Пусть A – это G-модуль ($\mathbb{Z}G$-модули), $A_G := A/ < \{ga - a : a \in A, g \in G\} >$ – коинварианты G-модуля A.

- $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A \simeq A_G$, где $\mathbb{Z}$–тривиальный G-модуль

$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A \simeq (\mathbb{Z} \otimes A)_G \simeq A_G$

- Пусть A – правый G-модуль, B – левый G-модуль, то $(A \otimes B)_G \simeq A \otimes_{\mathbb{Z}G} B$, где $A \otimes B$ - абелева группа со структурой G-модуля заданной на диагонали:
  $g(a \otimes b) := ag^{-1} \otimes gb$ (проверить, что это G-модуль)

$a \otimes b + g(A \otimes B) \in (A \otimes B)_G \mapsto a \otimes_G b \in A \otimes_{\mathbb{Z}G} B$

Корректность:

$g(a \otimes b) - a \otimes b = ag^{-1} \otimes gb - a \otimes b \mapsto ag^{-1} \otimes_G gb - a \otimes_G b = 0$
$a \otimes_G gb = ag \otimes b$

Инъективность:

$a \otimes_G b \mapsto a \otimes b + g(A \otimes B)$ – задает обратное отображение слева, следовательно инъективность

Свойства тензорного произведения:

Пусть B – левый G-модуль, $(-) \otimes_G B : \mathbb{Z}G - \mathsf{Mod} \to \mathsf{Ab}$

$A \mapsto A \otimes_G B$

- Аддитивность: $A \oplus A' \mapsto A \otimes_G B \oplus A' \otimes_G B$
- Точность справа

Это означает, что если у нас есть сюръекция G-модулей:

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

$$A' \otimes_G B \to A \otimes_G B \to A'' \otimes_G B \to 0$$

(ядро не обязательно переходит в ядро, но последовательность точна, то есть $\mathrm{im}(A' \otimes_G B \to A \otimes_G B) = \ker(A \otimes_G B \to A'' \otimes_G B)$)

- Пусть у нас есть две длинные точные последовательности G-модулей

$$\dots P_n \to P_{n-1} \to \dots \to P_1 \to A \to 0$$

$$\dots P_n^{'} \to P_{n-1}^{'} \to \dots \to P_1^{'} \to A \to 0$$

  где $P_i, P_i^{'}$ – проективные G-модули (или свободные G-модули)

$$\dots P_n \otimes_G B \overset{r_n}{\to} P_{n-1} \otimes_G B \overset{r_{n-1}}{\to} \dots \to P_1 \otimes_G B \to A \otimes_G B \to 0$$

$$\dots P_n^{'} \otimes_G B \overset{r_n^{'}}{\to} P_{n-1}^{'} \otimes_G B \overset{r_{n-1}^{'}}{\to} \dots \to P_1^{'} \otimes_G B \to A \otimes_G B \to 0$$

то:

$H_n(P \otimes_G B) \equiv \ker(r_{n-1}^{'})/\mathrm{im}(r_n^{'}) \simeq \ker(r_{n-1})/\mathrm{im}(r_n) \equiv \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(A, B)$

- Любой G-модуль A обладает проективной резольвентой

$0 \to \ker \to F \to A \to 0$, $F_2 \to \ker \to 0$

$$\to F_n \to F_{n-1} \to \dots F \to A \to 0$$

Применение:

напомним, что

- мы взяли копредставление группы G
- построили по нему идеалы $r, f \subset \mathbb{Z}F$
- и дальше построили резольвенту Грюнберга

Возьмем резольвенту Грюнберга:

$$\dots \to r^2/r^3 \to rf/r^2f \to r/r^2 \to f/rf \to \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z} \to 0$$

- Это свободная резольвента тривиального G-модуля $\mathbb{Z}$!!!
- $H_n(G; B) = \mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, B) \simeq H_n(\mathrm{Gruenberg} \otimes_G B)$ – не зависит от копредставления группы

$$H_{2k} = \frac{r^k \cap fr^{k-1}f}{r^k f + fr^k}$$

$$H_{2k+1} = \frac{r^k f \cap fr^k}{r^{k+1} + fr^k f}$$

$k = 1:$

$$H_2 = \frac{r \cap ff}{rf + fr} \simeq \frac{R \cap [F, F]}{[F, R]}$$

- Мультипликатор Шура – это инвариант группы G (не зависит от копредставления)

Примеры

- Свободная группа G: $H_i(G; B) = 0, \forall i \geq 2, B$
  (для свободной группы используем $G \overset{id}{\to} G$, $R = 1$)

G-свободна, то тогда аугментационный идеал g – свободен как G-модуль

$$0 \to g \to \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z} \to 0$$

- Теорема (Stallings): если у группы все гомологии начиная с 2 равны 0, то группа свободна
- Циклические группы:

$H_{2k+1}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

все остальные ноль

- S_3:
  $H_1(S_3) \simeq \mathbb{Z}_2$
  $H_2(S_3) \simeq 0$
  $H_3(S_3) \simeq \mathbb{Z}_6$

$G = SL(2, \mathbb{Z})$

Группа Гейзенберга (верхне-треугольных матриц с единичной диагональю)

(пример $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq tA = \{a \in A : \exists n : na = 0\}$)