
問題F：風呂がオーバーフロー

問題文：井上

解説：栗田

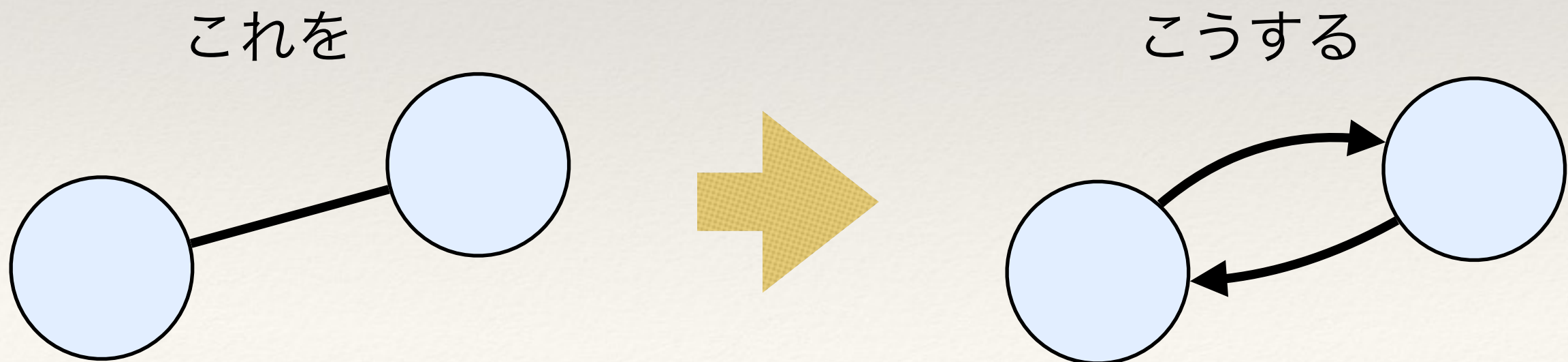
解答：井上， 栗田， 鈴木

問題概要

- ❖ 頂点数101以下の無向グラフが与えられる.
- ❖ ソースが複数, シンクが1個存在する.
- ❖ 辺の容量を1つだけ無限にして, 流量を最大化せよ. もし流量が無限になる時は"overfuro"を出力せよ.

考察1

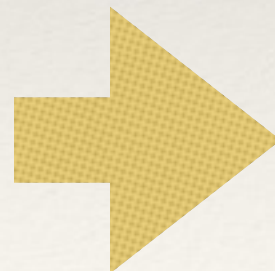
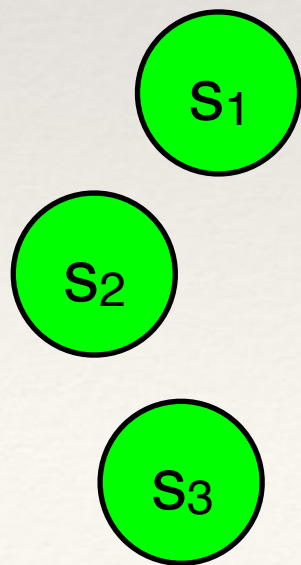
- ❖ 見るからに最大流問題を解けと言っている.
しかし, 最大流問題ではグラフは有向グラフである.
- ❖ 無向グラフを有効グラフにするテクニックとして, 無向辺が存在する頂点間にはお互いに有向辺でつなぐ方法がある.



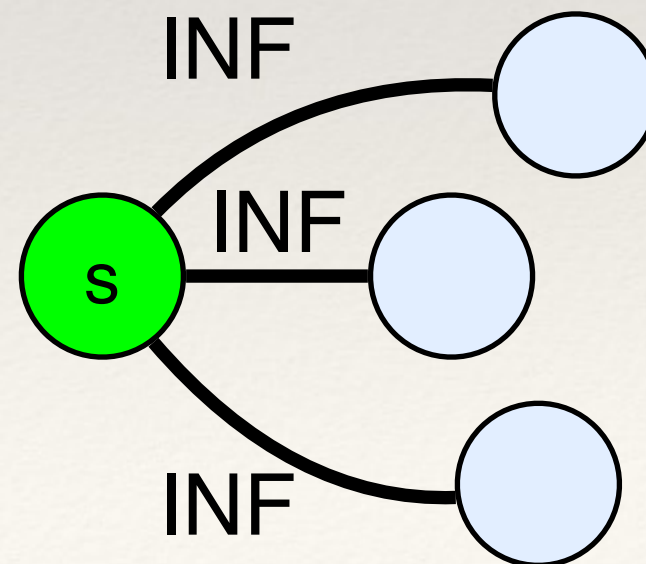
考察2

- ❖ 最大流問題ではソースは1つであるが、今回の問題はソースがK個ある.
- ❖ このような場合はノードを1つ加えてソースをまとめて考えれば良い.

これを



こうする



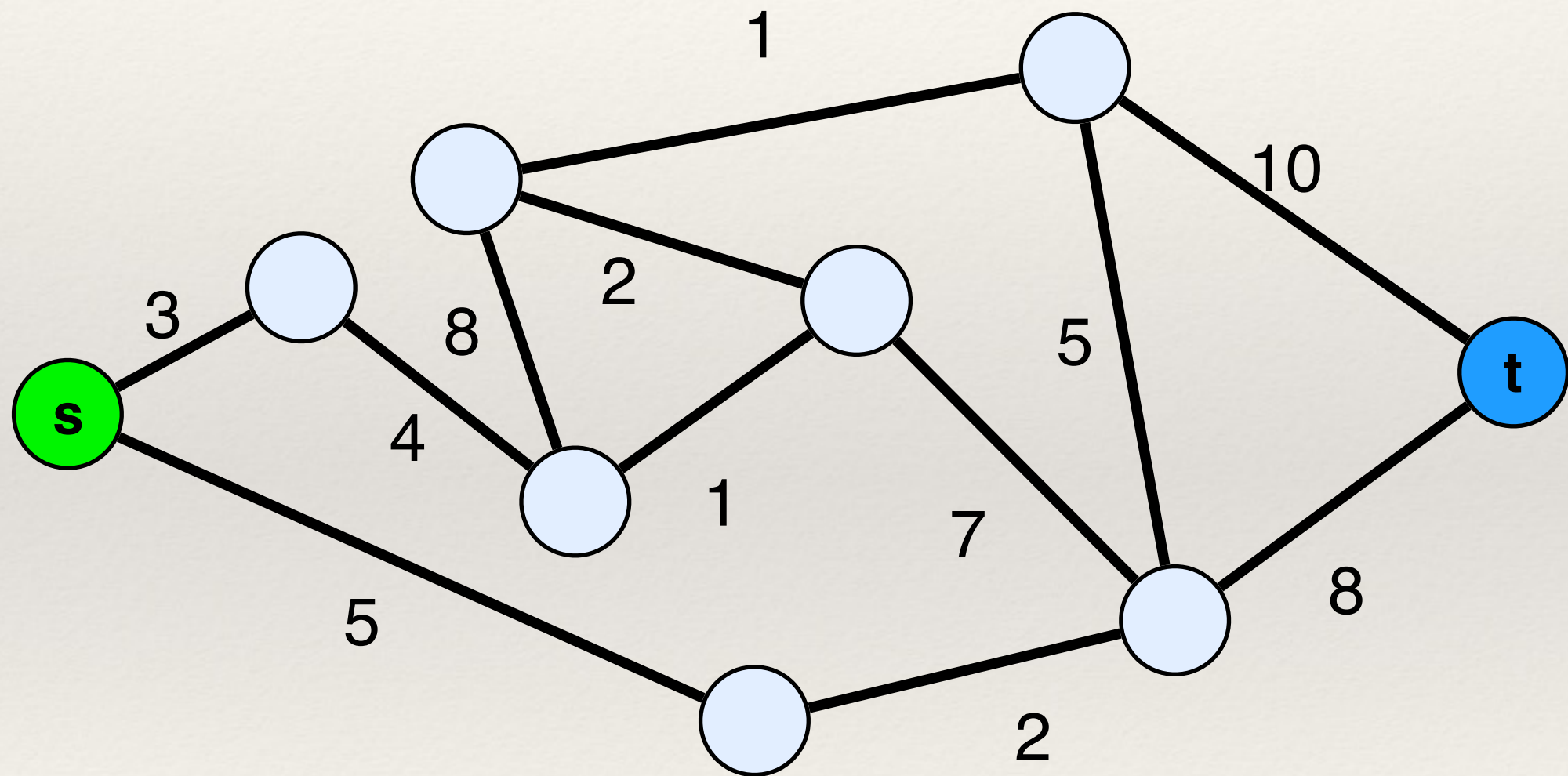
想定TLE解法

- ❖ あとは、この単一ソースの有向グラフ上で最大流問題を解けば良い。
- ❖ 単純にはグラフ中の辺を1つ選んで、その辺の容量を無限にし、最大流を解けば良い。
- ❖ E 回最大流を解くので $O(E \cdot \text{最大流アルゴリズムの計算量})$ で解ける。FordFulkersonなら $O(E^2 F)$ 、Dinicなら $O((VE)^2)$ になる。 F は答えになる最大流の値。
- ❖ どちらも 10^{10} くらいになる。これは間に合わない。

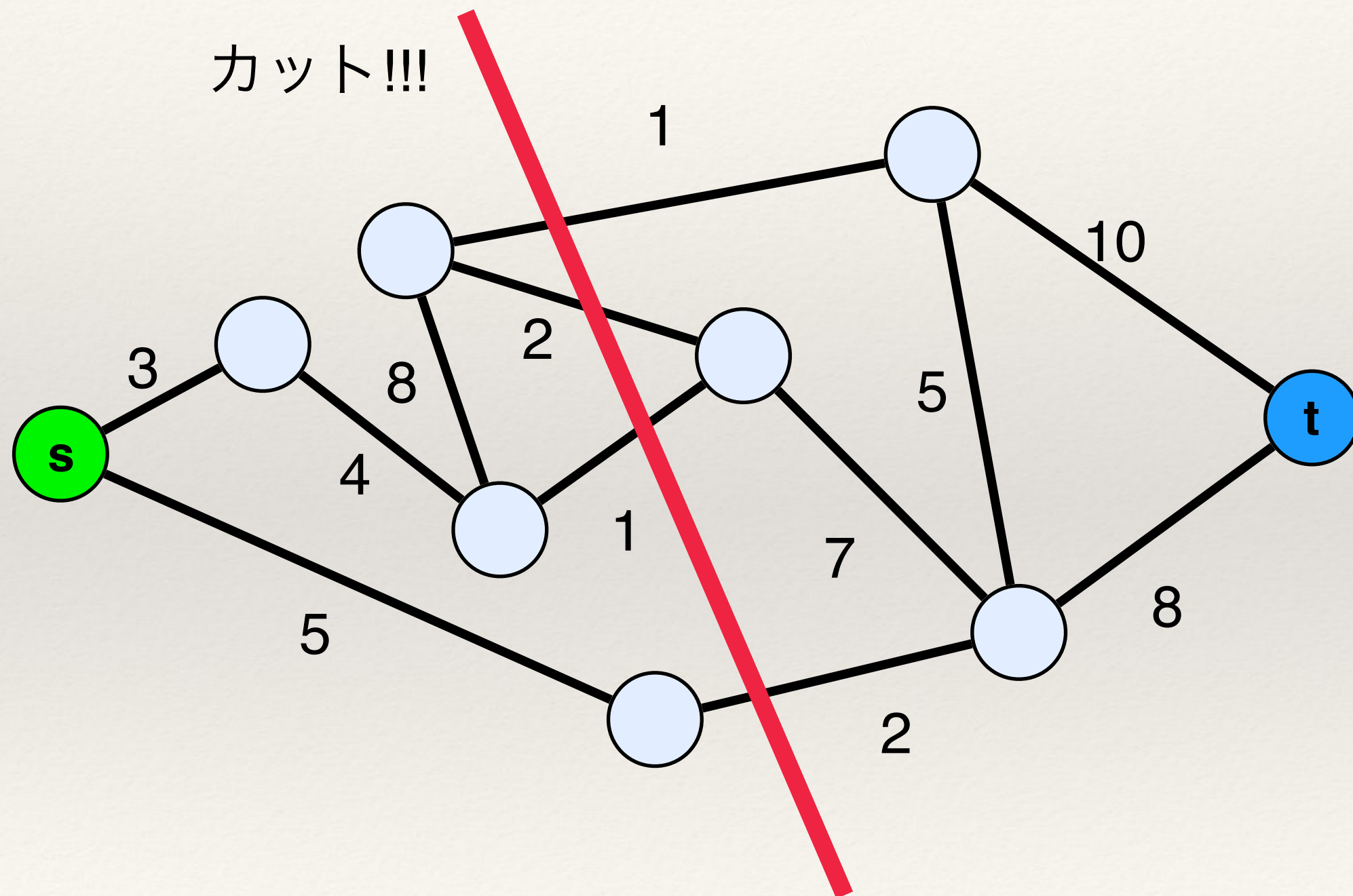
考察3

- ❖ すべての辺をオーバーフローさせる必要はない.
- ❖ 最大流最小カット定理より, 最小カットに含まれない辺の容量を増加させても意味がないことがわかる.
- ❖ なので, カットに含まれる辺についてのみ考えれば良い.

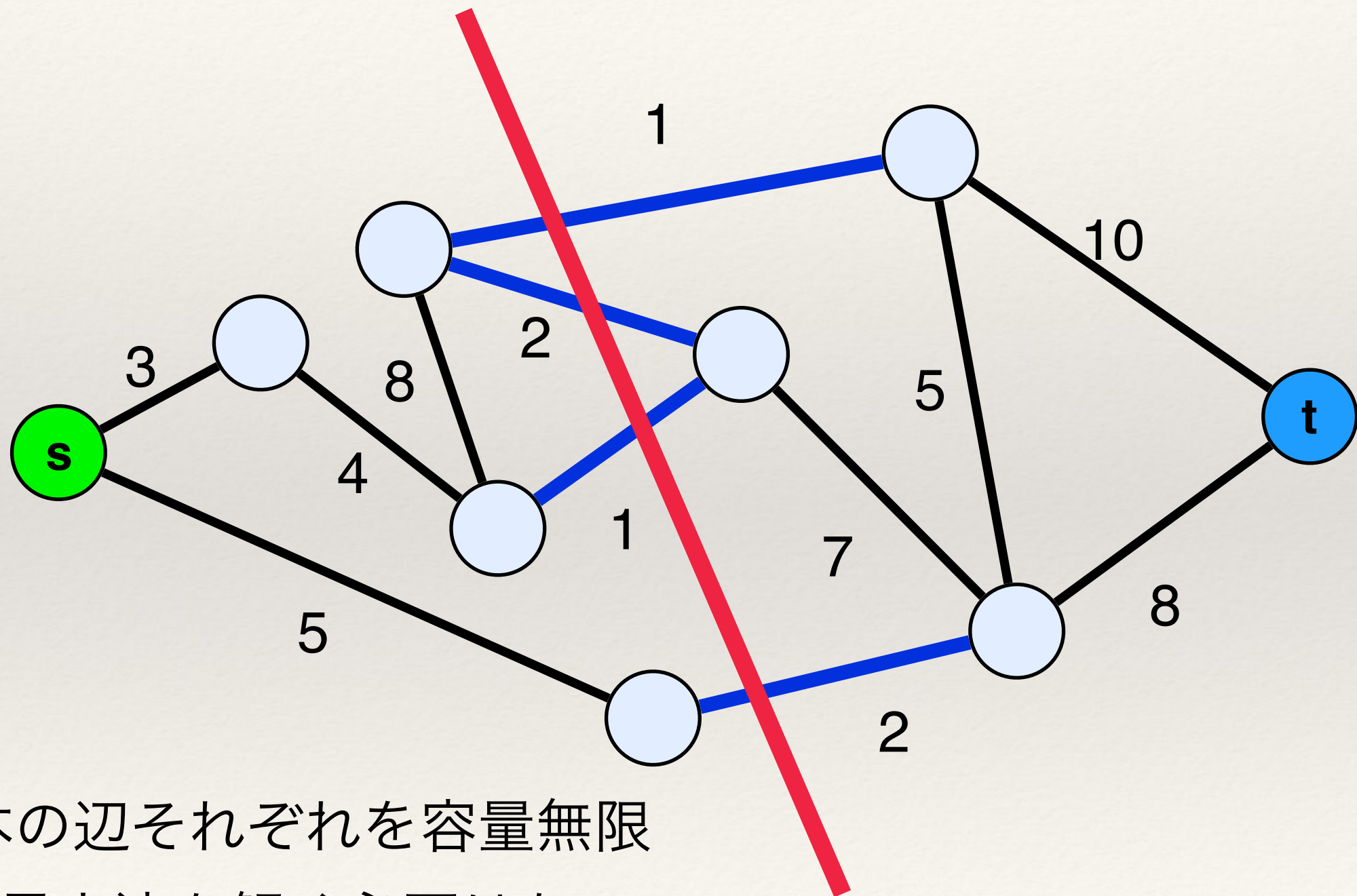
最小カット



最小カット

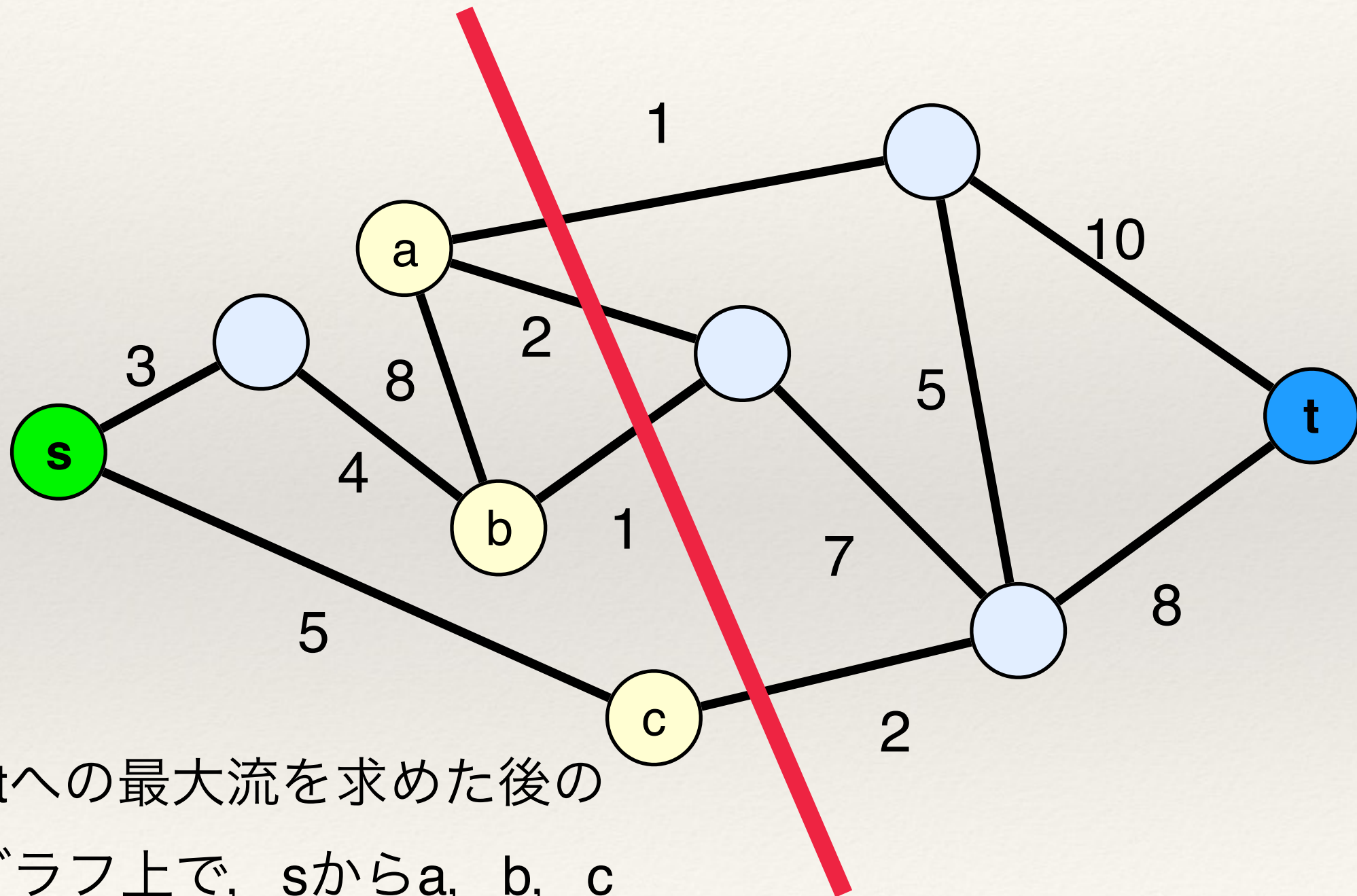


最小カット



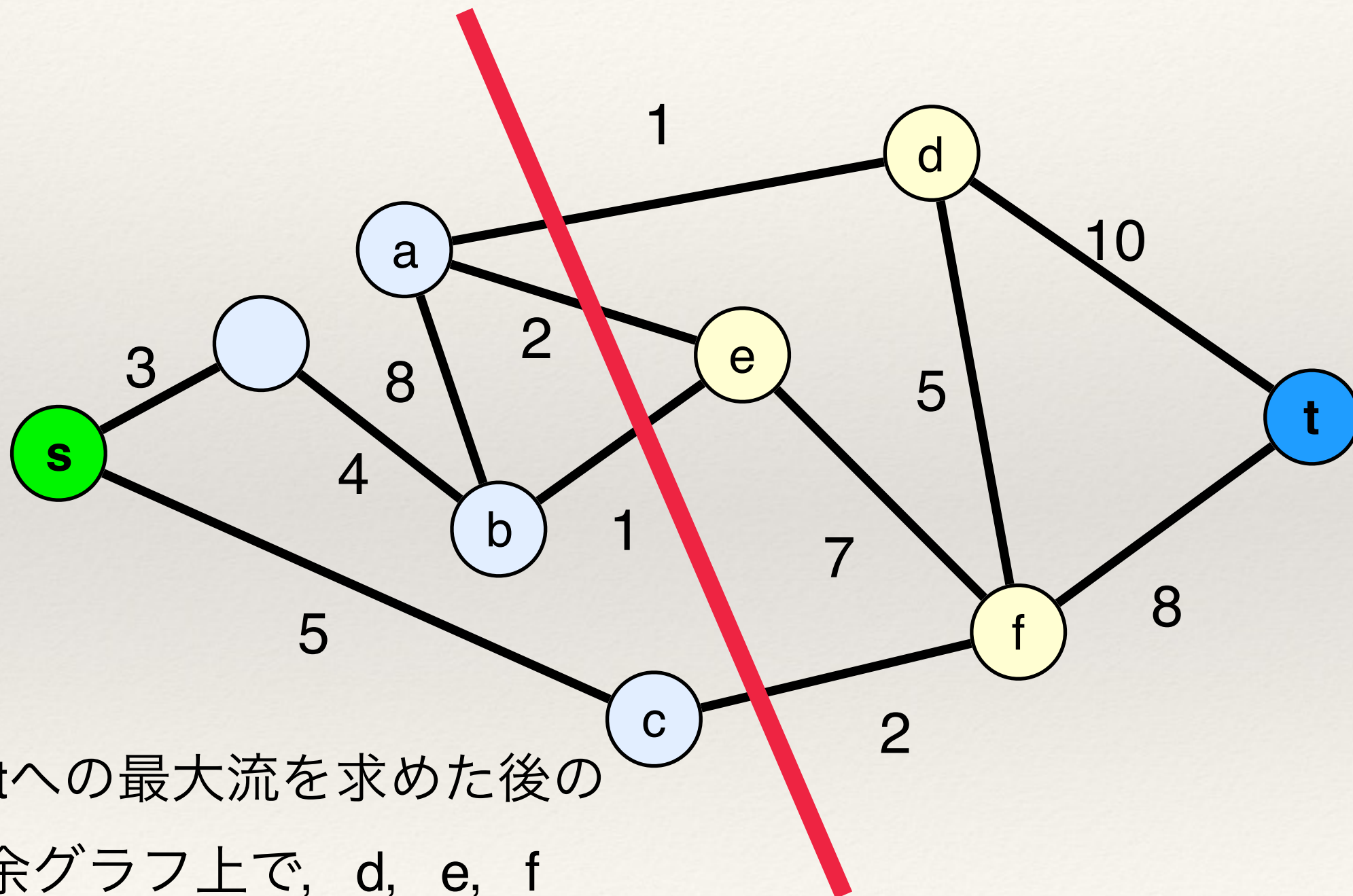
この4本の辺それぞれを容量無限
にして最大流を解く必要はない

最小カット



sからtへの最大流を求めた後の
残余グラフ上で, sからa, b, c
への最大流を求める.

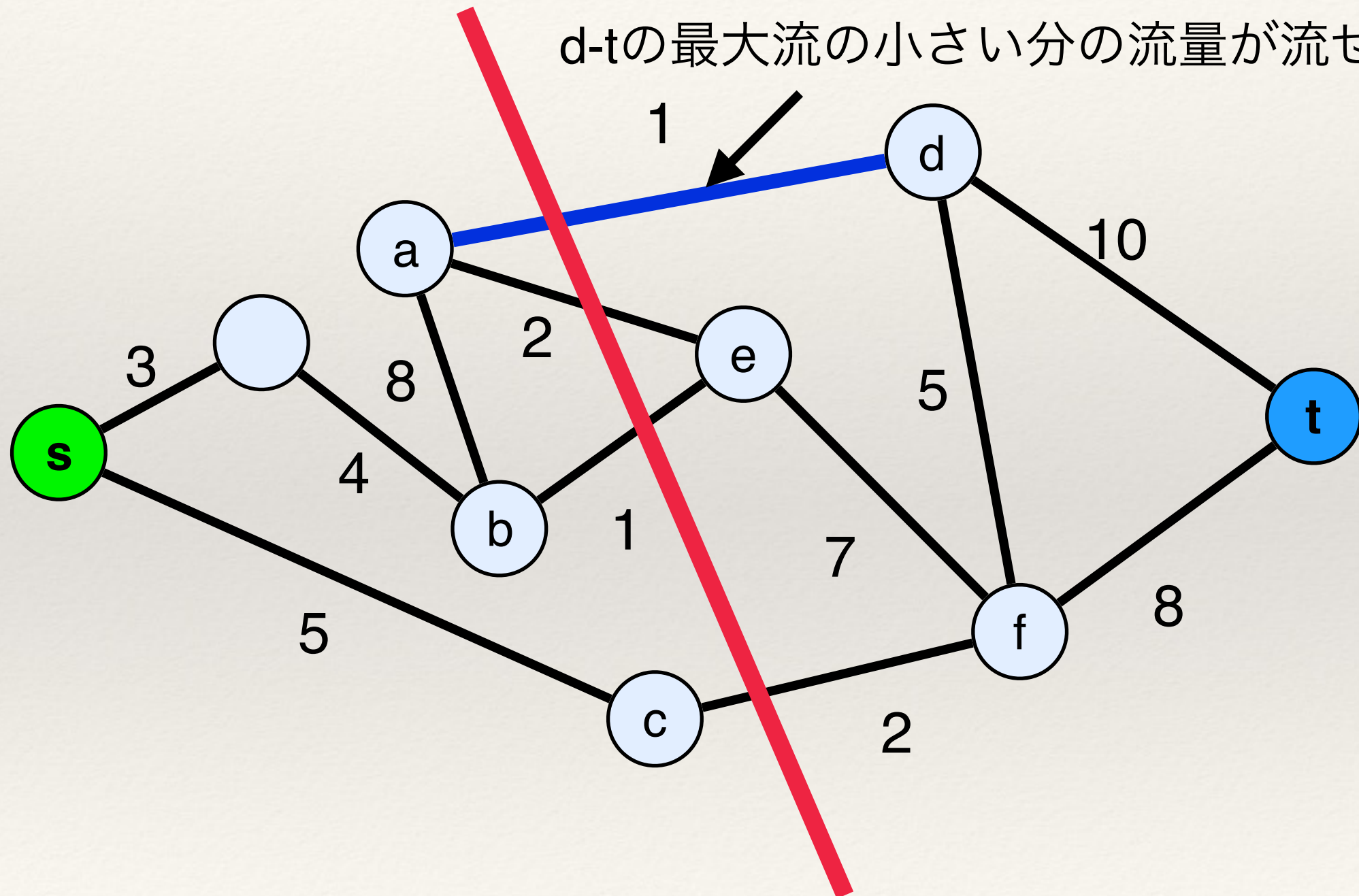
最小カット



sからtへの最大流を求めた後の
残余グラフ上で, d, e, f
からtへの最大流を求める.

最小カット

この辺をオーバーフローさせるとs-aとd-tの最大流の小さい分の流量が流せる.



想定解法

- ❖ 最小カットを求めて、カットに含まれるそれぞれの辺の端点への最大流を解いて、両端点の流量の最小値が最大になる辺をオーバーフローさせればいい.
- ❖ これにより、 V 回だけ最大流問題を解けば良い.
- ❖ よって、 $O(V \cdot \text{最大流アルゴリズムの計算量})$ になる.
- ❖ ここで、 $O(V^2E)$ のDinic法や、 $O(V^3)$ のPush-Relabel法などの高速なフローアルゴリズムを用いると解ける.
(Ford-Fulkersonでは遅い)

余談 (Dinicは速い)

- ❖ Dinic法は最悪計算量が $O(V^2E)$ のアルゴリズムだが、最悪ケース以外のグラフではめちゃめちゃ速い.
- ❖ 今回の問題はDinic法を使ったナイーブ解法でも、最悪ケース以外では余裕でACする.
- ❖ 他にもグラフの制約によってはDinic法は理論的に計算量が改善するらしい.

参考サイト：http://topcoder.g.hatena.ne.jp/Mi_Sawa/20140311/1394730337

Writer解

- ❖ 井上 (C++) : 119行
- ❖ 鈴木 (C++) : 134行
- ❖ FordFulkersonは遅いのでDinicを覚えるといいことあるかも

解答状況

❖ FA

-オンライン : tanzaku

-オンサイト : energy_star

❖ Accept/Submit

- 4/41 (9.76%)