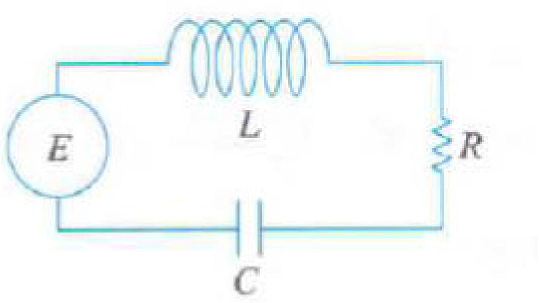
1)



El circuito RLC serie de la figura, puede resolverse utilizando la ecuación de maya, lo cual nos lleva a la ecuación diferencial que aparece en el enunciado, como suponemos que no es el caso estacionario, la corriente y por ende la carga varían con el tiempo.

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t)$$

Los datos que tenemos son los valores de la inductancia, la resistencia, la capacidad del capacitor, y también las condiciones iniciales.

$$L=1h,\quad R=20\Omega,\quad C=0.005f,\quad E(t)=150V, t>0,\quad q(0)=0\ e\ i(0)=0.$$

Como los coeficientes que acompañan a los términos de la función “ q “ son constantes, podemos resolver la ecuación diferencial mediante el método de los *coeficientes indeterminados*, para ello, lo primero que debemos hacer, es hallar la solución del homogéneo.

Para simplificar un poco la notación haremos los siguientes cambios:

$$q\ (t) = y\ ;\ \frac{dq}{dt} = y'\ ;\ \frac{d^2q}{dt^2} = y''$$

Bien, comenzamos hallando la solución del homogéneo, la cual nos queda:

$$Ly'' + Ry' + \frac{1}{C}y = 0$$

$$\Rightarrow y'' + 20y' + 200y = 0$$

De esta ecuación, usamos su polinomio característico y hallamos las raíces, luego estas raíces formaran el espacio homogéneo asociado a la solución del homogéneo.

$$\lambda^2 + 20\lambda + 200 = 0$$

$$\lambda_1 = -10 + 10i \qquad \lambda_2 = -10 - 10i$$

Asi que el espacio vectorial asociado a la solución del homogéneo es:

$$\{e^{-10t}\cos(10t) \ ; \ e^{-10t}\sin(10t)\}$$

Por lo que la solución del homogéneo es:

$$y_H = C_1 e^{-10t}\cos(10t) + C_2 e^{-10t}\sin(10t)$$

Ahora para hallar la solución particular, vamos a usar el método de los coeficientes indeterminados, el cual consiste en proponer una solución dependiendo el término de la ecuación diferencial que no esta multiplicada por "y" o alguna de sus derivadas, en este caso es la fuente, que es una constante E, por lo que vamos a proponer:

$$y_P = K$$

Reemplazando esta solución particular propuesta en la ecuación diferencial nos queda:

$$y_P'' + 20y_P' + 200y_P = E$$

$$\Rightarrow 0 + 20\times 0 + 200K = E$$

$$\Rightarrow y_P = \frac{E}{200\ \Omega}$$

Por lo tanto la solución a la ecuación diferencial es:

$$y = y_P + y_H$$

$$y = \frac{E}{200} + C_1 e^{-10t}\cos(10t) + C_2 e^{-10t}\sin(10t)$$

Ahora usando las condiciones iniciales vamos a poder hallar el valor de las dos constantes que acompañan al término de la solución homogénea. Sabiendo que:

$$\frac{dq}{dt} = I(t) = C_1 e^{-10t}[-10\cos(10t) - 10\operatorname{sen}(10t)] + C_2 e^{-10t}[-10\operatorname{sen}(10t) + 10\cos(10t)]$$

Reemplazando nos queda:

$$q(0) = \frac{E}{200} + C_1 = 0$$
$$I(0) = -10C_1 + 10C_2 = 0$$

Por lo que nos queda que:

$$C_1 = -\frac{E}{200} \quad y \quad C_2 = C_1$$

Asi que reemplazando en q(t) y acomodando los términos, nos queda que:

$$\boxed{q(t) = \frac{E}{200} \{ 1 - e^{-10t} [\cos(10t) + sen(10t)] \}}$$

La corriente I(t) es la derivada con respecto al tiempo de q(t), derivando y acomodando los términos nos queda que:

$$\boxed{I(t) = -\frac{E}{10} e^{-10t} sen(10t)}$$

Como la fuente es de tensión continua, por el circuito circulara corriente continua, al llegar al estado estacionario, la corriente deberá valer cero, ya que toda la carga se quedará almacenada en el capacitor. La carga tenderá a valer q = 0,75 C , esto puede verse claramente desde la expresión de q (t).

2)

Ahora debemos usar el método RK4 para estimar el valor de la carga en los tiempos dados en el enunciando, que son: t=2 seg., t=3 seg. y t=10 seg.

Para realizar el programa, vamos a hacer lo siguiente, al sistema de orden 2, lo vamos a escribir como un sistema de orden 1.
Del sistema:

$$\begin{cases} q'' + 20q' + 200q = 150 \\ q(0) = 0 \; ; \; I(0) = 0 \end{cases}$$

Despejamos q´´ :

$$\begin{cases} q'' = 150 - 20q' - 200q \\ q(0) = 0 \; ; \; I(0) = 0 \end{cases}$$

Y hacemos el cambio de variables:

$$u = q'$$
$$\Rightarrow u' = q''$$

El sistema nos queda:

$$\begin{cases} u' = 150 - 20u - 200q \\ u(0) = 0 \; ; \; q(0) = 0 \end{cases}$$

A este último sistema le aplicamos RK4 para saber los valores de la carga “q”, en los tiempos pedidos.

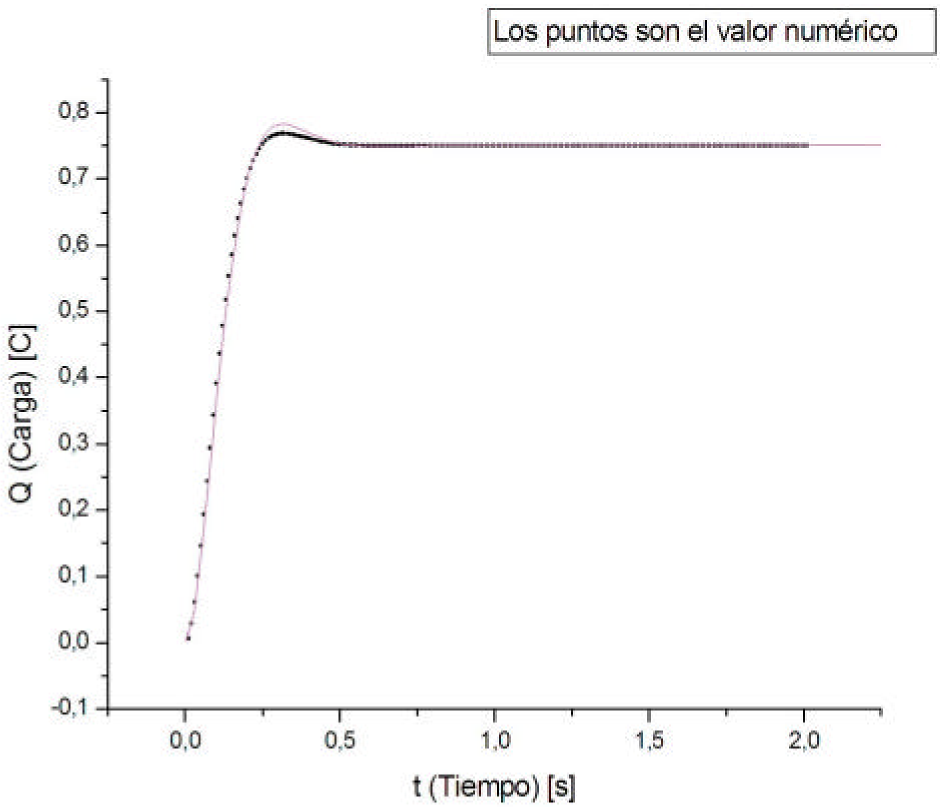
El programa esta en el CD, y el código del programa (el cual fue hecho en lenguaje C) esta adjunto al TP.

3)

Al comparar los valores hallados analíticamente con los hallados por el programa que fue mediante la implementación de un método numérico, notamos que a los pocos pasos de iteración, ya el valor era igual o casi igual al hallado en forma analítica.
Esto muestra la gran utilidad que tiene el método de RK4, por su rápida convergencia y su gran similitud con el valor real de la solución buscada. Los resultados y comparaciones pueden verse en el punto siguiente.

4)

Al comparar los resultados analíticos y numéricos, se obtienen los siguientes gráficos, se graficó hasta t = 2 seg. Porque luego la carga q ya se mantiene constante y la corriente vale 0 A, además asi se ve mejor como se aproxima el valor numérico al analítico; Para la carga "q" tenemos:

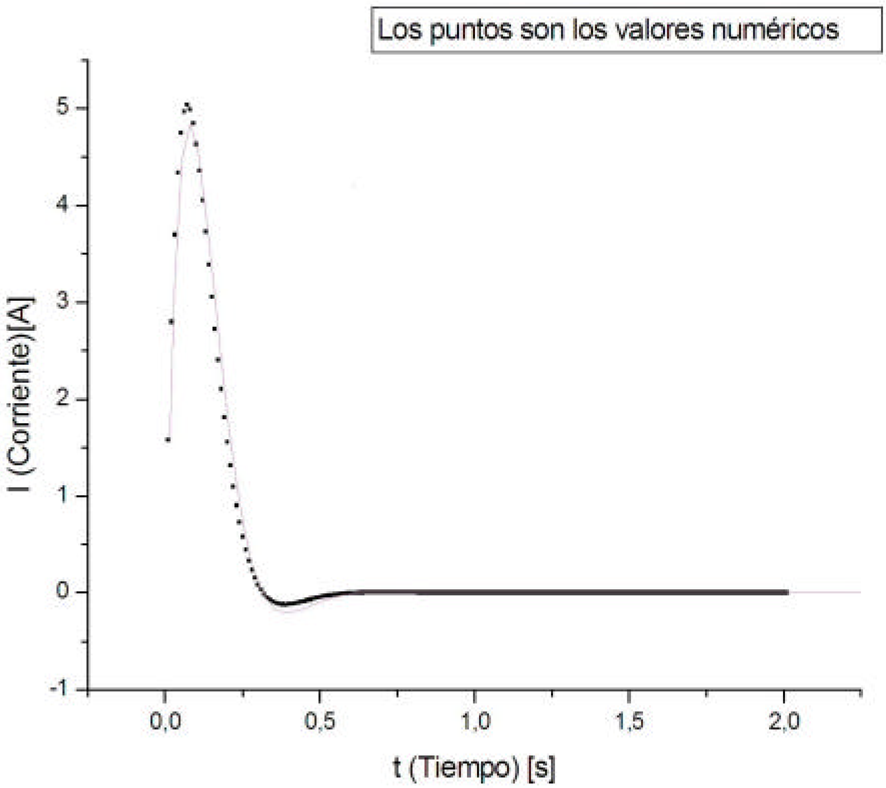


Como podemos ver el error cometido entre ambos es muy pequeño como se dijo en el punto anterior, y se puede decir que desde los 2 seg. en adelante, la carga q se mantiene constante, tanto analítica como numéricamente. El método RK4 es muy preciso y se aproxima al valor real en una forma rápida. En el gráfico siguiente el eje Y representa la unidad de carga (Couloumb) y el eje X el tiempo transcurrido en segundos.

En la gráfica podemos ver la diferencia entre el valor analítico y el numérico.

En el programa no figura el valor de la corriente en el tiempo, pero además de hallar el valor de “q” también halla el valor de I, el programa al final, pregunta si el usuario desea obtener estos valores en un TXT.

El gráfico que nos queda al comparar la I numérica con la I analítica es el siguiente:



La lógica dice que la corriente tenderá a cero porque toda la carga quedará almacenada en el capacitor, y se ve claramente que sucede eso, usando tanto el valor analítico como el numérico.