Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2016/17

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. D. Vogel
Dr. M. Witte

Blatt 13
Freiwillige Abgabe: Donnerstag, 02.02.2017, 9.30 Uhr

Aufgabe 1. *(Basiswechsel)* Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^3$ und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass (v_1, v_2, v_3) eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ und dass (w_1, w_2) eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} v$$

bezüglich der Basen (v_1, v_2, v_3) von $\mathbb{R}^3$ und (w_1, w_2) von $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2. *(Äquivalenz und Ähnlichkeit)* Sei K ein Körper und m, n natürliche Zahlen.

(a) Zeigen Sie, dass Äquivalenz von Matrizen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der $m \times n$-Matrizen mit Einträgen aus K ist.

(b) Zeigen Sie, dass Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus K ist.

Aufgabe 3. *(Darstellungsmatrix einer idempotenten Abbildung)*
Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum der Dimension n und $\pi \in \mathrm{End}_K(V)$ eine idempotenter Endomorphismus (d. h. $\pi \circ \pi = \pi$). Zeigen Sie, dass eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V existiert, bezüglich der die Darstellungsmatrix von π die Gestalt

$$M^{v_1,\ldots,v_n}_{v_1,\ldots,v_n}(\pi) = \begin{pmatrix} \mathbf{E_r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

hat. Hierbei ist $r = \mathrm{Rang}(\pi)$, $\mathbf{E}_r$ die $r \times r$-Einheitsmatrix, und $\mathbf{0}$ bezeichnet jeweils eine Nullmatrix von geeignet zu bestimmender Größe.

Aufgabe 4. *(Homomorphismen auf dem Polynomring)*
Sei K ein Körper. Für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $\mathrm{Pol}_n(K)$ den Untervektorraum von $K[x]$ der Polynome vom Grad $\leq n$, d. h.

$$\mathrm{Pol}_n(K) = \{a_0 + \ldots + a_n x^n \mid a_0, \ldots, a_n \in K\}.$$

(a) Zeigen Sie: Die beiden Abbildungen

$$h_1 : \mathrm{Pol}_2(K) \to \mathrm{Pol}_3(K),\ f \mapsto (1-x)\cdot f, \qquad \text{und} \qquad h_2 : \mathrm{Pol}_3(K) \to \mathrm{Pol}_2(K),\ g \mapsto g',$$

sind Homomorphismen. Für ein beliebiges Polynom $g = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$ bezeichne hierbei g' die formale Ableitung $g' = b_1 + 2b_2x + 3b_3x^2$.

(b) Seien h_1, h_2 wie in (a). Bestimmen Sie die darstellende Matrix der linearen Abbildung $h = h_2 \circ h_1 : \mathrm{Pol}_2(K) \to \mathrm{Pol}_2(K)$ bezüglich der Basis $(1, x, x^2)$ von $\mathrm{Pol}_2(K)$. Ist h ein Isomorphismus?

Zusatzaufgabe 5. *(Inverse einer Matrix mit vielen Einsen)*
Seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen. Bestimmen Sie die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 1+\frac{1}{a_1} & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1+\frac{1}{a_2} & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1+\frac{1}{a_{n-1}} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1+\frac{1}{a_n} \end{pmatrix}.$$