

HCPC新歓-2022/8/9

問題解説 二乗

解説：titan

問題文

https://atcoder.jp/contests/nikkei2019-ex/tasks/nikkei2019ex_b

B - 二乗

解説

実行時間制限: 2 sec / メモリ制限: 1024 MB

配点: 200 点

問題文

正整数 N が与えられます。 A^2 が N を超えないような最大の整数 A を出力してください。

制約

- $1 \leq N \leq 10^9$

方針

まずはサンプルを… **N=10**

$A^2 \leq 10$ を満たす最大の整数 A を求めたい→どうする？

「 $A = 1, 2, \dots$ と順番に試していく」ことを考えてみる

考察 (実験)

まずはサンプルを… N=10

A	1	2	3	4	5	6	7	8	...
A ²	1	4	9	16	25	36	49	64	...
A ² ≤ 10?	YES								

考察 (実験)

まずはサンプルを… N=10

A	1	2	3	4	5	6	7	8	...
A ²	1	4	9	16	25	36	49	64	...
A ² ≤ 10?	YES	YES							

考察 (実験)

まずはサンプルを… N=10

A	1	2	3	4	5	6	7	8	...
A ²	1	4	9	16	25	36	49	64	...
A ² ≤ 10?	YES	YES	YES						

考察 (実験)

まずはサンプルを… $N=10$

A	1	2	3	4	5	6	7	8	...
A^2	1	4	9	16	25	36	49	64	...
$A^2 \leq 10?$	YES	YES	YES	NO					

考察 (実験)

まずはサンプルを… $N=10 \rightarrow$ 答えは3

A	1	2	3	4	5	6	7	8	...
A^2	1	4	9	16	25	36	49	64	...
$A^2 \leq 10?$	YES	YES	YES	NO					...

1から順に整数 A を見ていき、
初めて A^2 が N より大きくなったときの $A - 1$ が答えっぽい

考察 (正当性)

(1) $B^2 \leq N$?

A	1	2	...	B-1	B	B+1	B+2	B+3	...
A^2		
$A^2 \leq N$?	YES	YES	...	YES	YES	NO			...

この解法をとって
得られる値をBとした

1から順に整数Aを見ていき、
初めて A^2 が N より大きくなったときの $A - 1$ が答えっぽい

考察 (正当性)

(1) $B^2 \leq N$? \leftarrow **Bの求め方より自明**

A	1	2	...	B-1	B	B+1	B+2	B+3	...
A^2		
$A^2 \leq N?$	YES	YES	...	YES	YES	NO			...

1から順に整数Aを見ていき、
初めて A^2 が N より大きくなったときの $A - 1$ が答えっぽい

考察 (正当性)

(2) Bは最大？

A	1	2	...	B-1	B	B+1	B+2	B+3	...
A^2		
$A^2 \leq N?$	YES	YES	...	YES	YES	NO			...

1から順に整数Aを見ていき、
初めて A^2 が N より大きくなったときの $A - 1$ が答えっぽい

考察 (正当性)

(2) Bは最大？ ← **YES/NOの境界が1つだけなら**

A	1	2	...	B-1	B	B+1	B+2	B+3	...
A^2		
$A^2 \leq N?$	YES	YES	...	YES	YES	NO			...

1から順に整数Aを見ていき、
初めて A^2 が N より大きくなったときの $A - 1$ が答えっぽい

考察 (正当性)

(2) Bは最大？ ← YES/NOの境界が1つだけなら ← **単調増加**

A	1	2	...	B-1	B	B+1	B+2	B+3	...
A^2		<	< ... <	<	<	<	<	<	< ...
$A^2 \leq N?$	YES	YES	...	YES	YES	NO	NO	NO	NO

1から順に整数Aを見ていき、
初めて A^2 が N より大きくなったときの $A - 1$ が答え。

計算量について

- ・ アルゴリズムが正しくても、計算回数が多すぎると実行制限時間を超えてしまい不正解となる
- ・ 「 A の値を何回試す必要があるか」考えてみる

計算量について

- ・ 答えを B とすると、
試す必要のある A の値は 1 から $B + 1$ までの $B + 1$ 個
- ・ $B^2 \leq N$ なので、 $B \leq \sqrt{N} \Rightarrow B + 1 \leq \sqrt{N} + 1$
- ・ つまり、 \sqrt{N} (切り捨て) + 1回、 A の値を試せばよい

計算量について

- ・ コンピュータは 1 秒間に 10^8 回程度の計算ができる
- この問題の実行制限時間は2秒なので、
計算回数がおおよそ 2×10^8 回以下であればよい
- ・ $N = 10^9$ のとき $\sqrt{N} + 1 \approx 3 \times 10^4 \rightarrow$ 間に合う！

実装例

※1から順に整数 A を見ていき、
初めて A^2 が N より大きくなったときの $A - 1$ が答え

```
1  #include <bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3
4  int main() {
5      int N;
6      cin >> N;
7      int a = 1;
8      while (true) {
9          if (a * a > N) {
10             break;
11          }
12          a++;
13      }
14      cout << a - 1 << endl;
15      return 0;
16 }
```

```
1
2
3
4
5
6  Nを受け取る
7  変数aを定義
8
9  a * a > N なら
10 ループを抜ける
11
12
13
14 a-1を出力
15
16
```

実装例

※1から順に整数 A を見ていき、
初めて A^2 が N より大きくなったときの $A - 1$ が答え

```
1 N = int(input())
2 a = 1
3 while True:
4     if a * a > N:
5         break
6     a += 1
7 print(a - 1)
```

```
1 Nを受け取る
2 変数aを定義
3
4 a * a > N なら
5 ループを抜ける
6
7 a-1を出力
```

実装例

C++ : <https://atcoder.jp/contests/nikkei2019-ex/submissions/33787951>

Python : <https://atcoder.jp/contests/nikkei2019-ex/submissions/33787932>

余談

- ・先ほど紹介した解法は \sqrt{N} 回程度の計算が必要だが、計算回数が $\log_2 N$ 回程度で済む解法もある（ヒント：単調性）

（気になる人は、考えてみたり、聞いてみたりして下さい！）

実装例

C++ : <https://atcoder.jp/contests/nikkei2019-ex/submissions/33788028>

Python : <https://atcoder.jp/contests/nikkei2019-ex/submissions/33787991>

- ・数学ライブラリから直接 \sqrt{N} の切り捨てを出力してもよい

実装例

C++ : <https://atcoder.jp/contests/nikkei2019-ex/submissions/33788055>

Python : <https://atcoder.jp/contests/nikkei2019-ex/submissions/33788046>