第6章 连续小波变换

- 小波及连续小波变换
- 常用的基本小波
- 时频分析
- 连续小波变换的计算
- 小波变换的分类

目的

- 熟悉连续小波变换的定义
- 深入理解小波时频分析的思想和方法

小波及连续小波变换

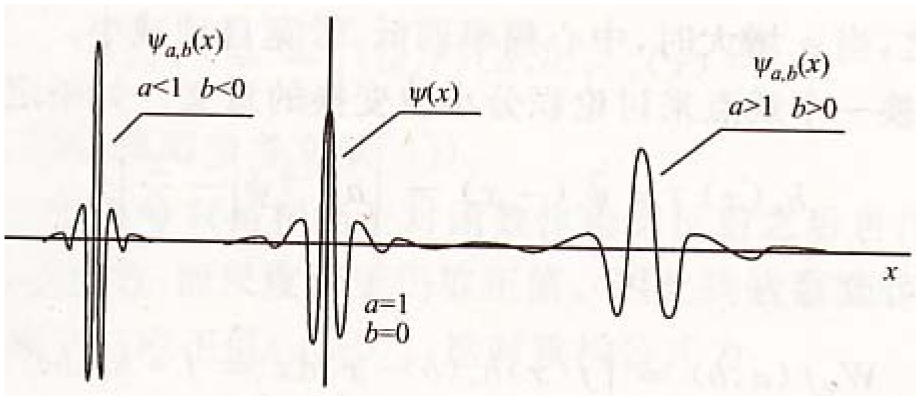
设函数 $\psi(t)\in L^1(R)\bigcap L^2(R)$，并且 $\hat{\psi}(0)=0$，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)dt=0$，则称 $\psi(t)$ 为一个基本小波或母小波。

$$\psi_{a,b}(t)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi(\frac{t-b}{a}) \qquad a,b\in R \quad a\neq 0$$

(连续)小波函数

a和**b**的意义

$$\left\|\psi_{a,b}(t)\right\|_2=\left\|\psi(t)\right\|_2$$



$$WT_f(a,b)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi^*(\frac{t-b}{a})dt=\langle f,\psi_{a,b}\rangle$$ ← 连续小波变换

$$WT_f(a,b)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi^*(\frac{t-b}{a})dt=|a|^{1/2}\ f*\overline{\psi}_{|a|}(b)$$

$$\overline{\psi}_{|a|}(t)=|a|^{-1}\psi^*(-t/a)$$

性质**:**

线性性质

平移不变性

……….

在实际工程应用中**,**常假设***a*****>0.**

连续卷积的定义:$(h*f)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)f(t-u)du=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)h(t-u)du$

小波分析:

小波滤波:

尺度与频率:

注意**:** 在连续小波变换的情况下**,**没有要求小波有相应的尺度函数**.**

设函数 $\psi(t) \in L^1(R) \cap L^2(R)$ ，若

$$c_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty$$

则称 $\psi(t)$ 为一个允许小波。

允许条件等价于： $\hat{\psi}(0) = 0$ （波动性），与

$$\left|\psi(t)\right| \le c\left(1+|t|\right)^{-1-\varepsilon}, \varepsilon > 0 \quad \text{（衰减性）}$$

允许条件是保证正、逆变换存在的条件。

$$f(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} WT_f(a,b) \psi_{a,b}(t) dadb$$

二维连续小波变换与离散小波变换

设 $f(x,y)\in L^2(R^2)$，$\psi(x,y)$ 满足条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x,y)dxdy=0$$

称积分

$$W_f(a;b_1,b_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\frac{1}{a}\psi^*\left(\frac{x-b_1}{a},\frac{y-b_2}{a}\right)dxdy$$

为 $f(x,y)$ 的二维连续小波变换，称 $\psi(x,y)$ 为二维基本小波函数。

$$\psi_{a;b_1;b_2}(x,y)=\frac{1}{a}\psi\left(\frac{x-b_1}{a},\frac{y-b_2}{a}\right)$$

相应的反演公式为

$$f(x,y)=\frac{1}{c_\psi}\int_0^{+\infty}\frac{da}{a^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}W_f(a;b_1,b_2)\psi\left(\frac{x-b_1}{a},\frac{y-b_2}{a}\right)db_1db_2$$

其中，$c_\psi=\frac{1}{4\pi^2}\iint\frac{\left|\hat{\psi}(\omega_x,\omega_y)\right|^2}{\left|\omega_x^2+\omega_y^2\right|}d\omega_x d\omega_y$

当 $a=2^j$ 时，得出二进二维连续小波变换：

$$W_f(b_1,b_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)2^{-j}\psi^*\left(2^{-j}(x-b_1),2^{-j}(y-b_2)\right)dxdy$$

当 $a=2^{-j}, b_1=al, b_2=am; l,m\in Z$ 时，得出二维

离散小波变换：

$$W_f\left(j,l,m\right)=2^j\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)\psi^*\left(2^jx-l,2^jy-m\right)dxdy$$

如果再把小波函数 $\psi\left(x,y\right)$ 取为变量可分离的二元函数：

$$\psi\left(x,y\right)=\psi^1\left(x\right)\psi^2\left(y\right)$$

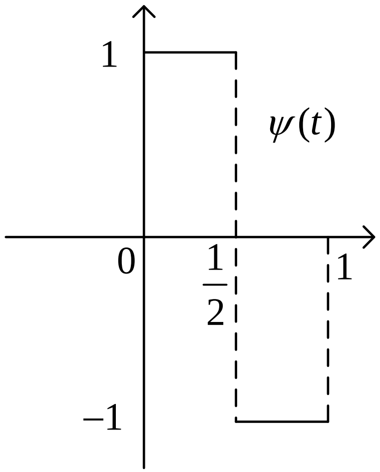
它可以通过一维多分辨分析得出二维多分辨分析。

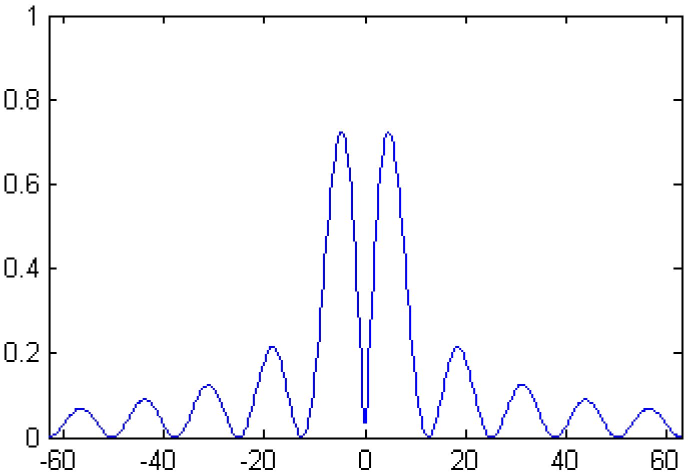
附注：有更一般的二维连续小波变换的定义，它在尺度可伸缩的同时还可以旋转。

常用的基本小波

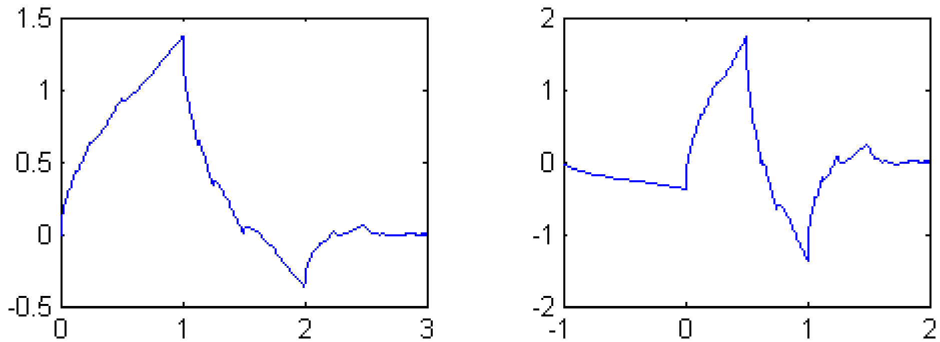
1. Haar小波

$$\psi(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<1/2\\ -1 & 1/2\le t<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad \hat{\psi}(\omega)=i\frac{4}{\omega}e^{-i\omega/2}\sin^2(\omega/4)$$

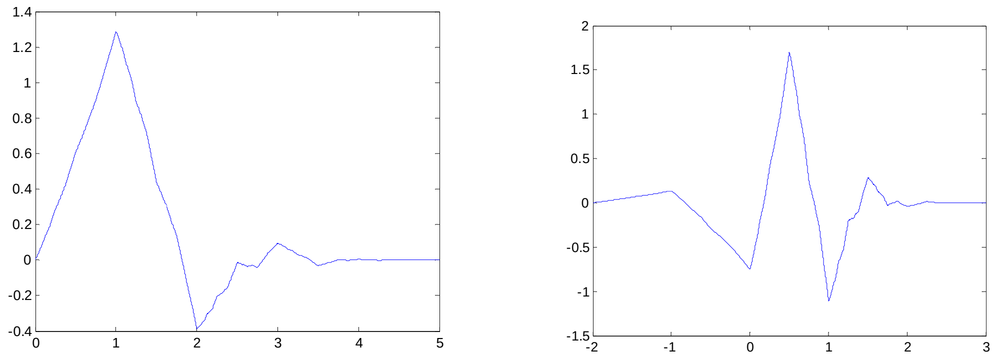




2. Daubechies小波



D4尺度函数与小波



D6尺度函数与小波

3、双正交小波

双正交B样条小波（**5-3**）、（**9-7**）小波滤波器　　bior2.2, bior4.4

（**7-5**）小波滤波器:

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{4q_2 - 3}{8q_2 - 2} \\ p_1 = \dfrac{4q_2^2 + 5q_2 - 1}{8q_2 - 2} \\ p_2 = \dfrac{4q_2 + 1}{16q_2 - 4} \\ p_3 = \dfrac{4q_2^2 + q_2}{2 - 8q_2} \\ q_0 = 1 - 2q_2 \\ q_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$p_n = \sqrt{2}\,\tilde{h}_n, q_n = \sqrt{2} h_n$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8} \right\}$$

$$\tilde{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{3}{16}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{16}, \frac{5}{2}, \frac{5}{16}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{16} \right\}$$

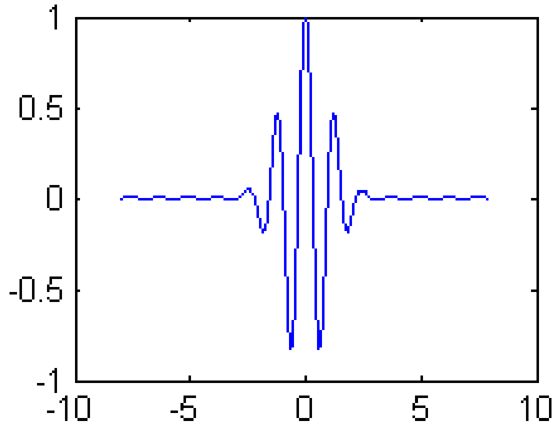
常用于图形学中。其中尺度函数是一个三次**B**样条。

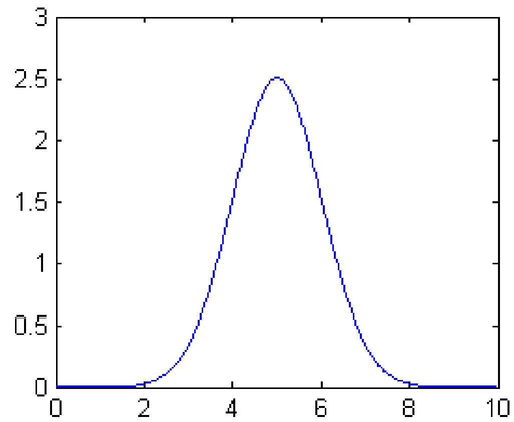
Bior2.4

双正交小波解决了线性相位和正交性要求的矛盾。

4. Morlet小波

$$\psi(t) = e^{-t^2/2} e^{i\omega_0 t} \qquad \hat{\psi}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}$$





Morlet小波不存在尺度函数; 快速衰减但非紧支撑.

在Matlab中， morlet 小波的定义为

$$\psi(t) = e^{-t^2/2} \cos 5t$$

问 $\hat{\psi}(\omega) = ?$

Morlet小波

Morlet小波是Gabor 小波的特例。

$$g(t) = \frac{1}{\left(\sigma^2 \pi\right)^{1/4}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

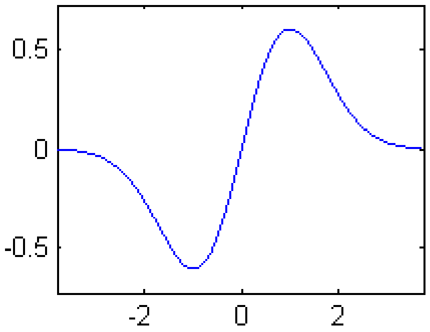
$$\psi(t) = g(t) e^{i\eta t}$$

Gabor 小波 $\xrightarrow{\sigma = 1, \eta = 5}$ **Morlet小波**

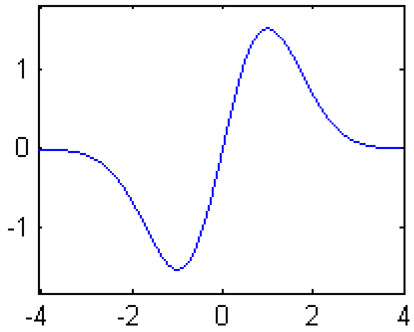
请问二维**Gabor**小波的定义是什么？画出其图形。

5. 高斯小波

$$\psi(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t e^{-t^2/2} \qquad \hat{\psi}(\omega) = i\omega e^{-\omega^2/2}$$



$-\psi(t)$



$\hat{\psi}(\omega)$

特性： 指数级衰减，非紧支撑；具有非常好的时间频率局部化；

关于**0**点反对称。

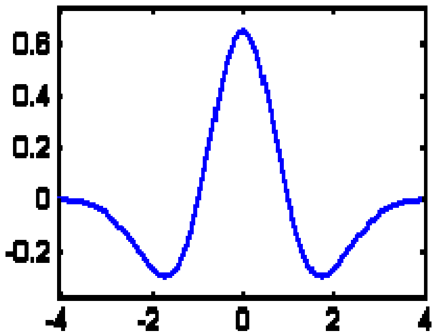
这是高斯函数的一阶导数，在信号与图像的边缘提取中具有重要的应用。

主要应用于阶梯型边界的提取。

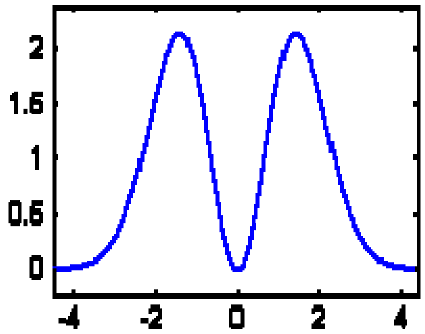
请问二维高斯小波的定义是什么？画出其图形。

6. Marr小波（也叫墨西哥草帽小波）

$$\psi(t)=\frac{2}{\sqrt{3\sqrt{\pi}}}(1-t^2)e^{-t^2/2} \qquad \hat{\psi}(\omega)=\frac{2\sqrt{2}\sqrt[4]{\pi}}{\sqrt{3}}\omega^2 e^{-\omega^2/2}$$



$\psi(t)$



$\hat{\psi}(\omega)$

特性： 指数级衰减，非紧支撑；具有非常好的时间频率局部化；

关于**0**点对称。

这是高斯函数的二阶导数，在信号与图像的边缘提取中具有重要的应用。

主要应用于屋脊型边界和**Dirac**边缘的提取。

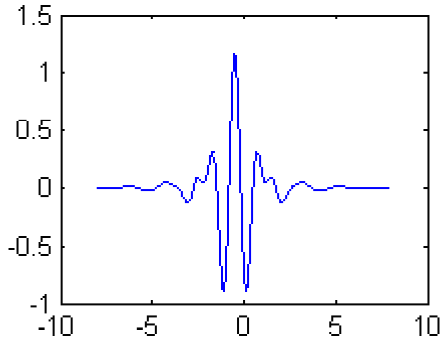
请问二维**Marr**小波**(**2D Mexican Hat Wavelet，2D Marr wavelets**)**的定义是什么？画出其图形。

7. Meyer小波

它的小波函数与尺度函数都是在频域中进行定义的。具体定义如下：

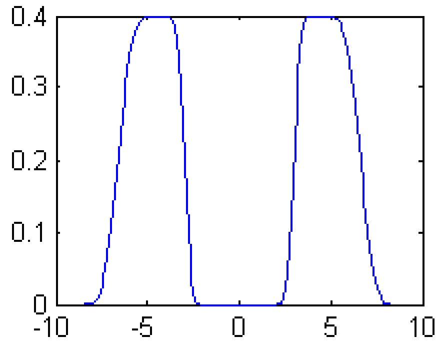
$$\hat{\psi}(\omega)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{i\frac{\omega}{2}}\begin{cases}\sin\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3}{2\pi}|\omega|-1\right)\right) & \frac{2\pi}{3}\le|\omega|\le\frac{4\pi}{3}\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3}{4\pi}|\omega|-1\right)\right) & \frac{4\pi}{3}\le|\omega|\le\frac{8\pi}{3}\\ 0 & |\omega|\notin\left[\frac{2\pi}{3},\frac{8\pi}{3}\right]\end{cases}$$

$$v(t)=t^4\left(35-84t+70t^2-20t^3\right)\quad t\in[0,1]$$



$\psi(t)$

$$\hat{\phi}(\omega)=\begin{cases}(2\pi)^{-\frac{1}{2}} & |\omega|\le\frac{2\pi}{3}\\ (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}v\left(\frac{3}{2\pi}|\omega|-1\right)\right) & \frac{2\pi}{3}\le|\omega|\le\frac{4\pi}{3}\\ 0 & |\omega|>\frac{4\pi}{3}\end{cases}$$



$\hat{\psi}(\omega)$

Dmeyer小波

Dmeyer小波即离散的Meyer小波，它是Meyer小波基于FIR的近似，用于快速离散小波变换。

Waveinfo(‘dmey’)

DMEYINFO Information on "Discrete" Meyer wavelet.

"Discrete" Meyer Wavelet

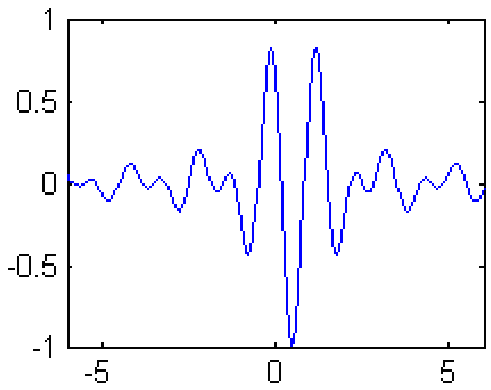
Definition: FIR based approximation of the Meyer Wavelet.

Family	DMeyer
Short name	dmey

Orthogonal	yes
Biorthogonal	yes
Compact support	yes
DWT	possible
CWT	possible

8. Shannon小波

$$\psi(t)=\frac{\sin\pi(t-1/2)-\sin 2\pi(t-1/2)}{\pi(t-1/2)} \qquad \hat{\psi}(\omega)=e^{-i\omega/2}\begin{cases}1, & \pi<|\omega|<2\pi \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



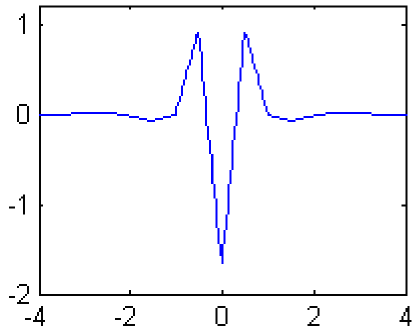
$\psi(t)$

在时域，**Shannon**小波是无限次可微的，具有无穷阶消失矩，不是紧支的，具有渐近衰减性但较缓慢；在频域，**Shannon**小波是频率带限函数，具有好的局部化特性。

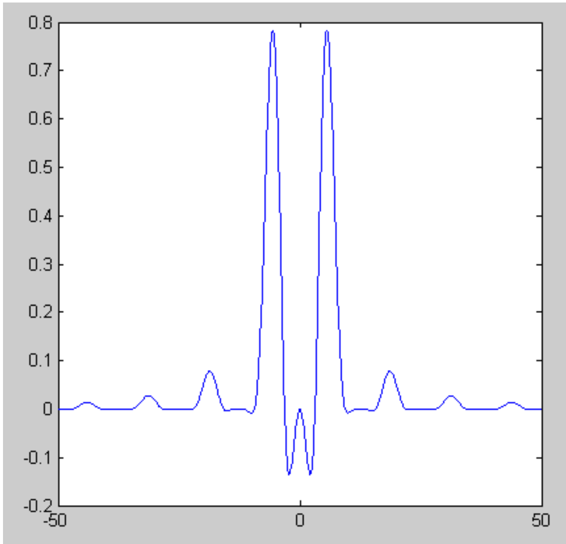
9. Battle-Lemarie样条小波

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{g}(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$$

$$= -\frac{16e^{-i\frac{\omega}{2}}}{\omega^2}\sin^4\frac{\omega}{4}\sqrt{\frac{1+2\sin^2\frac{\omega}{4}}{\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\omega}{4}\right)\left(3-8\sin^2\frac{\omega}{4}+8\sin^4\frac{\omega}{4}\right)}}$$



$\psi(t)$



Battle-Lemarie线性样条小波及其频域函数的图形

Battle-Lemarie线性样条小波 （频率图绘制程序）

```
w=linspace(-20,20,2^10);
WF = (sin(w/2)./(w/2)).^2./sqrt(1-2/3*(sin(w/2)).^2);
subplot(121);
plot(w,WF)

w=linspace(-50,50,2^10);
Wav = real(-16./w./w.*(sin(w./4)).^4.*sqrt((1+2.*(sin(w./4)).^2./(1-
2./3.*(sin(w./4)).^2)./(3-8.*(sin(w./4)).^2+8.*(sin(w./4)).^4))).*exp(-1./2.*i.*w));
subplot(122)
plot(w,Wav);
```

Battle-Lemarie线性样条小波 （绘制程序）

```
function Wav = AF1(w,t0)
t=-t0:0.01:t0;
if(w==0)
    Wav = 1;
else Wav = -16./w./w.*(sin(w./4))^4.*sqrt((1+2.*(sin(w./4))^2./(1-
2./3.*(sin(w./4))^2)./(3-8.*(sin(w./4))^2+8.*(sin(w./4))^4))).*exp(i.*w.*t)./2./pi;
end
subplot(1,2,1);
Ingegl1 = quadv(@(w)AF1(w,4),-450,450);
plot([-4:0.01:4],Ingegl1);
```

10. 二进样条小波

在第7章介绍。

11.Symlet (sym*N*)小波

Symlet小波函数是Daubechies提出的近似对称的小波函数，它是对db函数的一种改进。 Symlets小波系通常表示为symN(N=2,3,…,8)

12. Coiflet (coif*N*)小波

根据R.Coifman的要求，Daubechies构造了Coiflet小波，它具有CoifN (N=1,2,3,4,5)这一系列。 Coiflet的小波函数的2N阶矩为零，尺度函数的2N-1阶矩为零。其小波函数与尺度函数的支撑长度为6N-1，具有比dbN更好的对称性。

wavemngr('read')

• Haar	haar
• Daubechies	db
• Symlets	sym
• Coiflets	coif
• BiorSplines	bior
• ReverseBior	rbio
• Meyer	meyr
• DMeyer	dmey
• Gaussian	gaus
• Mexican_hat	mexh
• Morlet	morl
• Complex Gaussian	cgau
• Shannon	shan
• Frequency B-Spline	fbsp
• Complex Morlet	cmor

时频分析

1. Fourier分析简介

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \qquad f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

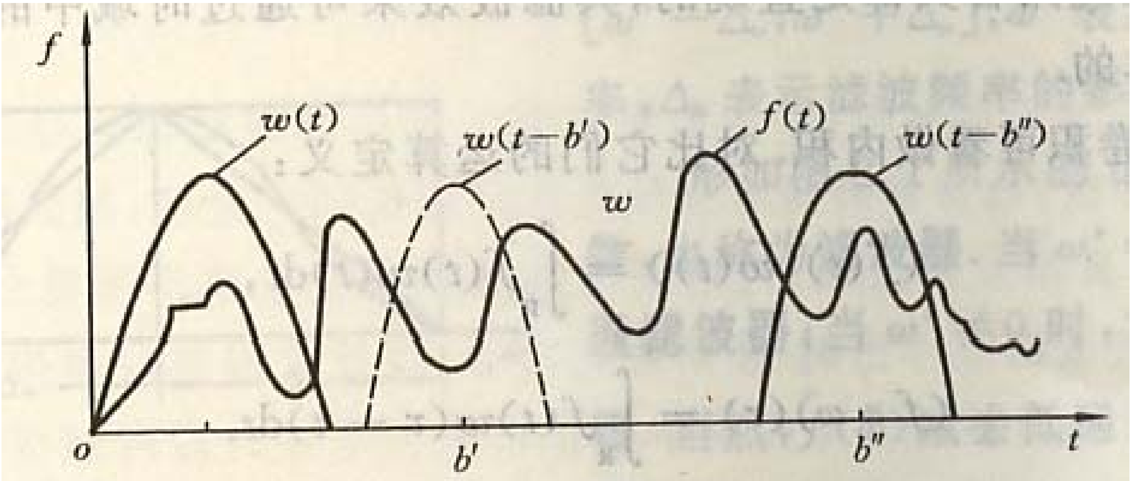
无论在时域或是在频域,**Fourier**变换都是定义在**R**上。因此, **Fourier**变换不能分析局部时域信号的局部频谱特性,也不能分析某频段的频谱对应的时域表现**.**

时-频局部分析的需要

人们在 分析信号时,常需要对信号先作**时域局部化**处理,例如按要求分段,再做频域分析;也常常需要对信号先作**频域局部化**处理,例如低频分离处理、频带分离处理和高频分离处理，再用频域信号的改变来获得所需的时域信号；还有，希望时域和频域都能做出**时-频局部化**处理，以建立局部时域信号和局部频域信号的对应关系。

2. 短时Fourier变换

短时Fourier变换的基本思想是：把信号划分成许多小的时间间隔，用Fourier变换分析每个时间间隔内的信号，以便确定在该时间间隔内的频谱信息。



窗口函数的定义

非平凡函数 $w \in L^2(R)$ 称为窗函数，如果 $tw(t) \in L^2(R)$

$$N_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{其它值} \end{cases}$$

$$\psi_H(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1/2 \\ -1 & 1/2 \le t < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$N_2(t) = \begin{cases} t & \text{对} 0 \le t \le 1 \\ 2 - t & \text{对} 1 < t \le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$g_a(t) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi}} e^{-\frac{t^2}{4a}} \quad a > 0$$

可以证明：要使

$$\int_R t^2 \left|w(t)\right|^2 dt < +\infty$$

当 $|t| \to +\infty$ 时，$\left|w(t)\right|$ 的衰减速度应比 $1/|t|^{3/2}$ 快。

窗函数的开窗效果可用它的中心与半径来表示。

窗口中心可仿照力学中关于重心的描述定义：

$$t^* = \frac{1}{\|w\|_2^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t \left| w(t) \right|^2 dt$$

窗口半径可仿照力学中求矩量的方法来定义：

$$\Delta_w = \frac{1}{\|w\|_2} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} (t - t^*)^2 \left| w(t) \right|^2 dt \right\}^{1/2}$$

通常我们用 $2\Delta_w$ 作为窗函数 w 宽度的度量。

有关性质参考教材P166~167：

窗口Fourier变换

窗口Fourier变换： $$S_f(\omega,b)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t-b)e^{-i\omega t}dt$$

大致反映了 $f(t)$ 在时刻 **b**、频率为 ω 的"信号成分"的相对含量。

在上述定义中，常以时域开窗的数学形式为主来考虑问题的，也即

$$S_f(\omega,b)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f(t)g^*(t-b)\right]e^{-i\omega t}dt$$

即先将 $f(t)$ 时域局部化为 $f(t)g^*(t-b)$ ，再对开窗后局部

时域信号作Fourier变换。

也可换一个角度观察之，即采用形式:

$$S_f(\omega,b)=\left\langle f,W_{\omega,b}\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)W_{\omega,b}^{*}(t)dt$$

其中，$W_{\omega,b}(t)=e^{i\omega t}g(t-b)$. 这是一种新的思考方式，在积分变换的意义下，既把 $W_{\omega,b}$ 看成窗函数，又把它看做能对 $f(t)$ 在时域和频域都能起限制作用的窗函数。

$S_f(\omega,b)$ 给出了 $f(t)$ 在 $W_{\omega,b}$ 的时间窗 $\left[t^{*}+b-\Delta_g,t^{*}+b+\Delta_g\right]$ 内的局部化信息量。

短时Fourier变换

若 $g(t)$ 及其Fourier变换 $\hat{g}(\omega)$ 都是窗口函数，则称 $S_f(\omega,b)$ 为短时Fourier变换。

这要求，

当 $|t| \to +\infty$ 时，$|g(t)|$ 的衰减速度应比 $1/|t|^{3/2}$ 快。

当 $|\omega| \to +\infty$ 时，$|\hat{g}(\omega)|$ 的衰减速度应比 $1/|\omega|^{3/2}$ 快。

记 $\hat{g}(\omega)$ 的窗口中心与半径分别为 ω^* 和 $\Delta_{\hat{g}}$，则频窗函数

$$\hat{W}_{\omega,b}(\eta) = e^{-ib(\eta-\omega)}\hat{g}(\eta-\omega)$$

的窗口中心与半径分别为 $\omega^* + \omega$ 和 $\Delta_{\hat{g}}$。

$$S_f(\omega,b)=\frac{1}{2\pi}\left\langle \hat{f},\hat{W}_{\omega,b}\right\rangle$$

这表明，$S_f(\omega,b)$ 还给出了 $\hat{f}(\omega)$ 在频域窗$\left[\omega^*+\omega-\Delta_{\hat{g}},\ \omega^*+\omega+\Delta_{\hat{g}}\right]$

中的局部信息。

窗函数的时-频局部化效果的度量应在时域和频域这两方面同时进行为宜，它的时域局部化被限制在时窗区间$\left[t^*+b-\Delta_g, t^*+b+\Delta_g\right]$ 范围内，它的频域局部化被限制在频窗区间$\left[\omega^*+\omega-\Delta_{\hat{g}},\ \omega^*+\omega+\Delta_{\hat{g}}\right]$

范围内。于是，可构建时-频坐标系，用时窗区间和频窗区间形成一个矩形时-频窗$\left[t^*+b-\Delta_g, t^*+b+\Delta_g\right]\times\left[\omega^*+\omega-\Delta_{\hat{g}},\ \omega^*+\omega+\Delta_{\hat{g}}\right]$。

时-频窗是窗函数的时-频局部化功能的几何直观描述。特别地，在时窗中心与频窗中心有移动的情况下，若窗函数固定不变，则其时窗半径与频窗半径是不变的。而且，在时频坐标系中，任意的窗中心(b,ω)

所在的时频窗面积为 $4\Delta_g\Delta_{\hat{g}}$ 不变。

时间-频率窗：$\left[t^{*}+b-\Delta_{g}, t^{*}+b+\Delta_{g}\right]\times\left[\omega^{*}+\omega-\Delta_{\hat{g}}, \omega^{*}+\omega+\Delta_{\hat{g}}\right]$

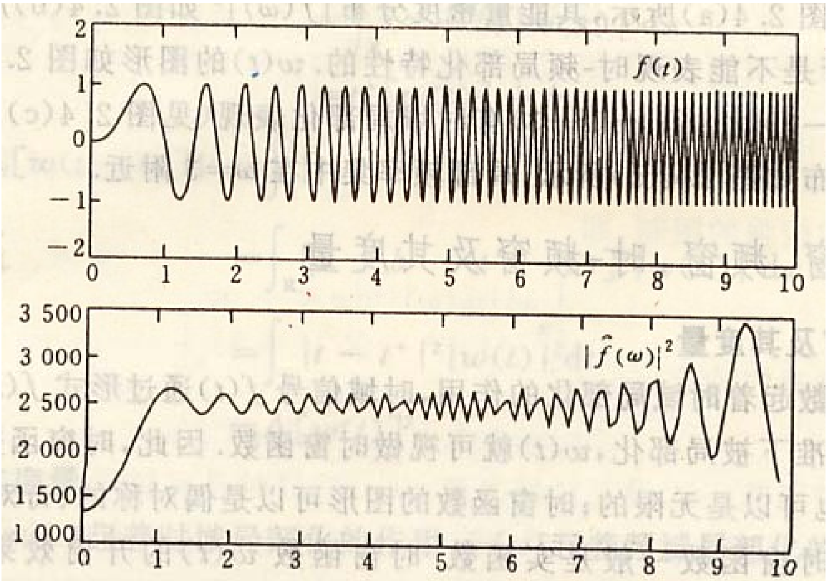
特性：不变的宽度 $2\Delta_{g}$ 和固定的窗面积 $4\Delta_{g}\Delta_{\hat{g}}$

短时Fourier变换在Fourier分析的基础上取得了本质的进步。用短时Fourier变换分析信号时可以在时频窗这个局部范围内观察，时频窗面积反映了时频局部化的程度。是否可以选择某个窗函数，能使时频窗面积充分小呢？

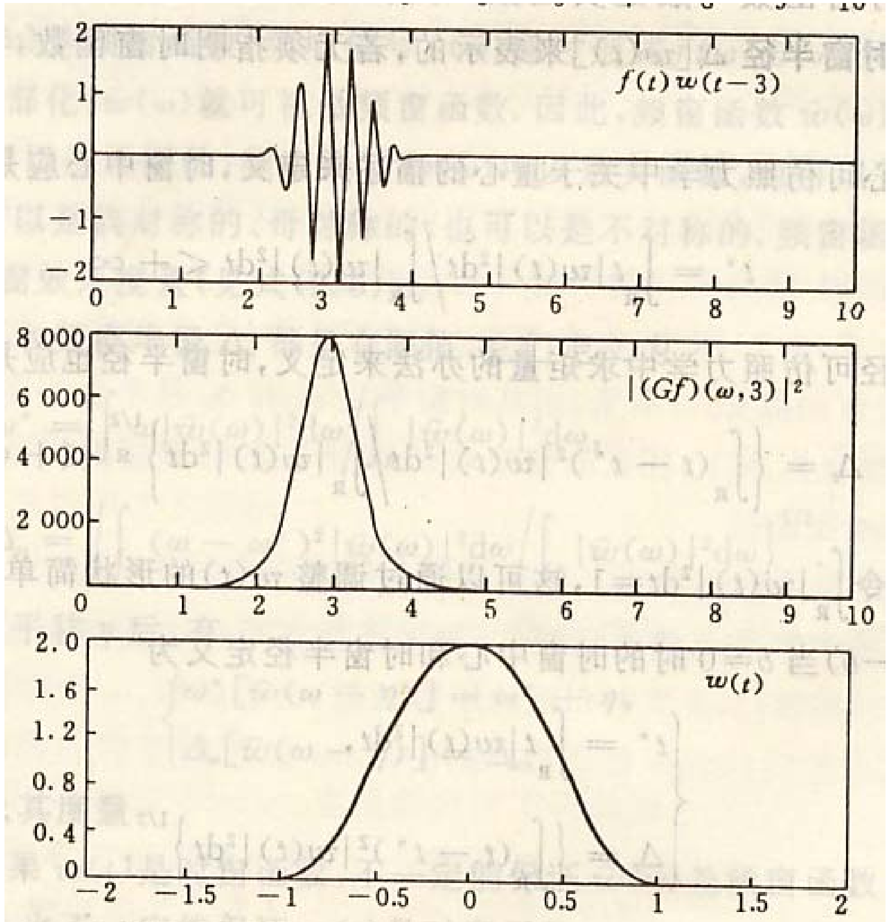
测不准原理： $\Delta_{g}\Delta_{\hat{g}}\geq\frac{1}{2}$

当窗口函数g取高斯函数时，时间频率窗的面积最小。这时，相应的短时

Fourier变换称为Gabor变换。



f(t)
|f̂(ω)|²



f(t)w(t−3)
|(Gf)(ω,3)|²
w(t)

短时Fourier变换的局限性

- 固定的窗口形状

  若用同一窗宽分析同一信号的不同时段，则有时合适，有时不合适；若通过选择不同的窗函数调整窗宽来分析同一信号的不同时段，则显得很麻烦。
- 在实际应用中，选择某个窗函数，希望其时-频窗形状是自适应变化的，对低频信号，其窗口形状自动变得扁平；对高频信号，其窗口形状自动变得瘦长。短时Fourier变换难以满足这方面的要求。

应用上的局限性：不太适合分析非平稳信号。

小波时频分析

小波分析能够提供一个随频率改变的时间-频率窗口。

假设 ψ 是任一基本小波，并且 ψ 与 $\hat{\psi}$ 都是窗函数，它们的中心与半径分别为 t^*, ω^*, Δ_ψ 和 $\Delta_{\hat{\psi}}$。 不妨设 ω^* 和尺度 a 都是正数。

先考察 ψ 的衰减性：

作为基本小波，要求 $\left|\psi(t)\right| \le c\left(1+|t|\right)^{-1-\varepsilon}, \varepsilon > 0$

作为窗口函数，要求

当 $|t| \to +\infty$ 时，$\left|\psi(t)\right|$ 的衰减速度应比 $1/|t|^{3/2}$ 快。

当 $|\omega| \to +\infty$ 时，$\left|\hat{\psi}(\omega)\right|$ 的衰减速度应比 $1/|\omega|^{3/2}$ 快。

考察 $\psi_{a,b}$ 的时频特性：

$$S_f(\omega,b)=\left\langle f,W_{\omega,b}\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)W_{\omega,b}^{*}(t)dt$$

其中，$W_{\omega,b}(t)=e^{i\omega t}g(t-b)$. 把 $W_{\omega,b}$ 看做能对 $f(t)$

在时域和频域都能起限制作用的窗函数。

$$WT_f(a,b)=\left\langle f,\psi_{a,b}\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\psi_{a,b}^{*}dt$$

$$\psi_{a,b}(t)=\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right),a>0$$

小波函数 $\psi_{a,b}$ 的定义中，虽然没有将频率 ω 小波函作为参数，

但它将频率隐含在尺度因子a之中。与 $W_{\omega,b}$ 有相似的作用，但具

有更好的时频分析性能。

考察 $\psi_{a,b}$ 的时频特性：

时窗函数 $\psi_{a,b}$ 的中心与半径分别为 $b+at^*$ 和 $a\Delta_\psi$ 。

频窗函数 $\hat{\psi}_{a,b}$ 的中心与半径分别为 ω^*/a 和 $\Delta_{\hat{\psi}}/a$ 。

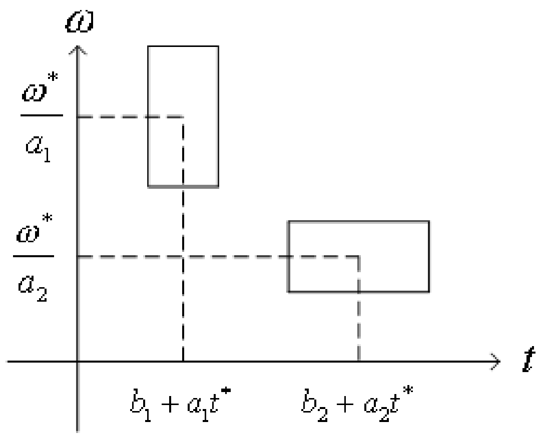
因此，小波窗函数的时域局部化被限制在时窗区间 $\left[b+at^*-a\Delta_\psi, b+at^*+a\Delta_\psi\right]$

它的频域局部化被限制在频窗区间 $\left[\frac{\omega^*}{a}-\frac{\Delta_{\hat{\psi}}}{a}, \frac{\omega^*}{a}+\frac{\Delta_{\hat{\psi}}}{a}\right]$

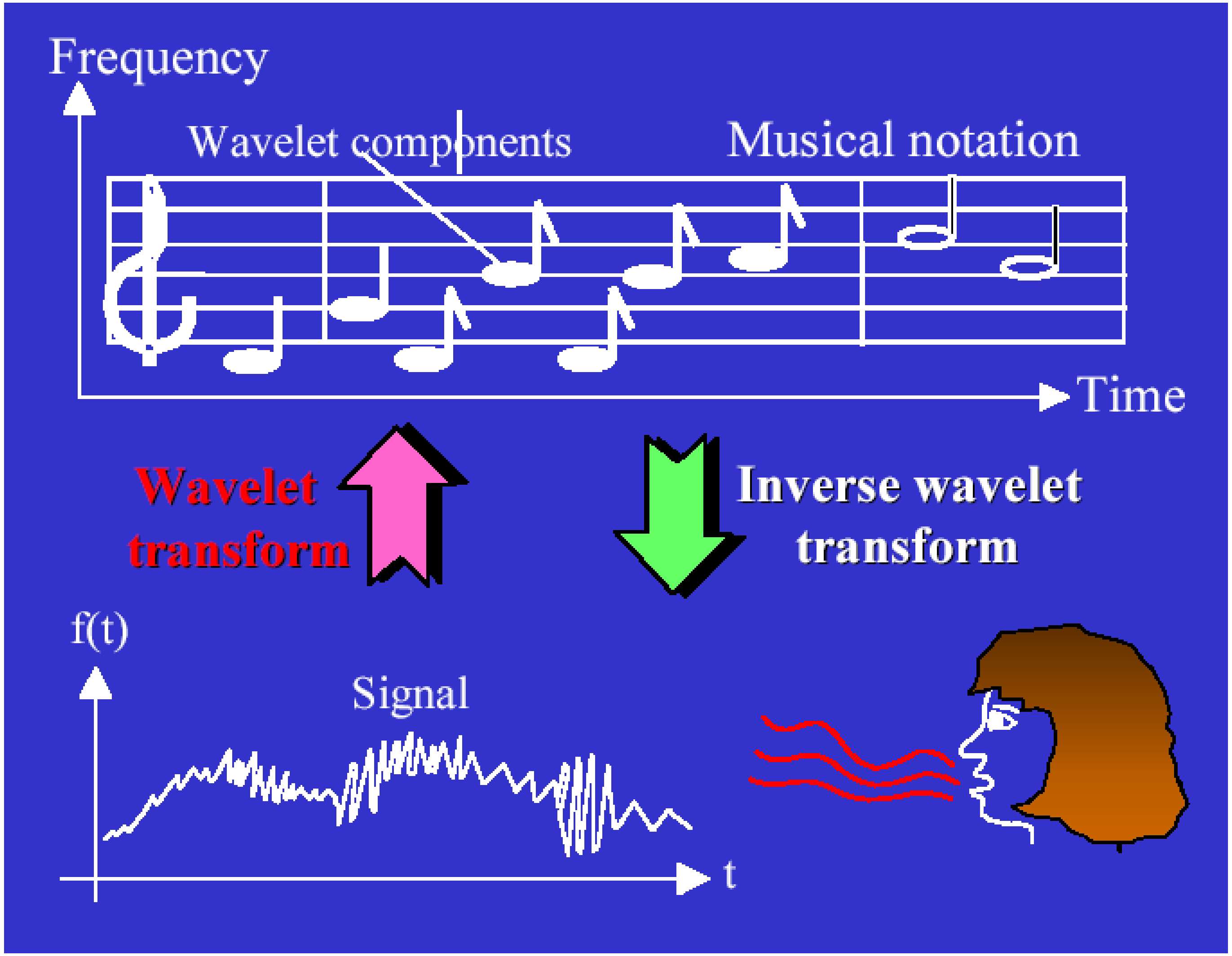
若用 ω^*/a 作为频率变量 ω，则 $WT_f(a,b)$ 给出了信号在时间—频率平面（ $t-\omega$ 平面）中一个矩形的时间—频率窗

$$\left[b+at^*-a\Delta_\psi, b+at^*+a\Delta_\psi\right]\times\left[\frac{\omega^*}{a}-\frac{\Delta_{\hat{\psi}}}{a}, \frac{\omega^*}{a}+\frac{\Delta_{\hat{\psi}}}{a}\right]$$

内的局部化信息，即小波变换具有时—频局部化特征。



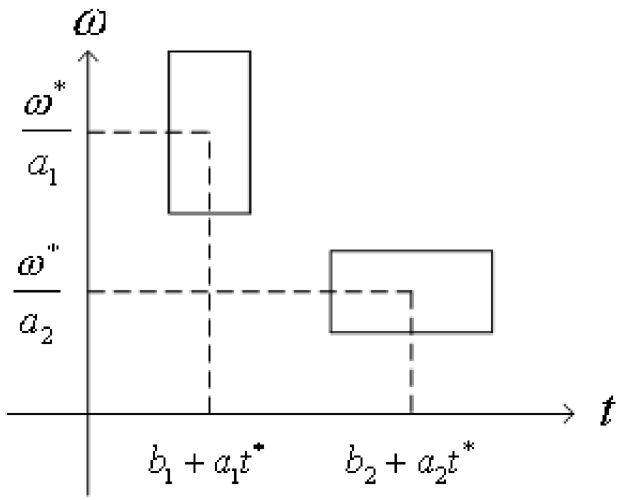
时-频窗中心：$\left(b+at^*, \omega^*/a\right)$ 窗宽： $2a\Delta_\psi$ 窗高：$2\Delta_{\hat{\psi}}/a$ 面积： $4\Delta_\psi\Delta_{\hat{\psi}}$


Frequency
Wavelet components
Musical notation
Time
Wavelet transform
Inverse wavelet transform
f(t)
Signal
t

小波变换的时-频窗的自适应性

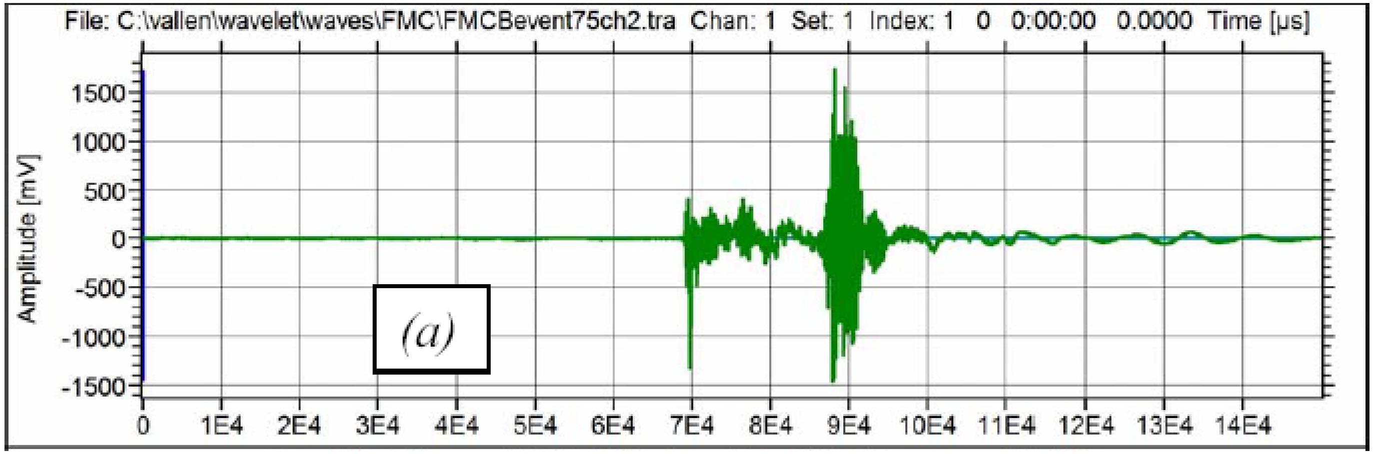
从小波窗函数 $\psi_{a,b}$ 参数选择方面看，

当 **a** 较小时，频窗中心自动地调整到较高的频率中心的位置，且时-频窗形状自动地变为“瘦窄”状；因为高频信息在很短的时域范围内的幅值变化大，频率含量高，所以这种“瘦窄”时-频窗正符合高频信号的局部时-频特征。

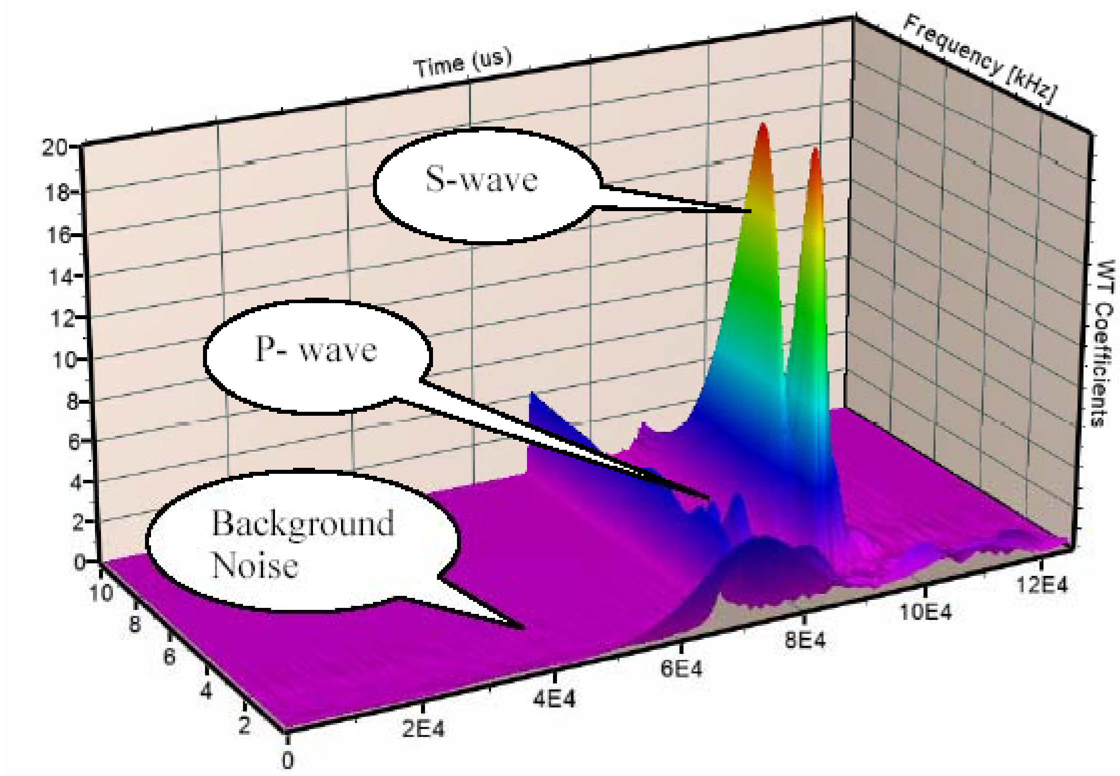


同样，当**a**较大时，时-频窗形状自动地变为“扁平”状，它正符合低频信号的局部时-频特征。

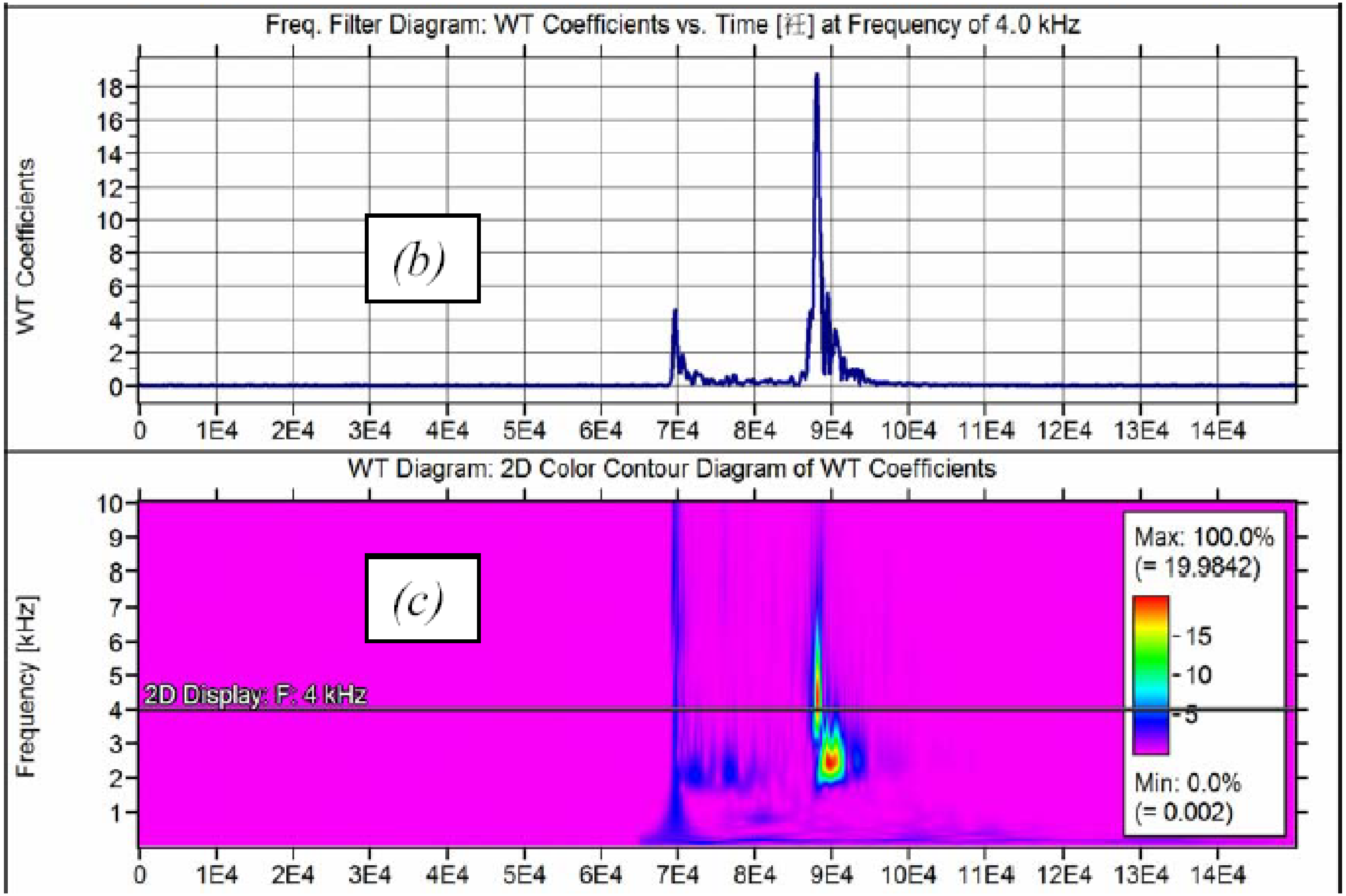
$$0 < a_1 < a_2$$


File: C:\vallen\wavelet\waves\FMC\FMCBevent75ch2.tra Chan: 1 Set: 1 Index: 1 0 0:00:00 0.0000 Time [µs]
Amplitude [mV]
(a)

地震信号


Time (us)
Frequency [kHz]
WT Coefficients
S-wave
P- wave
Background
Noise

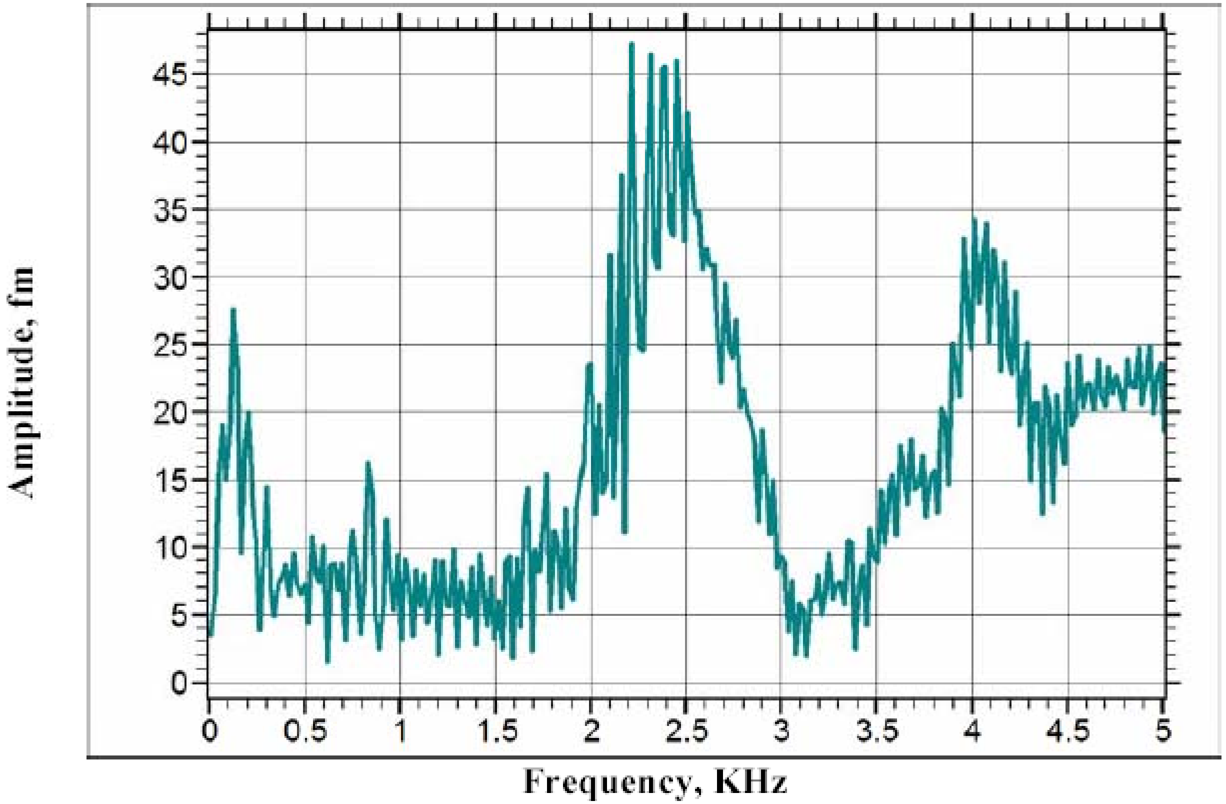
时频分析



(b): 某一频率**(4KH)**随时间变化的能量分布**.**

(c): 小波变换的另一种表示形式**.**

傅立叶变换


Amplitude, fm
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
Frequency, KHz

The WTs were calculated with AGU-Vallen Wavelet, a free software program.

AGU-Vallen Wavelet,
http://www.vallen.de/wavelet/index.html 2005

AGU-Vallen Wavelet is a tool which allows you to calculate and display the wavelet transform on individual waveforms.

AGU-Vallen Wavelet has been developed in collaboration between Vallen-Systeme GmbH and Aoyama Gakuin University (AGU), Tokyo, Japan. The AGU group has pioneered in the research of wavelet analysis in the field of Acoustic Emission and Vallen has actively generated software tools.

各种变换的比较

Fourier变换的特性

- 分解种类：　频率
- 分析函数：　正弦函数，余弦函数
- 变量：　　　频率
- 信息：　　　组成信号的频率
- 　适应场合：　平稳信号
- 算法复杂度：

小波变换的特性

- 分解种类：时间-尺度或时间-频率
- 分析函数：具有固定震荡次数的时间有限的波。小波函数的伸缩改变其窗口大小。
- 变量：　　尺度，小波的位置
- 信息：窄的小波提供好的时间局部化及差的频率局部化，宽的小波提供好的频率局部化及差的时间局部化。
- 适应场合：非平稳信号

短时Fourier变换的特性

- 分解种类：时间-频率
- 分析函数：由三角震荡函数复合而成的时间有限的波
- 变量：频率，窗口的位置
- 信息：　窗口越小，时间局部化越好，其结果是滤掉低频成分；窗口越大，频率局部化越好，此时时间局部化较差.
- 适应场合：次稳定信号

离散小波分解所表现的局部时频分析方法

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$$

$$f_j(t) = f_{j-1}(t) + d_{j-1}(t)$$

$$f_j(t) = P_j f(t)$$

$$f_j(t) = \sum_k c_k^j \phi_{j,k}(t), c_k^j = \langle f, \phi_{j,k} \rangle$$

$$f_{j-1}(t) = \sum_k c_k^{j-1} \phi_{j-1,k}(t), c_k^{j-1} = \langle f, \phi_{j-1,k} \rangle$$

$$d_{j-1}(t) = \sum_k d_k^{j-1} \psi_{j-1,k}(t), d_k^{j-1} = \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle$$

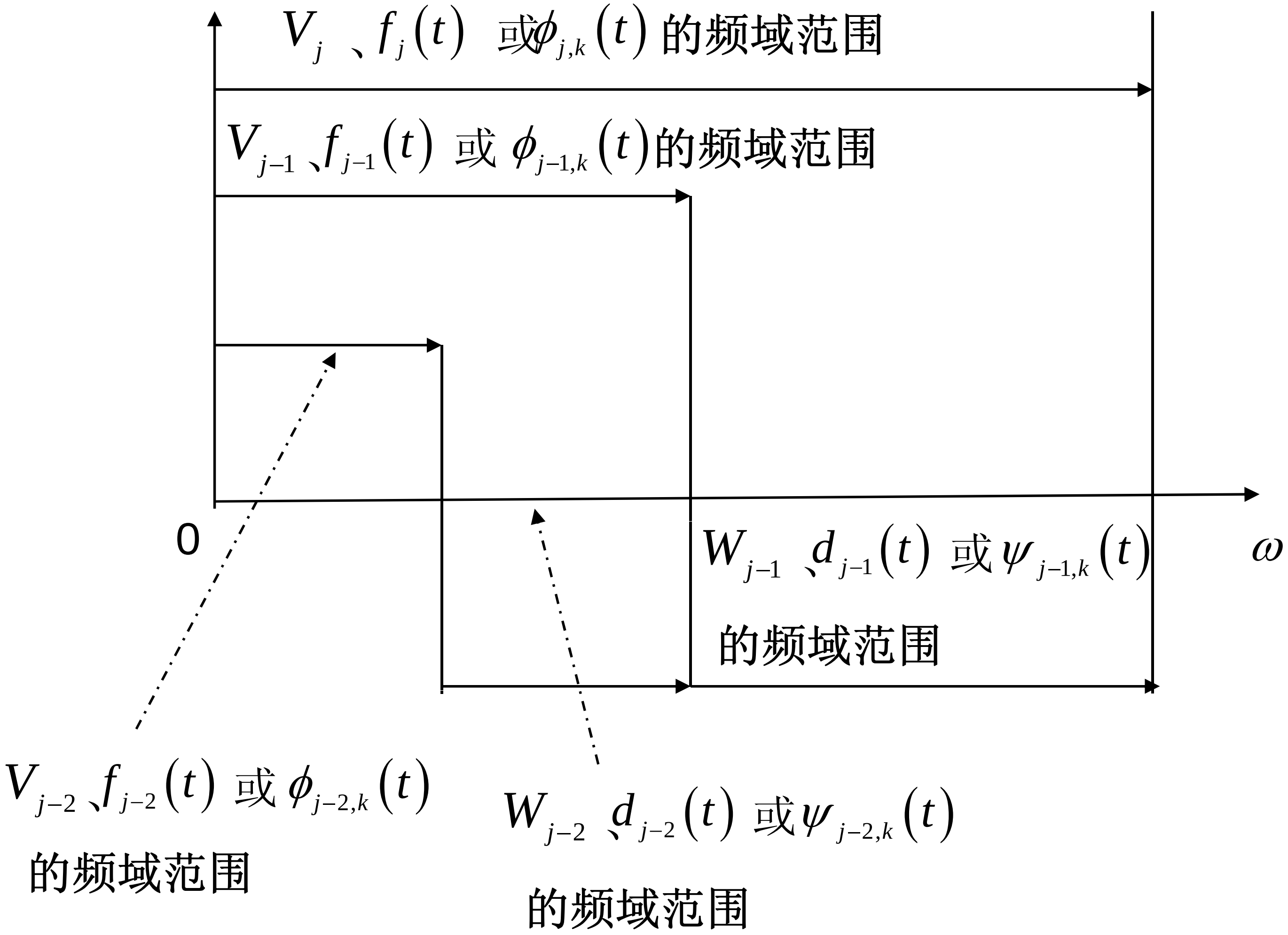
1. $f_j(t)$ 可看做有限频宽的函数, $\phi_{j,k}$ 的平移指标不影响其频域范围.

   因此, $\phi_{j,k}(t)$ 是频率范围同于 $f_j(t)$ 的低通滤波器.

2. $\phi_{j-1,k}(t)$ 的频宽是 $\phi_{j,k}(t)$ 的频宽的一半,因此 $f_{j-1}(t)$ 的频宽仅是

   $f_j(t)$ 频宽的一半(低频). $f_j(t)$频宽的另一半(高频)是由 $d_{j-1}(t)$ 表现.

   $d_{j-1}(t) = \sum_k d_k^{j-1} \psi_{j-1,k}(t)$ 的 $\psi_{j-1,k}$ 是带通滤波器函数.


V_j 、$f_j(t)$ 或$\phi_{j,k}(t)$ 的频域范围
V_{j-1} 、$f_{j-1}(t)$ 或 $\phi_{j-1,k}(t)$的频域范围
0
ω
W_{j-1} 、$d_{j-1}(t)$ 或$\psi_{j-1,k}(t)$
的频域范围
V_{j-2} 、$f_{j-2}(t)$ 或 $\phi_{j-2,k}(t)$
的频域范围
W_{j-2} 、$d_{j-2}(t)$ 或$\psi_{j-2,k}(t)$
的频域范围

$$L^2(R)=\oplus_{j\in Z}W_j \qquad f(t)=\oplus_{j\in Z}d_j(t)$$

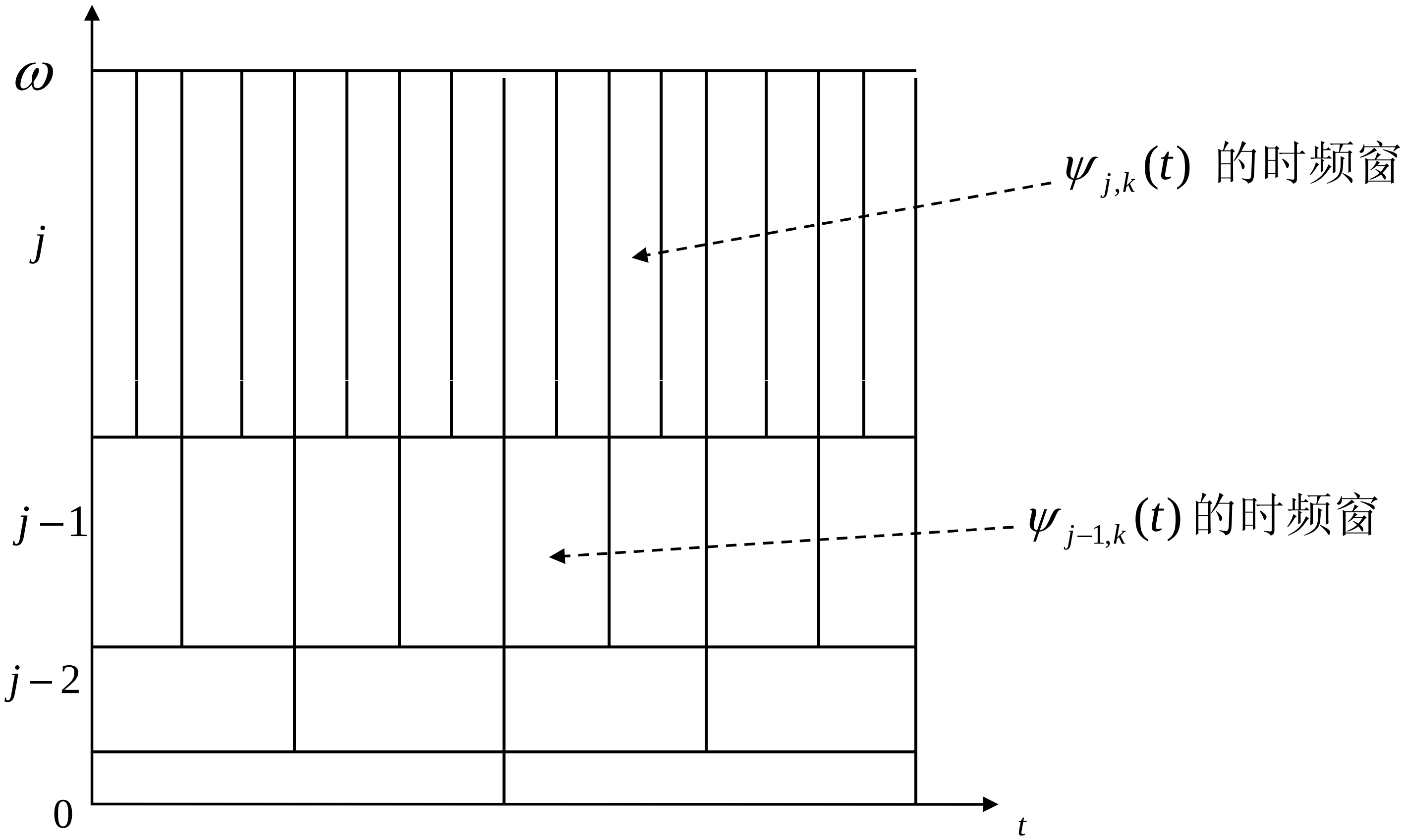
MRA所确定的小波子空间分解关系 $L^2(R)=\oplus_{j\in Z}W_j$ 表明，任一信号 $f(t)\in L^2(R)$ 的频域被分隔为若干互不重叠的子频带的直和。也即，

在MRA框架下，能量有限信号 $f(t)$ 可分解成表示不同频率子带的小波分量 $d_j(t)$ 的直和。 通过对小波分量 $d_j(t)$ 的分析来达到局部时频分析的目的。

$$d_j(t)=\sum_{j,k\in Z}d_k^j\psi_{j,k}(t) \qquad d_k^j=\langle f,\psi_{j,k}(t)\rangle \qquad \sum_k\sum_j\left|d_k^j\right|^2<\infty$$

$d_k^j=\langle f,\psi_{j,k}(t)\rangle$ 可理解为将*f*限制在由 $\psi_{j,k}(t)$ 所决定的子频带内。

这表明， 实际上是通过对离散数据 $\{d_k^j\}$ 的分析达到局部时频分析的目的。



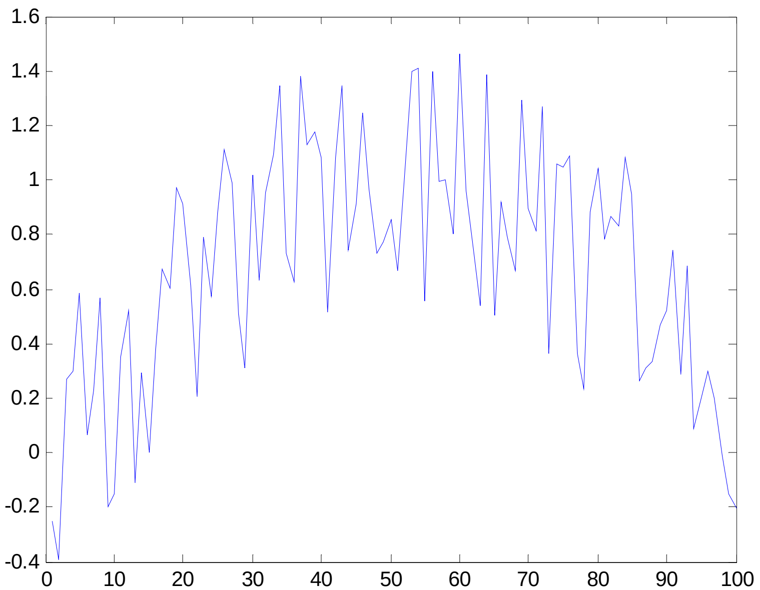
离散小波分解自适应时-频窗示意图

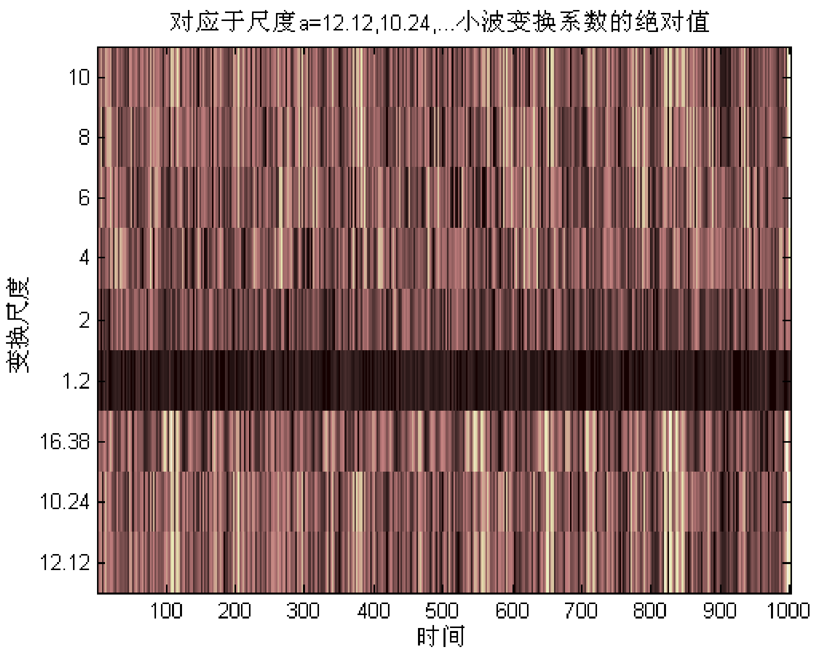
连续小波变换的计算

数值近似积分法、快速算法（包括**Mellin**算法，斜交投影算法等）

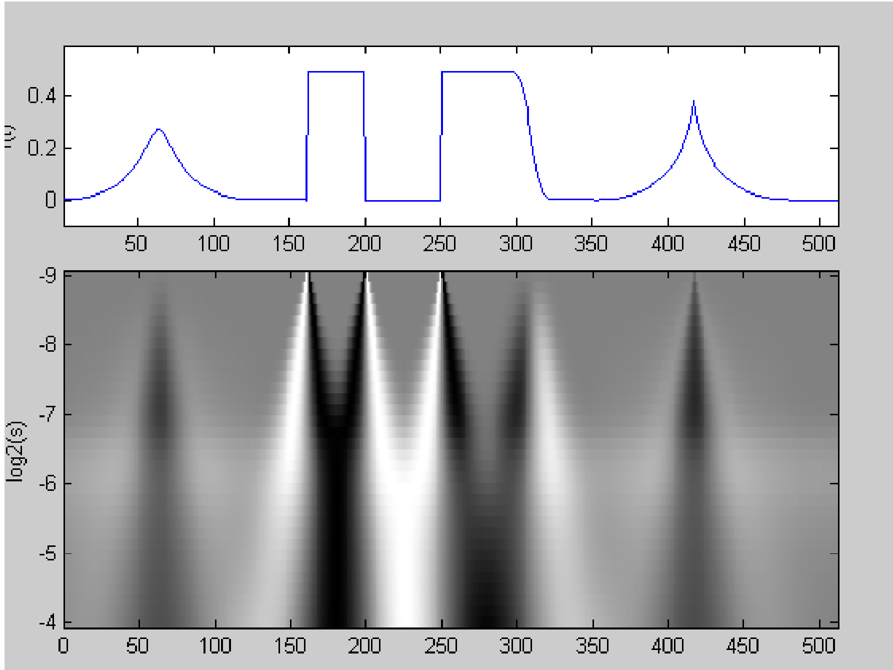
在**Matlab**小波工具箱中，用**cwt**（）函数计算连续小波变换。

连续小波变换的结果的显示方式： 灰度表示，三维表示



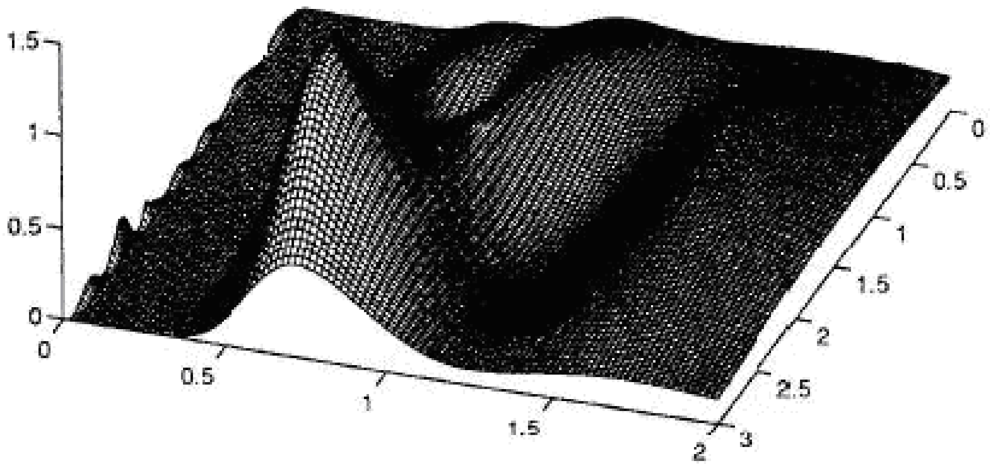


用小波变换的模显示：颜色越深，系数模越大



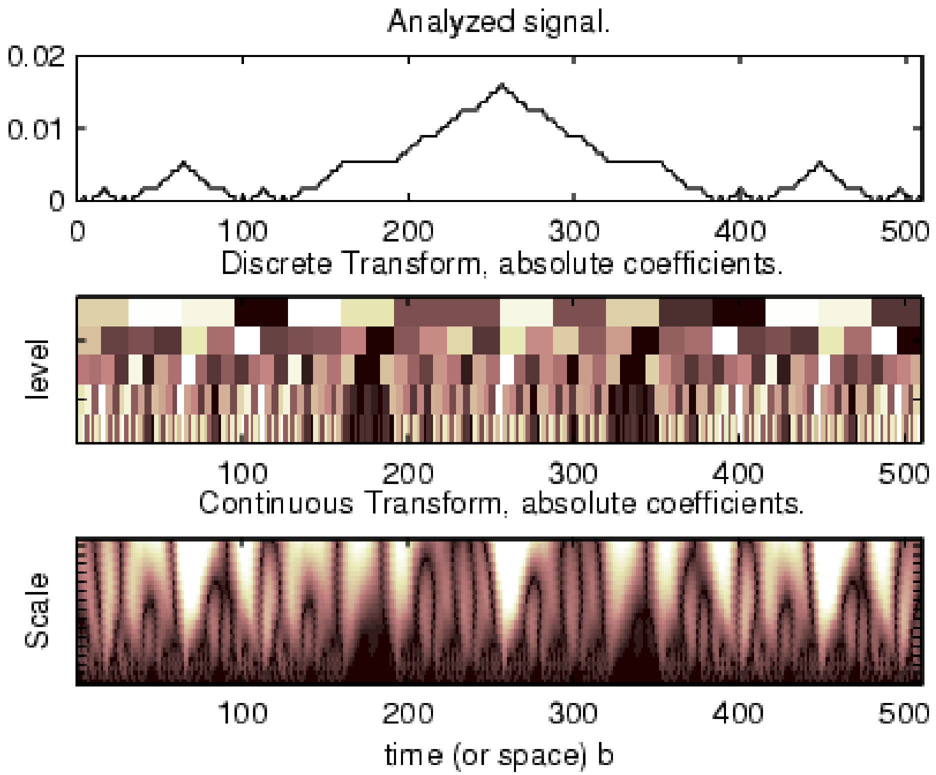
高斯小波. 黑、灰、白点分别对应于正的、零、以及负的小波系数。

$$f(t)=\begin{cases}\sin(5.89t), & 0\le t\le 1\\ \sin(8.83t), & 1\le t\le 2\\ \sin(5.89t)+\sin(8.83t), & 2\le t\le 3\\ 0, & t>3\end{cases}$$



在**Matlab**中，如何将**cwt()**的计算结果用网格形式显示？

连续小波变换与离散小波变换在分析信号时的优缺点



2, 4, 8, 16 , 32

1， 2， …, 32

小波变换的分类

$\psi_{a,b}(t)$ 中 a,b,t 三个变量均为连续变量，通过对它们施加不同的离散化条件对小波及小波变换进行分类。下面介绍两种最重要的分类：

离散小波及离散（参数）小波变换： 只对**a,b**离散化

二进小波及二进小波变换 ： 只对**a**离散化

离散小波及离散（参数）小波变换

令参数 $a = 2^{-j}$， $b = k2^{-j}$，其中 $j,k \in Z$，则离散（参数）小波为：

$$\psi_{2^{-j},k2^{-j}}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$$

在这种情况下，常用 $\psi_{j,k}(t)$ 记 $\psi_{2^{-j},k2^{-j}}$ ，即

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$$

相应于离散小波 $\psi_{j,k}(t)$ 的离散（参数）小波变换为：

$$WT_f(j,k) := < f, \psi_{j,k} >$$

离散小波及离散（参数）小波变换

重构问题：$\psi(t)$ 满足什么条件下，可以由离散小波变换 $\left\{\left\langle f,\psi_{j,k}\right\rangle\right\}_{j,k\in Z}$ 重构原信号？

稳定性条件:

$$A\|f\|^2 \le \sum_j\sum_k\left|\left\langle f,\psi_{j,k}\right\rangle\right|^2 \le B\|f\|^2$$

$$0 < A \le B < \infty$$

当**A=B=1,** 相应的小波为正交小波;相应的小波变换为正交小波变换**.**

可以验证，离散（参数）小波变换不具有平移不变性（习题**6.4**）。

离散小波及离散（参数）小波变换的进一步讨论

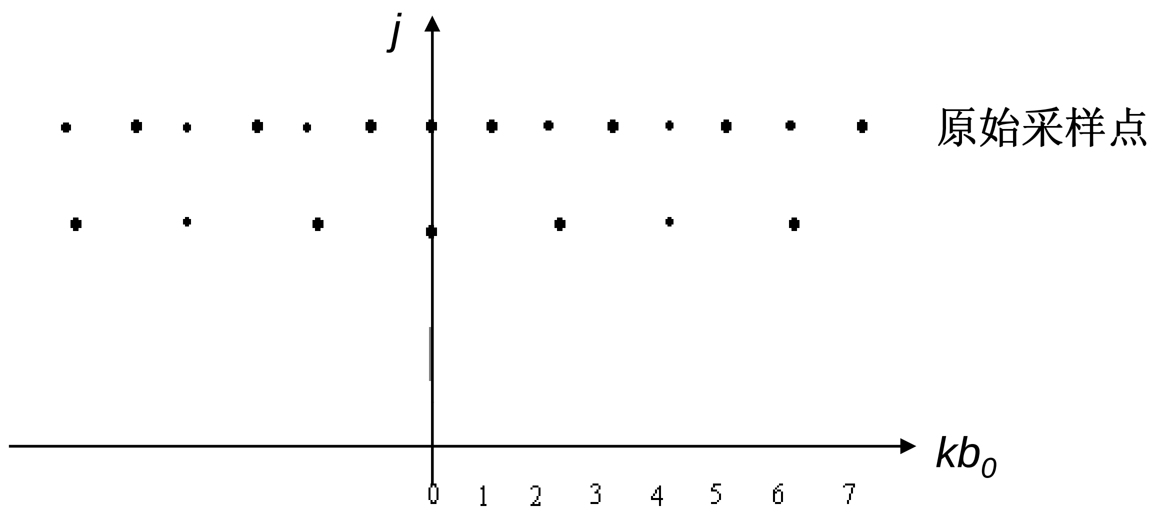
尺度离散化：

实际工作中最常见的情况是,将尺度 **a**按照二进尺度离散化,此时**a** 取值为

$$a = 2^{-j}, j = J, J-1, \cdots, 0$$

位移离散化：

当**a=2^{-J}** (也就是***j* =*J***时),**b**可以某一基本间隔**b$_0$**做均匀采样. **b$_0$**应适当选择使信息仍能覆盖全**b**轴而不丢失(如不低于**Nyquist**采样率). 每经过一次小波变换, 其采样间隔扩大一倍,即对于分辨率***j*, b**以采样间隔**2^{J-j} b$_0$**做均匀采样, 由此可见此时**a-b**平面内的采样点如下图所示.



从高分辨到低分辨

从小尺度到大尺度

离散小波及离散（参数）小波变换的进一步讨论

$\psi_{a,b}(t) = 2^{j/2}\psi\left(2^j t - kb_0\right)$ **,若b$_0$=1,**则

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi\left(2^j t - k\right)$$

二进小波及二进小波变换

在连续小波变换中，令参数 $a = 2^j,\ j \in Z$ ，而参数**b**仍取连续值.

则有二进小波：

$$\psi_{2^j,b}(t) = 2^{-j/2}\psi\left[2^{-j}(t-b)\right]$$

这时， $f(t) \in L^2(R)$ 的二进小波变换定义为：

$$WT_f(2^j,b) = 2^{-j/2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi^*\left[2^{-j}(t-b)\right]dt$$

重构问题： $\psi(t)$ 在满足什么条件下，可以由二进小波变换 $\left\{WT_f\left(2^j,b\right) \mid j \in Z, b \in R\right\}$ 重构原信号？

重要性质： 二进小波变换仍具有连续小波变换的平移不变性 .