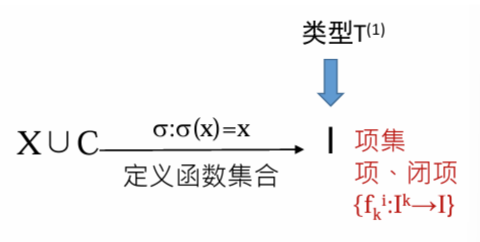
Chapter 19

Definition

- 在谓词逻辑中，命题是用形如$P(x_1,x_2,...,x_n)$的**谓词**来表述的.一个谓词可分为**谓词名**与**个体**两个部分.
    - **个体**是命题的主语,表示独立存在的事物或某个抽象的概念.分为:
        - **个体常量**:1,2,张三...
        - **个体变元**:$x_1,x_2,...$
        - **函数**:$father(Zhang)$...
    - **谓词名**表示个体的性质,状态或个体之间的关系,一般用大写字母表示.
- 在n元谓词$P(x_1,x_2,...,x_n)$中,若每个个体均为常量,变元或函数,则称它为**一阶谓词**.如果某个个体本身又是一个一阶谓词,则称它为**二阶谓词**,如此类推.
- **谓词公式**
    - **原子谓词公式**:由谓词符号和若干项组成的谓词演算.
    - **分子谓词公式**:可以用连词把原子谓词公式组成复合谓词公式,并把它叫做分子谓词公式.
    - **合式公式(WFF)**:通常把合式公式叫做谓词公式,采用递归定义.

Def 19.1 由表示某种不确定的可列个个体对象全体所组成的集合称为**个体变元集**,记为$X=\{x_1,...,x_n,...\}$,这里x_i称为**个体变元**,用来表示不确定的个体对象.由表示某种确定的个体对象全体所组成的集合称为**个体常元集**,它是可列集或有限集,也可以是空集,记为$C=\{c_1,...,c_n,...\}$,这里c_i称为**个体常元**,用来表示某个确定的个体对象.

Def 19.2 $X\cup C$上的自由$T^{(1)}$-代数I称为**项集**,I中的每个元素称为**项**,不含个体变元的项称为**闭项**,I上的代数运算f_n^i称为第i个n**元函数词**.



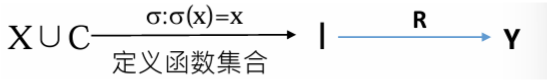
eg.$C=\phi,X=\{p,q\},T=\{F,\to\}$

- $I_0=X\cup C=X=\{p,q\}$
- $I_1=\{F\}\cup\{(\to,x_j,x_k)|x_j,x_k\in I_0\}$
  $=\{F,p\to p,q\to q,p\to q,q\to p\}$
- ...

Def 19.3 设关系集$R=\bigcup_{n=0}^{\infty}R_n$,其中$R_n$表示某个对象集上的所有$n$元关系,即$R_n=\{R_n^i|ar(R_n^i)=n\}$.

- **关系即谓词**.

Def 19.4 对任意的$R_n^i\in R_n\subseteq R$,称I上的n元关系$R_n^i(t_1,...,t_n)$为I上的**原子公式**(特别地,R_0^i就是原子命题公式).这里$t_1,...,t_n\in I$,R_n^i称为第i个n元谓词.基于关系集R的所有I上的原子公式全体称为I的**原子公式集**,记为Y.

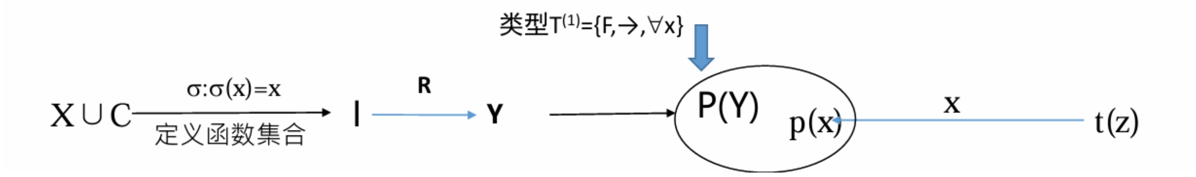


Def 19.5 原子公式集(作为生成元集)$Y=\{R_n(t_1,\dots,t_n)|R_n\in R,t_i\in I,1\le i\le n\}$上关于类型$\{F,\to,\forall x|x\in X\}$的自由代数称为**谓词代数**,记为$P(Y)$,$P(Y)$中的元素称为**谓词合式公式**,因此$P(Y)$也成为**谓词公式集**.这里$F$是零元运算,$\to$是二元运算,而$\forall x$则是一元运算.

- 利用$F,\to,\forall x$来定义一元运算$\neg$和$\exists x$,以及二元运算$\vee,\wedge,\leftrightarrow$:
  - $\neg p\overset{def}{=}p\to F$
  - $\exists x\overset{def}{=}\neg\forall x\neg$
  - $p\vee q\overset{def}{=}\neg p\to q$
  - $p\wedge q\overset{def}{=}\neg(\neg p\vee\neg q)$
  - $p\leftrightarrow q\overset{def}{=}(p\to q)\wedge(q\to p)$

Def 19.6 在谓词合式公式$q=\theta xp$(这里θ表示$\forall$或$\exists$)中,称p为θx的**辖域**,p中x的出现称为x在q中的**约束出现**,p中不是约束出现的其它变元的出现称为变元在q中的**自由出现**.如果变元x在q中约束/自由出现,则称x是q中的**约束/自由变元**.q中自由出现的个体变元全体构成的集合用$var(q)$表示.若$var(q)=\phi$,则称q为**闭式**,此时q中无自由变元.

Def 19.7 设$p(x)$是$P(Y)$中谓词合式公式,x是其自由变元之一,$t(z)$是项,z代表t中的任一个个体变元.当x不出现在p的θz的辖域内,则称t对于p中的x是**自由的**,否则就称t对于p中的x是**不自由的**.



Def 19.8 设$p\in P(Y)$,p的**量词深度**和**层次**分别用$d(p)$和$l(p)$表示,定义为:

(1)若q是$P(Y)$中的原子公式,则$d(q)=l(q)=d(F)=l(F)=0$

(2)$d(p_1\to p_2)=\max\{d(p_1),d(p_2)\},l(p_1\to p_2)=1+\max\{l(p_1),l(p_2)\}$

(3)$d(\forall xp)=\begin{cases}1+d(p),x\in var(p)\\ d(p),x\notin var(p)\end{cases},l(\forall xp)=1+l(p)$

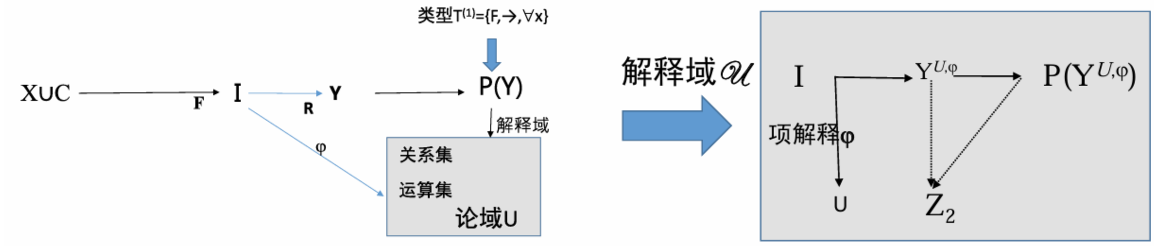
- $P(Y)$的解释域

  $P(Y)$的解释域是一个四元组$(U,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$,其中:
  - U是非空集,称为**论域**
  - φ_1是$C\to U$的函数
  - φ_2是$P(Y)$上的函数词集合到U上运算集的函数,使得$\varphi_2(f_n^i)={f'}_n^i$,这里${f'}_n^i$是$U$上的$n$元运算.
  - φ_3是$P(Y)$上的谓词集合到U上关系集的函数,使得$\varphi_3(R_n^i)={R'}_n^i$,这里${R'}_n^i$是$U$上的$n$元关系.

  解释域U中的元素也称为**个体对象**.通常把解释域$(U,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$简记为$\mathcal{U}$.

Def 19.9 $X\to U$的映射φ_0称为个体变元的**指派**,$I\to U$的同态映射φ称为**项解释**.

- 对同一解释域可以有不同的变元指派,就会有不同的项解释.
- 给定解释域$\mathcal{U}$和项解释φ下:原子公式集Y记为$Y^{U,\varphi}$,谓词公式集$P(Y)$记为$P(Y^{U,\varphi})$.



Def 19.10 谓词公式的**赋值函数**$v:P(Y^{U,\varphi})\to Z_2$分三步$(a),(b),(c_k)$定义如下:

(a)对于原子公式$p=R_n^i(t_1,\dots,t_n)\in Y^{U,\varphi}$定义:当$(\varphi(t_1),\dots,\varphi(t_n))\in R'^i_n$时,$v(p)=1$.否则,$v(p)=0$.

$(b)v$是$\{F,\to\}$-代数的同态映射.即:$v(F)=0$.对任何$p,q\in P(Y^{U,\varphi})$,有$v(p\to q)=v(p)\to v(q)$.

- 设$P_k(Y^{U,\varphi})=\{p|p\in P(Y^{U,\varphi}),d(p)\le k\}$,于是$P(Y^{U,\varphi})=\bigcup_{k\ge 0}P_k(Y^{U,\varphi})$.

(c_k)设$p=\forall xq(x)\in P_k(Y^{U,\varphi})$,则$q(x)\in P_{k-1}(Y^{U,\varphi})$,取$X'=X\cup\{x'\}$,这里$x'\notin X\cup C$.如果对$\varphi_0$的每个扩张$\varphi_0':X'\to U$,和每个满足$(a),(b),(c_i)(i<k)$的$v_{k-1}':P_{k-1}(Y^{U,\varphi'})\to Z_2$,总有$v_{k-1}'(q(x'))=1$,那么:定义$v(p)=1$;否则定义$v(p)=0$.

Def 19.11 设$p\in P(Y)$:

- 若在解释域$\mathscr{U}$和项解释φ下,有$v(p)=1$,则称**p在解释域$\mathscr{U}$和项解释φ下取值为真**.
- 若在某解释域$\mathscr{U}$下,对任一项解释φ,p的取值总为真,则称p在解释域$\mathscr{U}$下是**有效的**.
- 若对任一解释域和任一项解释,p都是有效的,则称p为**有效式**,也称为**重言式**.

Def 19.12 设$A\subseteq P(Y),p\in P(Y),v(A)=\{v(q)|q\in A\}$,若不存在一个使得$v(A)\subseteq\{1\}$而$v(p)=0$的解释域和项解释,则称$p$是假设集$A$的**后件**,或称$A$**语义蕴含**$p$,记为$A\vDash p$,用$Con(A)$表示$A$的后件全体,即$Con(A)=\{p\in P(Y)|A\vDash p\}$.

Def 19.13 设$p,q\in P(Y)$,若$\{p\}\vDash q$且$\{q\}\vDash p$,则称p,q**等价**,记为$p\ |{=}|\ q$.

- $P(Y)$上的一阶谓词演算用$Pred(Y)$表示.

Def 19.14 $Pred(Y)$上的**公理集**$\mathcal{A}=\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2\cup\mathcal{A}_3\cup\mathcal{A}_4\cup\mathcal{A}_5$.其中:

$$\mathcal{A}_1=\{p\to(q\to p)|p,q\in P(Y)\}$$

$$\mathcal{A}_2=\{(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r))|p,q,r\in P(Y)\}$$

$$\mathcal{A}_3=\{\neg\neg p\to p|p\in P(Y)\}$$

$$\mathcal{A}_4=\{\forall x(p\to q)\to(p\to\forall xq)|p,q\in P(Y),x\notin var(p)\}$$

$$\mathcal{A}_5=\{\forall xp(x)\to p(t)|p(x)\in P(Y),\text{项}t\text{对}p(x)\text{中的}x\text{是自由的}\}$$

- 如果存在一个由A导出p的证明,则记为$A\vdash p$,且用$Ded(A)$表示满足$A\vdash p$的所有p的全体.当$\phi\vdash p$,简写为$\vdash p$,并称p为$Pred(Y)$的**定理**.
- **全称推广规则(G规则)**——除MP规则外的另一个重要推理规则:对任意的x证明了$p(x)$,则有$\forall xp(x)$成立.即:对一般的x证明了$p(x)$后,可推出$\forall xp(x)$.

Def 19.15 设$p\in P(Y),A\subseteq P(Y)$,**由假设$A$导出$p$的长度为$n$的证明**是一组有限序列:$p_1,\dots,p_n$,这里$p_i\in P(Y)(i=1,\dots,n),p_n=p$,而$p_1,\dots,p_{n_1}$是长度为$n-1$的由$A$导出$p_{n-1}$的证明序列,并且:对所有$k\le n$:

(1)$p_k\in A\cup\mathcal{A}$,或者

(2)存在$i,j(i,j<k)$,有$p_i=(p_j\to p_k)$,或者

(3)$p_k=\forall xw(x)$,并且$p_1,...,p_{k-1}$的某个子序列$p_{k_1},...,p_{k_r}$是一个由A的子集$A_0(x\notin var(A_0))$导出$w(x)$的证明(长度小于n).

Def 19.16 设$p,q\in P(Y)$,若$\{p\}\vdash q$且$\{q\}\vdash p$,则称p,q**语法等价**,记为$p\vdash\dashv q$.

Def 19.17 设$P_1=P(Y_1)$和$P_2=P(Y_2)$,其个体变元与个体常元分别为X_1,C_1和X_2,C_2,并且或者$C_1=\phi$,或者$C_2\neq\phi$,那么:一个**半同态映射**$(\alpha,\beta):(P_1,X_1\cup C_1)\to(P_2,X_2\cup C_2)$是一对映射$\alpha:P_1\to P_2;\beta:X_1\cup C_1\to X_2\cup C_2$.它们联合实现了映射$p(x,c)\to\alpha(p)(\beta(x),\beta(c))$,且具有性质:

(1)$\beta(X_1)\subseteq X_2,\beta(C_1)\subseteq C_2$,而且$\beta$在$X_1$上是一对一的

(2)α是$\{F,\to\}$-同态映射

(3)对任何$p\in P_1$有$\alpha(\forall xp)=\forall\beta(x)\alpha(p)$

Def 19.18 **(前束范式)**:$p\in P(Y)$为**前束范式**,当且仅当它具有下面的形式:$p=\theta_1x_1\theta_2x_2...\theta_kx_kq$,

- 其中$\theta_i(i=1,...,k)$是$\forall$或$\exists$
- 且$x_1,x_2,...,x_k$是不同的
- q是$P(Y)$中不带量词的公式
- 称$\theta_1x_1\theta_2x_2...\theta_kx_k$为**前束**，称$q$为**母式**

Def 19.19 设$p\in P(Y)$,称与p语法等价的前束范式为p**的前束范式**.

Def 19.20 **(斯柯伦范式)**:$p\in P(Y)$是前束范式,而且它的形式:$p=\theta_1x_1\theta_2x_2...\theta_kx_kq$中的所有$\forall$(如果有的话)总在$\exists$(如果有的话)的后面,则称$p$为**斯柯伦(T.Skolem)范式**.

Theorem

Thm 19.1 设$\mathcal{U}$为$P(Y)$的一个解释域,φ_0为$X\to U$的映射,则φ_0可唯一扩张为$I\to U$的同态映射φ,使得$\varphi(c_i)=c_i'$.这里c_i'为U中的元素.

Lem 19.1 设v_0为$Y^{U,\varphi}\to Z_2$的映射,则v_0可唯一扩张为$P_0(Y^{U,\varphi})\to Z_2$的同态映射$v_0'$,这里的同态是指关于$\{F,\to\}$的同态.

Thm 19.2 设v_0为$Y^{U,\varphi}\to Z_2$的映射,则v_0可唯一扩张为$P(Y^{U,\varphi})\to Z_2$的同态映射v,并对量词深度满足*Def 19.10*定义过程.则称v为$P(Y^{U,\varphi})$的赋值.

- $v(p\to q)=1+v(p)+v(p)v(q)$
- $v(\neg p)=1+v(p)$
- $v(p\vee q)=v(p)+v(q)+v(p)v(q)$
- $v(p\wedge q)=v(p)v(q)$
- $v(p\leftrightarrow q)=1+v(p)+v(q)$
- $v(\exists xp)=1+v(\forall x\neg p)$

Thm 19.3 设$p,q\in P(Y)$,

(1)如果p和q语义等价,则$\forall xp\ |{=}|\ \forall xq$

(2)在p中将$\theta xq(x)$的某些(不一定所有)出现替换为$\theta yq(y)$而得到p'(这里y不在$q(x)$中出现),则$p\ |{=}|\ p'$

Thm 19.4 设$p,p_1,p_2\in P(Y),p_1\mid=\mid p_2$,在$p$中将$p_1$的某些出现替换为$p_2$而得到的结果记为$p'$,则$p\mid=\mid p'$.

Thm 19.5 **(演绎定理)**:设$A\subseteq P=P(Y)$,设$p,q\in P$,则$A\vdash p\to q$当且仅当$A\cup\{p\}\vdash q$.

Lem 19.2 若$p\vdash\dashv q$,则$\forall xp\vdash\dashv\forall xq$.

Thm 19.6 **(等价替换定理)**:设$p,p_1,p_2\in P(Y),p_1\vdash\dashv p_2$,在$p$中将$p_1$的某些出现替换为$p_2$而得到的结果记为$p'$,则$p\vdash\dashv p'$.

Thm 19.7 **(约束变元符可替换性)**:设在p中将$\theta xq(x)$的某些出现替换为$\theta yq(y)$而得到p'(这里$y\notin var(q(x))$,且$p(x)$中的自由变元x不会出现在θy的辖域中),则$p\vdash\dashv p'$.

Thm 19.8 在$P(Y)$中有:

(1)$p\to q\vdash\dashv\neg p\vee q$

(2)$p\leftrightarrow q\vdash\dashv(\neg p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)$

(3)$p\leftrightarrow q\vdash\dashv(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$

(4)$\neg\neg p\vdash\dashv p$

(5)$\neg\theta xp(x)\vdash\dashv\theta'x\neg p(x)$,这里用$\forall'$和$\exists'$分别表示$\exists$和$\forall$

(6)$p\wedge\theta xq(x)\vdash\dashv\theta x(p\wedge q(x))$,要求$x\notin var(p)$

(7)$p\vee\theta xq(x)\vdash\dashv\theta x(p\vee q(x))$,要求$x\notin var(p)$

(8)$\forall xp(x)\wedge\forall xq(x)\vdash\dashv\forall x(p(x)\wedge q(x))$

(9)$\exists xp(x)\vee\exists xq(x)\vdash\dashv\exists x(p(x)\vee q(x))$

(10)$\theta_1xp(x)\wedge\theta_2yq(y)\vdash\dashv\theta_1x\theta_2y(p(x)\wedge q(y))$,要求$x\notin var(q(y)),y\notin var(p(x))$

(11)$\theta_1xp(x)\vee\theta_2yq(y)\vdash\dashv\theta_1x\theta_2y(p(x)\vee q(y))$,要求$x\notin var(q(y)),y\notin var(p(x))$

Lem 19.3 设$(\alpha,\beta):(P_1,X_1\cup C_1)\to(P_2,X_2\cup C_2)$是半同态映射,$p\in P_1$,并且假设$x\notin var(p)$.则$\beta(x)\notin var(\alpha(p))$.

Thm 19.9 **(代换定理)**:设$(\alpha,\beta):(P_1,X_1\cup C_1)\to(P_2,X_2\cup C_2)$是半同态映射,$A\subseteq P_1,p\in P_1$.如果$A\vdash p$,则$\alpha(A)\vdash\alpha(p)$.

Thm 19.10 对任何$p\in P(Y)$,有前束范式p'满足$p\vdash\dashv p'$.

Thm 19.11 **(可靠性定理)**:设$A\subseteq P(Y),p\in P(Y)$.若$A\vdash p$,则有$A\vDash p$.

Cor 19.1 **(协调性定理)**:F不是$Pred(Y)$的定理.

Lem 19.4 设A是$P(Y)$的协调子集.如果$\exists xp(x)\in A,y\notin var(A)$,且项$y$对$p(x)$中的自由变元$x$自由,则$F\notin Ded(A\cup p(y))$.

Lem 19.5 设A是$P(Y)$的协调子集,则存在$X\subseteq X^*,A\subseteq A^*$,这里$A^*\subseteq P(Y^*)$($P(Y^*)$中的项集为$X^*\cup C$上的自由代数),使得:

(1)$F\notin Ded(A^*)$

(2)对所有的$p\in P(Y^*)$,或者$p\in A^*$,或者$\neg p\in A^*$

(3)如果$\exists xp(x)\in A^*$,则存在$x'\in X^*$,使得$p(x')\in A^*$.

Thm 19.12 **(可满足性定理)**:设A是$P(Y)$的协调子集,则存在$P(Y)$的解释域$\mathcal{U}$和项解释φ,使得$v(A)\subseteq\{1\}$.

Thm 19.13 **(完备性定理)**:设$A \subseteq P(Y), p \in P(Y)$,若$A \vDash p$,则有$A \vdash p$.

Thm 19.14 **(紧致性定理)**:如果$A \vDash p$,则存在A的某个有限子集A_0,使得$A_0 \vDash p$.