Lorem Ipsum Dolor

F: 木を隠すなら森の中

原案: 栗田

問題文: 栗田

テスター: 井上，栗田，田中

問題概要

- 森G_1と木G_2が与えられる.
- G_1とG_2の頂点数N_1とN_2が$1 \leq N_1 \leq 300{,}000$かつ, $1 \leq N_2 \leq 30{,}000$である.
- 森中の連結成分でG_2と同型な連結成分の数を求めよ.
- 自明なこととして, 森の連結成分は木になります.

解法

1. 木の同型性判定アルゴリズムを書きます.
2. 森の中のそれぞれの連結成分とG_2に対してアルゴリズムを適用します.
3. 一致している連結成分の数を出力します.

解法

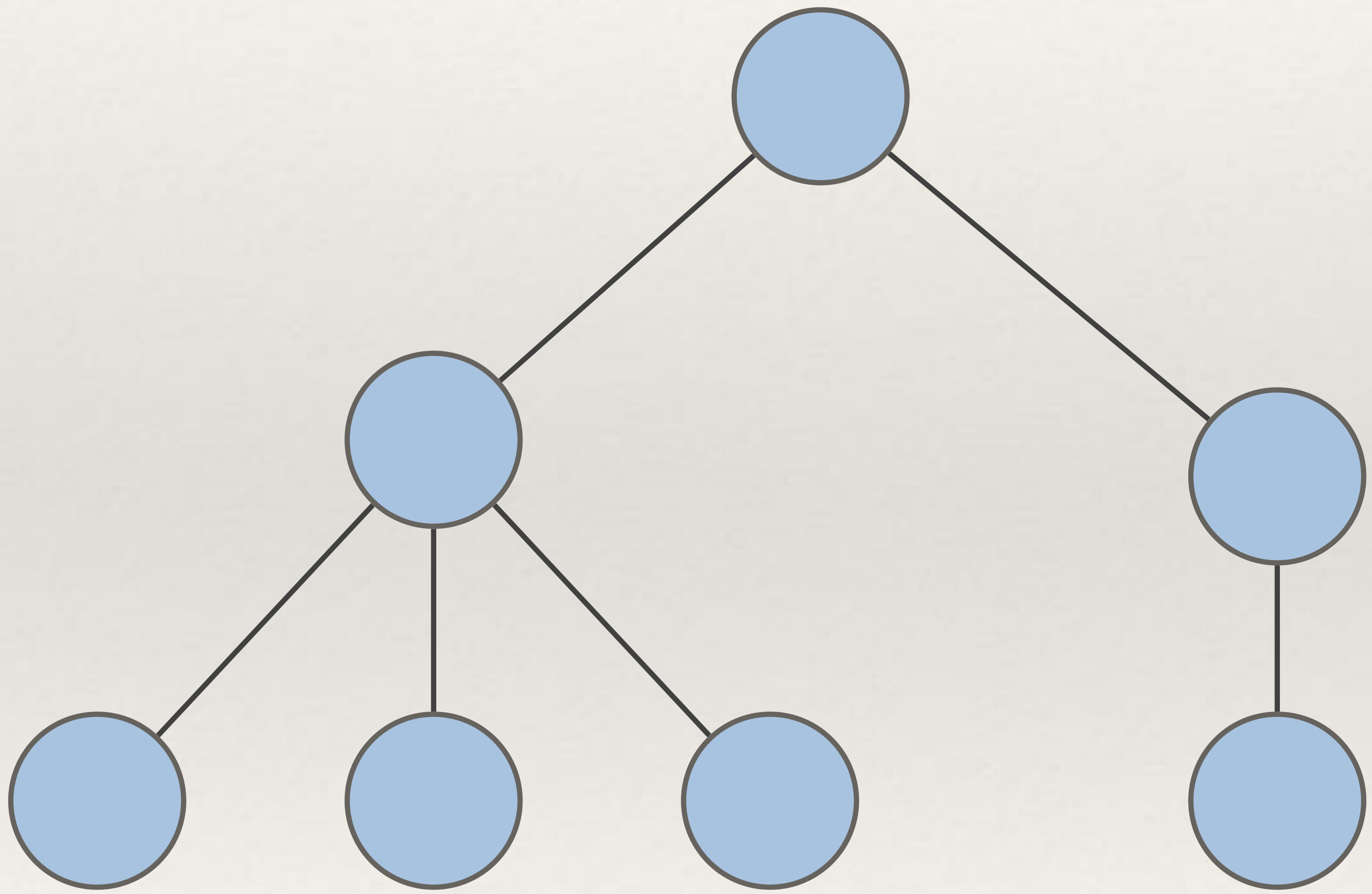
1. 木の同型性判定アルゴリズムを書きます.
2. 森の中のそれぞれの連結成分とG_2に対してアルゴリズムを適用します.
3. 一致している連結成分の数を出力します.

根付き木の同型性判定

- 問題は根なし木なのですが，最初に根付き木の同型性判定問題を考えます．
- 根付き木の同型性判定の解説記事はいろいろあります．
  http://natsugiri.hatenablog.com/entry/2016/06/28/215523
  http://logic.pdmi.ras.ru/~smal/files/smal_jass08_slides.pdf
- 根付き木の同型性判定問題がf(N)で解ければ，N*f(N)で根なし木の同型性判定問題も解けます．（どの頂点を根にするのかを，全頂点について試せばいい）

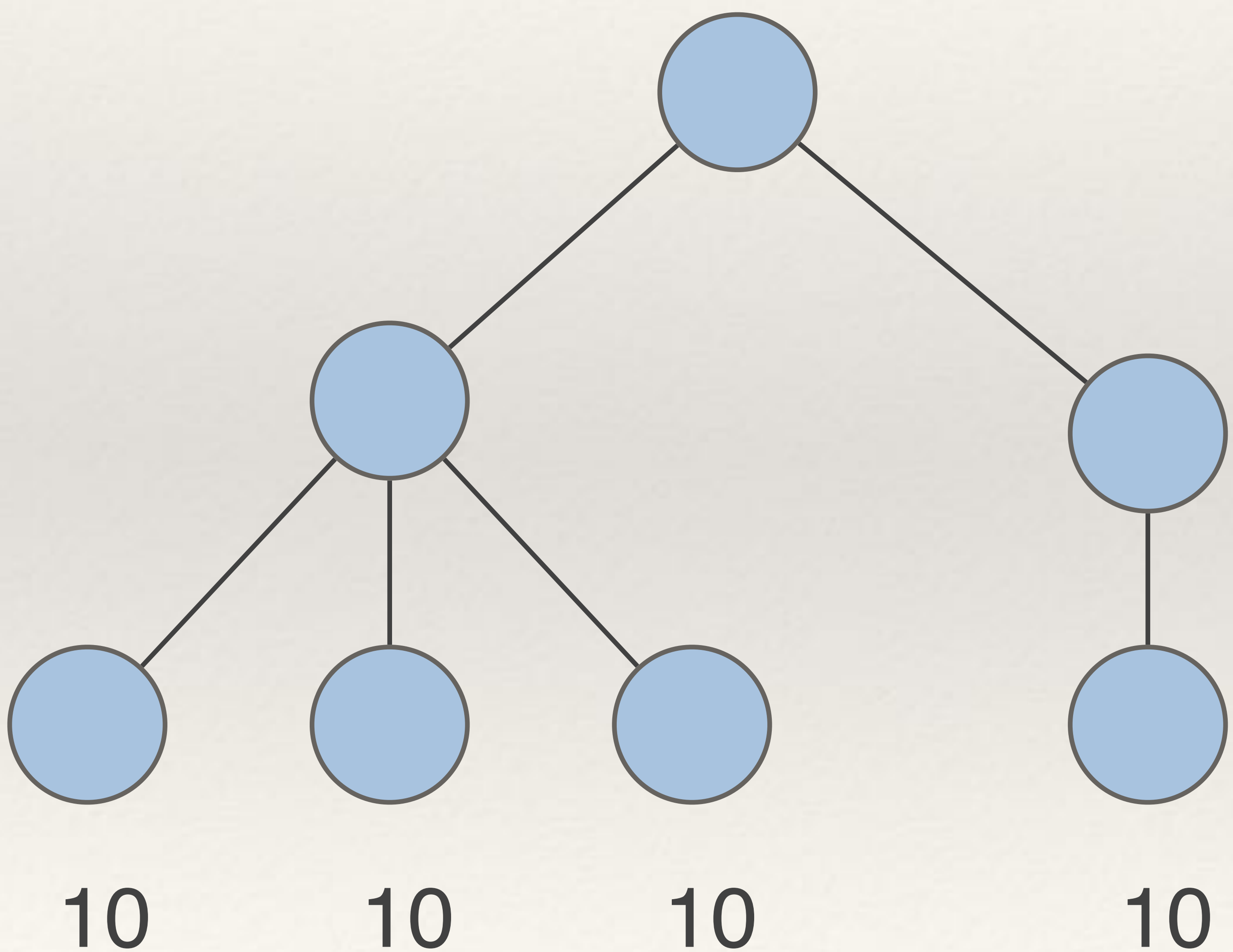
根付き木の同型性判定

- 根付き木を次のように番号付をします.



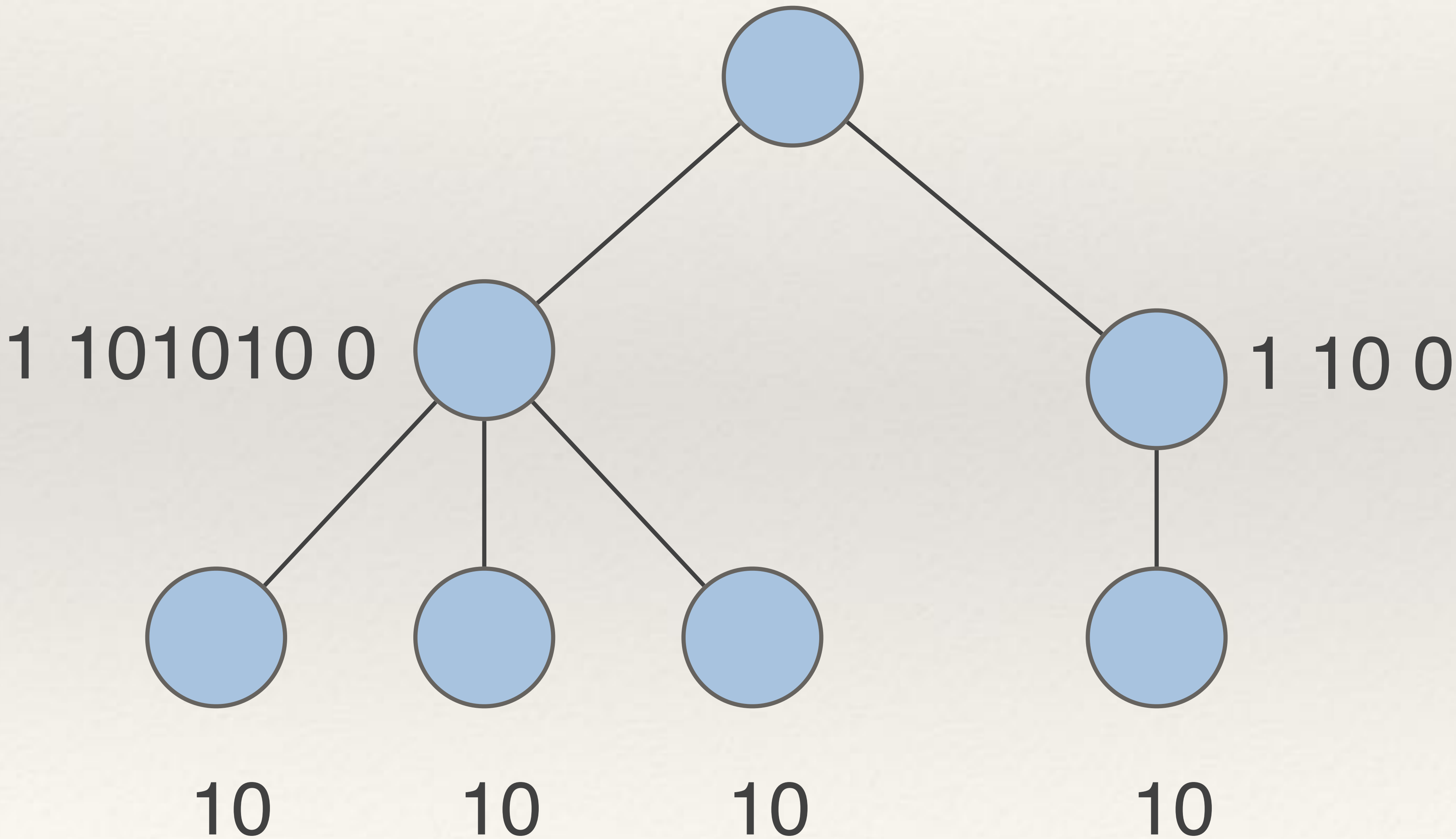
根付き木の同型性判定

- 根付き木を次のように番号付をします.



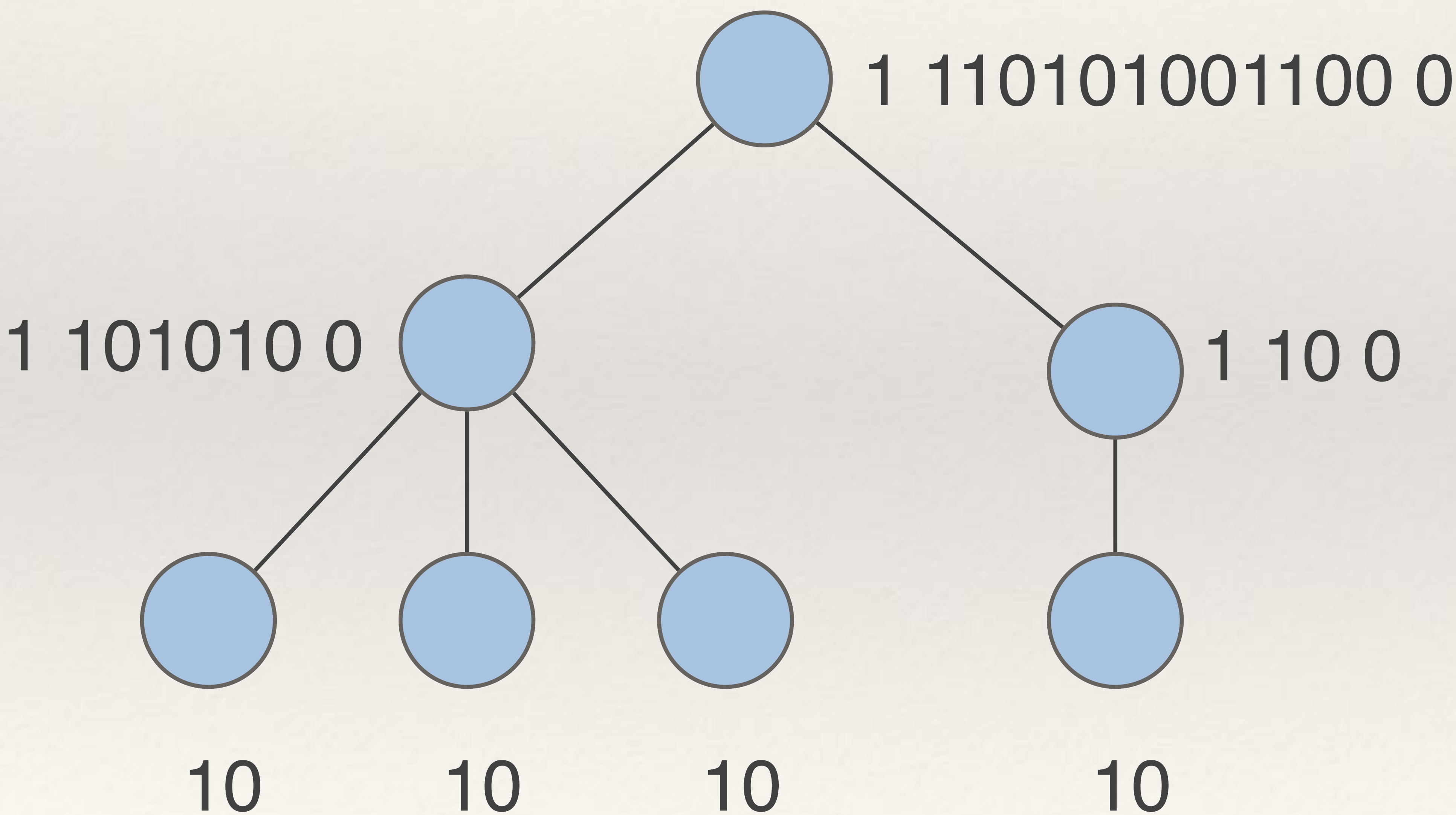
根付き木の同型性判定

- 根付き木を次のように番号付をします.



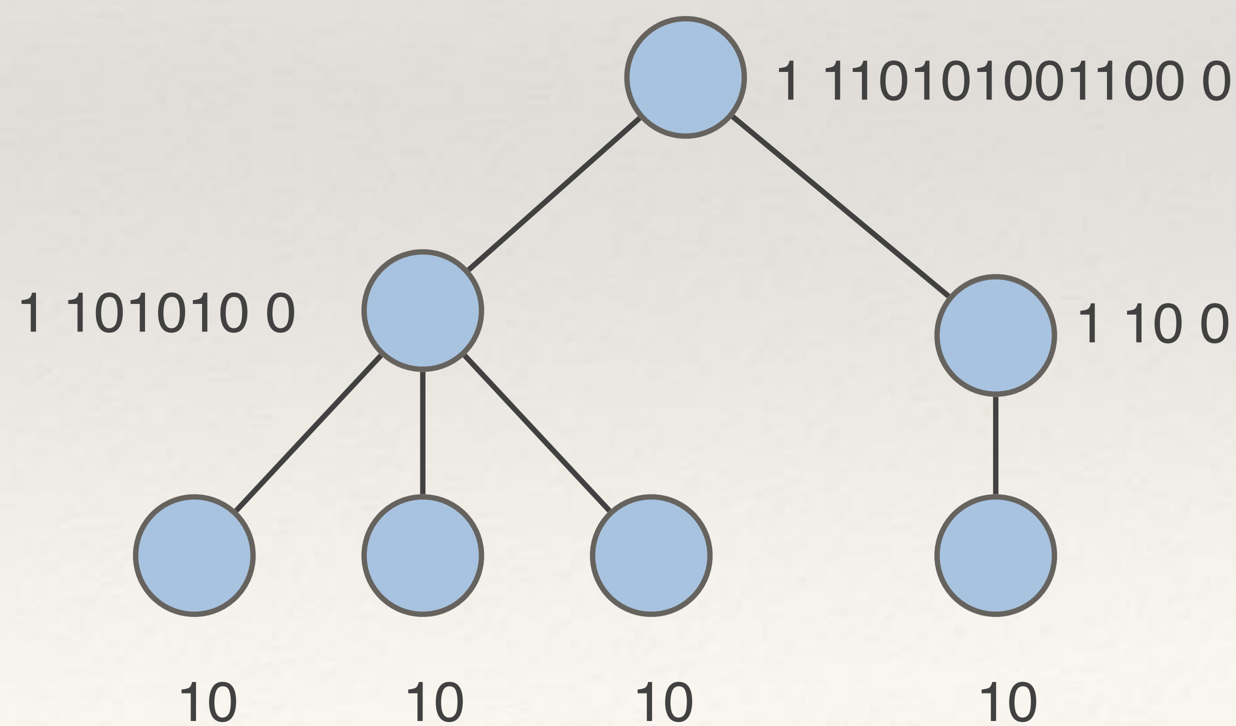
根付き木の同型性判定

- 根付き木を次のように番号付をします.



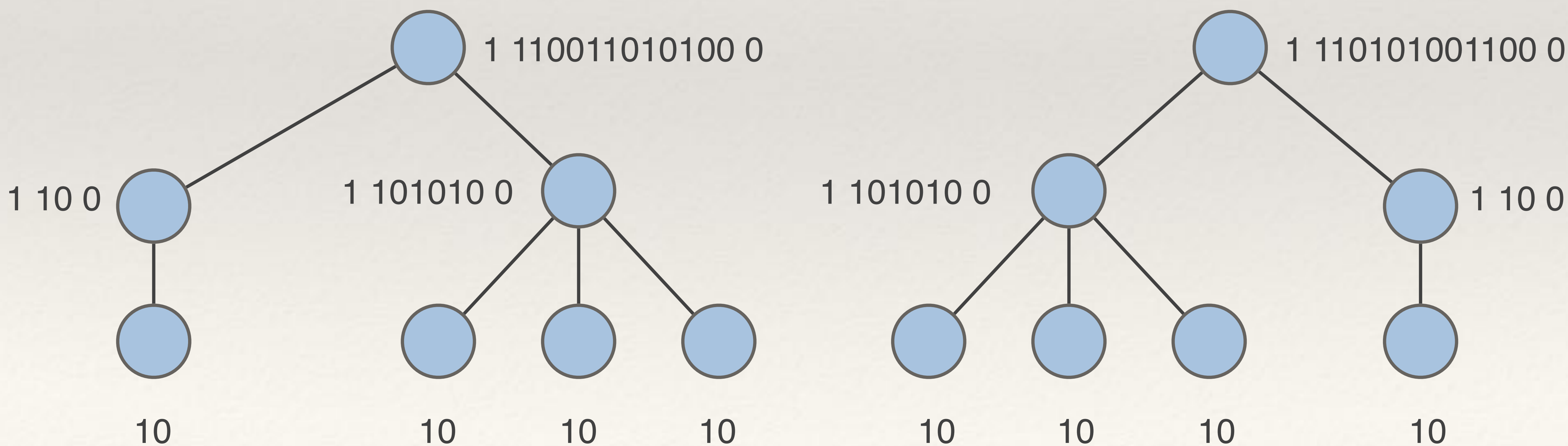
根付き木の同型性判定

- 根付き木を次のように番号付をします.
- 木の葉には10を割り当て，内部ノードには子供の持つ番号を連結した番号の先頭と末尾に，1と0を追加した番号を割り当てます.



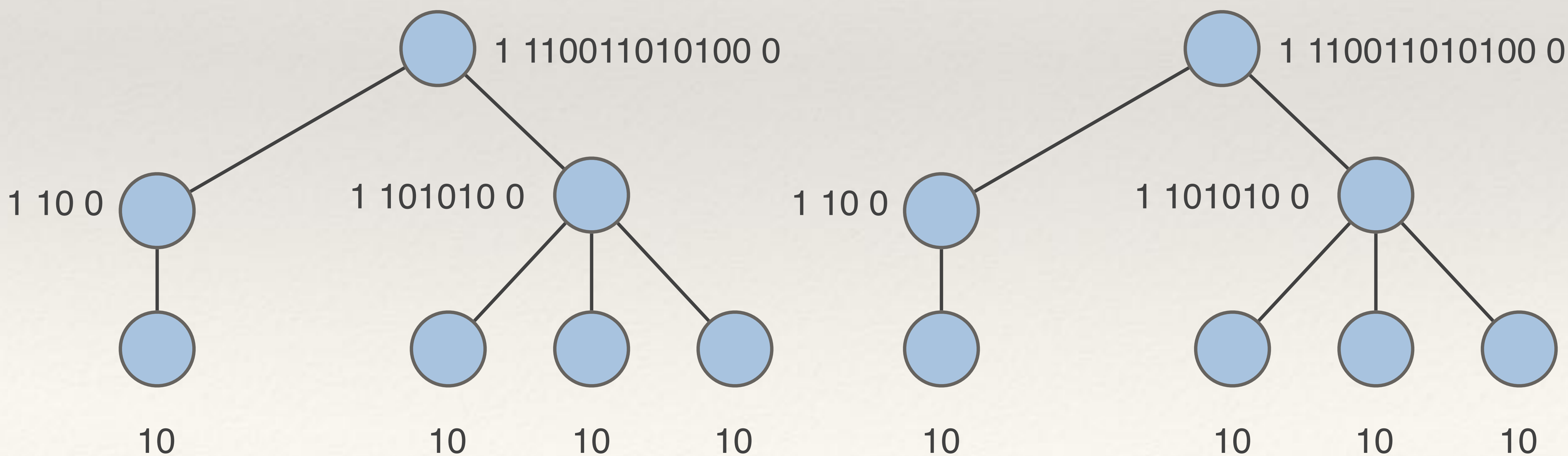
根付き木の同型性判定

- これだけだと，下の図の例の場合に同じ木を異なる番号付をしてしまうので，各レベルの内部ノードをソートします．



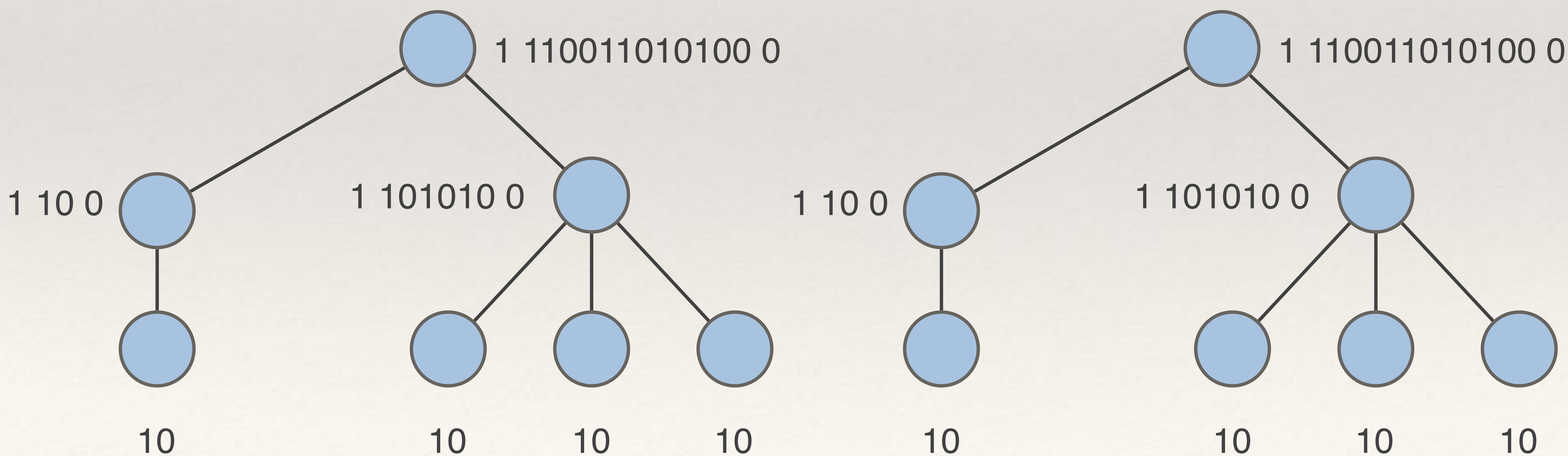
根付き木の同型性判定

- これだけだと，下の図の例の場合に同じ木を異なる番号付をしてしまうので，各レベルの内部ノードをソートします.



根付き木の同型性判定

- このように木の番号付を行うと木が同型であることと，根に割り当てた番号が一致することが必要十分条件になります．（時間の都合上，詳細は省きます．）

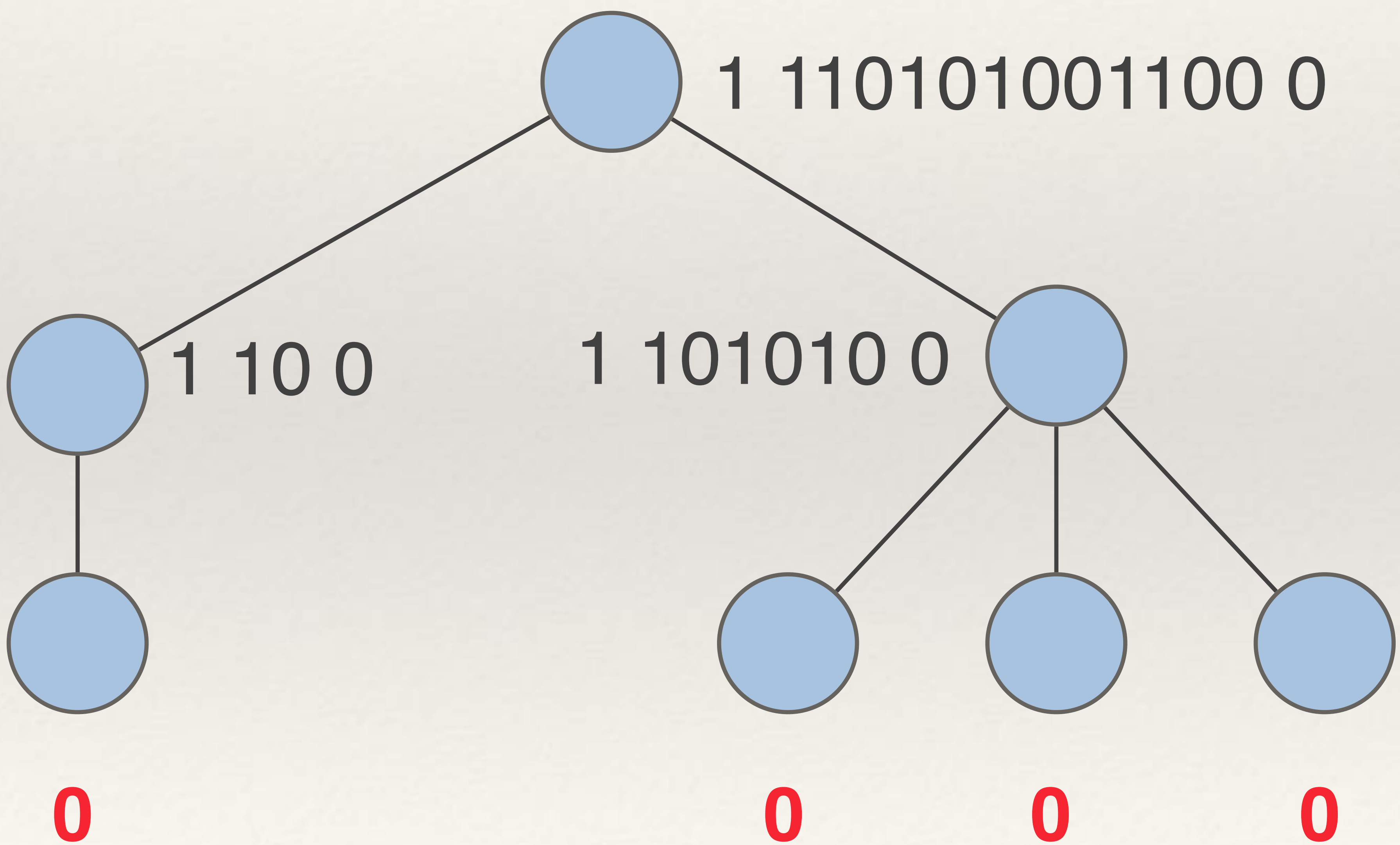


番号の計算方法

- これをナイーブに実装すると明らかに$O(N^2)$かかります.
（各ノードの持つ番号長の総和が$O(N^2)$になるため）
- 根の番号を高速に計算するため，番号の振り直しを行います.

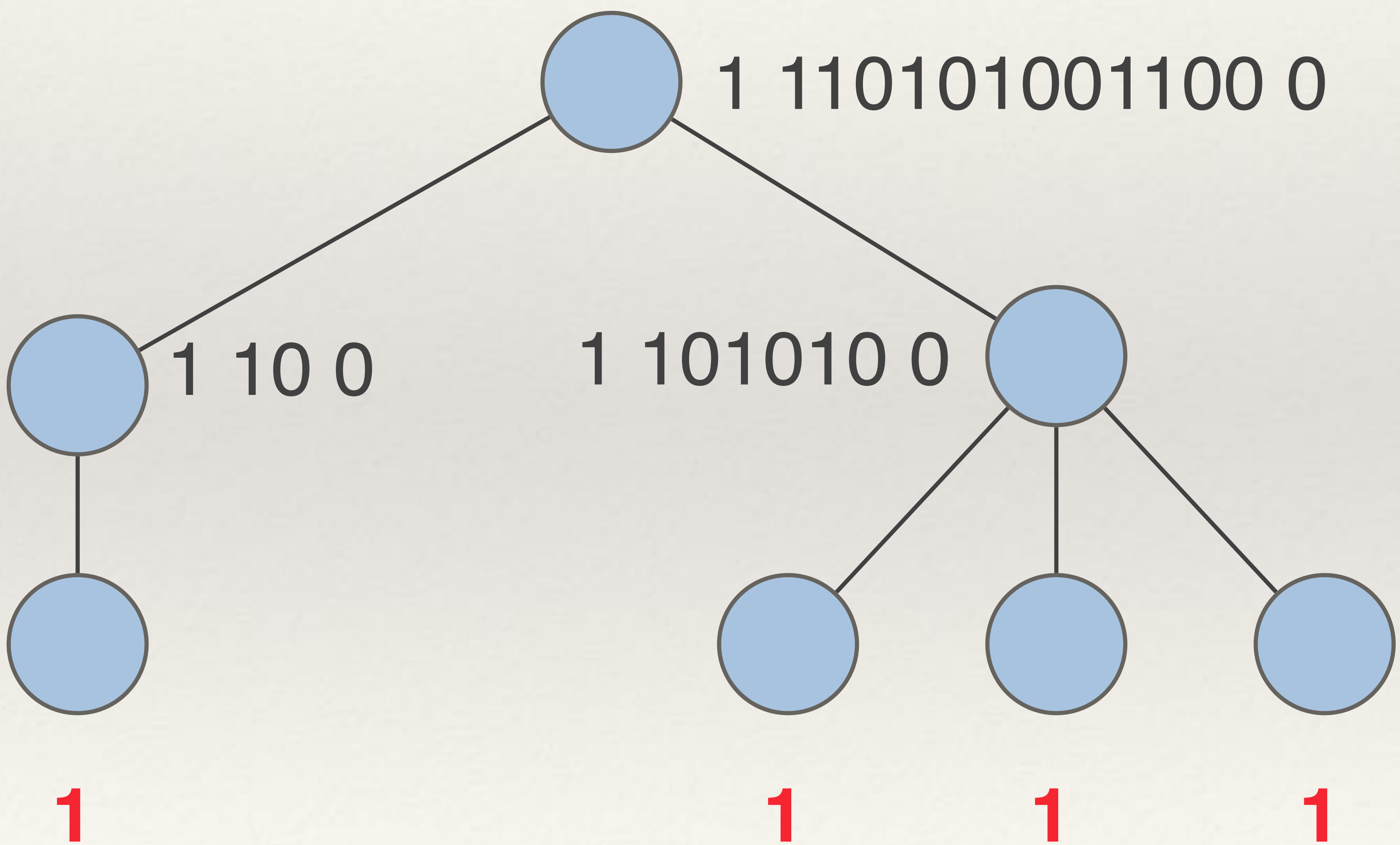
番号の高速な計算

- 次のように番号を振り直します.



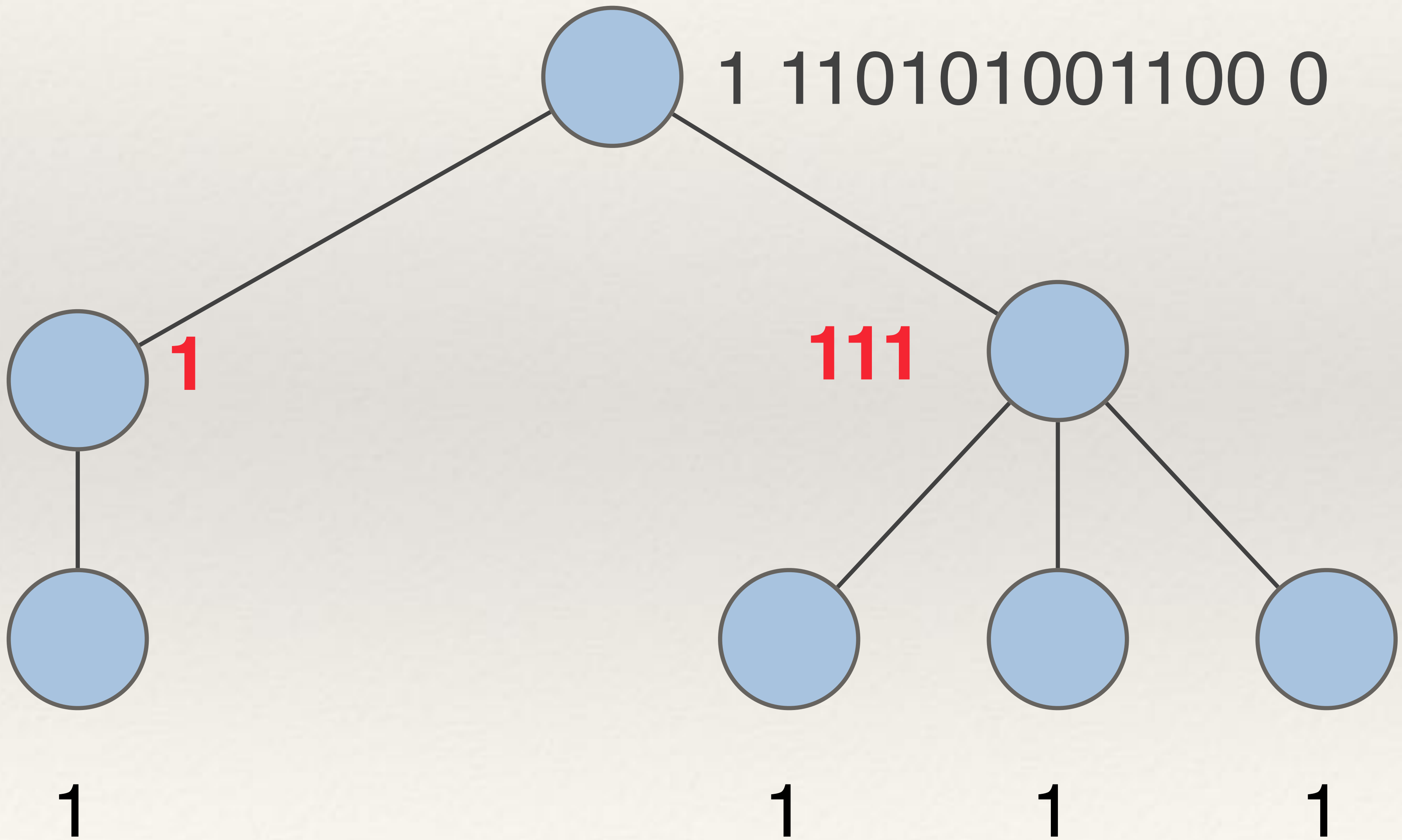
番号の高速な計算

- 次のように番号を振り直します.



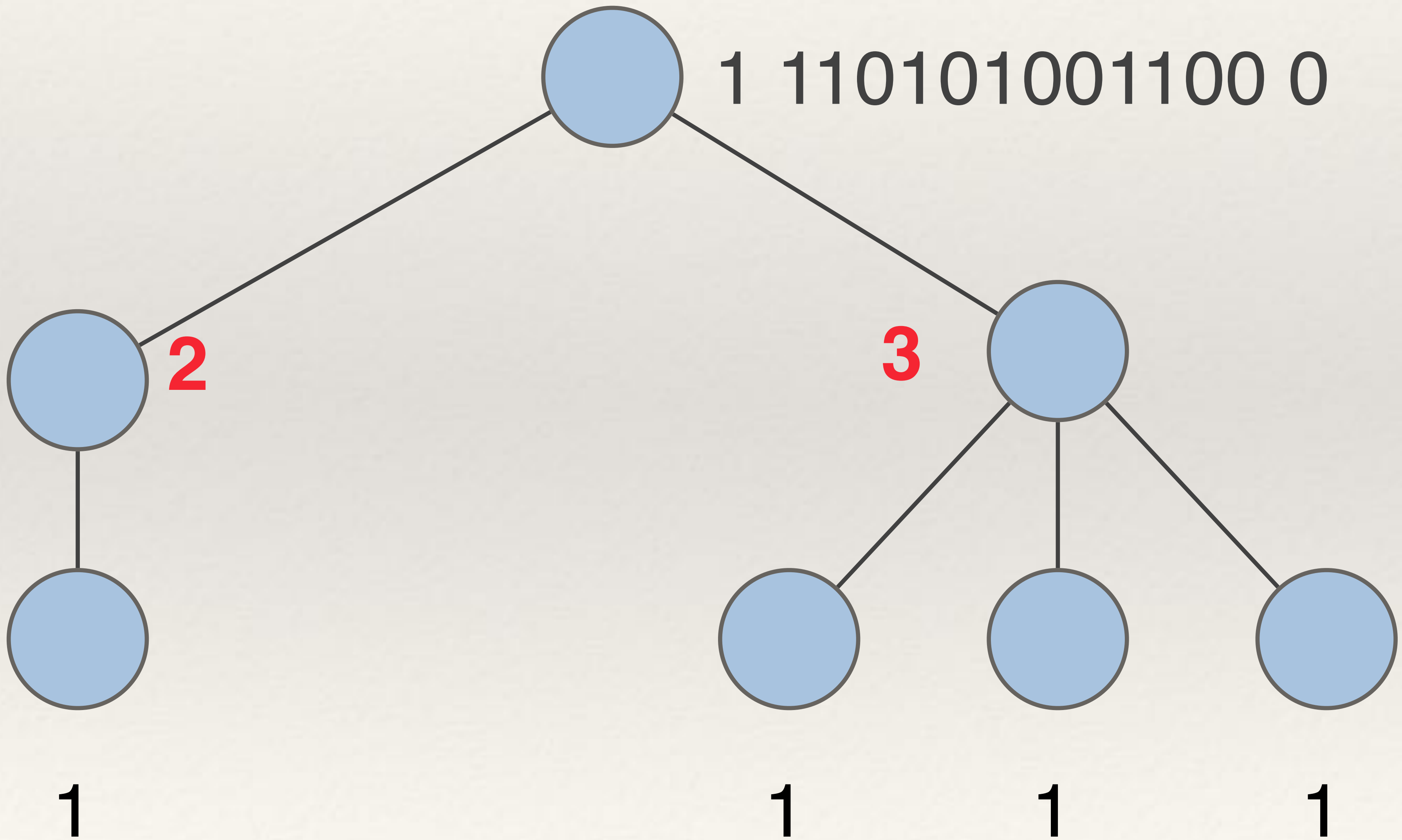
番号の高速な計算

- 次のように番号を振り直します.



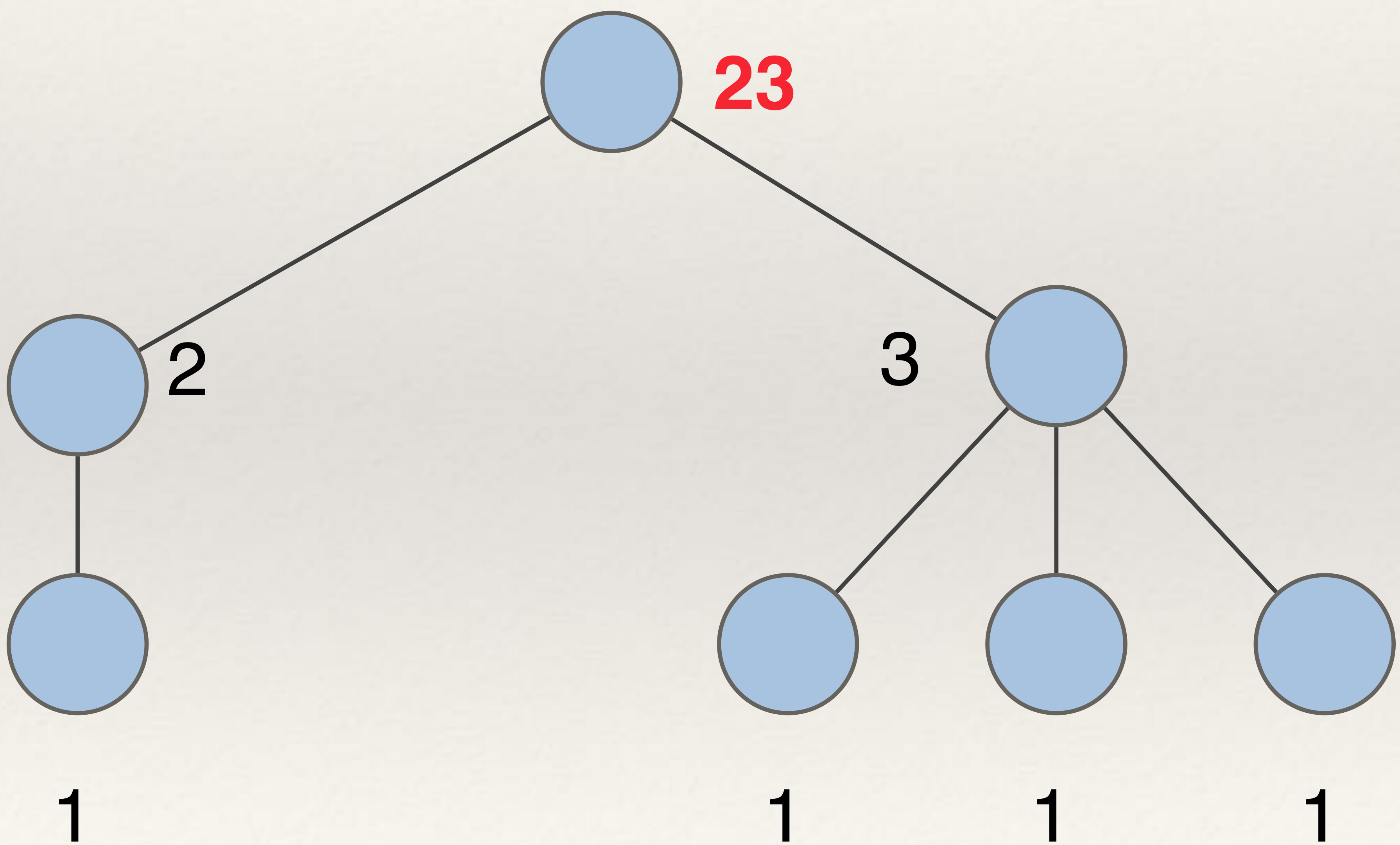
番号の高速な計算

- 次のように番号を振り直します.



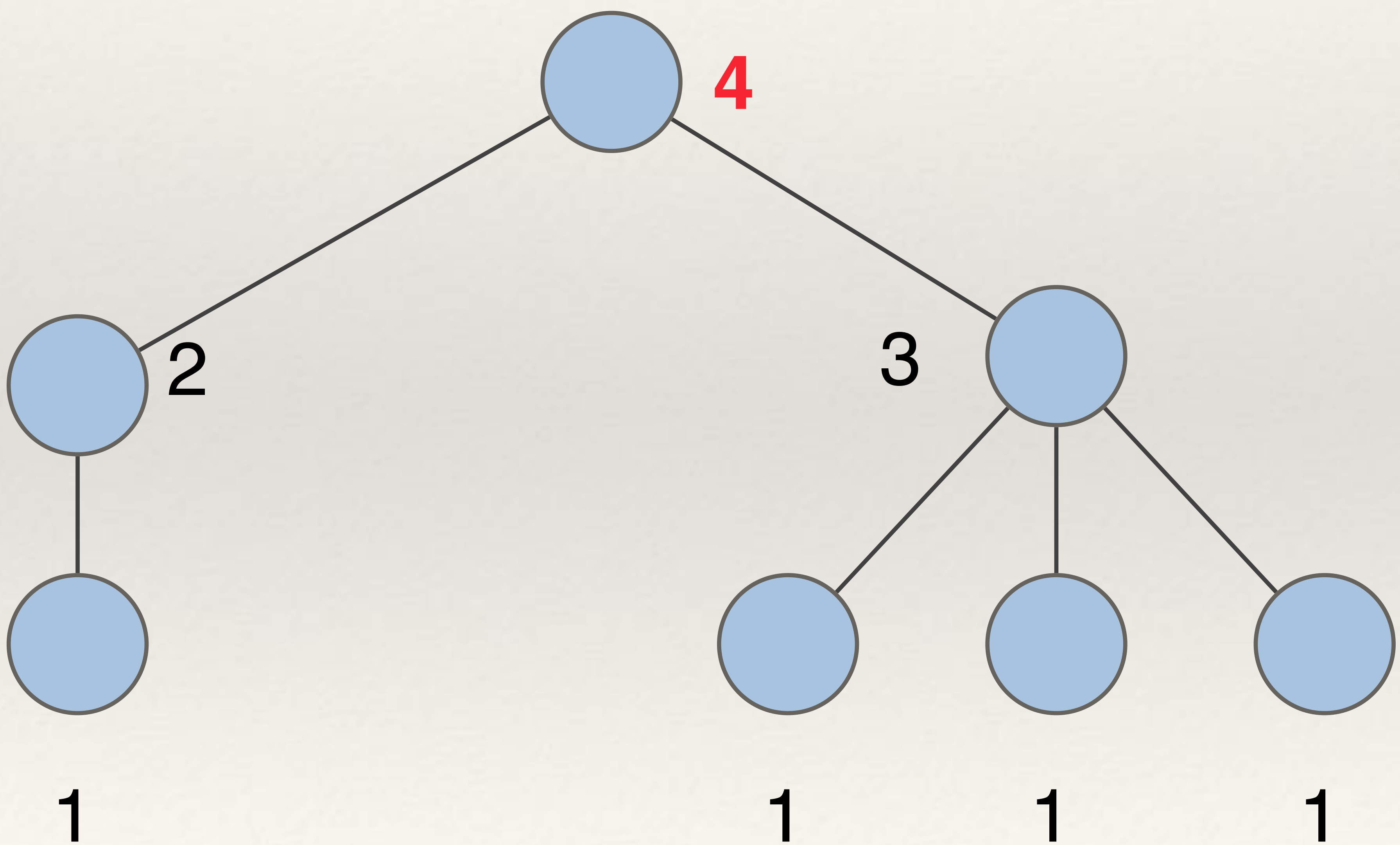
番号の高速な計算

- 次のように番号を振り直します.



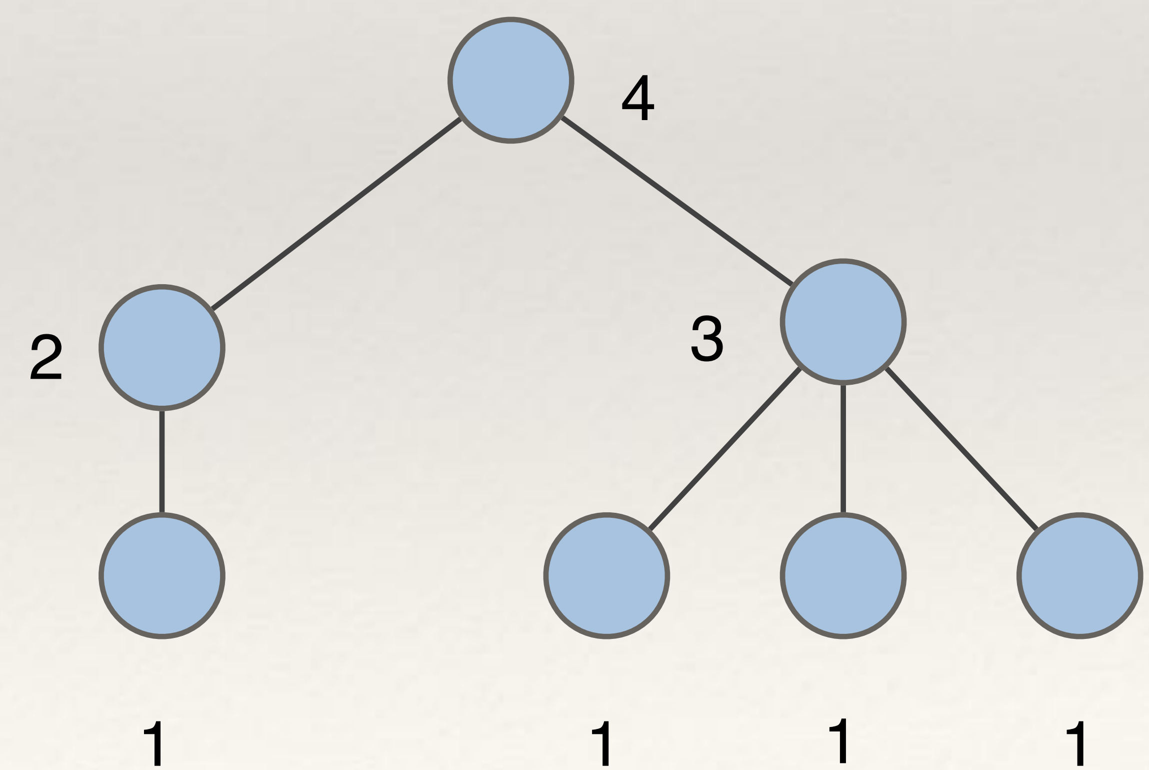
番号の高速な計算

- 次のように番号を振り直します.



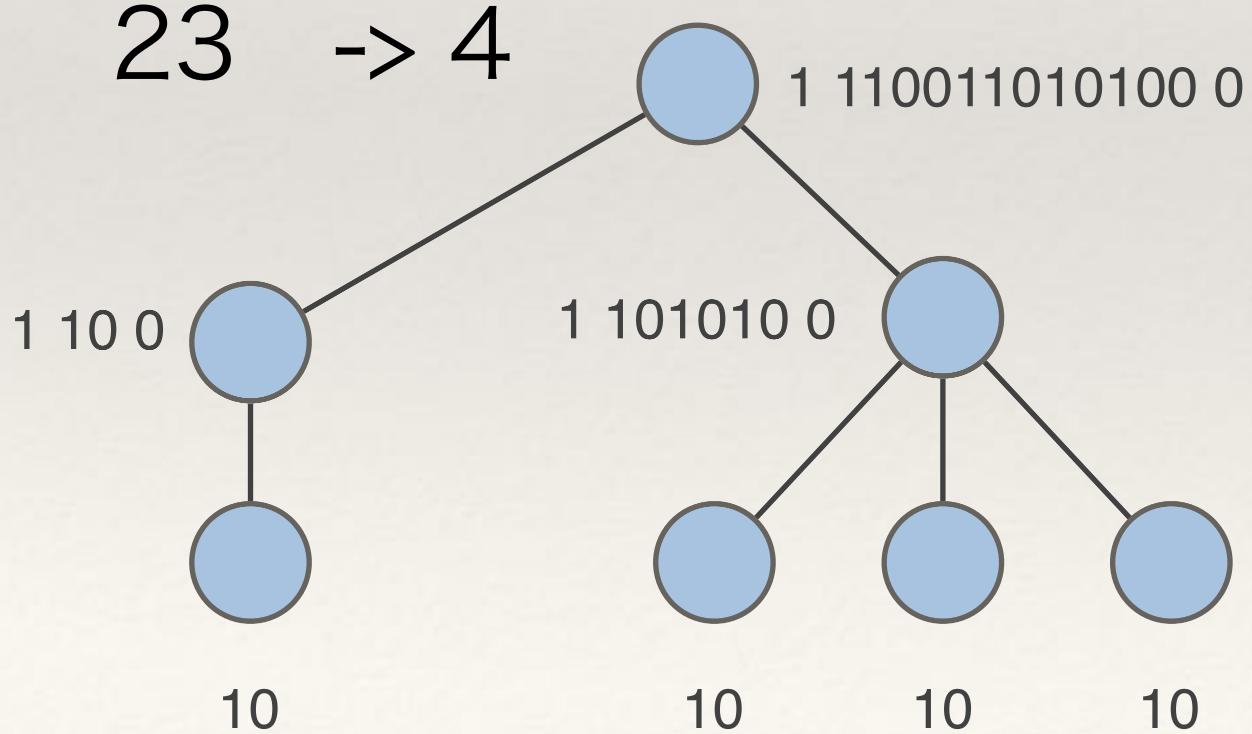
番号の高速な計算

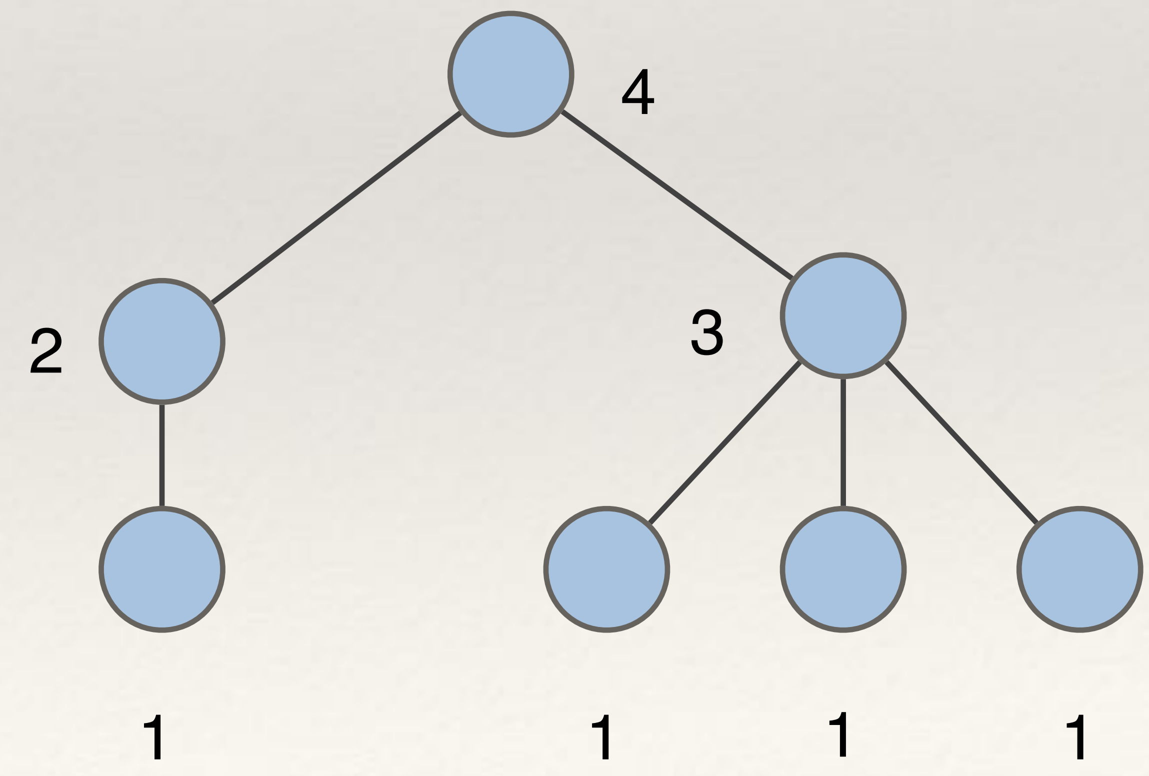
- 葉には0を割り当て，内部ノードはそれぞれの子供の番号を連結した番号を割り当てる.
- このとき，できた番号が初めてできた番号なら新しく整数値を割り当てる
- 今までに出てきたことのある番号ならその番号を用いる.



番号の高速な計算

- この例では，以下のような変換ルールになっている．
- 0 -> 1
1 -> 2
111 -> 3
23 -> 4





番号付アルゴリズム

- まとめると，番号付は次のように行われる．

1. 子供の番号を求める．
2. 子供の番号をソートする．
3. 子供の番号の連結が以前に出現する番号と一致するならその番号を使う．
4. 出現していないなら新たな整数を割り当てる．

番号付アルゴリズムの計算量

- まとめると，番号付は次のように行われる.

1. 子供の番号を求める.
2. 子供の番号をソートする. -> **O(N log N)**
3. 子供の番号の連結が以前に出現する番号と一致するならその番号を使う. -> **O(N log N)**
4. 出現していないなら新たな整数を割り当てる.
-> **O(N log N)**

根無し木の同型性判定

- かなりざっくりとした説明ですが，これで根付き木の同型性判定ができるようになりました．
- なので，これをナイーブに適用するとO(N*N log N)で解けます．　-> N = 300,000なので**TLE**
- もうちょっと頑張る必要があります．

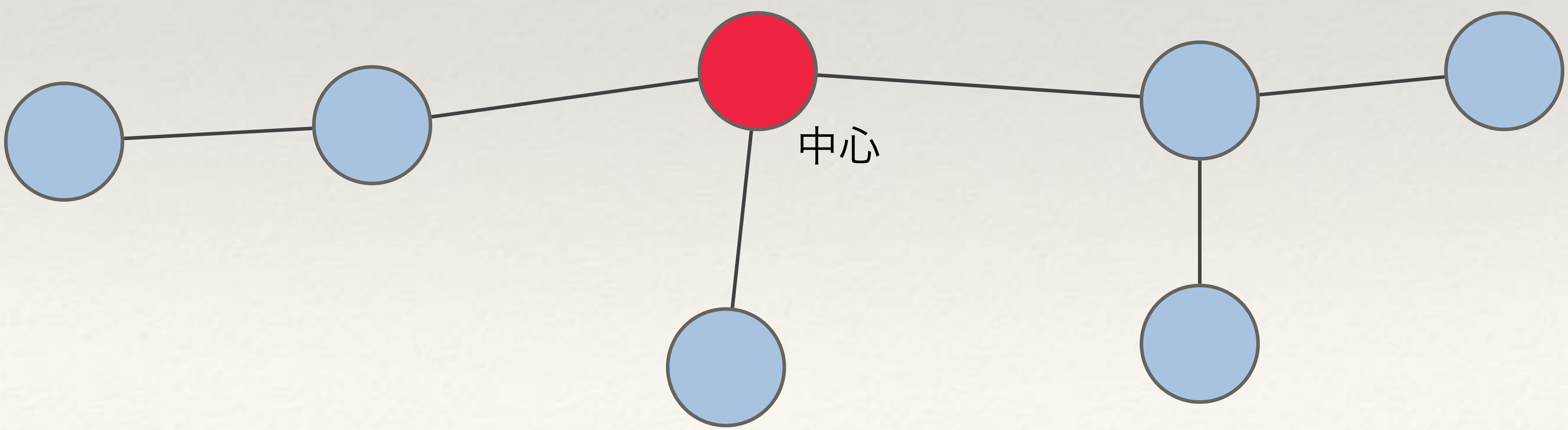
根の選択

- 頂点uから任意の頂点vへの最短パスの最大値が最小になるような頂点uを中心といいます．全てのu ∈ Vに対して，max(dist(u, v))が最小になるvを中心と言います．
- グラフが同型ならば，明らかにグラフの中心は一致します．
- なので，木の中心を根とした根付き木を考えます．

根の選択

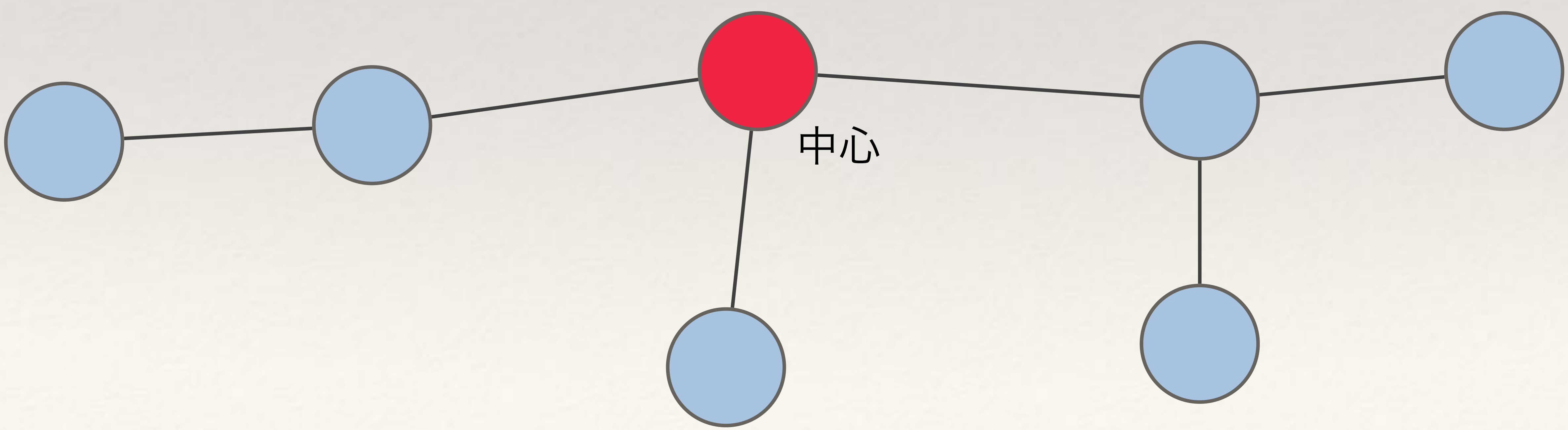
- 木の中心は次のように求まります.

1. 木中の最長パスを見つける.
2. 最長パスの真ん中の頂点が木の中心になる.



根の選択

- 木の中心はたかだか2つしか存在しないため，それぞれに対して4通りの根の選択を試すと根無し木の同型性判定ができる.
- これは根付き木の同型性判定を4回行うだけなので, O(N log N)になる.



別解: ローリングハッシュ

- 根付き木を整数にするようなハッシュ関数が今回紹介した方法と似たような方法で作れる.
- その木を回転させながら，それぞれの根付き木のハッシュ値を高速に計算して，N種類の根付き木のハッシュ値をO(N log N)で求めることができる.