

# El teorema de Seifert - Van Kampen

Abeijón Malvaez Sara  
Castellanos Muñoa Horacio  
Pérez Robles Martín Salvador  
Reyes de la Luz Luis Manuel  
Rodríguez Matta Alejandro

5 de febrero 2021

## 0.1. Introducción

El teorema de Seifert - van Kampen, el cual recibe su nombre por los matemáticos Herbert Seifert y Egbert van Kampen, nos ayuda a expresar la estructura del grupo fundamental de un espacio topológico  $X$  en términos de dos subespacios abiertos y conectables por trayectorias que cubren a  $X$ .

## 0.2. Grupos y grupo fundamental

A continuación introduciremos el concepto de grupo, el cual nos será útil para la demostración

**Definición 0.2.1.** (*Grupo*) Un grupo es una categoría  $\mathcal{G}$  en la que todos los elementos de  $\text{Obj}(\mathcal{G})$  (a veces también denotado como  $G_0$ ) y de  $\text{Mor}(\mathcal{G})$  son conjuntos (i.e. 'small category') y en la que todo elemento de  $\text{Mor}(\mathcal{G})$  es un isomorfismo, es decir invertible. Por lo tanto un grupo está equipado con la composición  $\circ$  y el inverso  $^{-1}$  de isomorfismos.

Sea  $X$  un espacio topológico, de las clases de homotopía de  $X$  obtenemos una categoría  $\Pi(X)$  en la cual los objetos son los puntos de  $X$ . Por lo tanto, un morfismo de  $x$  a  $y$  es una clase de homotopía relativa a  $\{0, 1\}$  de trayectorias de  $x$  a  $y$ . En este caso, una trayectoria constante representa a la identidad. Si  $u$  es una trayectoria de  $x$  a  $y$ ,  $v$  una trayectoria de  $y$  a  $z$ , definimos al producto como  $u * v$ , donde  $u * v$  es la trayectoria de  $x$  a  $z$ . La composición de isomorfismos está dada por  $[u] \circ [v] = [u * v]$ . En esta categoría, todo morfismo  $[u]$  tiene un inverso dado por  $[u^{-1}]$ , por lo tanto podemos concluir que  $\Pi(X)$  es un grupo, el cual se conoce como el grupo fundamental de  $X$ .

## 0.3. Relación con el grupo fundamental

Para establecer una relación entre el grupo fundamental y el grupo fundamental, es pertinente recurrir a definiciones

**Definición 0.3.1.** (*Grupo de automorfismos*) Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $X$  un elemento de  $\text{Obj}(\mathcal{C})$ , definimos al grupo de automorfismos de  $X$  como el grupo que consiste de todos los morfismos invertibles de  $X$  a  $X$ .

Por lo tanto, podemos ver al grupo fundamental de la siguiente manera:

**Definición 0.3.2.** Sea  $X$  espacio topológico y sea  $\Pi(X)$  el grupoide fundamental de  $X$ , entonces el grupo de automorfismos de  $x \in X$  corresponde al grupo fundamental  $\pi_1(X, x)$ .

Es natural preguntarse cuando el grupo fundamental y el grupoide fundamental son equivalentes como categorías, para responder a esta interrogante, a continuación se presentarán una serie de resultados (de los cuales se omite la prueba) y de definiciones que nos serán de utilidad para llegar a ese punto.

**Definición 0.3.3.** (Subcategoría completa 'full subcategory') Una subcategoría  $\mathcal{D}$  de una categoría  $\mathcal{C}$  es completa si para todo par  $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ ,  $\text{Mor}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ , es decir, es una subcategoría que incluye algunos objetos, sin embargo incluye todos los morfismos entre estos objetos.

**Definición 0.3.4.** (Esqueleto) Un esqueleto  $\mathcal{D}$  es una subcategoría completa de una categoría  $\mathcal{C}$  donde:

1. Cada elemento de  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  es isomorfo a algún elemento de  $\text{Obj}(\mathcal{D})$ .
2. Para dos elementos  $D, D' \in \text{Obj}(\mathcal{D})$  Si  $D$  y  $D'$  son isomorfos, entonces  $D = D'$ .

**Proposición 0.3.1.** El esqueleto de una categoría  $\mathcal{C}$  es único salvo isomorfismo.

**Proposición 0.3.2.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría, entonces  $\mathcal{C}$  es equivalente a su esqueleto.

Es pertinente recordar que la equivalencia de categorías es una propiedad distinta al isomorfismo, en general dos categorías son equivalentes si sus esqueletos son isomorfos. Es decir, son isomorfas salvo una familia de elementos.

**Proposición 0.3.3.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría en donde todos los elementos de  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  son isomorfos, entonces el esqueleto de  $\mathcal{C}$  es una categoría con un solo elemento.

Por lo anterior, tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 0.3.4.** Sea  $X$  un espacio topológico conectable por trayectorias, entonces para cada punto  $x \in X$ , la inclusión  $\pi_1(X, x) \rightarrow \Pi(X)$  es una equivalencia de categorías.

*Demostración.* Sea  $X$  conexo por trayectorias. Entonces,  $\pi_1(X, x)$  cumple la propiedad de invariancia del punto base. Por otro lado, dado que  $X$  es conexo por trayectorias, podemos definir un functor  $F: \Pi(X) \rightarrow \pi_1(X, x)$ , donde para cada morfismo  $[f]$  en  $\Pi(X)$ , que representa una clase de homotopía de caminos de un punto  $y$  a  $y'$ , le asignamos un elemento  $F([f]) \in \pi_1(X, x)$  dado por  $[u_y * f * u_{y'}^{-1}]$ , donde  $[u_y]$  y  $[u_{y'}]$  son las clases de homotopía por trayectorias de  $x$  a  $y$  y de  $x$  a  $y'$ , respectivamente. Sea  $J: \pi_1(X, x) \rightarrow \Pi(X)$  el functor que define la inclusión.

Tenemos que  $J$  y  $F$  definen una equivalencia de categorías entre  $\pi_1(X, x)$  y  $\Pi(X)$ . Para demostrar esto, verificamos que  $J \circ F$  y  $F \circ J$  son las identidades en sus respectivas categorías.

Para cualquier clase de homotopía de un lazo basado en  $x$  en  $\pi_1(X, x)$ ,  $J(F([f]))$  debe ser  $[f]$ . Esto sigue directamente de las definiciones:  $J$  mapea el lazo  $[u_y * f * u_{y'}^{-1}]$  en  $\pi_1(X, x)$  a la clase de homotopía de  $f$  en  $\Pi(X)$ , que es precisamente  $[f]$ . Por lo tanto,  $J \circ F$  es el functor identidad en  $\Pi(X)$ .

Para cualquier lazo basado en  $x$  en  $\pi_1(X, x)$ ,  $F(J([f]))$  debe ser  $[f]$ . Esto se debe a que  $J([f])$  mapea el lazo  $[f]$  a  $\pi_1(X, x)$ , y luego  $F$  mapea este lazo de vuelta a la clase de homotopía  $[f]$  en  $\pi_1(X, x)$ . Así,  $F \circ J$  es el functor identidad en  $\pi_1(X, x)$ .

Dado que  $J \circ F$  y  $F \circ J$  son los funtores identidad en sus respectivas categorías,  $J$  y  $F$  definen una equivalencia de categorías. Por lo tanto,  $\pi_1(X, x)$  es una subcategoría equivalente a  $\Pi(X)$ , es decir, un esqueleto. □

A continuación se enunciará y demostrará el teorema de Seifert - van Kampen.

## 0.4. El teorema de Seifert - van Kampen

Por los resultados anteriores, es posible concluir que el grupo fundamental es un caso particular del grupoide fundamental, por lo tanto es posible dar una demostración para grupoides. Es también que por esto, el grupoide fundamental  $\Pi(X)$  cumple la propiedad de functorialidad, es decir, el grupoide fundamental es un functor que va de la categoría **TOP** a la categoría **GRPD**, es decir la categoría de grupoides, de esta forma es posible construir diagramas conmutativos y enunciar el siguiente teorema, probado por el matemático Ronald Brown.

**Teorema 0.4.1.** (Ronald Brown) Sea  $X_0$  y  $X_1$  subespacios de  $X$  tal que sus interiores cubren a  $X$ . Denotamos a  $X_0 \cap X_1$  como  $X_{01}$ . Sean  $i_v: X_{01} \rightarrow X_v$  y  $j_v: X_v \rightarrow X$  con  $v = 0, 1$  las inclusiones. Entonces:

$$\begin{array}{ccc}
\Pi(X_{01}) & \xrightarrow{\Pi(i_0)} & \Pi(X_0) \\
\Pi(i_1) \downarrow & & \downarrow \Pi(j_0) \\
\Pi(X_1) & \xrightarrow{\Pi(j_1)} & \Pi(X)
\end{array}$$

Es un pushout en la categoría de grupoides.

*Demostración.* Sea  $h_v : \Pi(X_v) \rightarrow \Lambda$  el funtor en un grupoide tal que  $h_1(\Pi(i_1)) = h_0(\Pi(i_0))$ . Vamos a demostrar que existe un único funtor  $\lambda : \Pi(X) \rightarrow \Lambda$  tal que  $h_1 = \lambda \Pi(j_1)$  y  $h_0 = \lambda \Pi(j_0)$ . Es decir tendríamos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\Pi(X_{01}) & \xrightarrow{\Pi(i_0)} & \Pi(X_0) \\
\Pi(i_1) \downarrow & & \downarrow \Pi(j_0) \\
\Pi(X_1) & \xrightarrow{\Pi(j_1)} & \Pi(X)
\end{array}
\begin{array}{l}
\searrow h_0 \\
\downarrow \exists! \lambda \\
\swarrow h_1
\end{array}
\Lambda$$

Primero veamos un par de observaciones.

1. Una trayectoria  $\omega : [a, b] \rightarrow U$  representa un morfismo  $[\omega] \in \Pi(U)$  de  $\omega(a)$  a  $\omega(b)$  si lo componemos con un homeomorfismo creciente  $\alpha : I \rightarrow [a, b]$ .

$$I \xrightarrow{\alpha} [a, b] \xrightarrow{\omega} U$$

una reparametrización.

2. Si consideramos una partición de  $[a, b]$ ,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ , entonces  $\omega$  representa la composición (concatenación) de los morfismos  $[\omega \mid [t_i, t_{i+1}]]$

Supongamos que  $\omega : I \rightarrow U$  es una trayectoria, entonces existe una partición  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m+1} = 1$  tal que  $\omega([t_i, t_{i+1}])$  está contenido en algún abierto  $X_v^\circ$ . Sea  $\gamma : \{0, 1, \dots, m\} \rightarrow \{0, 1\}$  un reordenamiento tal que  $\omega([t_i, t_{i+1}]) \subseteq X_{\gamma(i)}^\circ$ . Consideremos  $\omega \mid [t_i, t_{i+1}] = \omega_i$  como trayectoria en  $X_{\gamma(i)}^\circ$

$$[\omega] = \Pi(j_{\gamma(m)})[\omega_m] \circ \dots \circ \Pi(j_{\gamma(0)})[\omega_0].$$

Si  $\lambda$  existe, entonces

$$\lambda[\omega] = h_{\gamma(m)}[\omega_m] \circ \cdots \circ h_{\gamma(0)}[\omega_0] \quad (1)$$

es decir,  $\lambda$  está determinada de forma única. Esta definición es ya que queremos que los triangulos conmuten (ie,  $h_0 = \Pi(j_0) \circ \lambda$  y  $h_1 = \Pi(j_1) \circ \lambda$ )

Veamos la existencia de  $\lambda$ , primero definiremos  $\lambda[\omega]$  como en 1, es decir, nos fijamos en la partición y despues en el reordenamiento. Veamos que está bien definida, por la conmutatividad de  $h_1(\Pi(i_1)) = h_0(\Pi(i_0))$  muestra que la elección de  $\gamma$  no altera el resultado. Esto quiere decir que si  $\omega([t_1, t_{i+1}]) \subseteq X_0^\circ \cap X_1^\circ$ , entonces  $\gamma$  puede tomar el valor 0 o 1, pero  $h_1(\Pi(i_1))[\omega_i] = h_0(\Pi(i_0))[\omega_i]$ . Por lo tanto  $\lambda$  esta bien definida.

Como  $h_1$  y  $h_0$  son funtores, obtenemos el mismo resultado si redefinimos la descomposición del intervalo.

Queda demostrar que 1 solo depende de la clase de homotopía de la trayectoria.

Sea  $H : I \times I \rightarrow X$  una homotopía entre trayectorias de  $x$  a  $y$ , entonces existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $H$  manda a cada subintervalo  $[i/n, (i+1)/n] \times [j/n, (j+1)/n]$  en uno de los conjuntos  $X_v^\circ$ .

**Nota:** Esto lo podemos hacer ya que  $I \times I$  es compacto y métrico. Tomamos para toda  $t \in I \times I$ ,  $H(t) \in X$ , en particular  $H(t) \in X_v^\circ$ , como es abierto, tomamos  $U_t$  abierto que contiene a  $H(t)$ . Como  $H$  es continua y  $I \times I$  métrico existe  $\varepsilon_t > 0$  tal que  $H(B_{\varepsilon_t}(t)) \subseteq U_t \subseteq X_v^\circ$ . Esto para toda  $t \in I \times I$ , por lo tanto al ser compacto, existe una subcubierta finita  $\{B_{\varepsilon_{t_i}}(t_i)\}_{i=1}^k$ . Tomamos  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $1/n < \min\{\varepsilon_i \mid i = \{1, \dots, k\}\}$ . Esta  $n$  es la buscada.

Consideremos arista-trayectorias en la subdivisión de  $I \times I$  que difieren por un subcuadro como se muestra en la Figura 1

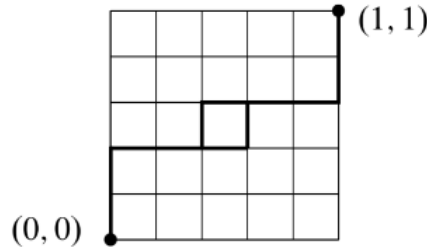


Figura 1: Arista-trayectorias que difieren por un subcuadro. Para  $n = 5$ .

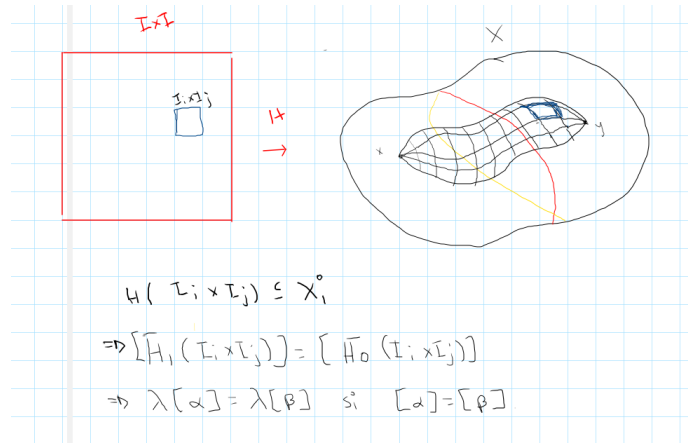


Figura 2: Homotopía entre  $x$  y  $y$ .

aplicamos  $H$  y obtenemos dos trayectorias en  $X$ . Lo que nos produce lo mismo que en 1 ya que solo difieren por una homotopía en algún subintervalo tal que su imagen se queda contenida en alguno de los abiertos  $X_v^o$ , es decir, si nos fijamos solo en el cuadrito donde difieren, la restricción de  $H$  a ese cuadro nos induce una homotopía en las imágenes de los extremos, lo cual nos dice que las dos clases son iguales, y por lo tanto  $\lambda$  también lo es.

Los cambios de este tipo nos permiten pasar inductivamente de la  $H$  en la parte inferior a la  $H$  en la trayectoria del límite superior desde  $(0,0)$  a  $(1,1)$ . Estos caminos difieren de  $H_0$  y  $H_1$  por composición con un recorrido constante. Esto se muestra en la Figura 3.

Por lo tanto  $\lambda$  es el funtor buscado.  $\square$

**Teorema 0.4.2.** (Seifert - van Kampen) Sean  $X_0$  y  $X_1$  subespacios de  $X$  tal que los interiores cubren a  $X$ . Sean  $i_v: X_{01} \rightarrow X_v$  y  $j_v: X_v \rightarrow X$  las inclusiones. Supongamos que  $X_0, X_1$  y  $X_{01}$  son conectables por trayectorias con punto base  $* \in X_{01}$ . Entonces:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_{01}, *) & \xrightarrow{i_{1*}} & \pi_1(X_1, *) \\ i_{0*} \downarrow & & \downarrow j_{1*} \\ \pi_1(X_0, *) & \xrightarrow{j_{0*}} & \pi_1(X, *) \end{array}$$

Es un pushout en la categoría de grupos.

**Demostración.** Obtendremos el Teorema de Seifert - Van Kampen como una consecuencia fácil del Teorema de Brown. Consideremos en general un espacio  $Z$  co-

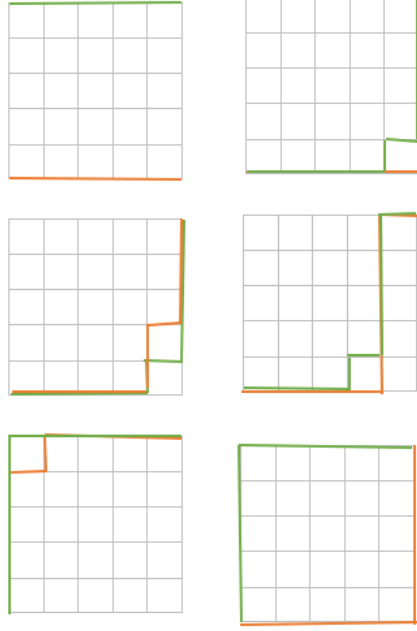


Figura 3: Pasos para pasar de  $H_0$  a  $H_1$

nectable por trayectorias y  $z_0 \in Z$ . Como vimos, el funtor inducido por la inclusión  $J: \pi_1(Z, z_0) \rightarrow \Pi(Z)$  tiene una retracción  $r: \Pi(Z) \rightarrow \pi_1(Z, z_0)$  gracias a que  $Z$  es conectable por trayectorias. Esto es,  $r \circ J$  es el funtor identidad de la categoría de grupos en sí misma.

Para cada  $z \in Z$  escogemos un morfismo  $[f_x]$  de  $x$  a  $z$  tal que  $[f_z] = id$ . Entonces  $r$  le asocia a cada  $\alpha: x \rightarrow y$  un morfismo dado por  $[f_y] \circ \alpha \circ [f_x]^{-1} \in \pi_1(X, x)$ . Aplicamos esto cuando  $Z$  es alguno de los espacios  $X_{01}, X_0, X_1, X$  (todos con punto base  $*$ ) y escogemos un morfismo  $[f_x] \in \Pi(Z)$  cada vez que  $x$  esté contenido en  $Z$ . De esta manera obtenemos un diagrama de funtores:

$$\begin{array}{ccccc}
 \Pi(X_0) & \longleftarrow & \Pi(X_{01}) & \longrightarrow & \Pi(X_1) \\
 r_0 \downarrow & & r_{01} \downarrow & & \downarrow r_0 \\
 \pi_1(X_0, *) & \longleftarrow & \pi_1(X_{01}, *) & \longrightarrow & \pi_1(X_1, *)
 \end{array}$$

Dado un grupo  $G$  y homomorfismos  $\varphi_i: \pi_1(X_i, *) \rightarrow G$  con  $i = 0, 1, 01$  que coinciden en  $\pi_1(X_{01}, *)$ , componemos con  $r_i$  y aplicamos el Teorema de Brown para obtener un funtor  $\Pi(X) \rightarrow G$ .



Su restricción a  $\pi_1(X, *)$  es el único homomorfismo de la definición de pushout.  $\square$

Observemos que la prueba del Teorema de Brown muestra que cada morfismo en  $\Pi(X)$  es una composición de morfismos en  $\Pi(X_0)$  y  $\Pi(X_1)$ . En la prueba que acabamos de ver, de manera semejante,  $\pi_1(X, *)$  es generado por las imágenes de  $j_{0*}$  y  $j_{1*}$ . Esto no era evidente de la definición de pushout.

## 0.5. Aplicaciones del teorema de Seifert - van Kampen

**Ejemplo 0.5.1.** *Calcularemos el grupo fundamental de  $S^1 \vee S^1$ . Tenemos que una forma descomponer a  $S^1 \vee S^1$  es la siguiente:*

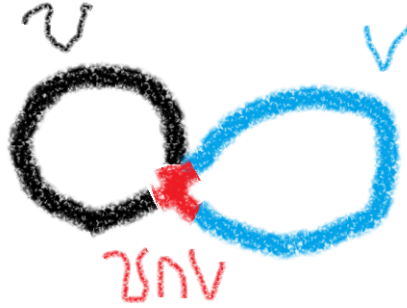


Figura 4: Descomposición de  $S^1 \vee S^1$

Donde tenemos que  $U \simeq S^1$  y  $V \simeq S^1$  por lo tanto  $\pi_1(U) = \pi_1(V) = \mathbb{Z}$ . De igual manera podemos ver que  $U \cap V$  es una región en forma de cruz, la cual es contraíble, por lo tanto  $\pi_1(U \cap V) = \{e\}$ . Entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \{e\} = \pi_1(U \cap V) & \xrightarrow{g} & \pi_1(U) = \mathbb{Z} = \langle b \rangle \\ f \downarrow & & \\ \pi_1(V) = \mathbb{Z} = \langle a \rangle & & \end{array}$$

Entonces, usando el teorema de Van Kampen tenemos que  $\pi_1(S^1 \vee S^1) = \pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V)$ , es decir, el producto amalgamado. Como  $\pi_1(U \cap V)$  es el grupo trivial, entonces induce una relación  $g(1) = f(1)$ , la cual es trivial, por lo tanto  $\pi_1(S^1 \vee S^1) = \langle a, b \rangle = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ . Es decir, el grupo libre con dos generadores.

**Ejemplo 0.5.2.** Calcularemos el grupo fundamental del toro  $\mathbb{T}_2$ . Podemos dividir al toro de manera más sencilla usando el diagrama que regularmente se usa cuando se estudia la topología cociente.

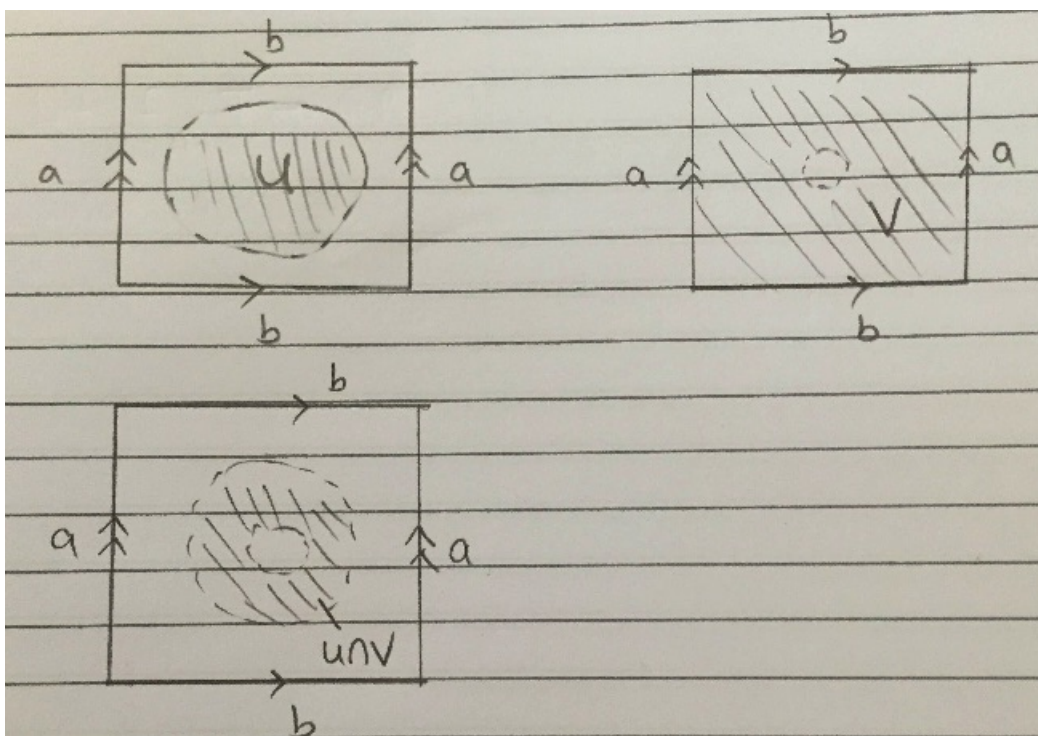


Figura 5: Descomposición de  $\mathbb{T}_2$

Tenemos que  $U$  es igual a un disco,  $V$  corresponde al cuadrado menos un disco y  $U \cap V = S^1$ . Por lo tanto  $\pi_1(U) = \{e\}$  ya que es contraíble y  $\pi_1(U \cap V) = \mathbb{Z}$ . Nos falta conocer  $\pi_1(V)$ . Para esto observemos la ilustración 7:



Figura 6: Deformación de  $\mathbb{T}_2$  menos un disco en  $S^1 \vee S^1$

Por lo tanto  $\pi_1(V) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ . Entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V) = \mathbb{Z} & \xrightarrow{g} & \pi_1(U) = \{e\} \\ f \downarrow & & \\ \pi_1(V) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} & & \end{array}$$

Entonces tenemos,  $\pi_1(U)$  no tiene generadores, ya que es el grupo trivial y  $\pi_1(V)$  tiene dos generadores libres. Para encontrar la relación inducida por el producto amalgamado tenemos lo siguiente,  $g([\gamma]) : \pi_1(U \cap V) \rightarrow \pi_1(V)$  envía al generador de  $\pi_1(V \cap U)$  al lazo  $a^{-1}b^{-1}ab$ , por lo tanto  $\pi_1(\mathbb{T}_2) = \langle a, b \mid a^{-1}b^{-1}ab = 1 \rangle$ . El cual es isomorfo a  $\mathbb{Z}^2$  o el grupo abeliano con dos generadores.

**Ejemplo 0.5.3.** Ejemplo 3. Definimos un nudo  $K$  como la imagen un encaje  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces  $K \cong f(S^1)$ . Decimos que dos nudos  $K_1, K_2$  son equivalentes si existe un homeomorfismo  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que preserva orientación y  $\phi(K_1) = K_2$ , este homeomorfismo, induce un homeomorfismo en sus complementos  $\phi : \mathbb{R}^3 - K_1 \rightarrow \mathbb{R}^3 - K_2$ . Con esto en mente observemos que dos nudos equivalentes, tienen complementos homeomorfos, motivando un invariante llamado **el grupo del nudo**.

**Definición 0.5.1.** Sea  $K$  un nudo, definimos el grupo de  $K$  como el grupo fundamental de su complemento, denotado como  $\pi(K) = \pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$ .

**Proposición 0.5.1.** El nudo de un grupo es un invariante de nudos, es decir, si  $K_1$  y  $K_2$  son nudos equivalentes, entonces  $\pi(K_1) \cong \pi(K_2)$

*Demostración.* Sea  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  el homeomorfismo, entonces el homeomorfismo  $\phi|_{\mathbb{R}^3 - K_1}$  induce un isomorfismo en el grupo  $(\phi|_{\mathbb{R}^3 - K_1})_* : \pi(K_1) \rightarrow \pi(K_2)$   $\square$

Nos restringiremos a calcular el grupo de un nudo tórico. Consideremos el encaje estandar del toro  $S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^3$ , queremos definir nudos en el toro, para ello debemos considerar un encaje  $f : S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ . Definamos  $f(z) = (z^m, z^n)$ .

**Proposición 0.5.2.** La función  $f(z) = (z^m, z^n)$  es un encaje si y solo si  $\text{mcd}(m, n) = 1$

*Demostración.* Como  $S^1$  es un compacto y  $S^1 \times S^1$  es Hausdorff, entonces si  $f$  es inyectiva, implica que  $f$  es un encaje. Así que basta probar que  $f$  es inyectiva si y solo si  $(m, n) = 1$ . Supongamos que  $(m, n) = 1$  entonces supongamos que para  $z = e^{2\pi i \theta}$ ,  $w = e^{2\pi i \eta}$  satisfacen  $f(z) = f(w)$ , entonces:

$$(z^m, z^n) = (w^m, w^n) \Rightarrow z^n = w^n, z^m = w^m$$

Resolver  $z^a = z^b$  implica  $z^{a-b} = 1$ , entonces  $e^{2\pi i(a-b)} = e^{2\pi i k}$  con  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces  $(a-b) \in \mathbb{Z}$ . Aplicando a nuestro caso, tenemos que  $m(\theta - \eta), n(\theta - \eta) \in \mathbb{Z}$ , entonces  $\theta - \eta = p/q$  con  $p, q$  enteros tal que  $(p, q) = 1$ , entonces  $q|m$  y  $q|n$  pero  $(m, n) = 1$  entonces  $q = 1$  y  $\theta - \eta = p \in \mathbb{Z}$ . Si suponemos  $\theta - \eta \geq 0$  y  $\theta, \eta \in [0, 1)$ , entonces  $\theta - \eta = 0$  y por lo tanto  $z = w$ .

Conversamente, supongamos que es inyectiva, debemos mostrar que  $(m, n) = 1$ . Supongamos por contradicción, sea  $1 < d = (m, n)$ , entonces  $1/d \in (0, 1)$  y  $m/d, n/d \in \mathbb{Z}$ , entonces:

$$(e^{2\pi i m}, e^{2\pi i n}) = (e^{2\pi i m/d}, e^{2\pi i n/d})$$

Implica que  $f$  no es inyectiva, pero esto es una contradicción, por lo tanto  $d = 1$ . □

**Definición 0.5.2.** Sea  $(m, n)$ , definimos el  $(m, n)$  nudo tórico, como la imagen del encaje  $f(z) = (z^n, z^m)$

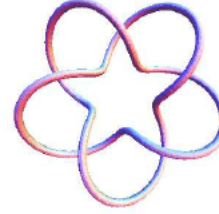
(3,2)



(4,3)



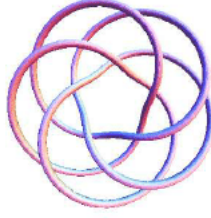
(5,2)



(5,3)



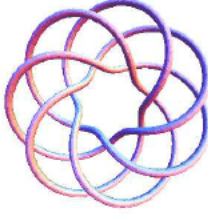
(5,4)



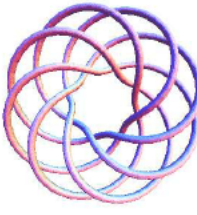
(7,2)



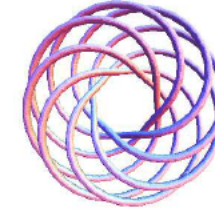
(7,4)



(8,5)



(8,7)

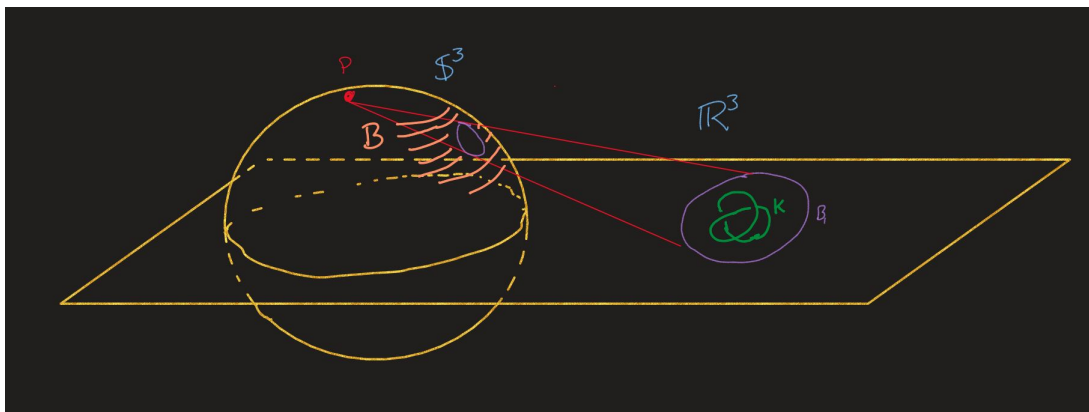


Para calcular el grupo de un nudo tórico, consideremos  $S^3$  como la compactación por un punto de  $\mathbb{R}^3$ . Tenemos la siguiente afirmación.

**Proposición 0.5.3.** Sea  $K$  un  $(m,n)$ -nudo tórico, entonces  $\pi_1(S^3 - K) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$

*Demostración.* Sea  $\phi : S^3 - p \rightarrow \mathbb{R}^3$  la proyección estereográfica que es un homeomorfismo, donde  $p$  es el polo norte de  $S^3$ . Sea  $U = \phi^{-1}(K) \subseteq S^3 - p$ . Definimos  $f : K \rightarrow U$  como  $f(z) = \phi^{-1}(z)$  y  $f^{-1} : U \rightarrow K$  por  $f^{-1}(z) = \phi(z)$ . Notemos que estas funciones son continuas por ser la restricción del homeomorfismo y por definición, es un homeomorfismo. Ahora usaremos el teorema de Van Kampen, para ello, sea  $B_1$  una bola cerrada en  $\mathbb{R}^3$  que contiene  $K$ , sea  $B = \phi^{-1}(\mathbb{R}^3 - B_1) \cup \{p\}$  entonces tenemos:

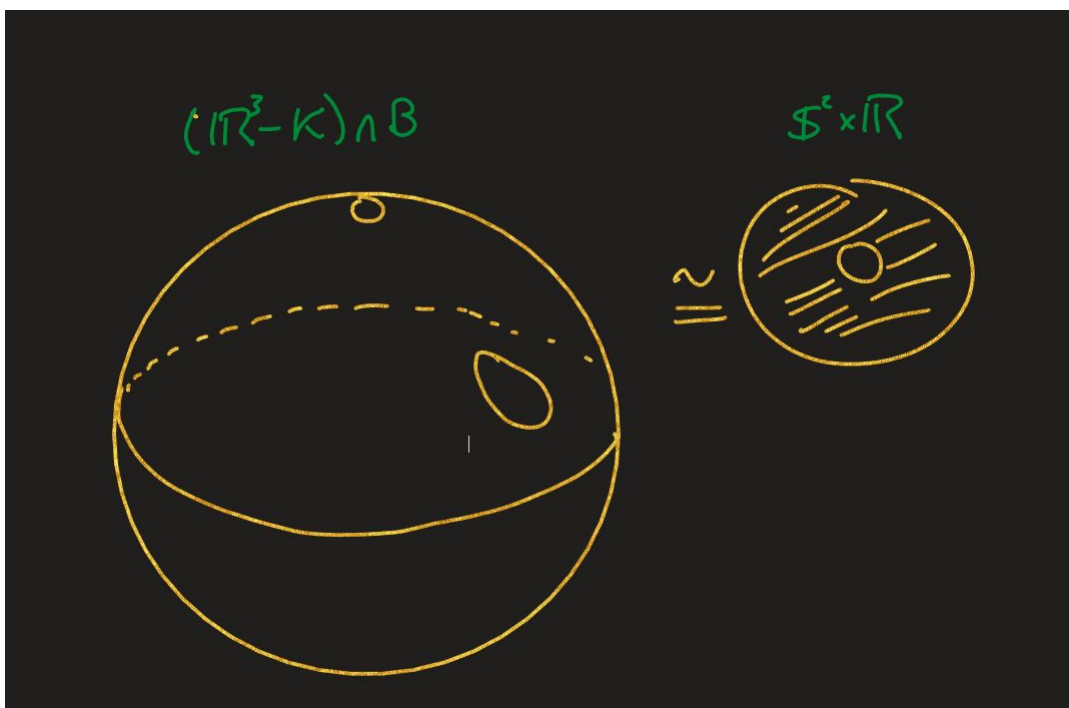
$$S^3 - U = (S^3 - \{p\}) - U \cup B$$



Pero  $S^3 - \{p\} \cong \mathbb{R}^3$  y  $U \cong K$  entonces:

$$S^3 - U \cong (\mathbb{R}^3 - K) \cup B$$

Y el espacio  $B = \phi^{-1}(\mathbb{R}^3 - B_1) \cup \{p\} \cong (\mathbb{R}^3 - B_1) \cup \{p\}$  pues  $\phi^{-1}(\mathbb{R}^3 - B_1) \cong \mathbb{R}^3 - B_1$ . Entonces  $(\mathbb{R}^3 - K) \cap B \cong S^2 \times \mathbb{R}$ .



Ciertamente  $\mathbb{R}^3 - K$ ,  $B$  y  $S^2 \times \mathbb{R}$  son abiertos y conexo por caminos. Tomemos un punto base  $x_0 \in S^2 \times \mathbb{R}$ , por el teorema de Van Kampen, tenemos:

$$\pi_1(S^3 - K) \cong \frac{\pi_1(\mathbb{R}^3 - K) * \pi_1(B)}{N}$$

Donde  $N$  es la clausura normal generado por  $i_1(g)i_2(g)^{-1} \in \pi_1(\mathbb{R}^3 - K) * \pi_1(B)$  con  $g \in \pi_1(S^2 \times \mathbb{R})$ . Por otro lado notemos que  $\pi_1(S^2 \times \mathbb{R}) \cong \pi_1(S^2) \times \pi_1(\mathbb{R})$ , pero sabemos que  $\pi_1(S^2) = \{e\}$  y  $\pi_1(\mathbb{R}) = \{e\}$ , por tanto  $\pi_1(S^2 \times \mathbb{R}) \cong \{e\}$ , mostrando que  $N \cong \{e\}$ , tambien como  $B \cong D^2$  que es contraible a un punto, entonces  $\pi_1(B) \cong \{e\}$ , por tanto  $\pi_1(S^3 - K) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 - K)$   $\square$

Con este resultado, ahora mostraremos que  $S^3 - K$  existe un retracto de deformación a un 2-complejo especial para el nudo tórico. Primero definamos el espacio  $X$ .

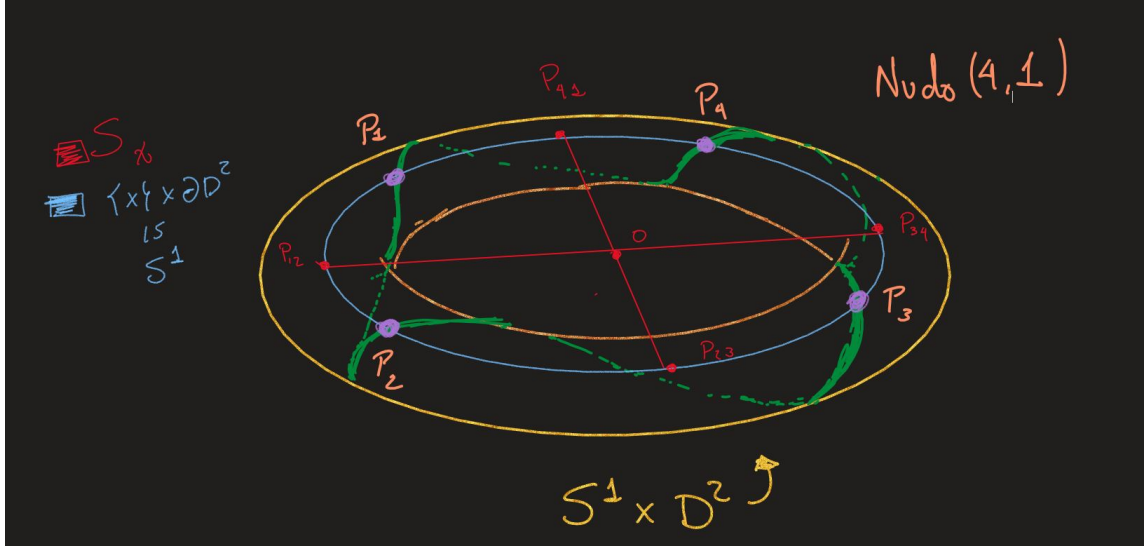
**Proposición 0.5.4.**  $S^3 \cong (D^2 \times S^1) \cup_{S^1 \times S^1} (S^1 \times D^2)$

*Demostración.* Usando que  $D^4 \cong [0, 1]^4 \cong [0, 1]^2 \times [0, 1]^2 \cong D^2 \times D^2$ , tenemos:

$$S^3 = \partial(D^4) \cong \partial(D^2 \times D^2) \cong (D^2 \times S^1) \cup_{S^1 \times S^1} (S^1 \times D^2)$$

$\square$

**Construcción de  $X_{m,n}$**  Identificaremos al primer toro sólido  $S^1 \times D^2$  con la región compacta de  $\mathbb{R}^3$  acotado por el toro estándar  $S^1 \times S^1$  que contiene a  $K$ . El segundo toro, es entonces la clausura del complemento del primer toro sólido junto con el punto  $p \in S^3$ . Consideremos el primer toro solido y sea  $x \in S^1$ . Entonces uno tiene el disco meridiano  $\{x\} \times D^2$ . Como  $f : S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$  es un encaje y como  $K$  viaja alrededor del torus un total de  $m$  veces en la dirección longitudinal, entonces el nudo  $K$  intersecta el círculo meridiano  $\{x\} \times \partial D^2$  en  $m$  puntos, digamos  $P_1, \dots, P_m$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, m-1\}$  sea  $P_{i(i+1)}$  el punto medio del arco  $\overline{P_i P_{i+1}}$  y sea  $P_{m1}$  el punto medio del arco  $\overline{P_m P_1}$  consideremos los segmentos  $OP_{i(i+1)}$  para cada  $i \in [1, m-1]$ , definimos  $S_x$  como la unión de todos estos segmentos y sea  $X_m = \bigcup_{x \in S^1} S_x$ , entonces el espacio  $X_m$  es el espacio trazado por todas las líneas cuando  $x$  corre bajo  $S^1$  perpendicular a  $S^1$  meridional. De manera analoga se define  $X_n$  y tenemos  $X = X_m \cup X_n$ . Por construcción  $X \subseteq S^3 - K$



La siguiente proposición muestra que  $X_m$  es el cilindro de aplicación de a función  $\alpha_m : S^1 \rightarrow S^1$  definido por  $\alpha_m(z) = z^m$ , similarmente  $X_n$  es el cilindro de aplicación de  $\alpha_n$ .

**Proposición 0.5.5.**  $X_m$  es homeomorfo al espacio cociente del cilindro  $S^1 \times [0, 1/2]$  bajo la identificación  $(z, 0) \sim (e^{\frac{2\pi i}{m}} z, 0)$ . De manera similar  $X_n$  es homeomorfo al espacio cociente del cilindro  $S^1 \times [1/2, 1]$  bajo la identificación  $(z, 1) \sim (e^{\frac{2\pi i}{n}} z, 1)$ .

Ahora mostraremos que  $S^3 - K$  tiene un retracts de deformación sobre  $X$ .

**Proposición 0.5.6.** Los espacios  $(S^1 \times D^2) - K$  y  $(D^2 \times S^1) - K$  tienen un retracts de deformación sobre  $X_m$  y  $X_n$  respectivamente.

**Teorema 0.5.1.** El grupo del  $(m, n)$ -nudo tórico es  $\langle a, b | a^m = b^n = e \rangle$

*Demostración.* Sea  $U$  una vecindad abierta de  $X_m$  y  $V$  una vecindad abierta de  $X_n$  tal que:

1.  $U$  y  $V$  tienen un retracts de deformación sobre  $X_m$  y  $X_n$  respectivamente:
2.  $U \cup V = X_{m,n}$

Los espacios  $U, V$  son conectable por trayectorias pues  $X_m$  y  $X_n$  lo son y ambos son homeomorfos al espacio cociente de un cilindro por la proposición 0.5.5. Como



$U, V$  son vecindades abiertas de  $X_m$  y  $X_n$  respectivamente, entonces  $U \cap V$  es una vecindad abierta de  $X_m \cap X_n$ . Tambien, por el hecho de que  $U$  y  $V$  son retratos de deformación sobre  $X_m$  y  $X_n$  respectivamente, entonces  $U \cap V$  es un retrato de deformación sobre  $X_m \cap X_n$ .

El espacio  $U \cap V$  es conectable por trayectorias, pues  $X_m \cap X_n$  es homeomorfo a una circunferencia. Sea  $x_0 \in U \cap V$  un punto base, por el teorema de Van Kampen tenemos:

$$\pi_1(X_{m,n}) \cong \frac{\pi_1(U) * \pi_1(V)}{N}$$

Donde  $N$  es el subgrupo normal generado por  $i_1(g)i_2(g)^{-1}$  y  $g \in \pi_1(U \cap V)$ . Por construcción tenemos que  $\pi_1(U) \cong \pi_1(X_m)$  y  $\pi_1(V) \cong \pi_1(X_n)$ . Pero como  $X_m$  es el cono de aplicación de  $\alpha_m : S^1 \rightarrow S^1$  y  $X_n$  es el cono de aplicación de  $\alpha_n$ . Entonces  $X_m$  y  $X_n$  son retratos de deformación de  $S^1$ . Por tanto  $\pi_1(X_m) \cong \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$  y  $\pi_1(X_n) \cong \pi_1(X_m) \cong \mathbb{Z}$ , por otro lado  $\pi_1(U \cap V) \cong \pi_1(S^1 \times \{1/2\}) \cong \mathbb{Z}$ . Tomemos  $\alpha$  un lazo en  $U \cap V$  que es un generador en su grupo fundamental, entonces  $\alpha$  es homotopico a un generador en  $U$  que representa  $m$  veces su generador, de manera similar para  $\pi_n(V)$ . Con esto en mente, tenemos que  $\alpha = i_1(g)i_2(g)^{-1} = a^m b^{-n}$ , entonces:

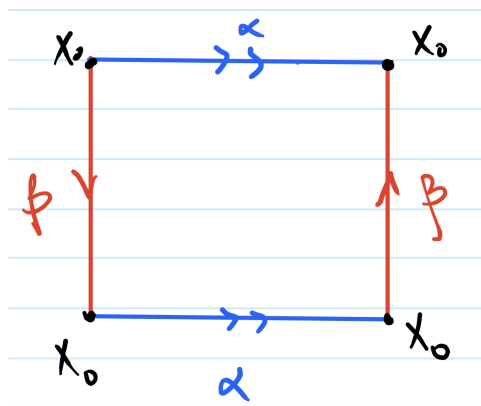
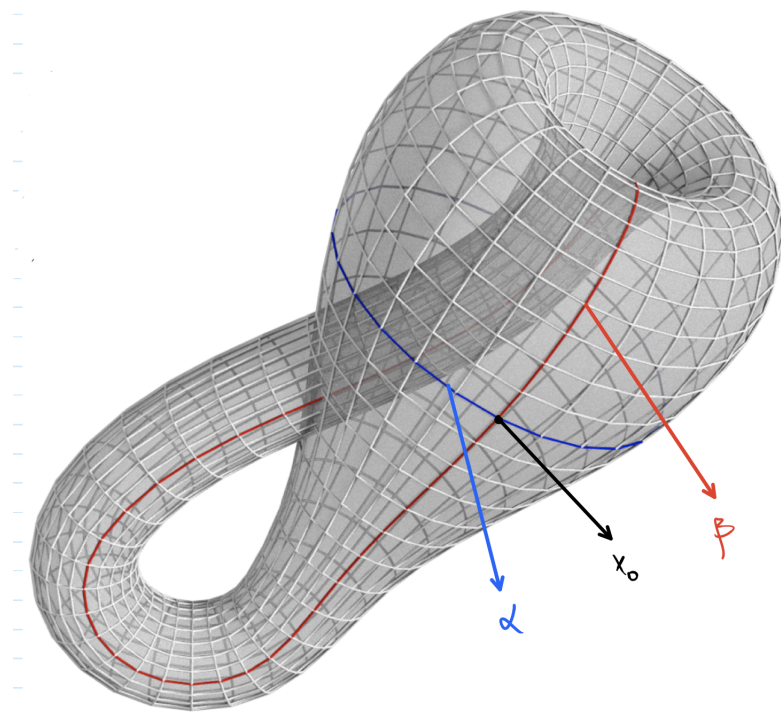
$$\pi_1(X_{m,n}) \cong \frac{\langle a \rangle * \langle b \rangle}{\langle a^m b^{-n} \rangle} = \langle a, b | a^m = b^n = e \rangle$$

Por las proposiciones anteriores concluimos que:

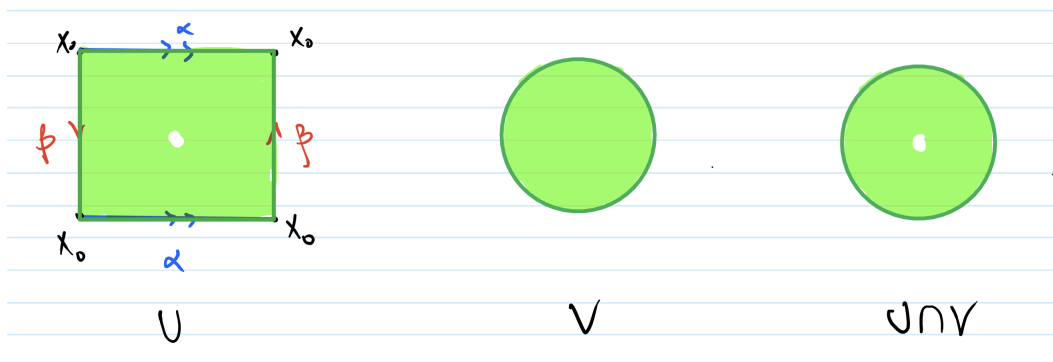
$$\pi(K) = \pi_1(\mathbb{R}^3 - K) \cong \pi_1(\mathbb{S}^3 - K) \cong \pi_1(X_{m,n}) \cong \langle a, b | a^m = b^n = e \rangle$$

□

**Ejemplo 0.5.4.** *Ejemplo 4 La botella de Klein, considere a  $\mathbb{K}^2$  y  $x_0 \in \mathbb{K}^2$ , la podemos representar como un cuadrado cuyos lados son lazos. Sean  $\alpha$  y  $\beta$  lazos basados en  $x_0$*



Considere  $U = K \setminus \{pt\}$  y  $V$  un disco abierto con centro en  $pt$ , así  $U \cap V$  es el disco abierto sin el centro  $pt$



$U$ ,  $V$  y  $U \cap V$  son conectables por trayectorias.

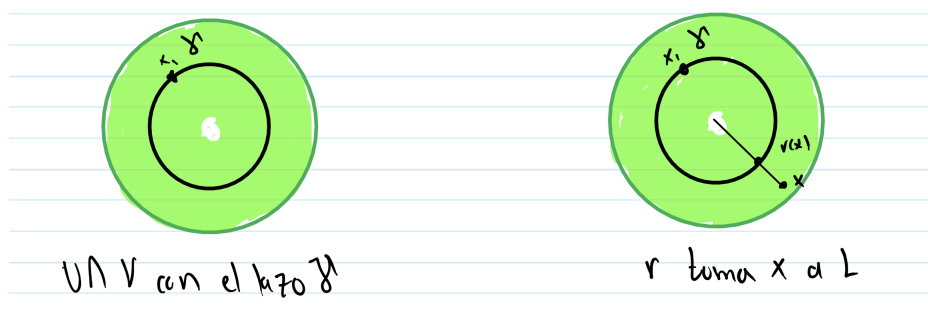
Para usar Seifert-Van Kampen, debemos calcular los grupos fundamentales.

Sea  $x_1 \in U \cap V$

1.  $\pi_1(V, x_1)$ : en particular  $x_1 \in V$ , luego todo lazo basado en  $x_1$  es homotópico al lazo constante  $C_{x_1}$  por tanto

$$\pi_1(V, x_1) = [C_{x_1}]$$

2.  $\pi_1(U \cap V, x_1)$ : sea  $\gamma \in \pi_1(U \cap V, x_1)$  y defina  $L = \langle \gamma \rangle$  y  $r: U \cap V \rightarrow L$  donde  $r$  toma a un punto  $x \in U \cap V$  y manda a  $r(x) \in L$  su único punto de intersección entre  $L$  y la línea determinada por el agujero.



Luego  $L$  es un detracto por deformación de  $U \cap V$  pues

$$H: U \cap V \times I \rightarrow U \cap V$$

definida como  $H(x, t) = (1 - t)x + tr(x)$  satisface:

$$H(x,0) = x, H(x,1) = r(x) \text{ y } H(a,t) = a \forall a \in L,$$

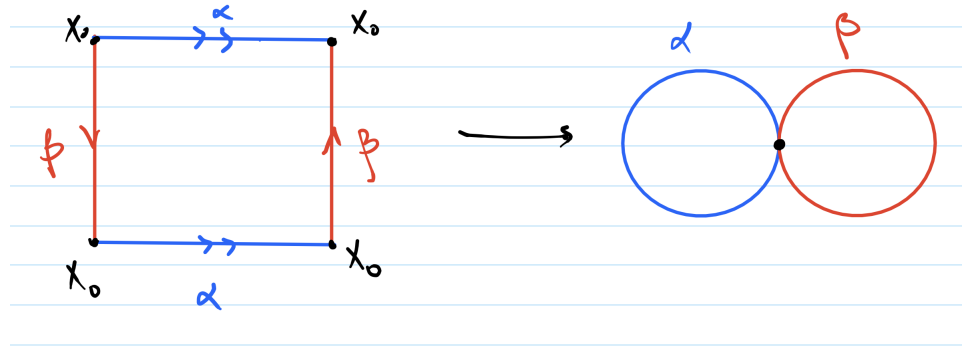
por tanto  $H$  es una homotopía entre  $r$  y la identidad tal que cada punto de  $L$  permanece fijo durante la homotopía. La función  $\iota: L \rightarrow U \cap V$  induce un isomorfismo entre  $\pi_1(L, x_1)$  y  $\pi_1(U \cap V, x_1)$ . Por tanto

$$\pi_1(U \cap V, x_1) \cong \pi_1(L, x_1) \cong \pi_1(S^1, x)$$

y

$$\pi_1(U \cap V, x_1) = \langle \gamma \rangle$$

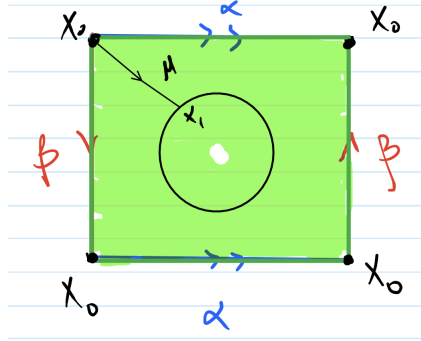
3.  $\pi_1(U, x_0)$ : sea  $F \subset I^2$  la frontera del cuadrado  $K$ , es un subespacio cuyos elementos son los cuatro lazos basados en  $x_0$ . Podemos definir la función proyección  $p: F \rightarrow B \subset V$  con  $p(\alpha) = \alpha$  y  $p(\beta) = \beta$  donde  $B = p(F)$



Como podemos identificar los cuatro puntos base  $x_0 \in F$  a un solo punto de  $B$ , tenemos que  $B$  está formado por el producto cuña de circunferencias, lazos basados en  $x_0$  y que es  $\pi_1(S^1 \vee S^1)$  por tanto

$$\pi_1(U, x_0) = \langle \alpha, \beta \rangle$$

Como  $U$  es c.p.t. entonces existe una trayectoria  $\mu$  tal que  $\mu(0) = x_0$  y  $\mu(1) = x_1$ , por una proposición tenemos que  $\mu$  induce un isomorfismo entre  $\pi_1(U, x_0)$  y  $\pi_1(U, x_1)$



Luego cada lazo basado en  $x_1$  se deforma en  $\beta\alpha\beta\alpha^{-1}$ , por tanto

$$\pi_1(U, x_0) = \langle \alpha, \beta | \beta\alpha\beta\alpha^{-1} = 1 \rangle$$

Sea  $\tau$  el isomorfismo inducido por  $\mu$ , entonces se tiene:

$$\begin{array}{ccccc} \pi(U \cap V, x_1) & \xrightarrow{i_*} & \pi(V, x_1) & \xrightarrow{j_*} & \pi(K, x_1) \\ & & \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\ & & \pi_1(V, x_0) & \xrightarrow{l_*} & \pi_1(K, x_0) \end{array}$$

$l_*$  es un homomorfismo inducido por la inclusión  $l: U \rightarrow K$ , y por la conmutatividad del diagrama  $l_*$  es suprayectiva con kernel igual al subgrupo normal generado por la imagen de  $i_* * \tau$

Por Seifert-Van Kampen:

$$\pi_1(K, x_0) \cong \langle \alpha, \beta | \beta\alpha\beta\alpha^{-1} = 1 \rangle$$

# Bibliografía

- Brown, Ronald (2006). *Topology and Groupoids*. Charleston, South Carolina, USA: BookSurge Publishing.
- Dieck, Tammo tom (2008). *Algebraic Topology*. Berlin, Germany: European Mathematical Society.
- Higgins, P. J. (1971). *Categories and Groupoids*. New York City, USA: Van Nostrand Reinhold.
- May, J. Peter (1999). *A Concise Course in Algebraic Topology*. Chicago, USA: University of Chicago Press.