第一章 随机事件与概率

第一讲 随机事件与概率及其运算

一. 随机现象

二. 样本空间

- 样本空间与样本点
  - 样本点是一个结果, 例如抛硬币的正反面, 掷骰子的六种点数. 通常用ω来表示.
  - 样本空间是所有样本点的集合. 通常用Ω来表示.

三. 随机事件

1. **随机事件**: 样本空间的子集. 通常用大写字母$A, B, C...$来表示.

eg. 掷骰子 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. 事件$A=\{\text{奇数点}\}=\{1,3,5\}$. A发生$\leftrightarrow$样本点落在A中$\leftrightarrow$$A$中的样本点出现

2. **基本事件**: 单个样本点构成的事件. (Ω中一个样本点构成的子集)
3. **必然事件**: Ω
4. **不可能事件**: ϕ

四. 随机变量

- **随机变量**: 表示随机现象结果的变量, 用x, y, z等表示. (是样本点的函数)
- eg. 掷骰子, $x=$"掷出的点数", $x\in\{1,2,3,4,5,6\}$.
- eg. 抛硬币, $x=\{^{1,\text{正面}}_{0,\text{反面}}$, $x\in\{0,1\}$.

五. 事件之间的关系

1. **包含**: $A\subset B\leftrightarrow A$发生$\Rightarrow B$发生.
2. **相等**: $A=B\leftrightarrow A$与B同时发生.
3. **互不相容**: $AB=\phi\leftrightarrow A$与B不能同时发生.

六. 事件间的运算

1. **并**: $A\cup B$. $A\cup B$发生$\Leftrightarrow A$发生或者B发生.
2. **交**: $A\cap B\triangleq AB$. AB发生$\Leftrightarrow A,B$同时发生.
3. **差**: $A-B$. $A-B$发生$\Leftrightarrow A$发生且B不发生.
4. **对立事件**: $\bar{A}$. $\bar{A}$发生$\Leftrightarrow A$不发生.

- $\bar{\bar{A}}=A$.
- $A-B=A\bar{B}$.

eg. 设A, B, C是三个事件.

(1) A, B, C中至少有一个发生: $A\cup B\cup C$

(2) A, B, C全发生: ABC

(3) A与B发生, 且C不发生: $AB\bar{C}=AB-C$

(4) A,B,C中至少有两个发生 :$AB\cup BC\cup AC$

(5) A,B,C中恰好有两个发生 :$AB\bar{C}\cup BC\bar{A}\cup AC\bar{B}$

(6) A,B,C都不发生: $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

(7) A,B,C不全发生: $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$

5. 运算性质 (集合的运算性质)

对偶律 (德摩根公式) :

- $\overline{\cup_{i=1}^{n}A_i}=\cap_{i=1}^{n}\bar{A}_i$
- $\overline{\cap_{i=1}^{n}A_i}=\cup_{i=1}^{n}\bar{A}_i$
- $\overline{\cup_{n=1}^{\infty}A_n}=\cap_{n=1}^{\infty}\bar{A}_n$
- $\overline{\cap_{n=1}^{\infty}A_n}=\cup_{n=1}^{\infty}\bar{A}_n$

七. 事件域

定义: 1. 设Ω为一样本空间, $\mathcal{F}$为Ω中的某些子集构成的集合类. 若

(1) $\Omega\in\mathcal{F}$

(2) 若$A\in\mathcal{F}$,则$\bar{A}\in\mathcal{F}$**(关于对立事件封闭)**

(3) 若$A_n\in\mathcal{F},n=1,2,\dots$则$\cup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{F}$**(关于并运算封闭)**

则称$\mathcal{F}$为事件域或σ域, 或σ代数, 称$(\Omega,\mathcal{F})$为可测空间.

注:

(1) $\phi=\bar{\Omega}\in\mathcal{F}$

(2) $\overline{\cap_{n=1}^{\infty}A_n}=\cup_{n=1}^{\infty}\bar{A}_n\in\mathcal{F}$,$\cap_{n=1}^{\infty}A_n=\overline{\overline{\cap_{n=1}^{\infty}A_n}}\in\mathcal{F}$

(3) $A,B\in\mathcal{F}$, $A-B=A\bar{B}\in\mathcal{F}$**(关于差运算封闭)**

eg. 常见的事件域

(1) $\Omega=\{\omega_1,\dots\omega_n\}$(有限集), Ω的所有子集构成事件域.

(2) $\Omega=\{\omega_1,\dots\omega_n,\dots\}$(可列集), Ω的所有子集构成事件域.

(3) **Borel事件域**: $\Omega=R$, $\mathcal{P}=\{(-\infty,x)|x\in R\}$. $\mathcal{F}$为包含$\mathcal{P}$的最小事件域($\mathcal{F}$由$\mathcal{P}$生成), $\mathcal{F}$称为**Borel事件域**.

注:

(1) $[a,b)=(-\infty,b)-(-\infty,a)\in\mathcal{F}$

(2) $[a,b]=\cap_{n=1}^{\infty}[a,b+\frac{1}{n})\in\mathcal{F}$

(3) $\{b\}=[a,b]-[a,b)\in\mathcal{F}$

(4) $(a,b)\in\mathcal{F}$, $(a,b]\in\mathcal{F}$

*样本空间的分割:

若

(1) $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

(2) $A_1, \ldots, A_n$互不相容

则$A_1, \ldots, A_n$为Ω的一个分割.

第二讲 概率的定义及其确定方法

一. 概率的公理化定义

定义1. 设Ω为样本空间,$\mathcal{F}$为事件域,若$\forall A \in \mathcal{F}$,定义在$\mathcal{F}$上的实值函数$P(A)$满足

(1) 非负性: $P(A) \geq 0$

(2) 正则性: $P(\Omega) = 1$

(3) 可列可加性: $A_1, \ldots, A_n, \ldots$互不相容,即$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

则称$P(A)$为事件A的概率. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$称为概率空间.

二. 排列组合

重复组合: 从n个样本中可重复地取r个样本, 共有多少种取法?

$$C_{n+r-1}^{n-1} = C_{n+r-1}^{r}$$

三. 频率

n次试验中A发生了$n(A)$次, 则A发生的频率为$f_n(A) = \frac{n(A)}{n}$.

四. 古典概率

1. 样本空间中只有有限个样本点
2. 所有样本点出现的概率都相等 (等可能性)

$$P(A) = \frac{A\text{中的样本点数}}{\text{总样本点数}} = \frac{n_A}{n}$$
$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$$
$$A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_{n_A}}\}$$
$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}\}) + \ldots + P(\{\omega_{i_{n_A}}\}) = \frac{n_A}{n}$$

eg. 掷两枚硬币, 求出现一个正面一个反面的概率.

$\Omega = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}$

$A = \{(\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正})\}$

$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

eg. (**无放回抽样**) N个产品, 其中有M个次品. 从中任取n件, $A = \{n\text{个产品中有}m\text{个次品}\}$, 求$A$的概率.

$n = C_N^n, n_A = C_M^m C_{N-M}^{n-m}$.

$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$

eg. (**有放回抽样**) 数据同上例.

$n=N^n, n_A=C_n^m M^m (N-M)^{n-m}$

$P(A)=\frac{C_n^m M^m (N-M)^{n-m}}{N^n}=C_n^m(\frac{M}{N})^m(1-\frac{M}{N})^{n-m}$

eg. (**盒子模型**) n个球, N个盒子, 每个球可任意放入任意一个盒子中, 求

(1) 指定n个盒子中各有一个球的概率p_1

总样本点数: N^n

$n_A=n!$

$p_1=\frac{n!}{N^n}$

(2) 恰有n个盒子中各有一个球的概率p_2

$n_A=C_N^n n!=P_N^n$

$p_2=\frac{P_N^n}{N^n}$

eg. (**生日问题**) n个人生日全部不同的概率$P(A)$ ⇔n个球, 365个盒子, 恰有n个盒子中各有一个球(盒子模型中的第二个问题).

$P(A)=\frac{P_{365}^n}{365^n}$

注: $\bar{A}=\{至少有两个人生日在同一天\}. P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{P_{365}^n}{365^n}$

- $P(\bar{A})=\frac{n_{\bar{A}}}{n}=\frac{n-n_A}{n}=1-\frac{n_A}{n}=1-P(A)$

eg. (**抽签问题**) a个红球, b个黑球, 依次等可能不放回摸球, 求第k次摸到红球的概率$P(A)$.

解1 (所有球不一样)

$n=(a+b)!$

$n_A=a(a+b-1)!$

$P(A)=\frac{a}{a+b}$

解2 (红球都一样,黑球都一样)

$n=C_{a+b}^a=C_{a+b}^b$

$n_A=C_{a+b-1}^{a-1}=C_{a+b-1}^b$

$P(A)=\frac{C_{a+b}^a}{C_{a+b-1}^{a-1}}=\frac{a}{a+b}$ (与k无关)