Chapter 16

Definition

Def 16.1 设$(L;\leq)$为偏序集,若$\forall a,b\in L$,有$a\vee b=lub(a,b)\in L,a\wedge b=glb(a,b)\in L$,称$L$为**格**.

Def 16.2 $(L,\leq)$为格,若$a\leq b,a\neq b$,且$\nexists u\in L-\{a,b\}:a\leq u\leq b$,则称$b$**覆盖**$a$.当$a<b$,若有$c_1\sim c_k\in L(k\geq 1)$,使$c_{i+1}$覆盖$c_i(i=1,2,\ldots,k-1)$,且有$a=c_1<c_2<\ldots<c_k=b$,则称$c_1\ldots c_k$为连接$a,b$的**链**.若$L$中任两个元素$a<b$,总有连接它们的链,则称$L$是**离散的**.

Def 16.3 $(L;\leq)$为偏序集,当任意子集$A\subseteq L$有最大下界,最小上界时,L显然是格,称为**完全格**.其中L自身的最小上界是整个格L的最大元,记为1;L自身的最大下界是整个格L的最小元,记为0.

Def 16.4 $[L;\vee,\wedge]$为一代数系统,$\vee,\wedge$为定义在L上的二元运算,当其满足$L_1\sim L_4$时,称L为**格**,并称$\wedge$为**积(交)**,$\vee$为**和(并)**.若L中存在元素0,使$\forall x\in L,x\vee 0=x$,则称0为$\vee$的单位元,并称0为**格L的零元**.若L中存在元素1,使$\forall x\in L,x\wedge 1=x$,则称1为$\wedge$的单位元,并称1为**格$L$的单位元**.

Def 16.5 $[L;\vee,\wedge]$为格,$T\neq\phi,T\subseteq L.T$关于$\vee,\wedge$封闭时($\forall a,b\in T,a\wedge b\in T,a\vee b\in T$),称$T$为$L$的**子格**.

Def 16.6 设$[L;\vee,\wedge]$与$[S;+,\cdot]$为两个格.如果存在映射$\phi:L\rightarrow S$, 使$\forall a,b\in L$有:
$\phi(a\vee b)=\phi(a)+\phi(b),\phi(a\wedge b)=\phi(a)\cdot\phi(b)$,则称$\phi$为**$L$到$S$的同态映射**.当$\phi(L)=S$即$\phi$为满射时,又称**格$L$与$S$同态**;当$\phi$为一一对应时,称**格$L$与$S$同构**.当$S=L$,分别称其为**自同态**与**自同构**.

Def 16.7 若格$[L;\vee,\wedge]$存在零元0和单位元1,则0和1分别是L的最小元和最大元,称格$[L;\vee,\wedge]$为**有界格**.

Def 16.8 $[L;\vee,\wedge]$为有界格,对$a\in L$,若$\exists b\in L$,使$a\vee b=1,a\wedge b=0$,则称b为a的**补元**,记b为a'.若L中每个元都有补元,则称L为**有补格**.

Def 16.9 $[L;\vee,\wedge]$为格,当对$\forall a,b,c\in L$成立分配律(即分配不等式中等号成立),则称该格为**分配格**.即:

$$D_1:a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$
$$D_2:a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$

Def 16.10 有补分配格称为**布尔格**,习惯上写成$(B;\leq)$.又可称为**布尔代数**$[B;\vee,\wedge,']$.

Def 16.11 布尔代数$[B;\vee,\wedge,']$中定义B上的二元运算$+$和$\cdot$如下:

$$\forall a,b\in B:a+b=(a\wedge b')\vee(a'\wedge b),a\cdot b=a\wedge b$$

则在$[B;\vee,\wedge,']$上定义的$[B;+,\cdot]$为可交换的有单位元环.称这样的环为**布尔环**.

Def 16.12 一个有单位元环,如果它的每个元素都是幂等的,则称该环为**布尔环**.

Theorem

Thm 16.1 $(L;\leq)$为格,则对$\forall a,b\in L$,有:

(1)$a\leq a\vee b,b\leq a\vee b,a\wedge b\leq a,a\wedge b\leq b$;

(2)$a\leq b\Leftrightarrow a\vee b=b$;(3)$a\leq b\Leftrightarrow a\wedge b=a$.

Thm 16.2 $(L;\leq)$为格,$\forall a,b,c\in L$有:

$L_1(\text{幂等律}):a\vee a=a,a\wedge a=a$

$L_2(\text{交换律}):a\vee b=b\vee a,a\wedge b=b\wedge a$

L_3(结合律) : $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

L_4(吸收率) : $a \vee (a \wedge b) = a, a \wedge (a \vee b) = a$

Lem 16.1 在$[L; \vee, \wedge]$中二元运算$\vee, \wedge$满足$L_1 \sim L_4$,则对$\forall a, b \in L, a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$.

Lem 16.2 在$[L; \vee, \wedge]$中,$\vee, \wedge$满足$L_1 \sim L_4$,在L上定义二元关系$\leq$:对$\forall a, b \in L$,有$a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$.则$(L; \leq)$为偏序集.

Thm 16.3 如*Lem 16.2*所得之偏序集$(L; \leq)$为格.

Thm 16.4 格$[L; \vee, \wedge]$中,$\forall a, b, c \in L$,当$b \leq c$时有$a \wedge b \leq a \wedge c, a \vee b \leq a \vee c$.

Thm 16.5 格$[L; \vee, \wedge]$与格$[S; \vee, \wedge]$同态,ϕ为同态映射,则ϕ同时是保序映射,即对$\forall a, b \in L$,当$a \leq b$时$\phi(a) \leq \phi(b)$.

Thm 16.6 ϕ是格L到S的一一对应,则ϕ是同构映射当且仅当:$\forall a, b \in L, a \leq b \Leftrightarrow \phi(a) \leq \phi(b)$.

Thm 16.7(对偶原理)

(1)设p是对任意偏序集都为真的命题.p'为将p中所有$\leq, \geq$对换得到的对偶命题,则p'对任意偏序集也都为真.

(2)设p是从格$[B; \vee, \wedge]$中推出的命题,p'是将p中$\vee$与$\wedge$对换得到的对偶命题,则p'对格$[B; \wedge, \vee]$也为真.

Thm 16.8 $[L; \vee, \wedge]$为有界格,则对$\forall a \in L$有:$a \vee 1 = 1, a \wedge 0 = 0, a \wedge 1 = a, a \vee 0 = a$.

- 对任意格,有分配不等式:$\forall a, b, c \in L$:

  (1)$a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

  (2)$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$

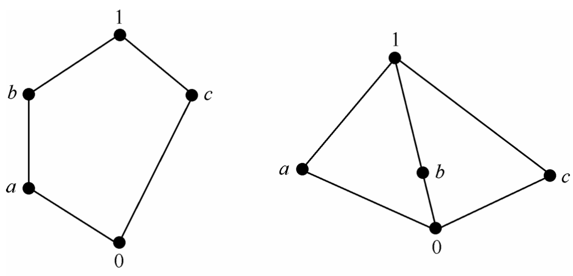
Thm 16.9 $[L; \vee, \wedge]$为任意格,则下述条件等价:

(1)对$\forall a, b, c \in L$有$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

(2)对$\forall a, b, c \in L$有$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

(3)对$\forall a, b, c \in L$有$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$

(4)L不含与M_5或N_5同构的子格



(a) M_5　　(b) N_5

Thm 16.10 布尔格$(B; \leq)$中,$\forall a, b \in B$有:

(1)a的补元是唯一的

(2)$(a \wedge b)' = a' \vee b', (a \vee b)' = a' \wedge b'$

(3)$a \wedge b = 0 \Leftrightarrow a \leq b', b \leq a'$

Thm 16.11 B至少包含2个元素,$\vee$和$\wedge$为B上的两个二元运算,$'$为B上的一元运算.若对$\forall a, b, c \in B$满足:

H_1(交换律)$: a \vee b = b \vee a, a \wedge b = b \wedge a$

H_2(分配律)$: a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

H_3(有界性)$: \exists 0 \in B : a \vee 0 = a, a \wedge 0 = 0; \exists 1 \in B : a \wedge 1 = a, a \vee 1 = 1$

H_4(有补性)$: \forall a \in B, \exists a' \in B : a \wedge a' = 0, a \vee a' = 1$

则$[B; \vee, \wedge, ']$为布尔代数.

- 推论1:任一有限布尔代数必为$2^n(n \geq 1)$元的.
- 推论2:$\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$,必定能找到布尔代数$B : |B| = 2^n$.
- 推论3:任一2^n元布尔代数都同构于$[B; \vee, \wedge, ']$.

Thm 16.12 $[B; +, \cdot]$为具有幂等律的环,则对$\forall a \in B$,有$2a = 0$.