Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2016/17

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. D. Vogel
Dr. M. Witte

Blatt 10
Abgabetermin: Donnerstag, 12.01.2017, 9.30 Uhr

Aufgabe 1. *(Matrizen und lineare Abbildungen)* Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

eine Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{R}$. Wir fassen die Elemente von $\mathbb{R}^3$ als Spaltenvektoren auf. Bestimmen Sie eine Basis von Kern und Bild des Endomorphismus

$$\widetilde{A} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad v \mapsto Av.$$

Aufgabe 2. *(Idempotente Abbildungen und komplementäre Unterräume)* Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit $f \circ f = f$.

(a) Zeigen Sie, dass $V = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$.

(b) Sei $v \in V \backslash \{0\}$ und $\lambda \in K$ mit $f(v) = \lambda v$. Beweisen Sie: $\lambda \in \{0, 1\}$.

Aufgabe 3. *(Affine Unterräume)* Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

(a) Sei die Charakteristik von K ungleich 2. Zeigen Sie: Eine Teilmenge $X \subset V$ ist genau dann ein affiner Unterraum, wenn mit $x, y \in X$ und $\lambda \in K$ auch $x + \lambda(y - x) \in X$ gilt (d. h. mit zwei Punkten $x, y \in X$ liegt auch jeder Punkt der Verbindungsgerade von x und y in X).

(b) Finden Sie eine Teilmenge $X \subset \mathbb{F}_2^2$, sodass mit $\lambda \in \mathbb{F}_2$ und $x, y \in X$ auch $x + \lambda(y - x) \in X$ gilt, jedoch X kein affiner Unterraum von $\mathbb{F}_2^2$ ist.

Aufgabe 4. *(Schnitt und Verbindungsraum)* Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und A, B affine Unterräume von V.

(a) Zeigen Sie, dass der Schnitt $A \cap B$ ein affiner Unterraum ist.

(b) Wir definieren den *Verbindungsraum* $A \vee B$ als den bezüglich Inklusion kleinsten affinen Unterraum von V, der A und B enthält. Sei $x_0 \in A \cup B \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass

$$A \vee B = x_0 + \operatorname{Lin}((x - x_0)_{x \in A \cup B}).$$

(c) Die *Dimension* $\dim_K A$ des affinen Unterraums A ist -1, falls $A = \emptyset$ und $\dim_K U$, falls $A = a + U$ für einen Untervektorraum $U \subseteq V$ und $a \in V$. Zeigen Sie: Ist $A \cap B = \emptyset$ und sowohl $A = a + U_A$ als auch $B = b + U_B$ nichtleer, mit $a, b \in V$ und Untervektorräumen U_A und U_B von V, so gilt

$$\dim_K A + \dim_K B = \dim_K A \vee B + \dim_K U_A \cap U_B - 1.$$

Ansonsten gilt

$$\dim_K A + \dim_K B = \dim_K A \vee B + \dim_K A \cap B.$$

Zusatzaufgabe 5. *(Die Weihnachtsaufgabe)* Der Nikolaus brütet gerade über den Abermillionen Wunschzetteln der Kinder, als Knecht Ruprecht hereinkommt. „Weißt Du, was mir auffällt?", fragt Nikolaus. „Egal, welche zwei Wunschzettel ich vergleiche: immer haben sie genau einen Wunsch gemeinsam; aber es gibt kein Geschenk, das von jedem Kind gewünscht wurde." – „Interessant", erwidert Knecht Ruprecht. „Das bedeutet, dass mindestens ebenso viele verschiedene Geschenke gewünscht wurden, wie es Kinder gibt."

Nikolaus schaut ihn verdutzt an, beginnt dann aber nachzuzählen, während sich Knecht Ruprecht eine Tasse Glühwein einschenkt und sie genüsslich austrinkt. „Stimmt", ruft Nikolaus schließlich, „wie bist Du denn darauf gekommen?"

„Ist doch ganz einfach", erklärt Knecht Ruprecht, unter dessen Pflichten neben der Züchtigung unartiger Kinder auch das Stellen von Aufgaben zur Linearen Algebra fällt. „Nummeriere die verschiedenen Geschenke einfach mal von 1 bis m und die Kinder von 1 bis n durch. Nun stell die folgende reelle $m \times n$-Bescherungsmatrix B auf, in der Du in der i-ten Zeile und j-ten Spalte eine 1 einträgst, wenn sich Kind j das Geschenk i wünscht, und sonst eine 0. Dann gilt

$$B^t B = \begin{pmatrix} r_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & r_2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & r_n \end{pmatrix},$$

wobei r_j die Anzahl der verschiedenen Geschenke ist, die Kind j auf seinem Wunschzettel stehen hat. Weiterhin folgt aus dem, was Du geschildert hast, dass alle $r_j > 1$ sind, und daher ist der Spaltenrang von $B^t B$ gleich n. Das geht aber nur, wenn der Spaltenrang von B gleich n ist, und daraus folgt schließlich $m \geq n$." Spricht's und geht zur Tür hinaus.

Nikolaus seufzt und nimmt einen großen Schluck Glühwein aus seiner Tasse. „Manchmal wünsche ich mir, er würde die Sachen ein wenig detaillierter erklären."

Ihr Auftrag, sollten Sie ihn annehmen, lautet: Helfen Sie dem Nikolaus! Beantworten Sie dazu folgende Fragen:

(a) Wieso gilt obige Darstellung für die Matrix $B^t B$?

(b) Weshalb gilt $r_j > 1$ für alle j?

(c) Warum gilt $\mathrm{Rang}(B^t B) = n$?

(d) Wie folgt daraus, dass $\mathrm{Rang}(B) = n$, und warum impliziert dies $m \geq n$?

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins neue Jahr!