,$$

pero $\eta \circ \gamma \in \Gamma$ ya que η es continua, $\eta(\gamma(0)) = \eta(0) = 0$ y $\eta(\gamma(1)) = \eta(v) = v$ gracias a la elección de $\varepsilon < \frac{a}{2}$ y (3.4). Esto es una contradicción pues entonces se debe cumplir que

$$I(\eta(\gamma(t))) \geq c \quad \forall\, t.$$

■

3.3. Una aplicación del teorema del paso de la montaña

Ejercicio 3.2. Para $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ dominio suave y acotado, generalizar el ejemplo anterior y estudiar el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}\, u & \text{en } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Entregue condiciones apropiadas para p de modo que este problema tenga al menos una solución no trivial.

3.4. Algunos conceptos sobre grado topológico

Para $O \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y acotado y una función $F : \overline{O} \to \mathbb{R}^N$ de clase C^1 es de interés estudiar la existencia de soluciones para la ecuación

$$F(x) = b \tag{3.5}$$

y propiedades de multiplicidad de soluciones. Por ejemplo, si x_0 es solución y $DF(x_0)$ es invertible, entonces el teorema de la función inversa nos dice que x_0 es la única solución de (3.5) en una vecindad de x_0. Si adicionalmente $b \notin F(\partial O)$, entonces (3.5) puede tener solo una cantidad finita de soluciones

Bajo las condiciones anteriores se puede definir una función "deg" a valores enteros de la siguiente manera: para $b \notin F(\partial O)$ y b *valor regular*[6] de F definimos[7]

$$\deg(F, O, b) = \sum_{x \in F^{-1}(b) \cap O} \operatorname{sign}(\det DF(x)).$$

Esta función se llama *grado topológico de Brouwer* que satisface una serie de propiedades, entre ellas se destacan (ver [12, Section 1.1])

(I) $\deg(id, O, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b \in O, \\ 0 & \text{si } b \notin O. \end{cases}$

(II) Si $b \notin F(O)$ entonces $\deg(F, O, b) = 0$.

(III) Si $\deg(F, O, b) \neq 0$ entonces existe $x \in O$ tal que $F(x) = b$.

(IV) *(Aditividad)* Si $O_1, O_2 \subseteq O$ son disjuntos y $b \notin F(\overline{O} \setminus (O_1 \cup O_2))$ entonces

$$\deg(F, O, b) = \deg(F, O_1, b) + \deg(F, O_2, b).$$

(V) *(Continuidad)* Existe $\delta > 0$ tal que si $\|F - G\|_{C^1} < \delta$ entonces

$$\deg(F, O, b) = \deg(G, O, b).$$

Con un poco mas de trabajo se puede extender la función deg a funciones F meramente continuas[8] y preservando las propiedades anteriores[9], con (V) ahora en la norma uniforme en vez de la norma en C^1.

Una consecuencia de la propiedad (V) para funciones continuas es que el grado es invariante bajo homotopías en el siguiente sentido:

Proposición 3.3. *Sea $H \in C([0,1] \times \overline{O}; \mathbb{R}^N)$ tal que $b \notin H([0,1] \times \partial O)$, entonces*

$$\deg(H(t, \cdot), O, B) \text{ es constante para todo } t \in [0,1].$$

Demostración. La función $t \to \deg(H(t, \cdot), O, B)$ es continua, y como $[0,1]$ es conexo y deg tiene valores en $\mathbb{Z}$ la única posibilidad es que $\deg(H(t, \cdot), O, B)$ sea constante. ■

Corolario 3.4. *Sean $F, G \in C(\overline{O}; \mathbb{R}^N)$ tales que $F = G$ en ∂O. Si $b \notin F(\partial O)$ entonces*

$$\deg(F, O, B) = \deg(G, O, B).$$

[6]De la Definición 1.21 se deduce que b es regular si $DF(x)$ es invertible para todo $x \in F^{-1}(b)$.

[7]El lema de Sard ([12, Lemma 1.4]) dice que para una función de clase C^1 el conjunto de los valores críticos tiene medida cero, por lo que la función está definida casi en todas partes.

[8]Ver [12, Section 1.2]. La idea es aproximar una función continua por una de clase C^1 y ver que el grado se mantiene constante en una vecindad de la función continua.

[9]Ver [12, Chapter 2].

Demostración. Basta considerar $H(t,x) = tF(x) + (1-t)G(x)$. ■

Observación 3.2. Con un poco mas de trabajo, se puede extender la definición del grado de Brouwer a espacios de dimensión infinita. Esta extensión se conoce como grado de Leray-Schauder y está definida para funciones F de la forma $F = I + T$ donde T es un operador (no-lineal) compacto. Ver [12, Chapter 7].

3.5. Teorema del punto silla

Con lo visto sobre grado topológico estamos en condiciones de demostrar el teorema del punto silla de Rabinowitz [22].

Teorema 3.5. *Sea E un espacio de Banach real tal que $E = V \oplus X$ donde V es un sub-espacio no-trivial de dimensión finita. Sea $I : E \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 que satisface (PS) y además*

(i) *Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ y una vecindad D del origen en V tal que $I(x) \leq \alpha$ para todo $x \in \partial D$.*

(ii) *Existe $\beta > \alpha$ tal que $I(x) \geq \beta$ para todo $x \in X$.*

Entonces existe $c \geq \beta$ valor crítico para I que está caracterizado por

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in \overline{D}} I(h(u)),$$

donde $\Gamma = \left\{ h \in C(\overline{D}; E) : h(x) = x \text{ para todo } x \in \partial D \right\}$.

Demostración. [10] Veamos primero que $c \geq \beta$. Sea $P : E \to V$ el operador de proyección. Para $h \in \Gamma$ notamos que la función $P \circ h : D \to V$ es continua y para $u \in \partial D$ se cumple que

$$P \circ h(u) = Pu = u \neq 0.$$

Identificando $V = \mathbb{R}^N$ entonces $\deg(P \circ h, D, 0)$ está bien definido y gracias al Corolario 3.4 se cumple que

$$\deg(P \circ h, D, 0) = \deg(id, D, 0) = 1,$$

de donde gracias a las propiedades del grado concluimos que debe existir $x \in D$ tal que $P \circ h(x) = 0$.

Lo anterior nos dice que para cada $h \in \Gamma$ existe $x_h \in D$ tal que

$$h(x_h) = h(x_h) - P \circ h(x_h) = (I - P)h(x_h) \in X.$$

[10] Ver [5, Chapter 5].

y de (ii) obtenemos que para todo $h \in \Gamma$

$$\max_{u\in\overline{D}} I(h(u)) \geq I(h(x_h)) \geq \beta,$$

de donde $c \geq \beta$.

Para concluir debemos demostrar que c es un valor crítico para I. De no serlo, entonces $K_c = \varnothing$ y podemos usar el Teorema 3.1 para $\varepsilon < \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$ y obtener una función η tal que $\eta(t, u) = u$ si $u \notin I^{-1}((c-\varepsilon, c+\varepsilon))$ y $\eta(1, A_{c+\delta}) \subset A_{c-\delta}$.

De la definición de c podemos tomar $h \in \Gamma$ tal que

$$\max_{u\in\overline{D}} I(h(u)) \leq c + \delta$$

y definir $\tilde{h} = \eta(1, h)$. Si $u \in \partial D$ entonces $h(u) = u$ y (i) nos dice que

$$I(u) \leq \alpha < \alpha + \varepsilon < \beta - \varepsilon \leq c - \varepsilon,$$

y por lo tanto $\tilde{h}(u) = \eta(1, h(u)) = \eta(1, u) = u$, es decir $\tilde{h} \in \Gamma$. Finalmente, notamos que de la elección de h

$$\max_{u\in\overline{D}} I(h(u)) \leq c + \delta,$$

es decir $h(u) \in A_{c+\delta}$ para todo $u \in \partial D$, por lo tanto $\tilde{h}(u) = \eta(1, h(u)) \in A_{c-\delta}$ lo que dice

$$\max_{u\in\partial D} I(\tilde{h}(u)) \leq c - \delta$$

lo que contradice la definición de c. ∎

3.6. Una aplicación del teorema del punto silla

Ejercicio 3.3. Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y acotada en $\mathbb{R}$. Defina

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Demuestre que la aplicación $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida como

$$J(u) = \int_\Omega F(u)$$

es de clase C^1 con $J'(u)v = \int_\Omega f(u)v$.

Bibliografía

1. Ambrosetti, A. y Rabinowitz, P. H. Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Functional Analysis* **14,** 349-381. https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0370183 (1973).
2. Brezis, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations* xiv+599. isbn: 978-0-387-70913-0 (Springer, New York, 2011).
3. Brezis, H. y Nirenberg, L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Comm. Pure Appl. Math.* **36,** 437-477. issn: 0010-3640. http://dx.doi.org/10.1002/cpa.3160360405 (1983).
4. Cartan, H. *Calcul différentiel* 178 (Hermann, Paris, 1967).
5. Costa, D. G. *An invitation to variational methods in differential equations* xii+138. isbn: 978-0-8176-4535-9. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4536-6 (Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007).
6. Deimling, K. *Nonlinear functional analysis* xiv+450. isbn: 3-540-13928-1. https://doi.org/10.1007/978-3-662-00547-7 (Springer-Verlag, Berlin, 1985).
7. Drábek, P. y Milota, J. *Methods of nonlinear analysis* Second. Applications to differential equations, x+649. isbn: 978-3-0348-0386-1; 978-3-0348-0387-8. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0387-8 (Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2013).
8. Ekeland, I. On the variational principle. *J. Math. Anal. Appl.* **47,** 324-353. issn: 0022-247X. https://doi.org/10.1016/0022-247X(74)90025-0 (1974).
9. Ekeland, I. y Témam, R. *Convex analysis and variational problems* English. Translated from the French, xiv+402. isbn: 0-89871-450-8. https://doi.org/10.1137/1.9781611971088 (Society for Industrial y Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1999).
10. Evans, L. C. *Partial differential equations* xviii+662. isbn: 0-8218-0772-2 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1998).
11. Folland, G. B. *Real analysis* Second. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication, xvi+386. isbn: 0-471-31716-0 (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999).

12. Fonseca, I. y Gangbo, W. *Degree theory in analysis and applications* Oxford Science Publications, viii+211. isbn: 0-19-851196-5 (The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995).

13. Kelley, J. L. *General topology* Reprint of the 1955 edition [Van Nostrand, Toronto, Ont.], xiv+298 (Springer-Verlag, New York-Berlin, 1975).

14. Lang, S. *Real and functional analysis* Third, xiv+580. isbn: 0-387-94001-4. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0897-6 (Springer-Verlag, New York, 1993).

15. Lions, P.-L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **1,** 109-145. issn: 0294-1449. http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1984__1_2_109_0 (1984).

16. Lions, P.-L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. II. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **1,** 223-283. issn: 0294-1449. http://www.numdam.org/item?id=AIHPC_1984__1_4_223_0 (1984).

17. Lions, P.-L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I. *Rev. Mat. Iberoamericana* **1,** 145-201. issn: 0213-2230. http://dx.doi.org/10.4171/RMI/6 (1985).

18. Lions, P.-L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. II. *Rev. Mat. Iberoamericana* **1,** 45-121. issn: 0213-2230. http://dx.doi.org/10.4171/RMI/12 (1985).

19. Meyers, N. G. y Serrin, J. $H = W$. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **51,** 1055-1056. issn: 0027-8424. https://doi.org/10.1073/pnas.51.6.1055 (1964).

20. Mujica, J. *Complex analysis in Banach spaces* Holomorphic functions and domains of holomorphy in finite and infinite dimensions, Notas de Matemática, 107. [Mathematical Notes], xii+434. isbn: 0-444-87886-6 (North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986).

21. Pedersen, G. K. *Analysis now* xiv+277. isbn: 0-387-96788-5. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1007-8 (Springer-Verlag, New York, 1989).

22. Rabinowitz, P. H. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations* viii+100. isbn: 0-8218-0715-3. https://doi.org/10.1090/cbms/065 (Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986).

23. Robbin, J. W. y Salamon, D. A. *Introduction to differential geometry* xiii+418. isbn: 978-3-662-64339-6; 978-3-662-64340-2. https://doi.org/10.1007/978-3-662-64340-2 (Springer Spektrum, Wiesbaden, [2022] ©2022).

24. Royden, H. y Fitzpatrick, P. *Real Analysis* Fourth. isbn: 9780131437470 (Prentice Hall, 2010).

25. Rudin, W. *Principles of mathematical analysis* Third, x+342 (McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, 1976).

26. Rudin, W. *Real and complex analysis* Third, xiv+416. isbn: 0-07-054234-1 (McGraw-Hill Book Co., New York, 1987).

27. Struwe, M. *Variational methods* Third. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems, xviii+274. isbn: 3-540-66479-3 (Springer-Verlag, Berlin, 2000).

28. Willem, M. *Minimax theorems* x+162. isbn: 0-8176-3913-6. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4146-1 (Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996).