Trekant a, a, $a+1$.

Omkreds: $3 \cdot a + 1$

Areal: $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{(3\,a+1) \cdot (a+1)^2 \cdot (a-1)} = \frac{a+1}{4} \cdot \sqrt{3 \cdot a^2 - 2 \cdot a - 1}$ (Herons formel)

$\sqrt{3 \cdot a^2 - 2 \cdot a - 1}$ er enten et helt tal eller et irrationalt tal. Hvis arealet skal være heltalligt, er det derfor et krav, at $\sqrt{3 \cdot a^2 - 2 \cdot a - 1}$ er et helt tal.

Hvis arealet er heltalligt, findes derfor et helt tal $b > 0$, så $3 \cdot a^2 - 2 \cdot a - 1 = b^2$.

I denne ligning kan $a > 0$ isoleres: $a = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3\,b^2 + 4}}{3}$.

Ligningen reduceres yderligere til $3 \cdot a - 1 = \sqrt{3 \cdot b^2 + 4}$.

Af ligningen $3 \cdot a^2 - 2 \cdot a - 1 = b^2$ følger, at a og b har forskellig paritet. Hvis a er lige, må b derfor være ulige, og i det tilfælde kan arealet $\frac{(a+1) \cdot b}{4}$ ikke være et helt tal. Derfor må antage, at a er ulige og b er lige.

Dermed findes der et tal $c > 0$, så $b = 2 \cdot c$. Det kan vi indsætte i ligningen $3 \cdot a - 1 = \sqrt{3 \cdot b^2 + 4}$.

Vi får så

$$3 \cdot a - 1 = \sqrt{3 \cdot (2 \cdot c)^2 + 4} \Leftrightarrow 3 \cdot a - 1 = 2 \cdot \sqrt{3 \cdot c^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{3\,a-1}{2} = \sqrt{3 \cdot c^2 + 1} \Leftrightarrow \left(\frac{3\,a-1}{2}\right)^2 - 3 \cdot c^2 = 1$$

.

Da a er ulige, er $\frac{3\,a-1}{2}$ et helt tal, som vi kan betegne d.

Dermed er et krav til a for at både omkreds og areal er hele tal, at $d = \frac{3\,a-1}{2}$ og $c = \frac{\sqrt{3 \cdot a^2 - 2 \cdot a - 1}}{2}$ er heltallige løsninger til Pell-ligningen $d^2 - 3 \cdot c^2 = 1$.

Trekant a, a, $a-1$.

Omkreds: $3 \cdot a - 1$

Areal: $\frac{1}{4}\cdot\sqrt{(3\,a-1)\cdot(a-1)^2\cdot(a+1)} = \frac{a-1}{4}\cdot\sqrt{3\cdot a^2+2\cdot a-1}$ (Herons formel)

Samme skridt som i ovenstående:

(1) $a = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3\,b^2+4}}{3} \Leftrightarrow 3\cdot a+1 = \sqrt{3\cdot b^2+4}$.

(2) $\left(\frac{3\cdot a+1}{2}\right)^2 - 3\cdot c^2 = 1$

(3) $d^2 - 3\cdot c^2 = 1$ med $d = \frac{3\cdot a+1}{2}$ og $c = \frac{\sqrt{3\cdot a^2+2\cdot a-1}}{2}$.