

# 会津合宿2017 Day3 B問題

## えびちゃんと数列

- 原案: 栗田、鳥谷部
- 問題文: 瀧澤
- 解答: 栗田、杉江、瀧澤
- 解説: 瀧澤

# 問題概要

- 以下の個数を  $\text{mod } 10^9 + 7$  で求める
  - 長さ  $n$  の等差数列  $\{s_i\}$
  - 各要素  $s_i$  は整数で  $0 \leq s_i \leq m$  を満たす
- 制約
  - $1 \leq n \leq 10^{15}$
  - $0 \leq m \leq 10^{15}$ 
    - 32bit 整数では収まらない

# サンプル1

- 入力
  - 長さ  $n = 3$
  - 上限値  $m = 9$
- 出力
  - 50
    - $\{0, 0, 0\}, \{0, 1, 2\}, \dots, \{2, 1, 0\}, \{2, 2, 2\}, \dots, \{9, 9, 9\}$

# 解説(1/5)

- 数学的なことを考える必要がある
  - ループなどでの数え上げでは間に合わない
    - $n, m$  の上限がとても大きいため
- 数列の初項と末項を定めればよい
  - 等差数列なので、残りは一意に求まる
  - どう定めよう？

# 解説(2/5)

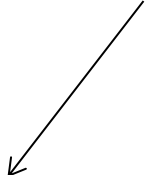
- 公差の満たす条件を考える
  - 整数列なので、整数である必要がある(自明)
    - このとき初項と末項の差は  $n - 1$  の倍数になる
- これにより、数えるべきものを言い換えられる
  - 以下の条件を満たす非負整数の順序対  $\langle a, b \rangle$ 
    - $a, b \leq m$
    - $|a - b|$  が  $n - 1$  の倍数である
  - これは次ページ以降の要領で  $O(1)$  で求まる

# 解説(3/5)

- $n = 6, m = 11$  を例に考える

$\text{mod } (n - 1)$  で  $m$  以下の  
非負整数を分ける

mod 5	0	1	2	3	4
	0	1	2	3	4
	5	6	7	8	9
	10	11			



- $\{0, 5, 10\}$  から順序対を作る  $\rightarrow 3^2 = 9$
- $\{1, 6, 11\}$  から順序対を作る  $\rightarrow 3^2 = 9$
- $\{2, 7\}$  から順序対を作る  $\rightarrow 2^2 = 4$
- $\{3, 8\}$  から順序対を作る  $\rightarrow 2^2 = 4$
- $\{4, 9\}$  から順序対を作る  $\rightarrow 2^2 = 4 \quad \therefore 30$

# 解説(4/5)

- $n = 6, m = 11$  を例に考える

mod 5	0	1	2	3	4
	0	1	2	3	4
	5	6	7	8	9
	10	11			

$d + 1$  (vertical dimension of the first column)  
 $d = \left\lfloor \frac{(m + 1) - 1}{n - 1} \right\rfloor$  (vertical dimension of the remaining columns)  
 $k = (m + 1) - (n - 1) \cdot d$  (horizontal dimension of the first  $k$  columns)  
 $(n - 1) - k$  (horizontal dimension of the remaining columns)

- 総数は  $k \cdot (d + 1)^2 + (n - k - 1) \cdot d^2$ 
  - 表の横幅は  $n - 1$ 、要素数は  $m + 1$
  - $m$  が  $n - 1$  の倍数の場合は赤い方が潰れる

# 解説(5/5)

- オーバーフローには注意
  - 64bit 整数でも  $10^{15}$  同士の掛け算は無理
  - うまく工夫する
    - 順序を変えたり、先に mod をとったり
- ゼロ除算にも注意
  - $n = 1$  の場合は分ける
    - 総数は自明に  $m + 1$
    - ここでも mod をとるのを忘れずに



# Writer 解

- C++
  - 栗田 : 23行
  - 杉江 : 33行
  - 瀧澤 : 30行
- Python
  - 栗田 : 11行
  - 杉江 : 10行