

HUPC2020 day1 F

n 角錐グラフ

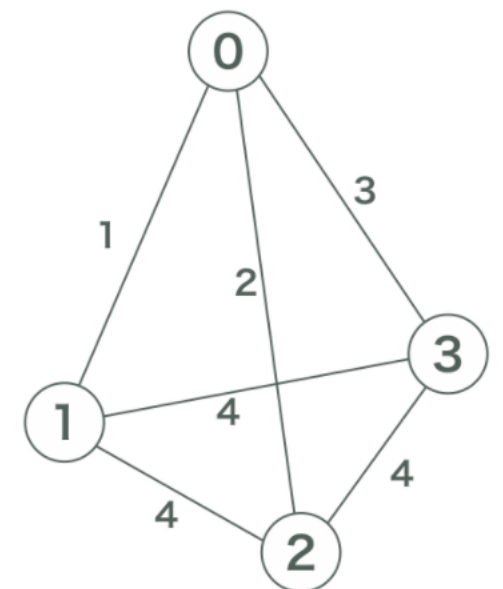
原案：monkukui
解説：monkukui
解法提供：tsutaj

問題概要

- N 角錐グラフが与えられる
- 始点と終点が共に頂点 0 であるような、長さ K のサーキット全てに対するコストの総和を求めよ

[制約]

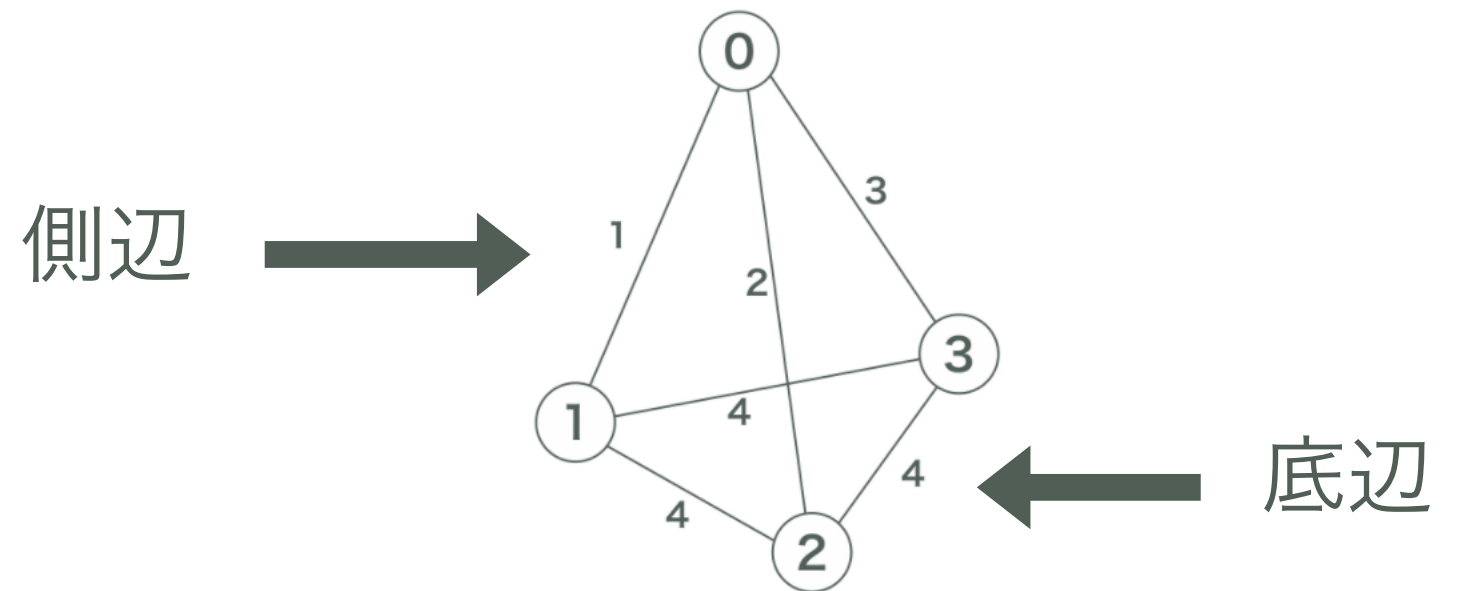
- $1 \leq N \leq 10^6$
- $1 \leq K \leq 2N$



図：重み付き 3 角錐グラフ

用語の定義

- 辺 $\{0, i\}$ ($1 \leq i \leq N$) を側辺と呼ぶ
- 辺 $\{i, i + 1\}$ ($1 \leq i \leq N$) を底辺と呼ぶ



図：重み付き 3 角錐グラフ

想定 TLE 解法

- bitDP
 - どの頂点にいるか、パスの長さ、どの辺を使ったか
 - $O(NK4^N)$

サイクルの個数を決め打つ

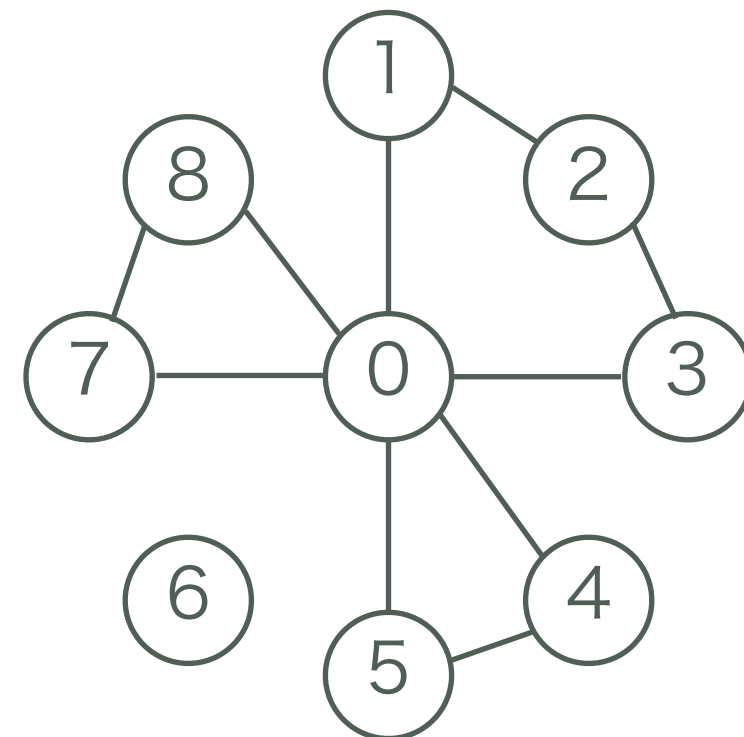
- サイクルの個数を決め打つ $\rightarrow L$ と置く
 - 使う側辺は $2L$ 、使う底辺は $K - 2L$ 、使う底面の頂点は $K - L$ 個
- L を固定したときのサーキットの個数を C_L とすると
 $C_L (2L \cdot (\text{側辺の重みの平均}) + (K - 2L) \cdot (\text{底辺の重みの平均}))$

が、サーキットの重み和になる

➡ C_L を求めれば良い

以降は、 C_L の求め方を解説します

$N = 8, L = 3$ の図



左端を固定する

- 円環を列に直して、
左端（頂点 1, 2, ..）は必ず最初に使うことにして数えあげる
 - その値に、
 2^L （左回りか右回りか）、 $(L-1)!$ 使う順番、 N （左端の頂点）
を最後に掛けると、全体の通り数が求まる

$L = 2$ の例

必ず最初に使う
何個使うかは決まっていない



あとは自由に使う



左端を固定する

- 円環を列に直して、
左端（頂点 1, 2, ..）は必ず最初に使うことにして数えあげる
 - その値に、
 2^L （左回りか右回りか）、 $(L-1)!$ 使う順番、 N （左端の頂点）
を最後に掛けると、全体の通り数が求まる

$L = 2$ の例

必ず最初に使う

何個使うかは決まっていない

あとは自由に使う



左端を固定する

- 円環を列に直して、
左端（頂点 1, 2, ..）は必ず最初に使うことにして数えあげる
 - その値に、
 2^L （左回りか右回りか）、 $(L-1)!$ 使う順番、 N （左端の頂点）
を最後に掛けると、全体の通り数が求まる

$L = 2$ の例

必ず最初に使う
何個使うかは決まっていない

あとは自由に使う

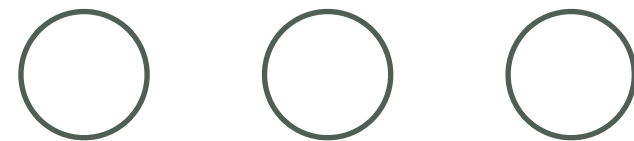


順に、何頂点ずつ使うか

- 各サイクルは、最低 2 つの頂点を使うので、あらかじめ入れる
- 残りの使うべき頂点数は $(K - L) - 2L = K - 3L$ であり、重複組み合わせ ${}_L H_{K-3L}$ で計算することができる



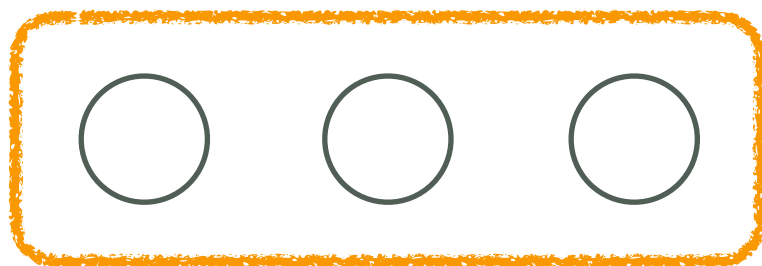
$2L$ 個



$K - 3L$ 個

順に、何頂点ずつ使うか

- 各サイクルは、最低 2 つの頂点を使うので、あらかじめ入れる
- 残りの使うべき頂点数は $(K - L) - 2L = K - 3L$ であり、重複組み合わせ ${}_L H_{K-3L}$ で計算することができる

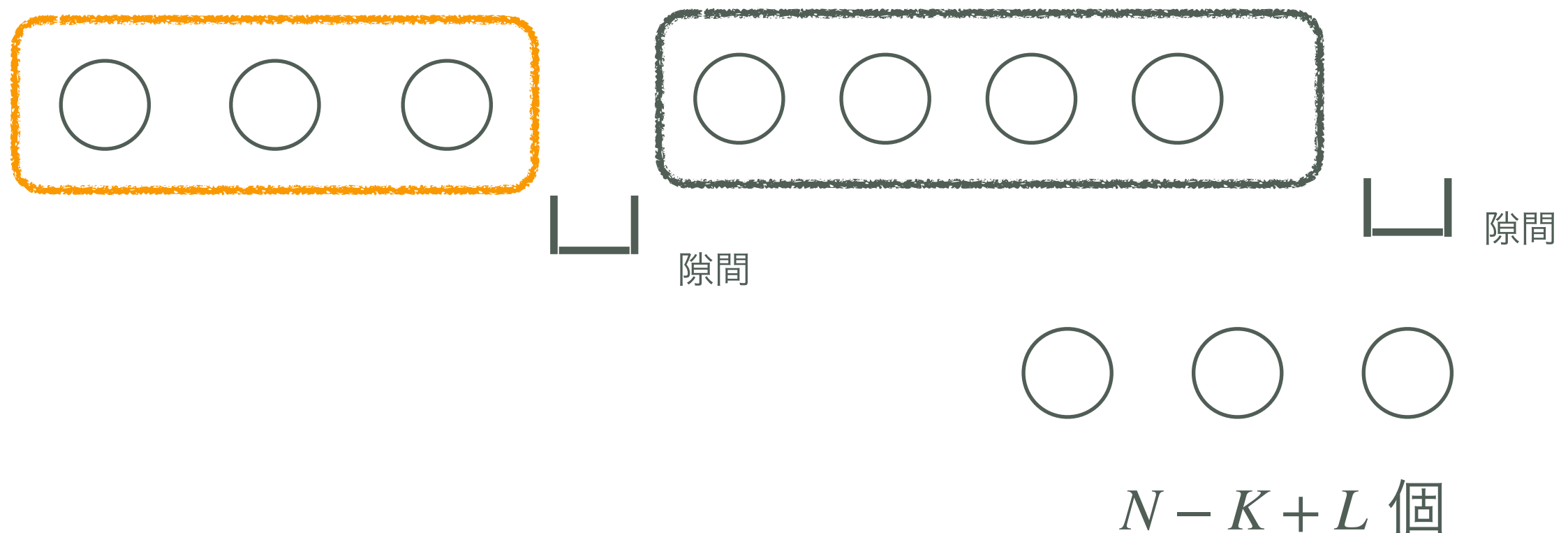


$K - L$ 個



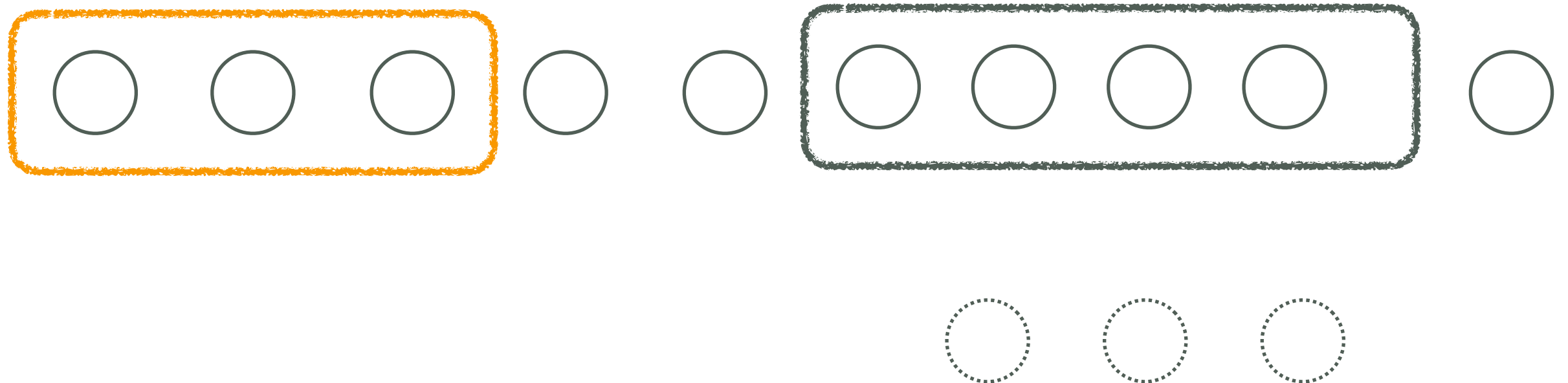
使わない頂点を隙間に入れる

- 使わない頂点が $N - K + L$ 個あり、隙間の L 箇所に入れる
- これは、重複組み合わせ ${}_L H_{N-K+L}$ で計算することができる



使わない頂点を隙間に入れる

- 使わない頂点が $N - K + L$ 個あり、隙間の L 箇所に入れる
- これは、重複組み合わせ ${}_L H_{N-K+L}$ で計算することができる



使わない頂点を隙間に入れる

- 使わない頂点が $N - K + L$ 個あり、隙間の L 箇所に入れる
- これは、重複組み合わせ ${}_L H_{N-K+L}$ で計算することができる



解法のまとめ

- サイクルの個数 L を固定する
- C_L (サイクルの個数が L になるサーキットの通り数) を、以下の式に従って求める

$$C_L = 2^L (L - 1)! N \cdot_L H_{K-3L} \cdot_L H_{N-K+L}$$

- P5 の式に従って、答えを足し合わせていく

テスター解

- tsutaj (C++) 80 行
- tsutaj (Java) 141 行
- monkukui (C++) 225 行
- tab (Python) 42 行

FA

- nvip62 (64 min 44 sec)

正答率

- 22/66