Теория групп, 2025 г.

Н. Галимуллин

Введение. В конспекте представлена часть лекции, на которой были обсуждены свойства подгрупп свободных групп, а так же алгебры Ли и смежные к ним определения.

1. Свободные группы.

Определение. Группа F называется *свободной* группой ранга n, если существует множество $S = \{a_i\}_{i=1}^n$, где все элементы различны, такое, что для любого множества $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, если $a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n} = 1$, то для всех i

$$a_i^{\alpha_i} = 1.$$

1.1 Лемма Шрайера.

Лемма Шрайера. Пусть F — свободная конечнопорожденная группа. Тогда H — ее подгруппа конечного индекса — свободна.

Формула Нильсона-Шрайера. В указанных обозначениях выполнено соотношение

$$\text{rank } H = [H : F] \cdot (\text{rank } F - 1) + 1.$$

Утверждение. Пусть F — свободная группа ранга n, тогда

$$F_{ab} = F/[F, F] \cong \mathbb{Z}^n.$$

1.2. Группа соотношений.

Пусть G — произвольная группа, F — свободная группа, которая вкладывается в G субъективным гомоморфизмом r, с ядром R, которое мы будем называть группой соотношений. В этом случае имеет место короткая свободная последовательность

$$R \twoheadrightarrow F \hookrightarrow_r G.$$

Замечание. Тогда R имеет конечного индекса при $|G| < \infty$, поскольку $|G| = [F : R]$.

Утверждение. Пусть $R_{ab} = R/[R, R]$. Отображение $G \times R_{ab} \to R_{ab}$

$$(g, x[R, R]) \mapsto g' x g'^{-1} [R, R],$$

где $g' \in n^{-1}(g)$ определено корректно.

Замечание. С помощью леммы Шрайера несложно убедиться, что

$$R_{ab} \cong \mathbb{Z}^{1+|G|(\text{rank } F - 1)}$$

На практике щупать не нужно, используется в топологической алгебре.

---

2. Алгебры Ли.

Определение. Алгеброй Ли $\mathfrak{L}$ называют A — R-модуль над полем K, с определенной на на нем билинейным отображением

$$[.,.] : A \times A \to A,$$

которое удовлетворяет

1. Условию антисимметричности

$$[x, y] = -[y, x]$$

2. Тождеству Якоби

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$$

Упражнение. Отображение

$$[x, y] = xy - yx$$

задает алгебру Ли.

Пример. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ — это алгебра Ли всех квадратных матриц размера $n \times n$ над полем $\mathbb{K}$, снабжённое скобкой Ли (коммутатором)

$$[A, B] = AB - BA, \quad \forall A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}).$$

2.1. Свободные алгебры Ли.

Определение. Свободную алгебру Ли можно построить аналогично свободным группам. Пусть зафиксировано множество $\{x_i\}_{i=1}^n$, которое будем называть множеством образующих. Тогда свободная группа состоит из всевозможных применений скобок Ли парам элементам множества образующих и их порождающих.

Определение. Для группы Ли можно задать *структурированные константы* — набор $\{f_{ij}^k\}_{(i,j,k)=(1,1,1)}^{(n,n,n)}$ для заданного базиса $e_1, e_2, ..., e_n$ как

$$[e_i, e_j] = \sum_K f_{ij}^k e_k$$

Аксиомы скобки Ли накладывают следующие соотношения на структурированные константы:

$$\forall i, j, k$$

1. $f_{ij}^k = -f_{ji}^k$.
2. $\sum_{m=1}^{n} \left(f_{ij}^m f_{mk}^n + f_{jk}^m f_{mi}^n + f_{ki}^m f_{mj}^n \right) = 0.$

2.2. Теорема Адо.

Можно ли взять конечномерную алегбру Ли и вложить ее в трививальную?

Теорема Адо. Пусть $\mathfrak{g}$ – конечномерная алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$ характеристики 0. Тогда существует натуральное число n и инъективный гомоморфизм алгебр Ли

$$\varphi : \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}).$$

2.2. Связь категории групп с категориями алгебр Ли.

Построим функтор из категории групп в категорию групп Ли.

Зафиксируем группу G. Ее центральный нижний ряд имеет вид

$$\gamma_{n+1}G \subseteq ... \subseteq \gamma_2 G = [G, G] \subseteq G,$$

причем $\gamma_n G/\gamma_{n+1}G$ — абелева группа.

Определим алгебру Ли, как

$$\mathbb{L}G \equiv \sum_{n\geq 1} \gamma_n G/\gamma_{n+1}G,$$

для которой скобка ли опредлена

$$\forall x \in \gamma_n G, y \in \gamma_m :$$

$$[x\gamma_{n+1}G, y\gamma_{m+1}G] := [x, y]\gamma_{n+m+1}G$$

задает струткруру кольца Ли.

2.3. Свободное кольцо Ли.

Определение. Пусть A – абелева группа. Тогда тензорная алгебра над A

$$T(A) = \bigoplus_{m\geq 0} A^{\otimes m}.$$

В $T(A)$ можно определить скобку Ли

$$[a, b] := a \otimes b - b \otimes a.$$

Определение. Свободное кольцо Ли — подалгебра в $T(A)$:

$$\mathbb{L}^{\text{free}}(A) \subset T(A)^{\text{Lie}}$$

Элементы – линейные комбинации коммутаторов:

$$[a, b], \ [a, [b, c]], \ [[a, b], [c, d]], \ \ldots$$

2.4. Теорема Магнуса-Вита.

Теорема Магнуса-Вита. Пусть F — свободная группа. Тогда существует каноническое разложение:

$$\mu : \mathbb{L}F \to \mathbb{L}^{free}(F_{ab}).$$

Определение. R_{ab} — модуль соотношений.

"Это на самом деле комбинаторная теория групп."

Soon. Теорию Галуа обсудим позже.

Когда модуль соотношений является свободным

Рассмотрим групповое кольцо. Она имеет идеал. I — абелева подгруппа кольца R, такая что $\forall r \in R, i \in I$ тогда $ri \in I$.

Рассмотрим отображние ε в Z

$$\sum n_i G_i := \sum n_i$$

$\Delta(G)$ — ядро ε - агументеционный идеал.

Квадрат идеала $I^2 = \sum_i r_i(a_i b_i) : a_i \in I, b_i in I, r_i \in R$

Рассмотрим отображение

$$G_{ab} \to \Delta(G)/\Delta(G)^2$$

является изоморфизмом.

Доказательство.

$(g_1 - 1)(g_2 - 1) \in \Delta(G)^2$

Таким образом

$$(g_1 - 1) + (g_2 - 1) = g_1 g_2 - 1 \pmod{\Delta(G)^2}$$

Пусть есть точная последовательность

$$R \to A \to G$$

— копредставление группы G

r — идеал $(R-1)ZF = ker(ZF \to ZQ)$

FR язык

$(R-1)ZF = ker(ZF \to ZQ) \subset f = \Delta(F) \subset ZF$

Упражнение. R_{ab} изоморфно r/rf

Мы пришли к вложению Магнуса.

$$r/rf \to f/rf \to f/r$$

Есть вложения $R_{ab} \to ZG \to \Delta(G)$

Можно склеить точные последовательности.

Определение. Свободной резольвентой называется точная последовательность, каждый член которой свободен.

Рассмотрим функтор из категории $ZG - mod$ в Ab

$$AG \equiv A/\{ga - a : a \in A, g \in G\}$$

— конинварианты.

$$\Delta(G)_G \cong \Delta(G)/\Delta(G)^2 \cong G_{ab}$$

На точную последовательность можно действовать функтором сохраняя условия точности.

ГОМОЛОГИИ ГРУПП.

Пусть Z — тривиальный G-модуль и $... \to B_n \to ... \to B_1 \to Z$

Резольвета Блюмберга.

$\Im(d_{n+1})_G \subset Ker(d_n)_G$

$H_n(G) := ker(d_n)_G / Im(d_{n+1})_G$ — гомологии, не зависят от выбора резольвенты.

$H_1(G) = G_{ab}$ $H_2(G) \cong R \cap [F,F]/[F,R]$

Теорема (Stallings). F — свободная тогда и только тогда, когда $\forall n \geq 2$

$$H_n(F; A) = 0$$

$\forall F - A$.

$H_n(G; A)$ — гомологии с коэффициентами.