

Lineare Algebra II (Vogel)

Robin Heinemann

5. Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

18 Eigenwerte	1
19 Dualraum	16
20 Bilinearformen	21

18 Eigenwerte

In diesem Abschnitt sei $n \in \mathbb{N}$, V ein K -VR und $\varphi \in \text{End}_K(V)$.

Frage: V endlichdim. Existiert eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V , sodass $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ eine Diagonalmatrix ist, das heißt

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$?

Für $i = 1, \dots, n$ wäre dann $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$

Definition 18.1 $\lambda \in K, v \in V$

- λ heißt Eigenwert von $\varphi \stackrel{\text{Def}}{\iff} \exists v \in V, v \neq 0 : \varphi(v) = \lambda v$
- v heißt Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \stackrel{\text{Def}}{\iff} v \neq 0 \wedge \varphi(v) = \lambda v$
- φ heißt diagonalisierbar $\stackrel{\text{Def}}{\iff} V$ besitzt eine Basis aus EV von φ

(Falls V endlichdimensional, ist die äquivalent zu: Es gibt eine Basis \mathcal{B} von V und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

)

Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit einer Matrix $A \in M(n \times n, K)$ sind über den Endomorphismus $\tilde{A} : K^n \rightarrow K^n$ definiert.

Bemerkung 18.2 $A \in M(n \times n, K)$. Dann sind äquivalent:

1. A ist diagonalisierbar.
2. Es gibt eine Basis von K^n aus Eigenvektoren von A

$$3. \text{ Es gibt ein } S \in \text{GL}(n, K), \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \text{ mit } SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

4. A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix

In diesem Fall steht in den Spalten von S^{-1} eine Basis des K^n aus EV von A , und für jede Matrix $A \in M(n \times n, K)$ mit der Eigenschaft, dass die Spalten von S^{-1} eine Basis des K^n aus EV von A bilden, dann ist SAS^{-1} eine Diagonalmatrix (mit den EW auf der Diagonalen.)

Beweis Äquivalenz: \ 1. \iff 2. Definition, 2. \iff 3. aus Basiswechselsatz (16.6), 3. \iff 4. aus Definition Ähnlichkeit (16.12)

$$\text{Zusatz: Sei } S \in \text{GL}(n, K) \text{ mit } SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies A(S^{-1}e_j) = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j.$$

Wegen $S^{-1} \in \text{GL}(n, K)$ ist $S^{-1}e_j \neq 0$, das heißt S^{-1} ist EV von A zum EW λ_j

Wegen $S^{-1} \in \text{GL}(n, K)$ ist $(S^{-1}e_1, \dots, S^{-1}e_n)$ eine Basis des K^n aus EV von A .

Sei $S \in \text{GL}(n, K)$, das heißt die Spalten von S^{-1} eine Basis des K^n aus EV von A bilden, das heißt für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ ist $AS^{-1}e_j = \lambda_j S^{-1}e_j$ für ein $\lambda_j \in K$.

$$\begin{aligned} \implies AS^{-1}e_j &= S^{-1}\lambda_j e_j = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j \implies SAS^{-1}e_j = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j, j = 1, \dots, n \\ \implies SAS^{-1} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 18.3

$K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$

1. $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ Es ist $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, das heißt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV von φ zum EW 1.

$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, also ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ EV von φ zum EW -1 . Somit:
 $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ ist eine Basis des \mathbb{R}^2 aus EV von φ , das heißt φ ist diagonalisierbar.

In Termen von Matrizen: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist diagonalisierbar, und mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ist dann ist $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Achtung: Das φ diagonalisierbar ist, heißt nicht, dass jeder Vektor aus $V = \mathbb{R}^2$ ein EV von φ ist, zum Beispiel ist $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ (= Drehung um $\frac{\pi}{2}$). hat keinen EW.
 Beweis dafür: später.

Ziel: Suche Kriterien für Diagonalisierbarkeit.

Bemerkung 18.4 v_1, \dots, v_m EV von φ zu paarweise verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$. Dann ist (v_1, \dots, v_m) linear unabhängig, insbesondere ist $m \leq \dim V$. Insbesondere gilt: ist V endlichdimensional, dann hat φ höchstens $\dim(V)$ Eigenwerte.

Beweis per Induktion nach m :

IA: $m = 1$: $v_1 \neq 0$, da v_1 EV $\implies (v_1)$ linear unabhängig.

IS: sei $m \geq 2$, und die Aussage für $m - 1$ bewiesen.

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ mit $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m = 0$. Außerdem: $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_1 v_m = 0$

$$\implies \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \dots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1)v_m = 0$$

$$\alpha_2 \lambda_2 - \lambda_1 = \dots = \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1) = 0$$

$$\implies \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$$

$$\implies \alpha_1 v_1 = 0 \implies \alpha_1 = 0 \implies (v_1, \dots, v_m) \text{ linear unabhängig} \quad \square$$

Folgerung 18.5 V endlichdimensional, φ habe n paarweise verschiedene EW, wobei $n = \dim V$. Dann ist φ diagonalisierbar.

Beweis Für $i = 1, \dots, n$ sei v_i ein EV von φ zum EW $\lambda_i \implies (v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig, wegen $n = \dim V$ ist (v_1, \dots, v_n) eine Basis von V aus EV von φ \square

Definition 18.6 $\lambda \in K$

$\text{Eig}(\varphi, \lambda) := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ heißt der Eigenraum von φ bezüglich λ .

$\mu_{\text{geo}}(\varphi, \lambda) := \dim \text{Eig}(\varphi, \lambda)$ heißt die geometrische Vielfachheit von λ .

Für $A \in M(n \times n, K)$ setzen wir $\text{Eig}(A, \lambda) := \text{Eig}(\tilde{A}, \lambda)$, $\mu_{\text{geo}}(A, \lambda) := \mu_{\text{geo}}(\tilde{A}, \lambda)$.

Bemerkung 18.7 $\lambda \in K$. Dann gilt:

1. $\text{Eig}(\varphi, \lambda)$ ist ein UVR von V .
2. λ ist EW von $\varphi \iff \text{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\}$.
3. $\text{Eig}(\varphi, \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der zu λ gehörenden EV von φ .
4. $\text{Eig}(\varphi, \lambda) = \ker(\lambda \text{id}_V - \varphi)$, insbesondere ist $\text{Eig}(A, \lambda) = \ker(\lambda E_m - \varphi) = \text{Lös}(\lambda E_n - A, 0)$ für $A \in M(n \times n, K)$
5. Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann $\text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \cap \text{Eig}(\varphi, \lambda_2) = \{0\}$

Beweis 4. Es ist $v \in \text{Eig}(\varphi, \lambda) \iff \varphi(v) = \lambda v \iff \lambda v - \varphi(v) = 0 \iff (\lambda \text{id}_V - \varphi)(v) = 0 \iff v \in \ker(\lambda \text{id}_V - \varphi)$ Es ist $\text{Eig}(A, \lambda) = \ker(\lambda \text{id}_{K^n} - \tilde{A}) = \ker(\widetilde{\lambda E_n - A}) = \ker(\lambda E_n - A) = \text{Lös}(\lambda E_n - A, 0)$

1. aus 4.
2. λ EW von $\varphi \iff \exists v \in V, v \neq 0$ mit $\varphi(v) = \lambda v \iff \text{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\}$.
3. klar.
5. Sei $\lambda_1 \neq \lambda_2, v \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \cap \text{Eig}(\varphi, \lambda_2) \implies \lambda_1 v = \varphi(v) = \lambda_2 v \implies \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v = 0 \implies v = 0$ \square

Bemerkung 18.8 V endlichdimensional, $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent:

1. λ ist EW von φ
2. $\det(\lambda \text{id}_V - \varphi) = 0$

Beweis 1. $\iff \text{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\} \implies \ker(\lambda \text{id}_V - \varphi) \neq \{0\} \implies \lambda \text{id}_V - \varphi$ nicht injektiv $\implies \lambda \text{id}_V - \varphi$ kein Isomorphismus $\implies \det(\lambda \text{id}_V - \varphi) = 0$. \square

Definition 18.9 K Körper, $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$

$$\chi_A^{\text{char}} := \det(tE_n - A) = \det \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ -a_{n1} & \dots & & t - a_{nn} \end{pmatrix} \in K[t]$$

heißt das charakteristische Polynom von A .

Anmerkung Hierfür nötig: Determinanten von Matrizen mit Einträgen in einem kommutativen Ring.

In manchen Büchern $\chi_A^{\text{char}} = \det(A - tE_n)$ (schlecht)

Beispiel 18.10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$$

$$\implies A\chi_a^{char} = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ -3 & t-4 \end{pmatrix} = (t-1)(t-4) - 6 = t^2 - 5t - 2$$

Bemerkung 18.11 $A, B \in M(n \times n, K), A \approx B$.Dann ist $\chi_A^{char} = \chi_B^{char}$.**Beweis** $A \approx B \implies \exists S \in GL(n, K) : B = SAS^{-1}$

$$\begin{aligned} \implies tE_n - B &= tE_n - SAS^{-1} = SS^{-1}tE_n - SAS^{-1} = StE_nS^{-1} - SAS^{-1} = S(tE_n - A)S^{-1} \\ \implies \chi_B^{char} &= \det(tE_n - B) = \det(S(tE_n - A)S^{-1}) = \det(S) \det(tE_n - A) \det(S^{-1}) = \\ &\quad \underbrace{\det(S) \det(S)^{-1}}_{=1} \det(tE_n - A) = \chi_A^{char} \quad \square \end{aligned}$$

Definition 18.12 V endlichdim, $n = \dim V$, \mathcal{B} Basis von V , $\varphi \in \text{End}(V)$, $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$

$$\chi_{\varphi}^{char} := \chi_A^{char} = \det(tE_n - A) \in K[t]$$

heißt das charakteristische Polynom von φ .**Anmerkung** χ_{φ}^{char} ist wohldefiniert, dann: Ist \mathcal{B}' eine weitere Basis von V , $A' = M_{\mathcal{B}'}(\varphi)$, dann ist $A \approx A'$ und deshalb nach 18.11: $\chi_A^{char} = \chi_{A'}^{char}$.**Satz 18.13** V endlichdimensional, $n = \dim V$. Dann gilt:

1. χ_{φ}^{char} ist ein normiertes Polynom von Grad n :

$$\chi_{\varphi}^{char} = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_0$$

mit $c_0 = (-1)^n \det \varphi$, $c_{n-1} = -^{(\varphi)}$ (vgl. Übung zur Spur)

2. Die Nullstellen von χ_{φ}^{char} sind genau die EW von φ :

$$\lambda \in K \text{ ist EW von } \varphi \iff \chi_{\varphi}^{char} \lambda = 0$$

Beweis Sei \mathcal{B} eine Basis von V , $A := M_{\mathcal{B}}(\varphi) \in M(n \times n, K)$

- 1.

$$\begin{aligned} \chi_{\varphi}^{char} &= \chi_A^{char} = \det \underbrace{(tE_n - A)}_{=: B = (B_{ij})} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) B_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot B_{n,\sigma(n)} \\ &= (t - a_{11} \cdot \dots \cdot (t - a_{nn})) + \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n \setminus \{\text{id}\}} \text{sgn}(\sigma) B_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot B_{n,\sigma(n)}}_{:=g} \end{aligned}$$

Für $\sigma \in S_n \setminus \{\text{id}\}$ treten in $B_{1,\sigma(1)}, \dots, B_{n,\sigma(n)}$ höchstens $n-2$ Diagonalelemente auf, also $\deg(g) \leq n-2$.

$$\implies \chi_\varphi^{\text{char}} = t^n - (a_{11} + \dots + a_{nn})t^{n-1} + \text{Terme kleineren Grades}$$

insbesondere:

$$c_{n-1} = -(a_{11} + \dots + a_{nn}) = -A = -\varphi$$

Es ist

$$c_0 = \chi_\varphi^{\text{char}}(0) = (\det(tE_n - A))(0) = \det(0E_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

2. Aus $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ folgt $\lambda E_n - A = M_{\mathcal{B}}(\lambda \text{id}_V - \varphi)$. Also:

$$\begin{aligned} \chi_\varphi^{\text{char}}(\lambda) = 0 &\iff (\det(tE_n - A))(\lambda) = 0 \implies \det(\lambda E_n - A) = 0 \iff \det(M_{\mathcal{B}}(\lambda \text{id}_V - \varphi)) = 0 \\ &\implies \det(\lambda \text{id}_V - \varphi) = 0 \iff \lambda \text{ ist EW von } \varphi \quad \square \end{aligned}$$

Definition 18.14 $\lambda \in K$

$$\mu_{\text{alg}}(\varphi, \lambda) := \mu(\chi_\varphi^{\text{char}}, \lambda)$$

heißt die **algebraische Vielfachheit**

Beispiel 18.15

$$1. \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \text{ Es ist } \chi_\varphi^{\text{char}} = \chi_A^{\text{char}} = \det \begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{pmatrix} =$$

$$t^2 - 1 = (t-1)(t+1) \in \mathbb{R}[t] \implies \text{EW von } \varphi : 1, -1.$$

$$\text{Es ist } \mu_{\text{alg}}(\varphi, 1) = 1, \mu_{\text{alg}}(\varphi, -1) = 1$$

$$\text{Eig}(\varphi, 1) = \text{Eig}(A, 1) = \text{Lös}(E_2 - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{also } \mu_{\text{geo}}(\varphi, 1) = \dim \text{Eig}(\varphi, 1) = 1$$

$$\text{Eig}(\varphi, -1) = \text{Eig}(A, -1) = \text{Lös}((-1) \cdot E_2 - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{also } \mu_{\text{geo}}(\varphi, -1) = 1.$$

$$2. \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \text{ Es ist } \chi_\varphi^{\text{char}} = \chi_A^{\text{char}} = \det \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} =$$

$$t^2 + 1, \chi_\varphi^{\text{char}} \text{ hat keine NS in } \mathbb{R} \implies \varphi \text{ hat keine EW.}$$

$$3. \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \text{ Es ist } \chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix} = (t-1)^2 \Rightarrow 1 \text{ ist einziger EW von } \varphi, \text{ es ist } \mu_{alg}(\varphi, 1) = 2$$

$$\text{Eig}(\varphi, 1) = \text{Eig}(A, 1) = \text{Lös}(1E_2 - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \mu_{geo}(\varphi, 1) = 1. \Rightarrow \varphi \text{ ist nicht diagonalisierbar.}$$

Satz 18.16 V endlichdimensional, $n = \dim V$

1. Ist φ diagonalisierbar, dann ist $\chi_\varphi^{char} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, nicht notwendig verschieden, das heißt χ_φ^{char} zerfällt in Linearfaktoren.
2. Ist $\chi_\varphi^{char} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n)$ mit paarweise verschiedene $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, dann ist φ diagonalisierbar.

Beweis 1. Sei φ diagonalisierbar $\rightarrow V$ besitzt Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ aus EV zu EW $\lambda_i \in K$.

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_\varphi^{char} = \det \begin{pmatrix} t - \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t - \lambda_n \end{pmatrix} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n)$$

2. Aus $\chi_\varphi^{char} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ paarweise verschieden $\Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind paarweise verschiedene EW von $\varphi \Rightarrow \varphi$ diagonalisierbar. \square

Bemerkung 18.17 V endlichdimensional, $n = \dim V$, λ EW von φ . Dann gilt:

$$1 \leq \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \leq \mu_{alg}(\varphi, \lambda)$$

Beweis Sei (v_1, \dots, v_s) eine Basis von $\text{Eig}(\varphi, \lambda) \Rightarrow s = \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \geq 1$, da λ EW von φ . Nach Basiserweiterungssatz $\exists v_{s+1}, \dots, v_n \in V$, sodass $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n)$ eine Basis von V ist.

$$\begin{aligned} \Rightarrow A := A_{\mathcal{B}}(\varphi) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & \lambda & & & * \\ \hline & & 0 & & & A' \end{array} \right), A' \in M((n-s) \times (n-s), K) \\ \Rightarrow \chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} &= \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} t - \lambda & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & t - \lambda & & & * \\ \hline & & 0 & & & tE_{n-s} - A' \end{array} \right) = (t - \lambda)^s \det(tE_{n-s} - A') = (t - \lambda)^s \chi_{A'}^{char} \\ \Rightarrow \mu_{geo}(\varphi, \lambda) &= s \leq \mu(\chi_\varphi^{char}, \lambda) = \mu_{alg}(\varphi, \lambda) \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 18.18 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ paarweise verschiedene EW von φ . Dann gilt:

$$\text{Eig}(\varphi, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \text{Eig}(\varphi, \lambda_j) = \{0\} \forall i \in \{1, \dots, r\}$$

Beweis Sei $i \in \{1, \dots, r\}$. Annahme: $\exists v_i \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \text{Eig}(\varphi, \lambda_j) : v_i \neq 0$.

$$\implies \exists v_j \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_j), j = 1, \dots, r, j \neq i : v_i = v_1 + \dots + v_{i-1} + v_{i+1} + \dots + v_r$$

Setze $J := \{j \in \{1, \dots, r\}, j \neq i \mid v_j \neq 0\} = \{j_1, \dots, j_s\}$

$$\implies v_i = v_{j_1} + \dots + v_{j_s} \implies v_{j_1} + \dots + v_{j_s} + (-1)v_i = 0 \implies (v_{j_1}, \dots, v_{j_s}, v_i) \text{ linear abhängig} \nmid$$

□

Satz 18.19 V endlichdimensional. Dann sind äquivalent:

1. φ diagonalisierbar
2. χ_φ^{char} zerfällt in Linearfaktoren und $\mu_{alg}(\varphi, \lambda) = \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \forall$ EW von φ .
3. Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen EW von φ , dann ist

$$V = \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Eig}(\varphi, \lambda_k)$$

In diesem Fall erhält man eine Basis von V aus EV von φ , indem man Basen von $\text{Eig}(\varphi, \lambda_i), i = 1, \dots, k$ zusammenfügt.

Beweis 1. \implies 2. Sei φ diagonalisierbar. $\implies \exists$ Basis \mathcal{B} von V aus EV von φ . Wir ordnen die EV in \mathcal{B} den verschiedenen EW von φ zu und gelangen so zu Familien $\mathcal{B}_i := (v_1^{(i)}, \dots, v_{s_i}^{(i)})$ von linear unabhängigen im $\text{Eig}(\varphi, \lambda_i), i = 1, \dots, k$

- a) Behauptung: \mathcal{B}_i ist eine Basis von $\text{Eig}(\varphi, \lambda_i)$, denn gezeigt: \mathcal{B}_i ist ein ES von $\text{Eig}(\varphi, \lambda_i)$.
Sei $v \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_i) \leq V$

$$\implies \exists \lambda^{(j)} \in K : v = \sum_{j=1}^k \left(\lambda_1^{(j)} v_1^{(j)} + \dots + \lambda_{s_j}^{(j)} v_{s_j}^{(j)} \right)$$

$$\implies v - \underbrace{\left(\lambda_1^{(i)} v_1^{(i)} + \dots + \lambda_{s_i}^{(i)} v_{s_i}^{(i)} \right)}_{\in \text{Eig}(\varphi, \lambda_i)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \left(\lambda_1^{(j)} v_1^{(j)} + \dots + \lambda_{s_j}^{(j)} v_{s_j}^{(j)} \right) \in \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \text{Eig}(\varphi, \lambda_j)$$

$$\implies v = \lambda_1^{(i)} v_1^{(i)} + \dots + \lambda_{s_i}^{(i)} v_{s_i}^{(i)}$$

a) Nach 1. ist

$$\mu_{geo}(\varphi, \lambda_1) + \cdots + \mu_{geo}(\varphi, \lambda_k) = s_1 + \cdots + s_k = \dim V$$

χ_φ^{char} zerfällt nach 18.16 in Linearfaktoren, somit

$$\mu_{alg}(\varphi, \lambda_1) + \cdots + \mu_{alg}(\varphi, \lambda_k) = \deg(\chi_\varphi^{char}) = \dim V$$

Wegen $\mu_{geo}(\varphi, \lambda_i) \leq \mu_{alg}(\varphi, \lambda_i)$ für $i = 1, \dots, k$ folgt: $\mu_{geo}(\varphi, \lambda_i) = \mu_{alg}(\varphi, \lambda_i)$ für $i = 1, \dots, k$.

2. \implies 3. Es gelte 2. Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen EW von φ . Wir setzen $W := \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) + \cdots + \text{Eig}(\varphi, \lambda_k)$. Wegen 18.18 ist

$$W = \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \text{Eig}(\varphi, \lambda_k)$$

$$\begin{aligned} \implies \dim W &= \dim \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) + \cdots + \dim \text{Eig}(\varphi, \lambda_k) \\ &= \mu_{geo}(\varphi, \lambda_1) + \cdots + \mu_{geo}(\varphi, \lambda_k) \\ &= \mu_{alg}(\varphi, \lambda_1) + \cdots + \mu_{alg}(\varphi, \lambda_k) = \deg(\chi_\varphi^{char}) \\ &= \dim V \end{aligned}$$

$$\implies W = V$$

3. \implies 1. Es gelte 3. Sei $\mathcal{B} = (v_1^{(i)}, \dots, v_{s_i}^{(i)})$ eine Basis von $\text{Eig} \varphi, \lambda_i \implies \mathcal{B} := (v_1^{(1)}, \dots, v_{s_1}^{(1)}, \dots, v_1^{(k)}, v_{s_k}^{(k)})$ ist eine Basis von V aus EV von $\varphi \implies \varphi$ diagonalisierbar.
□

Anmerkung In der Praxis ist es in der Regel schwierig festzustellen, ob χ_φ^{char} in Linearfaktoren zerfällt oder die NS von χ_φ^{char} zu bestimmen. Für Polynome von Grad ≥ 5 existiert keine Lösungsformel zur Bestimmung der NS. (Algebra 1 Vorlesung), die NS müssen numerisch bestimmt werden.

Beispiel 18.20

1. In 18.15.3 ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist $\chi_A^{char} = (t-1)^2$, $\mu_{geo}(A, 1) = 1 < \mu_{alg}(A, 1) = 2 \implies A$ nicht diagonalisierbar.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$

$$\chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t-2 & 1 & 1 \\ 6 & t-1 & -1 \\ -3 & 1 & t+2 \end{pmatrix} = t^3 - t^2 - 5t - 3 = (t+1)^2(t-3)$$

EW von A : $-1, 3, \mu_{alg} = (A, -1) = 2, \mu_{alg}(A, 3) = 1$

$$\text{Eig}(A, -1) = \text{Lös}(-E_n - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mu_{geo}(A, -1) = 2 = \mu_{alg}(A, -1).$$

$$\text{Eig}(A, 3) = \text{Lös}(3E_n - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mu_{geo}(A, 3) = 1 = \mu_{alg}(A, 3). \text{ Also ist } A \text{ diagonalisierbar, } \mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

ist eine Basis des \mathbb{R}^3 aus EV von A ,

$$M_{\mathcal{B}}(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$$

Mit

$$S := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, SAS^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$$

Anmerkung Ist $f = a_m t^m + \dots + a_1 t + a_0 \in K[t]$, dann können wir in f :

- Endomorphismen $\varphi \in \text{End}_K(V)$ einsetzen durch die Regel

$$f(\varphi) := a_m \varphi^m + \dots + a_1 \varphi + a_0 \text{id}_V \in \text{End}_K(V)$$

wobei $\varphi^k := \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{k\text{-mal}}$

- Matrizen $A \in M(n \times n, K)$ einsetzen durch die Regel

$$f(A) := a_m A^m + \dots + a_1 A + a_0 E_n \in M(n \times n, K)$$

Für $f, g \in K[t], \varphi \in \text{End}_K(V)$ ist $f(\varphi) \circ g(\varphi) = (fg)(\varphi) = (gf)(\varphi) = g(\varphi) \circ f(\varphi)$, analog für Matrizen.

Satz 18.21 (Satz von Cayley-Hamilton) V endlichdimensional. Dann gilt: $\chi_{\varphi}^{\text{char}}(\varphi) = 0$. Insbesondere gilt für alle $A \in M(n \times n, K)$: $\chi_A^{\text{char}}(A) = 0$.

Beweis 1. Es genügt zu zeigen, dass $\chi_A^{char} = 0$ für alle $A \in M(n \times n, K)$, denn:

Ist $\varphi \in \text{End}_K(V)$, \mathcal{B} Basis von V , $A = A_{\mathcal{B}}$, $\chi_{\varphi}^{char} = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0 = \chi_A^{char} \in K[t]$

$$\begin{aligned} \implies 0 &= \chi_A^{char}(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0E_n = M_{\mathcal{B}}(\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \dots + a_0 \text{id}_V) \\ &= M_{\mathcal{B}}(\chi_{\varphi}^{char}(\varphi)) \end{aligned}$$

$$\implies \chi_{\varphi}^{char}(\varphi) = 0$$

2. Sei $A \in M(n \times n, K)$. Wir setzen $D := (tE_n - A)^{\#} \in M(n \times n, K[t])$

$$\implies D(tE_n - A) = \det(tE_n - A)E_n = \chi_A^{char} E_n$$

Sei $D = \sum_{i=0}^{n-1} D_i t^i$ mit $D_i \in M(n \times n, K)$, $\chi_A^{char} = \sum_{i=0}^n a_i t^i$ mit $a_i \in K$

$$\begin{aligned} \implies \sum_{i=0}^n a_i E_n t^i &= \left(\sum_{i=0}^n a_i t^i \right) E_n = \chi_A^{char} E_n = D(tE_n - A) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} D_i t^i \right) (tE_n - A) = \sum_{i=0}^{n-1} D_i t^{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} D_i A t^i \\ &= \sum_{i=0}^n (D_{i-1} - D_i A) t^i \quad (\text{mit } D_{-1} := 0, D_n := 0) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert: $a_i A_i = D_{i-1} - D_i A$ für $i = 0, \dots, n$

$$\begin{aligned} \chi_A^{char} &= \sum_{i=0}^n a_i A_i = \sum_{i=0}^n (a_i E_n) A^i = \sum_{i=0}^n (D_{i-1} - D_i A) A^i \\ &= (D_{-1} - D_0 A) + (D_0 - D_1 A) A + \dots + (D_{n-1} - D_n A) A^n \\ &= D_{-1} - D_n A^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad \square$$

Anmerkung Der „Beweis“

$$\chi_A(A) = (\det(tE_n - A))(A) = \det(AE_n - A) = \det(A - A) = \det(0) = 0$$

funktioniert nicht, denn:

$$\underbrace{\underbrace{(\det(tE_n - A))(A)}_{\in K[t]}}_{\in M(n \times n, K)} \quad \underbrace{\underbrace{\det(AE_n - A)}_{\in M(n \times n, K)}}_{\in K}$$

Satz+Definition 18.22 V endlichdimensional, $I := \{f \in K[t] \mid f(\varphi) = 0\}$. Dann gilt:

1. Es gibt ein eindeutig bestimmtes, normiertes Polynom $\chi_\varphi^{min} \in K[t]$, sodass

$$I = \chi_\varphi^{min} K[t] := \{\chi_\varphi^{min} q \mid q \in K[t]\}$$

χ_φ^{min} heißt das **Minimalpolynom** von φ . χ_φ^{min} ist das eindeutig bestimmte normierte Polynom kleinsten Grades mit $f(\varphi) = 0$.

2. $\chi_\varphi^{mit} \mid \chi_\varphi^{char}$, das heißt $\exists q \in K[t] : \chi_\varphi^{char} = q \cdot \chi_\varphi^{min}$

Analog konstruiert man für $A \in M(n \times n, K)$, das Minimalpolynom χ_A^{min} . Es ist $\chi_A^{min} = \chi_{\tilde{A}}^{min}$.

Beweis 1. Existenz: Wegen Satz von Cayley-Hamilton ist $\chi_\varphi^{char}(\varphi) = 0$. Somit ist $\chi_\varphi^{char} \in I$, insbesondere $I \neq \emptyset$.

$\deg(f) \mid f \in I, f \neq 0$ ist eine nichtleere Teilmenge von \mathbb{N}_0 , hat somit ein minimales Element. $\implies \exists g \in I, g \neq 0 : \deg(g)$ minimal in $I \setminus \{0\}$ ist. Wir setzen

$$\chi_\varphi^{min} := \frac{1}{l(g)} g \implies \chi_\varphi^{min} \text{ normiert}$$

und es ist

$$\chi_\varphi^{min}(\varphi) = \frac{1}{l(g)} g(\varphi) = 0$$

das heißt $\chi_\varphi^{min} \in I$.

Behauptung: $I = \chi_\varphi^{min} K[t]$, denn:

„ \supseteq “ Für $q \in K[t]$ ist $(\chi_\varphi^{min} q)(\varphi) = \underbrace{\chi_\varphi^{min}(\varphi)}_{=0} \cdot g(\varphi) = 0$, das heißt $\chi_\varphi^{min} q \in I$.

„ \subseteq “ Sei $f \in I \implies \exists q, r \in K[t] : f = q\chi_\varphi^{min} + r, \deg(r) < \deg(\chi_\varphi^{min})$

$$\implies 0 = f(\varphi) = (q\chi_\varphi^{min} + r)(\varphi) = q(\varphi) \cdot \chi_\varphi^{min}(\varphi) + r(\varphi) = r(\varphi) \implies r \in I$$

Wegen $\deg(r) < \deg(\chi_\varphi^{min})$ und der Minimalität des Grades von χ_φ^{min} in $I \setminus \{0\}$ folgt $r = 0 \implies f = q\chi_\varphi^{min}$

Eindeutigkeit: Sei $\chi \in K[t]$ ein weiteres Polynom mit $I = \chi K[t] = \chi_\varphi^{min} K[t]$

$$\implies \chi = \chi \cdot 1 \in I = \chi_\varphi^{min} K[t] \implies \exists q \in K[t] : \chi = \chi_\varphi^{min} q$$

Analog $\exists p \in K[t] : \chi_\varphi^{min} = \chi p$

$$\implies \chi_\varphi^{min} = \chi p = \chi_\varphi^{min} q p \implies p q = 1 \implies p, q \in K^*$$

Wegen χ, χ_φ^{min} normiert folgt $p = q = 1$, also $\chi = \chi_\varphi^{min}$

2. Wegen $\chi_\varphi^{char}(\varphi) = 0$ nach Satz von Cayley-Hamilton folgt $\chi_\varphi^{char} \in I$.

$$\implies \exists q \in K[t] : \chi_\varphi^{char} = q\chi_\varphi^{min}$$

das heißt $\chi_\varphi^{min} \mid \chi_\varphi^{char}$

□

Bemerkung 18.23 V endlichdimensional, $\lambda \in K$. Dann gilt:

$$\chi_{\varphi}^{char}(\lambda) = 0 \iff \chi_{\varphi}^{min}(\lambda) = 0$$

Insbesondere haben χ_{φ}^{char} und χ_{φ}^{min} dieselben NS.

Beweis „ \Leftarrow “ Sei $\chi_{\varphi}^{min}(\lambda) = 0$. Nach 18.22 $\exists q \in K[t]$ mit $\chi_{\varphi}^{char} = q\chi_{\varphi}^{min}$

$$\implies \chi_{\varphi}^{char}(\lambda) = q(\lambda) \underbrace{\chi_{\varphi}^{min}(\lambda)} = 0$$

„ \implies “ Sei $\chi_{\varphi}^{char}(\lambda) = 0 \implies \lambda$ ist EW von φ , sei $v \in V$ EV zum EW λ . Sei $\chi_{\varphi}^{min} = t^r + a_{r-1}t^{r-1} + \dots + a_1t + a_0$

$$\begin{aligned} \implies 0 &= (\chi_{\varphi}^{min}(\varphi))(v) = (\varphi^r + a_{r-1}\varphi^{r-1} + \dots + a_1\varphi + a_0 \text{id}_V)(v) \\ &= \lambda^r v + a_{r-1}\lambda^{r-1}v + \dots + a_1\lambda v + a_0v \\ &= \underbrace{(\lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)}_{=\chi_{\varphi}^{min}(\lambda)} v \end{aligned}$$

$$\implies \chi_{\varphi}^{min}(\lambda) = 0. \quad \square$$

Beispiel 18.24

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{Q})$, $\chi_A^{char} = (t-1)^2$ Wegen 18.22, 18.23 gilt: χ_A^{min} normiert, $\chi_A^{min} \mid \chi_A^{char}$, $\chi_A^{char}(1) = 0 \implies \chi_A^{min} \in \{t-1, (t-1)^2\}$ Wegen $A - E_2 = 0$ ist $\chi_A^{min} = t-1$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{Q}) \implies \chi_A^{char} = (t-1)(t+1) \implies \chi_A^{min} = (t-1)(t+1)$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$

$$\implies \chi_A^{char} = (t+1)^2(t-3) \implies \chi_A^{min} = \{(t+1)(t-3), (t+1)^2(t-3)\}$$

Es ist $(A + E_n)(A - 3E_n) \neq 0$, also ist $\chi_A^{min} = (t+1)^2(t-3)$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \implies \chi_A^{char} = (t+1)^2(t-3)$

$$\chi_A^{min} \in \{(t+1)(t-3), (t+1)^2(t-3)\}$$

Es ist $(A + E_n)(A - 3E_n) = 0 \implies \chi_A^{min} = (t+1)(t-3)$

Satz 18.25 V endlichdimensional. Dann sind äquivalent:

1. φ diagonalisierbar
2. Das Minimalpolynom χ_φ^{\min} zerfällt in Linearfaktoren und besitzt nur einfache NS, das heißt $\chi_\varphi^{\min} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r)$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$

Beweis 1. \implies 2. Sei φ diagonalisierbar, seinen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen EW von φ . Sei $v \in V$. Da φ diagonalisierbar, ist $V = \bigoplus_{i=1}^r \text{Eig}(\varphi, \lambda_i)$ nach 18.19, das heißt es existieren $v_i \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_i), i = 1, \dots, r$ mit $v = v_1 + \dots + v_r$

$$\begin{aligned} \implies (\varphi - \lambda_r \text{id}_V)(V) &= \varphi(v_1) + \dots + \varphi(v_r) - \lambda_r v_1 - \dots - \lambda_r v_r \\ &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r - \lambda_r v_1 - \dots - \lambda_r v_r \\ &= (\lambda_1 - \lambda_r) v_1 + \dots + (\lambda_{r-1} - \lambda_r) v_{r-1} \\ &\in \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Eig}(\varphi, \lambda_{r-1}) \end{aligned}$$

analog:

$$(\varphi - \lambda_{r-1} \text{id}_V) \circ (\varphi - \lambda_r \text{id}_V)(v) \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Eig}(\varphi, \lambda_{r-2})$$

Induktiv erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \circ (\varphi - \lambda_2 \text{id}_V) \circ \dots \circ (\varphi - \lambda_r \text{id}_V)(V) \\ \implies 0 &= (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \circ \dots \circ (\varphi - \lambda_r \text{id}_V) \\ \implies 0 &= ((t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r))(\varphi) \end{aligned}$$

\implies Es existiert $g \in K[t]$ mit $(t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r) = g \chi_\varphi^{\min}$. Wegen $\chi_\varphi^{\min}(\lambda_1) = \dots = \chi_\varphi^{\min}(\lambda_r) = 0$ nach 18.23 existiert $h \in K[t]$ mit

$$\chi_\varphi^{\min} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r) h = g \chi_\varphi^{\min} h = g h \chi_\varphi^{\min} \implies g h = 1$$

$$\implies g, h \in K^*, \chi_\varphi^{\min} \text{ normiert} \implies g = h = 1 \implies \chi_\varphi^{\min} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r)$$

2. \implies 1. Sei $\chi_\varphi^{\min} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r)$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ paarweise verschieden. Nach 18.23 sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die EW von φ . Beweis der Behauptung per Induktion nach $n := \dim V$

IA: $n = 1$ klar

IS: Sei $n > 1$, die Behauptung sei für $1, \dots, n - 1$ gezeigt.

- a) Behauptung: $V = \ker(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \oplus \text{im}(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)$, denn: Nach 7.6 $\exists v, s \in K[t]$ mit

$$(t - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r) = q(t - \lambda_1) + s, \deg(s) < \deg(t - \lambda_1) = 1$$

das heißt s ist konstantes Polynom. Wegen

$$s(\lambda_1) = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda_1 - \lambda_r) - \underbrace{q(\lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_1)}_{=0} \neq 0$$

das heißt $s \in K^*$. Einsetzen von φ liefert:

$$(\varphi - \lambda_2 \text{id}_V) \circ \cdots \circ (\varphi - \lambda_r \text{id}_V) = q(\varphi) \circ (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) + s \text{id}_V$$

$\implies \forall v \in V$ ist

$$\begin{aligned} sv &= (\varphi - \lambda_2 \text{id}_V) \circ \cdots \circ (\varphi - \lambda_r \text{id}_V)(v) - q(\varphi) \circ (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(v) \\ \implies v &= \frac{1}{s} \underbrace{(\varphi - \lambda_2 \text{id}_V) \circ \cdots \circ (\varphi - \lambda_r \text{id}_V)(v)}_{=:u} - \underbrace{q(\varphi) \circ (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(v)}_{=:w} \\ (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(u) &= \frac{1}{s} (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \circ \cdots \circ (\varphi - \lambda_r \text{id}_V)(v) = \frac{1}{s} \underbrace{\chi_\varphi^{\min}(\varphi)(v)}_{=0} = 0 \\ \implies n &\in \ker(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \\ w &= \frac{1}{s} q(\varphi) \circ (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(v) = \frac{1}{s} ((\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \circ q(\varphi))(v) \in \text{im}(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \\ \implies V &= \ker(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) + \text{im}(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \end{aligned}$$

Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen ist

$$\dim \ker(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) + \dim \text{im}(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) = \dim V$$

\implies Summe ist direkt \implies Behauptung.

b) Wir setzen $W := \text{im}(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)$, dann ist

$$V = \ker(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \oplus W = \underbrace{\text{Eig}(\varphi, \lambda_1)}_{\neq 0} \oplus W$$

$\implies \dim W < \dim V$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \varphi \circ (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) &= \varphi \circ \varphi - \lambda_1 \varphi = (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \circ \varphi \\ \implies \varphi(W) &= \varphi((\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(V)) = (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(\varphi(V)) \leq (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(V) = W \end{aligned}$$

Wir betrachten die Abbildung $\psi := \varphi|_W^W : W \rightarrow W$. Sei $\chi_\varphi^{\min} = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$. $\implies \forall w \in W$ ist

$$\begin{aligned} \chi_\varphi^{\min}(\psi)(w) &= (\psi^n + a_{n-1}\psi^{n-1} + \cdots + a_0 \text{id}_V)(w) \\ &= \psi^n(w) + a_{n-1}\psi^{n-1}(w) + \cdots + a_0 w \\ &= \varphi^n(w) + a_{n-1}\varphi^{n-1}(w) + \cdots + a_0 w \\ &= (\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \cdots + a_0 \text{id}_V)(w) \\ &= \underbrace{(\chi_\varphi^{\min}(\varphi))}_{=0}(w) = 0 \end{aligned}$$

$$\implies \chi_\varphi^{\min} \psi = 0 \implies \chi_\psi^{\min} \mid \chi_\varphi^{\min} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r)$$

$\implies \chi_\psi^{min}$ zerfällt in Linearfaktoren und besitzt nur einfache Nullstellen. $\implies \psi$ diagonalisierbar, das heißt es existiert eine Basis von W aus EV zu $\psi = \varphi|_W^W$. Wegen $V = \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus W$ existiert nach 11.8 eine Basis von V aus EV zu φ , das heißt φ ist diagonalisierbar. \square

Beispiel 18.2 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$. Es ist $\chi_A^{min} = (t+1)^2(t-3) \implies A$ ist nicht diagonalisierbar.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$. Es ist $\chi_A^{min} = (t+1)(t-3) \implies A$ ist diagonalisierbar.

19 Dualraum

In diesem Abschnitt sei V ein K Vektorraum.

Definition 19.1 (Dualraum)

$$V^* := \text{Hom}_K(V, K) = \{\varphi : V \rightarrow K \mid \varphi \text{ linear}\}$$

heißt der **Dualraum** von V , die Elemente aus V^* heißen **Linearformen** auf V .

Beispiel 19.2

1. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n, \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1$ ist eine Linearform auf \mathbb{R}^n .
2. $K = \mathbb{R}, V = \mathcal{C}[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$

$$\varphi : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$$

ist eine Linearform auf $\mathcal{C}[0, 1]$

Bemerkung+Definition 19.3 V endlichdimensional $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V . Wir definieren für $i = 1, \dots, n$ die linear Abbildung

$$v_i^* : V \rightarrow K, v_j \mapsto \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Dann ist $\mathcal{B}^* := (v_1^*, \dots, v_n^*)$ ist eine Basis von V^* , die **duale Basis** zu \mathcal{B} .

Beweis 1. \mathcal{B}^* ist linear unabhängig: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K, \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^* = 0$. $\implies \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ist

$$0 = \underbrace{\lambda_1 v_1^*(v_i)}_{=0} + \dots + \underbrace{\lambda_{i-1} v_{i-1}^*(v_i)}_{=0} + \underbrace{\lambda_i v_i^*(v_i)}_{=1} + \underbrace{\lambda_{i+1} v_{i+1}^*(v_i)}_{=0} + \dots + \underbrace{\lambda_n v_n^*(v_i)}_{=0} = \lambda_i$$

2. \mathcal{B}^* ist ES von V^* : Sei $\varphi \in V^*$. Setze $\lambda_i := \varphi(v_i)$ für $i = 1, \dots, n$

$$\implies (\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*)(v_i) = \lambda_i = \varphi(v_i), i = 1, \dots, n$$

$$\implies \varphi = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*$$

□

Anmerkung Ist V unendlichdimensional mit Basis $(v_i)_{i \in I}$, dann ist $(v_i^*)_{i \in I}$ (analog definiert) linear unabhängig, aber kein ES von V .

Notation:

Elemente des K^n schreiben wir im Folgenden als Spaltenvektoren. Ist $\varphi \in (K^n)^* = \text{Hom}_K(K^n, K)$, dann existiert nach LA1 ein eindeutig bestimmtes $A = (a_1 \dots a_n) \in M(1 \times n, K)$ mit

$$\varphi = \tilde{A} : K^n \rightarrow K, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto (a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Es ist $A = M_{(e_1)}^{(e_1, \dots, e_n)}(\varphi)$. Dementsprechende schreiben wir Elemente von $(K^n)^*$ als Zeilenvektoren.

Beispiel 19.4

1. $V = K^n, \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \implies \mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ duale Basis zu \mathcal{B} mit

$$e_i^* = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

Für die Abbildung aus 19.2.1 gilt $\varphi = e_1^* = (1, \dots, 0)$.

2. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (v_1, v_2), v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es ist $e_1 = v_1, e_2 = v_2 - v_1$

$$\implies v_1^*(e_1) = v_1^*(v_1) = 1, v_1^*(e_2) = v_1^*(v_2 - v_1) = \underbrace{v_1^*(v_2)}_{=0} - \underbrace{v_1^*(v_1)}_{=1} = -1$$

$$\implies v_1^* = (1, -1)$$

$$\implies v_2^*(e_1) = v_2^*(v_1) = 0, v_2^*(e_2) = v_2^*(v_2 - v_1) = \underbrace{v_2^*(v_2)}_{=1} - \underbrace{v_2^*(v_1)}_{=0} = 1$$

$$\implies v_2^* = (0, 1)$$

Folgerung 19.5 V endlichdimensional, $v \in V, v \neq 0$. Dann existiert $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(v) \neq 0$

Beweis Ergänze die linear unabhängige Familie (v) zu einer Basis (v, v_2, \dots, v_n) von V . Dann ist $(v^*, v_2^*, \dots, v_n^*)$ eine Basis von V^* , und es ist $v^*v = 1 \neq 0$. □

Anmerkung Die Aussage gilt auch ohne die Voraussetzung „ V endlichdimensional.“

Folgerung 19.6 V endlichdimensional, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V , $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ duale Basis zu \mathcal{B} . Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\psi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow V^*, v_i \mapsto v_i \mapsto v_i^* \quad (i = 1, \dots, n)$$

Insbesondere ist $\dim V = \dim V^*$

Beweis folgt direkt aus 19.3 □

Bemerkung+Definition 19.7 $U \subseteq V$ UVR

$$U^0 := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \forall u \in U\} \subseteq V^*$$

heißt der Annulator von U . U^0 ist ein UVR von V^* .

Beweis leicht nachzurechnen. □

Satz 19.8 V endlichdimensional, $U \subseteq V$ UVR, (u_1, \dots, u_k) von U , $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r)$ Basis von V . Dann ist die Teilfamilie (v_1^*, \dots, v_r^*) von \mathcal{B}^* eine Basis von U^0 . Insbesondere ist $\dim U^0 = \dim V - \dim U$.

Beweis 1. (v_1^*, \dots, v_r^*) linear unabhängig, da Teilfamilie der Basis \mathcal{B}^* von V^*

$$2. \text{Lin}((v_1^*, \dots, v_r^*)) = U^0$$

„ \subseteq “ $\varphi \in \text{Lin}((v_1^*, \dots, v_r^*)) \implies$ Es existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit $\varphi = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_r v_r^*$.

\implies Für $i = 1, \dots, k$ ist $\varphi(u_i) = \lambda_1 v_1^*(u_i) + \dots + \lambda_r v_r^*(u_i) = 0 \implies \varphi(u) = 0 \forall u \in U$

„ \supseteq “ Sei $\varphi \in U^0$. Es existieren $\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit $\varphi = \mu_1 u_1^* + \dots + \mu_k u_k^* + \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_r v_r^* \implies$ Für $i = 1, \dots, k$ ist $0 = \varphi(u_i) = \mu_i \implies \varphi \in \text{Lin}((v_1^*, \dots, v_r^*))$

□

Bemerkung+Definition 19.9 V, W K-Vr, $f : V \rightarrow W$ lineare Abbildung. Wir definieren $f^* : W^* \rightarrow V^*, \psi \mapsto f^*(\psi) := \psi \circ f$ f^* heißt die zu f duale **Abbildung**. Es gilt: f^* ist linear.

Beweis • f^* ist wohldefiniert, da $f^*(\psi) = \psi \circ f \in V^* \forall \psi \in W^*$.

• f^* ist linear, denn: Seien $\varphi, \psi \in W^*, \lambda \in K$

$$\implies f^*(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi) \circ f = \varphi \circ f + \psi \circ f = f^*(\varphi) + f^*(\psi)$$

$$f^*(\lambda\varphi) = \lambda f^*(\varphi) \text{ analog.}$$

□

Bemerkung 19.10 V, W endlichdimensionaler K-VR. Dann ist die Abbildung

$$* : \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow \text{Hom}_K(W^*, V^*), f \mapsto f^*$$

ist ein Isomorphismus von K-VR.

Beweis 1. $*$ ist linear: Seien $f, g \in \text{Hom}_K(V, W), \psi \in W^*$

$$\implies (f + g)^*(\psi) = \psi \circ (f + g) = \psi \circ f + \psi \circ g = f^*(\psi) + g^*(\psi) \implies (f + g)^* = f^* + g^*$$

Rest analog.

2. $*$ ist injektiv: Sei $f \in \text{Hom}_K(V, W)$ mit $f^* = 0 \implies \psi \circ f = 0 \forall \psi \in W^*$. Annahme: $f \neq 0 \implies \exists v \in V : f(v) \neq 0 \implies \exists \varphi \in W^* : \varphi(f(v)) \neq 0 \implies \varphi \circ f \neq 0$

3. $*$ ist surjektiv: Es ist $\dim \text{Hom}_K(V, W) = \dim(V) \dim(W) = \dim(V^*) \dim(W^*) = \dim \text{Hom}_K(W^*, V^*) \implies *$ surjektiv. \square

Satz 19.11 (19.11) V, W endlichdimensionale K -VR, \mathcal{A}, \mathcal{B} Basen von V beziehungsweise W , $f : V \rightarrow W$ lineare Abbildung. Dann gilt:

$$M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(f^*) = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f))^T$$

Beweis Sei $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n), \mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m), M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ insbesondere

$$\begin{aligned} f(v_j) &= \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \\ \implies a_{ij} &= w_i^*(f(v_j)) = (w_i^* \circ f)(v_j) = f^*(w_i^*)(v_j) \end{aligned}$$

Sei $M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(f^*) = (b_{ij})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}$, dann ist

$$\begin{aligned} f^*(w_i^*) &= \sum_{j=1}^n b_{ji} v_j^* \\ \implies b_{ji} &= (f^*(w_i^*))(v_j) = a_{ij} \end{aligned}$$

\square

Satz 19.12 V, W endlichdimensionale K -VR, $f : V \rightarrow W$ lineare Abbildung. Dann gilt:

1. $\text{im}(f^*) = (\ker f)^0$
2. $\ker(f^*) = \text{im}(f)^0$

Beweis 1. „ \subseteq “ Sei $\varphi \in \text{im}(f^*) \subseteq V^* \implies \exists \psi \in W^* : f^*(\psi) = \varphi$, das heißt $\psi \circ f = \varphi$.

$$\implies \varphi|_{\ker f} = 0 \implies \varphi \in (\ker f)^0 \text{ „}\supseteq\text{“ Sei } \varphi \in (\ker f)^0 \subseteq V^*, \text{ das heißt } \varphi|_{\ker f} = 0$$

0. Zu zeigen: Es existiert ein $\psi \in W^*$ mit $\varphi = f^*(\psi) = \psi \circ f$. Sei (v_1, \dots, v_k) eine Basis von $\ker f$, (w_1, \dots, w_r) eine Basis von $\text{im } f$, $u_i \in f^{-1}(\{w_i\}), i = 1, \dots, r \implies (v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_r)$ Basis von V . Wir ergänzen (w_1, \dots, w_r) zu einer Basis $w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m$ von W . \implies Es existiert genau eine lineare Abbildung $\psi : W \rightarrow K$ mit

$$\psi(w_i) = \begin{cases} \varphi(u_i) & i = 1, \dots, r \\ 0 & i = r+1, \dots, m \end{cases}$$

Für $i = 1, \dots, r$ ist $\varphi(u_i) = \psi(w_i) = \psi(f(u_i)) = (\psi \circ f)(u_i)$, und für $i = 1, \dots, k$ ist $\varphi(v_i) = 0 = \psi(f(v_i))$ Also: $\varphi = \psi \circ f = f^*(\psi)$, das heißt $\varphi \in \text{im } f^*$

$$2. \varphi \in \ker(f^*) \iff f^*(\varphi) = 0 \iff \varphi \circ f = 0 \iff \varphi(f(v)) = 0 \forall v \in V \iff \varphi|_{\operatorname{im} f} = 0 \iff \varphi \in (\operatorname{im} f)^0 \quad \square$$

Folgerung 19.13 V, W endlichdimensionale K -VR, $f : V \rightarrow W$ lineare Abbildung. Dann gilt:

$$\operatorname{Rang}(f^*) = \operatorname{Rang}(f)$$

Beweis $\operatorname{Rang} f^* = \dim \operatorname{im} f^* = \dim(\ker f)^0 = \dim V - \dim \ker f = \dim \operatorname{im} f = \operatorname{Rang}(f) \quad \square$

Folgerung 19.14 $A \in M(m \times n, K)$. Dann gilt:

$$\operatorname{Zeilenrang}(A) = \operatorname{Spaltenrang}(A)$$

Beweis Es ist $A = M_{(e_1, \dots, e_m)}^{e_1, \dots, e_n}(\tilde{A})$, $A^T = M_{e_1^*, \dots, e_n^*}^{e_1^*, \dots, e_m^*}$

$$\operatorname{Spaltenrang}(A) = \dim \operatorname{im} \tilde{A} = \operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang}(\tilde{A}^*) = \operatorname{Spaltenrang}(A^t) = \operatorname{Zeilenrang}(A) \quad \square$$

Definition 19.15 $V^{**} := (V^*)^* = \operatorname{Hom}_K(V^*, K)$ heißt der Bidualraum von V .

Satz 19.16 V endlichdimensional. Dann gibt es einen kanonischen (das heißt basisunabhängigen) Isomorphismus

$$i : V \rightarrow V^{**}, v \mapsto i_v, i_v : V^* \rightarrow K, \varphi \mapsto \varphi(v)$$

Beweis 1. i wohldefinierter linearer Abbildung: leicht nachzurechnen.

2. i injektiv: Sei $v \in \ker i \implies i_v = 0 \implies \forall \varphi \in V^* = \operatorname{Hom}_K(V, K) : \varphi(v) = 0 \implies v = 0$

3. $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$. Somit nach 12.15: i Isomorphismus \square

Anmerkung • Im Gegensatz zu $\psi_B : V \rightarrow V^*$ ist der Isomorphismus $i : V \rightarrow V^{**}$ unabhängig von der Wahl einer Basis, das heißt V und V^* sind unkanonisch isomorph, V und V^{**} sind kanonisch isomorph (für V endlichdimensional).

• Ist V unendlichdimensional, dann liefert i zumindest noch eine kanonische Inklusion von V nach V^{**} . Diese ist jedoch nicht surjektiv.

20 Bilinearformen

In diesem Abschnitt sei V stets ein K -VR.

Definition 20.1 $\gamma : V \times V \rightarrow K$ heißt eine Bilinearform auf V , genau dann wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (B1) $\gamma(v_1 + v_2, w) = \gamma(v_1, w) + \gamma(v_2, w)$, $\gamma(\lambda v, w) = \lambda \gamma(v, w)$
- (B2) $\gamma(v, w_1 + w_2) = \gamma(v, w_1) + \gamma(v, w_2)$, $\gamma(v, \lambda w) = \lambda \gamma(v, w)$

$\forall v, w, v_1, v_2, w_1, w_2 \in V, \lambda \in K$.

Beispiel 20.2

1. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n, \gamma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \gamma\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ ist eine Bilinearform auf \mathbb{R}^n .
2. $K = \mathbb{R}, V = l[0, 1], \gamma : l[0, 1] \times l[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \gamma(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$ ist eine Bilinearform auf $l[0, 1]$.
3. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, \gamma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \gamma\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 - x_2 y_2$ ist eine Bilinearform auf \mathbb{R}^2 .

Definition 20.3 V endlichdimensional, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V , γ Bilinearform auf V

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = (\gamma(v_i, v_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M(n \times n, K)$$

heißt die **Darstellungsmatrix (Fundamentalmatrix)** von γ bezüglich \mathcal{B} .

Beispiel 20.4

1. In 20.2a ist für $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) : M_{\mathcal{B}}(\gamma) = E_n$
2. In 20.2p ist für $\mathcal{B} = (e_1, e_2) : M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Bemerkung 20.5 V endlichdimensional, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V , γ Bilinearform auf V , $A =$

$M_{\mathcal{B}}(\gamma)$, $\Phi_{\mathcal{B}} : K^n \rightarrow V$ Koordinatensystem zu \mathcal{B} , $v, w \in V, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)$, das heißt

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n,$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)$$

das heißt $w = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n$. Dann gilt:

$$\gamma(v, w) = \Phi_{\mathcal{B}}^T A \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) = x^t A y = (x_1 \quad \dots \quad x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Beweis Es ist

$$\begin{aligned} y(v, w) &= \gamma(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n, y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \gamma(v_i, v_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n \gamma(v_i, v_j) y_j = x^T A y \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 20.6 V endlichdimensional, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V , $A \in M(n \times n, K)$. Dann gilt: Durch

$$\Delta_A^{\mathcal{B}} : V \times V \rightarrow K, (v, w) \mapsto \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T A \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)$$

ist eine Bilinearform auf V gegeben.

Beweis Nachrechnen. \square

Beispiel 20.7 (wichtiger Spezialfall von 20.6)

$V = K^n, \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n), A \in M(n \times n, K) \implies \Phi_{\mathcal{B}} = \text{id}_{K^n}$. Durch

$$\Delta_A^{(e_1, \dots, e_n)} : K^n \times K^n \rightarrow K, (v, w) \mapsto v^t A w$$

ist eine Bilinearform auf K^n gegeben. Wir setzen kurz $\Delta(A) := \Delta_A := \Delta_A^{(e_1, \dots, e_n)}$

Bemerkung+Definition 20.8 $\text{Bil}(V) := \{\gamma : V \times V \rightarrow K \mid \gamma \text{ ist Bilinearform}\}$ ist ein K -VR, ist ein UVR vom K -VR $\text{Abb}(V \times V, K)$

Bemerkung 20.9 V endlichdimensional, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V . Dann gilt: Die Abbildung

$$M_{\mathcal{B}} : \text{Bil}(V) \rightarrow M(n \times n, K)$$

ist ein Isomorphismus von K -VR mit Umkehrabbildung

$$\Delta^{\mathcal{B}} : M(n \times n, K) \rightarrow \text{Bil}(V), A \mapsto \Delta_A^{\mathcal{B}}$$

Beweis 1. $M_{\mathcal{B}}$ linear: nachrechnen.

2. $\Delta^{\mathcal{B}} \circ M_{\mathcal{B}} = \text{id}_{\text{Bil}(V)}$, denn: Sei $\gamma \in \text{Bil}(V)$

$$\begin{aligned} \implies (\Delta^{\mathcal{B}} \circ M_{\mathcal{B}})(\gamma)(v_i, v_j) &= \Delta_{M_{\mathcal{B}}(\gamma)}^{\mathcal{B}}(v_i, v_j) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_i)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma) \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_j) \\ &= e_i^T M_{\mathcal{B}}(\gamma) e_j = \gamma(v_i, v_j) \end{aligned}$$

3. $M_{\mathcal{B}} \circ \Delta^{\mathcal{B}} = \text{id}_{M(n \times n, K)}$, denn: Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K), B = (b_{ij}) = (M_{\mathcal{B}} \circ \Delta^{\mathcal{B}})(A) = M_{\mathcal{B}} \circ \Delta_A^{\mathcal{B}}$

$$b_{ij} = \Delta_A^{\mathcal{B}}(v_i, v_j) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_i)^T A \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_j) = e_i^T A e_j = a_{ij}$$

$$\implies B = A \quad \square$$

Satz 20.10 V endlichdimensional, \mathcal{A}, \mathcal{B} Basen von V , γ Bilinearform auf V . Dann gilt:

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = (T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

Beweis Für $v, w \in V$ ist

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{B}}(w) = \gamma(v, w) = \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}(w)$$

$$16.2.2: \tilde{T}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{aligned} &= (T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v))^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) \\ &= (\Phi_{\mathcal{B}}^{-1})^T (T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) \\ \implies \Delta^{\mathcal{B}}(M_{\mathcal{B}}(\gamma))(v, w) &= \Delta^{\mathcal{B}}\left((T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)(v, w) \\ \implies \Delta^{\mathcal{B}}(M_{\mathcal{B}}(\gamma)) &= \Delta^{\mathcal{B}}\left((T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right) \end{aligned}$$

$\Delta^{\mathcal{B}}$ Isomorphismus

$$\implies M_{\mathcal{B}}(\gamma) = (T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

□

Definition 20.11 V endlichdimensional, γ Bilinearform auf V . Wir setzen $\text{Rang}(\gamma) := \text{Rang } M_{\mathcal{B}}(\gamma)$, wobei \mathcal{B} eine Basis von V ist.

Anmerkung Dies ist wohldefiniert. (folgt aus 20.10, da die Matrizen $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ invertierbar sind)

Bemerkung+Definition 20.12 Es gilt:

1. Ist $\gamma : V \times V \rightarrow K$ eine Bilinearform, dann induziert γ die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \Gamma_l : V &\rightarrow V^*, w \mapsto \gamma(\cdot, w) & \gamma(\cdot, w) : V &\rightarrow K, v \mapsto \gamma(v, w) \\ \Gamma_r : V &\rightarrow V^*, v \mapsto \gamma(v, \cdot) & \gamma(v, \cdot) : V &\rightarrow K, v \mapsto \gamma(v, w) \end{aligned}$$

2. Jede lineare Abbildung $\Gamma : V \rightarrow V^*$ induziert Bilinearformen

$$\begin{aligned} \gamma_l : V \times V &\rightarrow K, \gamma_l(v, w) := \Gamma(w)(v) \\ \gamma_r : V \times V &\rightarrow K, \gamma_r(v, w) := \Gamma(v)(w) \end{aligned}$$

Die Zuordnungen aus 1., 2. induzieren den Isomorphismus $\text{Bil}(V) \cong \text{Hom}_K(V, V^*)$

Beweis Nachrechnen.

□

Definition 20.13 γ Bilinearform auf V . γ heißt **nicht-ausgeartet** $\iff \Gamma_l$ und Γ_r sind injektiv.

$$\iff \gamma(v, w) = 0 \forall v \in V \implies w = 0$$

(Injektivität von Γ_l), und

$$\iff \gamma(v, w) = 0 \forall w \in V \implies v = 0$$

(Injektivität von Γ_r).

γ heißt **perfekt** $\iff \Gamma_l$ und Γ_r sind Isomorphismen.

Bemerkung 20.14 V endlichdimensional, γ Bilinearform auf V , $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V , \mathcal{B}^* duale Basis zu \mathcal{B} . Dann gilt:

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_l) = M_{\mathcal{B}}(\gamma) = (M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_r))^T$$

Beweis Behauptung: Es ist $\Gamma_l(v_i) = \gamma(v_1, v_i)v_1^* + \dots + \gamma(v_n, v_i)v_n^*$, denn $\Gamma_l(v_i)(v_j) = \gamma(v_j, v_i)$ nach Definition

$$(\gamma(v_1, v_i)v_1^* + \dots + \gamma(v_n, v_i)v_n^*)(v_j) = \gamma(v_j, v_i)$$

Somit: $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_l) = M_{\mathcal{B}}(\gamma)$.

Analog: $\Gamma_r(v_i) = \gamma(v_i, v_1)v_1^* + \dots + \gamma(v_i, v_n)v_n^* \implies M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_r) = (M_{\mathcal{B}}(\gamma))^T$ □

Folgerung 20.15 V endlichdimensional, γ Bilinearform auf V , \mathcal{B} Basis von V . Dann sind äquivalent:

1. γ ist nicht-ausgeartet
2. γ ist perfekt
3. $M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ invertierbar
4. Γ_l injektiv
5. Γ_r injektiv

Beweis 1. \iff 2. wegen $\dim V = \dim V^*$ und 12.12

γ perfekt $\iff \Gamma_l, \Gamma_r$ Isomorphismen $\iff M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_l), M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_r)$ invertierbar $\iff M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ invertierbar. $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_l), M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_r) \iff \Gamma_l$ Isomorphismus $\iff M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}$ invertierbar. □

Definition 20.16 γ Bilinearform auf V .

γ heißt **symmetrisch** $\iff \gamma(v, w) = \gamma(w, v) \forall v, w \in V$

γ heißt **antisymmetrisch** $\iff \gamma(v, w) = -\gamma(w, v) \forall v, w \in V$

γ heißt **alternierend** $\iff \gamma(v, v) = 0 \forall v \in V$.

Anmerkung • γ symmetrisch $\implies \Gamma_l = \Gamma_r$

- Für $\text{char}(K) \neq 2$ gilt: γ alternierend $\iff \gamma$ antisymmetrisch

- Für $\text{char}(K) = 2$ gilt immer noch γ alternierend $\implies \gamma$ (anti)symmetrisch. Die Umkehrung ist falsch: $\gamma : \mathbb{F}_2^3 \times \mathbb{F}_2^3 \rightarrow \mathbb{F}$, $\gamma(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ ist (anti)symmetrisch, aber nicht alternierend:

$$\gamma\left(\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}\right) = \bar{1} \neq \bar{0}$$

Bemerkung 20.17 V endlichdimensional, \mathcal{B} Basis von V , γ Bilinearform auf V . Dann gilt:

1. γ symmetrisch $\iff M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ ist symmetrisch, das heißt $M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T = M_{\mathcal{B}}(\gamma)$
2. γ antisymmetrisch $\iff M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ ist antisymmetrisch, das heißt $M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T = -M_{\mathcal{B}}(\gamma)$

Beweis 1. „ \implies “ klar

„ \impliedby “ Sei $M_{\mathcal{B}}(\gamma) = M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T \implies$ Für v, w ist

$$\begin{aligned} \gamma(v, w) &= \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma) \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)^T \\ &= \underbrace{\left(\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma) \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \right)^T}_{\in K} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma) \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v) = \gamma(w, v). \end{aligned}$$

2. analog. □