Theoretische Physik II (Hebecker)

Robin Heinemann

19. April 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Lagrange - Formalismus

1.1 Grundidee (1788, Joseph-Louis Lagrange)

Vorteile gegenüber Newton:

- Flexibelität
- Zwangskräfte
- Zusammenhang zwischen Symmetrie und Erhaltungsgrößen

Zentrales Objekt: Wirkungsfunktional S.
Abbildung S : Trajektorie $\mapsto$ reelle Zahl
(S definiiert mittls Lagrange-Funktion L)
Zentrale physikalische Aussage des Formalimus: „Wirkungsprinzip“ („Hamilton-Prinzip“)
Letztes besagt: Eine physikalische Bewegung verläuft so, dass das Wirkungsfunktional minimal wird.
$\rightarrow$ DGL („Euler-Lagrange-Gleichung“), im einfachen Fall $\equiv$ Newton Gleichung

1.2 Variationsrechnung: Der Funktionalbegriff

Funktion (mehrerer Variablen) y;

$$y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, y : \vec{x} \mapsto y(\vec{x})$$

Funktional: analg, mit $\mathbb{R}^n$ ersetzt durch eine Menge von Funktionen (Vektorraum $\mathbb{V}$)

$$F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}, F : y \mapsto F[y]$$

Beispiel 1.1 $\mathbb{V}$ seinen differenziebare Funktionen auf $[0,1]$ mit $y(0) = y(1) = 0$
Diskretisierung:

$$\begin{array}{c} x_1, \dots, x_n \to \{y(x_1), \dots, y(x_n)\} \\ \downarrow \\ \text{Vektor} \equiv \text{Funktion} \end{array}$$

$\Rightarrow$ im diskreten Fall ist unser Funktional schlicht eine Funktion mit Vektor-Argument. (Eigentlicher Funktionalbegriff folgt im Limes $n \to \infty$).
Beispielfunktionale zu obigem $\mathbb{V}$.

- $F_1[y] = y(0.5)$
- $F_2[y] = y'(0.3)$
- $F_3[y] = y(0.1) + y(0.5) + y'(0.9)$
- $F_4[y] = \int_0^1 \mathrm{d}x \Big(x \cdot y(x)^2 + y'(x)^2\Big)$
- $F_5[y] = \int_0^1 \mathrm{d}x f(y(x), y'(x), x)$

F_5 hängt von Funktion f (von 3 Variablen) ab. Falls wir $f(a,b,c) = ca^2 + b^2$ wählen, folgt F_4 wählen, folgt F_4. Noch konkreter: wähle Beispielfunktion (ignoriere zur Einfachheit Randbedingung $y(1) = 0$)

$$y_0 : x \mapsto x^2; y_0(x) = x^2; y_0'(x) = 2x;$$
$$\Rightarrow F_1[y_0] = 0.25; F_2[y_0] = 0.6, F_3[y_0] = 0.01 + 0.25 + 1.8 = 2.06$$
$$F_4[y_0] = \int_0^1 \mathrm{d}x(x^5 + 4x^2) = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} = \frac{3}{2}$$

1.3 Weglänge als Funktional

Weg von $\vec{y}_a$ nach $\vec{y}_b$: $\vec{y} : \tau \mapsto \vec{y}(\tau), \tau \in [0,1]; \vec{y}(0) = \vec{y}_a, \vec{y}(1) = \vec{y}_b$
Weglänge:

$$F[\vec{y}] = \int_{\vec{y}_a}^{\vec{y}_b} |\mathrm{d}\vec{y}| = \int_0^1 \mathrm{d}\tau \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{y}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2}$$

(Eigentlich haben wir sogar ein Funktional einer vektorwertigen Funktion beziehungsweise ein Funktional mit 3 Argumenten: $F[y] = F[y^1, y^2, y^3]$)
Etwas interessater: Weglänge im Gebirge:
Sei $\vec{x}(\tau) = \{x^1(\tau), x^2(\tau)\}$ die Projektion des Weges auf Horizontale. Zu jedem solchen Weg gehört die „echte“ Weglänge im Gebirge. Beachte: Höhenfunktion $z : \vec{x} \mapsto z(\vec{x})$

$\Rightarrow$ 3-d Weg:

$$\begin{aligned}\vec{y}(\tau) &= \{y^1(\tau), y^2(\tau), y^3(\tau)\}\\ &\equiv \{x^1(\tau), x^2(\tau), z(\vec{x}(\tau))\}\\ F_{Geb.}[x] = F[\vec{y}[\vec{x}]] &= \int \mathrm{d}t \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x^1(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x^2(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z(x^1(\tau), x^2(\tau))}{\mathrm{d}\tau}\right)}\end{aligned}$$

1.4 Variationsrechnung: Extremalisieung von Funktionalen

Funktionen: $y : x \mapsto y(x)$; wir wissen y hat Extremum bei $x_0 \Rightarrow y'(x_0) = 0$
Funktionale der Form: $F[y] = \int_0^1 \mathrm{d}x f(y, y', x); y : [0,1] \to \mathbb{R}; y(0) = y_a; y(1) = y_b$
Annahme: y_0 extremalisiert F. Sei weiterhin δy eine beliebige 2-fach differenziebare Funktion mit $\delta y(0) = \delta y(1) = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{y_\alpha \equiv y_0 + \alpha \cdot \delta y}_{\text{Ist eine Funktion aus unserem Wertevorrat von } F} \quad (\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon))$$

$\Rightarrow$ Betrachte Abbildung $(-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}, \alpha \mapsto F[y_\alpha]$. Per unserer Annahme hat diese Abbildung Extremum bei $\alpha = 0$. Also gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} F[y_\alpha] = 0\Big|_{\alpha=0}$$

Taylor.entwickle um $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned}F[y_\alpha] &= \int_0^1 \mathrm{d}x f(y_0 + \alpha\delta y, y_0' + \alpha\delta y', x)\\ &= F[y_0] + \int_0^1 \mathrm{d}x \left(\frac{\partial f}{\partial y}(y_0, y_0', x) \cdot \alpha\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}(y_0, y_0', x) \cdot \alpha\delta y'\right) + O(\alpha^2)\end{aligned}$$

Term linear in α muss verschwinden:

$$0 = \int_0^1 \mathrm{d}x \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y x \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y)\right)$$

$\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y = 0$ bei $0, 1$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right)\delta y = 0$$