

6 問目

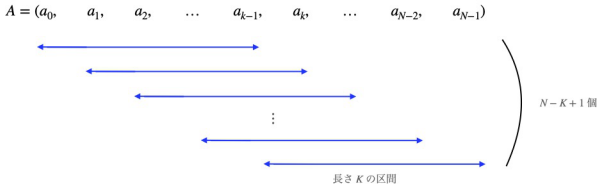
ABC037 - C 総和 解説

問題概要

長さ N の数列 $A = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-2}, a_{N-1})$ と 1 以上 N 以下の整数 K が与えられる。

数列 A には長さ K の連続する部分列が $N - K + 1$ 個あります。

それぞれ部分列に含まれる値の合計の総和を求めよ。

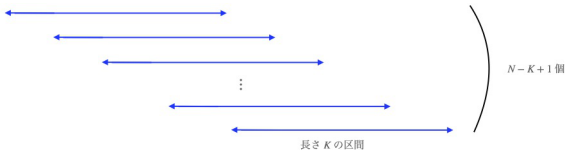


問題文で言われた通りに実装した場合の計算量は？

問題概要

問題文で言われた通りに実装した場合の計算量は？

$A = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k, \dots, a_{N-2}, a_{N-1})$



長さ K の区間の和

→ $K - 1$ 回の足し算が必要

×

$N - K + 1$ 個の区間の和を計算

→ 全体で $(K - 1) \times (N - K + 1) = O(N^2)$ の計算量 (N を固定した時 $K = \frac{N}{2}$ 付近が最大)

$N \leq 10^5$, Time Limit 2 sec の制約では、 $O(N^2)$ のプログラムでは **TLE** してしまう

解法 1

$$s_{l,r} = \sum_{i=l}^r a_i \text{ と定義する}$$

賢く長さ K の連続した部分列の和を計算する

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_i & + & a_{i+1} & + & \dots & + & a_{i+K-2} & + & a_{i+K-1} & & = & s_{i,i+K-1} \\ & & a_{i+1} & + & a_{i+2} & + & \dots & + & a_{i+K-1} & + & a_{i+K} & = & s_{i+1,i+K} \end{array}$$

$$s_{i+1,K} = s_{i,i+K-1} - a_i + a_{i+K}$$

↑ の漸化式を用いると、 $s_{i,i+K-1}$ から $s_{i+1,K}$ を高速に計算できる

計算量は？

$s_{i,i+K-1} (i=0)$ の計算 $\rightarrow O(K)$ で素直に計算

$s_{i,i+K-1} (i>0)$ の計算 \rightarrow 漸化式を使い $O(1)$ で計算

計算量は全体で $O(N)$

このアルゴリズムを実装すれば AC できる

解法 1

賢く長さ K の連続した部分列の和を計算する

```
n,k = map(int,input().split())
a = list(map(int,input().split()))

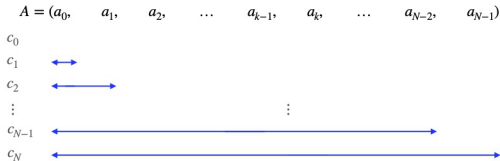
s = 0
for i in range(k):
    s += a[i]

ans = s
for i in range(n-k):
    s -= a[i]
    s += a[i+k]
    ans += s

print(ans)
```

解法 2

累積和

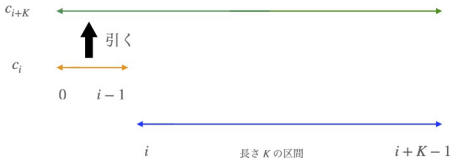


$$c_i = \sum_{k=0}^{i-1} a_k \text{ で定義される配列を累積和と呼ぶ}$$

累積和を使うと、長さ K の区間の和を $O(1)$ の計算量で計算できる！

解法 2

累積和



$$s_{i,i+K-1} = c_{i+K} - c_{i-1}$$

累積和を使うと、長さ K の区間の和を $O(1)$ の計算量で計算できる！

→ 全体で $O(N)$ の計算量 → AC

解法 2

累積和

```
n,k = map(int,input().split())
a = list(map(int,input().split()))

c = [0] * (n+1)
for i in range(n):
    c[i+1] += c[i] + a[i]

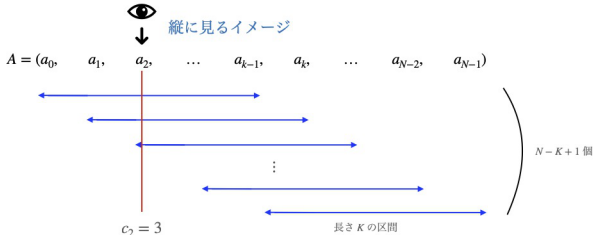
ans = 0
for i in range(n-k+1):
    ans += c[i+k] - c[i]

print(ans)
```


解法 3

各要素の寄与を考える

答えは $\sum_{i=0}^{N-1} c_i a_i$ という形になっている。 c_i が分かれば答えを計算できる。



$c_i = \min(N - K, i) - \max(0, i - K + 1) + 1$ という式で表せます (考えてみてください)

解法 3

各要素の寄与を考える

```
n,k = map(int,input().split())
a = list(map(int,input().split()))

ans = 0
for i in range(n):
    c = min(n-k,i) - max(0,i-k+1) + 1
    ans += c * a[i]

print(ans)
```