Комбинаторная теория групп

Будем решать задачи, связанные с различными копредставления одной группы и подобные. Упражнения сходу:

$$D_n = \langle a, b \mid a^2 = 1, b^n = 1, a^{-1}ba = b^{-1} \rangle$$

- абелева или нет, есть ли сбалансированное копредставление? (Dihedral group)

$$P = \langle a, b \mid ababa = 1 \rangle$$

- абелева, циклическая?

$$\langle a, t \mid t^{-1}at = a^2 \rangle$$

- показать, что каждый элемент группы имеет вид $t^n a^k t^{-m}$ (а следовательно – она бесконечна)

$$\langle a, b \mid a^{-1}ba = b^2, b^{-1}ab = a^2 \rangle$$

- тривиальна или нет?

Разберемся с последним: надо показать, что $a = b = 1$. Посчитаем коммутатор двумя способами

$$ab^2a^{-2}b^{-1} = (ab^2)(ba^2)^{-1} = (ba)(ba)^{-1} = [b, a] = b(ab^{-1}a^{-1}) = b^{-1}$$

Откуда $ab^2 = a^2$, то есть $a = b^2$. Из копредставления $a^{-1}b = 1$, то есть $a = b$ и, вспоминая копредставление еще раз, получаем $a = a^2 \Rightarrow a = 1$.

Преобразования Титце

Какие базовые преобразования не меняют группу?

- добавление соотношения $\langle X \mid R \rangle \mapsto \langle X \mid R \cup \{wg^{-1} = 1\} \rangle$, $w = g$
- добавление генератора $\langle X \mid R \rangle \mapsto \langle X \cup \{g\} \mid R \cup \{wg^{-1} = 1\} \rangle$, w выражен через генераторы
- удаление генератора $\langle X \mid R \rangle \mapsto \langle X \setminus \{x\} \mid R \rangle$

Последний случай – интересный: если x не встречался в соотношениях копредставления, то удалить его мы никак не можем. А если можем выразить? То выражаем, удаляя все вхождения.

Так вот эти базовые преобразования и называются преобразованиями Титце.

Теорема Титце. Пусть есть 2 конечных копредставления: $\langle X \mid R \rangle$, $\langle X' \mid R' \rangle$. Тогда если 2 группы изоморфны, то они связаны конечным числом преобразований Титце.
Следствие: конечное копредставление задает тривиальную группу, если оно сводимо к $\langle a \mid a \rangle$.

Упражнения (вообще, $= 1$ опускают, но мы не будем этого делать):

1. $\langle x, y \mid x^4 = 1, y^2 = 1, yxy = x^{-1} \rangle$
2. $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^4 = 1 \rangle$

Изоморфны ли группы?

3. $\langle s, t \mid t^2 = 1, sts = tst \rangle$

Группы Фибоначчи

(перевод выдержки из английского текста)

$$F_n = \langle x_1, ..., x_n \mid x_1x_2 = x_3, ..., x_{n-1}x_n = x_1, x_nx_1 = x_2 \rangle$$

Несложно показать, что $F_1, F_2, ...F_5$ имеют порядки 1, 1, 8, 5, 11, соответственно. Позже было показано, что $F_6, F_7, \forall n \geq 11 : F_n$ – бесконечны. Также были введены

$$F_{r,n} = \langle x_1, ..., x_n \mid x_ix_{i+1}...x_{i+r-1} = x_{i+r}, i \text{ по модулю } n \rangle$$

И было показано, что:

- $F_{3,4}$ – бесконечна
- $F_{5,5}$ – имеет порядок 22
- $F_{3,6}$ – имеет порядок 2^33^37 и назвали это группами Силова