

ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA
KHOA CƠ KHÍ
BỘ MÔN CƠ ĐIỆN TỬ



BÁO CÁO BÀI TẬP LỚN
ĐỘNG LỰC HỌC VÀ ĐIỀU KHIỂN

GVHD: PGS. TS. VÕ TUƯỜNG QUÂN

SINH VIÊN THỰC HIỆN:

Họ và tên	MSSV
Đào Trọng Chân	2210350
Trần Quang Đạo	2210647
Võ Hữu Dư	2210604
Dương Quang Duy	2210497

TP.HCM, Ngày 20 tháng 4 năm 2025

Mục lục

1	MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC HỆ THỐNG	2
1.1	Giới thiệu	2
1.2	Các ký hiệu sử dụng	2
1.3	Mô hình động học bánh xe	3
1.4	Mô hình con lắc ngược	4
1.4.1	Thiết lập hệ phương trình phi tuyến	5
1.4.2	Tuyến tính hóa hệ phương trình	6
1.4.3	Mô hình không gian trạng thái	7
1.5	Hàm truyền hệ thống	7
1.6	Kết luận	8
2	KHẢO SÁT TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ THỐNG	10
2.1	Biểu đồ Bode	10
3	Đánh giá chất lượng hệ thống điều khiển	12
3.1	Các tiêu chuẩn về xác lập	12

Chương 1

MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC HỆ THỐNG

1.1 Giới thiệu

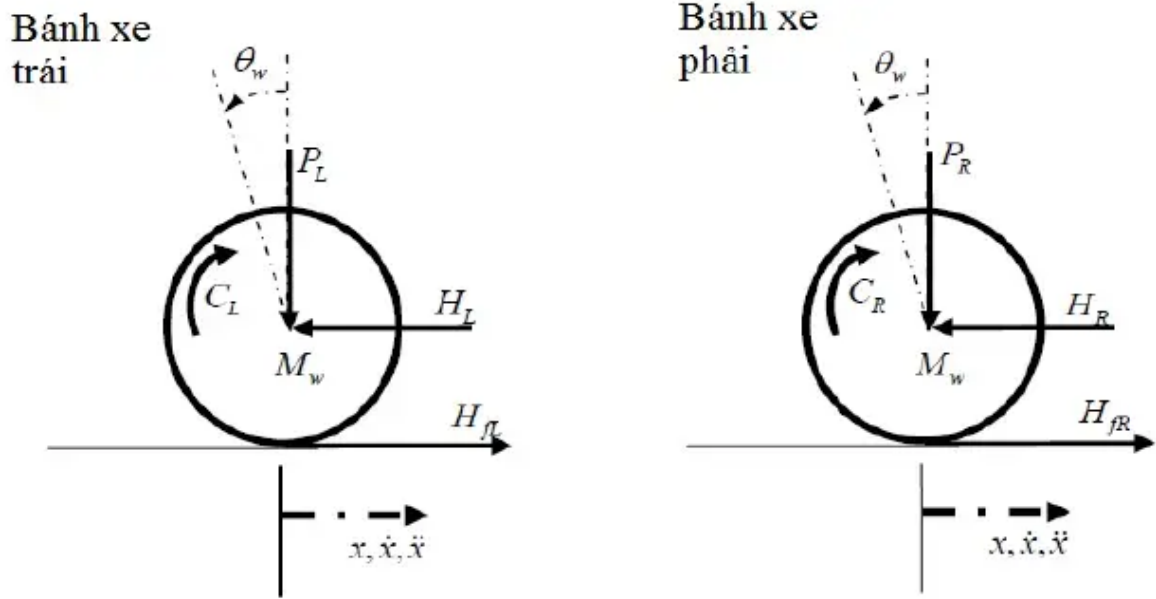
Động học của robot được mô tả bởi mô hình toán học nhằm giúp cho việc phát triển hệ thống điều khiển dễ dàng hơn cho robot cân bằng. Trong phần này, các phương trình chuyển động của xe hai bánh được đưa ra chi tiết.

1.2 Các ký hiệu sử dụng

Ký hiệu	Đại lượng
x	Độ dịch chuyển (m)
\dot{x}	Tốc độ dịch chuyển (m/s)
θ	Góc nghiêng (rad)
$\dot{\theta}$	Tốc độ góc (rad/s)
V_a	Điện áp (V)
k_m	Hằng số moment quay động cơ
k_e	Hằng số sức phản điện động
R	Điện trở danh định
l	Khoảng cách giữa trọng tâm bánh xe và trọng tâm robot
g	Gia tốc trọng trường
M_p	Khối lượng khung
r	Bán kính bánh xe
I_p	Momen quán tính của khung
I_w	Momen quán tính của bánh xe
M_w	Khối lượng của bánh xe kết nối với hai phía của robot

Bảng 1.1: Bảng ký hiệu và đại lượng

1.3 Mô hình động học bánh xe



Hình 1.1: Sơ đồ tự do của các bánh

Áp dụng định luật 2 Newton cho phương ngang:

$$\sum F_x = M_w \ddot{x} = H_R - H_L \quad (1.1)$$

Tổng moment quanh trọng tâm bánh xe:

$$\sum M_o = I_w \ddot{\theta} = C_R - H_R r \quad (1.2)$$

Từ động học động cơ một chiều, moment quay động cơ được mô tả bởi:

$$\tau_m = I_R \frac{d\omega}{dt} + \tau_a \quad (1.3)$$

Với moment quay đầu ra:

$$C = I_R \frac{d\omega}{dt} = -\frac{k_m k_e}{R} \dot{\theta}_w + \frac{k_m}{R} V_a \quad (1.4)$$

Thay vào phương trình (1.2):

$$I_w \ddot{\theta} = -\frac{k_m k_e}{R} \dot{\theta}_w + \frac{k_m}{R} V_a - H_R r \quad (1.5)$$

Rút gọn biểu thức H_R :

$$H_R = -\frac{k_m k_e}{Rr} \dot{\theta}_w + \frac{k_m}{Rr} V_a - \frac{I_w}{r} \ddot{\theta}_w \quad (1.6)$$

Phương trình (1.4) thay vào (1.1), ta thu được phương trình cho các bánh:

Bánh xe bên trái

$$M_w \ddot{x} = -\frac{k_m k_e}{Rr} \dot{\theta}_w + \frac{k_m}{Rr} V_a - \frac{I_w}{r} \ddot{\theta}_w - H_L \quad (1.7)$$

Bánh xe bên phải

$$M_w \ddot{x} = -\frac{k_m k_e}{Rr} \dot{\theta}_w + \frac{k_m}{Rr} V_a - \frac{I_w}{r} \ddot{\theta}_w - H_R \quad (1.8)$$

Bởi vì chuyển động tuyến tính được xem xét ở trọng tâm của bánh xe, góc quay có thể được biến đổi thành chuyển động tuyến tính bằng biến đổi đơn giản:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_w r &= \ddot{x} \Rightarrow \ddot{\theta}_w = \frac{\ddot{x}}{r} \\ \dot{\theta}_w r &= \dot{x} \Rightarrow \dot{\theta}_w = \frac{\dot{x}}{r} \end{aligned}$$

Bằng phép biến đổi tuyến tính, phương trình (1.7) và (1.8) có thể được viết lại như sau:

Bánh xe bên trái

$$M_w \ddot{x} = -\frac{k_m k_e}{Rr^2} \dot{x} + \frac{k_m}{Rr^2} V_a - \frac{I_w}{r^2} \ddot{x} - H_L \quad (1.9)$$

Bánh xe bên phải

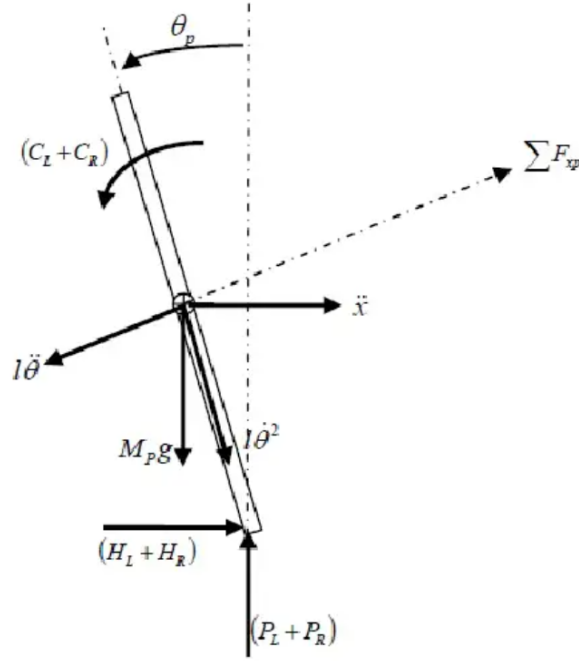
$$M_w \ddot{x} = -\frac{k_m k_e}{Rr^2} \dot{x} + \frac{k_m}{Rr^2} V_a - \frac{I_w}{r^2} \ddot{x} - H_R \quad (1.10)$$

Cộng 2 phương trình (1.9) và (1.10):

$$2(M_w + \frac{I_w}{r^2}) \ddot{x} = -\frac{2k_m k_e}{Rr^2} \dot{x} + \frac{2k_m}{Rr^2} V_a - (H_L + H_R) \quad (1.11)$$

1.4 Mô hình con lắc ngược

Cấu hình robot có thể được mô hình như một con lắc ngược



Hình 1.2: Sơ đồ tự do của con lắc ngược

1.4.1 Thiết lập hệ phương trình phi tuyến

Lắp lại, bằng việc sử dụng định luật 2 Newton, tổng các lực theo phương ngang:

$$\sum F_x = M_p \ddot{x}$$

$$(H_L + H_R) - M_p l \ddot{\theta} \cos \theta_p + M_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta_p = M_p \ddot{x} \quad (1.12)$$

Suy ra:

$$(H_L + H_R) = M_p \ddot{x} + M_p l \ddot{\theta} \cos \theta_p - M_p l \dot{\theta}^2 \sin \theta_p \quad (1.13)$$

Tổng các lực vuông góc với con lắc:

$$\sum F_{xp} = M_p \ddot{x} \cos \theta_p$$

$$(H_L + H_R) \cos \theta_p + (P_L + P_R) \sin \theta_p - M_p g \sin \theta_p - M_p l \ddot{\theta} = M_p \ddot{x} \cos \theta_p \quad (1.14)$$

Tổng moment quanh trọng tâm con lắc:

$$\sum M_0 = I_p \ddot{\theta}$$

$$-(H_L + H_R) l \cos \theta_p - (P_L + P_R) l \sin \theta_p - (C_L + C_R) = I_p \ddot{\theta} \quad (1.15)$$

Moment quay áp dụng lên con lắc từ động cơ:

$$C_L + C_R = -\frac{2k_m k_e}{R} \frac{\dot{x}}{r} + \frac{2k_m}{R} V_a$$

Thay vào (1.15):

$$-(H_L + H_R) l \cos \theta_p - (P_L + P_R) l \sin \theta_p + \frac{2k_m k_e}{R} \frac{\dot{x}}{r} - \frac{2k_m}{R} V_a = I_p \ddot{\theta}$$

Do đó:

$$-(H_L + H_R)l \cos \theta_p - (P_L + P_R)l \sin \theta_p = I_p \ddot{\theta}_p - \frac{2k_m k_e}{R} \frac{\dot{x}}{r} + \frac{2k_m}{R} V_a \quad (1.16)$$

Nhân phương trình (1.14) với $-l$ ta có:

$$-(H_L + H_R)l \cos \theta_p - (P_L + P_R)l \sin \theta_p + M_p g l \sin \theta_p + M_p l^2 \ddot{\theta}_p = -M_p l \ddot{x} \cos \theta_p$$

Thay thế phương trình (1.15) vào phương trình (1.16), ta được:

$$I_p \ddot{\theta}_p - \frac{2k_m k_e}{R} \frac{\dot{x}}{r} - \frac{2k_m}{R} V_a + M_p g l \sin \theta_p + M_p l^2 \ddot{\theta}_p = -M_p l \ddot{x} \cos \theta_p \quad (1.17)$$

Để loại bỏ thành phần động học của động cơ $(H_L + H_R)$, ta thay phương trình (1.13) vào phương trình (1.11), thu được:

$$2 \left(M_w + \frac{I_w}{r^2} \right) \ddot{x} = -\frac{2k_m k_e}{Rr^2} \dot{x} + \frac{2k_m}{Rr} V_a - M_p \ddot{x} - M_p l \ddot{\theta}_p \cos \theta_p + M_p l \dot{\theta}_p^2 \sin \theta \quad (1.18)$$

Kết hợp hai phương trình (1.17) và (1.18), ta có hệ phương trình chuyển động phi tuyến:

$$(I_p + M_p l^2) \ddot{\theta}_p - \frac{2k_m k_e}{Rr^2} \dot{x} + \frac{2k_m}{Rr} V_a + M_p g l \sin \theta_p = -M_p l \ddot{x} \cos \theta_p \quad (1.19)$$

$$\frac{2k_m}{Rr} V_a = \left(2M_w + \frac{2I_w}{r^2} + M_p \right) \ddot{x} - \frac{2k_m k_e}{Rr^2} \dot{x} + M_p l \ddot{\theta}_p \cos \theta_p - M_p l \dot{\theta}_p^2 \sin \theta_p \quad (1.20)$$

1.4.2 Tuyến tính hóa hệ phương trình

Để đơn giản và áp dụng điều khiển, ta giả sử:

$$\theta_p = \pi + \phi$$

Với ϕ là một góc nhỏ so với phương thẳng đứng (tức là hệ đang dao động quanh vị trí thẳng đứng). Khi đó, các xấp xỉ tuyến tính:

$$\cos \theta_p \approx -1, \quad \sin \theta_p \approx -\phi, \quad \left(\frac{d\theta_p}{dt} \right)^2 \approx 0$$

Được áp dụng để đơn giản hóa hệ phương trình.

Phương trình tuyến tính hóa của chuyển động là:

$$(I_p + M_p l^2) \ddot{\phi} - \frac{2k_m k_e}{Rr} \dot{x} + \frac{2k_m}{R} V_a - M_p g l \sin \theta_p = M_p l \ddot{x} \quad (1.21)$$

$$\frac{2k_m}{Rr} V_a = \left(2M_w + \frac{2I_w}{r^2} + M_p \right) \ddot{x} + \frac{2k_m k_e}{Rr^2} \dot{x} - M_p l \ddot{\phi} \quad (1.22)$$

Để đưa hai phương trình trên về dạng phục vụ xây dựng mô hình không gian trạng thái, ta biến đổi:

$$\ddot{\phi} = \frac{M_p l}{(I_p + M_p l^2)} \ddot{x} + \frac{2k_m k_e}{Rr(I_p + M_p l^2)} \dot{x} + \frac{2k_m}{R(I_p + M_p l^2)} V_a - \frac{M_p g l}{(I_p + M_p l^2)} \phi \quad (1.23)$$

$$\ddot{x} = \frac{2k_m}{Rr(2M_w + \frac{2I_w}{r^2} + M_p)} V_a - \frac{2k_m k_e}{Rr^2(2M_w + \frac{2I_w}{r^2} + M_p)} \dot{x} - \frac{M_p l}{(2M_w + \frac{2I_w}{r^2} + M_p)} \ddot{\phi} \quad (1.24)$$

Nếu bỏ qua các thành phần quán tính kênh (ví dụ như động cơ), ta được:

$$\ddot{\phi} + \frac{M_p g l}{I_p + M_p l^2} \phi = \frac{2k_m}{R(I_p + M_p l^2)} V_a \quad (1.25)$$

$$\ddot{x} + \frac{2k_m k_e}{(2M_w + \frac{2I_w}{r^2}) R^2} \dot{x} = \frac{2k_m}{(2M_w + \frac{2I_w}{r^2}) Rr} V_a \quad (1.26)$$

Trong mô hình này, giả thiết rằng bánh xe luôn tiếp xúc với mặt đất và không có trượt. Các lực quay và ma sát được bỏ qua.

1.4.3 Mô hình không gian trạng thái

Từ các phương trình đã tuyến tính hoá, ta xây dựng hệ phương trình không gian trạng thái dưới dạng:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{M_p g l}{I_p + M_p l^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2k_m}{(I_p + M_p l^2) R} \end{bmatrix} V_a \quad (1.27)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2k_m k_e}{(2M_w + \frac{2I_w}{r^2}) R^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2k_m}{(2M_w + \frac{2I_w}{r^2}) Rr} \end{bmatrix} V_a \quad (1.28)$$

1.5 Hàm truyền hệ thống

Phương trình vi phân bậc hai của hệ được viết lại như sau:

$$\ddot{\phi} + \frac{M_p g l}{I_p + M_p l^2} \phi = \frac{2k_m}{R(I_p + M_p l^2)} V_a \quad (1.29)$$

Gọi:

$$x_1(t) = \phi(t), \quad x_2(t) = \dot{\phi}(t)$$

Khi đó hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{M_p g l}{I_p + M_p l^2} x_1(t) + \frac{2k_m}{R(I_p + M_p l^2)} V_a \end{cases}$$

Biểu diễn dưới dạng ma trận không gian trạng thái:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{M_p g l}{I_p + M_p l^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2k_m}{R(I_p + M_p l^2)} \end{bmatrix} V_a \quad (1.30)$$

Với đầu ra $y(t) = \phi(t) = x_1(t) \Rightarrow$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Giá trị các thông số:

$$M_p = 1.2 \text{ kg}, \quad g = 9.81, \quad l = 0.1, \quad I_p = 0.01, \quad k_m = 0.28, \quad R = 5.25 \Omega$$

Thay số vào ta có ma trận hệ:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -53.51 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4.85 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Từ mô hình không gian trạng thái, ta có:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

Tính:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ -53.51 & s \end{bmatrix}, \quad (sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 53.51} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 53.51 & s \end{bmatrix}$$

Do đó:

$$\begin{aligned} G(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{s^2 + 53.51} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -53.51 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 4.85 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{s^2 + 53.51} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4.85 \end{bmatrix} = \frac{4.85}{s^2 + 53.51} \end{aligned}$$

Vậy:

$$G(s) = \frac{4.85}{s^2 + 53.51}$$

Đây là hàm truyền từ điện áp điều khiển V_a đến góc lệch $\phi(t)$ của con lắc ngược.

1.6 Kết luận

Sau khi thực hiện quá trình mô hình hóa, tuyến tính hóa và xây dựng hệ phương trình không gian trạng thái, ta đã thu được hàm truyền tuyến tính biểu diễn mối quan hệ giữa điện áp điều khiển đầu vào V_a và góc nghiêng ϕ của robot hai bánh:

$$G(s) = \frac{4.85}{s^2 + 53.51}$$

Hàm truyền trên cho thấy hệ thống là một hệ dao động bậc hai không có thành phần tắt dần (damping) và có tính chất ****marginally stable**** (ổn định biên). Điều này là đặc trưng của mô hình con lắc ngược: hệ không ổn định khi không có điều khiển tác động.



Việc xây dựng được hàm truyền là một bước quan trọng, tạo nền tảng để thiết kế các bộ điều khiển như PID, LQR hoặc các chiến lược điều khiển hiện đại nhằm đảm bảo robot giữ được trạng thái cân bằng và theo dõi quỹ đạo mong muốn.

Trong chương tiếp theo, ta sẽ tiến hành thiết kế và mô phỏng các bộ điều khiển dựa trên hàm truyền đã thu được.

Chương 2

KHẢO SÁT TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA HỆ THỐNG

Ta có hàm truyền đã tìm được ở trên là:

$$G(s) = \frac{4.85}{s^2 + 53.51}$$

Hệ vòng kín với phản hồi là:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

Phương trình đặc tính:

$$\begin{aligned} 1 + G(s) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{4.85}{s^2 + 53.51} &= 0 \\ \Leftrightarrow s^2 + 58.36 &= 0 \end{aligned}$$

\Leftarrow Hệ không ổn định do hệ số của s^1 là 0.

2.1 Biểu đồ Bode

$$G(s) = \frac{4.85}{s^2 + 53.51}$$

Phân tích:

- 1 khâu khuếch đại: $K = 4.85$.
- 1 khâu dao động bậc 2.

Tần số cộng hưởng:

$$\omega_n = \sqrt{53.51} = 7.315(\text{rad/s})$$

Đặc tính tần số:

$$G_1(j\omega) = \frac{4.85}{-\omega^2 + 53.51}$$

Biên độ:

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{4.85}{|-\omega^2 + 53.51|}$$

$$\Rightarrow L(\omega) = 20\log(M(\omega)) = 20\log(4.85) - 20\log(|-\omega^2 + 53.51|)$$

- Khi $0 < \omega < 7.315$: biên độ tăng từ -20.85dB đến $+\infty$
- Với $\omega > 7.315$:

$$20\log(4.85) - 20\log(|-\omega^2 + 53.51|) \approx 20\log(4.85) - 20\log(\omega^2)$$

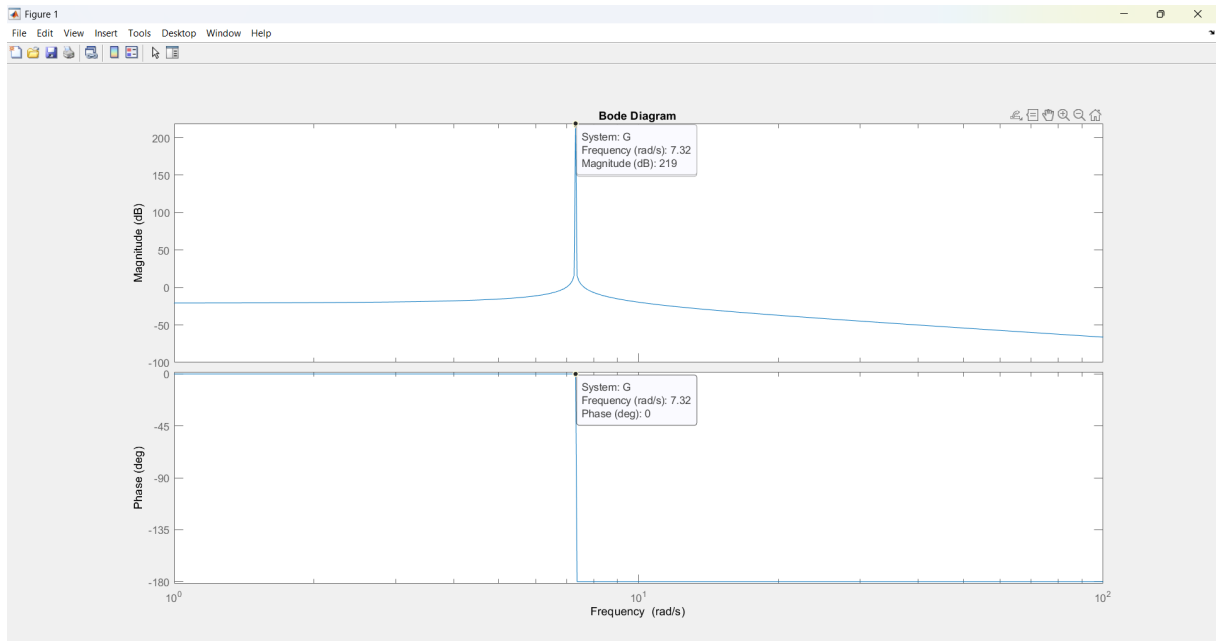
$$= 20\log(4.85) - 40\log(\omega)$$

$$\Rightarrow \text{Độ dốc giảm: } -40\text{dB/decade}$$

$$\Rightarrow \text{Với } \omega > 7.315 : \text{ biên độ giảm từ } +\infty \text{ về } -\infty$$

Pha:

$$\angle G(j\omega) = \begin{cases} 0 & ; \quad \omega < 7,315 \\ -180^\circ & ; \quad \omega > 7,315 \\ \text{Pha nhảy từ } 0 \text{ xuống } -180^\circ \text{ tại } \omega = 7.315 \end{cases}$$



Nhận xét:

- Hệ thống vòng hở: $G(s)$ có các cực trên trục ảo $s = \pm j7.315$ nên hệ thống ổn định biên. Đồ thị Bode cho thấy biên độ đạt đỉnh tại $\omega = 7.315$ và pha nhảy xuống là -180° . Điều này xác nhận hệ thống dao động không suy giảm.
- Từ đồ thị ta có thể thấy độ trễ pha $G_M < 0\text{dB}$ nên đã vi phạm tiêu chuẩn ổn định của biểu đồ Bode \Rightarrow Hệ chưa ổn định.

Chương 3

Đánh giá chất lượng hệ thống điều khiển

$$G(s) = \frac{4.85}{s^2 + 53.51}$$

3.1 Các tiêu chuẩn về xác lập

Hàm truyền vòng kín:

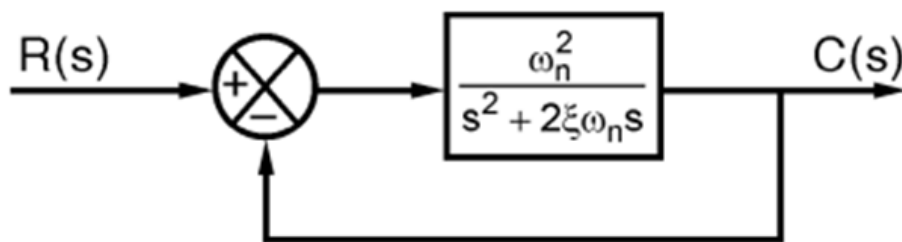
$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{4.85}{s^2 + 58.36}$$

Xét với đầu vào bậc (step input, $R(s) = \frac{1}{s}$), sai số xác lập được tính bằng:

$$e_{xl} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot R(s)}{1 + G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + k_p} \approx 0,92$$

Với k_p là hệ số vị trí, $k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \approx 0.09$

Khảo sát hệ thống là bậc 2



Hàm truyền hệ dao động bậc 2:

$$G_2(s) = \frac{K\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$$

Đáp ứng quá độ:

$$C(s) = R(s) \cdot G_2(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{K\omega^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}$$

⇒ Laplace ngược:

$$c(t) = K \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot \sin[(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}) \cdot t + \theta] \right\}$$

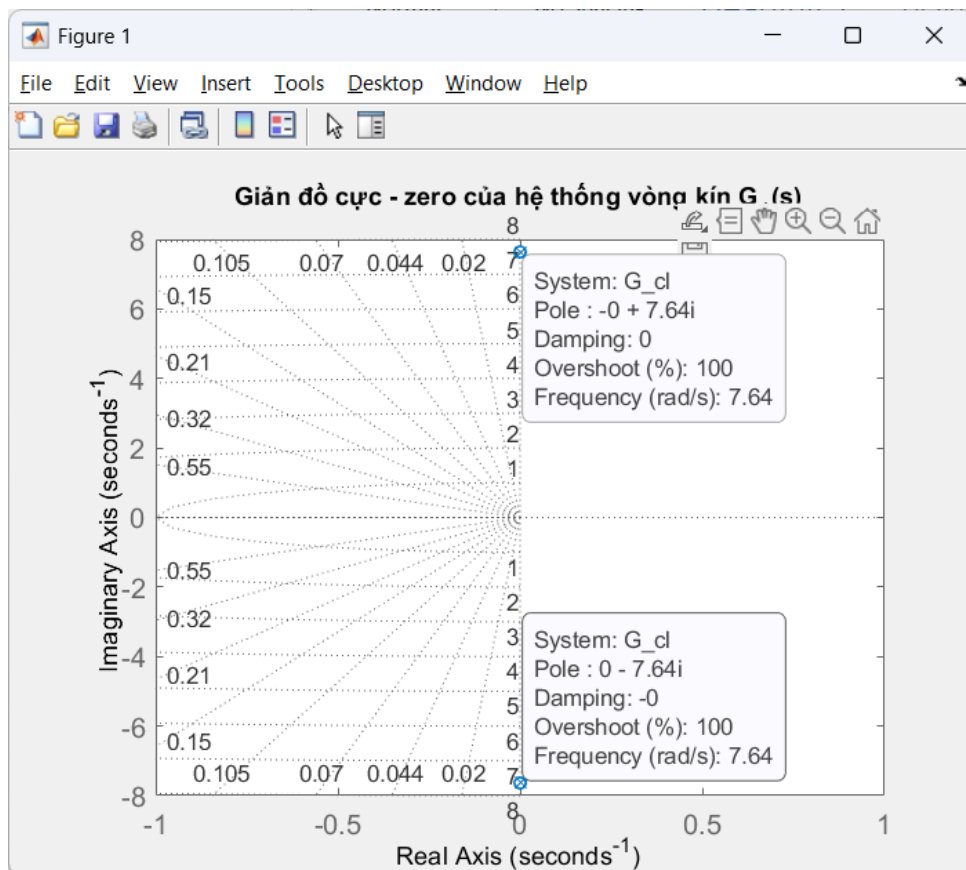
Qua đó ta thấy hệ dao động không giảm chấn với $\zeta = 0$.

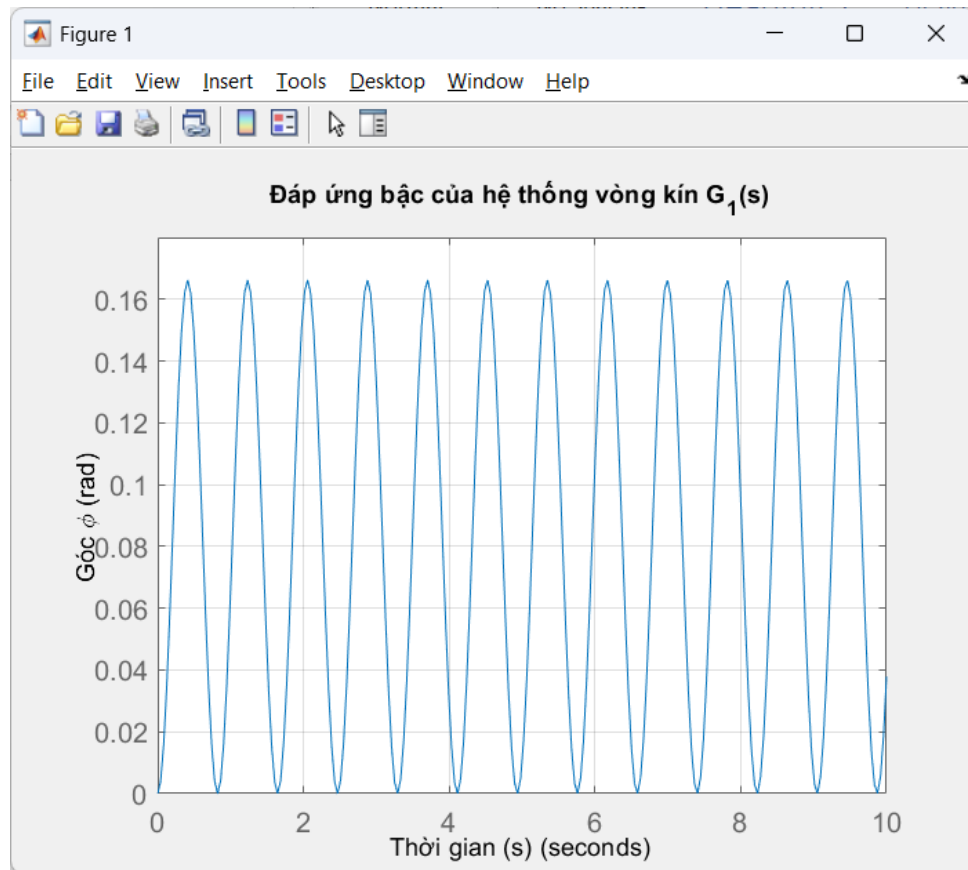
Hệ dao động bậc 2 có 2 cặp cực phức: $p_{1,2} = \pm j 7,639$

Từ đó xác định các thông số cơ bản

- Tần số tự nhiên: $\omega_n = 7,639$
- Hệ số giảm chấn: $\zeta = 0$
- Thời gian đạt đỉnh: $T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = 0,411s$
- Độ vọt lố: $POT = e^{\frac{-\zeta \pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}} \cdot 100 = 100\%$
- Thời gian xác lập: Với tiêu chuẩn 2% $\Rightarrow T_p = \frac{4}{\zeta \omega_n} \rightarrow \infty$
- Đáp ứng quá độ: $C(s) = R(s) \cdot T(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{4,85}{s^2 + 58,36}$

$$\Rightarrow c(t) = \frac{4,85}{7,639^2} \left[1 - \sin\left(7,639 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \right] = 0,083 - 0,083 \cos(7,639 \cdot t)$$





Nhận xét: Đáp ứng quá độ của khâu dao động bậc 2 có dạng dao động với biên độ giảm dần. Do $\zeta = 0$, đáp ứng của hệ là dao động không suy giảm với tần số tự nhiên $\omega_n = 7.639$.