E - Subset Coloring

原案・解説 ReiVindicatio(@RVindicatio)

2022 年 3 月 19 日

$K = 1$ のとき, 全て同じ色で塗っても条件を満たせるので, 答えは 1 です.

また, $K \geq 3$ の時, 全ての部分集合を異なる色で塗らなければならないため答えは 2^N となります. もし $A, B \in \mathcal{Q}$ が同じ色で塗られていた場合, $A \cup B \cup P = P$ であり, 明らかに条件に反するためです.

以下, $K = 2$ とします.

解の下界を考えます. P の要素から i を除いた部分集合を $A_i := P \setminus \{i\} \in \mathcal{Q}$ として定義します. 例えば, $A_1 = \{2, 3, 4, \cdots, N\}, A_3 = \{1, 2, 4, \cdots, N\}$ などとなります.

このとき, $P, A_1, A_2, \cdots, A_N$ のどの二つを選んでも和集合は明らかに P になります. このためこれら $N + 1$ 個の要素は異なる色で塗らなければならず, 解の下界は $N + 1$ であることがわかります.

次に, この下界が常に構築できることを示します. $P, A_1, A_2, \cdots, A_N$ をそれぞれ色 $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_N$ の $N + 1$ 色で塗ることにします. 上記以外の $\mathcal{Q}$ の要素 $B \in \mathcal{Q}$ の大きさは $N - 2$ 以下であり, B は $1, \cdots, N$ の中で必ず含まない自然数 j を持ちます. この時, B を色 C_j で塗ることにすれば, 色 C_j で塗られている集合は必ず要素 j を含まなくなるので, 和集合は P とはならず条件を満たすことができます.

以上により常に構築できるので, $K = 2$ の時の解は $N + 1$ となります.

計算量は $K \leq 2$ のとき $O(1)$, $K \geq 3$ の時は累乗を適切に実装すれば $O(\log N)$ ですが $O(N)$ も許容されています.