

Chapter 17

Definition

- **命题**是指客观上能够判断真或假的陈述句.
- 基本的,原始的命题称为**原子命题**.由更小的命题组合而成的命题称为**复合命题**.将几个命题联结组合起来的方式称为**联结词**.
- 把组成一个复合命题的若干个原子命题用符号表示,那么就可用这些符号和联结词一起表达该复合命题,这样的方式称为**命题符号化**.

Def 17.1 设 ar 为集合 T 到非负整数集 \mathbb{N} 的函数,则称集合 T 和函数 ar 为一个**类型**,记为 $T = (T, ar)$,也可简记为 T .

T 的子集 $T_n = \{t \in T | ar(t) = n\}$.

Def 17.2 设 A 是一个集合, T 为一个类型, T 中每个元素 t 对应于 A 上的一个函数 $t_A : A^{ar(t)} \rightarrow A$,则称:

集合 A 和 $\{t_A | t \in T\}$ 构成类型为 T 的一个**代数** A ,或称为**T-代数**.

元素 $t \in T_n$ 称为 **n 元T-代数运算**.

通常将函数 $t_A(a_1, a_2, \dots, a_{ar(t)})$ 简写为 $t(a_1, a_2, \dots, a_{ar(t)})$,且用 A 同时表示集合 A 和类型 T 的一个代数 A .

Def 17.3 **T-代数** A, B 相等,当且仅当 $A = B$,且对 $\forall t \in T$,有 $t_A = t_B$,记为 $T_A = T_B$.

Def 17.4 设 A 是一个T-代数, B 为 A 的子集,如果将 A 上的运算限制在 B 上仍然构成一个T-代数,即:对任意非负整数 n ,任意的 $t \in T$ 以及 $b_1, b_2, \dots, b_{ar(t)} \in B$,有 $t_A(b_1, \dots, b_{ar(t)}) \in B$ 成立(通常称子集 B 关于 A 上的运算是封闭的),则称 B 是 A 的一个**T-子代数**.

- 设 A 为T-代数, $X \subseteq A$.

(1) U 为 A 的一个T-子代数

(2) $X \subseteq U$

(3) 若 U' 为 A 的一个T-子代数,且 $X \subseteq U'$,则 $U \subseteq U'$

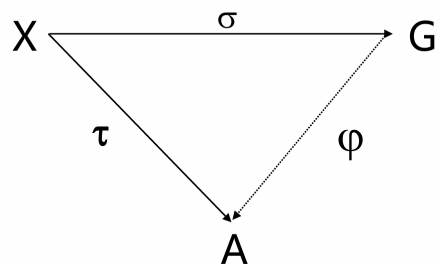
称 U 为**包含 X 的最小子代数**,通常称为**由 X 生成的子代数**,记为 $\langle X \rangle_T$,在不引起误会时可记为 $\langle X \rangle$.

一定存在唯一的包含 X 的最小子代数,即: $\langle X \rangle_T = \bigcap \{U | U \text{ 为 } A \text{ 的子代数, } X \subseteq U\}$.

Def 17.5 设 A, B 是T-代数, ϕ 是从 A 到 B 的映射,若对 $\forall t \in T, a_1, \dots, a_{ar(t)} \in A$,有:

$\phi(t_A(a_1, \dots, a_{ar(t)})) = t_B(\phi(a_1), \dots, \phi(a_{ar(t)}))$,则称 ϕ 为**从 A 到 B 的同态映射**,当 ϕ 为满射时,称 A 和 B 是**同态的**.若 ϕ 是同态映射,而且是可逆的,则称 ϕ 为**同构映射**,称 A, B 是**同构的**.此时,逆函数 ϕ^{-1} 是从 B 到 A 的同构映射.

Def 17.6 设 X 是集合, G 是一个T-代数, σ 为 X 到 G 的函数,若对每个T-代数 A 和 X 到 A 的函数 τ ,都存在唯一的 G 到 A 的同态映射 ϕ ,使得 $\phi \circ \sigma = \tau$,则称 G (更严格地说是 (G, σ)) 是**生成集 X 上的自由T-代数**. X 中的元素称为**生成元**.



Def 17.7 一个**T-代数变量**是一个自由T-代数的自由生成集的元素.(**自由生成集**,就是自由T-代数概念中的集合 X_n)

Theorem

Lem 17.1 若 (G, σ) 是 X 上的自由T-代数,则 σ 是单射.

Thm 17.1 对任何集合 X 和类型 T ,存在 X 上的自由T-代数,并且这种T-代数在同构意义下是唯一的.

Cor 17.1 设 G 是可列集 $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ 上的自由T-代数.则 G 中每个元素都是某个有限子集 $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ 所生成的自由T-代数中的元素.