Chapter 18

Definition

Def 18.1 设$T=\{F,\rightarrow\}$,这里$ar(F)=0, ar(\rightarrow)=2$.称任何这样的T-代数为**命题代数**.

- 按类型$T=(\{F,\rightarrow\},ar)$定义P上的运算:
  - 把0元运算$F_{P(X)}$规定为$P(X)$中的特定元素F
  - 二元运算$\rightarrow_{P(X)}$定义为:$\rightarrow_{P(X)}(p,q)=(\rightarrow,p,q)$

  构成了X上的T-代数$[P(X),F_{P(X)},\rightarrow_{P(X)}]$,为**命题代数**,也为**自由代数**.

Def 18.2 设X是可列集,X上的自由T-代数称为X**上关于命题演算的命题代数**,记为$P(X)$,并称X为**命题变量集**,X中元素称为**命题变元**,$P(X)$中的每个元素称为命题演算的**合式公式**,简记为*wff*,仅由一个命题变元符组成的合式公式称为**原子公式**,所有原子公式全体称为**原子公式集**.

- 在任何命题代数中,可利用F和$\rightarrow$定义一元运算$\neg$和其他二元运算$\vee,\wedge,\leftrightarrow$,定义为:

$$\neg p \overset{def}{=} p\rightarrow F$$

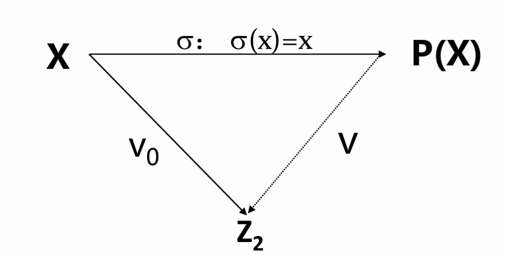
$$p\vee q \overset{def}{=} (\neg p)\rightarrow q$$

$$p\wedge q \overset{def}{=} \neg((\neg p)\vee(\neg q))$$

$$p\leftrightarrow q \overset{def}{=} (p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$$

- 优先级:$\neg>\wedge>\vee>\rightarrow>\leftrightarrow$

Def 18.3 设$P(X)$是X上关于命题演算的命题代数,称$P(X)\rightarrow Z_2$的同态映射v为$P(X)$的**赋值**.对于任意的$p\in P(X)$,若$v(p)=1$则称p**按赋值**v**为真**,若$v(p)=0$则称p**按赋值**v**为假**.



Def 18.4 设v_0为$X\rightarrow Z_2$的映射,称v_0为命题变元的**一个指派**.

$$v(p\rightarrow q)=v(p)\rightarrow v(q)=1+v(p)(1+v(q))=1+v(p)+v(p)v(q)$$
$$v(\neg p)=v(p\rightarrow F)=v(p)\rightarrow v(F)=1+v(p)(1+v(F))=1+v(p)(1+0)=1+v(p)$$
$$v(p\vee q)=v(\neg p\rightarrow q)=v(\neg p)\rightarrow v(q)=1+(1+v(p))(1+v(q))=v(p)+v(q)+v(p)v(q)$$
$$v(p\wedge q)=v(\neg(\neg p\vee\neg q))=1+v(\neg p\vee\neg q)=v(p)v(q)$$
$$v(p\leftrightarrow q)=v((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p))=1+v(p)+v(q)$$

Def 18.5 函数$f:Z_2^n\rightarrow Z_2$称为**n元真值函数**.

Def 18.6 设$p\in P(X)$,定义p的n元真值函数$f_p:Z_2^n\rightarrow Z_2$为:$f_p=v(p)$,称f_p为p**的真值函数**.由p的真值函数所建立的函数值表称为p**的真值表**.

Def 18.7 设$A\subseteq P(X), q\in P(X)$,若对所有使得$\forall p\in A, v(p)=1$的赋值$v$,都有$v(q)=1$,则称$q$是**假设集**$A$**的后件**,或称$A$**语义蕴含**$q$,记为$A\vDash q$, 用$Con(A)$表示$A$的后件全体,即$Con(A)=\{p\in P(X)|A\vDash p\}$.

- $A \subseteq Con(A)$
- $\forall p \in P(X), p \in Con(\{F\})$

Def 18.8 设$p \in P(X)$,若对$P(X)$的任意赋值v都有$v(p) = 1$,则称p是**有效的**,也称为**重言式**.若对$P(X)$的任意赋值v都有$v(p) = 0$,则称p是**永假式**.

- p是重言式$\Leftrightarrow \phi \vDash p$,简记为$\vDash p$.

Def 18.9 设$p, q \in P(X)$,若对$P(X)$的任意赋值v有$v(p) = v(q)$,则称p, q**等值**.

Def 18.10 形式为$\vee_{i=1}^{m}(\wedge_{j=1}^{n} y_{ij})$的合式公式称为**析取范式**.形式为$\wedge_{i=1}^{m}(\vee_{j=1}^{n} y_{ij})$的合式公式称为**合取范式**.这里$y_{ij}$为某个命题变元$x_k$或其否定$\neg x_k$.

Def 18.11 一个合式公式若不是永假式,则用*Thm 18.4*的证明方法($q = (y_1^1 \wedge y_2^1 \wedge \ldots \wedge y_n^1) \vee \ldots \vee (y_1^i \wedge y_2^i \wedge \ldots \wedge y_n^i) \vee \ldots$)得到的等值析取范式称为该合式公式的**标准析取范式**.

Def 18.12 一个合式公式若不是重言式,则用*Cor 18.1*的证明方法($\wedge_{i=1}^{m}(\vee_{j=1}^{n} z_{ij}), z_i = \{ {}^{\neg x_i, v(x_i)=1}_{x_i,\ v(x_i)=0}$)得到的等值合取范式称为该合式公式的**标准合取范式**.

- 一些在任何数学证明中公认允许采用的陈述句,把它们形式化地表述成若干特殊的命题,这些命题可在证明的任何一步引入,这些命题被称为**公理(Axiom)**.对于集合X上的命题演算,称X上的自由命题代数$P(X)$的子集$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$中的所有元素为系统的**公理**.其中:
  - $\mathcal{A}_1 = \{p \to (q \to p) | p, q \in P(x)\}$
  - $\mathcal{A}_2 = \{(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)) | p, q, r \in P(X)\}$
  - $\mathcal{A}_3 = \{\neg\neg p \to p | p \in P(X)\}$
- 另一个采用的方法是由若干规则构成,这些规则规定:从某些陈述导出某些特定陈述是可接受的,这些规则在形式化之后,称为系统的**推理规则(Ponens)**.
  - **MP规则**:由p和$p \to q$可导出q.

Def 18.13 设$q \in P(X), A \subseteq P(X)$,在集合$X$上的命题演算中,由假设$A$导出$q$的证明是一组有限序列$p_1, \ldots, p_n$,这里$p_i \in P(X)(i = 1, \ldots, n), p_n = q$,并且对于每个$p_i$:

- 或者$p_i \in \mathcal{A} \cup A$,
- 或者存在$j, k(j, k < i)$,有$p_k = (p_j \to p_i)$.

Def 18.14 设$q \in P(X), A \subseteq P(X)$,如果存在一个由$A$导出$q$的证明,则称$q$是$A$的**推导**,或称$q$是**从$A$可证明的**,记为$A \vdash q$,且用$Ded(A)$表示$A$的推导全体.显然,$A \subseteq Ded(A)$.

Def 18.15 设$p \in P(X)$,如果存在一个由ϕ导出p的证明,则称p是X上的**命题演算的定理**,记为$\phi \vdash p$,也简写为$\vdash p$.

- $p \to q$是命题合式公式,表示p**蕴含**q.
- $A \vDash q$是A**语义蕴含**q,表示当且仅当A中所有命题为真时,命题q也为真.
- $A \vdash q$是A**逻辑蕴含**q,表示从A中的性质,通过推理规则可以证明推出q.

-

Def 18.16 设$p, w \in P(X)$,若p在w中出现,则称p为w的**子公式**.

Def 18.17 一个**逻辑**L是由下述集合所组成的系统:

- **元素(命题)集**P
- **函数集**V(这些函数都是从P到某个值集W的,称为**赋值**.特别地,若$|W|>2$则称L为多值逻辑系统)
- 以及对应于P的每个子集A导出P中元素的**有限序列集**(称为**由前提**A**得到的证明**)

- 用$Prop(X)$表示X上命题演算的逻辑,其组成为:
  - (1)集合$P=P(X)$(X上自由命题代数)
  - (2)所有的$P(X)$到Z_2的同态映射集V
  - (3)满足*Def 18.13*的证明集($P(X)$的每个子集A导出$P(X)$中元素的有限序列集)

Def 18.18 如果$A\vdash p$必有$A\vDash p$,则称逻辑L是**可靠的**.

Def 18.19 如果F不是L的定理,则称逻辑L是**协调的**.

Def 18.20 如果$A\vDash p$必有$A\vdash p$,则称逻辑L是**完备的**.

Def 18.21 如果存在一个算法,对逻辑L的每个命题p,能在有限步内确定p是否为重言式,则称逻辑L是**有效性可判定的**.

Def 18.22 如果存在一个算法,对逻辑L的每个命题p,能在有限步内确定p是否为定理,则称逻辑L是**可证明性可判定的**.

Def 18.23 设$A\subseteq P(X)$,若$F\notin Ded(A)$,则称A是**协调的**.若A是协调的,且对$\forall B\subseteq P(X)$,当B真包含A时,B必定不协调,则称A是**极大协调子集**.

Theorem

- **命题逻辑的演算**

  1.双重否定律 $A\Leftrightarrow\neg\neg A$

  2.等幂律 $A\Leftrightarrow A\vee A$ $A\Leftrightarrow A\wedge A$

  3.交换律 $A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$ $A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$

  4.结合律 $(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$ $(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$

  5.分配律 $A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ $A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$

  6.德·摩根律 $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$ $\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$

  7.吸收率 $A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$ $A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$

  8.零律 $A\vee 1\Leftrightarrow 1$ $A\wedge 0\Leftrightarrow 0$

  9.同一律 $A\vee 0\Leftrightarrow A$ $A\wedge 1\Leftrightarrow A$

  10.排中律 $A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$

  11.矛盾律 $A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$

  12.蕴含等值式 $A\to B\Leftrightarrow\neg A\vee B$

  13.等价等值式 $A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\to B)\wedge(B\to A)$

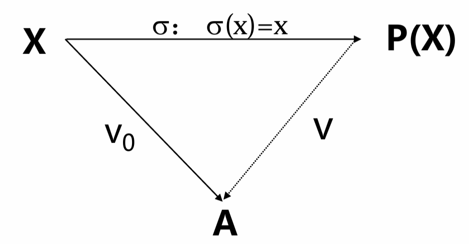
  14.假言易位 $A\to B\Leftrightarrow\neg B\to\neg A$

15.等价否定等值式　　　$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

16.归谬论　　　$(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

- **置换规则**:设$\Phi(A)$是含公式A的命题公式,$B \Leftrightarrow A$,若用B置换$\Phi(A)$中的A,得$\Phi(B)$,则$\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$.

Thm 18.1 设A为命题代数,v_0为$X \to A$的映射,则v_0可唯一扩张为$P(X) \to A$的同态映射v.



Lem 18.1 Con是$P(X)$上的封闭运算,有如下性质:

(1)$A \subseteq Con(A)$

(2)若$A_1 \subseteq A_2$,则$Con(A_1) \subseteq Con(A_2)$

(3)$Con(Con(A)) = Con(A)$

Thm 18.2 下述结论是等价的:

(1)p, q等值

(2)$\models p \leftrightarrow q$

(3)p, q有相同的真值函数和真值表

Thm 18.3 对$\forall p, q, r \in P(X)$有下述结论:

(1)$\models \neg\neg p \leftrightarrow p$

(2)$\models \neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

(3)$\models \neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

(4)$\models \neg(p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n) \leftrightarrow \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge ... \wedge \neg p_n$

(5)$\models \neg(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n) \leftrightarrow \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee ... \vee \neg p_n$

Thm 18.4 任何命题合式公式(即$P(X)$中的元素)都有只含命题变元及$\neg, \vee, \wedge$这三种运算的合式公式与该命题合式公式等值.

Cor 18.1 每个非重言式必等值于一个合取范式.

Lem 18.2 $Ded(A)$具有如下性质:

(1)若$q \in Ded(A)$,则必存在A的有限子集A',使得$q \in Ded(A')$.

(2)Ded在$P(X)$满足封闭性,即:

(i)$A \subseteq Ded(A)$

(ii)若$A_1 \subseteq A_2$,则$Ded(A_1) \subseteq Ded(A_2)$

(iii)$Ded(Ded(A)) = Ded(A)$

Thm 18.5 **(演绎定理)**:设$A \subseteq P(X), p, q \in P(X)$,则$A \vdash p \to q$当且仅当$A \cup \{p\} \vdash q$.

Thm 18.6 **(代换定理)**:设X,Y是两个集合,ϕ是$P(X)\to P(Y)$的同态映射,这里$P(X)$和$P(Y)$分别是X,Y上的(自由)命题代数.设$w=w(x_1,\dots,x_n)$是$P(X)$的元素,A是$P(X)$的子集,令$q_i=\phi(x_i),q_i\in P(Y)$:

(1)如果$A\vdash w$,则$\phi(A)\vdash\phi(w)(=w(q_1,\dots,q_n))$

(2)如果$A\vDash w$,则$\phi(A)\vDash\phi(w)(=w(q_1,\dots,q_n))$

Cor 18.2 设$P(X_n)$为X_n上的命题代数,$p_i\in P(X_n)(i=1,\dots,n),w=w(x_1,\dots,x_n)\in P(X_n)$,则有:

(1)如果$\vdash w$,则$\vdash w(p_1,\dots,p_n)$

(2)如果$\vDash w$,则$\vDash w(p_1,\dots,p_n)$

Thm 18.7 **(子公式替换定理)**:设$w,p,p'\in P(X)$,p为w的子公式,把p在w中的某些出现替换为p'得到的公式记为w'.

(1)若$\vdash p\leftrightarrow p'$,则有$\vdash w\leftrightarrow w'$

(2)若$\vDash p\leftrightarrow p'$,则有$\vDash w\leftrightarrow w'$

Thm 18.8 **(可靠性定理)**:设$A\subseteq P(X),p\in P(X)$.若$A\vdash p$,则有$A\vDash p$.简言之:$Ded(A)\subseteq Con(A)$.

Cor 18.3 **(协调性定理)**:F不是$Prop(X)$的定理.

Lem 18.3 设$A\subseteq P(X)$,则A是极大协调子集当且仅当同时满足以下三条:

(1)$F\notin A$

(2)$A=Ded(A)$

(3)对所有的$p\in P(X)$,或者$p\in A$或者$\neg p\in A$

Lem 18.4 设A是不协调的,则存在A的有限子集是不协调的.

Lem 18.5 设A是$P(X)$的协调子集,则A必被某个极大协调子集所包含.

Thm 18.9 **(可满足性定理)**:设A是$P(X)$的协调子集,则存在赋值$v:P(X)\to Z_2$,使得$v(A)\subseteq\{1\}$.

Thm 18.10 **(完备性定理)**:设$A\subseteq P(X),p\in P(X)$,若在$Prop(X)$中有$A\vDash p$,则在$Prop(X)$中有$A\vdash p$.

Lem 18.6 设$w=w(x_1,\dots,x_n)\in P(X)$,则$\vDash w$当且仅当$w$的真值函数$f_w$是常值函数1.

Thm 18.11 $Prop(X)$的有效性是可判定的.

Cor 18.4 $Prop(X)$是可证明性可判定的.