五. 几何概率

- 几何概率

  (1) 样本空间Ω: 某个区域, 度量为S_Ω.

  (2) 样本点落在事件A中的概率, 只与A的度量有关, 与A的形状和位置无关.

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega}$$

eg. (**会面问题**) 甲和乙约定在6点到7点之间会面, 先到的等候20分钟后可离开. 求两个人会面的概率.

解: 假定x, y分别为甲和乙到达的时间. 则

$$\Omega = \{(x,y)|0 \le x \le 60, 0 \le y \le 60\}$$
$$A = \{(x,y)| -20 \le x-y \le 20,\ x,y \in [0,60]\}$$

则有:

$$S_\Omega = 60 \times 60$$
$$S_A = 60 \times 60 - 40 \times 40$$
$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{5}{9}$$

eg. (**蒲丰投针问题**) 平行线间距离为d, 针长度为l. $l < d$,求针压线的概率

解: 设x为针的中心与最近一根平行线的距离. φ为针与平行线的夹角.

$$\Omega = \{(x,\varphi)|0 \le x \le \frac{d}{2}, 0 \le \varphi \le \pi\}$$
$$A = \{(x,\varphi)|x \le \frac{l}{2}sin\varphi, (x,\varphi) \in \Omega\}$$

则有:

$$S_\Omega = \frac{d}{2}\pi$$
$$S_A = \int_0^\pi \frac{l}{2}sin\varphi d\varphi = l$$
$$P(A) = \frac{2l}{\pi d}$$

注: *Monte Carlo法*

$$P(A) \approx \frac{n(A)}{n} = f_n(A)$$
$$\frac{2l}{\pi d} \approx f_n(A)$$
$$\pi \approx \frac{2l}{d \cdot f_n(A)}$$

eg. (**贝特朗奇论**) 在圆内任取一条弦,求弦长超过圆内接等边三角形边长的概率.

(1) 看弦与其垂直的直径的位置关系

$$\Omega = 2r, A = rsin\frac{\pi}{6} \times 2 = r, P(A) = \frac{1}{2}$$

(2) 确定一个端点旋转弦, 看旋转角度

$$\Omega=\pi, A=\frac{\pi}{3}, P(A)=\frac{1}{3}$$

(3) 看弦中点在圆内的位置

$$\Omega=\pi r^2, A=\frac{1}{4}\pi r^2, P(A)=\frac{1}{4}$$

第三讲 概率的性质

一. 性质

性质1. $P(\phi)=0$

证:

$$\Omega=\Omega\cup\phi\cup\phi\cup...$$

由可列可加性:

$$\begin{aligned}P(\Omega)&=P(\Omega\cup\phi\cup...)\\&=P(\Omega)+P(\phi)+...\end{aligned}$$

则有

$$P(\phi)+P(\phi)+...=0$$

由非负性:

$$P(\phi)=0$$

得证

性质2. (有限可加性) 若$A_1,A_2...A_n$互不相容, 则$P(\cup_{i=1}^n A_i)=\Sigma_{i=1}^n P(A_i)$

证:

$$\begin{aligned}\cup_{i=1}^n A_i&=A_1\cup A_2\cup...\cup A_n\cup\phi\cup...\\P(\cup_{i=1}^n A_i)&=P(A_1\cup A_2\cup...\cup A_n\cup\phi\cup...)\end{aligned}$$

由可列可加性:

$$P(A_1\cup A_2\cup...\cup A_n\cup\phi\cup...)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)+P(\phi)+...=\Sigma_{i=1}^n P(A_i)$$

性质3. $P(\bar{A})=1-P(A)$

证:

$$\begin{aligned}P(\bar{A})+P(A)=P(\bar{A}\cup A)=P(\Omega)=1\\P(\bar{A})=1-P(A)\end{aligned}$$

eg. 甲和乙抛硬币, 甲抛$n+1$次, 乙抛n次, 求甲抛出正面次数大于乙抛出正面次数的概率.

解: 设概率为$P(A)$.

$$A=甲_{正}>乙_{正}$$

$$\bar{A}=甲_{正}\leq乙_{正}$$

$$P(A)=P(n+1-甲_{反}>n-乙_{反})=P(甲_{反}<乙_{反}+1)=P(甲_{反}\leq乙_{反})=P(甲_{正}\leq乙_{正})=P(\bar{A})$$

由性质3, $P(A)=\frac{1}{2}$.

性质4. 若$A\supset B$, 则$P(A-B)=P(A)-P(B)$

证:

$$\begin{gathered}P(A-B)+P(B)\\=P((A-B)\cup B)\\=P(A)\end{gathered}$$

则

$$P(A-B)=P(A)-P(B)$$

推论: 若$A\supset B$, 则$P(A)\geq P(B)$

性质5. $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

证:

由性质4:

$$P(A)-P(AB)=P(A-AB)=P(A-B)$$

eg. 口袋中有n个球, 编号为$1,2,...,n$, 从中**有放回**地任取m次, 求取出的m个球的最大号码是k的概率.

解: 设$A_l=\{\text{取出的最大号码小于等于}l\}$, 则

$$A=A_k-A_{k-1}$$

且有

$$A_{l+1}\supset A_l$$

则

$$\begin{gathered}P(A_l)=\frac{l^m}{n^m},\ l=1,2,...\\P(A)=P(A_k)-P(A_{k-1})=\frac{k^m-(k-1)^m}{n^m}\end{gathered}$$

性质6. (加法公式) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

证:

由于$B\supset AB$, 得

$$P(B)-P(AB)=P(B-AB)=P(B-A)$$

则

$$P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B-A)$$

由**有限可加性**

$$P(A)+P(B-A)=P(A\cup(B-A))=P(A\cup B)$$

得证

注:

$$P(A_1 \cup ... \cup A_n)$$
$$= \Sigma_{i=1}^n P(A_i) - \Sigma_{1 \le i < j \le n} P(A_i A_j) + ... + (-1)^{n-1} P(A_1 ... A_n)$$

推论: $P(A \cup B) \le P(A) + P(B)$, $P(\cup_{i=1}^n A_i) \le \Sigma_{i=1}^n P(A_i)$

二. 概率的连续性

定义1.

(1) $\{F_n\}$为$\mathcal{F}$中任一单调不减的事件序列: $F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_n \subset ...$, 称$\cup_{n=1}^\infty F_n$为$\{F_n\}$的**极限事件**, 记为$\lim_{n \to \infty} F_n = \cup_{n=1}^\infty F_n$.

(2) $\{E_n\}$为$\mathcal{F}$中任一单调不增的事件序列: $E_1 \supset E_2 \supset ... \supset E_n \supset ...$, 称$\cap_{n=1}^\infty E_n$为$\{E_n\}$的**极限事件**, 记为$\lim_{n \to \infty} E_n = \cap_{n=1}^\infty E_n$.

注:

(1) $F_n = \cup_{i=1}^n F_i = \cup_{i=1}^n (F_i - F_{i-1})$, 其中$F_0 = \phi$.

(2) $\cup_{n=1}^\infty F_n = \cup_{n=1}^\infty (F_n - F_{n-1})$

定义2. 设$P(A)$为$\mathcal{F}$上的集合函数.

(1) 若$\forall \mathcal{F}$中的单调不减的事件序列$\{F_n\}$成立$\lim_{n \to \infty} P(F_n) = P(\lim_{n \to \infty} F_n)$, 则称$P$是**下连续的**.

(2) 若$\forall \mathcal{F}$中的单调不增的事件序列$\{E_n\}$成立$\lim_{n \to \infty} P(E_n) = P(\lim_{n \to \infty} E_n)$, 则称$P$是**上连续的**.