- Копредставление $s|r$

$$1 \to R \to F \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

- группа G действует на абелианизацию группы R:

$$G \times R_{ab} \to R_{ab}, (g, r[R,R]) \mapsto g^{'} r g^{',-1}[R,R]$$

- $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$
- $\pi(g^{'}) = g$

R_{ab} – G-модуль соотношений.

Гипотеза (Whitehead) ...

Гомологии групп

$G \mapsto G_{ab} = G/[G,G] \equiv H_1(G;\mathbb{Z})$

- $F/R[F,F] \simeq G_{ab}$

$1 \to R[F,F] \to F_{ab} \equiv F/[F,F] \to G_{ab} \to 1$

$x \in F : \pi(x) \in [G,G], \pi(x) = [a_1, a_2] \ldots,$
$\Rightarrow x \overset{R}{\sim} [a_1', a_2'] \ldots$
$x[-,-]^{-1} \in R \Rightarrow x \in R[F,F]$

$< x | x^n = 1 >$, $< x, y | y = 1, x^n = 1 >$, $\{y^m x^n y \ldots\} \subset R$

- $F/R[F,F]$ – не зависит от выбранного копредставления (инвариант группы)

(гипотеза (Andrews-Curtis))

- (Мультипликатор Шура - формула Хопфа) $\frac{R \cap [F,F]}{[F,R]} \equiv H_2(G;\mathbb{Z})$ – инвариант группы G $[a,r] : a \in F, r \in R$
- (сбалансированные копредставления) = Число генераторов равно числу соотношений
- $< x, y | x^2 = y^2, xyx = y > \simeq Q$, $H_2(Q;\mathbb{Z}) = 0$
- Утверждение: если для группы G (конечная) существует сбалансированное копредставление, то $H_2(G;\mathbb{Z}) = 0$
- (Baer invariants) ...

Старшие формулы Хопфа

$1 \to R_1, R_2 \to F_1, F_2 \to G \to 1$

$\frac{R_1 \cap R_2 \cap [F,F]}{[F,R_1 \cap R_2][F,R_1][F,R_2]} \simeq H_3(G;\mathbb{Z})$

$\frac{R_1 \cap \ldots R_n \cap [F,F]}{[F,\cap_i R_i][[R_1,\ldots R_n]]} \simeq H_{n+1}(G;\mathbb{Z})$

Идеалы в групповом кольце

$\mathbb{Z}G = \{\Sigma_i n_i g_i : g_i \in G\}$

$A \subset R : \forall a \in A, r \in R \Rightarrow ra \in A$ – левый идеал

- $f : R_1 \to R_2$ – гомоморфизм двух колец, то ядро $ker(f)$ будет идеалом

$\epsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$, $\epsilon(\Sigma_i n_i g_i) := \Sigma_i n_i$,

- $ker(\epsilon) \equiv g \equiv \mathfrak{g} \equiv \Delta(G) \equiv I(G)$ – аугментационный идеал

(идеал A порождается множеством $S \subset A$, если $\forall a \in A : \exists x_1, a_1 \dots \in S \in R : \Sigma x_i a_i = a$)

- (Доказать, что ауг. идеал порождается как $\mathbb{Z}G$-модуль) $g =< (g-1) : g \in G >$
  (произведение идеалов $A, B \subset R$: $AB = \{\Sigma_i a_i b_i : a_i \in A, b_i \in B\}$)
- $G_{ab} \simeq g/g^2$ ы
  (Док-во):

$$g_1 g_2 - 1 - (g_1 - 1) - (g_2 - 1) = (g_1 - 1)(g_2 - 1) \in g^2$$

$$\Rightarrow g_1 g_2 - 1 \overset{g^2}{=} (g_1 - 1) + (g_2 - 1)$$

$p : g \in G \mapsto (g-1) \in g$

$p(g_1 g_2) = g_1 g_2 - 1 \overset{g^2}{=} (g_1 - 1) + (g_2 - 1), p(g_2 g_1) = g_2 g_1 - 1 \overset{g^2}{=} (g_2 - 1) + (g_1 - 1)$

$p([g_1, g_2]) = 0$

$G_{ab} \to g/g^2$ – изоморфизм!

Пусть есть копредставление

$$1 \to R \to F \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

$0 \to r \to \mathbb{Z}F \to \mathbb{Z}G \to 0$
$0 \to f \to \mathbb{Z}F \to \mathbb{Z} \to 0$

$r \subset f$, $r = (R-1)\mathbb{ZF}, f = (F-1)\mathbb{Z}F$

- $f/r \simeq (F/R - 1)\mathbb{Z}[F/R = G] \simeq g$

- $G_{ab} \simeq g/g^2 \simeq (f/r)/((f/r)^2) \simeq \frac{f}{r+f^2}$
- (задача) Построить изоморфизм: $F/R[F,F] \to \frac{f}{r+f^2}$

Напоминание:

$\pi : F \to B, \sigma : A \overset{surj}{\to} B$ тогда по проективности существует $\pi' : F \to A : \sigma \circ \pi' = \pi$

– проективная абелева группа = без кручения
– проективная группа = свободная...

– все свободные группы, модули... - проективные объекты

$(0 \to ker \to A/B \to A/C \to 0, B \subset C \subset A,\ C/B \simeq ker,\ (A/B)/(C/B) \simeq A/C)$

$0 \to f/r \simeq g \to \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z} \to 0$

$0 \to r/rf \to f/rf \to f/r \to 0$

$0 \to rf/r^2 \to r/r^2 \to r/rf \to 0$

$0 \to r^2/r^2f \to rf/r^2f \to rf/r^2 \to 0$

$$\dots \to r^2/r^3 \to rf/r^2f \to r/r^2 \to f/rf \to \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z} \to 0$$

(образ предыдущего равен ядру следующего)

- резольвента Грюнберга (Gruenberg resolution)

$(\dots \to r^2/r^3 \to rf/r^2f \to r/r^2 \to f/rf \to \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}G} A$

$(\to P_i \to P_{i-1} \to \dots \to \mathbb{Z}) \otimes_G A = (\to P_i \otimes_G A \to P_{i-1} \otimes_G A \to \dots \mathbb{Z} \otimes_G A)$

образ предыдущего будет лежать в ядре следующего, но далеко не всегда будет совпадать!

Ядро следующего/образ предыдущего (i-го отображения) это $H_i(G; A)$

$H_2(G) \simeq \frac{R \cap [F,F]}{[F,R]} \simeq \frac{r \cap ff}{rf+fr}$

($\mathbb{Z}G$-свободный G-модуль, f/rf-тоже свободная, r/r^2 - свободный... $r^n f/r^{n+1} f$-модули тоже свободные!)

Sapir-Wharf hypothesis