

# 立命合宿 2018 Day 3

## F：最短距離を伸ばすえびちゃん

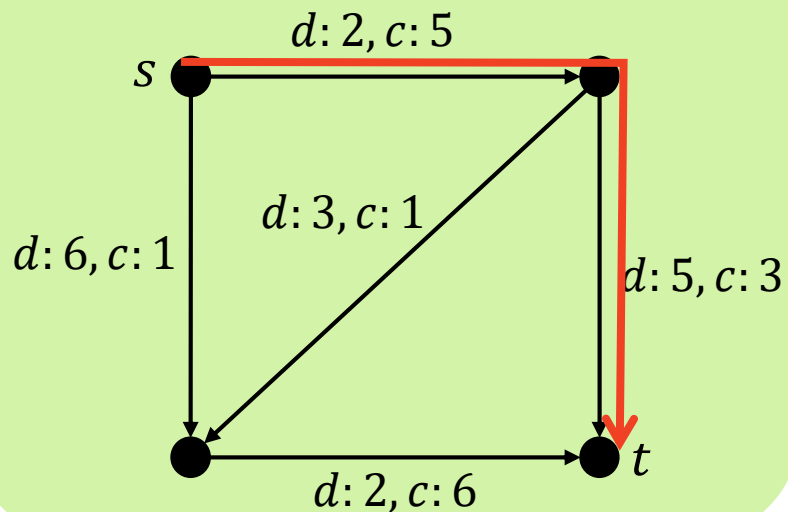
原案，問題文，解説：鈴木  
解答：栗田，鈴木，杉江

# 問題概要

- $N$ 頂点 $M$ 辺の有向グラフと2頂点 $s, t$ が与えられる
  - 辺 $i$ は距離 $d_i$
- いくつかの辺を整数の範囲で伸ばす
  - 辺 $i$ は距離1伸ばすごとに $c_i$ のコストがかかる
- $s$ - $t$ 間の最短距離を伸ばすために必要な最小コストは？
- 制約
  - $2 \leq N \leq 200$
  - $1 \leq M \leq 2000$
  - $s \neq t$
  - $1 \leq d_i, c_i \leq 10$

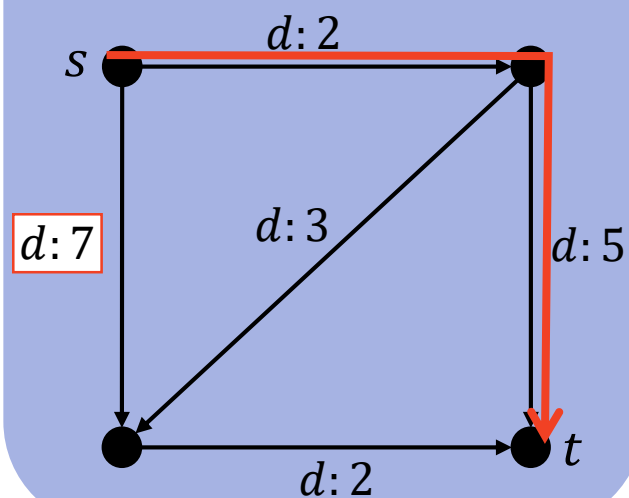
入力

$$dst(s, t) = 7$$



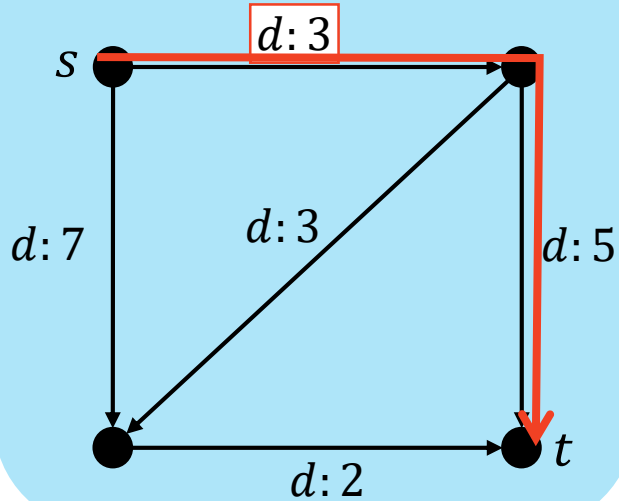
$$dst(s, t) = 7$$

$$cost = 1$$



$$dst(s, t) = 8$$

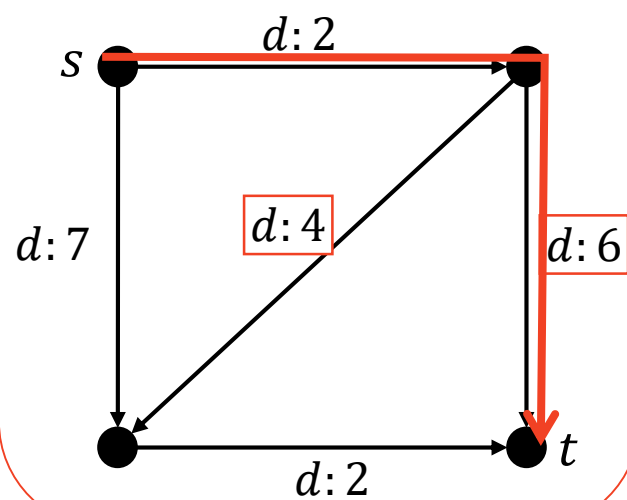
$$cost = 5$$



答え

$$dst(s, t) = 8$$

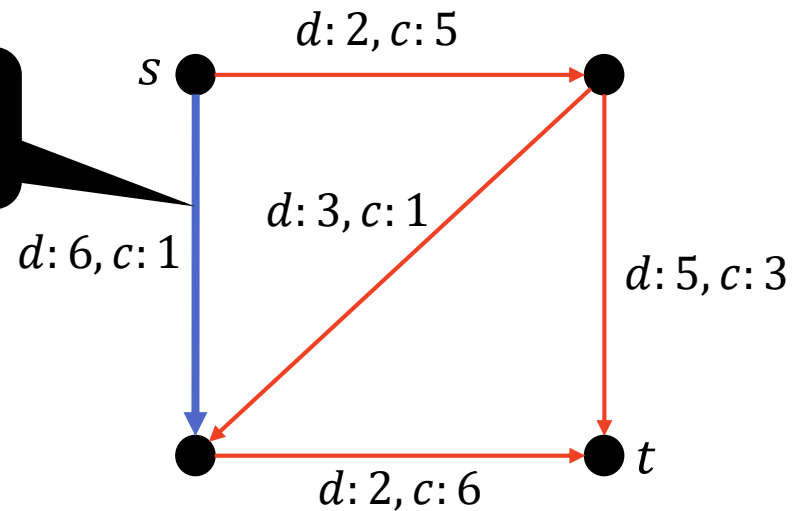
$$cost = 4$$



# 考察

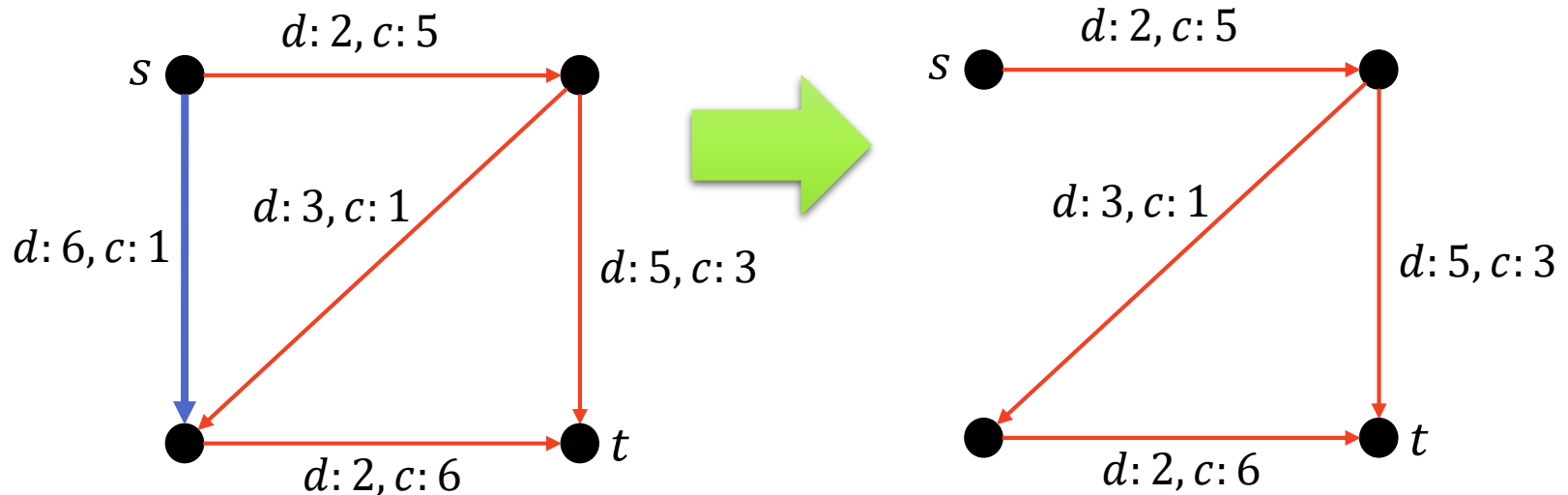
- $s$ - $t$ 最短路が通らない辺は伸ばす意味なし

この辺をいくら伸ばしても  
 $s$ - $t$ 間の最短距離は変わらない



# 伸ばす意味のない辺を消す

- $s$ を始点,  $t$ を終点とする**DAG**になる
- 最短路**DAG**と呼ぶことにする

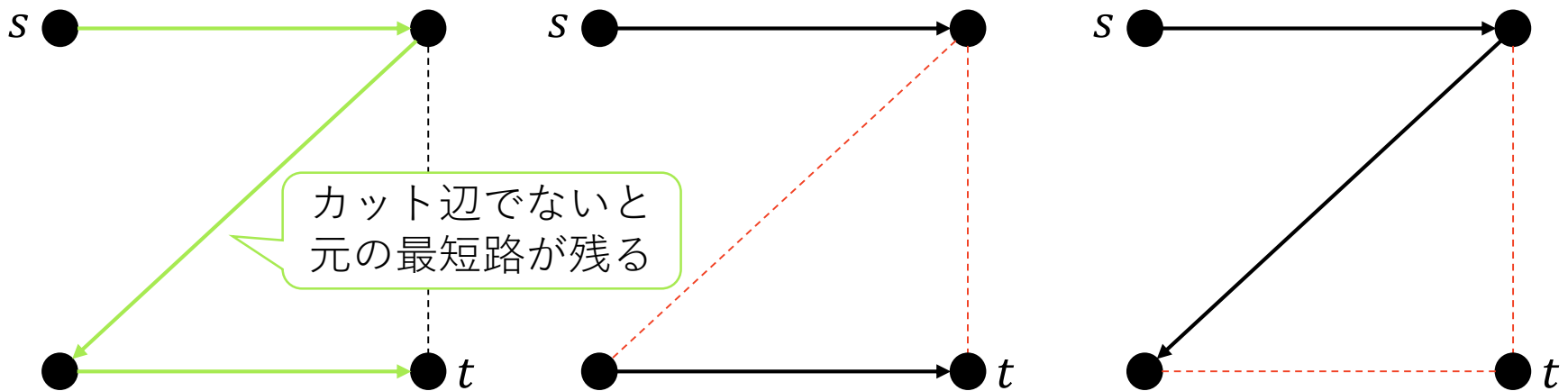


# どこをどれだけ伸ばすか

- 最短路DAG上のあらゆる $s$ - $t$ 経路に被る辺集合

= 削除すると $s$ - $t$ が分断される辺集合  
=  $s$ - $t$ カット辺集合

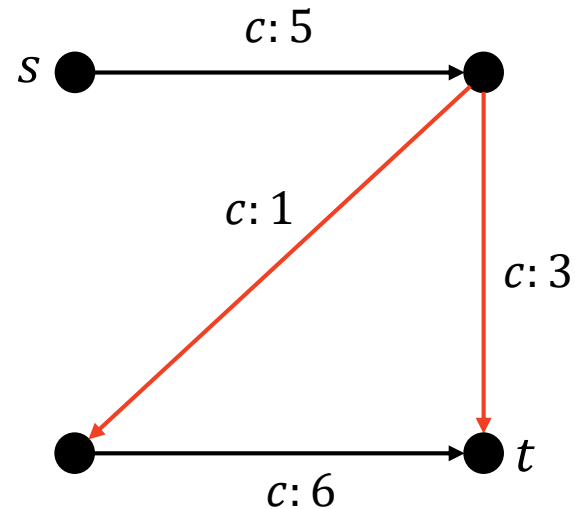
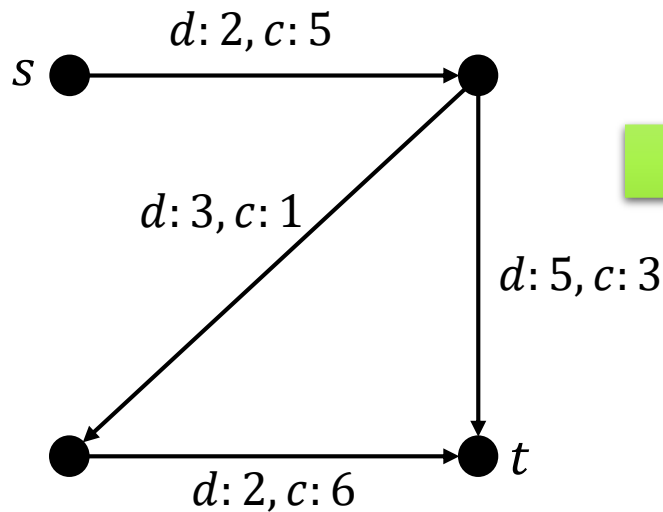
- 各カット辺を1だけ伸ばせば十分



# どの $s$ - $t$ カットが良いか

- いわゆる最小カット
- 最短路DAGとコストで最小カット問題を解く

詳細はググるか  
蟻本で！



最小カットは4  
元問題の答えも4

# 解法の詳細

グラフが小さいので  
これで十分です

## 1. 最短路DAGを作る

- ワーシャル・フロイド  $O(N^3)$
- 各辺が最短路に寄与するかチェック  $O(M)$ 
  - $dst(s, u_i) + d_i + dst(v_i, t) = dst(s, t)$ なら寄与

## 2. 最短路DAGで最小カット問題を解く

- 例えば Dinic, フォード・フォルカーソン, ...

## • 全体の計算量

- Dinicを使う :  $O(N^3 + N^2M)$
- フォードを使う :  $O(N^3 + M \times ANS)$



# Writer解

	言語	行数	Byte
栗田	C++	90	2273
鈴木	C++	87	2085
杉江	C++	113	3153

# 提出状況

- Acceptance Rate
  - 72% (34 /47)
- First Accept
  - オンサイト
    - rupc\_aui (0:33)
  - オンライン
    - pekempey (0:49)