HUPC 2021 Day1
H:Infinite Problems 解説

原案、解説：N_hara

Tester:N_hara,tubuann

余談

Q.

問題タイトルが”Infinite Problems”なのに問題数が有限

A.

原案では問題数が無限$\left(a_i = i, p_i = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor\right)$でしたが、

答えの埋め込み防止としてこうなりました。

問題

問題 $1, \ldots, N$ からなるコンテストがあり、
問題 i の配点は a_i 点です。
ただし、最初に回答権のある問題は問題 1 のみであり、
問題 i の回答権を得るためには問題 p_i に正解している必要があります。この条件を満たした上で、解いた問題の点数の合計が K 点となる組み合わせは何通りありますか？
答えを 998244353 で割った余りを出力してください。

問題を言い換えると…

正整数 K と、頂点 $1, \ldots, N$ の N 頂点からなり頂点 1 を根とする根付き木が与えられ、頂点 $i(2 \leq i \leq N)$ の親は頂点 p_i です。
また、各頂点には数字 a_i が書かれています。
このとき、以下の条件をすべて満たす集合 $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ の個数 $\pmod{998244353}$ を答えてください。

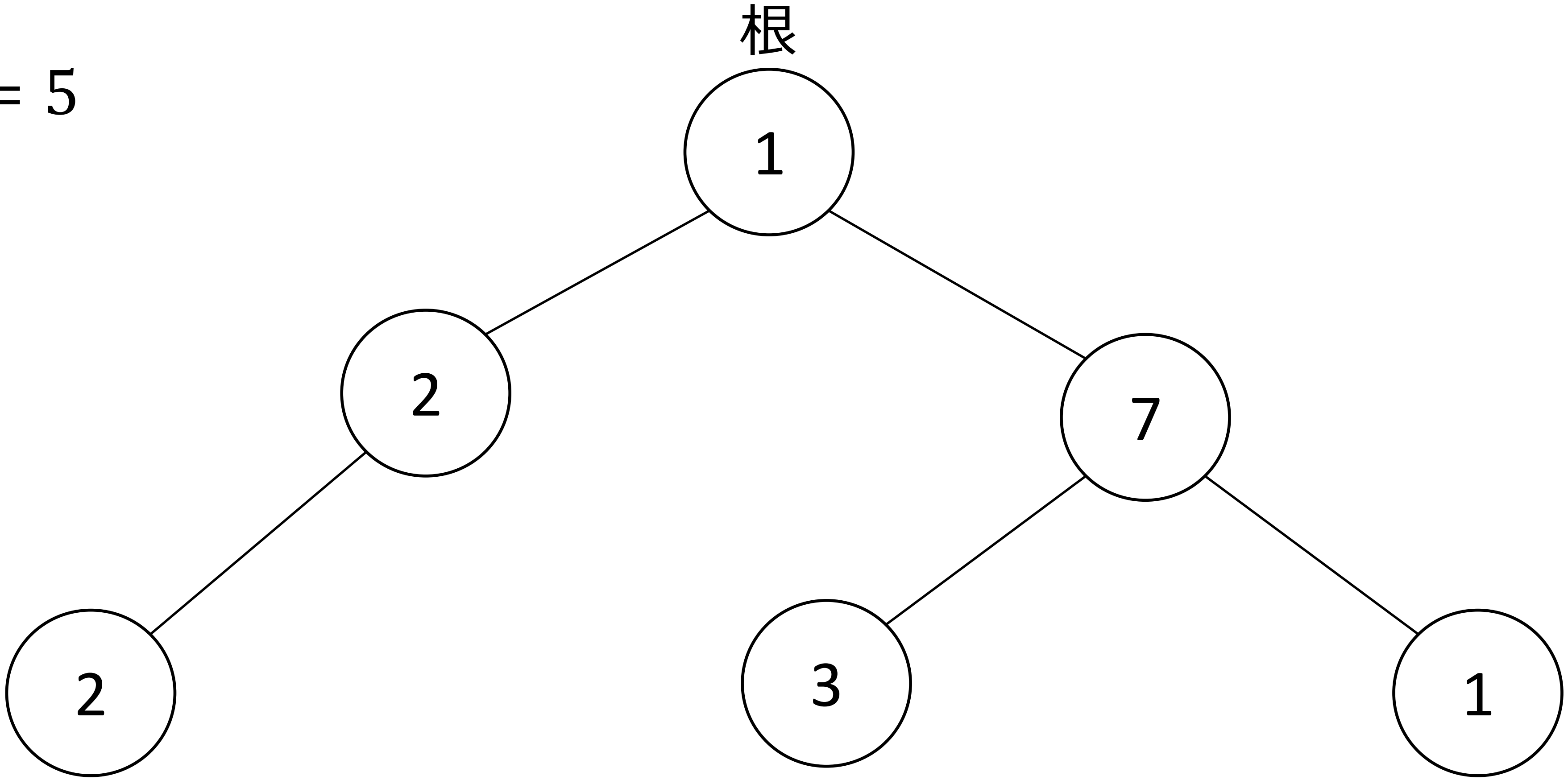
・S は集合 $\{1, \ldots, N\}$ の部分集合

・$\sum_{i=1}^{k} a_{s_i} = K$

・$v \in S \rightarrow p_v \in S (2 \leq v \leq N)$

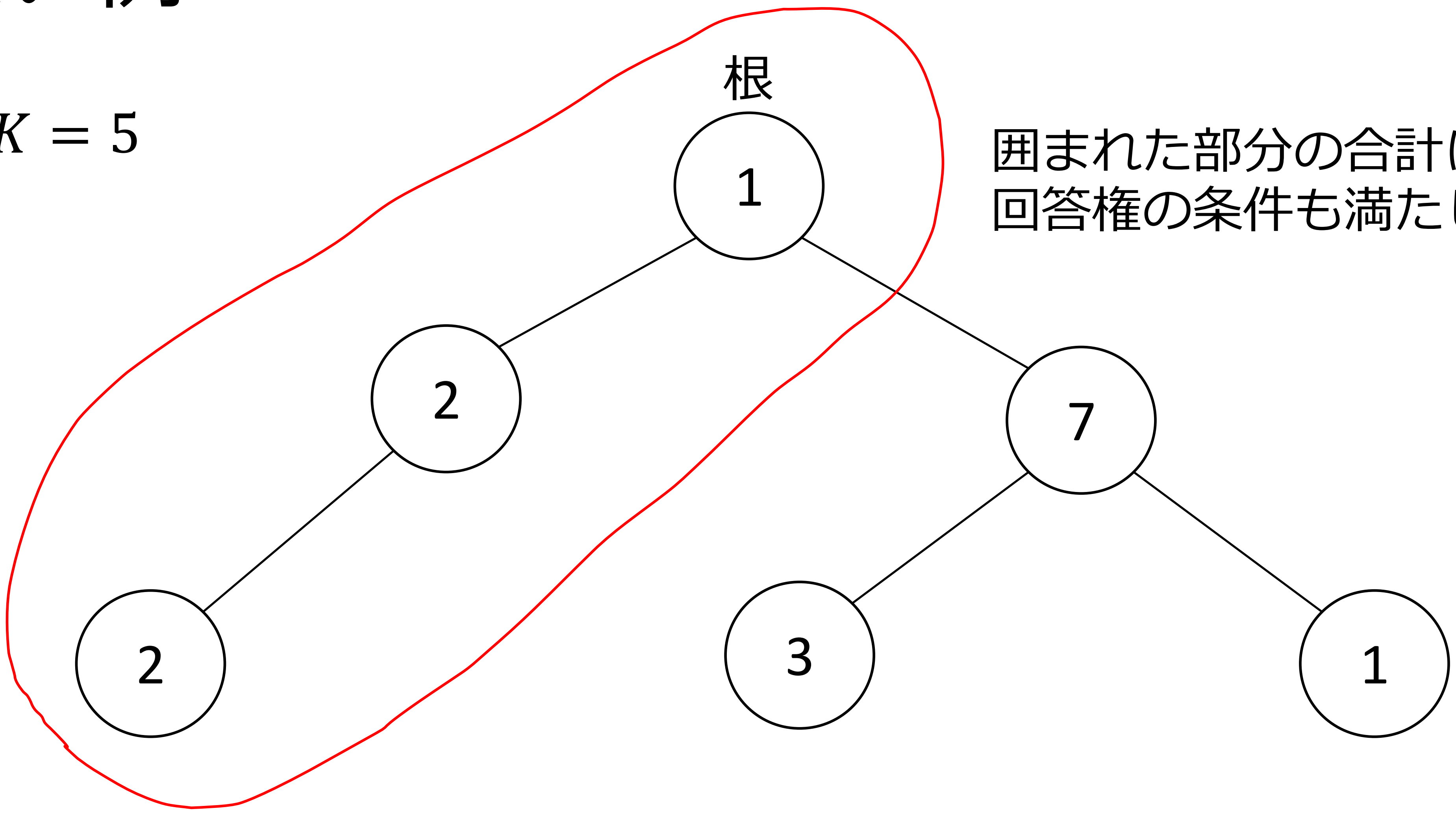
例

$K = 5$



良い例

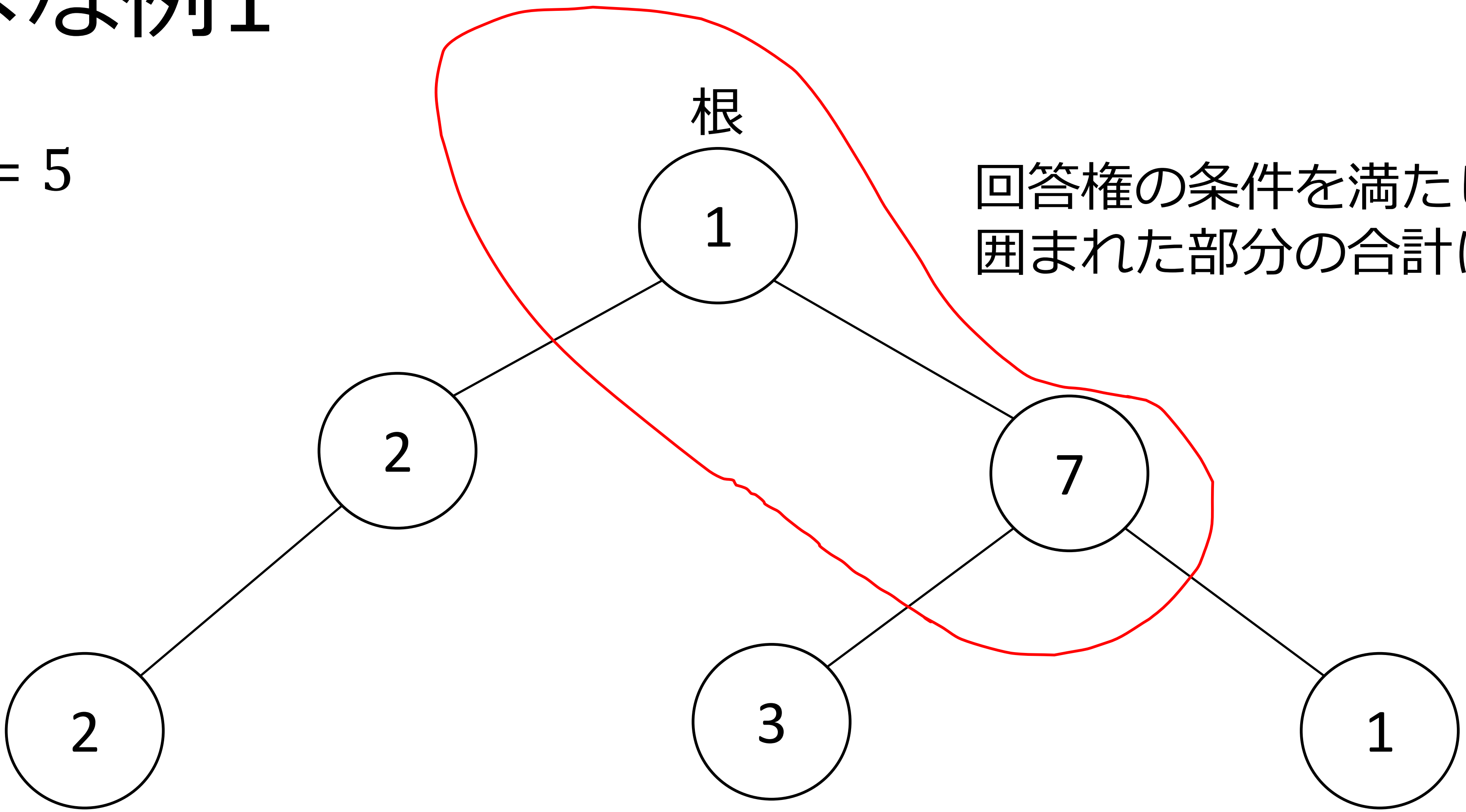
$K = 5$



囲まれた部分の合計は $5(= K)$ 点
回答権の条件も満たしている

ダメな例1

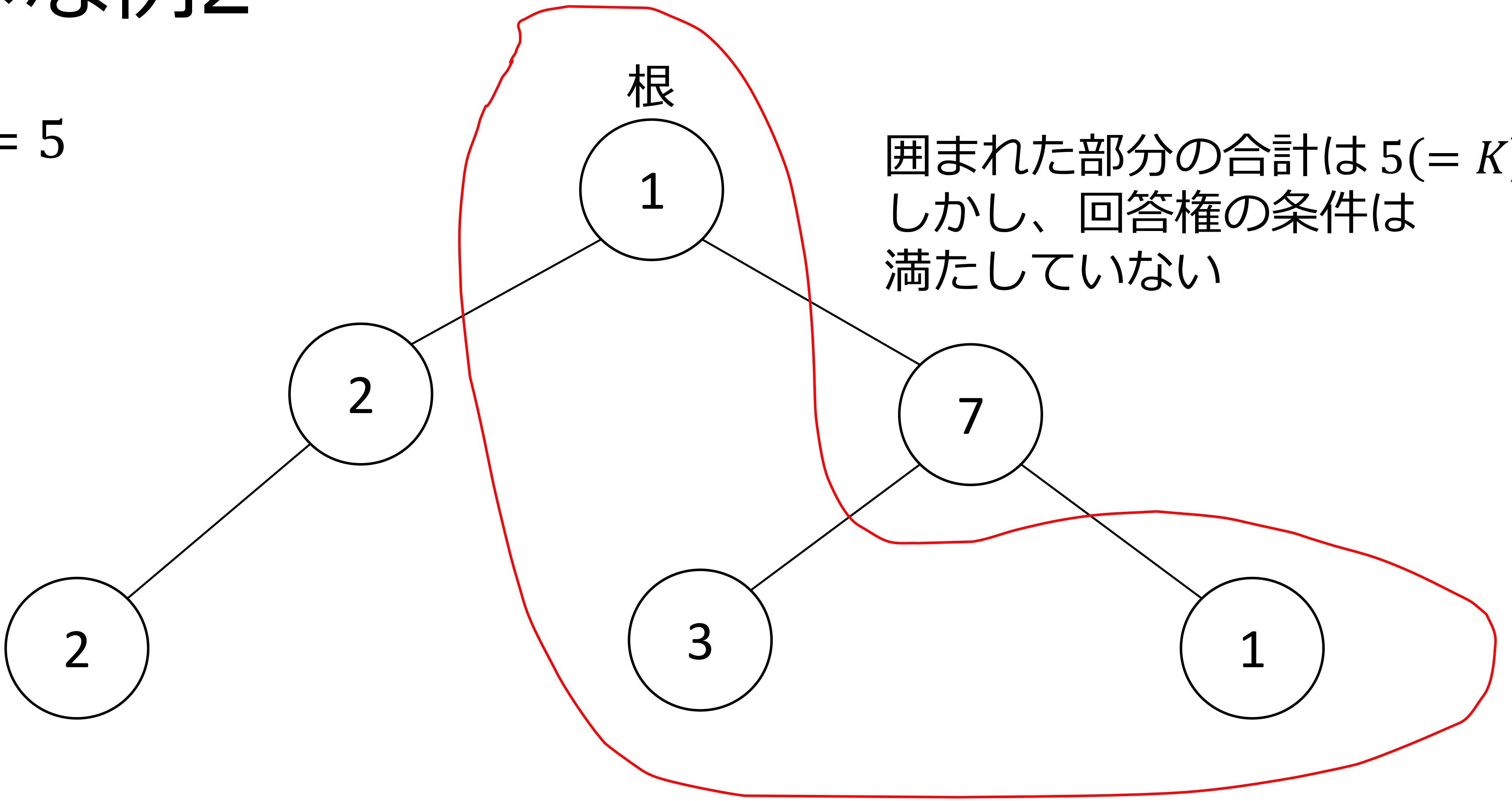
$K = 5$



回答権の条件を満たしているが、
囲まれた部分の合計は $8(\neq K)$ 点

ダメな例2

$K = 5$



囲まれた部分の合計は $5(= K)$ 点
しかし、回答権の条件は
満たしていない

解法

木DPをします。

以下、

$dp[i][j] =$ 頂点 i を根とする部分(根付き)木において

合計点が j 点となる組み合わせの通り数 $(\mathrm{mod}\ 998244353)$

と定義します。

このとき、答えは $dp[0][K]$ の値です。

(ここでは、簡単のため

$dp[i][0] = 1, dp[i][j] = 0 (1 \leq j \leq K)$ と初期化します)

解法

このときのDPの遷移を考えます。

1)頂点 i を選ぶ(=問題 i に正答する)とき

頂点 i を親に持つ頂点を $c_1, \ldots, c_k$ とおいて

DPの遷移を考えると

$$dp[i][j + a_i] = dp[c_1][v_1] * \cdots * dp[c_k][v_k] (\mathrm{mod}\ 998244353)$$

となります。

ただし、 $0 \le j \le K - a_i, 0 \le v_l \le K (1 \le l \le k), \sum_{l=1}^{k} v_l = j$

(頂点 i を選ぶ際に a_i 点が加算されることに注意します)

解法

$dp[i][j+a_i] = dp[c_1][v_1] * \cdots * dp[c_k][v_k] \pmod{998244353}$

この遷移は、$l = 1, \dots, k$について配列tmpを用意し

$tmp[j+a_i] = dp[c_l][v_l] * dp[i][j-v_l] \pmod{998244353}$

$dp[i][j] = tmp[j] (0 \le j \le K)$

という遷移を繰り返すことで可能です。

($dp[i]$は$dp[i][0] = 1, dp[i][j] = 0 (1 \le j \le K)$と初期化します)

解法

2)頂点 i を選ばない(=問題 i に正答しない)とき
頂点 i を根とする部分木に含まれる頂点を選ぶことは
できない(=合計点は 0)ので、遷移は

$$dp[i][0] = 1$$

のみとなります。

解法

以上をまとめると、

(⓪ $dp[i][0] = 1, dp[i][j] = 0 (1 \leq j \leq K)$と初期化)

①頂点 i を親に持つ頂点を $c_1, \ldots, c_k$に対し $l = 1, \ldots, k$について

$dp'[i][j + a_i] = dp[c_l][v_l] * dp[i][j - v_l]$

$dp[i][j] = dp'[i][j] (0 \leq j \leq K)$ と計算

② $dp[i][0] = 1$ と更新

この計算を葉となる頂点から順に行うことで正答できます。

解法

この遷移は全体で $O(N)$ 回発生します。
遷移1回の計算量は、愚直に計算すると
$O(K^2)$ となりますが、高速フーリエ変換などを用いる
ことにより $O(K \log K)$に改善できます。
(998244353 で割った余りを求めることに注意してください)

以上により全体の計算量は$O(NK \log K)$となり、
実行時間制限に間に合います。