维基百科
自由的百科全书

雅可比矩阵

维基百科，自由的百科全书

系列条目

微积分学

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

函数 · 极限论 · 微分学 · 积分

微积分基本定理 · 微积分发现权之争

基础概念（含极限论和级数论） [展开]

一元微分 [展开]

一元积分 [展开]

多元微积分 [展开]

微分方程 [展开]

相关数学家 [展开]

历史名作 [展开]

分支学科 [展开]

在向量分析中，**雅可比矩阵**（也称作**Jacobi矩阵**，英语：**Jacobian matrix**）是函数的一阶偏导数以一定方式排列成的矩阵。

当其为方形矩阵时，其行列式称为**雅可比行列式**（Jacobi determinant）。要注意的是，在英文中雅可比矩阵跟雅可比行列式都可称作**Jacobian**。[1]

其重要性在于，如果函数 $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^m$ 在点 $\mathbf{x}$ 可微的话，在点 $\mathbf{x}$ 的雅可比矩阵即为该函数在该点的最佳线性逼近，也代表雅可比矩阵是单变数实数函数的微分在向量值多变数函数的推广，在这种情况下，雅可比矩阵也被称作函数 $\mathbf{f}$ 在点 $\mathbf{x}$ 的微分或者导数。

在代数几何中，代数曲线的*雅可比行列式*表示雅可比簇：伴随该曲线的一个代数群，曲线可以嵌入其中。

它们全部都以普鲁士数学家卡尔·雅可比命名。

雅可比矩阵

假设某函数从 $\mathbf{f}:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^m$， 从 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ 映射到 向量 $\mathbf{f}(\mathbf{x})\in\mathbb{R}^m$， 其雅可比矩阵是一 $m\times n$ 的矩阵，换句话讲也就是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射，其重要意义在于它表现了一个多变数向量函数的最佳线性逼近。因此，雅可比矩阵类似于单变数函数的导数。

此函数 $\mathbf{f}$ 的雅可比矩阵 $\mathbf{J}$ 为 $m\times n$ 的矩阵，一般由以下方式定义：

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

矩阵的分量可表示成：

$$\mathbf{J}_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

雅可比矩阵的其他常用符号还有：

$$Df、\mathrm{D}\mathbf{f}、\mathbf{J}_\mathbf{f}(x_1, \ldots, x_n) \text{ 或者 } \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

此矩阵的第 i行是由函数 f_i 的梯度函数所表示的，$1 \leq i \leq m$。

如果 p是$\mathbb{R}^n$ 中的一点，f在 p点可微分，根据数学分析， $\mathbf{J}_\mathbf{f}(p)$是在这点的导数。在此情况下，$\mathbf{J}_\mathbf{f}(p)$这个线性映射即 f 在点 p附近的最优线性逼近，也就是说当 x足够靠近点 p时，我们有

$$f(x) \approx f(p) + \mathbf{J}_\mathbf{f}(p) \cdot (x - p)$$

讲更详细点也就是：

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \mathbf{J}_\mathbf{f}(\mathbf{p})(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|)$$

其中，o 代表小o符号，$\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|$ 为 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{p}$ 之间的距离。

例子

例一

由球坐标系到直角坐标系的转化由 $\mathbf{F}$: $\mathbb{R}^+ \times [0, \pi) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ 函数给出，其分量为：

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi; \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi; \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

此坐标变换的雅可比矩阵是

$$\mathbf{J}_\mathbf{F}(r, \theta, \varphi) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

其雅可比行列式为 $r^2 \sin\theta$。以体积元变换为例，由于 $dV = dx\,dy\,dz$，如果做变数变换，则其体积元（Volume element，dV），会变成：$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$。

例二

$\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$，其各分量为

$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = 5x_3$$
$$y_3 = 4x_2^2 - 2x_3$$
$$y_4 = x_3 \sin x_1$$

其雅可比矩阵为:

$$J_F(x_1,x_2,x_3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_4}{\partial x_1} & \frac{\partial y_4}{\partial x_2} & \frac{\partial y_4}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 8x_2 & -2 \\ x_3 \cos x_1 & 0 & \sin x_1 \end{bmatrix}$$

此例子说明雅可比矩阵不一定为方阵。

在动力系统中

考虑形为 $x' = F(x)$的动力系统，$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$。如果 $F(x_0) = 0$，那么 x_0是一个临界点。系统接近临界点时的行为跟 $J_F(x_0)$的特征值相关。

雅可比行列式

如果 $m = n$，那么 F 是从 $\mathbb{R}^n$ 映射到 $\mathbb{R}^n$ 的函数，且它的雅可比矩阵是一个方阵。于是我们可以取它的行列式，称为**雅可比行列式**。

在某个给定点的雅可比行列式提供了 F 在接近该点时的表现的重要资讯。例如，如果连续可微函数 F 在 p 点的Jacobi行列式不等于零，那么它在该点附近有 F 的反函数。这称为反函数定理。更进一步，如果 p 点的Jacobi行列式是正数，则 F 在 p 点保持定向（preserves orientation）；如果是负数，则 F 逆转定向（reverses orientation）。而从Jacobi行列式的绝对值，就可以知道函数 F 在 p 点附近是放大或缩小体积；这就是它出现在换元积分法中的原因。

例子一

设有函数 $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$，其分量为：

$$y_1 = 5x_2$$
$$y_2 = 4x_1^2 - 2\sin(x_2 x_3)$$
$$y_3 = x_2 x_3$$

则它的Jacobi行列式为：

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 8x_1 & -2x_3\cos(x_2x_3) & -2x_2\cos(x_2x_3) \\ 0 & x_3 & x_2 \end{vmatrix} = -8x_1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ x_3 & x_2 \end{vmatrix} = -40x_1x_2$$

从中我们可以看到，当 x_1 和 x_2 同号时，F 逆转定向；该函数处处具有反函数，除了在 $x_1 = 0$ 或 $x_2 = 0$ 的点。

例子二

这是一个与巴塞尔问题$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$较为相似的级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$的求解方法，首先可以转化为二重积分（在这里 D_1 指 x 与 y 皆为从 0 到 1 的正方形区域）：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \iint_{D_1}\sum_{n=1}^{\infty}(xy)^{2n}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1-x^2y^2}$$

此时定义映射 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，满足：

$$\begin{cases} u = \arctan\left(x\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}\right) \\ v = \arctan\left(y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\sin u}{\cos v} \\ y = \dfrac{\sin v}{\cos u} \end{cases}$$

于是有相应的雅可比行列式：

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\cos u}{\cos v} & \dfrac{\sin u \sin v}{\cos^2 v} \\ \dfrac{\sin u \sin v}{\cos^2 u} & \dfrac{\cos v}{\cos u} \end{vmatrix} = 1 - \frac{\sin^2 u \sin^2 v}{\cos^2 u \cos^2 v} = 1 - x^2y^2$$

因此$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (1-x^2y^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，并且将正方形 D_1 映射成 $u>0$、$v>0$、$u+v<\pi/2$ 的等腰直角三角形，记为 D_2，得到：

$$\iint_{D_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1-x^2y^2} = \iint_{D_2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-v}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v =$$

黑塞矩阵，又译作**海森矩阵**、**海塞（赛）矩阵**或**海瑟矩阵**等，是一个由多变量实值函数的所有二阶偏导数组成的方阵，由德国数学家奥托·黑塞引入并以其命名。

逆矩阵

根据反函数定理，一个*可逆函数*（存在反函数的函数）

的雅可比矩阵。即，若函数 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 在点 $p \in \mathbb{R}^n$ 的雅可比矩阵是连续且可逆的，则 F 在点 p 的某一邻域内也是可逆的，且有

$$J_{F^{-1}} \circ f = J_F^{-1}$$

成立。相反，倘若雅可比行列式在某一个点**不为**零，那么该函数在这个点的某一邻域内*可逆*（存在反函数）。

一个多项式函数的可逆性与未经证明的雅可比猜想有关。其断言，如果函数的雅可比行列式为一个非零实数（相当于其不存在**复零点**），则该函数可逆且其反函数也为一个多项式。

参看

- 前推
- 黑塞矩阵

参考资料

1. W., Weisstein, Eric. Jacobian. mathworld.wolfram.com. [2 May 2018]. （原始内容存档于3 November 2017）.

外部链接

- Ian Craw的本科教学网页 (https://web.archive.org/web/20060421002832/http://www.maths.abdn.ac.uk/~igc/tch/ma2001/notes/node77.html) 雅可比行列式的通俗解释
- Mathworld (http://mathworld.wolfram.com/Jacobian.html) （页面存档备份 (https://web.archive.org/web/20171103144419/http://mathworld.wolfram.com/Jacobian.html)，存于互联网档案馆） 更技术型的雅可比行列式的解释