

# “基于决策变量划分的双种群代理辅助多目标进化算法”补充文件

## 1 说明

由于正文页码限制，我们将稿件中部分图表的数据结果放入补充文件中。

## 2 部分实验分析及图表数据

### 2.1 关键策略的有效性分析

RV-DP-SAMOEa共有5个关键策略，分别为：关键变量识别策略、探索种群搜索策略、开发种群搜

索策略、基于GFK迁移学习的局部代理模型构建、搜索区间自适应调整策略。本节选择具有复杂PF的IMOP测试问题作为实验对象，分别对上述5种策略的有效性进行分析。所有测试问题的变量维度D均为10，目标函数个数为默认值。

表 S1 RV-DP-SAMOEa和V1所得HV值和运行时间的均值（方差）（单位：秒）

Table S1 Mean (variance) of HV value and running time obtained by RV-DP-SAMOEa and V1 (unit: second)

Problem		IMOP1	IMOP2	IMOP3	IMOP4	IMOP5	IMOP6	IMOP7	IMOP8
HV	RV-DP-	<b>8.6942e-1</b>	<b>1.0985e-1</b>	<b>2.7598e-1</b>	<b>1.0858e-1</b>	<b>4.9596e-1</b>	<b>2.1898e-1</b>	<b>1.3259e-1</b>	<b>3.8521e-1</b>
	SAMOEa	3.01e-1	1.98e-2	4.66e-2	7.20e-2	7.28e-2	1.95e-2	5.13e-2	6.33e-2
	V1	7.9652e-1	9.9350e-2	2.7080e-1	9.7811e-2	4.5988e-1	2.0920e-1	1.2548e-1	3.3929e-1
		9.66e-1	1.28e-1	1.11e-1	1.01e-1	1.12e-1	9.57e-2	1.16e-1	1.58e-1
Time	RV-DP-	1.6887e+2	<b>1.5712e+2</b>	<b>1.6231e+2</b>	<b>3.8217e+2</b>	<b>3.7521e+2</b>	<b>3.4544e+2</b>	<b>3.4203e+2</b>	<b>3.7312e+2</b>
	SAMOEa	7.65e+1	4.81+1	6.38e+1	1.63e+2	3.35e+2	2.52e+2	2.22e+2	2.10e+2
	V1	<b>1.6813e+2</b>	1.5911e+2	1.7132e+2	3.8311e+2	3.8624e+2	3.5016e+2	3.4891e+2	4.0221e+2
		3.96e+1	7.96e+1	1.01e+2	4.11e+2	5.29e+2	4.85e+2	3.65e+2	5.11e+2

表 S2 RV-DP-SAMOEa和V2所得HV值和运行时间的均值（方差）（单位：秒）

Table S2 Mean (variance) of HV value and running time obtained by RV-DP-SAMOEa and V2 (unit: second)

Problem		IMOP1	IMOP2	IMOP3	IMOP4	IMOP5	IMOP6	IMOP7	IMOP8
HV	RV-DP-	<b>8.6942e-1</b>	<b>1.0985e-1</b>	<b>2.7598e-1</b>	<b>1.0858e-1</b>	<b>4.9596e-1</b>	<b>2.1898e-1</b>	<b>1.3259e-1</b>	<b>3.8521e-1</b>
	SAMOEa	3.01e-1	1.98e-2	4.66e-2	7.20e-2	7.28e-2	1.95e-2	5.13e-2	6.33e-2
	V2	<b>6.5484e-1</b>	9.8841e-2	2.2585e-1	9.1220e-2	4.6851e-1	2.0891e-1	1.2001e-1	3.5021e-1
		5.71e-1	9.87e-2	9.17e-2	1.28e-2	9.54e-2	5.80e-2	8.27e-2	4.65e-2
Time	RV-DP-	<b>1.6887e+2</b>	<b>1.5712e+2</b>	<b>1.6231e+2</b>	<b>3.8217e+2</b>	<b>3.7521e+2</b>	<b>3.4544e+2</b>	<b>3.4203e+2</b>	<b>3.7312e+2</b>
	SAMOEa	7.65e+1	4.81+1	6.38e+1	1.63e+2	3.35e+2	2.52e+2	2.22e+2	2.10e+2
	V2	3.3541e+2	3.0454e+2	3.0457e+2	5.3421e+2	5.2101e+2	5.6513e+2	5.7445e+2	6.3124e+2
		1.85e+2	9.25e+1	1.12e+2	7.44e+2	8.12e+2	8.85e+2	7.12e+2	7.21e+2

表 S3 RV-DP-SAMOEa和V3所得HV值和运行时间的均值（方差）（单位：秒）

Table S3 Mean (variance) of HV value and running time obtained by RV-DP-SAMOEa and V3 (unit: second)

Problem		IMOP1	IMOP2	IMOP3	IMOP4	IMOP5	IMOP6	IMOP7	IMOP8
HV	RV-DP-	<b>8.6942e-1</b>	<b>1.0985e-1</b>	<b>2.7598e-1</b>	<b>1.0858e-1</b>	<b>4.9596e-1</b>	<b>2.1898e-1</b>	<b>1.3259e-1</b>	<b>3.8521e-1</b>
	SAMOEa	3.01e-1	1.98e-2	4.66e-2	7.20e-2	7.28e-2	1.95e-2	5.13e-2	6.33e-2
	V3	8.6032e-1	1.0021e-1	2.0314e-1	8.2841e-2	4.2280e-1	1.6820e-1	1.1922e-1	3.4001e-1
		3.80e-1	2.14e-2	7.62e-2	5.81e-2	8.88e-2	1.72e-2	4.41e-2	9.98e-2
Time	RV-DP-	1.6887e+2	<b>1.5712e+2</b>	<b>1.6231e+2</b>	<b>3.8217e+2</b>	<b>3.7521e+2</b>	<b>3.4544e+2</b>	<b>3.4203e+2</b>	<b>3.7312e+2</b>
	SAMOEa	7.65e+1	4.81+1	6.38e+1	1.63e+2	3.35e+2	2.52e+2	2.22e+2	2.10e+2
	V3	<b>9.3281e+1</b>	<b>1.0924e+2</b>	<b>1.0970e+2</b>	<b>2.0211e+2</b>	<b>2.4021e+2</b>	<b>2.1014e+2</b>	<b>1.9802e+2</b>	<b>2.9012e+2</b>
		1.48e+2	2.16e+2	1.10e+2	9.24e+2	9.65e+2	4.70e+2	4.80e+2	1.24e+2

表 S4 RV-DP-SAMOEa和V4所得HV值和运行时间的均值(方差)(单位: 秒)

Table S4 Mean (variance) of HV value and running time obtained by RV-DP-SAMOEa and V4 (unit: second)

Problem		IMOP1	IMOP2	IMOP3	IMOP4	IMOP5	IMOP6	IMOP7	IMOP8
HV	RV-DP-	<b>8.6942e-1</b>	<b>1.0985e-1</b>	<b>2.7598e-1</b>	<b>1.0858e-1</b>	<b>4.9596e-1</b>	<b>2.1898e-1</b>	<b>1.3259e-1</b>	<b>3.8521e-1</b>
	SAMOEa	3.01e-1	1.98e-2	4.66e-2	7.20e-2	7.28e-2	1.95e-2	5.13e-2	6.33e-2
	V4	8.0771e-1	<b>8.8542e-2</b>	1.8356e-1	7.3215e-2	4.0486e-1	1.7451e-1	1.0010e-1	2.6945e-1
		5.45e-1	3.08e-2	3.52e-2	5.16e-2	5.72e-2	2.00e-2	9.21e-2	3.16e-2
Time	RV-DP-	<b>1.6887e+2</b>	<b>1.5712e+2</b>	<b>1.6231e+2</b>	<b>3.8217e+2</b>	<b>3.7521e+2</b>	<b>3.4544e+2</b>	<b>3.4203e+2</b>	<b>3.7312e+2</b>
	SAMOEa	7.65e+1	4.81+1	6.38e+1	1.63e+2	3.35e+2	2.52e+2	2.22e+2	2.10e+2
	V4	<b>1.6894e+2</b>	1.6549e+2	1.7231e+2	<b>3.7231e+2</b>	<b>3.7354e+2</b>	3.4911e+2	3.4612e+2	3.7521e+2
		3.51e+2	8.88e+1	4.61e+2	4.87e+2	7.64e+2	5.98e+2	8.34e+2	8.16e+2

表 S5 RV-DP-SAMOEa和V5所得HV值和运行时间的均值(方差)(单位: 秒)

Table S5 Mean (variance) of HV value and running time obtained by RV-DP-SAMOEa and V5 (unit: second)

Problem		IMOP1	IMOP2	IMOP3	IMOP4	IMOP5	IMOP6	IMOP7	IMOP8
HV	RV-DP-	<b>8.6942e-1</b>	<b>1.0985e-1</b>	<b>2.7598e-1</b>	<b>1.0858e-1</b>	<b>4.9596e-1</b>	<b>2.1898e-1</b>	<b>1.3259e-1</b>	<b>3.8521e-1</b>
	SAMOEa	3.01e-1	1.98e-2	4.66e-2	7.20e-2	7.28e-2	1.95e-2	5.13e-2	6.33e-2
	V5	8.0354e-1	1.0362e-1	2.6841e-1	1.0012e-1	4.5894e-1	2.1165e-1	1.2321e-1	3.3564e-1
		8.21e-1	6.65e-2	8.24e-2	1.00e-1	1.23e-1	8.13e-2	9.89e-2	1.16e-1
Time	RV-DP-	1.6887e+2	<b>1.5712e+2</b>	<b>1.6231e+2</b>	<b>3.8217e+2</b>	<b>3.7521e+2</b>	<b>3.4544e+2</b>	<b>3.4203e+2</b>	<b>3.7312e+2</b>
	SAMOEa	7.65e+1	4.81+1	6.38e+1	1.63e+2	3.35e+2	2.52e+2	2.22e+2	2.10e+2
	V5	<b>1.6354e+2</b>	1.6085e+2	<b>1.5932e+2</b>	3.9324e+2	<b>3.6981e+2</b>	<b>3.3812e+2</b>	<b>3.3811e+2</b>	3.9123e+2
		2.34e+2	9.56+1	8.31e+1	5.49e+2	6.84e+2	4.81e+2	9.15e+2	3.20e+2

### 2.1.1 关键变量识别策略有效性分析

为了验证提出的关键变量识别策略的有效性,设计如下变体算法:在RV-DP-SAMOEa中不执行关键变量识别策略,在双种群协同搜索方法中所有变量均被视为关键变量,其余部分保持不变。为了便于表示,该变体算法记为V1。表S1给出RV-DP-SAMOEa与V1在8个测试函数上的HV值和运行时间(Time)。

可以看出:1)在所有8个测试问题上,RV-DP-SAMOEa得到的HV均优于V1。2)除IMOP1问题之外,在剩余7个测试问题上RV-DP-SAMOEa的运行时间均略低于V1。可见,本文所提关键变量识别策略在不增加计算代价

的情况下,有效提升了算法的搜索效率。

### 2.1.2 探索种群搜索策略有效性分析

为了验证提出的探索种群搜索策略的有效性,设计如下变体算法:在RV-DP-SAMOEa中不执行探索种群搜索策略,即双种群协同搜索方法只执行开发种群搜索策略,其余部分保持不变。为了便于表示,上述变体算法记为V2。表S2给出RV-DP-SAMOEa与V2在8个测试函数上的HV值和运行时间(Time)。

可以看出:1)在所有8个测试问题上,RV-DP-SAMOEa得到的HV值均明显优于V2;2)由于需要频繁地构建局部代理模型,在所有8个测试问题上V2的运行时间均明显高

于RV-DP-SAMOEa。由此可见，本文提出的探索种群搜索策略不仅可以减少算法的运行时间，而且能够增强算法的搜索能力。

### 2.1.3 开发种群搜索策略有效性分析

为了验证提出的开发种群搜索策略的有效性，设计如下变体算法：在RV-DP-SAMOEa中不执行开发种群搜索策略，即双种群协同搜索方法只执行探索种群搜索策略，其余部分保持不变。为了便于表示，本部分变体算法记为V3。表S3给出RV-DP-SAMOEa与V3在8个测试函数上的HV值和运行时间（Time）。

可以看出：1）在所有8个测试问题上，RV-DP-SAMOEa得到的HV值均优于V3。特别地，对于IMOP3-IMOP8等具有复杂PF的测试问题，V3与RV-DP-SAMOEa之间的HV差值更大。2）在8个测试问题上，RV-DP-SAMOEa所需的运行时间均高于V3。综上可知，尽管本文提出的开发种群搜索策略增加了算法的运行时间，但它显著提升了算法搜索不规则PF前沿的能力。

### 2.1.4 基于GFK迁移学习的局部代理模型构建策略有效性分析

为了验证本文提出的局部代理模型构建方法的有效性，在RV-DP-SAMOEa中将其替换为：从DB中选择距离待开发区域最近的3D个样本，并用其构建局部代理模型。为了便于表示，本部分变体算法记为V4。表S4给出RV-DP-SAMOEa与V4在8个测试函数上的HV值和运行时间（Time）。

可以看出：1）在所有8个测试问题上，RV-DP-SAMOEa得到的HV值均明显优于V4。特别地，对于包含较多间断区域的IMOP5和IMOP8问题，V4与RV-DP-SAMOEa

之间的HV差值更大。2）在大部分测试问题上，RV-DP-SAMOEa所需的运行时间要略低于V4。综上可见，本文提出的基于GFK迁移学习的局部代理模型构建方法是有效性。

### 2.1.5 搜索区间自适应调整策略有效性分析

为了验证提出的搜索区间自适应调整策略的有效性，设计如下变体算法：在RV-DP-SAMOEa中不执行搜索区间自适应调整策略，其余部分不变。为了便于表示，本部分变体算法记为V5。表S5给出RV-DP-SAMOEa与V5在8个测试函数上的HV值和运行时间（Time）。

可以看出：1）在所有8个测试问题上，RV-DP-SAMOEa得到的HV均优于V5。2）在大部分测试问题上，V5与RV-DP-SAMOEa的运算时间较为接近。由此可见，在不明显增加算法计算代价的情况下，本文所提搜索区间自适应调整策略可以有效提升算法的搜索效率。

## 2.2 参数敏感性分析

本文所提算法主要包含两个关键参数，分别为初始间断型变量的数目 $\delta$ 、算法每一轮迭代时设定的最大填充样本数 $Max_{infill}$ ，本节分析这两个参数对算法性能的影响。

### 2.2.1 参数 $\delta$ 分析

本部分选择DTLZ7和IMOP8这两个具有间断PF的测试函数来分析参数 $\delta$ 取值对算法性能的影响，其中，DTLZ7为两目标问题，决策变量 $D=10,20$ ；IMOP8为3目标优化问题，决策变量 $D=10$ 。本节设置 $\delta$ 的取值范围为 $[1,0.5D]$ ，步长为1。在不同 $\delta$ 取值下，统计RV-DP-SAMOEa的HV值（均值与标准差）和运行时间（Time）。

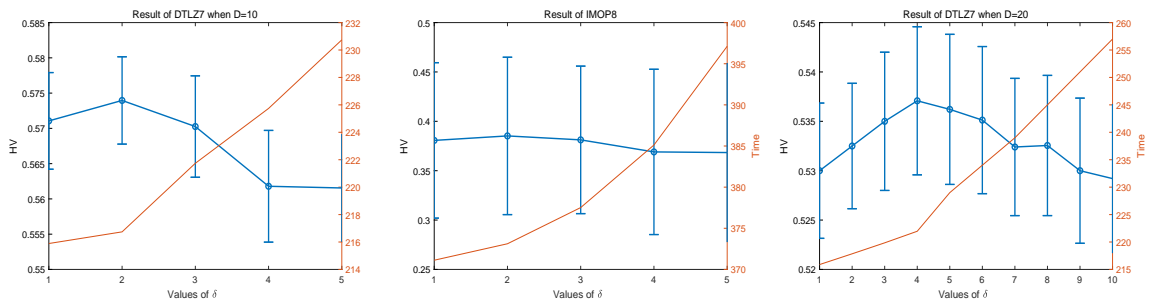


图 S1 不同 $\delta$ 下RV-DP-SAMOEa得到的HV 值与运行时间

Fig. S1 HV value and running time obtained by RV-DP-SAMOEa under different  $\delta$  values

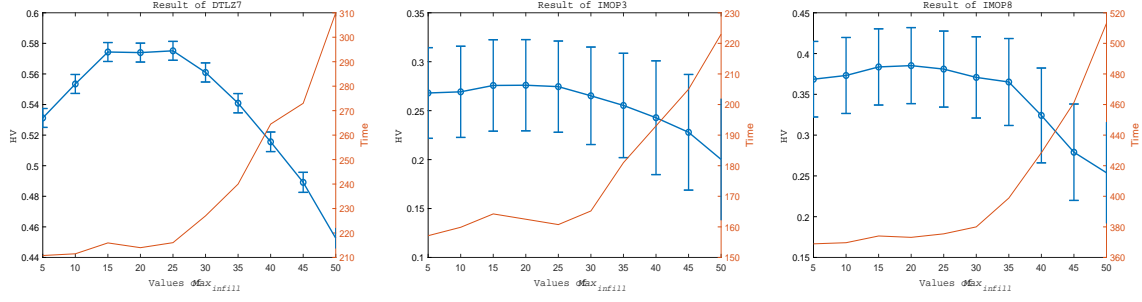


图 S2 不同 $Max_{infill}$ 下RV-DP-SAMOEA得到的HV 值与运行时间

Fig. S2 HV value and running time obtained by RV-DP-SAMOEA under different  $Max_{infill}$  values

图S1 给出了不同取值下RV-DP-SAMOEA的运行结果。从图S1 中可以看出：1) 针对所有3个测试问题，随着 $\delta$ 值的增大，算法的运行时间逐步增大。对于两个 $D = 10$ 的测试问题，当 $\delta > 2$ 时，时间上升更为明显；而对于 $D = 20$ 的DTLZ7 测试问题，当 $\delta > 4$ 时，时间上升更为明显；2) 在3个测试问题上，当 $\delta = 2 \lceil \lg(D) \rceil$ 时，RV-DP-SAMOEA 得到了最好的HV值。综合可见，当 $\delta = 2 \lceil \lg(D) \rceil$ 时，RV-DP-SAMOEA 在大部分测试问题上展现出了较优的性能。

### 2.2.2 参数 $Max_{infill}$ 分析

本部分选择DTLZ7、IMOP3、IMOP8等三个具有不同复杂程度PF的测试问题来验证参数 $Max_{infill}$ 对算法性能的影响，其中DTLZ7和IMOP3为2目标优化问题，IMOP8为3目标优化问题，决策变量维度 $D=10$ 。本节设置 $Max_{infill}$ 的取值范围为 $[5, 50]$ ，步长为5。在不同 $Max_{infill}$ 取

值下，统计RV-DP-SAMOEA 的HV值（均值与标准差）和运行时间（Time）。

图S2 给出了不同 $Max_{infill}$ 取值下RV-DP-SAMOEA 的运行结果。可以看出，1) 在3个测试问题上，随着 $Max_{infill}$ 的增长，算法运行时间总体上呈上升趋势。当 $Max_{infill}$ 在5-25之间取值时，算法运行时间仅在较小的范围内变化；然而，当 $Max_{infill} > 25$ 时，算法运行时间急剧上升；2) 在3个测试问题上，当 $Max_{infill}$ 在15-25之间取值时，RV-DP-SAMOEA可得到较好的HV值。如前所述，当 $Max_{infill} > 25$ 时，算法在每一轮迭代中调用过多次数的双种群搜索策略，导致其过度开发某些区域，进而降低了算法的性能。综合可见，当 $Max_{infill}$ 在15-25之间取值时，RV-DP-SAMOEA 展现出了较优的性能，本文设 $Max_{infill} = 20$ 。

### 2.3 RV-DP-SAMOEA与4种不规则PF多目标优化算法对比结果数据

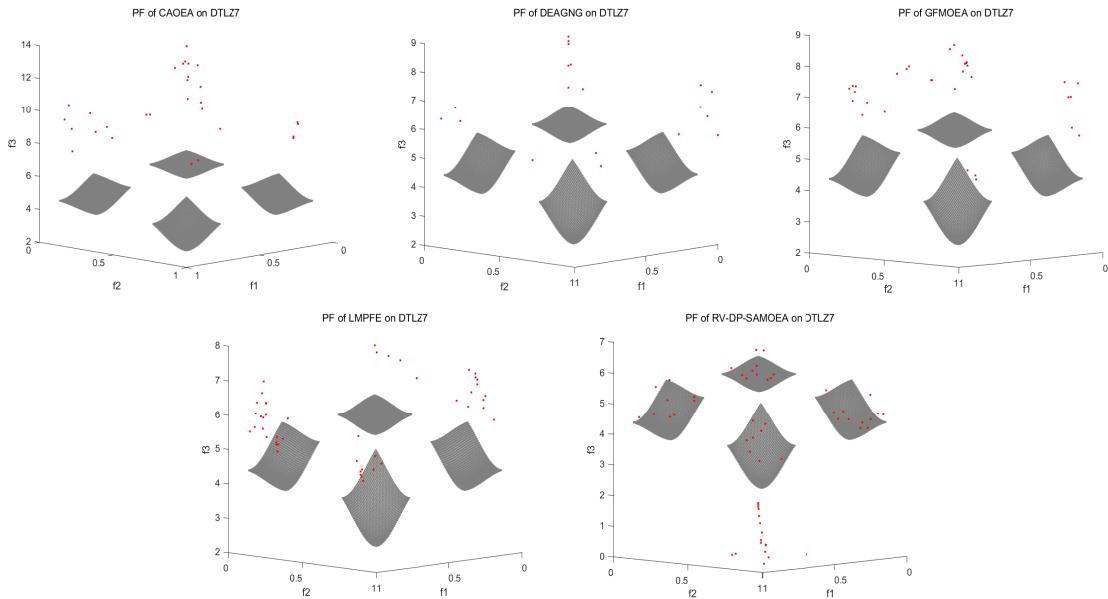


图 S3 RV-DP-SAMOEA与4种对比算法在DTLZ7上得到的非支配解

Fig. S3 The non-dominated solution of RV-DP-SAMOEA and four comparison algorithms on DTLZ7

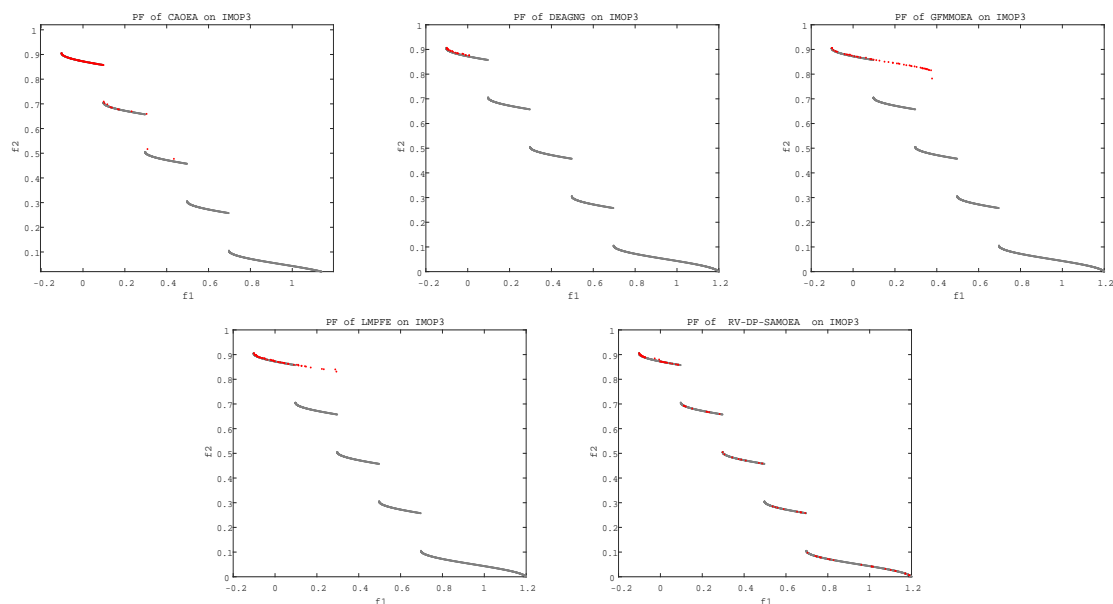


图 S4 RV-DP-SAMOE与4种对比算法在IMOP3上得到的非支配解

Fig. S4 The non-dominated solution of RV-DP-SAMOE and four comparison algorithms on IMOP3

## 2.4 RV-DP-SAMOE与6种代理辅助多目标优化算法对比结果数据

### 2.4.1 DTLZ类测试问题

表 S6 RV-DP-SAMOE与6种对比算法在DTLZ测试问题上得到的HV的均值（方差）

Table S6 Mean (variance) of HV values obtained by RV-DP-SAMOE and 6 comparison algorithms on DTLZs

Problem	M	AB-SAEA	EMMOEA	EDN-ARMOEA	MCEAD	PC-SAEA	REMO	RV-DP-SAMOE
DTLZ2	2	1.9124e-1	<b>3.4331e-1</b>	1.6248e-2	1.6541e-1	5.4777e-2	1.7208e-1	2.9625e-1
		7.39e-2+	1.73e-3-	1.15e-2+	9.60e-3+	3.94e-2+	2.24e-2+	1.88e-3
	3	2.4667e-1	2.4742e-1	3.6075e-4	2.0423e-1	4.5803e-2	1.9377e-1	<b>2.4941e-1</b>
		6.97e-2≈	3.16e-2≈	5.37e-4+	4.18e-2+	3.60e-2+	5.64e-2+	7.77e-2
DTLZ5	2	1.6251e-1	3.4115e-1	1.4740e-2	1.7129e-1	3.3485e-2	1.6272e-1	<b>3.5960e-1</b>
		2.85e-2+	2.94e-3≈	1.51e-2+	2.24e-2+	2.55e-2+	1.91e-2+	3.03e-1
	3	2.3804e-1	2.1541e-1	1.3520e-2	2.1504e-1	2.0234e-1	1.8757e-1	<b>2.6586e-1</b>
		1.18e-2+	2.89e-3+	8.06e-3+	2.72e-2+	1.74e-2+	1.22e-2+	3.63e-2
DTLZ7	2	1.8304e-1	1.9734e-1	1.2755e-2	/	/	1.0033e-1	<b>5.3708e-1</b>
		3.14e-2+	3.77e-2+	8.32e-3+	/	/	2.97e-2+	1.31e-2
	3	1.9459e-1	2.2629e-1	1.6158e-2	/	1.4861e-2	1.3412e-1	<b>5.6892e-1</b>
		3.79e-2+	3.49e-2+	1.03e-2+	/	1.78e-2+	2.32e-2+	1.17e-1
win/tie/lose		5/0/1	3/2/1	6/0/0	6/0/0	6/0/0	6/0/0	—



表 S7 RV-DP-SAMOEa与6种对比算法在DTLZ测试问题上得到的IGDV的均值（方差）

Table S7 Mean (variance) of IGD values obtained by RV-DP-SAMOEa and 6 comparison algorithms on DTLZs

Problem	M	AB-SAEA	EMMOEA	EDN- ARMOEA	MCEAD	PC-SAEA	REMO	RV-DP- SAMOEa
DTLZ2	2	1.1730e-1	<b>1.0608e-1</b>	5.0090e-1	1.6917e-1	2.7195e-1	1.1797e-1	1.1685e-2
		6.24e-2 $\approx$	2.30e-3 $\approx$	6.24e-2 +	2.10e-2 +	7.64e-2+	1.83e-2 $\approx$	5.25e-2
	3	2.2670e-1	1.4200e-1	7.4434e-1	3.1671e-1	1.8062e-1	2.8752e-1	<b>1.4722e-1</b>
		3.68e-2+	2.09e-2 $\approx$	4.85e-2+	5.60e-2+	2.08e-2+	4.72e-2+	1.02e-2
DTLZ5	2	1.3539e-1	1.0779e-1	4.9200e-1	1.5847e-1	3.2326e-1	1.3926e-1	<b>1.0820e-1</b>
		2.49e-2+	3.32e-3 $\approx$	4.49e-2+	3.01e-2 +	8.37e-2+	2.25e-2+	8.69e-2
	3	5.6753e-2	4.0366e-2	4.9584e-1	1.1071e-1	9.4965e-2	1.1538e-1	<b>3.8384e-2</b>
		7.66e-3+	4.69e-3 $\approx$	2.94e-2+	1.74e-2+	2.16e-2+	6.63e-3+	3.90e-2
DTLZ7	2	3.4086e-1	2.9928e-1	9.9448e-1	3.3967e+0	1.9770e+0	3.5514e-1	<b>2.9220e-1</b>
		2.23e-1+	2.51e-1 $\approx$	2.20e-1+	1.22e+0+	5.78e-1+	1.06e-1+	1.06e-1
	3	2.9523e-1	2.8942e-1	1.0111e+0	3.2980e+0	1.4115e+0	2.4787e-1	<b>2.9432e-1</b>
		2.51e-1 $\approx$	3.43e-1 $\approx$	4.54e-1+	7.07e-1+	6.68e-1+	6.82e-2+	2.63e-1
win/tie/lose		5/2/0	0/6/0	6/0/0	6/0/0	6/0/0	5/1/0	–

#### 2.4.2 WFG类测试问题

表 S8 当D=20时RV-DP-SAMOEa与6种对比算法在WFG测试问题上得到的HV的均值（方差）

Table S8 Mean (variance) of HV values obtained by RV-DP-SAMOEa and 6 comparison algorithms on WFGs when D=20

Problem	M	AB-SAEA	EMMOEA	EDN- ARMOEA	MCEAD	PC-SAEA	REMO	RV-DP- SAMOEa
WFG1	2	1.1501e-1	5.1446e-2	1.1594e-1	1.5964e-1	/	<b>1.8469e-1</b>	1.5046e-1
		3.98e-2+	5.16e-2+	1.99e-2+	5.85e-3 $\approx$		9.94e-3-	3.24e-2
	3	2.4358e-1	2.3994e-1	2.4934e-1	2.4804e-1	2.2859e-3	<b>2.8910e-1</b>	2.6254e-1
		1.24e-2+	1.33e-2+	5.17e-3+	7.28e-3+	1.98e-3+	3.70e-2-	4.01e-2
WFG2	2	4.5887e-1	<b>5.1092e-1</b>	3.6844e-1	4.3429e-1	4.2046e-1	4.4958e-1	5.0158e-1
		3.90e-2+	1.82e-2 $\approx$	1.71e-+	1.68e-2+	1.49e-2+	1.50e-2+	8.21e-3
	3	6.9980e-1	<b>7.6949e-1</b>	5.3965e-1	7.1792e-1	6.4496e-1	5.9715e-1	7.2541e-1
		5.72e-2+	9.54e-2-	1.32e-2+	4.99e-2 $\approx$	3.90e-3+	5.46e-2+	2.12e-1
WFG3	2	4.3725e-1	4.2883e-1	3.1333e-1	4.0248e-1	3.5154e-1	3.7513e-1	<b>4.6201e-1</b>
		1.81e-2+	1.90e-2+	1.09e-2+	2.56e-2+	8.52e-3+	2.98e-2+	<b>2.14e-1</b>
	3	2.1580e-1	3.1521e-1	1.3686e-1	1.7998e-1	1.5603e-1	2.0094e-1	<b>3.1985e-1</b>
		1.78e-2+	1.28e-2 $\approx$	8.67e-3+	2.39e-2+	1.35e-4+	1.76e-2+	2.31e-2
WFG4	2	2.2670e-1	2.3874e-1	1.9006e-1	2.3540e-1	2.3378e-1	2.3959e-1	<b>2.3992e-1</b>
		7.24e-3+	1.06e-2 $\approx$	6.07e-3+	1.43e-2 $\approx$	3.91e-3 $\approx$	1.43e-2 $\approx$	1.15e-2
	3	3.9368e-1	3.6779e-1	3.4127e-1	3.4085e-1	3.6484e-1	3.4785e-1	<b>3.9585e-1</b>
		1.51e-2 $\approx$	2.67e-2+	6.13e-3+	2.54e-2+	6.34e-3+	2.17e-2+	2.58e-2
WFG5	2	2.5440e-1	2.5609e-1	1.6413e-1	2.5364e-1	1.5993e-1	2.5356e-1	<b>2.5887e-1</b>
		8.80e-2 $\approx$	4.73e-2 $\approx$	6.10e-3+	1.38e-2 $\approx$	9.92e-3+	1.55e-2 $\approx$	1.90e-2
	3	3.5247e-1	4.1493e-1	2.3960e-1	3.4931e-1	2.6755e-1	3.2849e-1	<b>4.2341e-1</b>
		1.10e-2+	4.12e-2 $\approx$	6.80e-3+	2.10e-2+	1.04e-2+	1.18e-2+	2.37e-2
WFG6	2	1.3511e-1	<b>1.6002e-1</b>	7.3918e-2	1.7164e-1	1.2082e-1	1.4312e-1	2.0214e-1
		1.15e-2+	2.95e-2+	3.02e-3+	1.51e-2+	5.27e-3+	1.78e-2+	3.89e-2
	3	1.8041e-1	3.7555e-1	1.2739e-1	1.8748e-1	2.0518e-1	1.5817e-1	<b>3.6930e-1</b>
		1.41e-2+	8.85e-3-	3.11e-3+	4.46e-2+	1.00e-2+	2.91e-2+	3.08e-2
WFG7	2	<b>1.9922e-1</b>	1.8584e-1	1.2212e-1	1.9613e-1	1.7384e-1	1.7301e-1	1.9943e-1

		<b>8.59e-3</b> ≈	1.37e-2+	2.98e-3+	1.04e-2≈	1.29e-2+	1.89e-2+	6.01e-2
	3	<b>3.2186e-1</b>	3.6273e-1	2.2802e-1	2.9476e-1	2.8265e-1	2.9860e-1	3.7060e-1
		1.60e-2+	1.26e-2≈	4.96e-3+	3.36e-2+	3.00e-3+	1.55e-2+	2.88e-2
WFG8	2	1.6059e-1	2.1192e-1	1.2139e-1	1.4304e-1	1.4235e-1	1.5273e-1	<b>1.6395e-1</b>
		1.56e-2≈	1.48e-2-	5.17e-3+	6.14e-3+	1.36e-2+	7.83e-3+	<b>8.06e-2</b>
	3	2.2086e-1	<b>3.0898e-1</b>	3.1083e-1	2.1579e-1	2.4489e-1	2.1530e-1	3.1009e-1
		1.56e-2+	3.10e-2≈	8.95e-3≈	1.64e-2+	9.43e-3+	1.56e-2+	9.34e-2
WFG9	2	1.5972e-1	2.0348e-1	1.0281e-1	1.4632e-1	1.4974e-1	2.1003e-1	<b>2.6110e-1</b>
		3.18e-2+	4.28e-2+	1.34e-2+	9.39e-3+	1.25e-2+	4.11e-2+	1.98e-2
	3	2.4758e-1	3.3784e-1	1.9399e-1	2.4921e-1	2.4123e-1	2.5866e-1	<b>3.3912e-1</b>
		4.02e-2+	2.34e-2≈	1.47e-2+	1.49e-2+	1.23e-2+	3.17e-2+	2.01e-2
win/tie/lose		14/4/0	7/8/3	17/1/0	13/5/0	17/1/0	14/2/2	–

表 S9 当D=20时RV-DP-SAMOEa与6种对比算法在WFG测试问题上得到的IGD的均值（方差）  
Table S9 Mean (variance) of IGD values obtained by RV-DP-SAMOEa and 6 comparison algorithms on WFGs when D=20

Problem	M	AB-SAEA	EMMOEA	EDN- ARMOEa	MCEAD	PC-SAEA	REMO	RV-DP- SAMOEa
WFG1	2	1.2270e+0	1.2769e+0	1.3426e+0	1.2237e+0	1.2288e+0	<b>1.1919e+0</b>	1.3069e+0
		5.84e-2-	1.56e-1≈	3.34e-2+	1.52e-2-	6.48e-2-	3.70e-2-	5.12e-2
	3	1.6072e+0	1.5872e+0	1.6358e+0	1.5274e+0	2.0455e+0	<b>1.4573e+0</b>	1.5716e+0
		5.30e-2≈	4.11e-2≈	6.39e-3≈	1.87e-2≈	3.07e-2+	9.59e-2-	3.58e-2
WFG2	2	4.4759e-1	<b>3.3325e-1</b>	6.5784e-1	6.0951e-1	3.8949e-1	4.4903e-1	4.0804e-1
		6.95e-2+	6.25e-2-	5.67e-2+	1.50e-1+	2.70e-2-	2.47e-2+	7.58e-2
	3	5.3295e-1	<b>3.8954e-1</b>	9.2093e-1	8.3783e-1	6.4157e-1	7.7486e-1	3.0543e-1
		1.54e-1+	1.36e-1-	4.08e-2+	2.94e-1+	2.93e-2+	1.46e-1+	3.92e-2
WFG3	2	<b>2.7685e-1</b>	3.1080e-1	5.7026e-1	3.6198e-1	4.5128e-1	4.1880e-1	4.2415e-1
		<b>4.26e-2-</b>	3.30e-2-	3.24e-2+	4.99e-2-	2.09e-2+	5.60e-2≈	3.26e+2
	3	4.4690e-1	3.4843e-1	6.7603e-1	5.1735e-1	6.2255e-1	4.4115e-1	<b>3.4257e-1</b>
		4.72e-2+	7.04e-2+	3.13e-2+	6.03e-2+	3.15e-2+	3.74e-2+	5.54e-2
WFG4	2	2.0906e-1	2.4632e-1	3.8506e-1	3.2019e-1	2.4345e-1	2.7325e-1	<b>2.0851e-1</b>
		3.07e-2≈	1.52e-2+	1.94e-2+	5.42e-2+	7.13e-3+	5.78e-2+	1.31e-2
	3	4.5981e-1	4.5960e-1	5.3182e-1	5.9905e-1	4.4607e-1	4.9128e-1	<b>4.3584e-1</b>
		2.29e-2+	3.56e-2+	1.57e-2+	8.62e-2+	9.79e-3+	4.21e-2+	2.38e-2
WFG5	2	3.1858e-1	1.0345e-1	4.1347e-1	2.3197e-1	3.8042e-1	2.7256e-1	<b>1.0173e-1</b>
		2.18e-1+	8.04e-2≈	2.68e-2+	4.26e-2+	3.71e-2+	6.76e-2+	2.59e-2
	3	4.9247e-1	<b>2.3695e-1</b>	7.1071e-1	5.4646e-1	6.3568e-1	5.0138e-1	3.8542e-1
		3.62e-2+	<b>7.67e-2-</b>	2.44e-2+	4.78e-2+	1.55e-2+	2.87e-2+	3.24e-2
WFG6	2	4.0458e-1	<b>3.5949e-1</b>	6.9271e-1	4.0322e-1	4.7117e-1	4.0075e-1	3.984e-1
		2.68e-2≈	6.88e-2-	4.78e-2+	4.74e-2≈	2.26e-2+	4.52e-2≈	5.41e-2
	3	6.0576e-1	<b>2.4449e-1</b>	8.5282e-1	6.1477e-1	7.9769e-1	6.1170e-1	2.3851e-1
		2.90e-2+	2.28e-2≈	1.31e-2+	1.23e-1+	2.45e-2+	4.93e-2+	1.6504e+3
WFG7	2	3.3378e-1	3.3515e-1	4.9051e-1	3.5594e-1	3.4507e-1	4.4075e-1	<b>3.2512e-1</b>
		2.03e-2≈	1.74e-2+	1.54e-2+	6.62e-1+	1.84e-2+	3.52e-2+	1.55e-2
	3	5.0261e-1	5.3616e-1	6.7441e-1	6.2330e-1	6.0364e-1	5.0599e-1	<b>4.6712e-1</b>
		3.58e-2+	2.14e-2+	1.63e-2+	1.06e-1+	1.34e-2+	4.48e-2+	2.84e-2
WFG8	2	4.4261e-1	<b>3.4666e-1</b>	6.2364e-1	5.4518e-1	4.3527e-1	5.0522e-1	3.5057e-1
		1.74e-2+	<b>3.71e-2≈</b>	4.61e-2+	4.82e-2+	3.50e-2+	3.78e-2+	2.34e-2
	3	7.0105e-1	<b>4.9785e-1</b>	8.1258e-1	8.8053e-1	7.1525e-1	7.0466e-1	5.8131e-1
		3.02e-2+	<b>6.22e-2-</b>	2.96e-2+	4.28e-2+	2.12e-2+	4.32e-2+	8.15e-2
WFG9	2	4.3200e-1	3.2943e-1	2.8506e-1	4.5522e-1	4.0177e-1	2.8135e-1	<b>2.7693e-1</b>
		6.44e-2+	7.89e-2+	1.94e-2≈	3.56e-2+	3.02e-2+	1.00e-1≈	4.70e-2

	3	6.5230e-1	5.1394e-1	6.1644e-1	6.4855e-1	7.1761e-1	6.4168e-1	<b>4.9813e-1</b>
		1.10e-1+	7.46e-2 $\approx$	4.86e-2+	4.35e-2+	2.97e-2+	8.69e-2+	<b>3.54e-2</b>
win/tie/lose		12/4/2	8/5/5	16/2/0	15/2/1	16/0/2	13/3/2	—

### 2.4.3 IMOP类测试问题

表 S10 RV-DP-SAMOEa与6种对比算法在IMOP测试问题上得到的HV的均值（方差）

Table S10 Mean (variance) of IGD values obtained by RV-DP-SAMOEa and 6 comparison algorithms on IMOPs

Problem	M	AB-SAEA	EMMOEA	EDN- ARMOEA	MCEAD	PC-SAEA	REMO	RV-DP- SAMOEa
IMOP1	2	5.2851e-1	8.5269e-1	1.2411e-1	2.5306e-1	1.6865e-1	2.0957e-1	<b>8.694e-1</b>
		1.12e-1+	1.91e-2 $\approx$	2.00e-2+	1.26e-1+	1.82e-2+	1.40e-1+	3.01e-1
IMOP2	2	8.8552e-2	9.0848e-2	7.6712e-2	7.5269e-2	7.8699e-2	7.7259e-2	<b>1.0985e-1</b>
		1.44e-3+	2.75e-5+	2.21e-3+	3.67e-3+	8.32e-4+	3.13e-3+	1.98e-2
IMOP3	2	2.7070e-1	1.8967e-1	1.0588e-1	1.4703e-1	9.4291e-2	1.4333e-1	<b>2.7598e-1</b>
		5.93e-2 $\approx$	7.08e-2+	9.99e-3+	6.56e-2+	1.69e-2+	3.40e-2+	4.66e-2
IMOP4	3	4.0669e-2	3.2740e-2	2.5803e-2	9.9591e-2	3.0826e-2	3.4495e-2	<b>1.0858e-1</b>
		2.05e-3+	5.30e-3+	2.27e-3+	1.06e-1+	1.72e-3+	2.40e-3+	7.20e-2
IMOP5	3	4.0483e-1	4.5460e-1	2.4950e-1	2.6730e-1	3.2465e-1	4.9595e-1	<b>4.9596e-1</b>
		8.31e-2+	1.33e-2+	2.43e-3+	2.56e-2+	6.02e-2+	1.84e-2 $\approx$	7.28e-2
IMOP6	3	<b>2.2093e-1</b>	2.1446e-1	7.3862e-2	1.8066e-1	1.0386e-1	8.9586e-2	2.1898e-1
		9.99e-2 $\approx$	2.68e-2 $\approx$	6.49e-3+	7.53e-2 $\approx$	1.49e-2+	8.44e-3+	1.95e-2
IMOP7	3	9.0927e-2	9.1325e-2	7.6389e-2	9.1756e-2	8.7666e-2	8.9928e-2	<b>1.3259e-1</b>
		1.78e-5+	1.14e-3	6.94e-3+	1.73e-3+	3.22e-3+	1.18e-3+	5.13e-2
IMOP8	3	1.5936e-1	3.3848e-1	1.0836e-1	1.0451e-1	1.2116e-1	1.3370e-1	<b>3.8521e-1</b>
		3.42e-2+	1.18e-1+	1.71e-2+	1.76e-2+	1.09e-2+	3.69e-2+	6.33e-2
win/tie/lose		6/2/0	6/2/0	8/0/0	7/1/0	8/0/0	7/1/0	—



表 S11 RV-DP-SAMOEa与6种对比算法在IMOP测试问题上得到的IGD的均值(方差)

Table S11 Mean (variance) of IGD values obtained by RV-DP-SAMOEa and 6 comparison algorithms on IMOPs

Problem	M	AB-SAEA	EMMOEA	EDN-ARMOEA	MCEAD	PC-SAEA	REMO	RV-DP-SAMOEa
IMOP1	2	2.8671e-1 5.19e-2+	1.5453e-1 1.63e-2 $\approx$	7.7567e-1 2.05e-2+	6.1438e-1 1.78e-1+	7.3189e-1 1.80e-2+	7.0167e-1 1.19e-1+	<b>1.9732e-1</b> 2.00e-1
IMOP2	2	7.1564e-1 1.31e-1+	7.7407e-1 1.83e-2+	6.2107e-1 3.64e-2+	6.4284e-1 3.81e-2+	6.2758e-1 3.42e-2+	7.4094e-1 2.83e-2+	<b>3.0022e-1</b> 2.11e-1
IMOP3	2	4.5367e-1 1.16e-1+	5.0108e-1 8.69e-2+	7.0978e-1 9.44e-2+	5.9969e-1 2.10e-1+	7.4334e-1 4.67e-2+	6.0577e-1 1.28e-1+	<b>2.2901e-1</b> 1.18e-1
IMOP4	3	7.0217e-1 3.21e-3+	7.2719e-1 2.27e-2+	7.5961e-1 1.12e-2+	5.0518e-1 2.82e-1+	7.3035e-1 1.09e-2+	3.1842e-1 8.80e-3+	<b>2.8112e-1</b> 7.52e-2
IMOP5	3	4.7627e-1 1.33e-1+	<b>2.8742e-1</b> 9.69e-3-	7.1299e-1 1.68e-5+	6.9414e-1 3.57e-2+	6.0293e-1 8.52e-2+	5.5388e-1 8.09e-2+	3.4214e-1 8.53e-2
IMOP6	3	<b>3.8121e-1</b> 1.16e-1-	5.2406e-1 1.77e-2+	7.2180e-1 8.22e-2+	4.3933e-1 8.24e-2 $\approx$	5.3341e-1 2.67e-2+	5.8117e-1 9.23e-2+	4.3465e-1 5.13e-2
IMOP7	3	9.3559e-1 1.70e-3+	9.1890e-1 1.84e-2+	9.2451e-1 5.28e-3+	9.1419e-1 1.78e-2+	9.0925e-1 1.60e-2+	9.2050e-1 1.25e-2+	<b>5.6210e-1</b> 6.24e-2
IMOP8	3	5.7957e-1 3.76e-2+	3.9630e-1 1.26e-1 $\approx$	6.4068e-1 8.21e-2+	7.1336e-1 5.80e-2+	6.5611e-1 9.09e-2+	5.8730e-1 1.29e-1+	<b>3.9064e-1</b> 8.01e-2
win/tie/lose		7/0/1	5/2/1	8/0/0	7/1/0	8/0/0	8/0/0	—