

J- GCD swap

原案・解説 ReiVindicatio(@RVindicatio)

2022 年 3 月 19 日

まず, 数字のうち $1, 5, 7$ は任意の数字と swap できるので, いったん数列から取り除き, 最後に任意の場所に挿入してできる数列を数えても良いです (正確には $5, 7$ は自分自身と swap できませんが, 同じ数字を swap してもできる数列は変化しないので自分と swap できるとして良いです).

数列から $1, 5, 7$ を取り除いた数列を考えます. この数列に含まれる数字は $2, 3, 4, 6, 8, 9$ ですが, このうち 6 はどの数字とも swap することができません. よって, この数列を 6 が出てくる部分で区切り, 区切られた内部での並び替えを考えます.

区切られた数列においては $2, 3$ の累乗しかなく, 同じ素因数を持つ数字どうしは swap できませんが, そうでない場合は自由に swap することができます. よって, 区切られた数列内部にある 2 の倍数の個数を s , 3 の倍数の個数を t とすれば, それぞれの区切られた数列内部で作りうる数列の種類数は $C(s+t, s)$ となります.

あとは全ての区切られた数列について上記の値を掛け合わせ, $1, 5, 7$ の影響を加味すれば答えとなります. $1, 5, 7$ の個数をそれぞれ a, b, c とすれば, 長さ $N - a - b - c$ の数列に自由にこれらの値を挿入するので, $C(N, a) \times C(N - a, b) \times C(N - a - b, c)$ を答えにかけ合わせれば良いです.

適切に二項係数の計算を前計算すれば, 時間計算量は $O(N)$ です.