会津合宿 2017 Day3
F - 掛け算は楽しい -

原案：鈴木
問題文：栗田
解答：鈴木、栗田、杉江
解説：鈴木

2017/09/20

問題概要

問題

- 長さ N の実数列 $S = (s_1, s_2, \ldots, s_N)$ と実数 K が与えられる
- 連続する部分列 $P = (s_\ell, s_{\ell+1}, \ldots, s_r)$ $(l \leq r)$ で，$\Pi_{i=\ell}^{r} s_i \leq K$ を満たすものの中で，最長のものを求めよ
- 無い場合は 0 を出力

制約

- $1 \leq N \leq 100,000$
- $1 \leq K \leq 1,048,576$
- $0.0 \leq s_i \leq 2.0$

まず，やらなければならないこと

自明なケース

$s_i = 0$ なる i $(1 \leq i \leq N)$ があるならば，答えは N

log を取る

- 純粋に掛け算をしてしまうとオーバーフローする
- そこで，各 s_i $(1 \leq i \leq N)$ について，$s'_i = \log s_i$ とした数列 $S' = (s'_1, s'_2, \ldots, s'_N)$ 上で問題を考える
  - 自明なケースで $s_i = 0$ なる i はないので log を取れる
- また，$K' = \log K$ とする
- すると，$\Pi_{i=\ell}^{r} s_i \leq K$ の代わりに $\sum_{i=\ell}^{r} s'_i \leq K'$ で考えることができ，オーバーフローしない

誤解法例 1

- 全探索
  - $\ell \leq r$ であるインデックスの組 (ℓ, r) をすべて試す
  - $O(N^2)$ で，これは TLE

誤解法例 2

- しゃくとり法
  - $\ell = 0, r = 0, ans = 0$ から初めて $l \leq r$ であるように管理
  - $\sum_{i=\ell}^{r} s'_i \leq \log K'$ である間 $r \leftarrow r + 1$
  - $ans \leftarrow \max\{ans, r - \ell + 1\}$ としたのち $\ell \leftarrow \ell + 1$ とする
- $O(N)$ なので TLE はしない
- 目的値に単調性 (今回は広義単調増加) がないと正しくない
  - $0.0 \leq s_i \leq 2.0$ という制約から s'_i は正にも負にもなりうる
  - よって，足し算が広義単調増加でないため WA

とりあえずやること

累積和

- $imos[x] = \sum_{i=1}^{x} s'_i$ となるような配列 $imos$ を作る
  - $imos[0] \leftarrow 0$
  - $imos[i] \leftarrow imos[i-1] + s'_i \ (i = 1, \ldots, N)$
- $O(N)$ で生成可能
- $\sum_{i=\ell}^{r} s'_i = imos[r] - imos[l-1]$ となる性質を持つ

※親しみやすく (?) するために imos を使っています

方針

- 各 ℓ $(1 \leq \ell \leq N)$ について，$\sum_{i=\ell}^{r} s'_i \leq K'$ を満たす最大の $r(\geq \ell)$ を高速に見つける
    - $imos$ の性質を用いて $\sum_{i=\ell}^{r} s'_i \leq K'$ を変形すると

$$imos[r] \leq K' + imos[l-1] \tag{1}$$

- そこで，$imos$ を用いて (1) を満たす最大の r を求める

- ところで，$imos$ は単調性を満たさないので二分探索は使えない
- かといって，線形探索をすると $O(N^2)$ 解となり，これは TLE

解決策

二分探索を使えるように $imos$ を変形

- $i < j$ $(1 \leq i, j \leq N)$ について，$imos[i] > imos[j]$ ならば i が r として選ばれることはない
- つまり，以下のような配列 $imos'$ 上で考えても答えは同じ
  - $imos'[i] \leftarrow \min\{imos[i], imos[i+1], \ldots, imos[N]\}$
  - $imos'$ は単調性を満たす
- $imos'$ は累積和と似たように計算可能
  - $imos'[i] \leftarrow \min\{imos[i], imos'[i+1]\}$ $(i = N-1, N-2, \ldots, 0)$
  - 計算量は $O(N)$

想定解法まとめ

- $imos$ を計算：$O(N)$
- $imos'$ を計算：$O(N)$
- 各 ℓ $(1 \leq \ell \leq N)$ について，$imos'[r] \leq K' + imos[l-1]$ となる最大の r を計算
  - C++での例
  - upper_bound$(imos'.begin(), imos'.end(), K' + imos[l-1]) - \ell - 1$
  - 計算量は $O(\log N)$

- 全体で $O(N \log N)$

Writer 解

- 栗田 (C++, 32 行)
- 鈴木 (C++, 38 行) (python, 42 行)
- 杉江 (C++, 79 行) ※ $imos'$ を作る代わりに Segment Tree を使用した別解

提出状況

First AC

- Onsite : acpc_ufk (171 min)
- Online : pekempey (57 min)

正答率

7 / 35 (20.00%)