

1/18

导数是函数的局部性质。不是所有的函数都有导数，一个函数也不一定在所有的点上都有导数。若某函数在某一点导数存在，则称其在这一点可导(可微分)，否则称为不可导(不可微分)。如果函数的自变量和取值都是实数的话，那么函数在某一点的导数就是该函数所代表的曲线在这一点上的切线斜率。

对于可导的函数 f ， $x \mapsto f'(x)$ 也是一个函数，称作 **f 的导函数**。寻找已知的函数在某点的导数或其导函数的过程称为**求导**（英语：differentiation）。反之，已知导函数也可以倒过来求原来的函数，即不定积分。微积分基本定理说明了求原函数与积分是等价的^{[1]:372}。求导和积分是一对互逆的操作，它们都是微积分学中最为基础的概念。

定义

一般定义

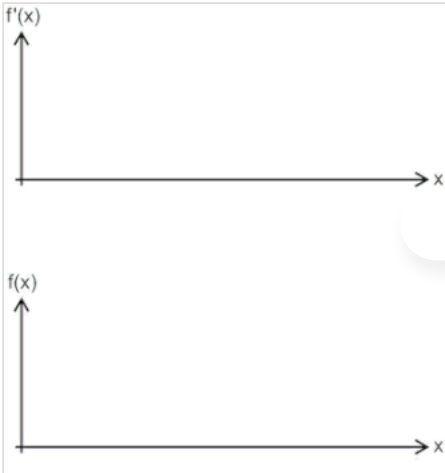
直观上 $f(x) - f(a)$ 代表函数值从 a 到 x 的变化量，那这样，

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

代表的是从 a 到 x 的平均变化率，如果把 x 趋近于 a ，似乎就可以更能贴切的描述函数值在 a 附近的变化。

以此为动机，若实函数 f 于实数 a 有定义，且以下极限（注意这个表达式所定义的函数定义域不含 a ）

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



一个动画，给出了一个直观的导数概念，因为参数变化时函数的“摆动”会改变。

存在则称 f 于 a 处可导，并称这个极限为 f 于 a 处的**导数**^{[2]:117-118}，记为 $f'(a)$ 也可记作 $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$ 或 $\frac{df}{dx}(a)$ ^{[1]:154}。

根据函数极限的定义，导数定义部分的 "存在 $\delta > 0$ 使所有的 $x \in D_f$ ，只要 $0 < |x - a| < \delta$ 都有...." 可以直观的理解为 "当 $h = x - a$ 趋近于 0 都有...."，但要把它写成严谨的定义，会碰到 "存在 $\delta > 0$ 对所有的实数 h ，只要 $a + h \in D_f$ 且 $0 < |h| < \delta$ 都有...." 这段叙述无法直接套入极限定义的问题，对此必须把以下的表达式

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

定义为导数原始极限表达式的简记，而非另一种自动合法的导数定义。但如果存在 $r > 0$ ，使 f 在 $(a - r, a + r)$ 里都有定义，那定义 F 为以

$$\{h \in \mathbb{R} \mid (h \neq 0) \wedge (|h| < r)\}$$

为定义域，然后以

$$F(h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

为对应规则的函数，那以下的极限式

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = f'(a)$$

就可以把以 h 为自变量的偏差，将之趋近于零求导数的想法纳入正式的运算里。

几何意义

当函数定义域和取值都在实数域中的时候，导数可以表示函数的曲线上的切线斜率。如右图所示，设 P_0 为曲线上的一个定点， P 为曲线上的一个动点。当 P 沿曲线逐渐趋向于点 P_0 时，并且割线 PP_0 的极限位置 P_0T 存在，则称 P_0T 为曲线在 P_0 处的切线。

若曲线为一函数 $y = f(x)$ 的图像，那么割线 PP_0 （粉红色）的斜率为：

$$\tan \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

当 P_0 处的切线 P_0T （橘红色），即 PP_0 的极限位置存在时，此时 $\Delta x \rightarrow 0$ ， $\varphi \rightarrow \alpha$ ，则 P_0T 的斜率 $\tan \alpha$ 为：

$$\tan \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tan \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

上式与一般定义中的导数定义完全相同，也就是说 $f'(x_0) = \tan \alpha$ ，因此，导数的几何意义即曲线 $y = f(x)$ 在点 $P_0(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率。^{[2]:117[1]:153}

导数、导函数与微分算子

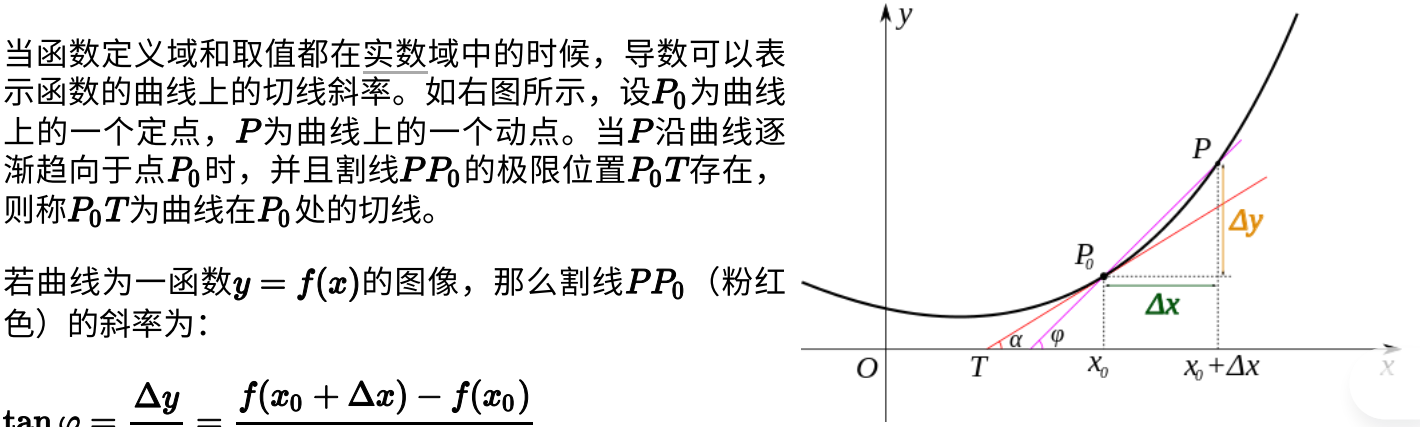
若函数 $f(x)$ 在其定义域包含的某区间 I 内每一个点都可导，那么也可以说函数 $f(x)$ 在区间 I 内可导，这时对于 I 内每一个确定的 x 值，都对应着 f 的一个确定的导数值，如此一来就构成了一个新的函数 $x \mapsto f'(x)$ ，这个函数称作原来函数 $f(x)$ 的导函数^{[1]:155}，记作： y' 、 $f'(x)$ 或者 $\frac{df}{dx}(x)$ 。值得注意的是，导数是一个数，是指函数 $f(x)$ 在点 x_0 处导函数的函数值。但在不至于混淆的情况下，通常也可以说导函数为导数。

由于对每一个可导的函数 $f(x)$ ，都有它的导函数 $f'(x)$ 存在，我们还可以定义将函数映射到其导函数的算子。这个算子称为微分算子，一般记作 D 或 $\frac{d}{dx}$ ^[3]。例如：

$$\begin{aligned} D(x \mapsto 1) &= (x \mapsto 0) \\ D(x \mapsto x) &= (x \mapsto 1) \\ D(x \mapsto x^2) &= (x \mapsto 2 \cdot x) \end{aligned}$$

由于微分算子的输出值仍然是函数，可以继续求出它在某一点的取值。比如说对于函数 $f(x) = x^2$ ，

,



$$D(f) = (x \mapsto 2 \cdot x)$$

所以 $D(f)(x) = 2x$ ， $D(f)(1.4) = 2 \times 1.4 = 2.8$ 。

导数与微分

微分也是一种线性描述函数在一点附近变化的方式。微分和导数是两个不同的概念。但是，对一元函数来说，可微与可导是完全等价的。可微的函数，其微分等于导数乘以自变量的微分 dx ，换句话说，函数的微分与自变量的微分之商等于该函数的导数。因此，导数也叫做**微商**。函数 $y = f(x)$ 的微分又可记作 $dy = f'(x)dx$ ^[4]。

历史

导数和积分的发现是微积分发明的关键一步。17世纪以来，光学透镜的设计以及炮弹弹道轨迹的计算促使欧洲的数学家对曲线的切线进行研究。1630年代，法国数学家吉尔·德·罗伯瓦尔作出了最初的尝试^[5]。与此同时，同是法国人的费马在计算切线时已经使用了**无穷小量**的概念^{[注 1][6]:52}。

如右图，费马考虑曲线 $f(x)$ 在 x 处的切线。他声称，对于切线，有以下的关系成立：

$$\frac{s}{s+h} = \frac{f(x)}{f(x+h)}$$

对上式变形后得到：

$$s = \frac{f(x)}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

对于具体的函数 $f(x)$ ，比如 $f(x) = x^3$ ，费马计算 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 的值，并将 h 设为0，就得到

s ，从而确定切线的斜率。可以看出，费马的方法实质上已经是求导。费马还给出了 $f(x)$ 为多项式时切线的公式。英国的巴罗、荷兰的于德（Johann Van Waveren Hudde）和瓦隆的斯卢兹（René Francoiss Walther de Sluze）继续了费马的工作^[7]。然而，费马和巴罗等人并没有将求导归纳为一种独立的工具，只是给出了具体的计算技巧^[5]。

1660年代，英国人伊萨克·牛顿提出了“流数”的概念。牛顿在写于1671年的《流数法与无穷级数》中对流数的解释是：“我把时间看作是连续的流动或增长，而其他的量则随着时间而连续增长。我从时间流动性出发，把所有其他量的增长速度称为流数。”也就是说，流数就是导数。牛顿将无穷小的时间间隔定义为“瞬间”（moment），而一个量的增量则是流数与瞬间的乘积。求导数时，牛顿将自变量和因变量两边展开，同时除以瞬间，再将剩下的项中含有瞬间的项忽略掉^{[6]:72}。而在他的第三篇微积分论文中，牛顿使用了新的概念：最初比和最后比。他说：

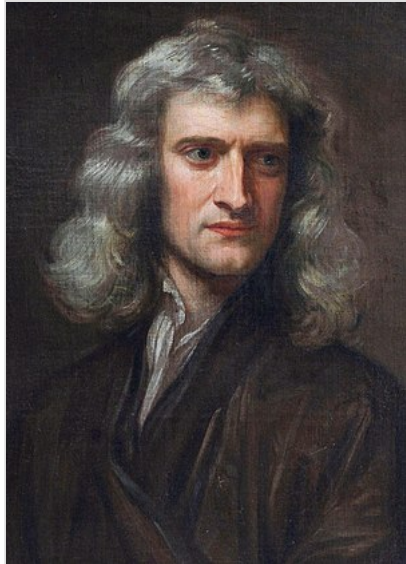
“

随我们的意愿，流数可以任意地接近于在尽可能小的等间隔时段中产生的增量，精确地说，它们是最初增量的最初的比，它们也能用和它们成比例的任何线段来表示。^{[6]:74}

”

相比于牛顿，德国数学家莱布尼兹使用了更清晰的记号来描述导数（见导数的记法一节）。他利用了巴罗的“微分三角形”概念，将自变量和因变量的增量记为 dx 和 dy 。他把 dx 理解为“比任何给定的长度都要小”，而 dy 则是 x 移动时 y “瞬刻的增长”^{[6]:89}。而导数则是两者之间的比例。他还研究了函数之和、差、积、商的求导法则。

牛顿和莱布尼兹的差别在于，牛顿将无穷小量作为求流数或导数的工具，而莱布尼兹则用无穷小量的比值来表示导数。这与二人的哲学思想差异有关^{[6]:92}。



伊萨克·牛顿爵士

微积分的理论面世后，遭到了有关无穷小量定义的攻击与质疑。导数的定义自然也包括在内。莱布尼兹和牛顿对无穷小量的认识都是模糊的。不仅如此，莱布尼兹甚至引入了 $(d)x$ 和 $(d)y$ ，称其为“未消失的量”，用以进行求导前部的计算。在完成计算后再用“消失的量” dx 和 dy 来代替它们，并假定前两者之比等于后两者之比，认为这是一个不容置疑的真理^{[6]:102}。

许多数学家，包括伯努利兄弟、泰勒、麦克劳林、达朗贝尔、拉格朗日和欧拉都想要对微积分的严密性辩护或将微积分严密化。但受限于对无穷小量的认识，十八世纪的数学家并没有做出太大的成果。微积分的强烈抨击者，英国的乔治·贝克莱主教在攻击无穷小量时认为，流数实际上是“消失的量的鬼魂”，是0与0之比。欧拉承认后者，并认为0与0之比可以是有限值。拉格朗日则假定函数都可以展开为幂级数，并在此基础上定义导数^{[6]:154-156}。

十九世纪后，随着对函数连续性和极限的更深刻认识，微积分终于趋于严谨。波尔查诺是首先将导数定义为函数值的改变量与自变量增量之比在自变量增量无限接近0时趋向的量。波尔查诺强调导数不是0与0之比，而是前面的比值趋向的数^{[8]:10}。柯西在他的著作《无穷小分析教程概论》中也使用了同样的定义，并定义 dy 为导数与 dx 的乘积。这样，导数和微分的概念得到了统一^{[8]:11}。

导数的记法

从微积分发轫至如今，不同的数学家都曾使用过不同的记号来表示函数的导数。部分记号至今仍然使用，成为现代的通用记法。

牛顿的记法

作为微积分的发明人之一，牛顿在1704年著作中将导数用函数符号上方的点来表示。例如 $y = f(x)$ 的导数就记作 \dot{y} ，而二阶导数则记为 \ddot{y} ^{[9]:193-196}。他以后的数学家也会将 \dot{y} 用来表示函数的微分。牛顿的记法中没有明确自变量，因此 y 对 x 的导数在牛顿的著作中也会被记成 $y' : x'$ ，因为这可以理解为两个函数 y 和 x 对于另一个变量 t 的导数比^{[9]:196}。而这个导数比（使用莱布尼兹的记号）：

$$y' : x' = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}$$

牛顿的记号多见于物理学或与之有关的方面，如微分方程中。以及直到现在，使用函数符号上加一点来表示某一变量的变化率（即对时间的导数）依然常见于各类物理学教材中（如使用 \dot{v} 来表示加速度等）。注意到对于高阶的导数，这种记法就无法表示了。

莱布尼兹的记法

莱布尼兹在他的研究中分别使用 Δx 和 Δy 来表示函数自变量和应变量（输出值）的有限变化量，而使用 dx 和 dy 来表示“无限小”的变化量（即所谓的“无穷小量”）^[10]。如果将函数记为 $y = f(x)$ 的话，那么在莱布尼兹的记法下，其导数记为：

$$\frac{dy}{dx}、\frac{df}{dx}(x)、\frac{d}{dx}f(x) \text{ 或 } \frac{d(f(x))}{dx},$$

这个记法最早出现在莱布尼兹1684年的论文中^{[9]:204}，莱布尼兹在之前的文章中会将 dx 记成 $\frac{x}{d}$ ，把 $\frac{dy}{dx}$ 记成 $d\frac{y}{x}$ 。莱布尼兹记法的好处是明确了自变量和应变量^[11]。要注意的是记号 dx 是一个整体， dy 也是，而 $\frac{dy}{dx}$ 可以看成是一个整体，也可以不严谨地看成 dy 和 dx 的比值^[10]。此外， $\frac{dy}{dx}$ 表示的是导函数，在某一点 $x = a$ 的导数则记为： $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ 对于更高阶的导数（比如说 n 阶，见高阶导数一节），莱布尼兹的记法是：

$$\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^nf}{dx^n}(x) \text{ 或 } \frac{d^n[f(x)]}{dx^n},$$

这种记法是在1695年出现的^{[9]:205}。这里的分子和分母不再具有单独的意义。莱布尼兹的记法中使用 $\frac{d}{dx}$ 来表示微分算子，比如说二阶的导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 就可以看成：

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$
^[11]

莱布尼兹记法的另一个好处是便于记忆导数计算的法则。例如链式法则（见导数的计算一节）应用莱布尼兹的记法就是：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

可以想象为右边是两个分式的乘积，消去 du 之后就变成左边^[11]。

由于牛顿和莱布尼兹之间关于微积分创始人称号的持久纠纷，在十八世纪早期的很长时间里，英国数学界与欧洲大陆的数学界分别采用牛顿和莱布尼兹的记号，泾渭分明。这种情况直到十八世纪后期才开始改变，随着拉格朗日记法的出现而变得多样化起来^{[9]:197-200}。

拉格朗日的记法

另一种现今常见的记法是十八世纪拉格朗日于1797年率先使用的，以在函数的右上角加上一短撇作为导数的记号。函数 $y = f(x)$ 的导数就记作 $f'(x)$ 或 y' ^[12]。二阶和三阶导数记为 $f''(x)$ 、 y'' 和 $f'''(x)$ 、 y''' ^{[9]:207}。如果需要处理更高阶的导数，则用括号内的求导阶数 n 来代替短撇，记为： $f^{(n)}(x)$ 、 $y^{(n)}$ 。当十九世纪的数学家柯西处理微分学时，他认为莱布尼兹的记法“模糊不便”，而采用更为“紧凑”的记法，将 $\frac{dy}{dx}$ 记为 y'_x 。这种记法可说是拉格朗日记法的变种^{[9]:218}。后来这种记法曾继续被精简为 y_x ^[13]。

其它记法

十九世纪以前，尽管大部分数学家会选择采用牛顿、莱布尼兹或拉格朗日的记号来表示导数，但也有很多的数学家希望使用自己的方法来记录。在不同数学家的著作中可以看到各种主流记法的混合或变体。数学家之间关于什么样的记法最为简便和严谨也是各执一词。同时，由于函数的微分、导



戈特弗里德·威廉·莱布尼茨

数、偏导数以及无穷小量等概念尚未成熟，记号的不统一更增加了数学家之间相互理解的难度^{[9]:214-234}。十九世纪初期的德国数学家马尔丹·欧姆采用 $\partial f(x)$ 来表示导数，而同时期的雅可比则采用 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 来表示偏导数。同时许多数学家采用 $\frac{df}{dx}$ ^[14]、 $\frac{d}{x}f$ ^[15]或 $\frac{\delta f}{\delta x}$ ^[16]表示偏导数。

用大写字母***D***表示导数从十八世纪末就开始。1800年，法国数学家路易斯·弗朗索瓦·安托内·阿伯加斯特（Louis François Antoine Arbogast）使用 $D^m f$ 表示函数 *f* 的m阶导数或全微分^[17]。而其后本杰明·佩尔斯也使用 $Df \cdot x$ 表示 *f* 对 *x* 的导数^[18]。而柯西也采用类似的记号，用 $D_x^m f$ 表示函数 *f* 对 *x* 的m阶偏导数^[19]。

函数可导的条件

如果一个函数的定义域为全体实数，即函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上都有定义，那么该函数是不是在定义域上处处可导呢？答案是否定的。函数在定义域中一点可导需要一定的条件。首先，要使函数*f*在一点可导，那么函数一定要在这一点处连续。换言之，函数若在某点可导，则必然在该点处连续。这个结论来自于连续性的定义。

证明：

设函数*y* = *f*(*x*)上一点*x*₀，函数在这一点可导，即 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，其中

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

所以： $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0$ 即 函数 *f*(*x*)在*x*₀处连续。^{[2]:118}

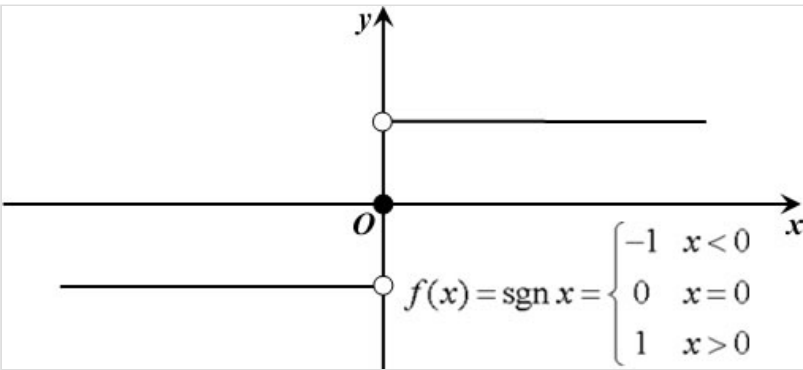
符号函数（sgn函数）是一个不连续的函数在断点处不可导的例子：

首先注意到这个函数在*x*₀ = 0处不连续。作为验证，可以求出函数在*x* = 0处附近的变化率，根据函数可导的条件再进行判断：

该函数在*x*₀ = 0左侧附近的变化率为：

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{-1 - 0}{x - 0} = -\frac{1}{x}$$

当*x* → 0[−]时，上面的比值趋于正无穷大发散，不存在，故这个符号函数在*x*₀ = 0处不可导。



符号函数

然而，连续性并不能保证可导性。即使函数在一点上连续，也不一定就在这一点可导。事实上，存在着在每一点都连续，但又在每一点都不可导的“病态函数”。1931年，斯特凡·巴拿赫甚至证明，事实上“绝大多数”的连续函数都属于这种病态函数（至少在一点可导的连续函数在所有连续函数中是贫集）^[20]。在连续而不可导的函数里，一种常见的情况是，函数在某一点连续，并且可以定义它的左导数和右导数：

左导数： $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ^{[2]:118[1]:155}

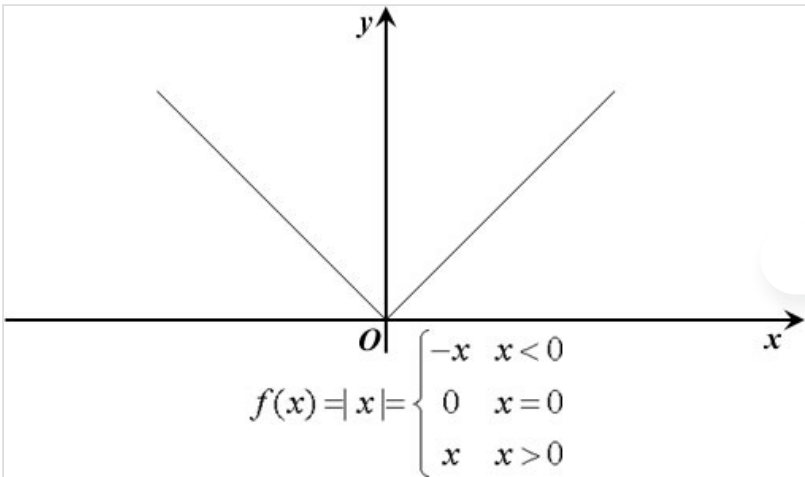
右导数： $f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ^{[2]:118[1]:155}

然而左导数和右导数并不相等，因而函数在该处不可导。实际上，若函数导数存在，则必然可以推出左右导数相等，这是由极限的性质（极限存在则左右极限相等）得来：

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

下面以绝对值函数作为例子：

该函数在 $x = 0$ 处的左导数为：



绝对值函数

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

该函数在 $x = 0$ 处的右导数为：

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

绝对值函数在 $x = 0$ 处的左右导数皆存在，但由于左右导数不相等，故绝对值函数在 $x = 0$ 处不可导。^{[2]:118-119}

如果函数在一点的左右导数都存在并且相等，那么函数在该处可导。^{[1]:155}

导数与函数的性质

通过认识可导函数的导数，可以推断出不少函数本身的性质。

单调性

根据微积分基本定理，对于可导的函数 f ，有：

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$$

如果函数的导函数在某一区间内恒大于零（或恒小于零），那么函数在这一区间内单调递增（或单调递减），这种区间也称为函数的单调区间。导函数等于零的点称为函数的驻点（或极值可疑点），在这类点上函数可能会取得极大值或极小值。进一步判断则需要知道导函数在附近的符号。对于满足 $f'(x_0) = 0$ 的一点 x_0 ，如果存在 $\delta > 0$ 使得 f' 在区间 $(x_0 - \delta, x_0]$ 上都大于等于零，而在区间 $[x_0, x_0 + \delta)$ 上都小于等于零，那么 x_0 是一个极大值点，反之则为极小值点^{[2]:170}。如果 $f''(x_0) = 0$ 并且 $f''(x)$ 在 x_0 改变加减号，则称这个点是拐点；否则这个点不是拐点。^{[21]:200}

如果函数在 x_0 处的二阶导数 $f''(x_0)$ 存在，极值点也可以用它的正负性判断（已确定 $f'(x_0) = 0$ ）。如果 $f''(x_0) > 0$ ，那么 x_0 是一个极小值点，反之为极大值点^{[2]:170-171}。

凹凸性

可导函数的凹凸性与其导数的单调性有关。如果函数的导函数在某个区间上单调递增，那么这个区间上函数是向下凸的，反之则是向上凸的。如果二阶导函数存在，也可以用它的正负性判断，如果在某个区间上 f'' 恒大于零，则这个区间上函数是向下凸的，反之这个区间上函数是向上凸的^{[2]:176-178}。

导数的计算

原则上，函数的导数可以通过考虑差商和计算其极限来从定义计算。在实践中，一旦知道了一些简单函数的导数，就可以使用从更简单的函数获得更复杂函数的导数的规则，来更容易地计算其他函数的导数。

基本函数的导数

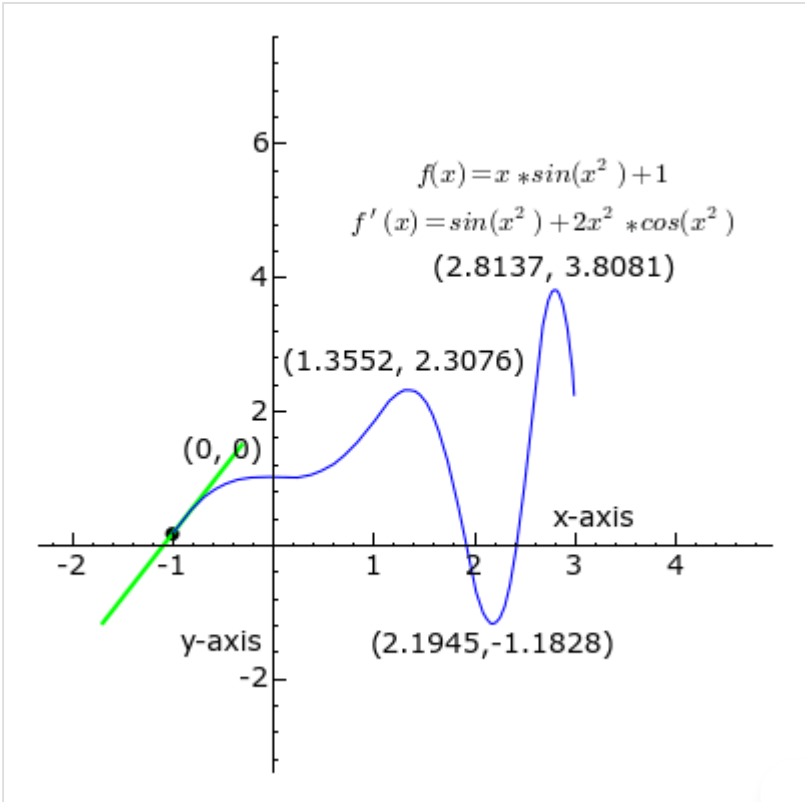
所谓基本函数是指一些形式简单并且容易求出导数的函数。这些基本函数的导函数可以通过定义直接求出。

- 幂函数的导数：如果

$f(x) = x^r,$

其中 r 是任意实数，那么

$f'(x) = rx^{r-1}$,函数 f 的定义域可以是整个实数域，但导函数的定义域则不一定与之相同。例如当 $r = \frac{1}{2}$ 时：



x变化时函数 $f(x)=1+x \sin(x^2)$ （蓝色曲线）的切线变化。函数的导数值就是切线的斜率，绿色代表其值为正，红色代表其值为负，黑色代表值为零。

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \text{ [2]:119}$$

导函数的定义域只限所有正实数而不包括0。需要注意的是，不会有多项式函数的导数为 x^{-1} 。当 $r = 0$ 时，常函数的导数是0。

- 底数为 e 的指数函数 $y=e^x$ 的导数还是自身： $\frac{d}{dx}e^x=e^x$. 而一般的指数函数 $y=a^x$ 的导数还需要乘以一个系数： $\frac{d}{dx}a^x=\ln(a)a^x$. [2]:122

自然对数函数的导数则是 x^{-1} ： $\frac{d}{dx}\ln(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$. [2]:123 同样的，一般的对数函数导数则还需要乘以一个系数： $\frac{d}{dx}\log_a(x)=\frac{1}{x\ln(a)}$

- 三角函数的导数仍然是三角函数，或者由三角函数构成 [2]:122.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin(x) &= \cos(x). \\ \frac{d}{dx}\cos(x) &= -\sin(x). \\ \frac{d}{dx}\tan(x) &= \sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x). \\ \frac{d}{dx}\cot(x) &= -\csc^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}.\end{aligned}$$

- 反三角函数的导数则是无理分式 [1]:160.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\arcsin(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 1. \\ \frac{d}{dx}\arccos(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x < 1. \\ \frac{d}{dx}\arctan(x) &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

导数的求导法则

由基本函数的和、差、积、商或相互复合构成的函数的导函数则可以通过函数的求导法则来推导。基本的求导法则如下：

- 求导的线性性：对函数的线性组合求导，等于先对其中每个部分求导后再取线性组合。

$$(af + bg)' = af' + bg' \quad (\text{其中} a, b \text{ 为常数}) \text{ [2]:121}$$

- 两个函数的乘积的导函数，等于其中一个的导函数乘以另一者，加上另一者的导函数与它的乘积

$$(fg)' = f'g + fg' \text{ [2]:125}$$

- 两个函数的商的导函数也是一个分式。其中分子是分子函数的导函数乘以分母函数减去分母函数的导函数乘以分子函数后的差，而其分母是分母函数的平方。

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (\text{在} g(x) \neq 0 \text{ 处方有意义}) \text{ [2]:126}$$

- 复合函数的求导法则：如果有复合函数 $f(x) = h[g(x)]$ ，那么

$$f'(x) = h'[g(x)] \cdot g'(x).$$

[2]:128

若要求某个函数在某一点的导数，可以先运用以上方法求出这个函数的导函数，再看导函数在这一点

例子

欲求函数

$$f(x) = x^4 + \sin(x^2) - \ln(x)e^x + 7$$

在 $x = 3$ 处的导数。可以先求出其导函数：

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^{(4-1)} + \frac{\mathrm{d}\left(x^2\right)}{\mathrm{d} x} \cos \left(x^2\right) - \left[\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\mathrm{d} x} e^x + \ln x \frac{\mathrm{d}\left(e^x\right)}{\mathrm{d} x}\right] + 0 \\ &= 4x^3 + 2x \cos \left(x^2\right) - \frac{1}{x} e^x - \ln (x) e^x . \end{aligned}$$

其中第二项使用了复合函数的求导法则，而第三项则使用了乘积的求导法则。求出导函数后，再将 $x = 3$ 代入，得到导数为：

$$f'(3) = 108 + 6 \cos (9) - \frac{e^3}{3} - \ln (3) e^3$$

高阶导数

二阶导数

如果函数的导数 $f'(x)$ 在 x 处可导，则称 $[f'(x)]'$ 为 x 的二阶导数。记做： $f''(x)$ ， y'' ， $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d} x^2}$ [2]:132、

二阶导数可用于求解函数凹凸性问题。 $f''(x) > 0$ 函数在x上凹。 $f''(x) < 0$ 函数在x下凹。

高阶导数

二阶导数的导数称为三阶导数，记做 $f'''(x)$ ， y''' ， $\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d} x^3}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^3 f(x)}{\mathrm{d} x^3}$

三阶导数的导数称为四阶导数，记做 $f^{(4)}(x)$ ， $y^{(4)}$ ， $\frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d} x^4}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^4 f(x)}{\mathrm{d} x^4}$

一般的 $f(x)$ 的 $n - 1$ 阶导数的导数称为 $f(x)$ 的 n 阶导数，记为 $f^{(n)}(x)$ ， $y^{(n)}$ ， $\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d} x^n}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d} x^n}$ ^{[2]:133}

高阶导数的求法

一般来说，高阶导数的计算和导数一样，可以按照定义逐步求出。同时，高阶导数也有求导法则：

- $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d} x^n}(u \pm v) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d} x^n}u \pm \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d} x^n}v$
- $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d} x^n}(Cu) = C\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d} x^n}u$
- $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d} x^n}(u \cdot v) = \sum_{k=0}^n C_k^n \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d} x^{n-k}}u \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d} x^k}v$ （**莱布尼兹公式**）^{[2]:134}

因此，可以利用已知的高阶导数求导法则，通过四则运算, 变量代换等方法，求出 n 阶导数。一些常见的有规律的高阶导数的公式如下^{[2]:133}：

- $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d} x^n}x^\alpha = x^{\alpha-n} \prod_{k=0}^{n-1}(\alpha - k)$
- $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d} x^n}\frac{1}{x} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$
- $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d} x^n}\ln x = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$
- $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d} x^n}e^x = e^x$
- $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d} x^n}a^x = a^x \cdot \ln^n a \ (a > 0)$
- $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d} x^n}\sin(kx + b) = k^n \sin\left(kx + b + \frac{n\pi}{2}\right)$
- $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d} x^n}\cos(kx + b) = k^n \cos\left(kx + b + \frac{n\pi}{2}\right)$

多元函数的导数

向量值函数的导数

当函数 y 的取值不再是实数，而是一般的 \mathbf{R}^n 中的**向量**时，仍然可能对其求导。这时的函数值是： $y = (y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x))$ 。每个 $y_i(x)$ ， $1 \leq i \leq n$ 都是一个实数值的函数。具体的例子如二维或者三维空间里的**参数方程**。因此，对 $y = f(x)$ 求导实际上是对每个分量函数 $y_i(x)$ 求导。

$$\mathbf{y}'(t) = (y_1'(t), \cdots, y_n'(t)).$$

[2]:191

这也符合定义

$$\mathbf{y}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{y}(t+h) - \mathbf{y}(t)}{h},$$

设 (e_1, e_2, \dots, e_n) 为 \mathbf{R}^n 的一组基，那么对函数： $\mathbf{y} : t \mapsto y_1(t)e_1 + y_2(t)e_2 + \dots + y_n(t)e_n$,

其导函数为： $\mathbf{y}'(t) = y_1'(t)e_1 + y_2'(t)e_2 + \dots + y_n'(t)e_n$

偏导数

如果有函数 f 其自变量不是单个实数，而是多于一个元素，例如：

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2.$$

这时可以把其中一个元素（比如 x ）看做参数，那么 f 可以看做是关于另一个元素的参数函数：

$$f(x,y) = f_x(y) = x^2 + xy + y^2.$$

也就是说，对于某个确定的 x ，函数 f_x 就是一个关于 y 的函数。在 $x = a$ 固定的情况下，可以计算这个函数 f_x 关于 y 的导数。

$$f'_a(y) = a + 2y$$

这个表达式对于所有的 a 都对。这种导数称为偏导数，一般记作：

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y$$

这里的符号 ∂ 是字母 d 的圆体变体，一般读作 δ 的首音节或读“偏”，以便与 d 区别。

更一般地来说，一个多元函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在点 (a_1, a_2, \dots, a_n) 处对 x_i 的偏导数定义为：

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}.$$

上面的极限中，除了 x_i 外所有的自变元都是固定的，这就确定了一个一元函数：

$$f_{a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n}(x_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

因此，按定义有：

$$\frac{df_{a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n}}{dx_i}(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n).$$

偏导数的实质仍然是一元函数的导数。^{[22]:56}

多变量函数的一个重要的例子，是从 \mathbf{R}^n （例如 \mathbf{R}^2 或 \mathbf{R}^3 ）映射到 \mathbf{R} 上的标量值函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。在这种情况下， f 关于每一个变量 x_i 都有偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 。在点 $x = a$ ，这些偏导数定义了一个向量：

$$\nabla f(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right].$$

这个向量称为 ***f*** 在点 ***a*** 的**梯度**。如果 ***f*** 在定义域中的每一个点都是可微的，那么梯度便是一个向量值函数 **∇f** ，它把点 ***a*** 映射到向量 **$\nabla f(a)$** 。这样，梯度便决定了一个**向量场**。

方向导数

方向导数是比较偏导数更加广泛的概念。导数的本质是函数值增量与自变量增量之比的极限。在多元函数 ***f*** 中，可以选定一个确定的方向（以这个方向上的单位向量 **δ** 表示），并考虑函数在这个方向上的增量：

$$f(\mathbf{x}_0 + t\delta) - f(\mathbf{x}_0)$$

这个增量为关于 ***t*** 的一元函数。函数 ***f*** 的方向导数定义为这个增量与 ***t*** 的比值在 ***t*** 趋于0时的极限，记为 $\frac{\partial f}{\partial \delta}(\mathbf{x}_0)$ 。

$$\frac{\partial f}{\partial \delta}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\delta) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

方向导数表示了函数从某点开始在某个方向上的变化率。^{[22]:55-56}

在 **\mathbf{R}^n** 中，如果将向量 **δ** 选为正规基 **$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n)$** 之中的一个，如 **$\mathbf{e}_i$** ，那么方向导数就是关于 **$x_i$** 的偏导数。^{[22]:55-56}

推广

导数的概念建立在变量为实数之上，但也可以推广到更加广泛的意义上。推广的导数本质上仍旧是函数在局部一点上的线性逼近。

复变量导数

对于变量为复数的函数，也可以定义导数的概念。假设有复变函数 **$f: \Omega \in \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$** 。如果 ***f*** 在某一点 **$z_0$** 及附近有定义，并且极限：

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

存在，那么就说函数 ***f*** 在 **z_0** 可导。其中 **$z \rightarrow z_0$** 表示 **$z - z_0$** 的模长趋向于0。如果将复变量 ***z*** 视作 **$x + iy$** ，那么 ***f*** 可以视作一个 **\mathbb{R}^2** 上的函数。如果作为复变函数的 ***f*** 可导，那么作为 **\mathbb{R}^2** 上函数的 ***f*** 的偏导数也存在，但反之则不然。只有当柯西-黎曼条件满足的时候才能保证复变函数的复可导性^[23]。

弱微分

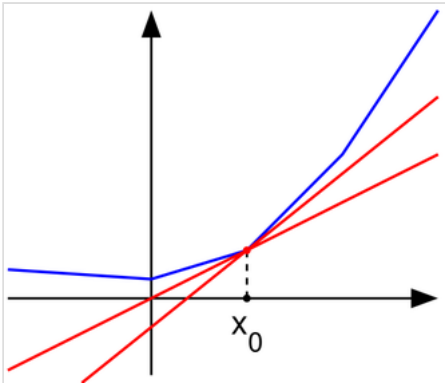
在分布理论里，弱微分的概念使得对更多严格意义上无法求导的函数也可以定义导函数。设***u***是一个局部勒贝格可积（比如说在 **$L^1_{loc}(\mathbb{R})$** 中）的函数，称***v*** $\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ 是***u***的一个弱微分，如果对所有的测试函数 **φ** ，都有：

$$\int_{\mathbb{R}} u(t) \varphi'(t) dt = - \int_{\mathbb{R}} v(t) \varphi(t) dt$$

成立。其中测试函数是指紧支撑的光滑函数^[24]。弱微分包括了强微分，也就是通常意义上的导数。

次导数

在凸分析，也就是对凸函数的研究中，可以定义凸函数的次导数。次导数的概念是导数的几何意义的推广。由于函数是凸的，过它的图像上每一点总可以作一条直线，使得函数的图像在直线上方。这种直线的斜率称为函数在这点的次导数。如果函数在某点可导，那么次导数只有一个，等于其导数。如果函数像绝对值函数一样在零点有突然的转折，那么次导数可能不止一个。比如过零点而斜率在 $(-1, 1)$ 之间的直线都在绝对值函数下方，因此 $(-1, 1)$ 之间的每个数都是绝对值函数在零点的次导数。^[25]



过 x_0 的直线（红）在函数（蓝）下方，它的斜率是函数的次导数

非整数阶导数

早在十九世纪，在数学家明确了求导与积分的互逆关系以后，就出现了负阶次导数的记号： $D^{-n} = \int^n$ （表示求n次积分）^{[9]:208}。而非整数阶导数的概念则进一步将其推广。比如，半微分算子 $H = D^{\frac{1}{2}}$ 表示其作用于函数上两次以后的效果将等于一次求导：

$$H^2(f)(x) = H[H(f)](x) = D(f)(x) = f'(x)$$

定义非整数阶导数的方法不止一种，最常用的非整数阶导数定义为黎曼-刘维尔定义：

设 $0 < s < 1$ ，函数 f 的s阶积分为： $D_t^{-s} f(t) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_a^t (t-u)^{s-1} f(u) d(u)$

而对 $n-1 < \beta < n$ ，函数 f 的 β 阶导数为： $D_t^\beta f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left[D_t^{-n+\beta} f(t) \right]$ ^{[26][27]}

加托导数和弗雷歇导数

方向导数在无穷维向量空间如巴拿赫空间和弗雷歇空间上可以推广为加托导数和弗雷歇导数。二者都经常用于形式化泛函导数的概念，常见于物理学，特别是量子场论^[28]。

导子

微分代数中有导子的概念。导子是具备了微分算子的某些特征的运算子，例如向量场的李导数，或非交换代数中的交换子^[29]。给定一个环或域 \mathbf{R} 上的一个代数 \mathcal{A} ， \mathcal{A} 上的一个 \mathbf{R} -导子 δ 是一个从 \mathcal{A} 射到自身的 \mathbf{R} -线性映射（线性自同态），并满足导数的乘积法则：

$$\delta(ab) = (\delta a)b + a(\delta b)$$

所有 \mathbf{R} -导子构成了 \mathcal{A} 上线性自同态集 $\mathbf{End} \mathcal{A}$ 的子空间^[30]。

导数的应用

边际和弹性

经济学中，所谓边际和弹性的概念与导数紧密相关。比如边际成本就是产量增加一个单位所带来的成本的增加，若将其连续化，得到的便是成本函数的导数。又如需求的弹性是指价格变化一个单位时，需求量的变化，连续化后相应的也是需求函数关于价格的导数。^[31]

参见

- 微积分
- 微分
- 积分
- 光滑函数
- 微分中值定理
- 介值定理
- 自动微分
- 第二次数学危机
- 协变导数
- 数值微分

注释

- 发现于费马1637年的手稿《求最大值和最小值的方法》

参考文献

- 徐森林; 薛春华. 《数学分析（第一册）》. 清华大学出版社. 2005. ISBN 978-7-302-11746-9.
- 欧阳光中; 姚允龙; 周渊 (编). O.305. 《数学分析（上册）》. 复旦大学出版社. 2003. ISBN 7-309-03570-4.
- 朝嵩金, 正敏段, 汉明王. 《线性代数》. 清华大学出版社. 2006. ISBN 7-302-12350-0.
- 梁子杰. 「可微」還是「可導」？ (PDF). 数学教育.
- （英文） Dan Ginsburg, Brian Groose, Josh Taylor, Bogdan Vernescu. History of the Differential from the 17th Century. [2011-02-10]. （原始内容存档于2021-02-18）.
- （中文） 莫里斯·克莱因. 《古今数学思想》第二卷. 由张理京、张锦炎、江泽涵翻译. 上海科学技术出版社. 2002. ISBN 7-5323-6172-1.
- （英文） W. W. Rouse Ball. Isaac Barrow. [2011-02-10]. （原始内容存档于2012-05-03）.
- （中文） 莫里斯·克莱因. 《古今数学思想》第四卷. 由张理京、张锦炎、江泽涵翻译. 上海科学技术出版社. 2002. ISBN 7-5323-6172-1.
- Florian Cajori. A History of Mathematical Notations **第2卷**. Dover Publications. 1993年12月. ISBN 978-0486677668.
- Stewart, James. Calculus: Early Transcendentals 6th. Brooks/Cole. 2008. ISBN 0-495-01166-5.

11. Mary Barnes. More about Functions and Differentiation. Curriculum Press. 1993.第40-43页
12. （英文） The Notation of Differentiation. 1998-08-24 [2011-02-10]. （原始内容存档于2017-12-05） .
13. George Shoobridge Carr. A Synopsis of Elementary Results in Pure and Applied Mathematics. C. F. Hodgson. 1880.第258页.
14. M.Fontaine, *Mémoires donnés à l'académie royale des sciences, non imprimés dans leur temps*,1764.
15. A. L. Crelle, *Rechnung mit veränderlichen Grössen*, Vol. I (Gottingen, 1813).
16. Hamilton, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, (London, 1834), p.249
17. Louis François Antoine Arbogast, *Calcul des Derivations*, (1800), p.89
18. Benjamin Peirce, *Elementary Treatise on Curves, Functions, and Forces*(new ed. Boston and Cambridge), Vol I (1852)
19. （法文） A.L.Cauchy, *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, (1844), p.12-17.
20. Banach, S., Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen, *Studia. Math.*, 1931, (3): 174–179.
21. Jon Rogawski. Single Variable Calculus. W. H. Freeman. 11 June 2007. ISBN 978-1-4292-1071-3.
22. 徐森林; 薛春华. 《数学分析（第二册）》. 清华大学出版社. 2005. ISBN 978-7-302-13141-0.
23. 郑建华. 《复变函数》. 清华大学出版社. 2005. ISBN 978-7302096931.第17-19页.
24. Evans, Lawrence C. Partial differential equations. Providence, R.I.: American Mathematical Society. 1998: 242. ISBN 0-8218-0772-2.
25. （英文） Jean-Baptiste Hiriart-Urruty, Claude Lemaréchal. *Fundamentals of Convex Analysis*. Springer. 2001. ISBN 3-540-42205-6.p.163-166
26. （中文） 薛定宇,陈阳泉. 《高等应用数学问题的MATLAB求解》. 清华大学出版社. 2004. ISBN 978-7302186182.第384-385页.
27. Igor Podlubny. *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications.*, (Mathematics in Science and Engineering, vol. 198). Academic Press. 1998年10月. ISBN 0-12-558840-2.
28. （法文） R Gâteaux. *Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques* (PDF). Bulletin de la S.M.F, tome 50 (1922). [2011-02-11]. （原始内容存档 (PDF)于2013-10-20） .
29. Nicolas Bourbaki. Algebra I. Springer-Verlag. 1989. ISBN 3-540-64243-9.
30. Nathan Jacobson. *Lie algebras*. Dover Publications. 1979. ISBN 978-0486638324.p.7-8
31. 翁秉仁. 經濟學應用：邊際與彈性. EpisteMath，改写自同作者的《微积分讲义》. [2011-02-10]. （原始内容存档于2020-12-21） .

外部链接

- 导数计算器 (<http://zh.numberempire.com/derivatives.php>) （页面存档备份 (<https://web.archive.org/web/20121030045015/http://zh.numberempire.com/derivatives.php>)，存于互联网档案馆）
- Hazewinkel, Michiel (编), Derivative, 数学百科全书, Springer, 2001, ISBN 978-1-55608-010-4
- 埃里克·韦斯坦因. Derivative. MathWorld.

取自“<https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=导数&oldid=80832442>”

■