

# Analysis II (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

26. April 2017

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Metrische und normierte Räume</b>	<b>1</b>
1.1	Metrische Räume . . . . .	1
1.2	Normierte Räume . . . . .	3
1.3	Hilberträume . . . . .	4

## 1 Metrische und normierte Räume

### 1.1 Metrische Räume

**Definition 1.1** Sei  $M$  eine Menge,  $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$  heißt **Metrik** auf  $M$  genau dann wenn  $\forall x, y, z \in M$

- (D1)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (Definitheit)
- (D2)  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie)
- (D3)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$  (Dreiecksungleichung)

**Beispiel 1.2** 1. Charakterische (diskrete) Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Sei  $X = \mathbb{K}^n$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ) mit Metrik

$$d(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{n}{2}}$$

(euklidische Metrik)

3. Sei  $X = \mathbb{R}^n$ . Für  $1 \leq \phi \leq \infty$ . Sei

$$d_\phi(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^\phi \right)^{\frac{1}{\phi}}$$

Ist  $\phi = \infty$ , so definieren wir

$$d_\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$$

4.  $X = \mathbb{R}$  mit Metrik

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

5. Der Raum der Folgen  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  (beziehungsweise  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ) kann mit der Metrik

$$d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

**Definition 1.3** Sei  $M$  eine Menge mit Metrik  $d$ . Wir definieren für  $x \in M, \varepsilon > 0$ , die offene  $\varepsilon$ -Kugel um  $x$  durch

$$K_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

und eine abgeschlossene Kugel durch

$$K_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

$A \subset M$  heißt **Umgebung** von  $x \in M \Leftrightarrow \exists \varepsilon : K_\varepsilon(x) \subset A$

### Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen

**Definition 1.4** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem metrischen Raum  $(X, d)$  ist konvergent gegen einem  $x \in X$  genau dann wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 d(x_n, x) < \varepsilon$

**Satz 1.5** 1. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann ist  $A \subseteq X$  abgeschlossen genau dann wenn  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge in  $A$  mit  $x_n \rightarrow x \Rightarrow x \in A$

2. Seien  $(X, d_1), (Y, d_2)$  zwei metrische Räume. Dann ist die Funktion stetig in  $x \in X$  genau dann wenn  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge in  $X$  mit  $x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

**Definition 1.6 ((Cauchy Folgen und Vollständigkeit))** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt Cauchy-Folge falls  $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$  für  $n, m \rightarrow \infty$ . Der metrische Raum heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge konvergent ist.

## 1.2 Normierte Räume

**Definition 1.7** Ein normierter Raum  $(X, \|\cdot\|)$  ist ein Paar bestehend aus einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $X$  und einer Abbildung  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$  mit

1.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in X$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in X$

**Bemerkung** 1. Die Norm  $\|\cdot\|$  induziert auf  $X$  eine Metrik  $d(x, y) = \|x - y\|$

2. Eine Metrik  $d$  auf einem Vektorraum definiert die Norm  $\|d(x, 0)\|$  nur dann, wenn

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x, y, z \in X : d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y) \quad (\text{Homogenität})$$

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad (\text{Translationsinvarianz})$$

□

**Definition 1.8 (Banachraum)** Ein normierter Raum  $(X, \|\cdot\|)$  heißt vollständig, falls  $X$  als metrischer Raum mit der Metrik  $d(x, y) = \|x - y\|$  vollständig ist. Ein solcher vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**

**Beispiel 1.9** 1.  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ , wobei

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{n}{2}}$$

2. Sei  $K$  eine kompakte Menge:

$$C_{\mathbb{K}} := \{f : K \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\}$$

$$\|\cdot\|_{\infty} = \max_{x \in K} |f(x)|$$

$(C_{\mathbb{K}(K)}, \|\cdot\|_{\infty})$  ist ein Banachraum.

**Bemerkung** 1. Jede Cauchy-Folge in  $\mathbb{K}^n$  konvergiert, das heißt  $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$  ist vollständig

2. Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{K}^n$  besitzt eine konvergente Teilfolge. (Bolzano-Weierstraß Satz gilt in  $\mathbb{R}^n$ ) (Beweis für  $\mathbb{R}^n$  zum Beispiel in RR Ana2 Satz 1.1) □

**Satz 1.10 (Äquivalenz von Normen)** Auf dem endlich dimensionalen Vektorraum  $\mathbb{K}^n$  sind alle Normen **äquivalent** zur Maximumnorm, das heißt zu jeder Norm  $\|\cdot\|$  gibt es positive Konstanten  $w, M$  mit denen gilt

$$m\|x\|_{\infty} \leq \|x\| \leq M\|x\|_{\infty}, x \in \mathbb{K}^n$$

**Beweis** Sei  $\|\cdot\|$  irgendeine Norm  $\forall x \in \mathbb{K}^n$  gilt

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \|e^{(k)}\| \leq M \|x\|_\infty$$

mit

$$M := \sum_{k=1}^n \|e^{(k)}\|$$

Wir setzen

$$S_1 := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}, m := \inf\{\|x\|, x \in S_1\} \geq 0$$

Zu zeigen  $m > 0$  (dann ergibt sich für  $x \neq 0$  wegen  $\|x\|_\infty^{-1} x \in S_1$  auch  $m \leq \|x\|_\infty^{-1} \|x\| \Rightarrow 0 < m \|x\|_\infty \leq \|x\| \quad x \in \mathbb{K}^n$ ) Sei also angenommen, dass  $m = 0$

Dann gibt eine Folge  $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \in S_1$  mit  $\|x^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ . Da diese Folge bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  beschränkt ist, gibt es nach dem B.-W. Satz eine Teilfolge auch von  $(x^{(k)})$ , die bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  gegen ein  $x \in \mathbb{K}^n$  konvergiert.

$$|1 - \|x\|_\infty| = \left| \|x^{(k)}\|_\infty - \|x\|_\infty \right| \leq \|x^{(k)} - x\|_\infty \rightarrow 0 \Rightarrow \|x\|_\infty = 1 \Rightarrow x \in S_1$$

Andererseits gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} : \|x\| \leq \|x - x^{(k)}\| + \|x^{(k)}\| \leq M \|x - x^{(k)}\|_\infty + \|x^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Rightarrow x = 0$$

↳ zu  $x \in S_1$

□

**Definition 1.11** Eine Menge  $M \subset K^n$  heißt kompakt (folgenkompakt), wenn jede beliebige Folge in  $M$  eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert ebenfalls in  $M$  enthalten ist.

**Beispiel 1.12** Mit Hilfe von dem Satz von B.W. folgt, dass alle abgeschlossene Kugeln im  $\mathbb{R}^n$  ( $K_r(a)$ ,  $a \in K^n$ ) kompakt sind. Ferner ist für beschränkte Mengen  $M$  der Rand  $\partial M$  kompakt. Jede endliche Menge ist auch kompakt.

### 1.3 Hilberträume

**Definition 1.13** Sei  $H$   $\mathbb{K}$  Vektorraum. Ein **Skalarprodukt** auf eine Abbildung

$$(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$$

mit

1.  $\forall x, y, z \in H, \lambda \in \mathbb{K} : (z, x + \lambda y) = (z, x) + \lambda(z, y)$
2.  $\forall x, y \in H : (x, y) = \overline{(y, x)}$
3.  $\forall x \in H : (x, x) \geq 0 \wedge (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$(H, (\cdot, \cdot))$  nennt man einen Prähilbertraum.

**Bemerkung** Für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ist das Skalarprodukt linear in der zweiten Komponente aber antilinear in der ersten ( $(\lambda x, y) = \bar{\lambda}(x, y)$ ).  $\square$

**Lemma 1.14 (Cauchy-Schwarz Ungleichung)** Sei  $(H, (\cdot, \cdot))$  Prähilbertraum, dann gilt

$$\forall x, y \in H : |(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

**Beweis** Da die Ungleichung für  $y = 0$  bereits erfüllt ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen  $y \neq 0$ . Für ein beliebiges  $\alpha \in \mathbb{K}$  gilt

$$0 \leq (x + \alpha y, x + \alpha y) = (x, x) + \bar{\alpha}(y, x) + \alpha(x, y) + \alpha\bar{\alpha}(y, y)$$

Setze nun  $\alpha := -(x, y)(y, y)^{-1}$

$$\begin{aligned} &= (x, x) - \overline{(x, y)}(y, y)^{-1} - (x, y)(y, y)^{-1}(x, y) - |(x, y)|^2(y, y)^{-1} \\ &= (x, x) - \underbrace{((y, x)(y, y)^{-1} + (x, y)(x, y)(y, y)^{-1})}_{>0} - |(x, y)|^2(y, y)^{-1} \\ &\leq (x, x) - |(x, y)|^2(y, y)^{-1} \\ &\Leftrightarrow |(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y) \end{aligned} \quad \square$$

**Korollar 1.15** Sei  $(H, (\cdot, \cdot))$  ein Prähilbertraum, dann ist  $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$  eine Norm auf  $H$ .

**Beweis** Es ist nur die Dreiecksungleichung zu beweisen, weil der Rest klar ist. Für  $x, y \in H$  gilt

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(x, y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x, y)| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned} \quad \square$$

**Definition 1.16** Ein Prähilbertraum  $(H, (\cdot, \cdot))$  heißt Hilbertraum, falls  $(H, \|\cdot\|)$  mit  $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$  ein Banachraum ist.

**Beispiel 1.17** 1.  $H = \mathbb{R}^n$  versehen mit  $\underbrace{(x, y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i}_{\text{euklidisches Skalarprodukt}}$  ist ein Hilbertraum

2.  $H = \mathbb{C}^n$  mit  $\underbrace{(x, y) := \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i}_{\text{euklidisches Skalarprodukt}}$  ist ein Hilbertraum

3. Sei  $l^2\mathbb{K} := \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{K}, \forall k \in \mathbb{N} \wedge \sum_{i=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}$  versehen mit  $(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \bar{x}_i y_i$  ist ein Hilbertraum.

$$\sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|_{l^2} \|y\|_{l^2} < \infty$$

**Lemma 1.18 (Höller-Ungleichung)** Für das euklidische Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_2$  gilt für beliebige  $p, q$  mit  $1 < p, q < \infty$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  die Ungleichung

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n : |(x, y)_2| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \quad \|x\|_p := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Darüber hinaus gilt die Ungleichung auch für  $p = 1, q = \infty$

**Lemma 1.19 (Young'sche Ungleichung)** Für  $p, q \in \mathbb{R}, 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{K} : |(x, y)| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}$$

**Lemma 1.20 (Minkowski-Ungleichung)** Für ein beliebiges  $p \in [1, \infty]$  gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n : \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

**Satz 1.21 (Banachscher Fixpunktsatz)** Sei  $(M, d)$  ein vollständiger, metrischer Raum und  $f : M \rightarrow M$  ist eine strenge Kontraktion, das heißt

$$\exists 0 < \alpha < 1 \forall x, y \in M : d(f(x), f(y)) < \alpha d(x, y)$$

Dann existiert ein eindeutiger Fixpunkt von  $f$ , das heißt es existiert ein eindeutiges  $x^* \in M : f(x^*) = x^*$

**Beweis Existenz:**

Wähle ein  $x_0 \in M$  beliebig, aber fest und definiere dann  $x_1 := f(x_0), x_2 := f(x_1), \dots$  Dann gilt für  $n \leq m$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(f(x_{n-1}), f(x_{m-1})) < \alpha d(x_{n-1}, x_{m-1}) \\ &= \alpha d(f(x_{n-2}), f(x_{m-2})) < \dots < \alpha^n d(x_0, x_{m-n}) \end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\begin{aligned} d(x_0, x_{m-n}) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n}) \\ &\leq d(x_0, x_1) + \alpha d(x_0, x_1) + \dots + \alpha^{m-n-1} d(x_0, x_1) \\ &= d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{m-n-1} \alpha^i \leq d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \\ &= \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \alpha} < \infty \\ \Rightarrow d(x_n, x_m) &\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Also ist  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folge. Da  $(M, d)$  vollständig ist existiert  $x^* \in M$ , sodass  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^*$ .  
 Zeige, dass  $x^*$  Fixpunkt von  $f$  ist:

$$\begin{aligned} 0 \leq d(x^*, f(x^*)) &\leq d(x^*, x_k) + d(x_k, f(x^*)) \\ &\leq d(x^*, x_k) + \alpha d(x_{k-1}, x^*) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x^*) = x^*$$

**Eindeutigkeit:** Angenommen  $\exists x' \in M, x' \neq x^* : f(x') = x'$ :

$$0 < d(x^*, x') = d(f(x^*), f(x')) < \alpha d(x^*, x') \Rightarrow \alpha > 1 \quad \square$$