

G: カードの迷宮

Dungeon of Cards

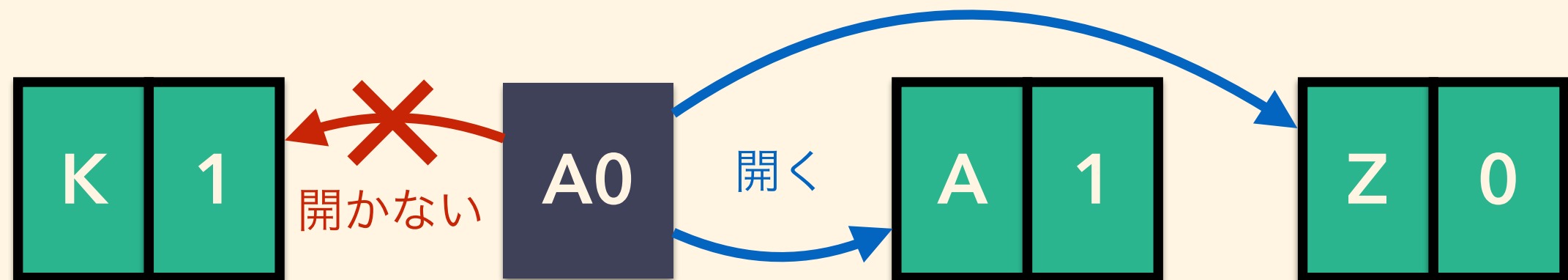
原案：井上

問題文：鈴木

解答：井上・鈴木

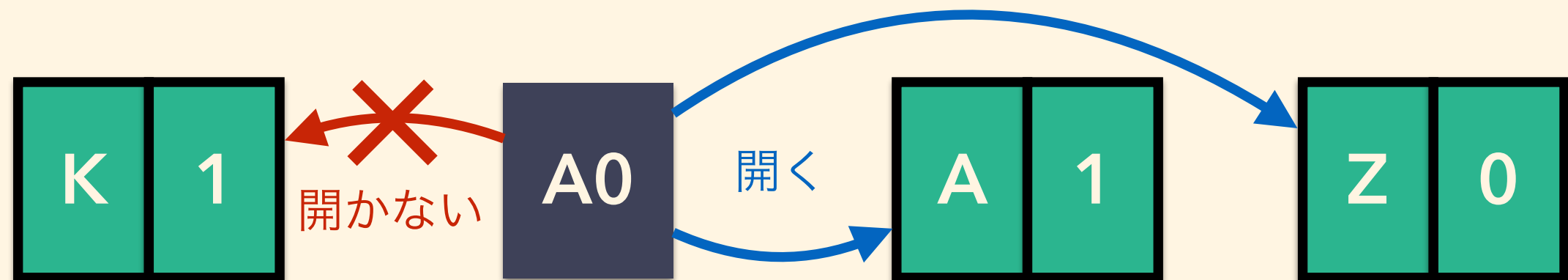
問題概要

- 英大文字と数字がそれぞれ1つずつ描かれた扉N枚・カードM枚がある
- 英字か数字のどちらか一方が揃っていれば、カードで扉を開けられる
- カードには値段があり、使ってもなくならない
- 扉をすべて開ける最小コストは？



簡単にした問題

- 英大文字と数字がそれぞれ1つずつ描かれた扉N枚・カード各種類がある
- 英字か数字のどちらか一方が揃っていれば、カードで扉を開けられる
- カードの値段はすべて1、使ってもなくならない
- 扉をすべて開ける最小コストは？

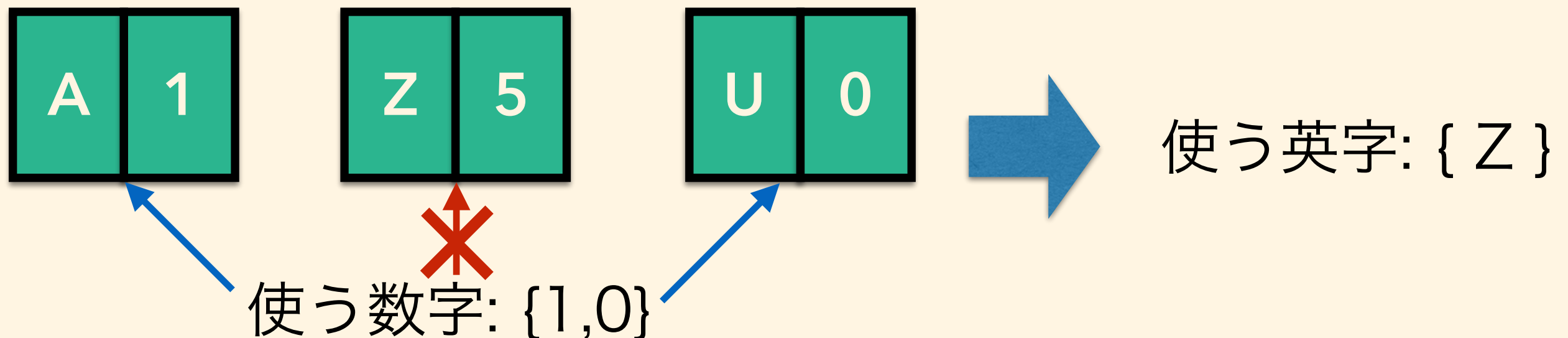


簡単にした問題の解法

- 使う数字を全通り決め打ちする (2^{10} 通り)
- その数字集合で開けられない扉は、英字で開けるしかない

→ 使う英字集合もわかる

- $\max\{ |\text{数字集合}|, |\text{英字集合}| \}$ が答え

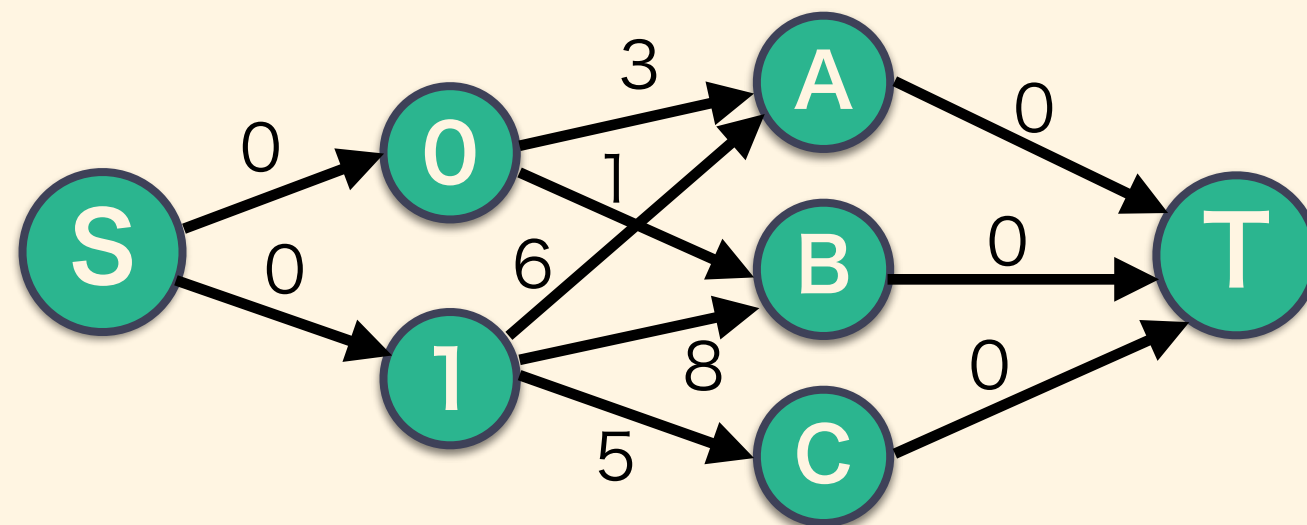


想定解法: 最小費用流

- 使う数字を決め打ちすれば、使わなければならない英字がわかる
- 使うべき数字と英字をカードですべてカバーする
最小費用を求めればよい

→ 数字と英字の**二部グラフ**で**最小費用流**

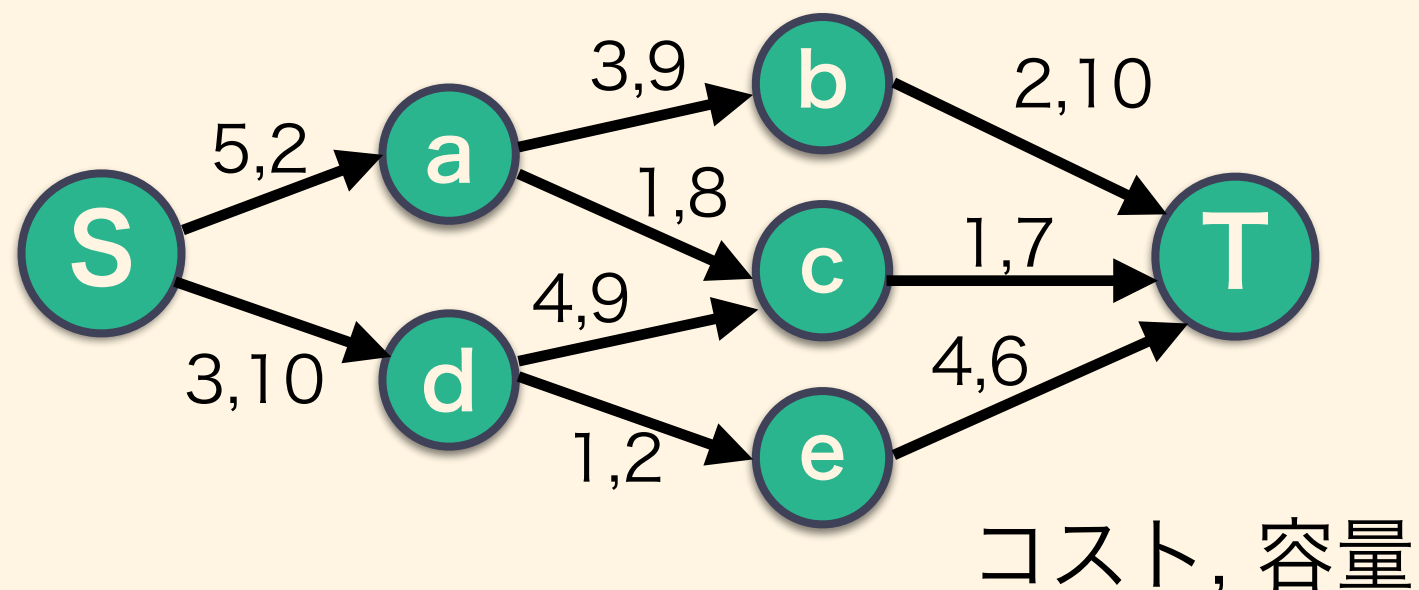
(辺重みがカードの値段、辺容量は1)



想定解法 Q&A

Q. 最小費用流ってなんですか？

A. 辺にコストと容量が付いたグラフに対し、与えられた流量 F を流すときにかかる最小コストを求める問題のことです。



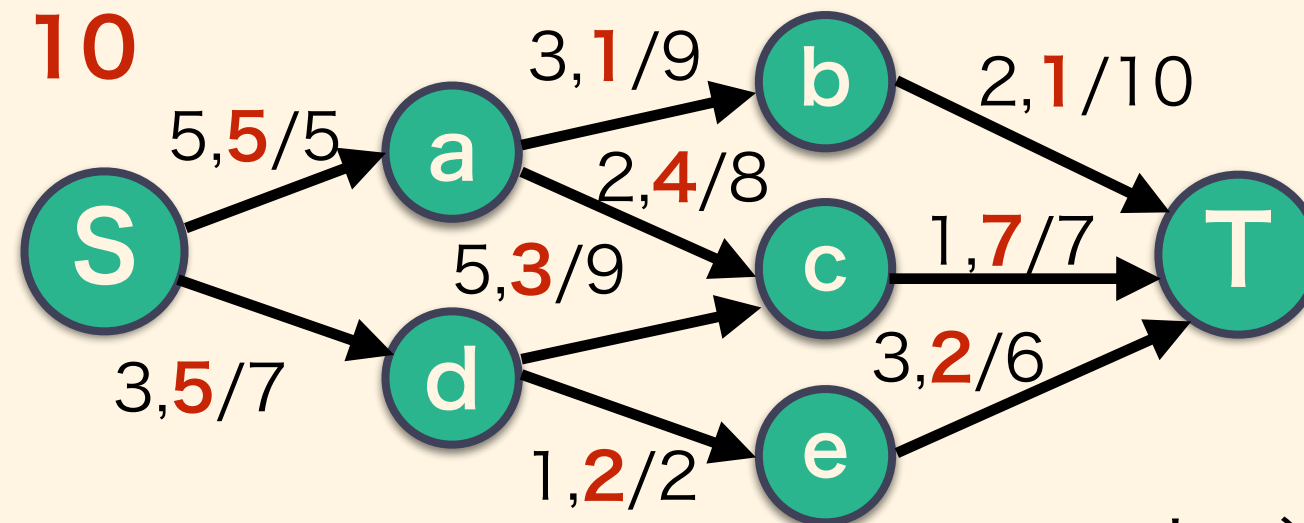
想定解法 Q&A

Q. 最小費用流ってなんですか？

A. 辺にコストと容量が付いたグラフに対し、
与えられた流量 F を流すときにかかる
最小コストを求める問題のことです。

流量 $F = 10$

最小コスト = 83



コスト, 流す量/容量

想定解法 Q&A

Q. 最小費用流はどうすれば解けますか？

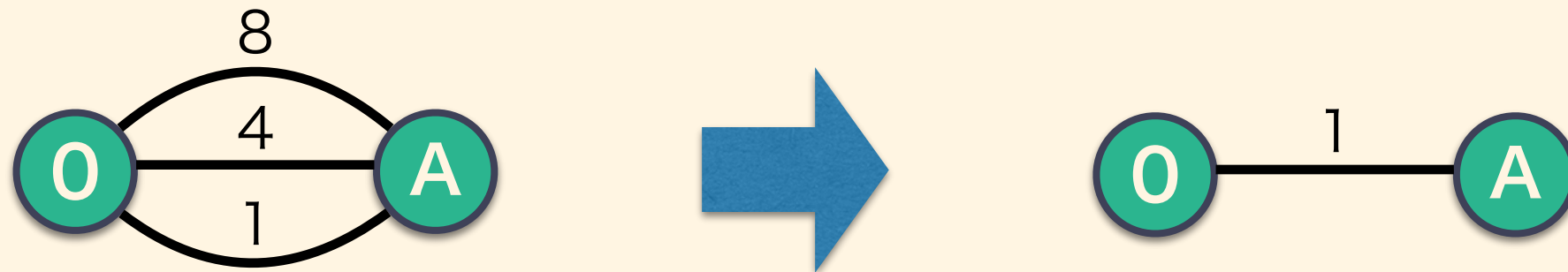
A. 蟻本を読もう！

補足: 最小費用流問題を $O(|F| |E| \log |V|)$ で解く
アルゴリズムが知られています
($|F|$ = 流す流量, $|E|$ = 辺数, $|V|$ = 頂点数)

想定解法 Q&A

Q. フロー速いけどさすがに辺数 $M = 10^4$ は間に合わなくない？

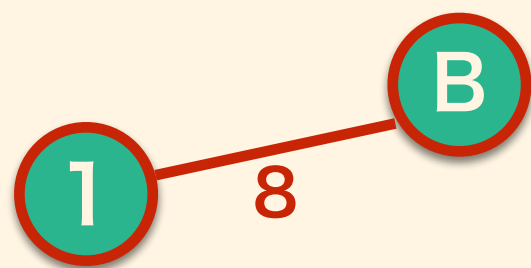
A. 英数字が同じカードは一番安いものだけ使えば👩
→ 高々 260 辺になる



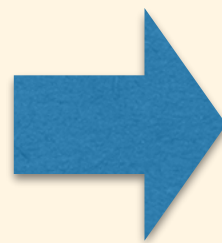
想定解法 Q&A

Q. 使う数字・英字だけで二部グラフを使ってフロー流せばおk?

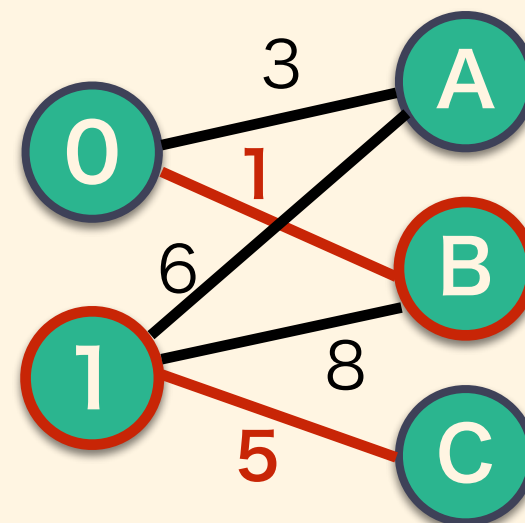
A. 数字・英字は全部使わなければ🙅



コスト8



>

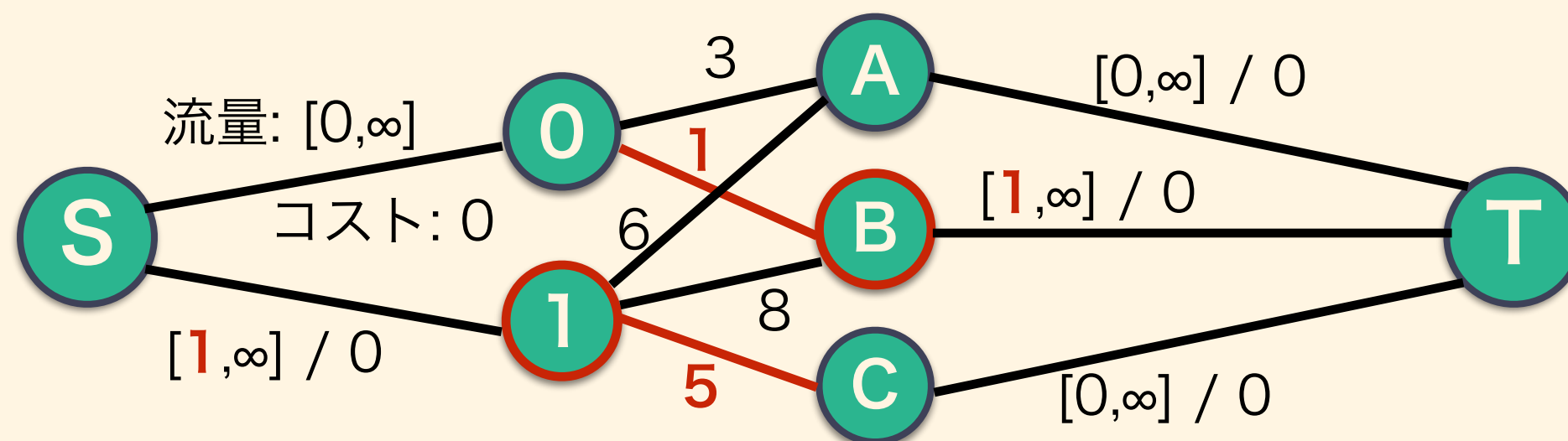


コスト6

想定解法 Q&A

Q. じゃあどうやって使わなければならない
英数字を制御するの？

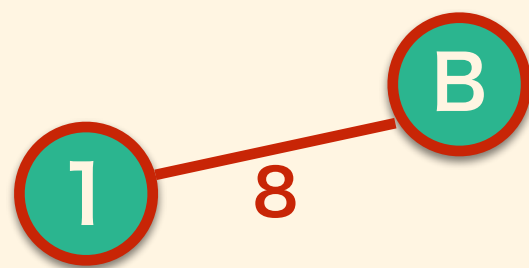
A. ソース・シンクからの辺に**最小流量制約**をつける



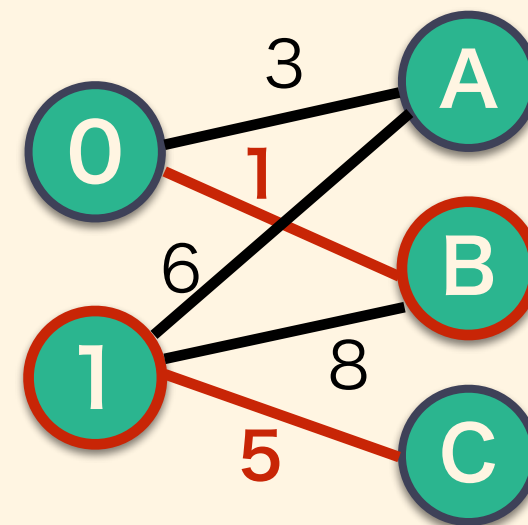
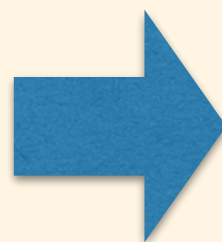
想定解法 Q&A

Q. 流す流量は $\max\{ |\text{数字集合}|, |\text{英字集合}| \}$ でおk?

A. さっきの例でダメだってわかるだろ💢



コスト8



コスト6

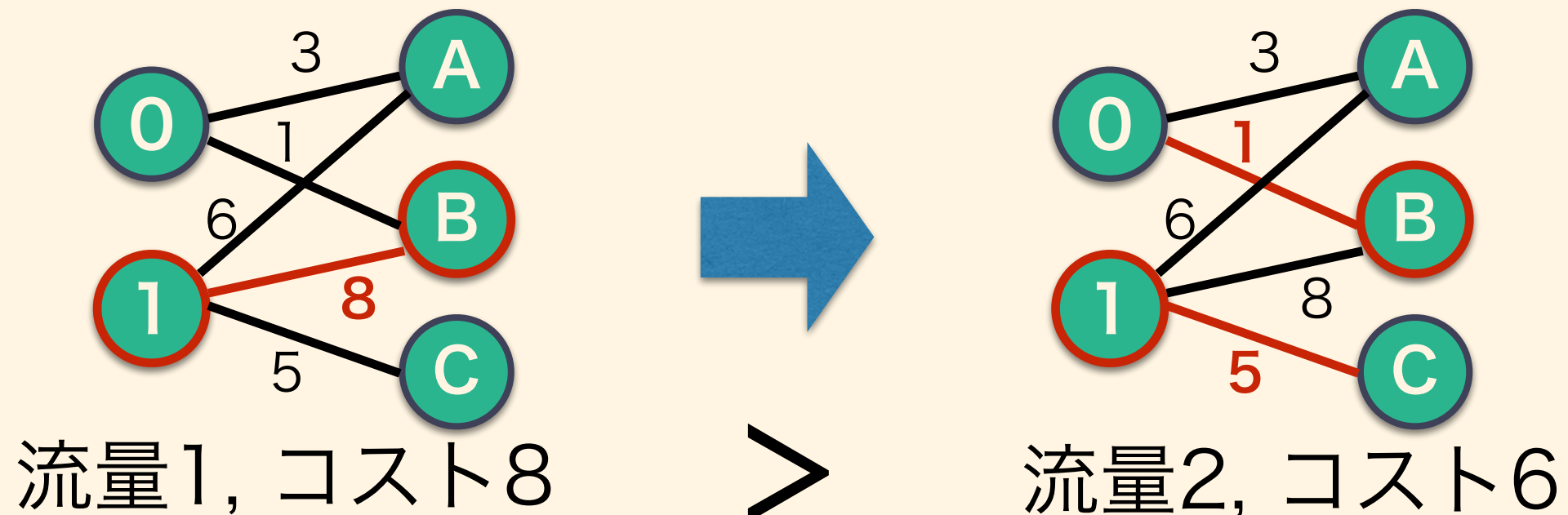
>

想定解法 Q&A

Q. じゃあいくら流せばいいんですかね……

A. $\max\{ |\text{数字}|, |\text{英字}| \}$ から $|\text{数字}| + |\text{英字}|$ の間
(入力によって変わるので全部試す)

補足: 普通のフローアルゴリズムは1本ずつ最短路を探すので、
最大流まで逐一コストを調べればOK



解法まとめ

1. 数字を 2^{10} 通り決め打ちし、使うべき英字を求める
 2. 数字・英字の二部グラフを作り、使う英数字に最小流量制約を付けて最小費用流を解く
- 計算量: 2^{10} 回 $O(|F| |E| \log |V|)$ の最小費用流を解く
ただし、 $|F| = \text{最大流} \leq 36$, $|E| = \text{辺数} \leq 260$, $|V| \leq 36+2$

別解 (多くの選手がこれだった)

- 割り当て問題をDPで解くことも可能
- $DP[i][S] := i$ 番目までの英字が書かれたカードのみで、使うべき数字の部分集合 S をカバーするときの最小コスト
- i 番目の英字と j 番目の数字が書かれたカードを使うとき、 $DP[i+1][S \cup \{j\}]$ を更新する感じ
- 使った数字集合 S が使うべき数字集合の部分集合であることに注目して解析すると、全体で $O(|\text{英字}| \times 3^{|\text{数字}|})$

writer解

- 井上 106行 (C++)
- 鈴木 158行 (C++)

提出状況

- First Acceptance
 - on-site: iidx (176 min)
 - on-line: snuke (88 min)
- 正答率 7/25 (28.0%)