Theoretische Physik II (Hebecker)

Robin Heinemann

30. April 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Lagrange - Formalismus

1.1 Grundidee (1788, Joseph-Louis Lagrange)

Vorteile gegenüber Newton:

- Flexibilität
- Zwangskräfte
- Zusammenhang zwischen Symmetrie und Erhaltungsgrößen

Zentrales Objekt: Wirkungsfunktional S.
Abbildung S : Trajektorie $\mapsto$ reelle Zahl
(S definiert mittels Lagrange-Funktion L)
Zentrale physikalische Aussage des Formalismus: „Wirkungsprinzip“ („Hamilton-Prinzip“)
Letztes besagt: Eine physikalische Bewegung verläuft so, dass das Wirkungsfunktional minimal wird.
$\rightarrow$ DGL („Euler-Lagrange-Gleichung“), im einfachen Fall $\equiv$ Newton Gleichung

1.2 Variationsrechnung: Der Funktionalbegriff

Funktion (mehrerer Variablen) y;

$$y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, y : \vec{x} \mapsto y(\vec{x})$$

Funktional: analog, mit $\mathbb{R}^n$ ersetzt durch eine Menge von Funktionen (Vektorraum $\mathbb{V}$)

$$F : \mathbb{V} \to \mathbb{R}, F : y \mapsto F[y]$$

Beispiel 1.1 $\mathbb{V}$ seinen differenzierbare Funktionen auf $[0, 1]$ mit $y(0) = y(1) = 0$
Diskretisierung:

$$\begin{array}{c} x_1, \ldots, x_n \to \{y(x_1), \ldots, y(x_n)\} \\ \downarrow \\ \text{Vektor} \equiv \text{Funktion} \end{array}$$

$\Longrightarrow$ im diskreten Fall ist unser Funktional schlicht eine Funktion mit Vektor-Argument. (Eigentlicher Funktionalbegriff folgt im Limes $n \to \infty$).
Beispielfunktionale zu obigem $\mathbb{V}$.

- $F_1[y] = y(0.5)$
- $F_2[y] = y'(0.3)$
- $F_3[y] = y(0.1) + y(0.5) + y'(0.9)$
- $F_4[y] = \int_0^1 \mathrm{d}x \Big(x \cdot y(x)^2 + y'(x)^2\Big)$
- $F_5[y] = \int_0^1 \mathrm{d}x f(y(x), y'(x), x)$

F_5 hängt von Funktion f (von 3 Variablen) ab. Falls wir $f(a, b, c) = ca^2 + b^2$ wählen, folgt F_4 wählen. Noch konkreter: wähle Beispielfunktion (ignoriere zur Einfachheit Randbedingung $y(1) = 0$)

$$y_0 : x \mapsto x^2; y_0(x) = x^2; y_0'(x) = 2x;$$
$$\Longrightarrow F_1[y_0] = 0.25; F_2[y_0] = 0.6, F_3[y_0] = 0.01 + 0.25 + 1.8 = 2.06$$
$$F_4[y_0] = \int_0^1 \mathrm{d}x \big(x^5 + 4x^2\big) = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} = \frac{3}{2}$$

1.3 Weglänge als Funktional

Weg von $\vec{y}_a$ nach $\vec{y}_b$: $\vec{y} : \tau \mapsto \vec{y}(\tau), \tau \in [0,1]$; $\vec{y}(0) = \vec{y}_a$, $\vec{y}(1) = \vec{y}_b$
Weglänge:

$$F[\vec{y}] = \int_{\vec{y}_a}^{\vec{y}_b} |\mathrm{d}\vec{y}| = \int_0^1 \mathrm{d}\tau \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{y}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2}$$

(Eigentlich haben wir sogar ein Funktional einer vektorwertigen Funktion beziehungsweise ein Funktional mit 3 Argumenten: $F[y] = F[y^1, y^2, y^3]$)
Etwas interessanter: Weglänge im Gebirge:
Sei $\vec{x}(\tau) = \{x^1(\tau), x^2(\tau)\}$ die Projektion des Weges auf Horizontale. Zu jedem solchen Weg gehört die „echte“ Weglänge im Gebirge. Beachte: Höhenfunktion $z : \vec{x} \mapsto z(\vec{x})$
$\Longrightarrow$ 3-d Weg:

$$\begin{aligned}\vec{y}(\tau) &= \{y^1(\tau), y^2(\tau), y^3(\tau)\} \\ &\equiv \{x^1(\tau), x^2(\tau), z(\vec{x}(\tau))\}\end{aligned}$$

$$F_{Geb.}[x] = F[\vec{y}[\vec{x}]] = \int \mathrm{d}t \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x^1(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x^2(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z(x^1(\tau), x^2(\tau))}{\mathrm{d}\tau}\right)}$$

1.4 Variationsrechnung: Extremalisierung von Funktionalen

Funktionen: $y : x \mapsto y(x)$; wir wissen y hat Extremum bei $x_0 \implies y'(x_0) = 0$
Funktionale der Form: $F[y] = \int_0^1 \mathrm{d}x f(y, y', x)$; $y : [0,1] \to \mathbb{R}$; $y(0) = y_a$; $y(1) = y_b$
Annahme: y_0 extremalisiert F. Sei weiterhin δy eine beliebige 2-fach differenzierbare Funktion mit $\delta y(0) = \delta y(1) = 0$

$$\Longrightarrow \underbrace{y_\alpha \equiv y_0 + \alpha \cdot \delta y}_{\text{Ist eine Funktion aus unserem Wertevorrat von } F} \quad (\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon))$$

$\Longrightarrow$ Betrachte Abbildung $(-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}, \alpha \mapsto F[y_\alpha]$. Per unserer Annahme hat diese Abbildung Extremum bei $\alpha = 0$. Also gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} F[y_\alpha] = 0\Big|_{\alpha=0}$$

Taylor.entwickle um $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned}F[y_\alpha] &= \int_0^1 \mathrm{d}x f\big(y_0 + \alpha\delta y, y_0' + \alpha\delta y', x\big) \\ &= F[y_0] + \int_0^1 \mathrm{d}x \left(\frac{\partial f}{\partial y}\big(y_0, y_0', x\big) \cdot \alpha\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\big(y_0, y_0', x\big) \cdot \alpha\delta y'\right) + \mathcal{O}\big(\alpha^2\big)\end{aligned}$$

Term linear in α muss verschwinden:

$$0 = \int_0^1 \mathrm{d}x \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y)\right)$$

$\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y = 0$ bei $0, 1$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right)\delta y = 0$$

für beliebige $\delta y \implies$ der Koeffizient von δy im Integral muss verschwinden

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial t}{\partial y'}\right) \qquad \text{(Eulersche Differentialgleichung)}$$

Falls y_0 das Funktional F extremalisiert, so gilt die obige Gleichung für $y_0 \forall x \in [0, 1]$

Beispiel 1.2 $f(y, y', x) = y^2 + y'^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2y' = 2y'' \\ \implies y_0'' - y_0 &= 0 \end{aligned}$$

Beachte: y und y' sind hier unabhängig, das heißt es spielt für die Herleitung der Eulerschen Differentialgleichung keine Rolle, dass y' die Ableitung von y ist.

1.5 Das Hamiltonsche Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung)

Die Lage einer sehr großen Klasse von Systemen beschreiben durch verallgemeinerte Koordinaten $(q_1, \ldots, q_s)$, s : Zahl der Freiheitsgrade.

Beispiel 1.3
- N Massenpunkte: $s = 3N, (q_1, \ldots, q_{3N}) = \left(x_1^1, x_1^2, x_1^3, \ldots, x_N^1, x_N^2, x_N^3\right)$
- 1 Massenpunkt in Kugelkoordinaten: $s = 3, (q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \varphi)$
- eine dünne Stange: $s = 5$. Schwerpunktskoordinaten x_s^1, x_s^2, x_s^3. 2 Winkel zur Ausrichtung θ, φ
- Rad auf einer Welle: $s = 1, q_1 = \varphi$
- Perle auf einem Draht: $s = 1, q_1 = s$ (Bogenlänge)

Hamiltonsches Prinzip:
Für jedes (in einer sehr großen Klasse) mechanische System s Freiheitsgraden existiert die Lagrange-Funktion $L(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, t)$ (kurz $L(q, \dot{q}, t)$), für die gilt:
Die physikalische Bewegung aus einer Lage $q(t_1) = q^{(1)}$ in eine Lage $q(t_2) = q^{(2)}$ verläuft so, dass das Wirkungsfunktional

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t L(q, \dot{q}, t)$$

extremal wird.

Anmerkung 1.4
- für kleine Bahnabschnitte: Minimalität
- DGL. aus Stationalität
- Wirkung: Dimensionsgründe $[S] = \text{ Zeit } \cdot \text{ Wirkung}$
- Bedeutung des Wirkungsprinzip kann man kaum überschätzen. [spezielle + allgemeine Relativitätstheorie, Feldtheorie (Elektro-Dynamik), Quantenfeldtheorie (Teilchenphysik, kondensierte Materie), Quantengravitation]

für $s = 1$ folgt aus dem Hamiltonschen Prinzip:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

(Euler-Lagrange-Gleichung, oder Lagrange-Gleichung der 2. Art)
für $s \geq 1$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = 1, \ldots, s$$

1.6 Form der Lagrange-Funktion und erste Anwendungen

Fundamentaler Fakt:

$$L = T - V$$

- T: kinetische Energie
- V: potentielle Energie

Beispiel 1.5 (Massenpunkt im Potenzial)

$$\begin{aligned} L\left(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t\right) &= \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial}{\partial x^i}L &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}^i) - \left(-\frac{\partial V}{\partial x_i}\right) &= 0 \\ m\ddot{x}^i - F^i &= 0 \\ m\ddot{\vec{x}} - \vec{F} &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel 1.6 (System wechselwirkender Massenpunkte)

$$\begin{aligned} T &= \sum_a T_a = \sum_a \frac{m_a}{2}\dot{\vec{x}}_a{}^2 \\ V &= \sum_{\substack{a,b \\ a<b}} V_{ab}(|x_a - x_b|) \end{aligned}$$

Lagrange Gleichung für x_a^i:

$$
\begin{aligned}
m_a \ddot{x}_a^i - \frac{\partial}{\partial x_a^i}\left(\sum_b V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)\right) &= 0 \\
m_a \ddot{\vec{x}}_a - \vec{\nabla}_a \sum_b V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|) &= 0
\end{aligned}
$$

Beispiel 1.7 (Perle auf Draht) Draht: beschrieben durch $\vec{x}(s)$ (s: Bogenlänge)

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{m}{2} v^2 - V(\vec{x}(s)) \\
v &= \left|\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s}\right| \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \\
L &= \frac{m}{2} \dot{s}^2 - V(\vec{x}(s)) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} &= 0 \\
m\ddot{s} - \sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x^i}}_{-\frac{\partial V}{\partial x^i}} \frac{\partial x^i}{\partial s} &= 0 \\
m\ddot{s} - \vec{F} \cdot \frac{\vec{x}}{s} &= 0
\end{aligned}
$$

Beispiel 1.8 (Mathematisches Pendel im Fahrstuhl) Beschleunigung des Fahrstuhls: $v_y = a \cdot t$

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{m}{2} \vec{v}^2 - V \\
\vec{v} &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(l \sin\varphi), at - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(l\cos\varphi)\right) \\
&= (l\cos(\varphi)\dot{\varphi}, at + l\sin\varphi\dot{\varphi}) \\
V &= mg\Big(\frac{a}{2}t^2 - l\cos\varphi\Big) \\
0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{m}{2}\big(l^2\cos^2\varphi 2\dot{\varphi} + 2atl\sin\varphi + l^2\sin^2\varphi 2\dot{\varphi}\big)\Big) - \\
\Big(\frac{m}{2}\big(l^2\dot{\varphi}^2 2\cos\varphi(-\sin\varphi) + 2atl\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2 2\sin\varphi\cos\varphi\big) - mgl\sin\varphi\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = \big(2l^2\cos\varphi(-\sin\varphi)\dot{\varphi}^2 + l^2\cos^2\varphi\ddot{\varphi} + al\sin\varphi + atl\cos\varphi\dot{\varphi} + l^2 2\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + l^2\sin^2\varphi\ddot{\varphi}\big) \\
- tal\dot{\varphi}\cos\varphi + gl\sin\varphi
\end{aligned}
$$

$$
0 = l^2\ddot{\varphi} + l\sin\varphi(a+g)
$$

1.7 Vereinfachte Herleitung der Lagrange-Gleichungen

$q(t)$ Trajektorie, Variation der Trajektorie: $\delta q(t)$

- neue Trajektorie: $q(t) + \delta q(t)$.
- neue Wirkung $S + \delta S$ Anders gesagt: $\delta S \equiv S[q + \delta q] - S[q]$.

Extremalität:

$$
\begin{aligned}
0 = \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \delta L(q, \dot{q}, t) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\delta q) \right]
\end{aligned}
$$

Partielle Integration, nutze $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right) \\
0 &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q
\end{aligned}
$$

δq beliebig $\implies$ Term muss verschwinden

$$
0 = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \checkmark
$$

1.8 Kommentare

Argumente von L: $\ddot{q}$, $\dddot{q}$, etc. dürfen nicht in L vorkommen, weil sonst $\dddot{q}$, $\ddddot{q}$, etc. in den Bewegungsgleichungen vorkommen würden. Dann reichen $\vec{x}(t_0) \wedge \vec{v}(t_0)$ nicht mehr zur Lösung des Anfangswertproblems.
Totale Zeitableitungen:
Seinen L, L' zwei Lagrangefunktionen mit

$$
\begin{aligned}
L' &= L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(q, t) \\
\implies S' &= S + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(q, t) = S + \underbrace{(f(q(t_2), t_2) - f(q(t_1), t_1))}_{\text{variiert nicht}} \\
\implies \delta S' &= \delta S
\end{aligned}
$$

$\implies$ L' physikalisch äquivalent zu L (L ist nur bis auf totale Zeitableitungen definiert.)
Bedeutung von S in der QM:
In der Quantenmechanik ist die Wahrscheinlichkeit w für den Übergang von $\left(q^{(1)}, t_1\right)$ zu $\left(q^{(2)}, t_2\right)$ gegeben durch

$$
w \sim |A|^2
$$

, $A \in \mathbb{C}$ ist „Amplitude“, mit

$$A \sim \int Dq e^{\frac{iS[q]}{\hbar}}$$

$\int Dq$ - Summe über alle mögliche Trajektorien („Wege“), („Pfade“).
Im Limes $\hbar \to 0$ dominiert klassischer Weg. Grund: S ist an dieser Stelle stationär. Beiträge von „ganz anderen“ Wegen heben sich wegen schneller Oszillation von $\exp[iS/\hbar]$ weg.

2 Symmetrien und Erhaltungssätze

Zentrales Ziel: **Noether Theorem** (Emmy Noether - 1918)
„Zu jeder Kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems gehört eine Erhaltungsgröße.“
Idealfall: Symmetrien $\implies$ Form der Wirkung. Wirkung hat Symmetrie $\implies$ Erhaltungsgrößen.

2.1 Symmetriemotivation der Wirkung

2.1.1 Freier Massenpunkt

Homogenität von Raum und Zeit $\implies L(\vec{x}, \vec{v}, t) = L(\vec{v})$.
Isotropie des Raumes $\implies L = L\big(\vec{v}^2\big)$.
Betrachte (kleine) Galilei-Boosts: $\vec{v} \to \vec{v}' = \vec{v} + \vec{\varepsilon}$.

$$L\big(\vec{v}^2\big) \to L\big(\vec{v}^{2\prime}\big) = L\big(\vec{v}^2 + 2\vec{v}\cdot\vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon}^2\big)$$

Taylorentwicklung:

$$= L\big(\vec{v}^2\big) + \frac{\partial L\big(\vec{v}^2\big)}{\partial\big(\vec{v}^2\big)}(2\vec{v}\,\vec{\varepsilon}) + \mathcal{O}\big(\vec{\varepsilon}^2\big)$$

Falls nun $\big(\partial L/\partial \vec{v}^2\big) = \text{const.}$, so gilt

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2}(2\vec{v}\,\vec{\varepsilon}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2}(2\vec{x}\,\vec{\varepsilon})\right)$$

$\implies$ wir fordern, dass $\partial L/\partial \vec{v}^2$ eine Konstante ist und nennen diese $m/2$. $\implies L = \frac{m}{2}\vec{v}^2$

2.1.2 Mehrere Massenpunkte

Für unabhängige Systeme können wir die Lagrangefunktionen schlicht addieren:

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) = L_1(q_1, \dot{q}_2, t) + L_2(q_2, \dot{q}_2, t)$$

Dazu rechnen wir nach, dass die Anwendung der Differentialoperatoren

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2)$$

auf L und Nullsetzen äquivalent ist zur Anwendung des Operators „1“ auf L_1 und „2“ auf L_2. Dies gibt aber gerade die Lagrangefunktionen und es ist somit egal ob ich $L_1 + L_2$ oder L_1 und L_2 getrennt als Lagrange-Funktionen betrachte

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial}{\partial q_1}\right)L = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial}{\partial q_1}\right)L_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L_1}{\partial q_1} \stackrel{!}{=} 0$$

Also Mehrere Massenpunkte:

$$L = \sum_a \frac{m_a}{2}\vec{v}_a^2$$

$\implies$ $L = T$ mit $T =$ kinetische Energie. Hinzunahme von Wechselwirkungen der Form

$$V = \sum_{a<b}^{V_{ab}} (|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)$$

respektiert Galilei-Invarianz. Also Vorschlag: $L = T - V$ wie oben eingeführt. Aber: T, V sind im Moment nur Namen.

2.2 Homogene Funktionen und Satz von Euler

Eine Funktion f von n Variablen heißt homogen von Grad k falls $f(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, \ldots, x_n)$.

Beispiel 2.1 $f(x) = x^p$ ist homogen von Grad p.

Beispiel 2.2 $f(x, y, z) = \frac{x}{yf} + \frac{1}{z}\cos\left(\frac{x}{z}\right)$ ist homogen von Grad -1.

Beispiel 2.3 ("Unser Bespiel")

$$T(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2} f_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j \text{ Summe!}$$

homogen **in den** $\dot{q}_i$ vom Grad 2.

Satz 2.4 (Satz von Euler) $f(x_1, \ldots, x_n)$ homogen von Grad k

$$\implies \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = kf$$

Begründung:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\alpha^k f(x_1, \ldots, x_n)\right)$$
$$\implies \sum_i \frac{\partial f(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)}{\partial(\alpha x_i)} \frac{\partial \alpha x_i}{\partial \alpha} = k\alpha^{k-1} f(x_1, \ldots, x_n)$$

Setze $\alpha = 1$

$$\implies \sum_i \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} x_i = kf(x_1, \ldots, x_n)$$

2.3 Energieerhaltung

Homogenität von t „$\implies$“ $L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q})$
Wir betrachten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L = \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \qquad \text{(Kettenregel)}$$

Euler-Lagrange-Gleichung ($\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$)

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{q}_i$$

Produktregel

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\cdot \dot{q}_i\right)$$

$$\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right)}_{=:E} = 0$$

$$\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = 0$$

Beispiel 2.5

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L &= m\dot{x}^2 - \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V\right) \\ &= \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V \end{aligned}$$

Um dies allgemeiner zu zeigen: Satz von Euler. Wir nehmen an, dass L folgende Form hat:

$$L = T - V = \frac{1}{2}f_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - V(q)$$

Begründung: Diese Form ergibt sich typischerweise, wenn man

$$\sum_a \frac{m_a}{2}\dot{\vec{x}}_a^2 - V(\vec{x})$$

in verallgemeinerte Koordinaten umschreibt.
Mit dieser Annahme folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2}f_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k\right)\dot{q}_i \\ &= \frac{1}{2}f_{jk}\delta_{ij}\dot{q}_k\dot{q}_i + \frac{1}{2}f_{jk}\dot{q}_j\delta_{ik}\dot{q}_i \\ &= f_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k = 2T \end{aligned}$$

Leichter mit Satz von Euler

$$E \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = 2T - (T - V) = T + V \checkmark$$

2.4 Erhaltung von verallgemeinerten Impulsen

In einen durch $q_1, \ldots, q_s$ parametrisierten System heißen

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

„verallgemeinerte Impulse"
Bekannter Fall:

$$L = \sum_{i=1}^{3} \frac{m}{2} \dot{x}_i^2$$

mit

$$p_i = m\dot{x}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$$

Eine Koordinate heißt „zyklisch", falls die **nicht** explizit in L vorkommt (Ableitung darf vorkommen).
Beispiel 2.6

$$L = L(q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s)$$

In dieser Situation ist die Transformation $q_1 \to q_1' = q_1 + \varepsilon$ eine Symmetrie.

Sei q_1 zyklisch. Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \qquad \text{(Euler-Lagrange-Gleichung)}$$

$\partial L / \partial q_1 = 0$ per Annahme

$$\begin{aligned} \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_1) &= 0 \end{aligned}$$

$\implies$ „Die verallgemeinerten Impulse zyklischer Koordinaten sind erhalten."

Beispiel 2.7 Massenpunkt in Potential, dass nicht von x_1 abhängt. Noch konkreter: schräger Wurf:

$$V(x_1, x_2, x_3) = mgx_3$$

$\implies x_1, x_2$ zyklisch.

Beispiel 2.8 (Massenpunkt in Ebene mit Zentralpotential)

$$L = \frac{m}{2}\left(r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2\right) - V(q)$$

φ zyklisch
$\implies \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}$: Betrag des Drehimpulses. (Dieses Beispiel erklärt den Namen „zyklisch" im Sinne von periodisch)

2.5 Noether-Theorem

Definition 2.9 (kontinuierliche Transformation)

$$\begin{aligned} q(t) \to q'(t) &= q(t) + \delta q(t) \\ &= q(t) + \varepsilon \chi(t) \end{aligned}$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}$, sodass $\varepsilon \to 0$ möglich ist.

Definition 2.10 (kontinuierliche Transformation) Damit diese Transformation eine Symmetrie ist, fordern wir **Invarianz der Bewegungsgleichungen**, also

$$\delta L \equiv L(q + \delta q, \dot{q} + \dot{\delta}; t) - L(q, \dot{q}, t) = \varepsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f$$

Wir betrachten

$$\varepsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f = \delta L = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$$

mit Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q\right) \\ \implies 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q - \varepsilon f\right) \\ &= \varepsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \chi - f\right)}_{\text{Erhaltungsgröße}} \qquad \text{(Erhaltungsgröße)} \end{aligned}$$

Satz 2.11 (Noether-Theorem) **Noether-Theorem** (nach analoger Rechnung mit $q_1, \ldots, q_n$):
Falls $\delta q_i = \varepsilon \chi_i$ Symmetrie (also $\delta L = \varepsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f$) gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \chi_i - f\right) = 0$$

Beispiel 2.12 (Zeittranslation) $q(t) \to q'(t) = q(t + \varepsilon) = q(t) + \dot{q}(t)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$
$\delta q = \dot{q}\varepsilon = \varepsilon\chi \implies \chi = \dot{q}$ Berechne δL:

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = \varepsilon \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \varepsilon \ddot{q} \\ &= \varepsilon \left(\frac{\partial L}{\partial q} \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\mathrm{d}\dot{q}}{\mathrm{d}t}\right) = \varepsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L \\ \implies \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \chi - f &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = E \checkmark \end{aligned}$$

Beispiel 2.13

$$q' = q + \varepsilon$$