ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA CƠ KHÍ
BỘ MÔN CƠ ĐIỆN TỬ

BÁO CÁO BÀI TẬP LỚN

ĐỘNG LỰC HỌC VÀ ĐIỀU KHIỂN

GVHD: PGS. TS. VÕ TƯỜNG QUÂN

SINH VIÊN THỰC HIỆN:

Họ và tên	**MSSV**
Đào Trọng Chân	2210350
Trần Quang Đạo	2210647
Võ Hữu Dư	2210604
Dương Quang Duy	2210497

TP.HCM, Ngày 28 tháng 4 năm 2025

Mục lục

Chương 1

MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC HỆ THỐNG

1.1 Giới thiệu

Động học của robot được mô tả bởi mô hình toán học nhằm giúp cho việc phát triển hệ thống điều khiển dễ dàng hơn cho robot cân bằng. Trong phần này, các phương trình chuyển động của xe hai bánh được đưa ra chi tiết.

1.2 Các ký hiệu sử dụng

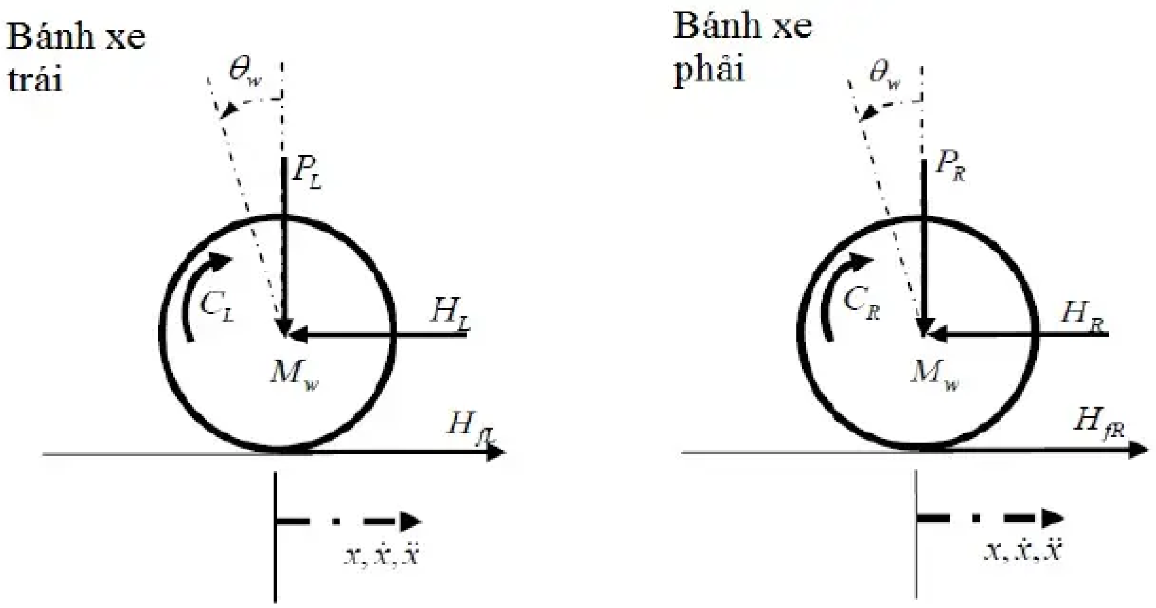
Ký hiệu	**Đại lượng**
x	Độ dịch chuyển (m)
$\dot{x}$	Tốc độ dịch chuyển (m/s)
θ	Góc nghiêng (rad)
$\dot{\theta}$	Tốc độ góc (rad/s)
V_a	Điện áp (V)
k_m	Hằng số moment quay động cơ
k_e	Hằng số sức phản điện động
R	Điện trở danh định
l	Khoảng cách giữa trọng tâm bánh xe và trọng tâm robot
g	Gia tốc trọng trường
M_p	Khối lượng khung
r	Bán kính bánh xe
I_p	Momen quán tính của khung
I_w	Momen quán tính của bánh xe
M_w	Khối lượng của bánh xe kết nối với hai phía của robot

Bảng 1.1: Bảng ký hiệu và đại lượng

1.3 Mô hình động lực học

Động năng

Bánh xe



Hình 1.1: Sơ đồ tự do của các bánh

Động năng tịnh tiến của 1 bánh xe

$$K_{w1} = \frac{1}{2} M_w \dot{x}^2 \tag{1.1}$$

Động năng quay của 1 bánh xe

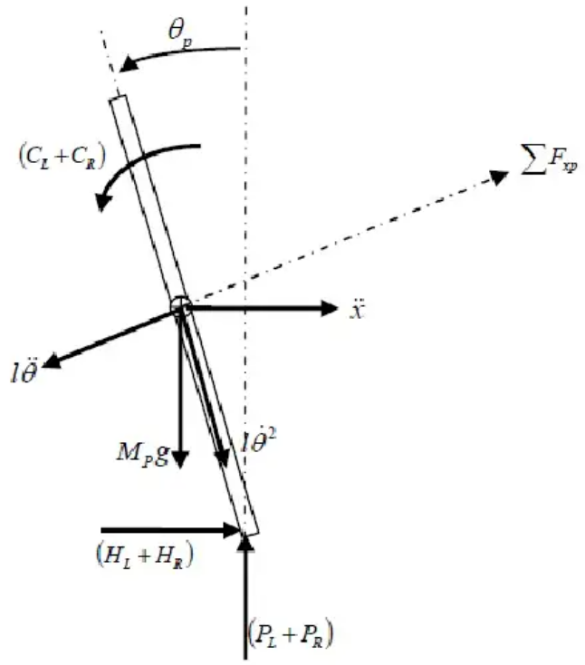
$$K_{w2} = \frac{1}{2} I_w \omega^2 = \frac{1}{2} I_w \frac{\dot{x}^2}{r^2} \tag{1.2}$$

Tổng động năng do chuyển động của 2 bánh xe

$$\begin{aligned} K_w &= 2 \cdot (K_{w1} + K_{w2}) \\ &= M_w \dot{x}^2 + \frac{I_w}{r^2} \dot{x}^2 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Khung xe (mô hình con lắc)

Cấu hình robot có thể được mô hình như một con lắc ngược



Hình 1.2: Sơ đồ tự do của con lắc ngược

Động năng quay của khung xe

$$K_{p1} = \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}^2 \tag{1.4}$$

Động năng tịnh tiến của khung xe

$$K_{p2} = \frac{1}{2} M_p v_c^2 \tag{1.5}$$

Chọn gốc tọa độ tại ví trí tâm bánh xe, tọa độ khối tâm của con lắc là

$$(x_c, y_c) = (x + \ell \sin(\theta), \ell \cos \theta) \tag{1.6}$$

Vận tốc khối tâm của khung xe

$$(V_{cx}, v_{cy}) = (\dot{x} + \ell\dot{\theta} \cos(\theta), -\ell\dot{\theta} \sin \theta) \tag{1.7}$$

Động năng tịnh tiến của khung xe

$$\begin{aligned} K_{p2} &= \frac{1}{2} M_p \left[(\dot{x} + \ell\dot{\theta} \cos(\theta))^2 + (-\ell\dot{\theta} \sin \theta)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} M_p \left[\dot{x}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + \ell^2 \dot{\theta}^2 \right] \end{aligned} \tag{1.8}$$

Tổng động năng của khung xe

$$K_p = K_{p1} + K_{p2} = \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M_p \left[\dot{x}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta} \cos \theta + \ell^2 \dot{\theta}^2 \right] \tag{1.9}$$

Do đó tổng động năng của hệ là

$$\begin{aligned} K = K_w + K_p &= M_w\dot{x}^2 + \frac{I_w}{r^2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_p\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M_p\left[\dot{x}^2 + 2\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \ell^2\dot{\theta}^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(2M_w + 2\frac{I_w}{r^2} + M_p\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(M_p\ell^2 + I_p\right)\dot{\theta}^2 + M_p\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta \\ &= \frac{1}{2}M_\Sigma\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + M_p\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta \end{aligned} \tag{1.10}$$

Với

$$\begin{aligned} M_\Sigma &= 2M_w + 2\frac{I_w}{r^2} + M_p \\ J &= M_p\ell^2 + I_p \end{aligned}$$

Thế năng

Thế năng của hệ khi khung xe nghiêng một góc θ_p so với phương thẳng đứng là:

$$V = M_p g\ell\cos\theta \tag{1.11}$$

Phương trình Lagrange

Phương trình Lagrange tổng quát cho cơ hệ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \tag{1.12}$$

Trong đó

- $L = K - V$: hàm Lagrange
- q_i: tọa độ suy rộng, trong phạm vi bài báo cáo ta có $q = [x\ \theta]^T$
- $\dot{q}_i$: đạo hàm theo thời gian của q_i
- Q_i: moment hoặc lực tổng quát (nếu có). Trong phạm vi bài báo cáo ta có $Q_i = [F_x\ \tau_\theta]$.

Hàm Lagrange

$$L = K - V = \frac{1}{2}M_\Sigma\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + M_p\ell\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta - M_p g\ell\cos\theta \tag{1.13}$$

Đối với tọa độ suy rộng x:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M_\Sigma\dot{x} + M_p\ell\dot{\theta}\cos\theta \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = M_\Sigma\ddot{x} + M_p\ell\ddot{\theta}\cos\theta - M_p\ell\dot{\theta}^2\sin\theta \\ &\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

Do đó

$$M_\Sigma \ddot{x} + M_p \ell \ddot{\theta} \cos\theta - M_p \ell \dot{\theta}^2 \sin\theta = F_x \tag{1.14}$$

Đối với tọa độ suy rộng θ:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J\dot{\theta} + M_p \ell \dot{x} \cos\theta \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = J\ddot{\theta} + M_p \ell \ddot{x} \cos\theta - M_p \ell \dot{x}\dot{\theta} \sin\theta \\
&\frac{\partial L}{\partial \theta} = -M_p \ell \dot{x}\dot{\theta} \sin\theta - M_p g \ell(-\sin\theta) = -M_p \ell \dot{x}\dot{\theta} \sin\theta + M_p g \ell \sin\theta
\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
J\ddot{\theta} + M_p \ell \ddot{x} \cos\theta - M_p \ell \dot{x}\dot{\theta} \sin\theta + M_p \ell \dot{x}\dot{\theta} \sin\theta - M_p g \ell \sin\theta = \tau_\theta \\
\Leftrightarrow J\ddot{\theta} + M_p \ell \ddot{x} \cos\theta - M_p g \ell \sin\theta = \tau_\theta
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Từ phương trình (1.13) và (1.15) ta có hệ

$$\begin{cases} M_\Sigma \ddot{x} + M_p \ell \ddot{\theta} \cos\theta - M_p \ell \dot{\theta}^2 \sin\theta = F_x \\ J\ddot{\theta} + M_p \ell \ddot{x} \cos\theta - M_p g \ell \sin\theta = \tau_\theta \end{cases} \tag{1.16}$$

Trong chương tiếp theo, ta sẽ tiến hành thiết kế và mô phỏng các bộ điều khiển dựa trên hàm truyền đã thu được.

Chương 2

KHẢO SÁT TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ THỐNG

Ta có hàm truyền đã tìm được ở trên là:

$$G(s) = \frac{4.85}{s^2 + 53.51}$$

Hệ vòng kín với phản hồi là:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

Phương trình đặc tính:

$$\begin{aligned} &1 + G(s) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{4.85}{s^2 + 53.51} = 0 \\ &\Leftrightarrow s^2 + 58.36 = 0 \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Hệ không ổn định do hệ số của s^1 là 0.

2.1 Biểu đồ Bode

$$G(s) = \frac{4.85}{s^2 + 53.51}$$

Phân tích:

- 1 khâu khuếch đại: K = 4.85.
- 1 khâu dao động bậc 2.

Tần số cộng hưởng:

$$\omega_n = \sqrt{53.51} = 7.315(rad/s)$$

Đặc tính tần số:

$$G_1(j\omega) = \frac{4.85}{-\omega^2 + 53.51}$$

Biên độ:

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{4.85}{|-\omega^2 + 53.51|}$$

$$\Rightarrow L(\omega) = 20log(M(\omega)) = 20log(4.85) - 20log(\left|-\omega^2 + 53.51\right|)$$

- Khi $0 < \omega < 7.315$: biên độ tăng từ -20.85dB đến $+\infty$
- Với $\omega > 7.315$:

$$\begin{aligned} &20log(4.85) - 20log(\left|-\omega^2 + 53.51\right|) \approx 20log(4.85) - 20log(\omega^2) \\ &= 20log(4.85) - 40log(\omega) \\ &\Rightarrow \text{Độ dốc giảm: } -40dB/decade \\ &\Rightarrow \text{Với } \omega > 7.315: \text{ biên độ giảm từ } +\infty \text{ về } -\infty \end{aligned}$$

Pha:

- $\omega < 7.314$: $-\omega^2 + 53.509 > 0$, pha $\angle G_1(j\omega) = 0°$,
- $\omega = 7.314$: $-\omega^2 + 53.509 = 0$, pha nhảy từ $0°$ xuống $-180°$,
- $\omega > 7.314$: $-\omega^2 + 53.509 < 0$, pha $\angle G_1(j\omega) = -180°$.

Tính độ dự trữ biên độ (GM):

- **Tìm tần số cắt pha** (ω_{pc}): Đây là tần số mà pha đạt $-180°$.
  - Từ phân tích pha, $\angle G_1(j\omega) = -180°$ khi $\omega \geq 7.314$.
  - Vậy $\omega_{pc} = 7.314$ rad/s.
- **Tính biên độ tại ω_{pc}:**

$$|G_1(j\omega_{pc})| = \left|\frac{4.848}{-(7.314)^2 + 53.509}\right| = \frac{4.848}{0} \to \infty$$

$$|G_1(j\omega_{pc})|_{dB} \to +\infty \text{ dB}$$

- **Độ dự trữ biên độ:**

$$\text{GM (dB)} = -20\log_{10}|G_1(j\omega_{pc})| \to -\infty \text{ dB}$$

Tính độ dự trữ pha (ϕ_M):

- **Tìm tần số cắt biên độ** (ω_{gc}): Đây là tần số mà $|G_1(j\omega)| = 1$ (0 dB).
  - Đặt $|G_1(j\omega)| = 1$:

$$\left|\frac{4.848}{-\omega^2 + 53.509}\right| = 1$$

  - Khi $\omega < 7.314$, $|-\omega^2 + 53.509| = 53.509 - \omega^2$, nên:

$$\frac{4.848}{53.509 - \omega^2} = 1 \Rightarrow 53.509 - \omega^2 = 4.848$$

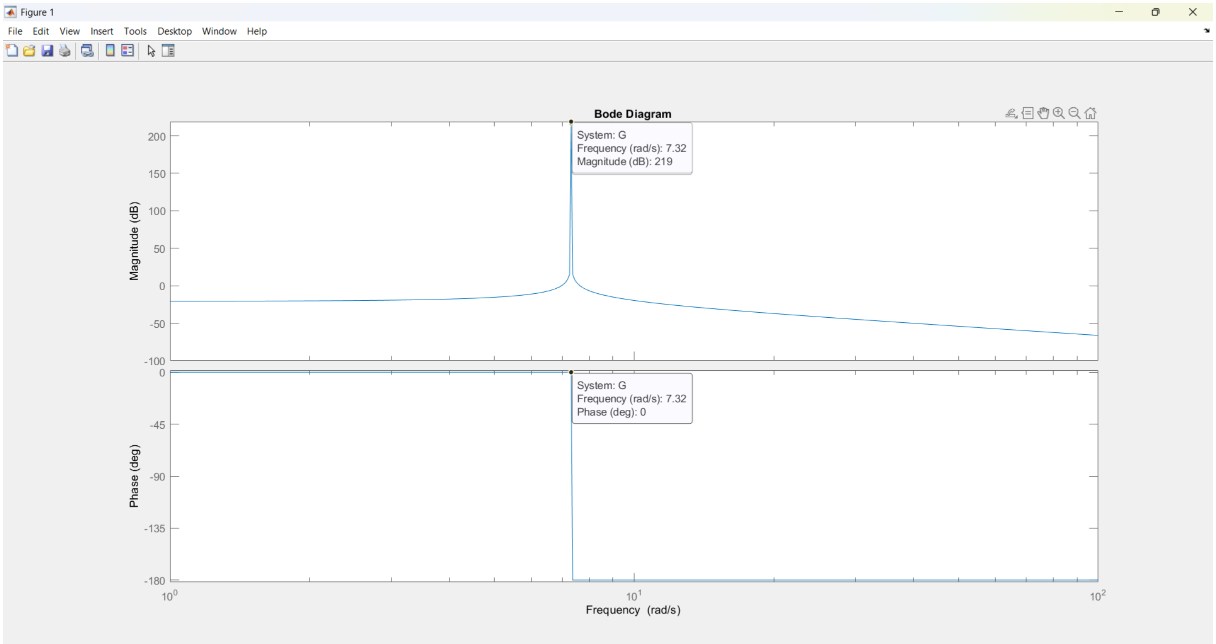
$$\Rightarrow \omega^2 = 53.509 - 4.848 = 48.661$$

$$\Rightarrow \omega_{gc} \approx \sqrt{48.661} \approx 6.976\,\text{rad/s}$$

- **Tính pha tại ω_{gc}:**
  Tại $\omega_{gc} = 6.976 < 7.314$, pha $\angle G_1(j\omega_{gc}) = 0°$.

- **Độ dự trữ pha:**

$$\phi_M = 180° + \angle G_1(j\omega_{gc}) = 180° + 0° = 180°$$



Nhận xét:

- Hệ thống vòng hở: G(s) có các cực trên trục ảo $s = + - 7.315$ nên hệ thống ổn định biên. Đồ thị Bode cho thấy biên độ đạt đỉnh tại $\omega = 7.315$ và pha nhảy xuống là $-180°$. Điều này xác nhận hệ thống dao động không giảm chấn.

- Từ độ thị ta có thể thấy độ dữ trữ pha $G_M < 0dB$ nên đã vi phạm tiêu chuẩn ổn định của biểu đồ Bode $\Rightarrow$ Hệ chưa ổn định.

Chương 3

THIẾT KẾ BỘ ĐIỀU KHIỂN CTC (Computed-Torque Control)

3.1 Tiêu chí thiết kế

Tiêu chí thiết kế:

- Settling time: $T_s < 4$s
- Overshoot: %OS $<$ 10%

Đối với hệ thống bậc 2, ta có:

$$T_s = \frac{4}{\omega_n}, \quad \%OS = 100e^{\left(-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}\right)}$$

Hệ số giảm chấn ζ tính từ %OS:

$$\zeta = \frac{-\ln\left(\frac{\%OS}{100}\right)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{\%OS}{100}\right)}} = 0.5911$$

Chọn $\zeta = 0.7$
Suy ra:

$$\omega_n > \frac{4}{\zeta T_s} = \frac{4}{0.7 \cdot 4} = 1.42857$$

Chọn $\omega_n = 1.5$ (rad/s)

3.2 Computed-Torque Control

Từ hệ phương trình (1.16), ta đưa về dạng tổng quát

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \tag{3.1}$$

Trong đó

- $q = [x \ \theta]^T$: vector trạng thái
- $M(q)$: ma trận quán tính

- $C(q, \dot{q})$: ma trận Coriolis và ly tâm
- $G(q)$: vector trọng lực
- τ: moment xoắn điều khiển từ động cơ

Ta được

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_\Sigma & M_p\ell\cos\theta \\ M_p\ell\cos\theta & J \end{bmatrix}}_{M(q)} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -M_p\ell\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C(q,\dot{q})} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -M_p g\ell\sin\theta \end{bmatrix}}_{G(q)} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_x \\ \tau \end{bmatrix}}$$

Định nghĩa lỗi theo dõi

$$\begin{aligned} e(t) &= q_d(t) - q(t) \\ \dot{e}(t) &= \dot{q}_d(t) - \dot{q}(t) \\ \ddot{e}(t) &= \ddot{q}_d(t) - \ddot{q}(t) \end{aligned}$$

Ta có thể viết lại

$$\ddot{e} = \ddot{q}_d(t) + M^{-1}(C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) - \tau)$$

Đặt tín hiệu điều khiển u trở thành

$$u = \ddot{q}_d(t) + M^{-1}(C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) - \tau) \tag{3.2}$$

Ở đây giả sử cho nhiễu môi trường

$$\tau_d = 0$$

Khi đó

$$\ddot{e} = u$$

Từ phương trình (2.1), moment xoắn đầu ra được tính như sau

$$\tau = M(q)(\ddot{q}_d - u) + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) \tag{3.3}$$

Giả sử chọn u như là một bộ điều khiển PD, ta có

$$u = -K_p e - K_d \dot{e}$$

Với K_p và K_d là ma trận điều khiển tỉ lệ và vi phân tương ứng. Khi đó phương trình (2.3) trở thành

$$\tau = M(q)(\ddot{q}_d + K_p e + K_d \dot{e}) + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) \tag{3.4}$$

Phương trình vòng kín của lỗi động lực học

$$\ddot{e} + K_p e + K_d \dot{e} = 0 \tag{3.5}$$

Trong không gian trạng thái

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix}$$

Phương trình đặc trưng

$$s^2 + K_d s + K_p = 0$$

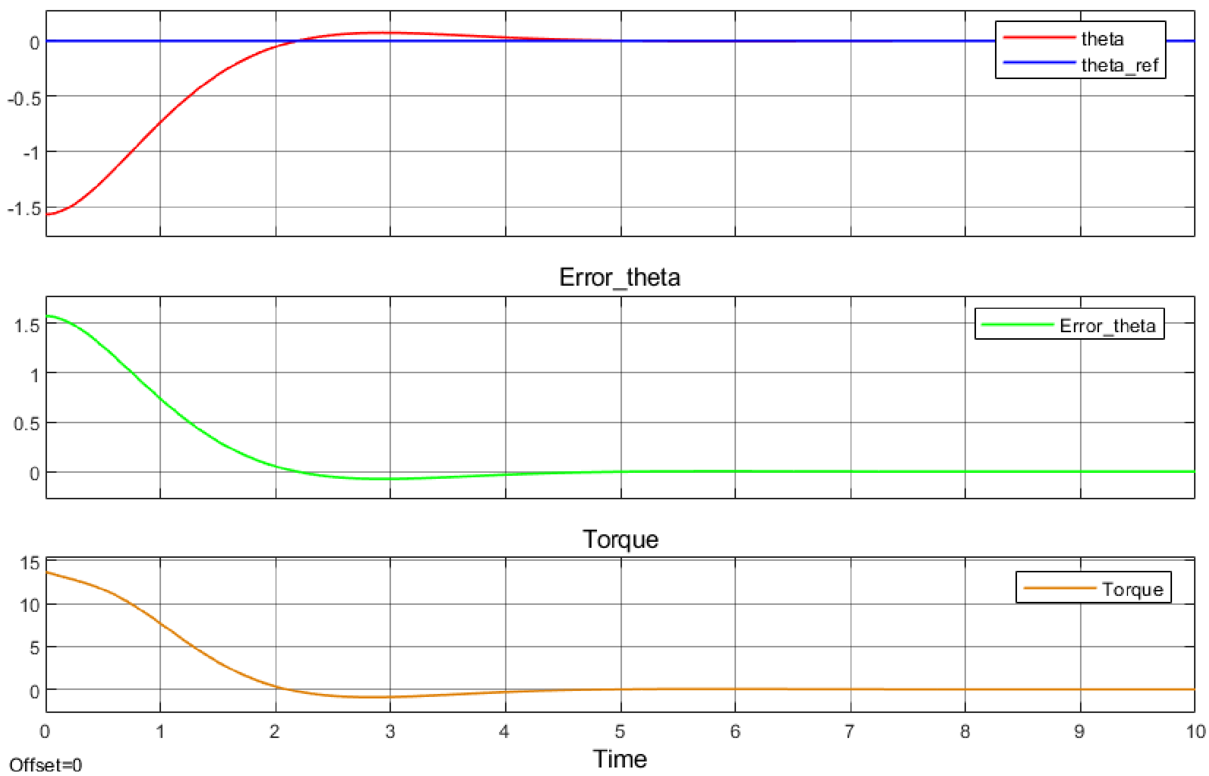
Có dạng chuẩn theo yêu cầu thiết kế

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

So sánh ta thu được

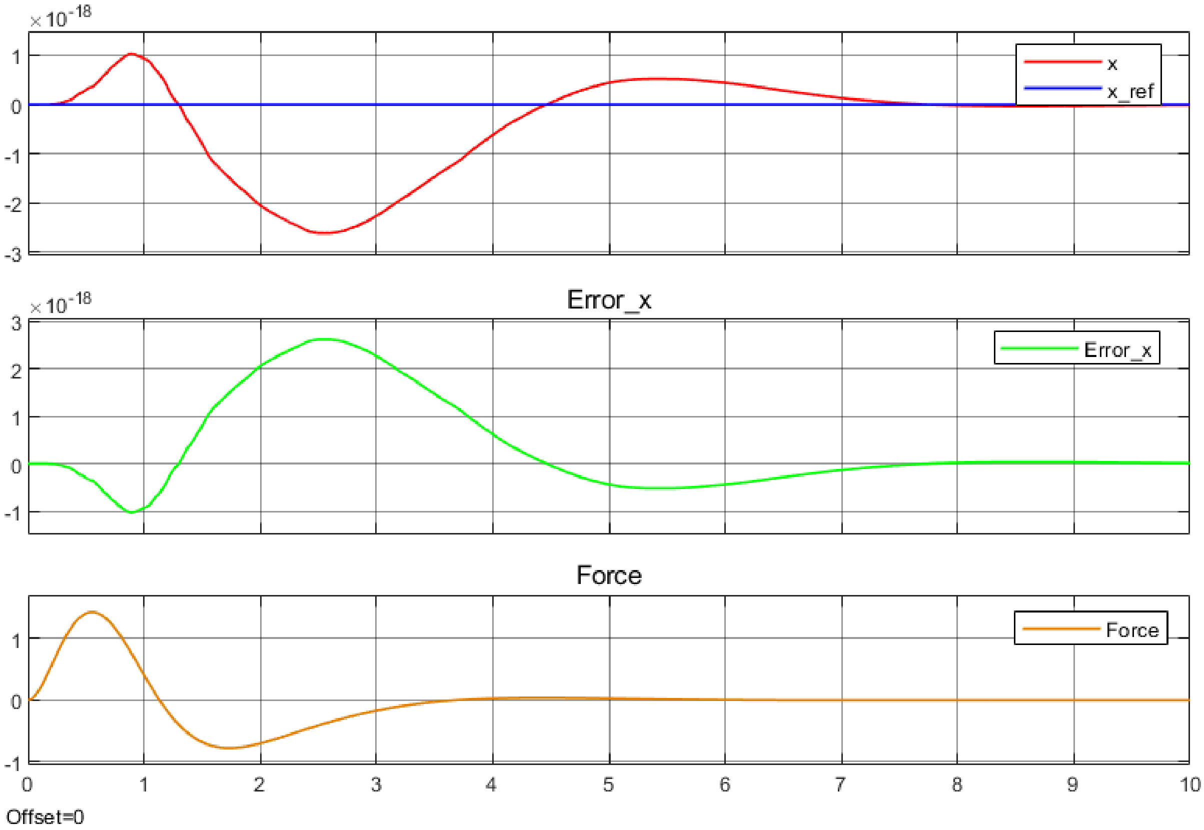
$$\begin{cases} K_d = 2\zeta\omega_n = 2 \cdot 0.7 \cdot 1.5 = 2.1 \\ K_p = \omega_n^2 = 1.5^2 = 2.25 \end{cases}$$

Đồ thị đáp ứng của vị trí góc (ban đầu góc $-\frac{\pi}{2}$, tức là ban đầu xe nằm ngang)



Hình 3.1: Đáp ứng vị trí góc

Đồ thị đáp ứng của vị trí



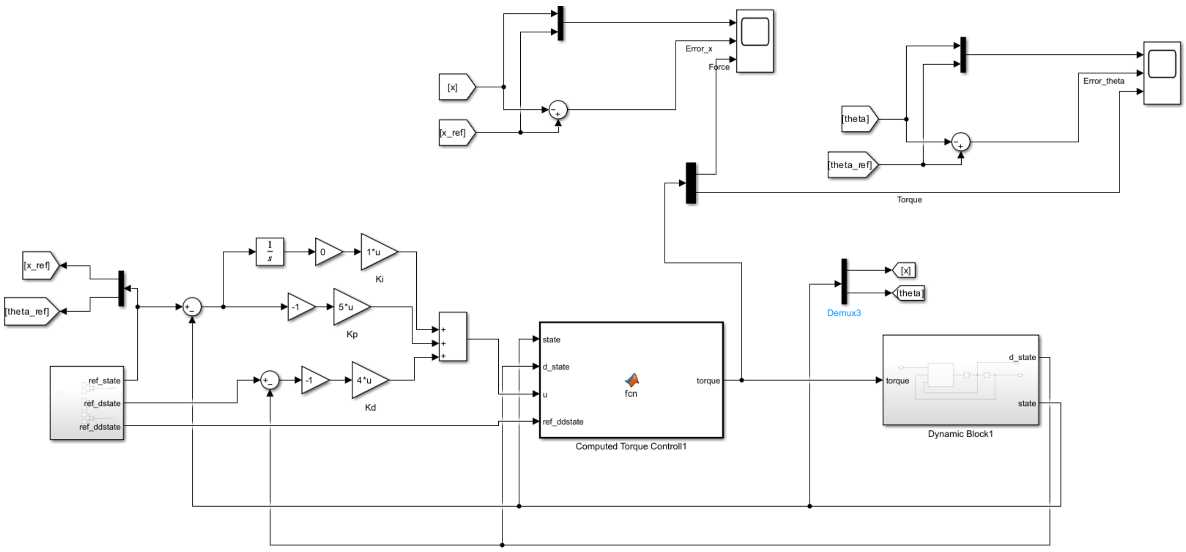
Hình 3.2: Đáp ứng vị trí

Appendices

Phụ lục A

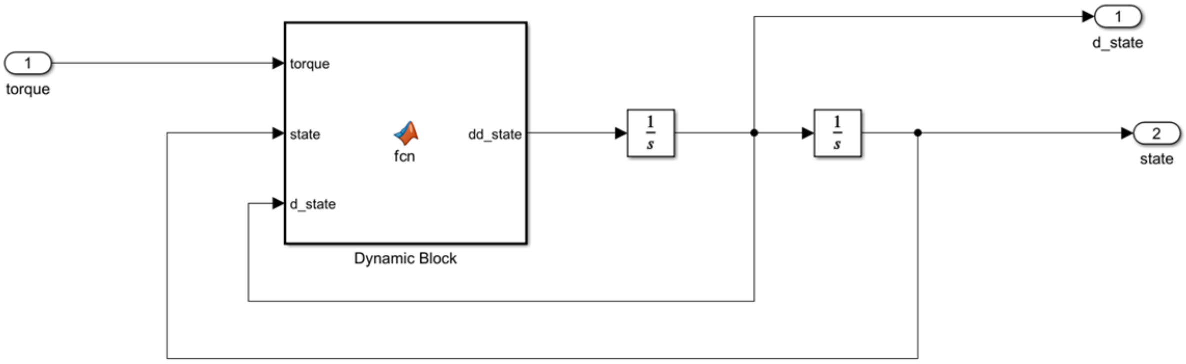
Code matlab

A.1 Sơ đồ hệ thống điều khiển



Hình A.1: Sơ đồ chung hệ thống điều khiển CTC

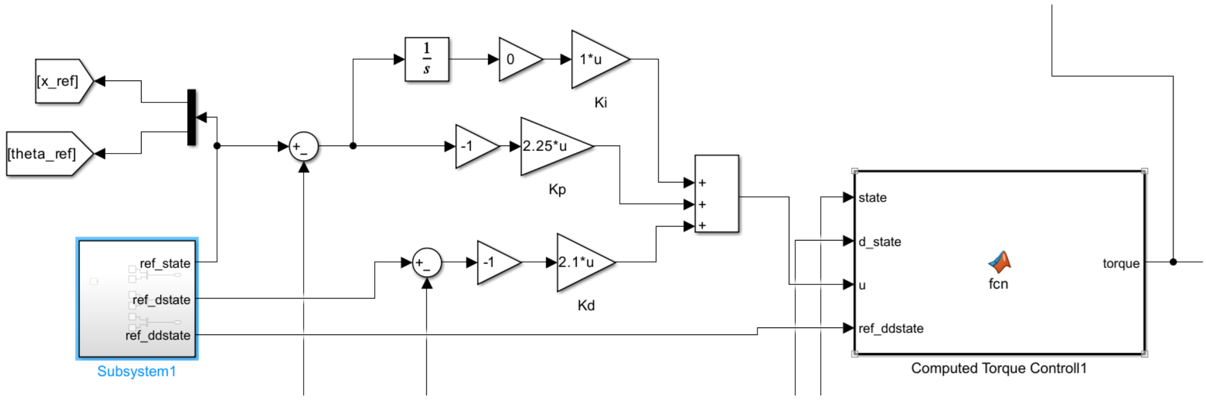
A.2 Khối Dynamics



Listing A.1: Code khối Dynamic Block

```
function dd_state = fcn(torque, state, d_state)
    % Define constant
    g = 9.81;
    r = 0.077;
    Mw = 0.3;
    Mp = 6;
    Iw = 0.0017;
    Ip = 0.29;
    l = 0.2;
    km = 0.0458;
    ke = 0.0458;
    R = 2.49;


    % Define variables
    x = state(1);
    theta = state(2);
    dx = d_state(1);
    dtheta = d_state(2);

    % Compute dynamic matrix
    M = ...
    [Mp + 2*Mw + (2*Iw)/r^2, Mp*l*cos(theta);
        Mp*l*cos(theta),     Mp*l^2 + Ip];

    C =...
    [0, -Mp*dtheta*l*sin(theta);
    0,                         0];

    V =...
    [-Mp*dtheta^2*l*sin(theta);
                            0];

    G = ...
    [                 0;
    -Mp*g*l*sin(theta)];

    B = [2/r; -2];

    % Compute acceleration
    dd_state = inv(M)*(torque - G - V);
```

A.3 Khối Computed-Torque Control + Input



Listing A.2: Code khối Computed-Torque Control

```
function torque = fcn(state, d_state, u, ref_ddstate)
% Define constant
g = 9.81;
r = 0.077;
Mw = 0.3;
Mp = 6;
Iw = 0.0017;
Ip = 0.29;
l = 0.2;
km = 0.0458;
ke = 0.0458;
R = 2.49;

% Define variables
x = state(1);
theta = state(2);
dx = d_state(1);
dtheta = d_state(2);

M = ...
[Mp + 2*Mw + (2*Iw)/r^2, Mp*l*cos(theta);
       Mp*l*cos(theta),      Mp*l^2 + Ip];

C =...
[0, -Mp*dtheta*l*sin(theta);
0,                        0];


V =...
[-Mp*dtheta^2*l*sin(theta);
                         0];
```

```
G = ...
[                 0;
-Mp*g*l*sin(theta)];



B = [2/r; -2];
B_dagger = pinv(B);

%tau is scalar
tau = B_dagger * (M *(ref_ddstate - u) + V + G);


torque = (M*(ref_ddstate - u) + V + G);
```