Experimentalphysik II (H.-C. Schulz-Coulon)

Robin Heinemann

27. Juni 2017

Inhaltsverzeichnis

11 Elektrostatik

11.1 Elektrische Ladung

- Neue Kraft
- anziehend oder abstoßend
- Konzept der elektrischen Ladung

Experimentelle Erkenntnisse:

- Erzeugung von Ladungen durch Reibung
- Ladungen gleicher Vorzeichen: Abstoßung
- Ladungen ungleicher Vorzeichen: Anziehung
- Ladung kann transportiert werden

- Elektrische Kräfte sind Fernkräfte
- Ladungen sind erhalten

Definition 11.1 Influenz Ladungstrennung durch die (Fern) Wirkung elektrischer Kräfte nennt man Influenz oder elektrostatische Induktion.

11.2 Mikroskopische Deutung

Elektron: negativ
Proton: positiv
Atome elektrische neutral

- Z: Anzahl Protonen / Elektronen
- N: Anzahl Neutronen
- A: Anzahl Neutronen + Protonen

Leiter und Nichtleiter: Unterschiedliche Verfügbarkeit von Ladungsträgern

11.3 Coulombsches Gesetz

Experimentelles Resultat:

$$\vec{F}_C = K\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

Definition 11.2

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

mit $\varepsilon_0 = 8.854\,16 \times 10^{-12}\,\mathrm{C\,N^{-1}\,m^{-2}}$

Vergleich: Coulomb vs. Gravitation

$$\vec{F}_G = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$
$$\vec{F}_C = K\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$
$$\frac{F_C}{F_G} = 227 \times 10^{39}$$

11.4 elektrisches Feld

Definition 11.3 (Elektrisches Feld)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_C(\vec{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

Das elektrische Feld hängt nur von der Ladung Q ab, aber nicht von der Testladung q. Es gilt damit:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

Bedeutung das elektrischen Feldes:
Coulomb-Gesetz beschreibt Fernwirkung.
Aber: Wodurch wird diese Wirkung übertragen?
Geschieht die Übertragung instantan? (nein!)
Feldwirkungstheorie: Elektrische Kraftübertragung über Ausbreitung des elektrischen Feldes, das mit der Probeladung q. Elektrostatik: Fernwirkung- und Feldwirkungstheorie äquivalent.
Elektrodynamik: Feldbegriff essentiell.
Feld einer allgemeinen Ladungsverteilung:
Wichtig: Es gilt das Superpositionsprinzips. Es gilt

$$\mathrm{d}Q = \rho(\vec{r})\mathrm{d}V$$

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\vec{R}-\vec{r}}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|^3}\rho(\vec{r})\mathrm{d}V$$

Für diskrete Ladungen:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}$$

Die Anwesenheit von Ladungen verändern den Raum. Es entsteht in Vektorfeld, dessen Stärke und Richtung in jedem Raumpunkt die normierte Kraft $\frac{\vec{F}}{q}$ auf eine Probeladung angibt.
Eigenschaften der Feldlinien

1. Das $\vec{E}$ -Feld zeigt tangential zu den Feldlinien
2. Feldlinien zeigen weg von positiven Ladungen
3. Feldliniendichte entspricht Stärke des Feldes.

11.5 Elektrischer Fluss

Definition 11.4 (Elektrischer Fluss ϕ_E) Maß für die Anzahl der Feldlinien, die Fläche A durchstoßen.

Für geschlossene Oberflächen:

$$
\begin{aligned}
Q_{innen} = 0 &\implies \phi_E = 0 \\
Q_{innen} > 0 &\implies \phi_E > 0 \\
Q_{innen} < 0 &\implies \phi_E < 0
\end{aligned}
$$

Mathematisch:

- Homogenes Feld, $\perp$ zur Oberfläche $\implies \phi E = EA$
- Homogenes elektrisches Feld $EA' = EA\cos\theta = \vec{E}\vec{A} = \vec{E}\vec{n}A$

Verallgemeinerung:

$$
\begin{aligned}
\Delta\phi_i &= \vec{E}_i\vec{n}_i\Delta A_i \\
\phi_E &= \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum \vec{E}_i\vec{n}_i\Delta A \\
\phi_A &= \int \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} && \text{(Definition von Elektrischem Fluss)}
\end{aligned}
$$

Ladung einer Kugel:

$$
\begin{aligned}
\phi_A &= \int \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\int \mathrm{d}\vec{D} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}4\pi R^2 \\
&= \frac{Q}{\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$

Definition 11.5 (Gauß'sches Gesetz (1. Maxwell-Gleichung))

$$
\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{\text{innen}}}{\varepsilon_0}
$$

Das Gauß'sche Gesetz ist allgemeingültig, da:

$$
\begin{aligned}
\oint_{A_2} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} - \oint_{A_1} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} &= 0 \\
\oint_{A_2} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} &= \oint_{A_1} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{\text{innen}}}{\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$

Zusammen mit Superpositionsprinzip und homogener Fläche erhält man die Allgemeingültigkeit des Gauß'schen Gesetz.

Herleitung des Coulombschen Gesetz mit Gauß'schen Gesetz:

$$\begin{aligned}\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} &= \frac{Q}{\varepsilon_0}\\ E\oint \mathrm{d}\vec{A} &= \frac{Q}{\varepsilon_0}\\ E4\pi R^2 &= \frac{Q}{\varepsilon_0}\\ E(R) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\end{aligned}$$

Beispiel 11.6 (Unendlich langer Draht) Ladungsdichte: $\lambda = Q/L$

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \vec{E}(R)$$

- Mantelfläche:e $\vec{E} \parallel \mathrm{d}\vec{A}$
- Deckel: $\vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{D}$

$$\phi_E = \oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \int_{\text{Mantel}} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} + \underbrace{\int_{\text{Deckel}} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A}}_{=0} = E\int_{\text{Mantel}} \mathrm{d}A = E2\pi RL = \frac{V}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\frac{Q}{L}}{2\pi R\varepsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

Beispiel 11.7 (Unendlich ausgedehnte Flächenladung) Flächenladungsdichte: $\sigma = Q/A$
Symmetrie:
$\vec{E}$ konstant für festen Abstand.
$\vec{E} \parallel \vec{A}$

$$\begin{aligned}\phi_E &= \oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \underbrace{\int_{\text{Mantel}} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A}}_{0} + \int_{\text{Deckel}} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = EA_1 + EA_2 = 2EA\\ \phi_E &= 2EA = \frac{Q}{\varepsilon_0} \implies E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\end{aligned}$$

Beispiel 11.8 (Plattenkondensator)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

11.6 Elektrische Felder innerhalb von Leitern

Innerhalb eines Leiters verschwindet das elektrostatische Feld.
Bei einem geladenem, isolierten Leiter sitzen alle Ladungen auf der Oberfläche.
Dazu betrachte Oberfläche, die gerade kleiner als der Leiter ist, dort ist das Elektrische Feld gleich Null, also folgt:

$$\oint \vec{E} \mathrm{d} \vec{A} = 0 = \frac{Q_{\text{innen}}}{\varepsilon_0} \implies Q_{\text{innen}} = 0$$

Leiter mit Hohlraum:

$$\oint_O \vec{E} \mathrm{d} \vec{A} = 0 \implies Q = 0$$

11.7 Differentielle Form des Gaußschen Gesetzes

$$\oint_A \vec{E} \mathrm{d} \vec{A} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} \mathrm{d} V$$

$\operatorname{div} \vec{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z$
Zur Divergenz:
Schreibweise: $\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$, $\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ in Anschauung:

$$\begin{aligned}
\phi_E &= E_O \Delta A - E_i \Delta A \\
&= \Delta E_x \Delta A \\
&= \frac{\Delta E_x}{\Delta x} \Delta x \Delta A = \underbrace{\partial_x E_x}_{\text{„div“}} \Delta V
\end{aligned}$$

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} \mathrm{d} V = \oint \vec{E} \mathrm{d} \vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \mathrm{d} V$$

Differentielle Form des Gauß Gesetz, 1. Maxwell Gleichung:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ρ: Ladungsdichte.

11.8 Elektrisches Potential

Coulombkraft ist konservativ da radialsymmetrisch.

$$\begin{aligned}
W = E_{pot}(2) - E_{pot}(1) &= -\int_1^2 \vec{F}_C \mathrm{d} \vec{s} \\
\vec{F}_C &= -\operatorname{grad} E_{pot} \\
E_{pot}(\vec{r}) &= -\int_\infty^{+r} \vec{F}_C \mathrm{d} \vec{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{Qq}{r^2} \mathrm{d} r \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{r} \qquad \text{(Theorie: } Qq/r\text{)}
\end{aligned}$$

Definition 11.9 (Coulombpotential)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{E_{pot}(\vec{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}, \varphi(\infty) = 0$$

$$\Delta\varphi = \varphi(\vec{r}_2) l \varphi \vec{r}_1 = -\int \vec{E} \mathrm{d}\,\vec{s}$$

$$\oint \vec{E} \mathrm{d}\,\vec{s} = 0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})$$

Allgemeine Ladungsverteilung:

$$\varphi\left(\vec{R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r})}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|}\mathrm{d}V$$

Definition 11.10 (Elektrische Spannung)

$$U_{12} = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi_{21} = -\int_1^2 \vec{E} \mathrm{d}\,\vec{s}$$

11.9 Grundgleichungen der Elektrostatik

Integralform:

$$\oint \vec{E} \mathrm{d}\,\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \oint \vec{E} \mathrm{d}\,\vec{s} = 0$$

Differentialform:

$$\operatorname{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{rot}\,\vec{E} = 0$$

Stokes-scher Satz:

$$\oint_C E \mathrm{d}\,\vec{s} = \int_A \operatorname{rot}\,\vec{E} \mathrm{d}\,\vec{A}$$

Zur Rotation:
Schreibweise:

$$\operatorname{rot}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\times\vec{E}, \vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

$$\operatorname{rot}\,\vec{E} = (\partial_y E_z - \partial_z E_y, \partial_z E_x - \partial_x E_z, \partial_x E_y - \partial_y E_x)$$

Anschauung:

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{A}\mathrm{d}\vec{s} &= \Delta E_2 \Delta z - \Delta E_x \Delta x \\ &= \frac{\Delta E_z}{\Delta_x}\Delta x \Delta z - \frac{\Delta E_x}{\Delta z}\Delta z \Delta x \\ &= \underbrace{(\partial_x E_z - \partial_z E_x)}_{\text{rot}} \Delta A\end{aligned}$$

Mathematik:

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{E} &= -\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = -\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\varphi\right) = 0 \\ \text{div } \vec{E} &= -\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla}\varphi\right) = -\vec{\nabla}^2\varphi = -\Delta\varphi \\ &= -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

Definition 11.11 (Poissongleichung)

$$\Delta\varphi = -\frac{\varphi}{\varepsilon_0}$$

Zentrale Gleichung der Elektrostatik

Definition 11.12 (Laplacegleichung)

$$\Delta\varphi = 0$$

Eckstein der mathematischen Physik [PTP3]

Realisierung eines Feldes der Form

$$\begin{aligned}\varphi &= ax^2 + by^2 + cz^2 \quad a, b, c > 0 \\ \Delta\varphi &= 2a + 2b + 2c > 0\end{aligned}$$

$2a + 2b + 2c$ ist immer $> 0 \implies$ solches Feld nicht möglich.

11.10 Elektrische Felder geladener Felder

„Einfach“: Berechnung für bekannte Ladungsverteilung.
„Schwierg“: Berechnung in Anwesenheit von Leitern.
Für statische Felder gilt:
im Leiter $\vec{E} = 0$
im Hohlraum $q = 0$, $\vec{E} = 0$

Oberfläche eines Leiters:

1. $\vec{E} \parallel \vec{A}$
2. $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\phi_E &= \vec{A}\mathrm{d}\vec{A} = E\mathrm{d}A \\ &= \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\varepsilon_0} \\ E &= \underbrace{\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}A}}_{\sigma}\frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

3. $\varphi = \text{const.}$ an Leiteroberfläche.

Berechnung von Verteilungen von Ladungen schwierig. Hier nur qualitatives Verständnis.
Kugelladung (Radius R):
Innen: $E = 0, \varphi = \text{const.}$
Außen: $E = 1/(4\pi\varepsilon_0)Q/r^2$

$$\begin{aligned} \vec{E}\left(\vec{R}\right) &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ \vec{E}\left(\vec{R}\right) &= \frac{\vec{\varphi}(R)}{R} \end{aligned}$$

$\varphi = \text{const.} \implies$ Erzeugung hoher Felder für kleine R

Beispiel 11.13 (Zwei Kugeln (verbunden)) verbunden $\implies \varphi = \varphi_1 = \varphi_2 \implies Q_1/R_1 = Q_2/R_2$

$$\begin{aligned} R_1 &> R_2 \\ \implies Q_1 &> Q_2 \\ \sigma_1 &< \sigma_2 \\ E_1 &< E_2 \end{aligned}$$

kleiner krümmungsradius $\implies$ größeres Feld, größere Flächenladungsdichte.
Merke: Scharfe Kanten beziehungsweise kleiner Krümmugsradius bedeutet hohes E-Feld

Beispiel 11.14 (Halbraumleiter mit Ladung)

11.11 Elektrischer Dipol

Beispiel 11.15 (Dipol)

$$\begin{aligned}
\varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\left|\vec{r}-\frac{1}{2}\vec{d}\right|}+\frac{-q}{\left|\vec{r}+\frac{1}{2}\vec{d}\right|}\right] \\
\varphi(\vec{r}) &= \frac{\vec{p}\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\
\vec{p} &= q\vec{d} \\
\vec{E} &= y \operatorname{grad}\varphi \\
E(\vec{r}) &= \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}-r^2\vec{p}}{r^5} && \text{(Elektrisches Dipolfeld (ohne Beweis))}
\end{aligned}$$

Merke: Elektrischer Dipol, $r \gg d$

$$\varphi(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^2} \qquad E(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^3}$$

Multipolentwicklung:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{a_0}{r}+\frac{a_1}{r^2}+\frac{a_2}{r^3}+\dots$$

$$a_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \quad a_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\vec{p}\hat{r}$$

$$\vec{p} = \int \rho(\vec{r})\vec{r}\,\mathrm{d}Q$$

Elektrischer Dipol im homogenem Feld:
Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{d}\times\vec{F} = q\cdot\vec{d}\times\frac{1}{q}\vec{F} = \vec{p}\times\vec{E}$$

Kräfepaar! $\Longrightarrow$ Ausrichtung im Feld. Potentielle Energie: Drehung eines Dipols im homogenen Feld, das heißt Arbeit wird frei oder wird geleistet. Wähle: $E_{pot} = 0$ für $r = 90°$

$$E_{pot} = -\vec{F}\vec{s} = -\vec{p}\vec{E}$$

Dipol im inhomogenen Feld: das heißt an den beiden Enden des Dipols wirken unterschiedliche Kräfte. $\Longrightarrow$ Drehmoment + resultierende Kraft. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= q\vec{d}\frac{\mathrm{d}\vec{E}}{\mathrm{d}\vec{r}} = \vec{p}\nabla\vec{E} \\
F_x &= \vec{p}\operatorname{grad}E_x \\
F_y &= \vec{p}\operatorname{grad}E_y \\
F_x &= \vec{p}\operatorname{grad}E_z
\end{aligned}$$

11.12 Kapzität und Kondensator

Leiter können Ladungen speichern (zum Beispiel: Leidener Flasche, Kondensator, Metallkugel).
Kondensator = Ladungsspeicher (Ladungen werden im Kondensator „kondensiert“, das heißt zusammengedrängt)
Frage: Was ist die Ladungsspeicherfähigkeit oder Kapazität eines Leiters? Dafür betrachte Kugelkonduktoren.
Gespeicherte Ladungsmenge auf einzelner Metallkugel:

$$\Delta\varphi = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}\mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \to Q = 4\pi\varepsilon_0 RU$$

($\Delta\varphi = U$). Das heißt gespeicherte Ladung ist proportional zur angelegten Spannung U (Allgemein: $\varphi(Q) \sim Q$, Superpositionsprinzip). Definiere Ladungsspeicherfähigkeit „pro Volt“

Definition 11.16 (Kapazität)

$$C = \frac{Q}{U} \qquad Q = CU$$

$[C] = 1\,\mathrm{C\,V^{-1}} = 1\,\mathrm{F}$

Die Kapazität einer Leiteranordnung hängt von der Geometrie (und vom Material) ab. Kapazität eines Kugelkondensators: $C 4\pi\varepsilon_0 R$ (hier: freistehende Kugel). Einheit Farad ist sehr groß, da $1\,\mathrm{C}$ sehr groß ist.

Beispiel 11.17 Kapazität einer Kugel mit $R = 1\,\mathrm{cm} \to C \approx 1 \times 10^{-12}\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{pF}$
Kapazität der Erde mit $R = 7 \times 10^{8}\,\mathrm{cm} \to C \approx 7 \times 10^{-4}\,\mathrm{F} = 700\,\mathrm{F}$
Trotzdem heute: Superkondensatornen mit Kapazitäten bis zu $1 \times 10^{4}\,\mathrm{F}$

Referenzpotential $\varphi = 0$ muss aber nicht im Unendlichen liegen. Allgemeiner Kondensator: Zwei Leiter mit Ladungen $+Q$ und $-Q$ (Realisierung durch Erdung) $\implies$ Erhöhung der Kapazität durch Influenz.

Beispiel 11.18 (Kugelkondensator) (siehe Übungen)

Beispiel 11.19 (Plattenkondensator)

$$\begin{aligned}
E &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A\varepsilon_0} \\
\implies U &= \varphi(x_2) - \varphi(x_1) = -\int_{x_1}^{x_2} \vec{E}\mathrm{d}\vec{s} \\
&= -E\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}s = -\frac{Q}{\varepsilon_0 A}d \\
\implies C &= \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}
\end{aligned}$$

- A: Fläche der Leiterplatte
- d: Leiterplattenabstand

Kondensatorschaltungen:
Parallelschaltung:

- Gleiche Spannung an allen C_i
- Verschiedene Werte C_i

Es gilt:

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n \\ \frac{Q}{U} &= \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_1}{U} + \cdots + \frac{Q_n}{U} \\ \implies C &= C_1 + C_2 + \cdots + C_n \end{aligned}$$

$\implies$ Gesamtkapazität parallelgeschalteter Kondensatoren

$$C_{ges} = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

Reihenschaltung: Es gilt

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + \cdots + U_n \\ \frac{Q}{C} &= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \cdots + \frac{Q}{C_n} \\ \implies \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} \end{aligned}$$

$\implies$ Gesamtkapazität von in Reihe geschalteter Kondensatoren:

$$\frac{1}{C_{ges}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

Kehrwert der Gesamtkapazität ergibt sich als Summe der Kehrwerte der Einzelkapazitäten

11.13 Kondensator als Energiespeicher

Energiedichte des elektrischen Feldes. Aufgeladener Kondensator = Energiespeicher. Frage: Wieviel Energie ist gespeichert? Hierzu betrachten wir einen Plattenkondensator: Ladungstransport von Platte A zu Platte B erfordert Arbeit

$$\begin{aligned} \implies \mathrm{d}W &= U\mathrm{d}Q = \frac{Q}{C}\mathrm{d}Q \\ W_C &= \int \frac{Q}{C}\mathrm{d}Q = \frac{1}{C}\int Q\mathrm{d}Q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 \end{aligned}$$

$\implies$ Im Plattenkondensator gespeicherte Energie:

$$E_C = \frac{1}{2}CU^2$$

gilt allgemein für in Kondensator gespeicherte Energie! (Herleitung unabhängig von Geometrie). Für Plattenkondensator gilt weiter:

$$E_C = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d}U^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0(Ad)\frac{U^2}{d^2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 V E^2$$

Änderung des Blickwinkels: Energie im elektrischen Feld gespeichert $\implies$ Energiedichte $\omega_e = E_c/V$

$$\implies \omega_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Gilt allgemein für alle elektrischen Felder im Vakuum.

11.14 Dielektrika - Elektrostatik in Materie

Beobachtung: Einbringen eines Isolators (Dielektrikum) in einen Kondensator hat großen Einfluß auf die Kapazität. Die Spannung sinkt $\implies$ Kapazität steigt

Definition 11.20 (Permittivität)

$$C_{Diel} = \varepsilon_r C_{Vakuum} = \varepsilon_r C_0$$

auch Dielektrizitätskonstante, relative Dielektrizitätszahl, relative Permittivitätszahl.

Beispiel 11.21 (Plattenkondensator)

$$\begin{aligned}
C_{Diel} &= \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d} \\
C_{Vak} \cdot U_{Vak} &= C_{Diel} U_{Diel} \\
\implies \frac{C_{vak}}{C_{Diel}} &= \frac{U_{Diel}}{U_{vak}} = \frac{E_{Diel}}{E_{vak}} = \frac{1}{\varepsilon_r} \\
E_{Diel} &= \frac{1}{\varepsilon_r} E_{vak}
\end{aligned}$$

das heißt das Feld im Kondensator mit Dielektrikum reduziert.

Mikroskopische Beschreibung:
Isolator: Es gibt keine freien, beweglichen Ladungsträger. Aber Polarisation, das heißt Ausrichtung von Dipolen.
Kondensator

$$\begin{aligned}
C_0 &= \varepsilon_0 \frac{A}{d} \\
C_{Diel.} &= \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d} \\
E_{Diel.} &= \frac{1}{\varepsilon_r} E_{\text{Vakuum}} \\
&= \frac{1}{\varepsilon_r} E_0
\end{aligned}$$

$$\sigma_0 = \frac{Q_0}{A}$$
$$\sigma_p = \frac{Q_p}{A}$$
$$E_{Diel} = E_0 - E_p = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_p}{e_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_0 - \sigma_p) = \frac{1}{\varepsilon_r}\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$
$$\implies \sigma_p = \sigma_0\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$
$$\implies \sigma_0 = \sigma_{frei} = \varepsilon_r \sigma_{tot}$$
$$\implies Q_0 = Q_{frei} = \varepsilon_r Q_{tot}$$

Polarisation mit Dipolmoment $\vec{p}_i = q_i \vec{d}_i$, $[P] = \mathrm{C\,m^{-2}}$

Definition 11.22

$$\vec{P} = \frac{1}{V}\sum \vec{p}_i$$

$\vec{P}$ wächst mit stärkerer Ausrichtung des Dipols an. Und es gilt

$$\left|\vec{P}\right| = \frac{Q_p d}{V} = \frac{\sigma_p A d}{V} = \sigma_p$$

$\implies$ Makroskopische Polarisation = Oberflächenladungsdichte auf Dielektrikum.

$$\begin{aligned} P &= \sigma_p = \sigma_0\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = \varepsilon_0 E_{vak}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \\ &= (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E_{Diel.} \\ \vec{P} &= \chi\varepsilon_0 \vec{E}_{Diel.} \\ \chi &= \varepsilon_r - 1 \end{aligned}$$

Definition 11.23 (Dielektrische Verschiebung)

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E}_{Diel.} + \vec{P} \\ &= \varepsilon_0 \vec{E}_{vak} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_{Diel.} \end{aligned}$$

Vakuum:

$$\vec{E}_{Diel} = \vec{E}_{vak} \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_{vak}$$

Dielektrikum

$$\vec{E}_{Diel} = \frac{1}{\varepsilon_r}\vec{E}_{vak} \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_{vak}$$

Allgemein:

$$E^{||}_{vak} = E^{||}_{Diel}, E^{\perp}_{vak} = \varepsilon_r E^{\perp}_{Diel}$$

$$D^{\parallel}_{vak} = \frac{1}{\varepsilon_r} D^{\parallel}_{Diel}, D^{\perp}_{vak} = D^{\perp}_{Diel}$$

$$\text{div } \vec{E}_{vak} = \frac{\rho_{innen}}{\varepsilon_0}$$
$$\implies \text{div } \vec{D} = \rho_{frei}$$

$\implies$ 1. Maxwell Gleichung in Materie

$$\text{div } \vec{D} = \rho_{frei} \qquad \oint \vec{D}\mathrm{d}\vec{A} = Q_{frei}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_{frei}}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \qquad \oint \vec{D}\mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{frei}}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

Elektrische Feldenergie im Dielektrikum

$$W_e = \frac{1}{2}Cn^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{Q^2}{C_0}$$

$$\implies \omega_C = \frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 \vec{E}^2 = \frac{1}{2}\vec{E}\vec{D}$$

Für gleiches Feld $\vec{E}$ wächst die Energiedichte mit ε_r. Zur Energie des Feldes $\vec{E}$ wird Polarisationsenergie der Dipole addiert.

12 Elektrische Gleichströme

12.1 Strom und Stromdichte

Definition 12.1 (Elektrischer Strom)

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

$$[I] = \mathrm{C\,s^{-1}} = \mathrm{A}$$

$$\left|\vec{j}\right| = \frac{I}{A} = \frac{\mathrm{d}Q}{A\mathrm{d}t}$$

$$\vec{j} = \rho\vec{v} = nq_e\vec{v}_D$$

$$\ldots\rho = \div\vec{j} = 0$$

$$I = \int \vec{j}\mathrm{d}A = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \int \dot{\rho}\mathrm{d}V$$

12.2 Elektrischer Widerstand und Ohmsches Gesetz

Ladungsfluß entsteht aufgrund einer Potentialdifferenz beziehungsweise eines elektrischen Feldes.

$$U = \varphi_b - \varphi_a = E\Delta l$$

Spannungsänderung

- $\implies$ Änderung Elektrisches Feld
- $\implies$ Änderung der Ladungsträgergeschwindigkeit
- $\implies$ Änderung von Stromdichte und Strom

Definition 12.2 (Differentieller Wiederstand)

$$\vartheta = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}I}$$

$[S] = \mathrm{A\,V^{-1}} = \mathrm{S}$

Definition 12.3 (Differentielle Leitfähigkeit)

$$S = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}U}$$

$[\vartheta] = \mathrm{V\,A^{-1}} =$

Beobachtung: Elektischer Leiter: $\vartheta = \mathrm{const.}$

$$\begin{aligned} R = \frac{U}{I} = \frac{El}{I} &\iff I = \frac{El}{R} \\ j = \frac{I}{A} = \frac{l}{RA}E &= \sigma E = \eta q_e v_D \end{aligned}$$

Satz 12.4 (Ohmsches Gesetz)

$$\begin{aligned} U &= RI \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E} = \eta_E \vec{v}_D \end{aligned}$$

mit

$$\sigma = \frac{l}{RA} = S\frac{l}{A} \qquad \text{(spezifische Leitfähigkeit)}$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = R\frac{A}{l} \qquad \text{(spezifischer Widerstand)}$$

Für ohmschen Leiter muss $\vec{v}_D \sim \vec{E}$ gelten.

Drude Modell
Bewegung von Elektronen in Leitern. Thermische Bewegung: $v_{th} \approx 1 \times 10^6 - 1 \times 10^7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Bewegung wird gestört durch Stöße mit Gitteratomen. Mittlere Zeit zwischen zwei Wechselwirkungen:

$$\tau = \frac{T}{N} \implies \lambda = \tau v_m$$

T: Messzeit, N: Anzahl der Stöße. Einschalten eines E-Feldes: Beschleunigung der Elektronen entgegen der Richtung des elektrischen Feldes $\vec{E}$

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m} \\ \implies \vec{v}_D(t) &= \vec{v}_{th} + \frac{q\vec{E}}{m} t \\ \vec{v}_D &= \underbrace{< \vec{v}_{th} >}_{=0} + \frac{q\vec{E}}{m} < t >= \frac{q}{\vec{E}} m\tau = \mu\vec{E} \end{aligned}$$

Also gilt für einen ohmschen Leiter:

$$\vec{v}_D = \mu\vec{E}$$

mit μ: Elektronenbeweglichkeit

$$\mu = \frac{q}{\tau} m, [\mu] = \mathrm{m^2\,V^{-1}\,s}$$

Mit

$$\begin{aligned} \vec{j} &= nq_e\vec{v}_D = nq_e\mu\vec{E} \\ \sigma &= n_e\mu = \frac{nq_e^2\tau}{m} \end{aligned}$$

Beispiel 12.5 (Kupferdraht)

$$A = 1\,\mathrm{mm^2}, I = 1\,\mathrm{A}, j = \frac{I}{A} \implies v_D = 10 \times 10^{-4}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Jedes Atom trägt 1 Elektron bei.

Ohmscher Leiter: $\vartheta = \mathrm{const.}$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}I} < 0 \text{ NTC, Heißleiter}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}I} > 0 \text{ PTC, Kaltleiter}$$

12.3 Elektrische Leistung

Strom I fließt durch Widerstand beziehungsweise Verbraucher, gewonnene kinetische Energie der Elektronen wird durch Stöße in Wärme umgewandelt.

$$W = QU = UIt$$

Definition 12.6 (Leistung)

$$P = UI$$

$[P] = \mathrm{W} = \mathrm{J\,s^{-1}} = \mathrm{A\,V^{-1}}$

Für ohmschen Leiter:

$$P = RI^2 \iff P = \frac{U^2}{R}$$

Anwendungsbeispiel: Hochspannungsleitung. Transport von elektrischer Energie: Verluste durch Wärmeerzeugung in Überlandleitung. Ziel: Minimierung von Leistungsverlusten. Kraftwerk: $F = UI$
Überlandleitung:

- Spannungsabfall: $U_L = R_L I$
- Verlustleistung: $P_L = U_L I = R_L I^2 = U_L^2/R$

das heißt Spannungsabfall beziehungsweise Verlustleistung klein falls I klein und U groß! $\Longrightarrow$ Hochspannungsleitung. Verfügbare Leistung: $P_V = P - P_L$

12.4 Stromkreise - Kirchhoffsche Regeln

Haushalt, elektrische Schaltungen, ... Im Allgemeinen Netzwerke vieler Leiter, Spannungsquallen und Verbraucher. Zur Berechnung von Strömen und Spannungen:
Kirchhoffsche Regeln:

1. Knotenregel: An jedem Knoten gilt $\sum I_k = 0$ (Ladungserhaltung, folgt aus Kontinuitätsgleichung)
2. Maschenregel: Für jede Masche gilt: $\sum U_k = 0$ (Zirkulationsgesetz)

Für ohmsche Widerstände ergibt sich damit:
Reihenschaltung:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

Parallelschaltung:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

12.5 Strom und Spannungsquellen

Spannungsquelle mit Innenwiderstand R_i:

$$\begin{aligned} U_{kl} &= U_0 - IR_i \\ &= U_0 \frac{R_a}{R_a + R_i} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Ideale Spannungsquelle:

$$R_i \approx 0 \quad I \approx \frac{U_0}{R_a}$$

Stromquelle: Versorgung mit konstantem Strom. $\Longrightarrow$ hoher Innenwiderstand ($R_i \to \infty, R_i \gg R_a$)

$$I = \frac{U_0}{R_i + R_a} = \frac{U_0}{R_i} = \text{const.}$$

Technische Realisierung?
Prinzip: Ladungstrennung durch Energiezufuhr $\Longrightarrow$ Potentialdifferenz, leitende Verbindung $\Longrightarrow$ Stromfluß. Anwendung finden:

- elektrodynamische Generatoren, magnetische Induktion
- Batterien und Akkumulatoren, Ladungstrennung durch chemische Reaktionen
- Solarzellen, Ladungstrennung durch Lichtenergie
- Thermische Stromquellen, Ladungstrennung durch Temperaturabhängigkeit von Kontaktpotentialen.

Galvanische Elemente $\Longrightarrow$ Galvani-Spannung: $\Delta\varphi_C$ $\Longrightarrow$ Volta-Element
Minuspol: $Zn \to Zn^{++} + 2e^-$
Pluspol: $2H^+ + 2e^- \to H_2$
$Z_n + H_2SO_4 \to H_2 + ZnSO_4$
Daniel-Element: Diaphragma, dass nur SO_4 durchlässt verhindert **Vergiftung**.
Thermische Stromquellen. Bei Kontakt zweier Metalle ergibt sich Potentialdifferenz $\Longrightarrow$ Kontaktspannung.
Ursache: Unterschiedlicshe Austrittarbeit für freie Elektronen. Austrittsarbeit und Kontaktspannung hängen von Temperatur ab.

- Thermoelement
- Peltierkühlung (Umkehrung)

12.6 Strom und Spannugsmessung

Ziel: Strom- und Spannungsmessung ohne Beeinflussung des zu messendes Systems.
Strommessung: Ampermeter in Reihe mit Verbraucher, Ampermeter - $R_i \approx 0$ um zusätzlichen Spannungsabfall aus Messgrät zu minimieren.
Spannungsmessung: Voltmeter parallel zum Verbraucher geschaltet. Voltmeter - $R_i \to \infty$, um Stromfluss durch Voltmeter zu minimieren.
Messinstrumente:

- Galvanometer
- Digitalvoltmeter (mit Operationsverstärker) (Messbereichserweiterung durch Parallel- und Serienschaltung von Widerständen)

13 Magnetostatik

Neue Kraft zwischen elektisch neutralen Materialien. (später: Vereinheitlichung von Elektrizität und Magnetismus $\implies$ Elektromagnetismus) Beobachtungen:

- Zwei Pole: Nord- und Südpol
- Gleichnamige Pole stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an
- Pole lassen sich nicht trennen, keine magnetische Ladungen, keine Monopole
- Magnete richten sich auf der Erde im Nord-Süd-Richtung aus

Traditionell: Definiton der magnetischen Feldstärke p in Analogie zur elektricschen Ladung Q. (Realisierung: langer Stabmagnet)

$$\implies \vec{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{p_1 p_2}{r^2}\hat{r}$$

mit $\mu_0 = 4\pi \cdot 1 \times 10^{-7}\,\mathrm{V\,s\,A^{-1}\,m}$

$$\vec{H} = \lim_{p_2 \to 0} \frac{\vec{F}}{p_2}$$

- $[p] = \mathrm{V\,s} = \mathrm{Wb}$
- $[H] = \mathrm{A\,m^{-1}}$

Hieraus folg die historsche Bezeichnung von H als „Magnetfeld“ oder „magnetische Feldstärke“. Aber $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ wichtigere Größe, eigentliches Äquivalent zum E-Feld

Traditionell	Modern
H = magnetische Feldstärke	H = magnetische Erregung
B = magnetische Induktion oder magnetische Flussdichte	B = Magnetfeld oder magnetische Flussdichte

Ebenfalls: In Analogie zum elektrischen Feld: Magnetischer Kraftfluss

$$\phi_m = \int \vec{B}\mathrm{d}\,\vec{A}$$

- $[B] = \mathrm{V\,s\,m^{-2}} = \mathrm{T}$
- $[\phi m] = \mathrm{V\,s} = \mathrm{Wb}$

13.1 Magnetfelder und bewegte Ladungen

Beobachtungen:

1. Ein Strom durch einen Leiter erzeugt ein Magnetfeld um denselben (Oerstedt, 1777 - 1851)
2. Auf bewegten Ladungen wird in einem Magnetfeld eine Kraft ausgeübt. Offenbar: Streuwirkung beeinflußt Kraftrichtung. (Ampere, 1775-1836)

Experiment:

1. $B \sim I/r$
2. $\vec{F} \sim I\left(\vec{e} \times \vec{B}\right)$

Konvention:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\vec{F} = I\left(\vec{l} \times \vec{B}\right) \qquad \text{(Lorentzkraft)}$$

$\vec{l}$: Streurichtung.
mit $\vec{I} = \vec{j}A$:

$$\vec{F} = lA\left(\vec{j} \times \vec{B}\right) = lAnq\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

Kraft auf einen einzelnen Ladungsträger:

$$\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \qquad \text{(Lorentzkraft (ohne E-Feld))}$$

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times B\right) \qquad \text{(Lorentzkraft (allgmeine Form))}$$

Beispiel 13.1 (Freie Ladung im homogenen B-Feld) Freie Ladung im homogenen B-Feld mit $\vec{R} \perp \vec{B}$. Bewegungsgleichung:

$$m\vec{a} = \left(\vec{r} \times \vec{B}\right)$$

Da Kraft senkrecht auf Bewegungsrichtung steht folgt eine Kreisbewegung! Also:

$$a = a_{zp} = v\omega = \frac{v^2}{r} = \frac{q}{w}vB$$

$$\omega = \frac{q}{w}B \qquad \text{(Zyklotronfrequenz)}$$

Beispiel 13.2 (Leiterschleife im homogenen B-Feld) Kräftepaar bewirkt Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F} = \vec{d} \times I\left(\vec{l} \times \vec{B}\right) = I\left(\vec{A} \times \vec{B}\right)$$

Definition 13.3 (Magnetischer Moment)

$$\vec{\mu} := I\vec{A} = IA\vec{n}$$
$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Elektrischer Dipol	Magnetischer Dipol
$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$	$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

Durch Vergleich mit elektrischen Dipol: Offenpor erzeugt ein Kreisstrom einen magnetischen Dipol.

Beispiel 13.4 (Hall-Effekt) Ablenkung bewegter Ladungsträger im Festkörper beziehungsweise in Leitern durch ein externes Magentfeld. Erlaubt Magnetfeldmessung.
Beobachtung: Aufbau eines elektrischen Querfeldes in einem stromdurchflossenen Leiter in einem Magnetfeld. Ursache: Lorentzkraft. Es gilt:

$$\begin{aligned} F_{el} &= F_{mag} \\ q\frac{U_H}{b} &= qvB \\ &= \frac{I}{nbd}B \end{aligned}$$

mit $\vec{v} \perp \vec{B}$

$$\begin{aligned} I &= jA = jbd = nqvbd \\ U_H &= \frac{1}{nq}\frac{I}{d}B = R_H\frac{I}{d}B \end{aligned}$$

mit $R_H = (nq)^{-1}$, Hallkonstante, $n =$ Ladungsdichte, $q =$ Ladung.
Anwendungen:

- Messungen von Dichte und Vorzeichen der bewegten Ladungsträger in Materialien (zum Beispiel Leiter / Halbleiter)
- Messung magnetischer Felder

$$\begin{aligned} B &\sim \frac{I}{r} \\ B(r) &= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\mu_0 && = 4\pi 1 \times 10^{-7}\,\mathrm{V\,s\,A^{-1}\,m} \\ \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\left(\hat{l} \times \hat{r}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{B}_{21} &= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_2}\left(\hat{l}_1 \times \hat{r}_{21}\right) \\ \vec{F}_{21} &= I_2\left(\vec{l} \times \vec{B}_{21}\right) \\ \vec{r}_{21} &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r 21}\hat{r}_{21} \end{aligned}$$

13.2 Grundgleichungen der Magnetostatik

„Wir wissen“: Magnetfeldlinien immer geschlossen

$$\Longrightarrow \oint \vec{B}\mathrm{d}\vec{A} = 0$$

(Quellenfreiheit des Magnetfeldes)

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

(2. Maxwellsches Gesetz)
Zirkulation des B-Feldes:
Elektrostatik:

$$\int \vec{E}\mathrm{d}\vec{s} = U, \oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{s} = 0$$

B-Feld: (Kreis senkrecht um B-Feldlinie)

$$\begin{aligned}\oint \vec{B}\mathrm{d}\vec{s} &= B \oint \mathrm{d}s \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I\end{aligned}$$

Anderer Weg (größerer Kreis)

$$\begin{aligned}\oint \vec{B}\mathrm{d}\vec{s} &= \int_4^1 \vec{B}\mathrm{d}\vec{s} + \int_2^3 \vec{B}\mathrm{d}\vec{s} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} f_2 2\pi r_1 + \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} f_2 2\pi r_2 \\ &= \mu_0 I (f_1 + f_2) = \mu_0 I \\ \oint \vec{B}\mathrm{d}\vec{s} &= \mu_0 \sum_k I_k \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Grundgleichungen der Magnetostatik:

$$\begin{aligned}\oint_A \vec{B}\mathrm{d}\vec{A} = 0 \quad & \oint_C \vec{B}\mathrm{d}\vec{s} = \mu_0 I_{innen} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad & \operatorname{rot} \vec{B} = \mu \vec{j}\end{aligned}$$

13.3 Zwei Anwendungsbeispiele

Beispiel 13.5 (Magnetfeld stromdurchflossener Leiter) Querschnitt: $A = \pi R^2$

$$j = \frac{I}{\pi R^2}$$

$$\oint \vec{B}\mathrm{d}\vec{s} = B(r) 2\pi r$$

$$r \geq R : B(r)2\pi r = \mu_0 I \implies B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$
$$r > R : B(r)2\pi r = \mu_0 j \pi r^2 \implies B(r) = \frac{1}{2}\mu_0 j r = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$

Beispiel 13.6 (Magnetfeld einer langen Spule) N: Anzahl der Windungen, L: Länge, $n = N/L$
Weg C:

$$\oint \vec{B}\mathrm{d}\,\vec{s} = B_{12}l' - B_{34}l' \stackrel{!}{=} 0 \implies B_{12} = B_{34}$$

Weg C':

$$\oint \vec{B}\mathrm{d}\,\vec{s} = Bl' = \mu_0 NJI$$
$$\implies B = \frac{\mu_0 N' L}{l'} = \mu_0 n I$$
$$B_{spule=\mu_0 n I}$$

13.4 Biot-Savart-Gesetz

Vergleich Elektro- und Magnetostatik

E-Feld einer Linienladung

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

B-Feld eines geraden Leiters

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

Nutze Analogie!

$$\mathrm{d}\,\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\mathrm{d}V'$$
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\mathrm{d}V'$$

Ersetzen $\rho \to \vec{j}, \varepsilon_0 \to 1/\mu_0, \rho(\vec{r}-\vec{r}') \to \vec{j} \times (\vec{r}-\vec{r}') \implies$ Biot-Savart-Gesetz

$$\mathrm{d}\,\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}(\vec{r}) \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\mathrm{d}V'$$
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}(\vec{r}) \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\mathrm{d}V'$$

$$\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$
$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathrm{d}\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Beispiel 13.7 (Leiterschleife) Symmetrie: $B_\perp = 0, B_x = 0, B_y = 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}B_z &= \mathrm{d}B \sin\alpha \\
&= \mathrm{d}B \frac{R}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}s'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}\frac{R}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}s' \\
B_z &= \int \mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}\int \mathrm{d}s' \\
&= \frac{\mu_0 R^2}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

In der Mitte des Rings: $z = 0$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Weit weg: $z \gg R$

$$B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3}$$

Allgemeine Lösung für $r \gg R$

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(3\frac{\vec{\mu}\,\vec{r}}{r^5}\,\vec{r} - \frac{1}{r^3}\,\vec{\mu}\right)$$

Vergleich mit Elektrischem Dipol ($r \gg d$):

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(3\frac{\vec{p}\,\vec{r}}{r^5}\,\vec{r} - \frac{1}{r^3}\,\vec{p}\right)$$

14 Materie im Magnetfeld

14.1 Magnetisierung und magnetische Erregung

Beobachtung: Beeinflussung des B-Feldes durch Materie. Ein Eisenkern der Länge l hat auf einer Querschnittsfläche A (Normalenvektor $\vec{n}$) viele Kreiströme (magnetische Dipole) I_i mit Fläche A_i.

Auf der Oberfläche des Eisenkern gibt es also einen Strom I_m: molekularer Strom. Für ein infinitesimales Stück es Eisenkerns $\mathrm{d}l$ erhält man:

$$\begin{aligned} I_i &= I_m \frac{\mathrm{d}l}{l} \\ B_{mag} &= \mu_0 \frac{I_m}{l} \end{aligned}$$

Definition 14.1 (Magnetisierung)

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{\mu}_i$$

mit $\mu := I_i A_i \vec{n}$. (Erinnerung Spule: $B = \mu_0 (NI)/l$)

$$\begin{aligned} \implies \vec{M} &= \frac{1}{V} \sum_i A_i I_i \vec{n} = \frac{1}{V} A_i \frac{I_m}{l} \vec{n} \int \mathrm{d}l \\ &= \frac{1}{V} \frac{I_m}{l} \sum_i A_i \vec{n} l \\ &= \frac{I_m}{l} \vec{n} \end{aligned}$$

Magnetfeld rein aufgrund der Magnetisierung:

$$\vec{B}_{mag} = \mu_0 \vec{M}$$

Jetzt: Eisenkern mit Draht

$$\implies \vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$$

$\vec{B}_0$: Magnetfeld aufgrund äußerer Ströme

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \mathrm{d}\vec{s} &= \oint_C \vec{B}_0 \mathrm{d}\vec{s} + \mu_0 \oint_C \vec{M} \mathrm{d}\vec{s} \\ &= \mu_0 N I + \mu_0 \oint_C \vec{M} \mathrm{d}\vec{s} \\ &= \mu_0 I_{frei} + \mu_0 I_m \\ \oint \left(\vec{B} - \mu_0 \vec{M} \right) \mathrm{d}\vec{s} &= \mu_0 I_{frei} \end{aligned}$$

Definition 14.2 (Magnetische Erregung)

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \qquad \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right)$$

$$\oint \vec{H} \mathrm{d}\vec{s} = I_{frei} \qquad \mathrm{rot}\, \vec{H} = \vec{j}_{frei}$$

(2. Maxwellsches Gesetz, Amperesches Durchflutungsgesetz)

Auch: $\mathrm{rot}\, \vec{M} = \vec{j}_{geb}$, $\mathrm{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{ges}$

14.2 Dia-, Para- und Ferromagnetismus

Experimentelle Beobachtung:

Definition 14.3

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

mit $\mu_0 \vec{B} = \vec{B} = \mu_0 \vec{M}$. Gilt nicht immer!, χ_m: magnetische Suszeptibilität.

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) && = \mu_0(\chi_m + 1)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} \\ \vec{B} &= \mu\mu_0\vec{H} \\ \mu = \mu_r &= \chi_m + 1\end{aligned}$$

Bisher: $\chi_n > 0$. Gilt dies immer? $\implies$ nein!

- $\chi_m > 0, \mu_r > 1$ Paramagnetismus
- $\chi_m < 0, \mu_r < 1$ Diamagnetismus
- $\chi_m \gg 0, \mu_r \gg 1$ Ferromagnetismus
- Dia: $-1 \times 10^{-6} \leq \chi_m \leq -1 \times 10^{-9}$
- Para: $1 \times 10^{-6} \leq \chi_m \leq 1 \times 10^{-9}$
- Ferro: $1 \times 10^{2} \leq \chi_m \leq 1 \times 10^{5}$

Paramegnetismus: Wolfram, Nickel

$$\begin{aligned}E_{pot} &= -\vec{M}\,\vec{B}\,\vec{v} \\ &= -\vec{\mu}\,\vec{B} \\ \vec{F} &= \vec{M}\,\mathrm{grad}\,\vec{B}V\end{aligned}$$

Diamagnetismus: Wismut **Mikroskopische Beschreibung**
$\chi_m < 0(\mu < 1)$: Diamagnetismus. Induktion eines magnetischen Dipolmoments $r = \text{const.}$. Zwei Atome:

$$\vec{\mu}' = \vec{\mu}_1' + \vec{\mu}_2' \neq \emptyset$$

Ursache: Lorentzkraft:

$$\begin{aligned}v_1' &> v_1 & v_2' &< v_2 \\ F_2'p &> F_2p & F_2'p &< F_2p \\ \mu_1' &> \mu_1 & \mu_1' &< \mu_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \mu_0\mu\vec{H} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} \\ &= (1 + \chi_m)\vec{B}_0 \to \chi_m < 0\end{aligned}$$

$\implies$ Alle Stoffe sind diamagnetisch. Aber Möglichkeit der Überlagerung mit Para- beziehungsweise Ferromagnetismus. $\chi_m > 0$: Paramagnetismus
Ausrichtung permanenter magnetischer Dipole mit außerem B-Feld. Vergleich:

- Elektrische Ausrichtung führt zur Abschwächung
- Magnetostatische Ausrichtung führt zur Verstärkung

Thermische Bewegung wirkt der Ausrichtung entgegen $\implies$ Temperaturabhängigkeit der Magnetisierung: (Curie-Gesetz)

$$\vec{M} = \frac{1}{3}\frac{\mu B_{ext}}{k_B T}\vec{M}_s$$

$\vec{M}_s$: Sättigungsmagnetismus
$\chi_m \gg 0$ Ferromagnetismus
Paramagnetische Materie mit zusätzlicher Wechselwikung der magnetischen Dipole miteinander.
Weißsche Bezirke
Ohne Magnetfeld: Statistische Ausrichtung $\vec{M} = 0$
Mit Magnetfeld: Ausrichtung der Bezirke entlang $\vec{B}$

$$\chi_m \gg 0, M \gg 1 \implies \vec{M} = \mu\vec{M} \gg \vec{H}$$

Ferromagnet:
Beobachtung: Magnetisierung durch B-Feld ist abhängig von „Vorgeschichte“

- „Hinweg“: Koerzitiv Kraft
- „Rückweg“: Remanenz Kraft

Magnetisch hartes Eisen:

- große Remanenz
- große Koerzitiv

Magnetisch weiches Eisen:

- kleine Remanenz
- kleine Koerzitiv

Ferromagnetismus ist Temperaturabhäsgig

- geht oberhalb T_C verloren
- T_C - kritische Temperatur

Oberhalb von F_C $\implies$ Curie-Weiß Gesetz

$$\chi(T) = \frac{C}{T - T_C}$$

14.3 Feldgleichungen in Materie

Vakuum: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$
Materie: $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{M} \right)$, allgemein: $\mu = \mu(H)$.
Außerdem:

$$\text{div } \vec{B} = 0 \text{ auch in Materie} \qquad \text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{frei}$$

Verhalten an Grenzflächen

$$\begin{aligned} H_\parallel^{(1)} = H_\parallel^{(2)} &\implies \frac{B_\parallel^{(1)}}{\mu_1} = \frac{B_\parallel^{(2)}}{\mu_2} \\ B_\perp^{(1)} = B_\perp^{(2)} &\implies \mu_1 H_\perp^{(1)} = \mu_2 H_\perp^{(2)} \end{aligned}$$

$\implies$ Maxwell-Gleichungen der Elektro- und Magnetostatik

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= 0 \qquad & \text{rot } \vec{H} &= \vec{j}_{frei} \\ \text{div } \vec{D} &= \rho \qquad & \text{div } \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Anwendung: Toroidmagnet mit Luftspalt
Radius des Torus: R, Eisenkern $\implies \mu \gg 1$, N Windungen um Kern mit Strom I, Breite des Luftspaltes: d. $\implies$ Feld im Luftspalt: Ampersches Gesetz:

$$\oint \vec{H} \mathrm{d}\vec{s} = NI = \int_{Eisen} \vec{H}_{Fe} \mathrm{d}\vec{s} + \int_{Luft} \vec{H}_{Luft} \mathrm{d}\vec{s}$$

$\vec{B}_{Fe} = \vec{B}_{Luft} \implies \mu \vec{H}_{Fe} = \vec{H}_{Luft}$

$$\begin{aligned} \implies NI &= \oint \vec{H} \mathrm{d}\vec{s} = H_{Fe}(2\pi R - d) + H_{Luft} d \\ &= \frac{H_{Luft}}{\mu}(2\pi R - d) + d H_{Luft} \\ H_{Luft} &= \frac{NI\mu}{(\mu - 1)d + 2\pi R} \approx \frac{\mu NI}{\mu d + 2\pi R} \\ \implies B &= \mu_0 H_{Luft} = \frac{\mu_0 \mu NI}{\mu d + 2\pi R} \end{aligned}$$

15 Induktion und elektromagnetische Wechselfelder

Bisher: stationäre, das heißt zeitunabhängige Felder
Jetzt:

- zeitabhängige B-Felder $\rightarrow$ magnetische Induktion
- zeitabhängige E-Felder $\rightarrow$ Verschiebungsstrom

15.1 Magnetische Induktion

Beobachtungen

- Bewegte Leiterschleife im Magnetfeld resultiert in Induktion und Spannugsstößen
- Vorzeichen abhängig von Bewegungsrichtung und Richtung des Magnetfelds
- Mehrere Windungen (beziehungsweise größere Fläche) $\rightarrow$ höhere Spannungen
- Drehung Leiterschleife $\rightarrow$ Wechselspannung

$$\int U(t)\mathrm{d}t = \Delta\phi_m \quad \text{mit} \quad \phi_m = \int \vec{B}\mathrm{d}\vec{A}$$

$$U_{ind} = -\dot{\phi}_m \quad \text{beziehungsweise } U_{ind} = -N\dot{\phi}_m$$

Ursache? $\Longrightarrow$ Lorentzkraft

$$\vec{F} = q\left(\vec{b} \times \vec{B}\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}U_{ind} &= E_{ind}\mathrm{d}l = \frac{F}{q}\mathrm{d}l = vB\mathrm{d}l \\
U_{ind} &= \int_1^2 E_{ind}\mathrm{d}l = vBl \\
U_{ind} &= \oint E\mathrm{d}l = \int_1^2 E\mathrm{d}l + \int_2^1 E\mathrm{d}l = vBl
\end{aligned}$$

Beliebige Schleife

$$\begin{aligned}
U_{ind} &= \oint \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\mathrm{d}\vec{l} \\
&= \oint \vec{E}_{ind}\mathrm{d}\vec{l} \\
&= \oint \left(\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{v}\right)\vec{B} \\
&= -\oint \left(\vec{v} \times \mathrm{d}\vec{l}\right)\vec{B} \\
&= -\oint \left(\frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} \times \mathrm{d}\vec{l}\right)\vec{B} = -\oint \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\vec{B} \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \vec{B}\mathrm{d}\vec{A} = -\dot{\phi}_m && \text{(Für } \vec{B} = \text{const.)} \\
\phi_m &= \int \vec{B}\mathrm{d}\vec{A} = Bls \\
\dot{\phi}_m &= Bl\dot{s} = Blv
\end{aligned}$$

Neu: Induktion durch $\dot{\vec{B}}$. Rein experimentelle Beobachtung

Satz 15.1 (Faradaysches Induktionsgesetz)

$$U_{ind} = \oint E_{ind} \mathrm{d}\vec{s} = -\dot{\phi}_m$$

mit $\phi_m = \int \vec{B}\mathrm{d}\vec{A}$

Neue grundlegende Eigenschaft: Wichtig: rot $\vec{E} \neq 0$

$$\oint_C \vec{E}\mathrm{d}\vec{s} = -\dot{\phi}_m = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_O \vec{B}\mathrm{d}\vec{A}$$

$$\Longrightarrow \int_O \mathrm{rot}\ \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_O \vec{B}\mathrm{d}\vec{A} = -\int_O \dot{\vec{B}}\mathrm{d}\vec{A} \quad \text{(Falls } O \text{ beziehungsweise } C \text{ konstant)}$$

Satz 15.2 (3. Maxwell-Gleichung)

$$\oint_C \vec{E}\mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_O \vec{B}\mathrm{d}\vec{A} \quad \text{(E-Feld nicht mehr Wirbelfrei)}$$

$$\mathrm{rot}\ \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad \text{(Induktion nur in Verbindung mit der Lorenzkraft)}$$

Satz 15.3 (Lenzsche-Regel) Die durch Induktion entstehende Spannungen, Ströme, Felder und Kräfte wirken der die Induktion hervorrufenden Ursache stets entgegen.

15.2 Generatoren

$$\phi_m = \int \vec{B}\mathrm{d}\vec{A} = BA\cos\omega t$$

$$\dot{\phi}_m = -U_{ind} = \omega BA\sin\omega t$$

15.3 Induktivität und Selbstinduktion

Betrachte stromdurchflossene Leiterschleife $B \sim I, \phi_m \sim I$

Definition 15.4 (Induktivität)

$$\phi_m = LI$$

L: Eigenschaft des felderzeugenden Leiters.

Induktivität einer Spule: N Windungen, l Länge, $n = N/l$, Querschnittsfläche A

$$B = \mu\mu_0 nI$$

$$\phi_m = NBA = nlBA$$

$$\phi_m = \underbrace{\mu\mu_0 n^2 Al}_{L} I$$

$$\Longrightarrow U_{ind} = -\dot{\phi}_m = -L\dot{I}$$

Weitere Beispiele:

- Drahtschleife: $L = \mu_0 R \ln R/r$
- Doppelleitung: $L = \mu_0 l/\pi \ln a/r$
- Koaxialkabel: $L = \mu_0 l/(2\pi) \ln r_a/r_i$

Außerdem: Zeitlich veränderlicher Stromfluß durch eine Leiteranordnug führt zu einer zeitlichen Veränderung des erzeugten B-Feldes → Flußänderung → Spannungsindukiton.

$$U_{ind} = -\dot{\phi}_m = -L\dot{I}$$

15.4 Verschiebungsstrom

Für zeitlich veränderliche B-Felder:

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \to \text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$
$$\oint \vec{E} \mathrm{d}\vec{s} = 0 \to \oint \vec{E} \mathrm{d}s = -\int \dot{\vec{B}} \mathrm{d}\vec{A}$$

Jetzt: Betrachte Ampersches Durchflutungsgesetz

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \iff \oint \vec{B}\}\vec{s} = \mu_0 I$$

Betrachte Leiter durch Kondensator. Danng gilt:

$$\oint \vec{B} \mathrm{d}\vec{s} = B 2\pi r = \mu_0 I \to B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Aber: Verschiebung des Integrationsweges zwischen die beiden Kondensatorplatten liefert:

$$\oint \vec{B} \mathrm{d}\vec{s} = 0$$

Dies erscheint unmöglich! B-Feld kann im Kondensator nicht abrupt verschwinden. Außerdem:

$$\oint_C \vec{B} \mathrm{d}\vec{s} = \mu_0 \int_A \vec{j} \mathrm{d}\vec{A}$$

(gilt für alle Flächen mit Randkurve C). Fläche A_1: Kreisfläche um Leiter, Fläche A_2: Fläche mit Kondensator $\Longrightarrow$

- Fläche A_1: $B = \mu_0 I/(2\pi r)$
- Fläche A_2: $B = 0$

$\Longrightarrow$ offensichtlicher Widerspruch. $\Longrightarrow$ Etwas fehlt! Berücksichtigung des durch Kondensatoraufladung erzeugten zeitlich sich ändernden elektrischen Feldes. Kontinuitätsgleichung:

$$\text{div } \vec{j} = -\dot{\rho} \iff \oint \vec{j} \mathrm{d}\vec{A} = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

Es gilt:

$$\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = q/\varepsilon_0 \rightarrow \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \varepsilon_0 \oint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\mathrm{d}\vec{A} = \varepsilon_0 \oint \dot{\vec{E}}\mathrm{d}\vec{A}$$

Konsistente Beschreibung falls:

- Fläche A_1: $\oint \vec{B}\mathrm{d}\vec{s} = \mu_0 \int_{A_1} \vec{j}\mathrm{d}\vec{A}$
- Fläche A_2: $\oint \vec{B}\mathrm{d}\vec{s} = \mu_0\varepsilon_0 \int_{A_2} \dot{\vec{E}}\mathrm{d}\vec{A} = \mu_0 \int_{A_2} \vec{j}_v\mathrm{d}\vec{A}$ mit

$$\vec{j}_v = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

„Verschiebungsstrom"

$\rightarrow$ Erweiterung des Ampereschen Durchflutungsgesetzes:

Satz 15.5 (Ampere-Maxwell-Gesetz (4. Maxwell-Gleichung für Vakuum))

$$\oint \vec{B}\mathrm{d}\vec{s} = \mu_0 \int \vec{j}\mathrm{d}\vec{A} + \mu_0\varepsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\mathrm{d}\vec{A}$$
$$\mathrm{rot}\ \vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Bemerkung 15.6 Für $j = 0$ gilt: rot $\vec{B} = 1/c^2\,\dot{\vec{E}}$, das heißt elektrische Wechselfelder erzeugen ein magnetisches Wirbelfeld, umgekehrt erzeugen wegen rot $\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ magnetische Wechselfelder ein eletrisches Wirbelfeld. $\rightarrow$ elektromagnetische Wellen (siehe unten)

Jetzt: Verschiebungsstrom in Matrie

$$\oint \vec{B}\mathrm{d}\vec{s} = \mu_0 I_{ges} = \mu_0 I_L + \mu_0 I_M + \mu_0 I_v + \mu_0 I_P$$

- I_L: Leitungsstrom (frei Ströme)
- I_M: Molekularstrom
- I_V: Verschiebungsstrom
- I_P: Polarisationssrom (nur für nicht-stationäre E-Felder)

Molekulorstrom:

$$\oint \vec{M}\mathrm{d}\vec{s} = I_M$$
$$\oint \vec{H}\mathrm{d}\vec{s} = \oint\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}\right)\mathrm{d}\vec{s} = I_L + I_V + I_P = I_L + \varepsilon_0\int_A \dot{\vec{E}}\mathrm{d}\vec{A} + I_P$$
$$= I_L + \varepsilon_0\int_A \dot{\vec{E}}\mathrm{d}\vec{A} + \int \vec{j}_P\mathrm{d}\vec{A}$$

Polarisationsstrom: Ergibt sich aufgrund des Flusses gebundener Ladungen in Richtung des elektrischen Feldes $\rightarrow$ zeitlich veränderlicher Strom für zeitlich veränderliche E-Felder

$$\vec{j}_P = nq\vec{v} = nq\frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t}, \mathrm{d}\vec{p} = q\mathrm{d}\vec{s}, \mathrm{d}\vec{P} = n\mathrm{d}\vec{p}$$
$$\vec{j}_P = n\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} \iff \vec{j}_P \iff \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} = \dot{\vec{P}}$$

Damit

$$\oint \vec{H}\mathrm{d}\vec{s} = I_L + \varepsilon_0\int\dot{\vec{E}}\mathrm{d}\vec{A} = I_L + \int\dot{\vec{D}}\mathrm{d}\vec{A}$$
$$\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

Satz 15.7 (Ampere-Maxwell-Gesetz in Matrie (4. Maxwellsche Gleichung))

$$\oint \vec{H}\mathrm{d}\vec{s} = \int\vec{j}\mathrm{d}\vec{A} + \int\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\mathrm{d}\vec{A}$$
$$\mathrm{rot}\ \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$$

16 Schaltvorgänge, Wechselstrom und Schwingkreise

16.1 Induktivität im Stromkreis (LR-Glied)

Einschlaten:

$$U_{ind} = -L\dot{I}$$

Außerdem gilt: (Kirchhoffsche Maschenregel)

$$U_0 + U_{ind} = IR$$
$$U_0 - L\dot{I} = IR$$

Man erhält eine inhomogene, lineare Differentialgleichung erster Ordnung, Lösung: allgemeine Lösung der homogenen Differntialgleichung + spezielle Lösng der inhomogenen Differentialgleichung + Anfangsbedingungen

$$\implies \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}I = \frac{U_0}{L}$$
$$\implies I(t) = \frac{U_0}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

Mit der Anfangsbedingung $I(0) = 0$ folgt:

$$I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$
$$= \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$
$$\tau = L/R$$

Ausschalten:

$$U_{ind} = -L\dot{I}, U_{ind} = IR$$
$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}I = 0$$

Anfangsbedingung: $I(0) = U_0/R$. Damit folgt:

$$I(t) = \frac{U_0}{R}e^{-t/\tau}$$

Spannungsabfall am Widerstand:

$$U(t) = I(t)R = U_0 e^{-t/\tau}$$

Aber: Was passiert beim Öffnen des Schalters tatsächlich? $R_{offen} = \tilde{R} \approx \infty$.

$$U(t) = I(t)\tilde{R} = U_0 \frac{\tilde{R}}{R} e^{-t/\tau}$$

$\implies$ Riesiger Spannungsstoß für $\tilde{R} \to \infty \implies$ Lichtbogen.

16.2 Kapazität im Stromkreis (RC-Glied)

Einschalten:

$$U_C = Q/C, Q = Q(t)$$

Außerdem gilt: $U_0 = IR + Q/C$. Differenzieren:

$$\dot{I}R + \frac{\dot{Q}}{C} = \dot{I}R + \frac{I}{C} = 0$$
$$\implies \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}I = 0$$

Anfangsbedingung: $I(0) = U_0/R$. Damit folgt:

$$I(t) = \frac{U_0}{R}e^{-t/(RC)} = \frac{U_0}{R}e^{-t/\tau}$$

$\tau = RC$. Spannung:

$$U_C(t) = U_0 - I(t)R = U_0\Big(1 - e^{-t/\tau}\Big)$$

Ausschalten, das heißt Entladung:

$$IR + Q/C = 0 \to \dot{I}R = -\frac{1}{C}I$$
$$\dot{I} = -\frac{1}{\tau}I$$

Mit $I(0) = -U_0/R$ als Anfangsbedingung folgt:

$$I(t) = -\frac{U_0}{R}e^{-t/\tau}$$
$$U_C(t) = U_0 e^{-t/\tau}$$

16.3 R, L, C im Wechselstromkreis

Beobachtung: Lämpchen brennen für verschiedene Frequenzen $f = \omega/(2\pi)$ unterschiedlich hell.

1. Widerstand: Lämpchen leuchtet unabhängig von der eingestellten Frequenz immer gleich hell
2. Kapazität:
   - Niedrige Frequenz $\rightarrow$ Lämpchen aus
   - Hohe Frequenz $\rightarrow$ Lämpchen leuchtet
3. Induktivität:
   - Niedrige Frequenz $\rightarrow$ Lämpchen leuchtet
   - Hohe Frequenz $\rightarrow$ Lämpchen aus

$\rightarrow$ Kondensator und Spule verhalten sich wie frequenzabhängige Widerstände. Quantitative Batrachtung:

1. Ohmscher Widerstand:

$$\begin{aligned} U_0(t) &= U_0 \cos \omega t \\ \implies I(t) &= \frac{1}{R} U(t) \\ &= \frac{U_0}{R} \cos \omega t \\ &= I_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

   Leistung:

$$P(t) = U(t) I(t) = I_0 U_0 \cos^2 \omega t$$

   $\implies$ mittlere Leistung

$$\vec{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) \mathrm{d}t$$

$$\vec{P} = \frac{1}{T} \int_0^T I_0 U_0 \cos^2 \omega t \mathrm{d}t = \frac{I_0 U_0}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t \mathrm{d}t = \frac{1}{2} U_0 I_0$$

   Definition 16.1 (Wirkleistung)

$$\vec{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0 = U_{eff} I_{eff}$$

   mit $U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0$, $I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$

2. Induktiver Widerstand:

$$\begin{aligned} U_s(t) &= U_0 \cos \omega t \\ U_s(t) + U_{ind} &= 0, U_{ind} = -L\dot{I} \\ \implies U_s(t) &= L\dot{I} \end{aligned}$$

Interpretation:

$$\int U_0 \cos \omega t \mathrm{d}t = U_0 \frac{1}{\omega} \sin \omega t = LI$$

$$\implies I(t) = \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t = \frac{U_0}{\omega L} \cos\Big(\omega t - \frac{\pi}{2}\Big) = I_0 \cos\Big(\omega t - \frac{\pi}{2}\Big)$$

$\implies$

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 \cos \omega t \\ I(t) &= I_0 \cos\Big(\omega t - \frac{\pi}{2}\Big) \\ I_0 &= \frac{U_0}{\omega L} \end{aligned}$$

$\implies$ Strom läuft der Spannung um 90° hinterher, da der Strom nach Anlegen der Spannung U_1 erst allmählich zu fließen beginnt.

3. Kapazitiver Widerstand

$$\begin{aligned} U_s(t) = U_c, U_c &= \frac{Q}{C}, I = \dot{Q} \\ Q &= CU_s = CU_0 \cos \omega t \\ \dot{Q} = I &= -\omega C U_0 \sin(\omega t) \\ &= \omega C U_0 \cos\Big(\omega t + \frac{\pi}{2}\Big) = U_0 \cos\Big(\omega t \beta \frac{\pi}{2}\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 \cos \omega t \\ I(t) = I_0 \cos\Big(\omega t + \frac{\pi}{2}\Big) \\ I_0 &= \omega C U_0 \end{aligned}$$

$\implies$ Strom läuft der Spannung um 90° vorraus, da zuerst Ladung auf den Kondensator fließen muss, bevor Spannng an Kondensator abfällt.

Merke:

- Ohmscher Widerstand: $Z_R = R, \varphi = 0°$
- Induktiver Widerstand: $Z_L = \omega L, \varphi = -90°$
- Kapazitiver Widerstand: $Z_C = 1/\omega C, \varphi = 90°$
- Blindleistung Kapazität:

$$\vec{P} = \frac{1}{T} \int_0^T U_c(t) I_c(t) \mathrm{d}t = -\frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 \cos \omega t \sin \omega t \mathrm{d}t = 0$$

Induktiviät:

$$\vec{P} = \frac{1}{T}\int_0^T U_L(t) I_L(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T U_0 I_0 \underbrace{\cos\omega t \sin\omega t}_{\frac{1}{2}\sin 2\omega t} \mathrm{d}t = 0$$

Die sogenannte Blindleistung verschwindet im Mittel, da die Energie zum Aufbau der (elektrischen und magnetischen) Felder wieder in den Generrator zurückfließt → Blindstrom. Aber: Auch der Blindstrom macht Drähte warm und die Blindleistung muss temporär zur Verfügung gestellt werden. (Wichtig bei Auslegung von Netzwerken)

16.4 Komplexe Darstellung

Strom und Spannung im Wechselstromkreis:

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 \cos\omega t \\ I(t) &= I_0 \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Übertragung ins Komplexe:

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 e^{i\omega t} \\ I(t) &= I_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = I_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} \\ &= I_0 \cos(\omega t + \varphi) + i I_0 \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Die Verwendung komplexer Zahlen bedeutet rechnerisch eine wesentliche Vereinfachung! Ansonsten äquivalent!
Warum funktioniert das?
Grund → Linearität der auftretenden Differentialgleichungen.

- Homogene Differentialgleichung:

$$\begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \ddot{z} + \gamma\dot{z} + z = 0 \end{cases}$$

  Erste Ordnung: $z(t) = a(t) + ib(t)$ sei Lösung → $z^*(t) = a(=) - ib(t)$ ebenfalls Lösung.
  das heißt: $\Re(z) = 1/2(z + z^*)$ ist auch ein Lösung der homogenen Differentialgleichung.
  Zweite Ordnung: → es gibt zwei linear unabhängige Lösungen $z(t), z^*(t)$. Also $\Re(z) = 1/2(z + z^*) = a(t)$ und $i\Im(z) = 1/2(z + z^*) = ib(t)$ sind auch unabhängige Lösungen.

- Inhomogene Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \dot{z} = \xi \\ \ddot{z} + \gamma\dot{z} + z = \xi \end{cases}$$

  → zusätzliche partikuläre Lösung.
  Erste Ordnung: $\dot{z} = \alpha + i\beta$ → spezielle Lösung: $z(t) = a(t) + ib(t)$, dann $a(t), b(t)$ partikuläre Lösungen des reellen / imaginären Teils.
  Zweite Ordnung: analog.

Bei Verwendung komplexer Darstellung: Ohmscher Widerstand

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 e^{i\omega t} = \hat{U} e^{i\omega t} \\ I(t) &= \frac{U_0}{R} e^{i\omega t} = \hat{I} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Induktiver Widerstand:

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 e^{i\omega t} = \hat{U} e^{i\omega t} \\ I(t) &= \frac{U_0}{\omega L} e^{i(\omega t - \pi/2)} = \frac{U_0}{\omega L} e^{-i\pi/2} e^{i\omega t} \\ &= \frac{U_0}{i\omega L} e^{i\omega t} = \hat{I} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Kapazitiver Widerstand:

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 e^{i\omega t} = \hat{U} e^{i\omega t} \\ I(t) &= \omega C U_0 e^{i(\omega t + \pi/2)} = \omega C U_0 e^{+i\pi/2} e^{i\omega t} \\ &= i\omega C U_0 e^{i\omega t} = \hat{I} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Offenbar gilt: $\hat{I} = \hat{U}/\hat{z}$, wobei die Phase gegenüber der Spannug im komplexen Widerstand $\hat{z}$ steckt.
$\Longrightarrow$ Wechselstromwiderstände:

$$\begin{aligned} \hat{Z}_R &= R \\ \hat{Z}_L &= i\omega L = \omega L e^{i\pi/2} \\ \hat{Z}_C &= \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\pi/2} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Ohmsches Gesetz:

$$\hat{U} = \hat{z} \cdot \hat{I}$$

Beispiel 16.2 (RC-Serienschaltung) Kirchhoff: $I_R = I_C = I, U_G = U_R + U_C$. Also:

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 e^{i\omega t} \\ \Longrightarrow \quad U_R &= I_0 R e^{i\omega t} \\ U_C &= I_0 \frac{1}{i\omega C} e^{i\omega t} \\ U_G &= U_R + U_C = I_0 \left(\underbrace{R + \frac{1}{i\omega C}}_{\text{Impedanz } \hat{z}} \right) e^{i\omega t} = I_0 \underbrace{|\hat{z}| e^{i\varphi}}_{\hat{z}} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

mit

$$\hat{z} = |\hat{z}| e^{i\varphi}, |\hat{z}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}, \varphi = \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

$\Longrightarrow$ Lösung:

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t}$$
$$U(t) = \hat{z} I_0 e^{i\omega t} = I_0 |\hat{z}| [\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)]$$

Beispiel 16.3 (RC-Parallelschaltung) Kirchhoff: $U = U_R = U_C, I_G = I_R + I_C$. Also

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t}$$
$$\Longrightarrow I_R = \frac{U_0}{\hat{z}_R} e^{i\omega t}, I_C = \frac{U_0}{\hat{z}_c} e^{i\omega t}$$
$$I_R = \frac{U_0}{R} e^{i\omega t}, I_C = i\omega C U_0 e^{i\omega t}$$
$$I = I_R + I_C = U_0 \left(\frac{1}{\hat{z}_R} + \frac{1}{\hat{z}_C} \right) e^{i\omega t}$$
$$= U_0 \underbrace{\left(\frac{1}{R} + i\omega C \right)}_{=\frac{1}{\hat{z}}} e^{i\omega t}$$

Die beiden Beispiele zeigen, dass für Impedanzen im Wechselstromkreis offenbar die gleichen Regeln wie für Widerstände im Gleichstromkreis gelten. Damit: Erweiterte Kirchhoffsche Regeln:

$$\sum \hat{I} = 0 \qquad \text{(Knotenregel)}$$
$$\sum \hat{U} = 0 \qquad \text{(Maschenregel)}$$
$$\hat{Z} = \sum \hat{z}_i \qquad \text{(Reihenschaltung)}$$
$$\hat{Z}^{-1} = \sum \hat{z}_i^{-1} \qquad \text{(Parallelschaltung)}$$

16.5 RLC-Schwingkreis

Ohne Stromquelle:

$$U_{ind} = IR + Q/C$$
$$-L\dot{I} = IR + Q/C$$
$$L\dot{I} + IR + Q/C = 0$$

Ableiten:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I = 0$$

Gedämpfder harmonischer Oszillator:

$$\begin{aligned}
m\ddot{+}\beta\dot{x} + kx &= 0\\
\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0\\
\omega_0^2 &= k/m\\
\gamma &= \beta/(2m)\\
\gamma &= R/(2L)\\
\omega_0^2 &= \frac{1}{LC}
\end{aligned}$$

Ansatz: $ce^{\lambda t}$

$$\begin{aligned}
I(t) &= C_1 e^{-\gamma t} e^{i\omega_R t} + C_2 e^{-\gamma t} e^{-i\omega_R t}\\
\omega_R &= \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}
\end{aligned}$$

3 Fälle:

- $\gamma < \omega_0$: Schwingfall
- $\gamma > \omega_0$: Kriechfall
- $\gamma = \omega_0$: Aperiodischer Grenzfall

Mechanik: $\gamma = \beta/(2m), \omega_0^2 = k/m$
Schwingkreis: $\gamma = R/(2L), \omega_0^2 = 1/(LC)$ Mit Stromquelle:

$$\begin{aligned}
U_G + U_{ind} &= IR + Q/C\\
L\dot{I} + IR + Q/Ce^{i\omega t} &= U_0 e^{i\omega t}\\
L\ddot{Q} + \dot{Q}R + Q/C &= U_0 e^{i\omega t}
\end{aligned}$$

Ableiten:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \omega U_0 e^{i(\omega t + \pi/2)}$$

Ansatz:

$$I(t) = \rho e^{i\varphi} e^{i\Omega t}$$

Einsetzen $\rightarrow$

$$\begin{aligned}
\Omega &= \omega\\
\rho &= \frac{\omega U_0}{L}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 2\gamma^2\omega^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\\
\varphi &= \arctan\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right)
\end{aligned}$$

Einfacher:

$$
\begin{aligned}
I(t) &= U_0 \frac{1}{\hat{z}} e^{i\omega t}, \hat{z} = \hat{z}_R + \hat{z}_L + \hat{z}_C \\
I(t) &= \frac{U_0}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} e^{i\omega t} = \frac{U_0}{R + i\big(\omega L - \frac{1}{\omega C}\big)} e^{i\omega t} \\
&= (a+ib)e^{i\omega t} = \left(\frac{U_0 R}{R^2 + \big(\omega L - \frac{1}{\omega C}\big)^2} - i \frac{U_0\big(\omega L - \frac{1}{\omega C}\big)}{R^2 + \big(\omega L - \frac{1}{\omega C}\big)^2} \right) e^{i\omega t} \\
&= C e^{i\varphi} e^{i\omega t} \\
C &= \sqrt{a^2 + b^2} \\
\tan\varphi &= \frac{b}{a} \\
C = \rho &= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \big(\omega L - \frac{1}{\omega C}\big)^2}} \\
\varphi &= \arctan\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2 \gamma} \right) \\
\varphi &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega^2\gamma}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)
\end{aligned}
$$

16.6 Transformator

Große Bedeutung in der Wechselstromtechnik. Insbesondere Transformation von Spannungen für Hochspannungsübertragung. Annahme: Magnetische Feldlinien verlaufen vollständig innerhalb des Eisenjochs, das heißt alle Straufelder werden vernachlässigt. Unbelasteter Transformator:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= U_0 \cos\omega t && \text{(Primärseite)} \\
U_1 + U_{ind,1} &= 0 \\
U_1 &= -U_{ind,1} = N_1 \dot{\phi}_m
\end{aligned}
$$

Magnetischer Fluß ist auf Primär und Sekundärseite gleich:

$$
U_2 = -U_{ind,2} = N_2 \dot{\phi}_m = \frac{N_2}{N_1} U_1 \qquad \text{(Sekundärseite)}
$$

Außerdem gilt bei Vernachlässigung vn Leistungsverlusten

$$
\begin{aligned}
P &= U_1 I_1 = U_2 I_2 \\
\implies I_2 &= \frac{N_1}{N_2} I_1
\end{aligned}
$$

Magnetfeldführung: Braucht großes μ:

$$
\begin{aligned}
B_{\perp,Fe} &= B_{\perp,Lu} \\
B_{\|,Fe} &= \mu B_{\|,Lu}
\end{aligned}
$$

Das heißt: B-Feld im Eisen im wesentlichen tangential zur Oberfläche.

Satz 16.4 (Unbelasteter Transformator) Transformatorgleichung für verlustfreien, unbelasteten Transformator

$$U_2 = \frac{N_2}{N_1} U_1 \qquad I_2 = \frac{N_1}{N_2} I_1$$

Mögliche Verluste:

- Wirbelströme
- Streufelder

Konplizierter: belasteter Transformator (siehe Literatur, Übungen, Praktikum)

16.7 Elektrische und magnetische Feldenergie

Elektrische und magnetische Feldenergie: Elektrische Leistung im RC-Glied:

$$\begin{aligned} P(t) &= I(t)U(t) = C\dot{U}U \\ &= CU\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \\ \implies W_{el} &= \int_0^t P(t)\mathrm{d}t = \int_0^t CU\mathrm{d}U = \frac{1}{2}CU(t)^2 \end{aligned}$$

Elektrische Leistung im LR-Glied:

$$P(t) = I(t)U(t) = L\dot{I}I = LI\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \implies W_m = \int_0^t P(t)\mathrm{d}t = \int_0^t LI\mathrm{d}I = \frac{1}{2}LI(t)^2$$

Also:

- $W_{el} = \frac{1}{2}CU^2$ - gespeicherte Energie im Kondensator, elektrische Feldenergie
- $W_m = \frac{1}{2}LI^2$ - gespeicherte Energie in Induktivität, magnetische Feldenergie

Energiedichte des elektrischen Feldes

$$\begin{aligned} W_{el} &= \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0\frac{A}{d}U^2 \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0\frac{A}{d}E^2d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 V E^2 \\ \implies \omega_{el} &= \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}ED \end{aligned}$$

Energiedichte des magnetischen Feldes:

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu\mu_0\frac{N^2}{l}AI^2 = \frac{1}{2}\mu\mu_0\frac{A}{l}M^2l^2 \\ &= \frac{1}{2}\mu\mu_0 V H^2 \\ \omega_m &= \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2 = \frac{1}{2}BH \end{aligned}$$

Allgemein gilt:

$$\omega_{elektrom.} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}\right)$$

17 Elektromagnetische Welle

17.1 Mechanische Wellen

Eine Welle ist ein Vorgang bei dem sich eine Schwingung vom Ort Ihrer Erregung in Folge von Kopplungen an benachbarte schwingungsfähige Systeme im Raum ausbreitet. Man unterscheidet

- Transversale Wellen $\rightarrow$ Ausbreitung senkricht zur Schwingungsrichtung
- Longitudinale Wellen $\rightarrow$ Ausbreitung entlang der Schwingungsrichtung

Eindimensionale harmonische Welle $\rightarrow$ harmonische Anregung Bei $t = 0$:

$$y(x) = A\sin(kx), k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Zusätzliche Zeitabhängigkeit:

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A\sin(k(x - v_{ph}t)) \\ &= A\sin(kx - kv_{ph}t) \\ &= A\sin(kx - \omega t) \\ v_{ph} &= \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} \end{aligned}$$

Harmonische ebene Welle:

$$y(x,t) = A\sin(kx \pm \omega t) \qquad \text{(1 dim)}$$

$$y(\vec{x},t) = A\sin\left(\vec{k}\vec{x} \pm \omega t\right) \qquad \text{(3 dim)}$$

- Wellenzahl: $k = 2\pi/\lambda$, $\vec{\lambda}$ || Ausbreitungsrichtung
- Wellenlänge: $\lambda = 2\pi/k$
- Phasengeschwindigkeit: $v_{ph} = \omega/k$
- Amplitude: A

Wesenliche Eigenschaften:
Superposition und Interferenz:
Superposition $\longleftrightarrow$ Überlagerung von Wellen

$$y(\vec{x},t) = \sum_{i=1}^{n} y_i\left(\vec{k},t\right)$$

Überlagerung von Wellen (1 dimensional)

$$\begin{aligned} \xi_1(x,t) &= A\cos(k_1x - \omega_1t) \\ \xi_2(x,t) &= A\cos(k_2x - \omega_2t) \\ \xi = \xi_1 + \xi_2 &= A(\cos(k_1x - \omega_1t) + \cos(k_2x - \omega_2t)) \\ &= 2A\cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \end{aligned}$$

Jetzt: $k_1 \approx k_2, \omega_1 \approx \omega_2 \implies$ Schwebung mit mittlerer Frequenz als Schwebungsfrequenz.

Satz 17.1 (Fouriertheorem) Jede periodische und aperiodicshe Funktion kann durch harmonische ebene Wellen dargestellt werden. Fourier-Reihe:

$$f(t) = f(t+T) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

mit

$$a_i = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(i\omega t) \mathrm{d}t$$
$$b_i = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(i\omega t) \mathrm{d}t$$

aperiodische F: Fourier-Integral:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t) \mathrm{d}\omega$$
$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \mathrm{d}t$$
$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \mathrm{d}t$$

Daher genügt es oft harmonische ebene Wellen zu betrachten.

17.2 Wellengleichung

Wegge $\rightarrow$ Ausbreitung einer Schwingung im Raum. Gesucht: Differentialgleichung die die Ausbreitung von Störungen beschreibt. Sich ausbreitende Störung $\hat{=}$ Wellenpaket.

$$\psi_+(x,t) = f(x - vt)$$
$$\psi_-(x,t) = f(x + vt)$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f', \frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad = \pm v f'$$
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f''$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial t^2} = v^2 f''$$

Klassische Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \qquad \text{(1 dim)}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) = v^2\Delta\psi \qquad \text{(3 dim)}$$

v^2: Phasengeschwindigkeit. Eigenschaften:

- lineare Differentialgleichung $\rightarrow$ Superposition und Inferferenz
- Ebene Wellen sind Lösung der Wellengleichung
- Auftreten solcher Gleichungen weist auf Wellenchararkter der Lösung hin

17.3 Wellenpakete, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Wellenpaket

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \{a(k)\cos kx + b(k)\sin kx\}\mathrm{d}t$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \{a(k)\cos(k(x-v_{ph}t)) + b(k)\sin(k(x-v_{ph}t))\}$$

Jetzt: Übergang ins komplexe:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{i2}$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\mathrm{si}$$

$$\Longrightarrow \psi(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \{\frac{1}{2}a(k)+\frac{1}{2i}b(k)\}e^{ik(x-v_{ph}t)}\mathrm{d}k + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \{\frac{1}{2}a(k)-\frac{1}{2i}b(k)\}e^{-ik(x-v_{ph}t)}\mathrm{d}k$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty$$

$$(\omega = |k|v_{ph} > 0)$$

Damit ergibt sich dann allgemein:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty$$

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty$$

Phasengeschwindigkeit: $v_{ph} = \omega/k \leftrightarrow$ Ausbreitungsgeschwindigkeit gleicher Phasen. Phasengeschwindigkeit kann aber für unterschiedliche k, das heißt unterschiedliche Wellenlängen $\lambda = 2\pi/k$ unterschiedlich sein $\rightarrow$ Dispersion. Dispersionsrelation:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\Big|_{k_0}(k - k_0) + \dots$$

(Taylorentwicklung). Dispersion führt im Allgemeinen dazu, dass Wellenpakete mit der Zeit auseinanderfließen. Bei schwacher Abhängigkeit der Ausbreitungsgescwindigkeit von der Wellenlänge bewegt sich das Wellenpaket ein beträchtliches Stück, bevor es nicht wiederzuerkennen ist. Für Wellenpakete für die $A(k)$ nur in einem schmalen Bereich um k_0 von Null verschieden ist - was für die meisten relevanten Wellenpakete der FAll ist - kann man eine Wellenpaketgeschwindigkeit herleiten:

$$v_{gr} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\Big|_{k_0}$$

$\implies$ Gruppengeschwindigkeit, Geschwindigkeit des Schwerpunktes eines Wellenpakets:

$$v_{gr} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$$

Einfaches Beispiel: Schwebung:

$$\begin{aligned}
\xi(x,t) &= 2A\cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{k - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \\
&= 2A\cos\left(\bar{k} - \bar{\omega}t\right)\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \\
\implies v_{ph} &= \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}, v_{gr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}
\end{aligned}$$

17.4 Elektromagnetische Wellengleichung

Maxwell-Gleichung im Vakuum ($\implies \rho = 0, \vec{j} = 0$):

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\ \vec{E} &= 0 \qquad \mathrm{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\mathrm{div}\ \vec{B} &= 0 \qquad \mathrm{rot}\ \vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

Ableinet:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{rot}\ \vec{B} &= \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2}\\
\mathrm{rot}\Big(\mathrm{rot}\ \vec{E}\Big) &= -\,\mathrm{rot}\,\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{rot}\ \vec{B}\\
\implies \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\Big(\vec{E}\Big) &= -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\\
\mathrm{rot}\Big(\mathrm{rot}\Big(\vec{E}\Big)\Big) &= \underbrace{\mathrm{grad}\Big(\mathrm{div}\ \vec{E}\Big)}_{=0} - \underbrace{\div\Big(\mathrm{grad}\ \vec{E}\Big)}_{\Delta\vec{E}}\\
\implies \Delta\vec{E} &= \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\\
\implies \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\Delta\vec{E}
\end{aligned}
$$

Analog:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{rot}\ \vec{E} &= -\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}, \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\ \vec{B} = \ldots\\
\implies \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\Delta\vec{B}
\end{aligned}
$$

$\implies$ Wellengleichungen für elektromagnetische Wellen. Im Vakuum:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\Delta\vec{E}\\
\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\Delta\vec{B}
\end{aligned}
$$

In Matrie:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0}\Delta\vec{E}\\
\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0}\Delta\vec{B}
\end{aligned}
$$

mit Lichtgeschwindigkeit:

$$
\begin{aligned}
c &= \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}\\
c_{mat} &= \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{n}
\end{aligned}
$$

17.5 Struktur elektromagnetischer Wellen

Ebene Welle

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_0 \sin(kx - \omega t) \\ kx &= \vec{k}\vec{r} \\ \implies \vec{E}(\vec{r},t) &= \vec{E}_0 \sin\Big(\vec{k}\vec{r} - \omega t\Big) \div \vec{E} \overset{!}{=} 0 = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{=0} = \frac{\partial E_x}{\partial x} \overset{!}{0} \\ \implies E_x &= \text{const.} \end{aligned}$$

Wahl der Randbedingung $\rightarrow$ wähle $E_x = 0$. Fazit: Im Vakuum gibt es kein logitudinalen, sondern nur transversale elektromagnetischer Wellen. Jetzt: Verknüpfung von E -und B -Feld. Ansatz: Linear polarisierte Welle (das heißt $\vec{E}$, $\vec{B}$ zeigen immer in eine Richtung)

$$\begin{aligned} \vec{E}(x,t) &= (0, E_y(x,t), 0) \\ E_y(x,t) &= E_0 \sin(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Maxwell: rot $\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$, rot $\vec{B} = 1/c^2\,\dot{\vec{E}}$

$$\begin{aligned} \implies \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \implies \frac{\partial B_z}{\partial t} = -kE_0 \cos(kx - \omega t), \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \\ \frac{1}{c^2} &= -\frac{\partial B_x}{\partial x} \implies \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\omega}{c^2} E_0 \cos(kx - \omega t), \frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0 \\ \implies \vec{B}(x,t) &= (0, 0, B_z(x,t)), B_z(x,t) = \frac{E_0}{c} \sin(kx - \omega t) \end{aligned}$$

$\implies$ Magnetisches Wechselfeld muss in z-Richtung zeigen falls das elektrische Feld in y-Richtung polarisiert ist. das heißt für elektromagnetische, ebene Wellen im Vakuum gilt:

$$\vec{E} \perp \vec{B}$$