xor Paradise

原案・問題文 itigo

データセット ReiVindicatio, pitsu

解説 tubuann

0.1 解説

0.1.1 解法

$S_1, \ldots, S_K$ を条件をそれぞれ配列 A_i の元によって生成される $\mathbb{F}_2^{60}$ の部分空間とします．この問題の答えは包除原理によって次のように求まります.

$$\sum_{I \subset \{1,\ldots,K\}, I \neq \emptyset} (-1)^{1+|I|} |\bigcap_{i \in I} S_i|$$

また, 一般に $\mathbb{F}_2$ 空間 S に対して

$$|S| = 2^{\dim S}$$

が成り立ちます.

0.1.2 直交補空間

$X = \mathbb{F}_2^n$ を $\mathbb{F}_2$ 上の有限次元線型空間とします．$v = (v_1, \ldots, v_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in X$ に対して

$$(v, w) = v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$$

で X の内積を定めます.

X の部分空間 S に対して

$$S^{\perp} = \{x \in X \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in S\}$$

を S の直交補空間といいます．直交補空間は以下の性質を満たします.

$$(S \cap S')^{\perp} = S^{\perp} + S'^{\perp}$$

$$S^{\perp\perp} = S$$

$$\dim X = \dim S + \dim S^{\perp}$$

よって部分空間 $S_1, \ldots, S_m$ の共通部分の次元は, $\dim X - \dim(S_1^{\perp} + \cdots + S_m^{\perp})$ として求まります.

0.1.3 直交補空間の求め方

$\mathrm{top}((a_1, \ldots, a_n)) = \min\{i \mid a_i \neq 0\}$ とします.

S を X の部分空間, $v_1, \ldots, v_m \in S$ を S の基底で次の条件を満たすものとします.

$$\mathrm{top}(v_1) > \cdots > \mathrm{top}(v_m)$$

このような基底はガウスの消去法によって求めることができます.

このとき $S^{\perp}$ の基底を次のアルゴリズムによって求めることができます.

Algorithm 1

$W \leftarrow \emptyset$
for $i = 1, \ldots, n$ **do**
    if $i \in \{\mathrm{top}(v_1), \ldots, \mathrm{top}(v_m)\}$ **then**
        continue
    end if
    $w \leftarrow (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ #i 番目の要素だけ 1 のベクトル
    for $j = 1, \ldots, m$ **do**
        $(w)_{\mathrm{top}(v_j)} += (v_j, w)$
    end for
    $W \leftarrow W \cup \{w\}$
end for