

Métodos de matemáticas aplicadas

Héctor Andrés Chang-Lara

2022-07-17

Índice general

Prefacio	5
1 Entramados	7
2 Hello bookdown	13
2.1 A section	13
3 Cross-references	15
3.1 Chapters and sub-chapters	15
3.2 Captioned figures and tables	15
4 Parts	19
5 Footnotes and citations	21
5.1 Footnotes	21
5.2 Citations	21
6 Blocks	23
6.1 Equations	23
6.2 Theorems and proofs	23
6.3 Callout blocks	23
7 Sharing your book	25
7.1 Publishing	25
7.2 404 pages	25
7.3 Metadata for sharing	25

Prefacio

Hola

Capítulo 1

Entramados

La siguiente figura ilustra cuatro puntos masivos unidos por tres barras de longitudes conocidas $\ell_{01}, \ell_{12}, \ell_{23}$, y masas despreciables. Los extremos etiquetados por 0 y 3 tienen posiciones fijas y los nodos intermedios de masas m_1 y m_2 ocupan posiciones de equilibrio. ¿A partir de cuales ecuaciones se podrían determinar las posiciones $q_i = (x_i, y_i)$ de estos nodos?

—>

Antes de proceder a plantear el sistema de ecuaciones recordemos que por lo general el número de ecuaciones e incógnitas deben ser iguales para que este esté bien planteado, es decir que existan soluciones y que sean únicas (al menos localmente). En nuestro caso tenemos cuatro incógnitas, los dos pares de coordenadas de cada nodo libre. Además debemos considerar las restricciones impuestas por las distancias entre los nodos, es decir tres ecuaciones. Hasta el momento el sistema es indeterminado, tiene más incógnitas (4) que ecuaciones (3), sin embargo aún nos falta incorporar la información del fenómeno de equilibrio.

$$\begin{cases} (x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2 = \ell_{01}^2 \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \ell_{12}^2 \\ (x_2 - 3)^2 + (y_2 - 0)^2 = \ell_{23}^2 \end{cases}$$

En cada nodo libre actúan tres fuerzas: dos tensiones y la gravedad ($= -m_i g e_y$). Por ejemplo, la tensión T_{12} sobre el nodo 1 y que se produce sobre el segmento que une los nodos 1 y 2 es proporcional al vector $q_2 - q_1$, es decir $T_{12} = \lambda_{12}(q_2 - q_1)$ para un cierto escalar λ_{12} . Similarmente podemos razonar sobre las demás interacciones, introduciendo así cuatro nuevas variables $\lambda_{10}, \lambda_{12}, \lambda_{21}$, y λ_{23} . Para que el sistema se encuentre en equilibrio, la suma de las fuerzas sobre cada nodo debe anularse, lo cual nos da igualmente cuatro ecuaciones:

$$\begin{cases} \lambda_{10}(x_0 - x_1) + \lambda_{12}(x_2 - x_1) = 0 \\ \lambda_{10}(y_0 - y_1) + \lambda_{12}(y_2 - y_1) = m_1 g \\ \lambda_{23}(x_3 - x_2) + \lambda_{21}(x_1 - x_2) = 0 \\ \lambda_{23}(y_3 - y_2) + \lambda_{21}(y_1 - y_2) = m_2 g \end{cases}$$

Pareciera que no hemos logrado mucho en términos del sistema que sigue siendo indeterminado con ocho incógnitas (2 x 's, 2 y 's y 4 λ 's) y siete ecuaciones (3 distancias y 4 balances de fuerzas). Sin embargo, la tercera ley de Newton nos dice que las interacciones entre pares de nodos guarda una simetría: toda acción produce una reacción opuesta de la misma magnitud. En nuestro modelo esto se refleja en $T_{12} = -T_{21}$, de donde obtenemos la última ecuación

$$\lambda_{12} = \lambda_{21}.$$

De hecho es más sencillo eliminar una de las incógnitas (λ_{21}) que añadir otra ecuación. En conclusión obtenemos el siguiente sistema con siete ecuaciones e incógnitas

$$\begin{cases} \lambda_{10}(x_0 - x_1) + \lambda_{12}(x_2 - x_1) = 0 \\ \lambda_{10}(y_0 - y_1) + \lambda_{12}(y_2 - y_1) = m_1 g \\ \lambda_{23}(x_3 - x_2) + \lambda_{12}(x_1 - x_2) = 0 \\ \lambda_{23}(y_3 - y_2) + \lambda_{12}(y_1 - y_2) = m_2 g \\ (x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2 = \ell_{01}^2 \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = \ell_{12}^2 \\ (x_2 - 3)^2 + (y_2 - 0)^2 = \ell_{23}^2 \end{cases}$$

Una forma de obtener solución a este sistema es el método de Newton. Por ejemplo, para los valores $\ell_{01} = \sqrt{5}$, $\ell_{12} = \sqrt{5}$, $\ell_{23} = \sqrt{10}$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $q_0 = (0, 0)$, $q_3 = (4, 0)$ la siguiente implementación ilustra como obtener la solución usando Python¹.

```
#Librerías

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.optimize import fsolve

#Parámetros

l01=np.sqrt(5)
```

¹**Advertencia:** El código es sensible a las condiciones iniciales para la iteración y no siempre converge.


```

l12=np.sqrt(5)
l23=np.sqrt(10)
x3,y3=4,0
m1=1
m2=2

#Sistema de ecuaciones y gráfica

def f(x):
    x1,y1,x2,y2,lambd01,lambd12,lambd23 = x
    f=np.zeros(7)
    f[0] = x1**2+y1**2-l01**2
    f[1] = (x2-x1)**2+(y2-y1)**2-l12**2
    f[2] = (x3-x2)**2+(y3-y2)**2-l23**2
    f[3] = -lambd01*x1+lambd12*(x2-x1)
    f[4] = -lambd01*y1+lambd12*(y2-y1)-m1
    f[5] = lambd12*(x1-x2)+lambd23*(x3-x2)
    f[6] = lambd12*(y1-y2)+lambd23*(y3-y2)-m2
    return f

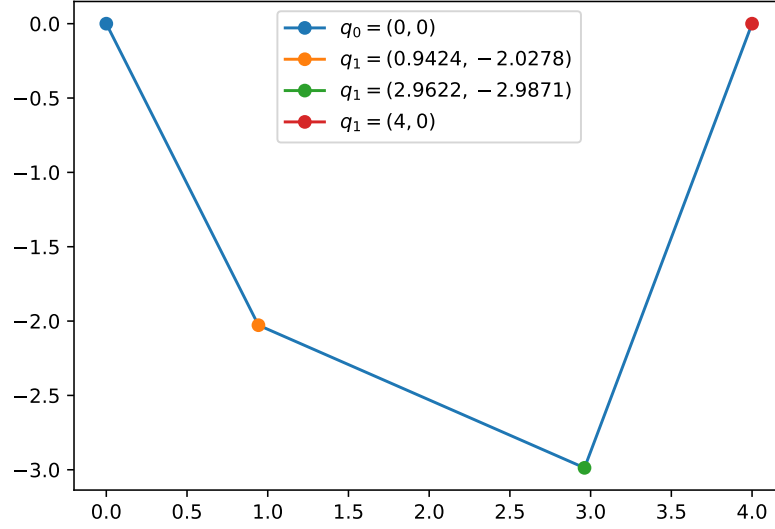
r = fsolve(f,[1,-1,3,-2,0,0,0])

x1,y1=r[0],r[1]
x2,y2=r[2],r[3]

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot([0,r[0],r[2],x3], [0,r[1],r[3],y3])
ax.plot(0,0,color='tab:blue', marker='o', label='$q_0=(0,0)$')
ax.plot(x1,y1,color='tab:orange', marker='o', label="$q_1=({:.4f},{:.4f})$".format(x1, y1))
ax.plot(x2,y2,color='tab:green', marker='o', label="$q_1=({:.4f},{:.4f})$".format(x2, y2))
ax.plot(x3,y3,color='tab:red', marker='o', label="$q_1=({},{}$".format(x3, y3))
leg = ax.legend();

plt.show()

```



Estas ideas son fácilmente generalizables a configuraciones lineales con más nodos. En el límite se obtiene el *problema de la catenaria*. También podemos considerar estructuras más complejas, por ejemplo un pañuelo sujeto por las esquinas. Para poder dar una generalización de estos modelos presentamos en la siguiente sección algunas nociones básicas de teoría de grafos. Una referencia entretenida con aplicaciones en arquitectura está en el siguiente enlace:

Ejercicio 1.1. Calcula m_2 para que el entramado esté en equilibrio dado que los nodos en $(0, 0)$ y $(13, 0)$ están fijos

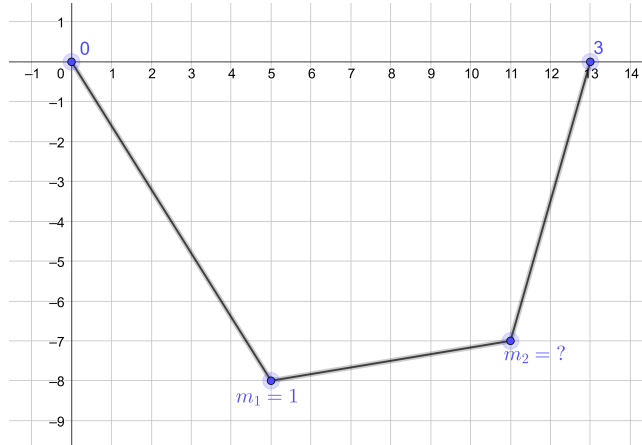




Figura 1.1: Diseñar estructuras... ¿sin cálculos? La magia de la CATENARIA

Solución

Las fuerzas en el nodo 1 están dadas por

$$\begin{cases} 5\lambda_{01} = 6\lambda_{12}, \\ 8\lambda_{01} + \lambda_{12} = g \end{cases} \Rightarrow \lambda_{01} = \frac{6g}{53}, \lambda_{12} = \frac{5g}{53}$$

Las fuerzas en el nodo 2 están dadas por

$$\begin{cases} 6\lambda_{12} = 2\lambda_{23}, \\ -\lambda_{12} + 7\lambda_{23} = m_2g \end{cases} \Rightarrow \lambda_{23} = \frac{15g}{53}, m_2 = \frac{100}{53}.$$

Ejercicio 1.2. Demuestra

Capítulo 2

Hello bookdown

All chapters start with a first-level heading followed by your chapter title, like the line above. There should be only one first-level heading (#) per .Rmd file.

2.1 A section

All chapter sections start with a second-level (##) or higher heading followed by your section title, like the sections above and below here. You can have as many as you want within a chapter.

An unnumbered section

Chapters and sections are numbered by default. To un-number a heading, add a `{.unnumbered}` or the shorter `{-}` at the end of the heading, like in this section.

Capítulo 3

Cross-references

Cross-references make it easier for your readers to find and link to elements in your book.

3.1 Chapters and sub-chapters

There are two steps to cross-reference any heading:

1. Label the heading: `# Hello world {#nice-label}`.
 - Leave the label off if you like the automated heading generated based on your heading title: for example, `# Hello world = # Hello world {#hello-world}`.
 - To label an un-numbered heading, use: `# Hello world {-#nice-label}` or `{# Hello world .unnumbered}`.
2. Next, reference the labeled heading anywhere in the text using `\@ref(nice-label)`; for example, please see Chapter 3.
 - If you prefer text as the link instead of a numbered reference use: any text you want can go here.

3.2 Captioned figures and tables

Figures and tables *with captions* can also be cross-referenced from elsewhere in your book using `\@ref(fig:chunk-label)` and `\@ref(tab:chunk-label)`, respectively.

See Figure 3.1.

```
par(mar = c(4, 4, .1, .1))  
plot(pressure, type = 'b', pch = 19)
```

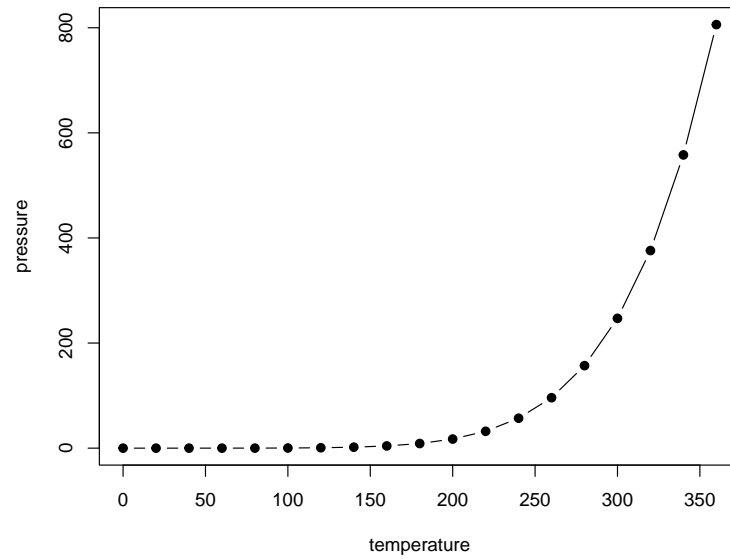


Figura 3.1: Here is a nice figure!

Don't miss Table 3.1.

```
knitr::kable(  
  head(pressure, 10), caption = 'Here is a nice table!',  
  booktabs = TRUE  
)
```


Tabla 3.1: Here is a nice table!

temperature	pressure
0	0.0002
20	0.0012
40	0.0060
60	0.0300
80	0.0900
100	0.2700
120	0.7500
140	1.8500
160	4.2000
180	8.8000

Capítulo 4

Parts

You can add parts to organize one or more book chapters together. Parts can be inserted at the top of an .Rmd file, before the first-level chapter heading in that same file.

Add a numbered part: `# (PART) Act one {-}` (followed by `# A chapter`)

Add an unnumbered part: `# (PART*) Act one {-}` (followed by `# A chapter`)

Add an appendix as a special kind of un-numbered part: `# (APPENDIX) Other stuff {-}` (followed by `# A chapter`). Chapters in an appendix are prepended with letters instead of numbers.

Capítulo 5

Footnotes and citations

5.1 Footnotes

Footnotes are put inside the square brackets after a caret `^[]`. Like this one ¹.

5.2 Citations

Reference items in your bibliography file(s) using `@key`.

For example, we are using the **bookdown** package [Xie, 2022] (check out the last code chunk in `index.Rmd` to see how this citation key was added) in this sample book, which was built on top of R Markdown and **knitr** [Xie, 2015] (this citation was added manually in an external file `book.bib`). Note that the `.bib` files need to be listed in the `index.Rmd` with the YAML `bibliography` key.

The RStudio Visual Markdown Editor can also make it easier to insert citations: <https://rstudio.github.io/visual-markdown-editing/#/citations>

¹This is a footnote.

Capítulo 6

Blocks

6.1 Equations

Here is an equation.

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (6.1)$$

You may refer to using `\@ref{eq:binom}`, like see Equation (6.1).

6.2 Theorems and proofs

Labeled theorems can be referenced in text using `\@ref{thm:tri}`, for example, check out this smart theorem 6.1.

Teorema 6.1. *For a right triangle, if c denotes the length of the hypotenuse and a and b denote the lengths of the **other** two sides, we have*

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Read more here <https://bookdown.org/yihui/bookdown/markdown-extensions-by-bookdown.html>.

6.3 Callout blocks

The R Markdown Cookbook provides more help on how to use custom blocks to design your own callouts: <https://bookdown.org/yihui/rmarkdown-cookbook/custom-blocks.html>

Capítulo 7

Sharing your book

7.1 Publishing

HTML books can be published online, see: <https://bookdown.org/yihui/bookdown/publishing.html>

7.2 404 pages

By default, users will be directed to a 404 page if they try to access a webpage that cannot be found. If you'd like to customize your 404 page instead of using the default, you may add either a `_404.Rmd` or `_404.md` file to your project root and use code and/or Markdown syntax.

7.3 Metadata for sharing

Bookdown HTML books will provide HTML metadata for social sharing on platforms like Twitter, Facebook, and LinkedIn, using information you provide in the `index.Rmd` YAML. To setup, set the `url` for your book and the path to your `cover-image` file. Your book's `title` and `description` are also used.

This `gitbook` uses the same social sharing data across all chapters in your book—all links shared will look the same.

Specify your book's source repository on GitHub using the `edit` key under the configuration options in the `_output.yml` file, which allows users to suggest an edit by linking to a chapter's source file.

Read more about the features of this output format here:

<https://pkgs.rstudio.com/bookdown/reference/gitbook.html>

Or use:

```
?bookdown::gitbook
```

Bibliografía

Yihui Xie. *Dynamic Documents with R and knitr*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2nd edition, 2015. URL <http://yihui.org/knitr/>. ISBN 978-1498716963.

Yihui Xie. *bookdown: Authoring Books and Technical Documents with R Markdown*, 2022. URL <https://CRAN.R-project.org/package=bookdown>. R package version 0.27.