维基百科
自由的百科全书

泰勒级数

维基百科，自由的百科全书

在数学中，**泰勒级数**（英语：Taylor series）用无限项连加式——级数来表示一个函数，这些相加的项由函数在某一点的导数求得。泰勒级数是以于1715年发表了泰勒公式的英国数学家布鲁克·泰勒（Sir Brook Taylor）来命名的。通过函数在自变量零点的导数求得的泰勒级数又叫做**麦克劳林级数**，以苏格兰数学家科林·麦克劳林的名字命名。

拉格朗日在1797年之前，最先提出带有余项的现在形式的泰勒定理。实际应用中，泰勒级数需要截断，只取有限项，可以用泰勒定理估算这种近似的误差。一个函数的有限项的泰勒级数叫做泰勒多项式。一个函数的泰勒级数是其泰勒多项式的极限（如果存在极限）。即使泰勒级数在每点都收敛，函数与其泰勒级数也可能不相等。在开区间（或复平面上的开区间）上，与自身泰勒级数相等的函数称为解析函数。

定义

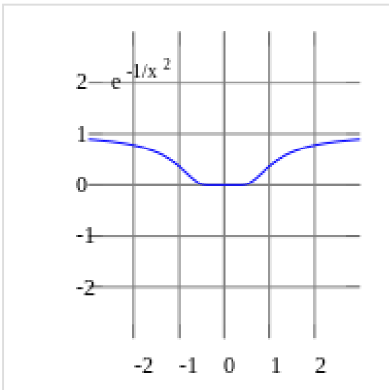
在数学上，对于一个在实数或复数a邻域上，以实数作为变量或以复数作为变量的函数，并且是无穷可微的函数$f(x)$，它的**泰勒级数**是以下这种形式的幂级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

这里，$n!$表示n的阶乘，而$f^{(n)}(a)$表示函数f在点a处的n阶导数。如果$a=0$，也可以把这个级数称为**麦克劳林级数**。

解析函数

如果泰勒级数对于区间$(a-r,a+r)$中的所有x都收敛并且级数的和等于$f(x)$，那么我们就称函数$f(x)$为**解析形的函数**（analytic）。一个函数当且仅当（简单地说，“只有在且只要在”）能够被表示为幂级数的形式时，才是解析形的函数。通常会用**泰勒定理**来估计级数的余项，这样就能够确定级数是否收敛于$f(x)$。上面给出的幂级数展开式中的系数正好是泰勒级数中的系数。



柯西在1823年指出函数$\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$在$x=0$无法被解析。

以下三个事实可以说明为什么泰勒级数是十分重要的：

1. 可以逐项对幂级数的计算微分和积分，因此求和函数相对比较容易。
2. 数学家因此能够在复数平面上研究函数，因为一个解析函数，也可以被定义为在复平面中一个开放的区间内的解析函数(在区间内每一个点上都能被微分的函数)。
3. 可用泰勒级数估计，在某一点上函数会计算出什么值。

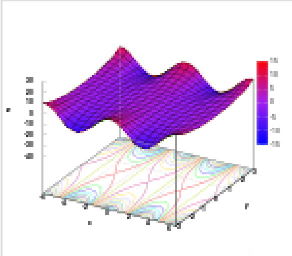
对于一些无穷的可以被微分函数$f(x)$，虽然它们的展开式会收敛，但是并不等于$f(x)$。例如，分段函数$f(x)=\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$，如果$x\neq 0$并且$f(0)=0$，则$x=0$时所有的导数都为零，所以这个$f(x)$的泰勒级数为零，且其收敛半径为无穷大，不过函数$f(x)$仅在$x=0$处为零。但是，在以复数作为变量的函数中

这个问题并不存在，因为当z沿虚轴趋于零，$\exp\left(-\frac{1}{z^2}\right)$并不趋于零。

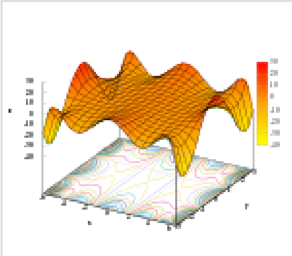
如果一个函数在某处引发一个奇点，它就无法被展开为泰勒级数，不过如果变量x是负指数幂的话，我们仍然可以将其展开为一个级数。例如，虽然在$x=0$的时候，$f(x)=\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$会引发奇点，但仍然能够把这个函数展开为一个洛朗级数。

最近，专家们发现了一个用泰勒级数来求解微分方程的方法——Parker-Sochacki method[1]。用皮卡迭代便可以推导出这个方法。

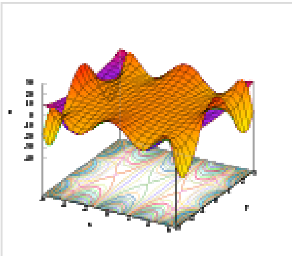
常用的函数:麦克劳林级数



在复平面上余弦函数的实数部分。



在复平面上余弦函数的第八度逼近



两个以上的曲线放在一起

下面我们给出了几个重要的麦克劳林级数。当变量x是复数时，这些等式依然成立。

几何级数

由无穷递缩等比数列求和式：

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots\quad\forall x:|x|<1$$

二项式级数

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$\forall x:|x|<1,\forall\alpha\in\mathbb{C}$

二项式系数$\binom{\alpha}{n}=\prod_{k=1}^{n}\frac{\alpha-k+1}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$。

指数函数和自然对数

以e为底数的指数函数的麦克劳林序列是

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad \forall x$$ （对所有X都成立）

以e为底数的自然对数的麦克劳林序列是

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} - \cdots \quad \forall x \in [-1, 1)$$ （对于在区间[-1,1)内所有的X都成立）

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + \cdots \quad \forall x \in (-1, 1]$$ （对于在区间(-1,1]内所有的X都成立）

三角函数

常用的三角函数可以被展开为以下的麦克劳林序列：

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} & &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots & & \forall x \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} & &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots & & \forall x \\
\tan x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n\left(1-4^n\right)}{(2n)!} x^{2n-1} & &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots & & \forall x : |x| < \frac{\pi}{2} \\
\sec x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} x^{2n} & &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \cdots & & \forall x : |x| < \frac{\pi}{2} \\
\arcsin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} & &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots & & \forall x : |x| \le 1 \\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - \arcsin x \\
&= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} & &= \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + \cdots & & \forall x : |x| \le 1 \\
\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} & &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots & & \forall x : |x| \le 1,\ x \ne \pm i
\end{aligned}$$

在$\tan(x)$展开式中的B_k是伯努利数。在$\sec(x)$展开式中的E_k是欧拉数。

双曲函数

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \forall x$$
$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \quad \forall x$$
$$\tanh x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} 4^n (4^n - 1)}{(2n)!} x^{2n-1} \quad \forall x : |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\sinh^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} \quad \forall x : |x| < 1$$

$$\tanh^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \quad \forall x : |x| < 1$$

$\tanh(x)$展开式中的B_k是伯努利数。

朗伯W函数

$$W_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} x^n \quad \forall x : |x| < \frac{1}{e}$$

多元函数的展开

泰勒级数可以推广到有多个变量的函数：$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=0}^{\infty} \frac{\partial^{n_1+\cdots+n_d}}{\partial x_1^{n_1} \cdots \partial x_d^{n_d}} \frac{f(a_1, \cdots, a_d)}{n_1! \cdots n_d!} (x_1 - a_1)^{n_1} \cdots (x_d - a_d)^{n_d}$

历史

希腊哲学家芝诺在考虑了利用无穷级数求和来得到有限结果的问题，得出不可能的结论 - 芝诺悖论。后来，亚里士多德对芝诺悖论在哲学上进行了反驳，但德谟克利特以及后来的阿基米德进行研究，此部分数学内容才得到解决。 正是用了阿基米德的穷竭法才使得一个无穷级数被逐步的细分，得到了有限的结果。[2]几个世纪之后，中国数学家刘徽也独立提出了类似的方法。[3]

进入14世纪，马德哈瓦最早使用了泰勒级数以及相关的方法[4]。尽管他的数学著作没有流传下来，但后来印度数学家的著作表明他发现了一些特殊的泰勒级数，这些级数包括正弦、余弦、正切、和反正切三角函数等等。之后，喀拉拉学派在他的基础上进行了一系列的延伸与合理逼近，这些工作一直持续到16世纪。

到了17世纪，詹姆斯·格雷果里同样继续着这方面的研究并且发表了若干麦克劳林级数。但是直到1715年，布鲁克·泰勒 [5] 提出了一个通用的方法来构建适用于所有函数的此类列级数。这就是后来被人们所熟知的泰勒级数。 麦克劳林级数是泰勒级数的特例，是爱丁堡大学的科林·麦克劳林教授在18世纪发表的，并以其名字命名。

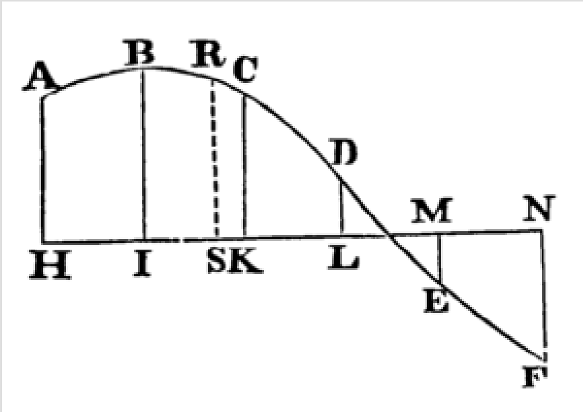
与牛顿插值公式的渊源

牛顿插值公式也叫做**牛顿级数**，由“牛顿前向差分方程”的项组成，得名于伊萨克·牛顿爵士，最早发表为他在1687年出版的《自然哲学的数学原理》中第三编“宇宙体系”的引理五[6]，此前詹姆斯·格雷果里于1670年和牛顿于1676年已经分别独立得出这个成果。一般称其为连续“泰勒展开”的离散对应。

差分

对于x值间隔为非一致步长，牛顿计算均差，对x值间隔为单位步长1或一致但非单位量的情况，计算差分，前向差分的定义为：

$$\Delta_h^1[f](x) = f(x+h) - f(x)$$
$$\Delta_h^n[f](x) = \Delta_h^{n-1}[f](x+h) - \Delta_h^{n-1}[f](x)$$



《自然哲学的数学原理》的第三编“宇宙体系”的引理五的图例。这里在横坐标上有6个点H,I,K,L,M,N，对应着6个值A,B,C,D,E,F，生成一个多项式函数对这6个点上有对应的6个值，计算任意点S对应的值R。牛顿给出了间距为单位值和任意值的两种情况。

插值公式

牛顿前向差分插值公式为：

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{x-a}{h}\left(\Delta_h^1[f](a) + \frac{x-a-h}{2h}\left(\Delta_h^2[f](a) + \cdots\right)\right) \\ &= f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_h^k[f](a)}{k!h^k} \prod_{i=0}^{k-1}((x-a)-ih) \end{aligned}$$

这成立于任何多项式函数和大多数但非全部解析函数。

无穷级数

牛顿在1665年得出并在1671年写的《流数法》中发表了$\ln(1+x)$的无穷级数，在1666年得出了$\arcsin(x)$和$\arctan(x)$的无穷级数，在1669年的《分析学》中发表了$\sin(x)$、$\cos(x)$、$\arcsin(x)$和e^x的无穷级数；莱布尼茨在1673年大概也得出了$\sin(x)$、$\cos(x)$和$\arctan(x)$的无穷级数。布鲁克·泰勒在1715年著作《Methodus Incrementorum Directa et Inversa (http://www.17centurymaths.com/contents/taylorscontents.html) （页面存档备份 (https://web.archive.org/web/20140628165536/http://www.17centurymaths.com/contents/taylorscontents.html)，存于互联网档案馆）》中研讨了有限差分方法，其中论述了他在1712年得出的泰勒定理，这个成果此前詹姆斯·格雷果里在1670年和莱布尼茨在1673年已经得出，而约翰·伯努利在1694年已经在《教师学报》发表。

他对牛顿的均差分的步长取趋于0的极限，得出：

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta_h^k[f](a)}{k!h^k} \prod_{i=0}^{k-1}((x-a)-ih) \\ &= f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d^k}{dx^k} f(a) \frac{(x-a)^k}{k!} \end{aligned}$$

参考文献

1. James S. Sochacki. The Modified Picard Method for Solving Arbitrary Ordinary and Initial Value Partial Differential Equations. James Madison University. [2008-05-02]. （原始内容存档于2008-05-01） （英语）.
2. Kline, M. (1990) *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press. pp. 35-37
3. 吴文俊 《中国数学史大系》第三卷 367页

4. Neither Newton nor Leibniz - The Pre-History of Calculus and Celestial Mechanics in Medieval Kerala. MAT 314. Canisius College. [2006-07-09]. （原始内容存档于2006-08-06）.
5. Taylor, Brook, *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* [Direct and Reverse Methods of Incrementation] (London, 1715), pages 21-23 (Proposition VII, Theorem 3, Corollary 2). Translated into English in D. J. Struik, *A Source Book in Mathematics 1200-1800* (Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1969), pages 329-332.
6. Newton, Isaac, (1687). *Principia*, Book III, Lemma V, Case 1 (http://books.google.com/books?id=KaAIAAAAIAAJ&dq=sir%20isaac%20newton%20principia%20mathematica&as_brr=1&pg=PA466#v=onepage&q&f=false)

参见

- 无穷级数
- 牛顿多项式
- 幂级数
- 光滑函数
- 帕德近似
- 泰勒公式