维基百科
自由的百科全书

中值定理

维基百科，自由的百科全书

中值定理

微分中值定理

- 罗尔中值定理
- 拉格朗日中值定理
- 柯西中值定理

积分中值定理

- 积分第一中值定理
- 积分第二中值定理

相关条目：微积分学

系列条目
微积分学

$$f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

函数 · 极限论 · 微分学 · 积分
微积分基本定理 · 微积分发现权之争

基础概念（含极限论和级数论） [展开]
一元微分 [展开]
一元积分 [展开]
多元微积分 [展开]
微分方程 [展开]
相关数学家 [展开]
历史名作 [展开]
分支学科 [展开]

在数学分析中，**中值定理**（英语：Mean value theorem）大致是讲，给定平面上固定两端点的可微曲线，则这曲线在这两端点间至少有一点，在这点该曲线的切线的斜率等于两端点连结起来的直线的斜率。[注 1]

更仔细点讲，假设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 连续且在开区间 (a,b) 可微，则存在一点c，$a<c<b$，使得

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

中值定理包括微分中值定理和积分中值定理。

微分中值定理

微分中值定理分为罗尔中值定理、拉格朗日中值定理和柯西中值定理，内容粗略的说是指平面上一段固定端点的可微曲线，两端点之中必然有一点，它的斜率与连接两端点的直线斜率相同（严格的数学表达参见下文）。

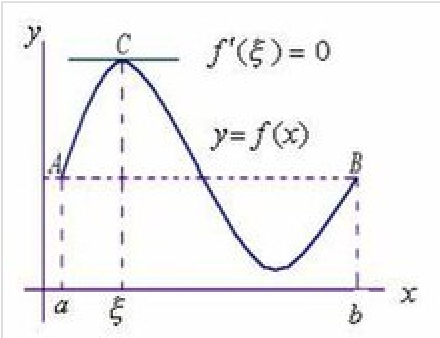
当提到**中值定理**时在没有特别说明下一般指拉格朗日中值定理。

罗尔中值定理

如果函数$f(x)$满足

1. 在闭区间$[a,b]$上连续；
2. 在开区间(a,b)内可导；
3. 在区间端点处的函数值相等，即$f(a)=f(b)$，

那么在(a,b)内至少有一点$\xi (a<\xi<b)$，使得$f'(\xi)=0$。这个定理称为**罗尔定理**。

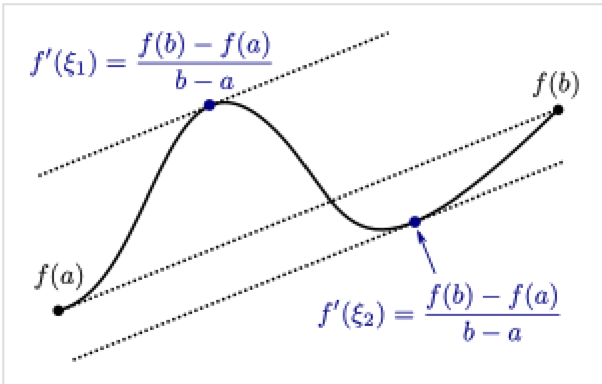


罗尔定理的几何意义

拉格朗日中值定理（中值定理）

令$f:[a,b]\to \mathbf{R}$为闭区间$[a,b]$上的一个连续函数，且在开区间(a,b)内可导，其中$a<b$。那么在(a,b)上存在某个c使得

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



拉格朗日中值定理的几何意义

此定理称为**拉格朗日中值定理**，也简称**中值定理**，是罗尔中值定理的更一般的形式，同时也是柯西中值定理的特殊情形。

这个定理在可以稍微推广一点。只需假设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在 $[a,b]$ 连续，且在开区间 (a,b) 内对任意一点 x，极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

存在，为一个有限数字或者等于+∞或−∞.如果有限，则极限等于$f'(x)$。这版本定理应用的一个例子是函数 $x\to x^{1/3}$，实值三次方根函数，其导数在原点趋于无穷。

注意若一个可微函数的值域是复数而不是实数，则上面这定理就未必正确。例如，对实数 x 定义 $f(x)=e^{ix}$。那么

$$f(2\pi)-f(0)=0\neq f'(c)(2\pi-0)$$

因$|f'(x)|=1\neq 0$ 时，c 为开区间 $(0,2\pi)$ 中任意一点。

柯西中值定理

柯西中值定理，也叫**拓展中值定理**，是中值定理的一般形式。它叙述为：如果函数 f 和 g 都在闭区间$[a,b]$ 上连续，且在开区间 (a,b) 上可微，那么存在某个 $c\in(a,b)$，使得

$$(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c)$$

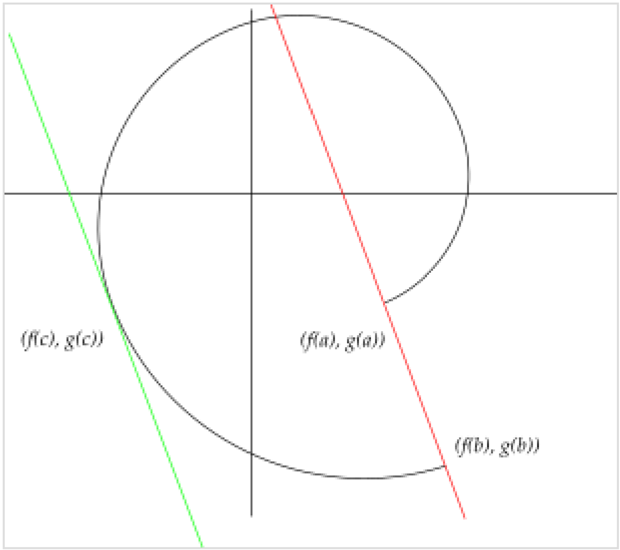
当然，如果$g(a)\neq g(b)$ 且 $g'(c)\neq 0$，则可表示成：

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

在几何上，这表示曲线

$$\begin{cases}[a,b]\to\mathbb{R}^2\\ t\mapsto(f(t),g(t))\end{cases}$$

上存在一点其切线平行于由两点 $(f(a),g(a))$ 和 $(f(b),g(b))$ 所连接的直线。但柯西定理不能表明在任何情况下这种切线都存在，因为可能存在一些c值使 $f'(c)=g'(c)=0$，所以在这些点曲线根本没有切线。下面是这种情形的一个例子



柯西定理的几何意义

$$t\mapsto(t^3,1-t^2)$$

在区间$[-1,1]$上，曲线由$(-1,0)$到$(1,0)$，却并无一个水平切线，然而它在 $t=0$处有一个驻点(实际上是一个尖点)。

柯西中值定理可以用来证明洛必达法则。(拉格朗日)中值定理是柯西中值定理当$g(t)=t$时的特殊情况。

积分中值定理

积分中值定理分为积分第一中值定理和积分第二中值定理，它们各包含两个公式。其退化状态均指在ξ的变化过程中存在一个时刻使两个图形的面积相等（严格表述在下面）。

积分第一中值定理

设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$为一连续函数，$g:[a,b]\to\mathbb{R}$要求$g(x)$是可积函数且在积分区间不变号，那么存在一点$\xi\in(a,b)$使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx。$$

证明

在不失去一般性的条件下，设对所有x，有$g(x)\geq 0$； 因为f是闭区间上的连续函数，f取得最大值M和最小值m。于是

$$mg(x)\leq f(x)g(x)\leq Mg(x)。$$

对不等式求积分，我们有

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx。$$

若$\int_a^b g(x)\,dx = 0$，则$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$。$\xi$可取$[a,b]$上任一点。

若不等于零那么$\int_a^b g(x)\,dx > 0$，

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \le M。$$

因为$m \le f(x) \le M$是连续函数，根据介值定理，则必存在一点$\xi \in [a,b]$，使得

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}。$$

$g(x) < 0$的情况按同样方法证明。

推论（拉格朗日中值定理的积分形式）

在上式中令$g(x) = 1$，则可得出：

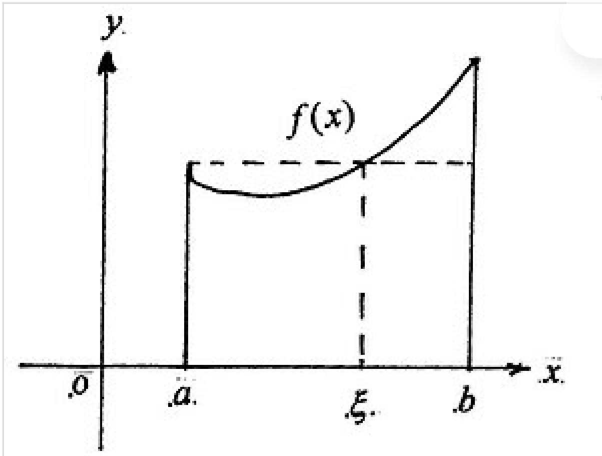
设$f : [a,b] \to \mathbf{R}$为一连续函数，则∃$\xi \in [a,b]$，使

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

它也可以由拉格朗日中值定理推出：

设 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导， $f(x) = F'(x)$ ，则∃$\xi \in [a,b]$，使

$$f(\xi) = F'(\xi) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$



积分第一中值定理推论的几何意义

积分第二中值定理

积分第二中值定理与积分第一中值定理相互独立，却又是更精细的**积分中值定理**。它可以用来证明Dirichlet-Abel反常Riemann积分判别法。

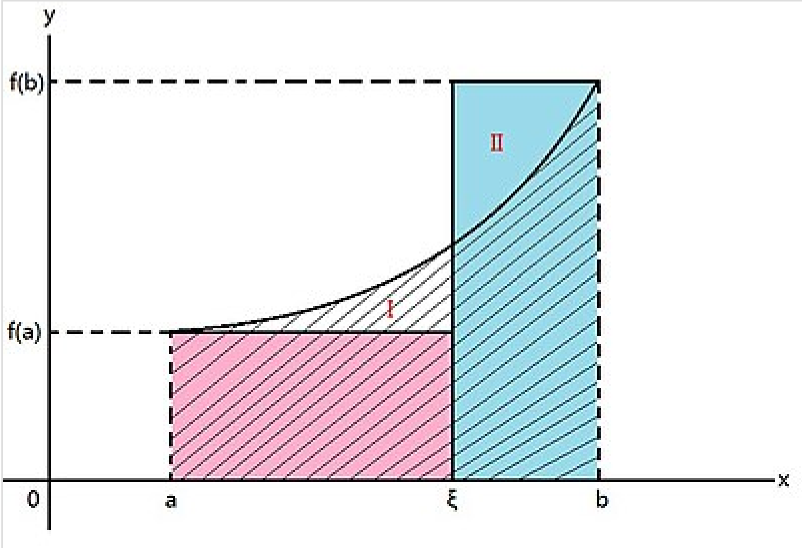
内容

若f,g在[a,b]上黎曼可积且f(x)在[a,b]上单调，则存在[a,b]上的点ξ使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x;$$

退化态的几何意义

令g(x)=1，则原公式可化为：



第二积分中值定理退化形式的几何意义

$$\int_a^b f(x)dx = f(a)(\xi - a) + f(b)(b - \xi);$$

进而导出：

$$\int_a^\xi f(x)dx - f(a)(\xi - a) = f(b)(b - \xi) - \int_\xi^b f(x)dx;$$

此时易得其几何意义为： 能找到ξ∈[a,b]，使得S[红]+S[蓝]=S[阴影]，即S[I]=S[II]

应用

关于积分中值定理的一个重要应用是可以去除掉积分号，或者使复杂的被积函数化为相对简单的被积函数，从而使问题简化。

注释

1. 这个定理有两种翻译：**均值定理**跟**中值定理**，与数学分析中另一重要定理：intermediate value theorem（翻译成中间值定理或介值定理）容易混淆

参见

- 罗尔定理
- 柯西中值定理
- 介值定理
- 极值定理

取自“https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=中值定理&oldid=80187719”