

# Lineare Algebra II (Vogel)

Robin Heinemann

15. Juni 2017

## Inhaltsverzeichnis

18 Eigenwerte	1
19 Dualraum	16
20 Bilinearformen	21
21 Quadratische Räume	25
22 Euklidische Räume	32
23 Die orthogonale Gruppe	39
24 Der Spektralsatz	45
25 Unitäre Räume	52
26 Ringe, Ideale und Teilbarkeit	58

## 18 Eigenwerte

In diesem Abschnitt sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V$  ein  $K$ -VR und  $\varphi \in \text{End}_K(V)$ .

Frage:  $V$  endlichdim. Existiert eine Basis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $V$ , sodass  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  eine Diagonalmatrix ist, das heißt

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ ?

Für  $i = 1, \dots, n$  wäre dann  $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$

**Definition 18.1**  $\lambda \in K, v \in V$

- $\lambda$  heißt Eigenwert von  $\varphi \stackrel{\text{Def}}{\iff} \exists v \in V, v \neq 0 : \varphi(v) = \lambda v$
- $v$  heißt Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda \stackrel{\text{Def}}{\iff} v \neq 0 \wedge \varphi(v) = \lambda v$
- $\varphi$  heißt diagonalisierbar  $\stackrel{\text{Def}}{\iff} V$  besitzt eine Basis aus EV von  $\varphi$

(Falls  $V$  endlichdimensional, ist die äquivalent zu: Es gibt eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  mit

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

)

Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit einer Matrix  $A \in M(n \times n, K)$  sind über den Endomorphismus  $\tilde{A} : K^n \rightarrow K^n$  definiert.

**Bemerkung 18.2**  $A \in M(n \times n, K)$ . Dann sind äquivalent:

1.  $A$  ist diagonalisierbar.
2. Es gibt eine Basis von  $K^n$  aus Eigenvektoren von  $A$

$$3. \text{ Es gibt ein } S \in \text{GL}(n, K), \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \text{ mit } SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

4.  $A$  ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix

In diesem Fall steht in den Spalten von  $S^{-1}$  eine Basis des  $K^n$  aus EV von  $A$ , und für jede Matrix  $A \in M(n \times n, K)$  mit der Eigenschaft, dass die Spalten von  $S^{-1}$  eine Basis des  $K^n$  aus EV von  $A$  bilden, dann ist  $SAS^{-1}$  eine Diagonalmatrix (mit den EW auf der Diagonalen.)

**Beweis** Äquivalenz:

1.  $\iff$  2. Definition, 2.  $\iff$  3. aus Basiswechselsatz (16.6), 3.  $\iff$  4. aus Definition Ähnlichkeit (16.12)

$$\text{Zusatz: Sei } S \in \text{GL}(n, K) \text{ mit } SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies A(S^{-1}e_j) = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j.$$

Wegen  $S^{-1} \in \text{GL}(n, K)$  ist  $S^{-1}e_j \neq 0$ , das heißt  $S^{-1}e_j$  ist EV von  $A$  zum EW  $\lambda_j$

Wegen  $S^{-1} \in \text{GL}(n, K)$  ist  $(S^{-1}e_1, \dots, S^{-1}e_n)$  eine Basis des  $K^n$  aus EV von  $A$ .

Sei  $S \in GL(n, K)$ , das heißt die Spalten von  $S^{-1}$  eine Basis des  $K^n$  aus EV von  $A$  bilden, das heißt für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$  ist  $AS^{-1}e_j = \lambda_j S^{-1}e_j$  für ein  $\lambda_j \in K$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow AS^{-1}e_j &= S^{-1}\lambda_j e_j = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j \Rightarrow SAS^{-1}e_j = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j, j = 1, \dots, n \\ \Rightarrow SAS^{-1} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

### Beispiel 18.3

$K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$

1.  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  Es ist  $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , das heißt  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist EV von  $\varphi$  zum EW 1.  
 $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , also ist  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  EV von  $\varphi$  zum EW  $-1$ . Somit:  
 $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$  ist eine Basis des  $\mathbb{R}^2$  aus EV von  $\varphi$ , das heißt  $\varphi$  ist diagonalisierbar.

In Termen von Matrizen:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$  ist diagonalisierbar, und mit  $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  ist dann ist  $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  Achtung: Das  $\varphi$  diagonalisierbar ist, heißt nicht, dass jeder Vektor aus  $V = \mathbb{R}^2$  ein EV von  $\varphi$  ist, zum Beispiel ist  $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

2.  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$  (= Drehung um  $\frac{\pi}{2}$ ). hat keinen EW.  
 Beweis dafür: später.

Ziel: Suche Kriterien für Diagonalisierbarkeit.

**Bemerkung 18.4**  $v_1, \dots, v_m$  EV von  $\varphi$  zu paarweise verschiedenen EW  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ . Dann ist  $(v_1, \dots, v_m)$  linear unabhängig, insbesondere ist  $m \leq \dim V$ . Insbesondere gilt: ist  $V$  endlichdimensional, dann hat  $\varphi$  höchstens  $\dim(V)$  Eigenwerte.

**Beweis** per Induktion nach  $m$ :

IA:  $m = 1 : v_1 \neq 0$ , da  $v_1$  EV  $\Rightarrow (v_1)$  linear unabhängig.

IS: sei  $m \geq 2$ , und die Aussage für  $m - 1$  bewiesen.

Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$  mit  $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m = 0$ . Außerdem:  $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_1 v_m = 0$

$$\begin{aligned} \implies \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \dots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1)v_m &= 0 \\ \alpha_2\lambda_2 - \lambda_1 &= \dots = \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1) = 0 \\ \implies \alpha_2 &= \dots = \alpha_m = 0 \\ \implies \alpha_1 v_1 &= 0 \implies \alpha_1 = 0 \implies (v_1, \dots, v_m) \text{ linear unabhängig} \quad \square \end{aligned}$$

**Folgerung 18.5**  $V$  endlichdimensional,  $\varphi$  habe  $n$  paarweise verschiedene EW, wobei  $n = \dim V$ . Dann ist  $\varphi$  diagonalisierbar.

**Beweis** Für  $i = 1, \dots, n$  sei  $v_i$  ein EV von  $\varphi$  zum EW  $\lambda_i \implies (v_1, \dots, v_n)$  linear unabhängig, wegen  $n = \dim V$  ist  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$  aus EV von  $\varphi$   $\square$

**Definition 18.6**  $\lambda \in K$

$\text{Eig}(\varphi, \lambda) := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$  heißt der Eigenraum von  $\varphi$  bezüglich  $\lambda$ .

$\mu_{\text{geo}}(\varphi, \lambda) := \dim \text{Eig}(\varphi, \lambda)$  heißt die geometrische Vielfachheit von  $\lambda$ .

Für  $A \in M(n \times n, K)$  setzen wir  $\text{Eig}(A, \lambda) := \text{Eig}(\tilde{A}, \lambda)$ ,  $\mu_{\text{geo}}(A, \lambda) := \mu_{\text{geo}}(\tilde{A}, \lambda)$ .

**Bemerkung 18.7**  $\lambda \in K$ . Dann gilt:

1.  $\text{Eig}(\varphi, \lambda)$  ist ein UVR von  $V$ .
2.  $\lambda$  ist EW von  $\varphi \iff \text{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\}$ .
3.  $\text{Eig}(\varphi, \lambda) \setminus \{0\}$  ist die Menge der zu  $\lambda$  gehörenden EV von  $\varphi$ .
4.  $\text{Eig}(\varphi, \lambda) = \ker(\lambda \text{id}_V - \varphi)$ , insbesondere ist  $\text{Eig}(A, \lambda) = \ker(\lambda E_n - A) = \text{Lös}(\lambda E_n - A, 0)$  für  $A \in M(n \times n, K)$
5. Sind  $\lambda_1, \lambda_2 \in K$  mit  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , dann  $\text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \cap \text{Eig}(\varphi, \lambda_2) = \{0\}$

**Beweis** 4. Es ist  $v \in \text{Eig}(\varphi, \lambda) \iff \varphi(v) = \lambda v \iff \lambda v - \varphi(v) = 0 \iff (\lambda \text{id}_V - \varphi)(v) = 0 \iff v \in \ker(\lambda \text{id}_V - \varphi)$  Es ist  $\text{Eig}(A, \lambda) = \ker(\lambda \text{id}_{K^n} - \tilde{A}) = \ker(\widetilde{\lambda E_n - A}) = \ker(\lambda E_n - A) = \text{Lös}(\lambda E_n - A, 0)$

1. aus 4.
2.  $\lambda$  EW von  $\varphi \iff \exists v \in V, v \neq 0$  mit  $\varphi(v) = \lambda v \iff \text{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\}$ .
3. klar.
5. Sei  $\lambda_1 \neq \lambda_2, v \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \cap \text{Eig}(\varphi, \lambda_2) \implies \lambda_1 v = \varphi(v) = \lambda_2 v \implies \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v = 0 \implies v = 0 \quad \square$

**Bemerkung 18.8**  $V$  endlichdimensional,  $\lambda \in K$ . Dann sind äquivalent:

1.  $\lambda$  ist EW von  $\varphi$
2.  $\det(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi) = 0$

**Beweis** 1.  $\iff \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\} \implies \ker(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi) \neq \{0\} \implies \lambda \operatorname{id}_V - \varphi$  nicht injektiv  $\implies \lambda \operatorname{id}_V - \varphi$  kein Isomorphismus  $\implies \det(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi) = 0$ .  $\square$

**Definition 18.9**  $K$  Körper,  $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$

$$\chi_A^{\text{char}} := \det(tE_n - A) = \det \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ -a_{n1} & \dots & & t - a_{nn} \end{pmatrix} \in K[t]$$

heißt das **charakteristische Polynom** von  $A$ .

**Anmerkung** Hierfür nötig: Determinanten von Matrizen mit Einträgen in einem kommutativen Ring.

In manchen Büchern  $\chi_A^{\text{char}} = \det(A - tE_n)$  (schlecht)

**Beispiel 18.10**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$$

$$\implies A\chi_a^{\text{char}} = \det \begin{pmatrix} t - 1 & -1 \\ -3 & t - 4 \end{pmatrix} = (t - 1)(t - 4) - 6 = t^2 - 5t - 2$$

**Bemerkung 18.11**  $A, B \in M(n \times n, K), A \approx B$ .

Dann ist  $\chi_A^{\text{char}} = \chi_B^{\text{char}}$ .

**Beweis**  $A \approx B \implies \exists S \in \operatorname{GL}(n, K) : B = SAS^{-1}$

$$\begin{aligned} \implies tE_n - B &= tE_n - SAS^{-1} = SS^{-1}tE_n - SAS^{-1} = StE_nS^{-1} - SAS^{-1} = S(tE_n - A)S^{-1} \\ \implies \chi_B^{\text{char}} &= \det(tE_n - B) = \det(S(tE_n - A)S^{-1}) = \det(S) \det(tE_n - A) \det(S^{-1}) = \\ &\quad \underbrace{\det(S) \det(S)^{-1}}_{=1} \det(tE_n - A) = \chi_A^{\text{char}} \quad \square \end{aligned}$$

**Definition 18.12**  $V$  endlichdim,  $n = \dim V$ ,  $\mathcal{B}$  Basis von  $V$ ,  $\varphi \in \operatorname{End}(V)$ ,  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$

$$\chi_{\varphi}^{\text{char}} := \chi_A^{\text{char}} = \det(tE_n - A) \in K[t]$$

heißt das **charakteristische Polynom** von  $\varphi$ .

**Anmerkung**  $\chi_\varphi^{char}$  ist wohldefiniert, dann: Ist  $\mathcal{B}'$  eine weitere Basis von  $V$ ,  $A' = M_{\mathcal{B}'}\varphi$ , dann ist  $A \approx A'$  und deshalb nach 18.11:  $\chi_A^{char} = \chi_{A'}^{char}$ .

**Satz 18.13**  $V$  endlichdimensional,  $n = \dim V$ . Dann gilt:

1.  $\chi_\varphi^{char}$  ist ein normiertes Polynom von Grad  $n$ :

$$\chi_\varphi^{char} = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_0$$

mit  $c_0 = (-1)^n \det \varphi$ ,  $c_{n-1} = -(\varphi)$  (vgl. Übung zur Spur)

2. Die Nullstellen von  $\chi_\varphi^{char}$  sind genau die EW von  $\varphi$ :

$$\lambda \in K \text{ ist EW von } \varphi \iff \chi_\varphi^{char} \lambda = 0$$

**Beweis** Sei  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$ ,  $A := M_{\mathcal{B}}(\varphi) \in M(n \times n, K)$

- 1.

$$\begin{aligned} \chi_\varphi^{char} &= \chi_A^{char} = \det \underbrace{(tE_n - A)}_{=: B = (B_{ij})} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) B_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot B_{n,\sigma(n)} \\ &= (t - a_{11} \cdot \dots \cdot (t - a_{nn})) + \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n \setminus \{\text{id}\}} \operatorname{sgn}(\sigma) B_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot B_{n,\sigma(n)}}_{:=g} \end{aligned}$$

Für  $\sigma \in S_n \setminus \{\text{id}\}$  treten in  $B_{1,\sigma(1)}, \dots, B_{n,\sigma(n)}$  höchstens  $n-2$  Diagonalelemente auf, also  $\deg(g) \leq n-2$ .

$$\implies \chi_\varphi^{char} = t^n - (a_{11} + \dots + a_{nn})t^{n-1} + \text{Terme kleineren Grades}$$

insbesondere:

$$c_{n-1} = -(a_{11} + \dots + a_{nn}) = -A = -\varphi$$

Es ist

$$c_0 = \chi_\varphi^{char}(0) = (\det(tE_n - A))(0) = \det(0E_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

2. Aus  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  folgt  $\lambda E_n - A = M_{\mathcal{B}}(\lambda \text{id}_V - \varphi)$ . Also:

$$\begin{aligned} \chi_\varphi^{char}(\lambda) = 0 &\iff (\det(tE_n - A))(\lambda) = 0 \implies \det(\lambda E_n - A) = 0 \iff \det(M_{\mathcal{B}}(\lambda \text{id}_V - \varphi)) = 0 \\ &\implies \det(\lambda \text{id}_V - \varphi) = 0 \iff \lambda \text{ ist EW von } \varphi \quad \square \end{aligned}$$

**Definition 18.14**  $\lambda \in K$

$$\mu_{alg}(\varphi, \lambda) := \mu(\chi_\varphi^{char}, \lambda)$$

heißt die **algebraische Vielfachheit**

**Beispiel 18.15**

$$1. \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \text{ Es ist } \chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{pmatrix} =$$

$$t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1) \in \mathbb{R}[t] \implies \text{EW von } \varphi : 1, -1.$$

$$\text{Es ist } \mu_{alg}(\varphi, 1) = 1, \mu_{alg}(\varphi, -1) = 1$$

$$\text{Eig}(\varphi, 1) = \text{Eig}(A, 1) = \text{Lös}(E_2 - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{also } \mu_{geo}(\varphi, 1) = \dim \text{Eig}(\varphi, 1) = 1$$

$$\text{Eig}(\varphi, -1) = \text{Eig}(A, -1) = \text{Lös}((-1) \cdot E_2 - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{also } \mu_{geo}(\varphi, -1) = 1.$$

$$2. \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \text{ Es ist } \chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} =$$

$$t^2 + 1, \chi_\varphi^{char} \text{ hat keine NS in } \mathbb{R} \implies \varphi \text{ hat keine EW.}$$

$$3. \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \text{ Es ist } \chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix} =$$

$$(t-1)^2 \implies 1 \text{ ist einziger EW von } \varphi, \text{ es ist } \mu_{alg}(\varphi, 1) = 2$$

$$\text{Eig}(\varphi, 1) = \text{Eig}(A, 1) = \text{Lös}(1E_2 - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\implies \mu_{geo}(\varphi, 1) = 1. \implies \varphi \text{ ist nicht diagonalisierbar.}$$

**Satz 18.16**  $V$  endlichdimensional,  $n = \dim V$

1. Ist  $\varphi$  diagonalisierbar, dann ist  $\chi_\varphi^{char} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n)$  mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ , nicht notwendig verschieden, das heißt  $\chi_\varphi^{char}$  zerfällt in Linearfaktoren.
2. Ist  $\chi_\varphi^{char} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n)$  mit paarweise verschiedene  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ , dann ist  $\varphi$  diagonalisierbar.

**Beweis** 1. Sei  $\varphi$  diagonalisierbar  $\rightarrow V$  besitzt Basis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  aus EV zu EW  $\lambda_i \in K$ .

$$\implies M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies \chi_\varphi^{char} = \det \begin{pmatrix} t - \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t - \lambda_n \end{pmatrix} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n)$$

2. Aus  $\chi_\varphi^{char} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n)$  mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  paarweise verschieden  $\implies \lambda_1, \dots, \lambda_n$  sind paarweise verschiedene EW von  $\varphi \implies \varphi$  diagonalisierbar.  $\square$

**Bemerkung 18.17**  $V$  endlichdimensional,  $n = \dim V$ ,  $\lambda$  EW von  $\varphi$ . Dann gilt:

$$1 \leq \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \leq \mu_{alg}(\varphi, \lambda)$$

**Beweis** Sei  $(v_1, \dots, v_s)$  eine Basis von  $\text{Eig}(\varphi, \lambda) \implies s = \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \geq 1$ , da  $\lambda$  EW von  $\varphi$ . Nach Basiserweiterungssatz  $\exists v_{s+1}, \dots, v_n \in V$ , sodass  $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$  ist.

$$\begin{aligned} \implies A := A_{\mathcal{B}}(\varphi) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} \lambda & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & \lambda & & & \\ \hline & & 0 & & & \end{array} \right), A' \in M((n-s) \times (n-s), K) \\ \implies \chi_{\varphi}^{char} &= \chi_A^{char} = \det \left( \begin{array}{ccc|ccc} t-\lambda & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & t-\lambda & & & \\ \hline & & 0 & & & \end{array} \right) = (t-\lambda)^s \det(tE_{n-s} - A') = (t-\lambda)^s \chi_{A'}^{char} \\ \implies \mu_{geo}(\varphi, \lambda) &= s \leq \mu(\chi_{\varphi}^{char}, \lambda) = \mu_{alg}(\varphi, \lambda) \quad \square \end{aligned}$$

**Bemerkung 18.18**  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  paarweise verschiedene EW von  $\varphi$ . Dann gilt:

$$\text{Eig}(\varphi, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \text{Eig}(\varphi, \lambda_j) = \{0\} \forall i \in \{1, \dots, r\}$$

**Beweis** Sei  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Annahme:  $\exists v_i \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \text{Eig}(\varphi, \lambda_j) : v_i \neq 0$ .

$$\implies \exists v_j \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_j), j = 1, \dots, r, j \neq i : v_i = v_1 + \dots + v_{i-1} + v_{i+1} + \dots + v_r$$

Setze  $J := \{j \in \{1, \dots, r\}, j \neq i \mid v_j \neq 0\} = \{j_1, \dots, j_s\}$

$$\implies v_i = v_{j_1} + \dots + v_{j_s} \implies v_{j_1} + \dots + v_{j_s} + (-1)v_i = 0 \implies (v_{j_1}, \dots, v_{j_s}, v_i) \text{ linear abhängig} \quad \spadesuit \quad \square$$

**Satz 18.19**  $V$  endlichdimensional. Dann sind äquivalent:

1.  $\varphi$  diagonalisierbar
2.  $\chi_{\varphi}^{char}$  zerfällt in Linearfaktoren und  $\mu_{alg}(\varphi, \lambda) = \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \forall$  EW von  $\varphi$ .
3. Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die paarweise verschiedenen EW von  $\varphi$ , dann ist

$$V = \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Eig}(\varphi, \lambda_k)$$

In diesem Fall erhält man eine Basis von  $V$  aus EV von  $\varphi$ , indem man Basen von  $\text{Eig}(\varphi, \lambda_i), i = 1, \dots, k$  zusammenfügt.



**Beweis** 1.  $\implies$  2. Sei  $\varphi$  diagonalisierbar.  $\implies \exists$  Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  aus EV von  $\varphi$ . Wir ordnen die EV in  $\mathcal{B}$  den verschiedenen EW von  $\varphi$  zu und gelangen so zu Familien  $\mathcal{B}_i := \left(v_1^{(i)}, \dots, v_{s_i}^{(i)}\right)$  von linear unabhängigen im  $\text{Eig}(\varphi, \lambda_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$

a) Behauptung:  $\mathcal{B}_i$  ist eine Basis von  $\text{Eig}(\varphi, \lambda_i)$ , denn gezeigt:  $\mathcal{B}_i$  ist ein ES von  $\text{Eig}(\varphi, \lambda_i)$ .  
Sei  $v \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_i) \leq V$

$$\begin{aligned} \implies \exists \lambda^{(j)} \in K : v &= \sum_{j=1}^k \left( \lambda_1^{(j)} v_1^{(j)} + \dots + \lambda_{s_j}^{(j)} v_{s_j}^{(j)} \right) \\ \implies \underbrace{v - \left( \lambda_1^{(i)} v_1^{(i)} + \dots + \lambda_{s_i}^{(i)} v_{s_i}^{(i)} \right)}_{\in \text{Eig}(\varphi, \lambda_i)} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \left( \lambda_1^{(j)} v_1^{(j)} + \dots + \lambda_{s_j}^{(j)} v_{s_j}^{(j)} \right) \in \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \text{Eig}(\varphi, \lambda_j) \\ \implies v &= \lambda_1^{(i)} v_1^{(i)} + \dots + \lambda_{s_i}^{(i)} v_{s_i}^{(i)} \end{aligned}$$

a) Nach 1. ist

$$\mu_{geo}(\varphi, \lambda_1) + \dots + \mu_{geo}(\varphi, \lambda_k) = s_1 + \dots + s_k = \dim V$$

$\chi_\varphi^{char}$  zerfällt nach 18.16 in Linearfaktoren, somit

$$\mu_{alg}(\varphi, \lambda_1) + \dots + \mu_{alg}(\varphi, \lambda_k) = \deg(\chi_\varphi^{char}) = \dim V$$

Wegen  $\mu_{geo}(\varphi, \lambda_i) \leq \mu_{alg}(\varphi, \lambda_i)$  für  $i = 1, \dots, k$  folgt:  $\mu_{geo}(\varphi, \lambda_i) = \mu_{alg}(\varphi, \lambda_i)$  für  $i = 1, \dots, k$ .

2.  $\implies$  3. Es gelte 2. Es seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die verschiedenen EW von  $\varphi$ . Wir setzen  $W := \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) + \dots + \text{Eig}(\varphi, \lambda_k)$ . Wegen 18.18 ist

$$W = \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Eig}(\varphi, \lambda_k)$$

$$\begin{aligned} \implies \dim W &= \dim \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) + \dots + \dim \text{Eig}(\varphi, \lambda_k) \\ &= \mu_{geo}(\varphi, \lambda_1) + \dots + \mu_{geo}(\varphi, \lambda_k) \\ &= \mu_{alg}(\varphi, \lambda_1) + \dots + \mu_{alg}(\varphi, \lambda_k) = \deg(\chi_\varphi^{char}) \\ &= \dim V \end{aligned}$$

$$\implies W = V$$

3.  $\implies$  1. Es gelte 3. Sei  $\mathcal{B} = \left(v_1^{(i)}, \dots, v_{s_i}^{(i)}\right)$  eine Basis von  $\text{Eig} \varphi, \lambda_i \implies \mathcal{B} := \left(v_1^{(1)}, \dots, v_{s_1}^{(1)}, \dots, v_1^{(k)}, v_{s_r}^{(k)}\right)$  ist eine Basis von  $V$  aus EV von  $\varphi \implies \varphi$  diagonalisierbar.  
 $\square$

**Anmerkung** In der Praxis ist es in der Regel schwierig festzustellen, ob  $\chi_\varphi^{char}$  in Linearfaktoren zerfällt oder die NS von  $\chi_\varphi^{char}$  zu bestimmen. Für Polynome von Grad  $\geq 5$  existiert keine Lösungsformel zur Bestimmung der NS. (Algebra 1 Vorlesung), die NS müssen numerisch bestimmt werden.

**Beispiel 18.20**

1. In 18.15.3 ist  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$  ist  $\chi_A^{char} = (t-1)^2$ ,  $\mu_{geo}(A, 1) = 1 < \mu_{alg}(A, 1) = 2 \implies A$  nicht diagonalisierbar.

2.  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$

$$\chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t-2 & 1 & 1 \\ 6 & t-1 & -1 \\ -3 & 1 & t+2 \end{pmatrix} = t^3 - t^2 - 5t - 3 = (t+1)^2(t-3)$$

EW von  $A$  :  $-1, 3$ ,  $\mu_{alg} = (A, -1) = 2$ ,  $\mu_{alg}(A, 3) = 1$

$$\text{Eig}(A, -1) = \text{Lös}(-E_n - A, 0) = \text{Lös} \left( \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, 0 \right) = \text{Lin} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

$\mu_{geo}(A, -1) = 2 = \mu_{alg}(A, -1)$ .

$$\text{Eig}(A, 3) = \text{Lös}(3E_n - A, 0) = \text{Lös} \left( \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, 0 \right) = \text{Lin} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mu_{geo}(A, 3) = 1 = \mu_{alg}(A, 3). \text{ Also ist } A \text{ diagonalisierbar, } \mathcal{B} := \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

ist eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  aus EV von  $A$ ,

$$M_{\mathcal{B}}(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$$

Mit

$$S := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, SAS^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$$

**Anmerkung** Ist  $f = a_m t^m + \dots + a_1 t + a_0 \in K[t]$ , dann können wir in  $f$ :

- Endomorphismen  $\varphi \in \text{End}_K(V)$  einsetzen durch die Regel

$$f(\varphi) := a_m \varphi^m + \dots + a_1 \varphi + a_0 \text{id}_V \in \text{End}_K(V)$$

wobei  $\varphi^k := \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{k\text{-mal}}$

- Matrizen  $A \in M(n \times n, K)$  einsetzen durch die Regel

$$f(A) := a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 E_n \in M(n \times n, K)$$

Für  $f, g \in K[t]$ ,  $\varphi \in \text{End}_K(V)$  ist  $f(\varphi) \circ g(\varphi) = (fg)(\varphi) = (gf)(\varphi) = g(\varphi) \circ f(\varphi)$ , analog für Matrizen.

**Satz 18.21 (Satz von Cayley-Hamilton)**  $V$  endlichdimensional. Dann gilt:  $\chi_\varphi^{\text{char}}(\varphi) = 0$ . Insbesondere gilt für alle  $A \in M(n \times n, K)$ :  $\chi_A^{\text{char}}(A) = 0$ .

**Beweis** 1. Es genügt zu zeigen, dass  $\chi_A^{\text{char}} = 0$  für alle  $A \in M(n \times n, K)$ , denn:

Ist  $\varphi \in \text{End}_K(V)$ ,  $\mathcal{B}$  Basis von  $V$ ,  $A = A_{\mathcal{B}}$ ,  $\chi_\varphi^{\text{char}} = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0 = \chi_A^{\text{char}} \in K[t]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \chi_A^{\text{char}}(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_0 E_n = M_{\mathcal{B}}(\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \cdots + a_0 \text{id}_V) \\ &= M_{\mathcal{B}}(\chi_\varphi^{\text{char}}(\varphi)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \chi_\varphi^{\text{char}}(\varphi) = 0$$

2. Sei  $A \in M(n \times n, K)$ . Wir setzen  $D := (tE_n - A)^\# \in M(n \times n, K[t])$

$$\Rightarrow D(tE_n - A) = \det(tE_n - A)E_n = \chi_A^{\text{char}} E_n$$

Sei  $D = \sum_{i=0}^{n-1} D_i t^i$  mit  $D_i \in M(n \times n, K)$ ,  $\chi_A^{\text{char}} = \sum_{i=0}^n a_i t^i$  mit  $a_i \in K$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{i=0}^n a_i E_n t^i &= \left( \sum_{i=0}^n a_i t^i \right) E_n = \chi_A^{\text{char}} E_n = D(tE_n - A) \\ &= \left( \sum_{i=0}^{n-1} D_i t^i \right) (tE_n - A) = \sum_{i=0}^{n-1} D_i t^{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} D_i A t^i \\ &= \sum_{i=0}^n (D_{i-1} - D_i A) t^i \quad (\text{mit } D_{-1} := 0, D_n := 0) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert:  $a_i A_n = D_{i-1} - D_i A$  für  $i = 0, \dots, n$

$$\begin{aligned} \chi_A^{\text{char}} &= \sum_{i=0}^n a_i A^i = \sum_{i=0}^n (a_i E_n) A^i = \sum_{i=0}^n (D_{i-1} - D_i A) A^i \\ &= (D_{-1} - D_0 A) + (D_0 - D_1 A) A + \cdots + (D_{n-1} - D_n A) A^n \\ &= D_{-1} - D_n A^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad \square$$

**Anmerkung** Der „Beweis“

$$\chi_A(A) = (\det(tE_n - A))(A) = \det(AE_n - A) = \det(A - A) = \det(0) = 0$$

funktioniert nicht, denn:

$$\underbrace{\underbrace{(\det(tE_n - A))}_{\in K[t]}(A)}_{\in M(n \times n, K)} \quad \underbrace{\det(AE_n - A)}_{\in M(n \times n, K)}_{\in K}$$

**Satz+Definition 18.22**  $V$  endlichdimensional,  $I := \{f \in K[t] \mid f(\varphi) = 0\}$ . Dann gilt:

1. Es gibt ein eindeutig bestimmtes, normiertes Polynom  $\chi_\varphi^{\min} \in K[t]$ , sodass

$$I = \chi_\varphi^{\min} K[t] := \{\chi_\varphi^{\min} q \mid q \in K[t]\}$$

$\chi_\varphi^{\min}$  heißt das **Minimalpolynom** von  $\varphi$ .  $\chi_\varphi^{\min}$  ist das eindeutig bestimmte normierte Polynom kleinsten Grades mit  $f(\varphi) = 0$ .

2.  $\chi_\varphi^{\min} \mid \chi_\varphi^{\text{char}}$ , das heißt  $\exists q \in K[t] : \chi_\varphi^{\text{char}} = q \cdot \chi_\varphi^{\min}$

Analog konstruiert man für  $A \in M(n \times n, K)$ , das Minimalpolynom  $\chi_A^{\min}$ . Es ist  $\chi_A^{\min} = \chi_{\tilde{A}}^{\min}$ .

**Beweis** 1. Existenz: Wegen Satz von Cayley-Hamilton ist  $\chi_\varphi^{\text{char}}(\varphi) = 0$ . Somit ist  $\chi_\varphi^{\text{char}} \in I$ , insbesondere  $I \neq \emptyset$ .

$\deg(f) \mid f \in I, f \neq 0$  ist eine nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{N}_0$ , hat somit ein minimales Element.  $\implies \exists g \in I, g \neq 0 : \deg(g)$  minimal in  $I \setminus \{0\}$  ist. Wir setzen

$$\chi_\varphi^{\min} := \frac{1}{l(g)} g \implies \chi_\varphi^{\min} \text{ normiert}$$

und es ist

$$\chi_\varphi^{\min}(\varphi) = \frac{1}{l(g)} g(\varphi) = 0$$

das heißt  $\chi_\varphi^{\min} \in I$ .

**Behauptung:**  $I = \chi_\varphi^{\min} K[t]$ , denn:

„ $\supseteq$ “ Für  $q \in K[t]$  ist  $(\chi_\varphi^{\min} q)(\varphi) = \underbrace{\chi_\varphi^{\min}(\varphi)}_{=0} \cdot g(\varphi) = 0$ , das heißt  $\chi_\varphi^{\min} q \in I$ .

„ $\subseteq$ “ Sei  $f \in I \implies \exists q, r \in K[t] : f = q\chi_\varphi^{\min} + r, \deg(r) < \deg(\chi_\varphi^{\min})$

$$\implies 0 = f(\varphi) = (q\chi_\varphi^{\min} + r)(\varphi) = q(\varphi) \cdot \chi_\varphi^{\min}(\varphi) + r(\varphi) = r(\varphi) \implies r \in I$$

Wegen  $\deg(r) < \deg(\chi_\varphi^{\min})$  und der Minimalität des Grades von  $\chi_\varphi^{\min}$  in  $I \setminus \{0\}$  folgt  $r = 0 \implies f = q\chi_\varphi^{\min}$

Eindeutigkeit: Sei  $\chi \in K[t]$  ein weiteres Polynom mit  $I = \chi K[t] = \chi_\varphi^{\min} K[t]$

$$\implies \chi = \chi \cdot 1 \in I = \chi_\varphi^{\min} K[t] \implies \exists q \in K[t] : \chi = \chi_\varphi^{\min} q$$

Analog  $\exists p \in K[t] : \chi_\varphi^{\min} = \chi p$

$$\implies \chi_\varphi^{\min} = \chi p = \chi_\varphi^{\min} q p \implies qp = 1 \implies p, q \in K^*$$

Wegen  $\chi, \chi_\varphi^{\min}$  normiert folgt  $p = q = 1$ , also  $\chi = \chi_\varphi^{\min}$

2. Wegen  $\chi_\varphi^{char}(\varphi) = 0$  nach Satz von Cayley-Hamilton folgt  $\chi_\varphi^{char} \in I$ .

$$\implies \exists q \in K[t] : \chi_\varphi^{char} = q\chi_\varphi^{min}$$

das heißt  $\chi_\varphi^{min} \mid \chi_\varphi^{char}$

□

**Bemerkung 18.23**  $V$  endlichdimensional,  $\lambda \in K$ . Dann gilt:

$$\chi_\varphi^{char}(\lambda) = 0 \iff \chi_\varphi^{min}(\lambda) = 0$$

Insbesondere haben  $\chi_\varphi^{char}$  und  $\chi_\varphi^{min}$  dieselben NS.

**Beweis** „  $\Leftarrow$  “ Sei  $\chi_\varphi^{min}(\lambda) = 0$ . Nach 18.22  $\exists q \in K[t]$  mit  $\chi_\varphi^{char} = q\chi_\varphi^{min}$

$$\implies \chi_\varphi^{char}(\lambda) = q(\lambda) \underbrace{\chi_\varphi^{min}(\lambda)} = 0$$

„  $\implies$  “ Sei  $\chi_\varphi^{char}(\lambda) = 0 \implies \lambda$  ist EW von  $\varphi$ , sei  $v \in V$  EV zum EW  $\lambda$ . Sei  $\chi_\varphi^{min} = t^r + a_{r-1}t^{r-1} + \dots + a_1t + a_0$

$$\begin{aligned} \implies 0 &= (\chi_\varphi^{min}(\varphi))(v) = (\varphi^r + a_{r-1}\varphi^{r-1} + \dots + a_1\varphi + a_0 \text{id}_V)(v) \\ &= \lambda^r v + a_{r-1}\lambda^{r-1}v + \dots + a_1\lambda v + a_0v \\ &= \underbrace{(\lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)}_{=\chi_\varphi^{min}(\lambda)} v \end{aligned}$$

$$\implies \chi_\varphi^{min}(\lambda) = 0.$$

□

**Beispiel 18.24**

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{Q})$ ,  $\chi_A^{char} = (t-1)^2$  Wegen 18.22, 18.23 gilt:  $\chi_A^{min}$  normiert,  $\chi_A^{min} \mid \chi_A^{char}$ ,  $\chi_A^{char}(1) = 0 \implies \chi_A^{min} \in \{t-1, (t-1)^2\}$  Wegen  $A - E_2 = 0$  ist  $\chi_A^{min} = t-1$

2.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{Q}) \implies \chi_A^{char} = (t-1)(t+1) \implies \chi_A^{min} = (t-1)(t+1)$

3.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$

$$\implies \chi_A^{char} = (t+1)^2(t-3) \implies \chi_A^{min} = \{(t+1)(t-3), (t+1)^2(t-3)\}$$

Es ist  $(A + E_n)(A - 3E_n) \neq 0$ , also ist  $\chi_A^{min} = (t+1)^2(t-3)$

$$4. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \implies \chi_A^{char} = (t+1)^2(t-3)$$

$$\chi_A^{min} \in \{(t+1)(t-3), (t+1)^2(t-3)\}$$

$$\text{Es ist } (A + E_n)(A - 3E_n) = 0 \implies \chi_A^{min} = (t+1)(t-3)$$

**Satz 18.25**  $V$  endlichdimensional. Dann sind äquivalent:

1.  $\varphi$  diagonalisierbar
2. Das Minimalpolynom  $\chi_\varphi^{min}$  zerfällt in Linearfaktoren und besitzt nur einfache NS, das heißt  $\chi_\varphi^{min} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r)$  mit paarweise verschiedenen  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$

**Beweis** 1.  $\implies$  2. Sei  $\varphi$  diagonalisierbar, seinen  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  die verschiedenen EW von  $\varphi$ . Sei  $v \in V$ . Da  $\varphi$  diagonalisierbar, ist  $V = \bigoplus_{i=1}^r \text{Eig}(\varphi, \lambda_i)$  nach 18.19, das heißt es existieren  $v_i \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_i), i = 1, \dots, r$  mit  $v = v_1 + \dots + v_r$

$$\begin{aligned} \implies (\varphi - \lambda_r \text{id}_V)(V) &= \varphi(v_1) + \dots + \varphi(v_r) - \lambda_r v_1 - \dots - \lambda_r v_r \\ &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r - \lambda_r v_1 - \dots - \lambda_r v_r \\ &= (\lambda_1 - \lambda_r)v_1 + \dots + (\lambda_{r-1} - \lambda_r)v_{r-1} \\ &\in \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Eig}(\varphi, \lambda_{r-1}) \end{aligned}$$

analog:

$$(\varphi - \lambda_{r-1} \text{id}_V) \circ (\varphi - \lambda_r \text{id}_V)(v) \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Eig}(\varphi, \lambda_{r-2})$$

Induktiv erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \circ (\varphi - \lambda_2 \text{id}_V) \circ \dots \circ (\varphi - \lambda_r \text{id}_V)(V) \\ \implies 0 &= (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \circ \dots \circ (\varphi - \lambda_r \text{id}_V) \\ \implies 0 &= ((t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r))(\varphi) \end{aligned}$$

$\implies$  Es existiert  $g \in K[t]$  mit  $(t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r) = g\chi_\varphi^{min}$ . Wegen  $\chi_\varphi^{min}(\lambda_1) = \dots = \chi_\varphi^{min}(\lambda_r) = 0$  nach 18.23 existiert  $h \in K[t]$  mit

$$\chi_\varphi^{min} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r)h = g\chi_\varphi^{min}h = gh\chi_\varphi^{min} \implies gh = 1$$

$$\implies g, h \in K^*, \chi_\varphi^{min} \text{ normiert} \implies g = h = 1 \implies \chi_\varphi^{min} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r)$$

2.  $\implies$  1. Sei  $\chi_\varphi^{min} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r)$ , wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$  paarweise verschieden. Nach 18.23 sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  die EW von  $\varphi$ . Beweis der Behauptung per Induktion nach  $n := \dim V$

IA:  $n = 1$  klar

IS: Sei  $n > 1$ , die Behauptung sei für  $1, \dots, n - 1$  gezeigt.

- a) Behauptung:  $V = \ker(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \oplus \text{im}(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)$ , denn: Nach 7.6  $\exists v, s \in K[t]$  mit

$$(t - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r) = q(t - \lambda_1) + s, \deg(s) < \deg(t - \lambda_1) = 1$$

das heißt  $s$  ist konstantes Polynom. Wegen

$$s(\lambda_1) = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda_1 - \lambda_r) - q(\lambda_1) \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_1)}_{=0} \neq 0$$

das heißt  $s \in K^*$ . Einsetzen von  $\varphi$  liefert:

$$(\varphi - \lambda_2 \text{id}_V) \circ \dots \circ (\varphi - \lambda_r \text{id}_V) = q(\varphi) \circ (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) + s \text{id}_V$$

$\implies \forall v \in V$  ist

$$\begin{aligned} sv &= (\varphi - \lambda_2 \text{id}_V) \circ \dots \circ (\varphi - \lambda_r \text{id}_V)(v) - q(\varphi) \circ (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(v) \\ \implies v &= \frac{1}{s} \underbrace{(\varphi - \lambda_2 \text{id}_V) \circ \dots \circ (\varphi - \lambda_r \text{id}_V)(v)}_{=:u} - \underbrace{q(\varphi) \circ (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(v)}_{=:w} \\ (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(u) &= \frac{1}{s} (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \circ \dots \circ (\varphi - \lambda_r \text{id}_V)(v) = \frac{1}{s} \underbrace{\chi_\varphi^{\min}(\varphi)(v)}_{=0} = 0 \\ \implies u &\in \ker(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \\ w &= \frac{1}{s} q(\varphi) \circ (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(v) = \frac{1}{s} ((\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \circ q(\varphi))(v) \in \text{im}(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \\ \implies V &= \ker(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) + \text{im}(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \end{aligned}$$

Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen ist

$$\dim \ker(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) + \dim \text{im}(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) = \dim V$$

$\implies$  Summe ist direkt  $\implies$  Behauptung.

- b) Wir setzen  $W := \text{im}(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)$ , dann ist

$$V = \ker(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \oplus W = \underbrace{\text{Eig}(\varphi, \lambda_1)}_{\neq 0} \oplus W$$

$\implies \dim W < \dim V$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \varphi \circ (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) &= \varphi \circ \varphi - \lambda_1 \varphi = (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \circ \varphi \\ \implies \varphi(W) &= \varphi((\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(V)) = (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(\varphi(V)) \leq (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(V) = W \end{aligned}$$

Wir betrachten die Abbildung  $\psi := \varphi|_W^W : W \rightarrow W$ . Sei  $\chi_\varphi^{\min} = t^n + a_{n-1}t^{n-1} +$

$\cdots + a_0 \implies \forall w \in W$  ist

$$\begin{aligned}\chi_\varphi^{\min}(\psi)(w) &= (\psi^n + a_{n-1}\psi^{n-1} + \cdots + a_0 \text{id}_V)(w) \\ &= \psi^n(w) + a_{n-1}\psi^{n-1}(w) + \cdots + a_0 w \\ &= \varphi^n(w) + a_{n-1}\varphi^{n-1}(w) + \cdots + a_0 w \\ &= (\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \cdots + a_0 \text{id}_V)(w) \\ &= \underbrace{(\chi_\varphi^{\min}(\varphi))}_{=0}(w) = 0\end{aligned}$$

$$\implies \chi_\varphi^{\min}\psi = 0 \implies \chi_\psi^{\min} \mid \chi_\varphi^{\min} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r)$$

$\implies \chi_\psi^{\min}$  zerfällt in Linearfaktoren und besitzt nur einfache Nullstellen.  $\implies \psi$  diagonalisierbar, das heißt es existiert eine Basis von  $W$  aus EV zu  $\psi = \varphi|_W$ . Wegen  $V = \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus W$  existiert nach 11.8 eine Basis von  $V$  aus EV zu  $\varphi$ , das heißt  $\varphi$  ist diagonalisierbar.  $\square$

**Beispiel 18.2** 1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ . Es ist  $\chi_A^{\min} = (t+1)^2(t-3) \implies A$  ist nicht diagonalisierbar.

2.  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ . Es ist  $\chi_A^{\min} = (t+1)(t-3) \implies A$  ist diagonalisierbar.

## 19 Dualraum

In diesem Abschnitt sei  $V$  ein  $K$  Vektorraum.

**Definition 19.1 (Dualraum)**

$$V^* := \text{Hom}_K(V, K) = \{\varphi : V \rightarrow K \mid \varphi \text{ linear}\}$$

heißt der **Dualraum** von  $V$ , die Elemente aus  $V^*$  heißen **Linearformen** auf  $V$ .

**Beispiel 19.2**

1.  $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n, \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1$  ist eine Linearform auf  $\mathbb{R}^n$ .

2.  $K = \mathbb{R}, V = \mathcal{C}[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$

$$\varphi : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$$

ist eine Linearform auf  $\mathcal{C}[0, 1]$



**Bemerkung+Definition 19.3**  $V$  endlichdimensional  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  Basis von  $V$ . Wir definieren für  $i = 1, \dots, n$  die linear Abbildung

$$v_i^* : V \rightarrow K, v_j \mapsto \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Dann ist  $\mathcal{B}^* := (v_1^*, \dots, v_n^*)$  ist eine Basis von  $V^*$ , die **duale Basis** zu  $\mathcal{B}$ .

**Beweis** 1.  $\mathcal{B}^*$  ist linear unabhängig: Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K, \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^* = 0. \implies \forall i \in \{1, \dots, n\}$  ist

$$0 = \underbrace{\lambda_1 v_1^*(v_i)}_{=0} + \dots + \underbrace{\lambda_{i-1} v_{i-1}^*(v_i)}_{=0} + \underbrace{\lambda_i v_i^*(v_i)}_{=1} + \underbrace{\lambda_{i+1} v_{i+1}^*(v_i)}_{=0} + \dots + \underbrace{\lambda_n v_n^*(v_i)}_{=0} = \lambda_i$$

2.  $\mathcal{B}^*$  ist ES von  $V^*$ : Sei  $\varphi \in V^*$ . Setze  $\lambda_i := \varphi(v_i)$  für  $i = 1, \dots, n$

$$\implies (\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*)(v_i) = \lambda_i = \varphi(v_i), i = 1, \dots, n$$

$$\implies \varphi = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^* \quad \square$$

**Anmerkung** Ist  $V$  unendlichdimensional mit Basis  $(v_i)_{i \in I}$ , dann ist  $(v_i^*)_{i \in I}$  (analog definiert) linear unabhängig, aber kein ES von  $V$ .

**Notation:**

Elemente des  $K^n$  schreiben wir im Folgenden als Spaltenvektoren. Ist  $\varphi \in (K^n)^* = \text{Hom}_K(K^n, K)$ , dann existiert nach LA1 ein eindeutig bestimmtes  $A = (a_1 \dots a_n) \in M(1 \times n, K)$  mit

$$\varphi = \tilde{A} : K^n \rightarrow K, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto (a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Es ist  $A = M_{(e_1)}^{(e_1, \dots, e_n)}(\varphi)$ . Dementsprechende schreiben wir Elemente von  $(K^n)^*$  als Zeilenvektoren.

**Beispiel 19.4**

1.  $V = K^n, \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \implies \mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$  duale Basis zu  $\mathcal{B}$  mit

$$e_i^* = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

Für die Abbildung aus 19.2.1 gilt  $\varphi = e_1^* = (1, \dots, 0)$ .

2.  $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (v_1, v_2), v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Es ist  $e_1 = v_1, e_2 = v_2 - v_1$

$$\implies v_1^*(e_1) = v_1^*(v_1) = 1, v_1^*(e_2) = v_1^*(v_2 - v_1) = \underbrace{v_1^*(v_2)}_{=0} - \underbrace{v_1^*(v_1)}_{=1} = -1$$

$$\implies v_1^* = (1, -1)$$

$$\implies v_2^*(e_1) = v_2^*(v_1) = 0, v_2^*(e_2) = v_2^*(v_2 - v_1) = \underbrace{v_2^*(v_2)}_{=1} - \underbrace{v_2^*(v_1)}_{=0} = 1$$

$$\implies v_2^* = (0, 1)$$

**Folgerung 19.5**  $V$  endlichdimensional,  $v \in V, v \neq 0$ . Dann existiert  $\varphi \in V^*$  mit  $\varphi(v) \neq 0$

**Beweis** Ergänze die linear unabhängige Familie  $(v)$  zu einer Basis  $(v, v_2, \dots, v_n)$  von  $V$ . Dann ist  $(v^*, v_2^*, \dots, v_n^*)$  eine Basis von  $V^*$ , und es ist  $v^*v = 1 \neq 0$ .  $\square$

**Anmerkung** Die Aussage gilt auch ohne die Voraussetzung „ $V$  endlichdimensional.“

**Folgerung 19.6**  $V$  endlichdimensional,  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  Basis von  $V$ ,  $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$  duale Basis zu  $\mathcal{B}$ . Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\psi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow V^*, v_i \mapsto v_i^* \quad (i = 1, \dots, n)$$

Insbesondere ist  $\dim V = \dim V^*$

**Beweis** folgt direkt aus 19.3  $\square$

**Bemerkung+Definition 19.7**  $U \subseteq V$  UVR

$$U^0 := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \forall u \in U\} \subseteq V^*$$

heißt der Annulator von  $U$ .  $U^0$  ist ein UVR von  $V^*$ .

**Beweis** leicht nachzurechnen.  $\square$

**Satz 19.8**  $V$  endlichdimensional,  $U \subseteq V$  UVR,  $(u_1, \dots, u_k)$  von  $U$ ,  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r)$  Basis von  $V$ . Dann ist die Teilfamilie  $(v_1^*, \dots, v_r^*)$  von  $\mathcal{B}^*$  eine Basis von  $U^0$ . Insbesondere ist  $\dim U^0 = \dim V - \dim U$ .

**Beweis** 1.  $(v_1^*, \dots, v_r^*)$  linear unabhängig, da Teilfamilie der Basis  $\mathcal{B}^*$  von  $V^*$

2.  $\text{Lin}((v_1^*, \dots, v_r^*)) = U^0$

„ $\subseteq$ “  $\varphi \in \text{Lin}((v_1^*, \dots, v_r^*)) \implies$  Es existieren  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$  mit  $\varphi = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_r v_r^*$ .

$\implies$  Für  $i = 1, \dots, k$  ist  $\varphi(u_i) = \lambda_1 v_1^*(u_i) + \dots + \lambda_r v_r^*(u_i) = 0 \implies \varphi(u) = 0 \forall u \in U$

„ $\supseteq$ “ Sei  $\varphi \in U^0$ . Es existieren  $\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$  mit  $\varphi = \mu_1 u_1^* + \dots + \mu_k u_k^* + \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_r v_r^* \implies$  Für  $i = 1, \dots, k$  ist  $0 = \varphi(u_i) = \mu_i \implies \varphi \in \text{Lin}((v_1^*, \dots, v_r^*))$

$\square$

**Bemerkung+Definition 19.9**  $V, W$   $K$ -Vr,  $f : V \rightarrow W$  lineare Abbildung. Wir definieren  $f^* : W^* \rightarrow V^*, \psi \mapsto f^*(\psi) := \psi \circ f$   $f^*$  heißt die zu  $f$  duale **Abbildung**. Es gilt:  $f^*$  ist linear.

**Beweis** •  $f^*$  ist wohldefiniert, da  $f^*(\psi) = \psi \circ f \in V^* \forall \psi \in W^*$ .

•  $f^*$  ist linear, denn: Seien  $\varphi, \psi \in W^*, \lambda \in K$

$$\implies f^*(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi) \circ f = \varphi \circ f + \psi \circ f = f^*(\varphi) + f^*(\psi)$$

$$f^*(\lambda\varphi) = \lambda f^*(\varphi) \text{ analog.}$$

$\square$

**Bemerkung 19.10**  $V, W$  endlichdimensionaler  $K$ -VR. Dann ist die Abbildung

$$*: \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow \text{Hom}_K(W^*, V^*), f \mapsto f^*$$

ist ein Isomorphismus von  $K$ -VR.

**Beweis** 1.  $*$  ist linear: Seien  $f, g \in \text{Hom}_K(V, W), \psi \in W^*$

$$\implies (f + g)^*(\psi) = \psi \circ (f + g) = \psi \circ f + \psi \circ g = f^*(\psi) + g^*(\psi) \implies (f + g)^* = f^* + g^*$$

Rest analog.

2.  $*$  ist injektiv: Sei  $f \in \text{Hom}_K(V, W)$  mit  $f^* = 0 \implies \psi \circ f = 0 \forall \psi \in W^*$ . Annahme:  $f \neq 0 \implies \exists v \in V : f(v) \neq 0 \implies \exists \varphi \in W^* : \varphi(f(v)) \neq 0 \implies \varphi \circ f \neq 0$

3.  $*$  ist surjektiv: Es ist  $\dim \text{Hom}_K(V, W) = \dim(V) \dim(W) = \dim(V^*) \dim(W^*) = \dim \text{Hom}_K(W^*, V^*) \implies *$  surjektiv.  $\square$

**Satz 19.11 (19.11)**  $V, W$  endlichdimensionale  $K$ -VR,  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  Basen von  $V$  beziehungsweise  $W$ ,  $f : V \rightarrow W$  lineare Abbildung. Dann gilt:

$$M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(f^*) = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f))^T$$

**Beweis** Sei  $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n), \mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m), M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  insbesondere

$$\begin{aligned} f(v_j) &= \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \\ \implies a_{ij} &= w_i^*(f(v_j)) = (w_i^* \circ f)(v_j) = f^*(w_i^*)(v_j) \end{aligned}$$

Sei  $M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(f^*) = (b_{ij})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}$ , dann ist

$$\begin{aligned} f^*(w_i^*) &= \sum_{j=1}^n b_{ji} v_j^* \\ \implies b_{ji} &= (f^*(w_i^*))(v_j) = a_{ij} \end{aligned} \quad \square$$

**Satz 19.12**  $V, W$  endlichdimensionale  $K$ -VR,  $f : V \rightarrow W$  lineare Abbildung. Dann gilt:

1.  $\text{im}(f^*) = \ker(f)^0$
2.  $\ker(f^*) = \text{im}(f)^0$

**Beweis** 1. „ $\subseteq$ “ Sei  $\varphi \in \text{im}(f^*) \subseteq V^* \implies \exists \psi \in W^* : f^*(\psi) = \varphi$ , das heißt  $\psi \circ f = \varphi$ .  
 $\implies \varphi|_{\ker f} = 0 \implies \varphi \in (\ker f)^0$  „ $\supseteq$ “ Sei  $\varphi \in (\ker f)^0 \subseteq V^*$ , das heißt  $\varphi|_{\ker f} = 0$ .  
 0. Zu zeigen: Es existiert ein  $\psi \in W^*$  mit  $\varphi = f^*(\psi) = \psi \circ f$ . Sei  $(v_1, \dots, v_k)$  eine Basis von  $\ker f$ ,  $(w_1, \dots, w_r)$  eine Basis von  $\text{im } f$ ,  $u_i \in f^{-1}(\{w_i\})$ ,  $i = 1, \dots, r \implies (v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_r)$  Basis von  $V$ . Wir ergänzen  $(w_1, \dots, w_r)$  zu einer Basis  $w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m$  von  $W$ .  $\implies$  Es existiert genau eine lineare Abbildung  $\psi : W \rightarrow K$  mit

$$\psi(w_i) = \begin{cases} \varphi(u_i) & i = 1, \dots, r \\ 0 & i = r+1, \dots, m \end{cases}$$

Für  $i = 1, \dots, r$  ist  $\varphi(u_i) = \psi(w_i) = \psi(f(u_i)) = (\psi \circ f)(u_i)$ , und für  $i = 1, \dots, k$  ist  $\varphi(v_i) = 0 = \psi(f(v_i))$ . Also:  $\varphi = \psi \circ f = f^*(\psi)$ , das heißt  $\varphi \in \text{im } f^*$

2.  $\varphi \in \ker(f^*) \iff f^*(\varphi) = 0 \iff \varphi \circ f = 0 \iff \varphi(f(v)) = 0 \forall v \in V \iff \varphi|_{\text{im } f} = 0 \iff \varphi \in (\text{im } f)^0 \quad \square$

**Folgerung 19.13**  $V, W$  endlichdimensionale  $K$ -VR,  $f : V \rightarrow W$  lineare Abbildung. Dann gilt:

$$\text{Rang}(f^*) = \text{Rang}(f)$$

**Beweis**  $\text{Rang } f^* = \dim \text{im } f^* = \dim(\ker f)^0 = \dim V - \dim \ker f = \dim \text{im } f = \text{Rang}(f) \quad \square$

**Folgerung 19.14**  $A \in M(m \times n, K)$ . Dann gilt:

$$\text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A)$$

**Beweis** Es ist  $A = M_{(e_1, \dots, e_m)}^{e_1, \dots, e_n}(\tilde{A})$ ,  $A^T = M_{e_1^*, \dots, e_n^*}^{e_1^*, \dots, e_m^*}(\tilde{A}^*)$

$\text{Spaltenrang}(A) = \dim \text{im } \tilde{A} = \text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } (\tilde{A}^*) = \text{Spaltenrang}(A^t) = \text{Zeilenrang}(A) \quad \square$

**Definition 19.15**  $V^{**} := (V^*)^* = \text{Hom}_K(V^*, K)$  heißt der Bidualraum von  $V$ .

**Satz 19.16**  $V$  endlichdimensional. Dann gibt es einen kanonischen (das heißt basisunabhängigen) Isomorphismus

$$i : V \rightarrow V^{**}, v \mapsto i_v, i_v : V^* \rightarrow K, \varphi \mapsto \varphi(v)$$

**Beweis** 1.  $i$  wohldefinierter und linear: leicht nachzurechnen.

2.  $i$  injektiv: Sei  $v \in \ker i \implies i_v = 0 \implies \forall \varphi \in V^* = \text{Hom}_K(V, K) : \varphi(v) = 0 \implies v = 0$

3.  $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$ . Somit nach 12.15:  $i$  Isomorphismus  $\square$

**Anmerkung** • Im Gegensatz zu  $\psi_B : V \rightarrow V^*$  ist der Isomorphismus  $i : V \rightarrow V^{**}$  unabhängig von der Wahl einer Basis, das heißt  $V$  und  $V^*$  sind unkanonisch isomorph,  $V$  und  $V^{**}$  sind kanonisch isomorph (für  $V$  endlichdimensional).

• Ist  $V$  unendlichdimensional, dann liefert  $i$  zumindest noch eine kanonische Inklusion von  $V$  nach  $V^{**}$ . Diese ist jedoch nicht surjektiv.

## 20 Bilinearformen

In diesem Abschnitt sei  $V$  stets ein  $K$ -VR.

**Definition 20.1**  $\gamma : V \times V \rightarrow K$  heißt eine Bilinearform auf  $V$ , genau dann wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (B1)  $\gamma(v_1 + v_2, w) = \gamma(v_1, w) + \gamma(v_2, w)$ ,  $\gamma(\lambda v, w) = \lambda \gamma(v, w)$
- (B2)  $\gamma(v, w_1 + w_2) = \gamma(v, w_1) + \gamma(v, w_2)$ ,  $\gamma(v, \lambda w) = \lambda \gamma(v, w)$

$\forall v, w, v_1, v_2, w_1, w_2 \in V, \lambda \in K$ .

**Beispiel 20.2**

1.  $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n, \gamma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \gamma\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$  ist eine Bilinearform auf  $\mathbb{R}^n$ .
2.  $K = \mathbb{R}, V = l[0, 1], \gamma : l[0, 1] \times l[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \gamma(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$  ist eine Bilinearform auf  $l[0, 1]$ .
3.  $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, \gamma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \gamma\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 - x_2 y_2$  ist eine Bilinearform auf  $\mathbb{R}^2$ .

**Definition 20.3**  $V$  endlichdimensional,  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  Basis von  $V$ ,  $\gamma$  Bilinearform auf  $V$

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = (\gamma(v_i, v_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M(n \times n, K)$$

heißt die **Darstellungsmatrix (Fundamentalmatrix)** von  $\gamma$  bezüglich  $\mathcal{B}$ .

**Beispiel 20.4**

1. In 20.2a ist für  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) : M_{\mathcal{B}}(\gamma) = E_n$
2. In 20.2p ist für  $\mathcal{B} = (e_1, e_2) : M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

**Bemerkung 20.5**  $V$  endlichdimensional,  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  Basis von  $V$ ,  $\gamma$  Bilinearform auf  $V$ ,  $A =$

$M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ ,  $\Phi_{\mathcal{B}} : K^n \rightarrow V$  Koordinatensystem zu  $\mathcal{B}$ ,  $v, w \in V, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)$ , das heißt

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n,$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)$$

das heißt  $w = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n$ . Dann gilt:

$$\gamma(v, w) = \Phi_{\mathcal{B}^{-1}}^T A \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) = x^t A y = (x_1 \quad \dots \quad x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

**Beweis** Es ist

$$\begin{aligned} y(v, w) &= \gamma(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n, y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \gamma(v_i, v_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n \gamma(v_i, v_j) y_j = x^T A y \end{aligned} \quad \square$$

**Bemerkung 20.6**  $V$  endlichdimensional,  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  Basis von  $V$ ,  $A \in M(n \times n, K)$ . Dann gilt: Durch

$$\Delta_A^{\mathcal{B}} : V \times V \rightarrow K, (v, w) \mapsto \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T A \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)$$

ist eine Bilinearform auf  $V$  gegeben.

**Beweis** Nachrechnen.  $\square$

**Beispiel 20.7 (wichtiger Spezialfall von 20.6)**

$V = K^n, \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n), A \in M(n \times n, K) \implies \Phi_{\mathcal{B}} = \text{id}_{K^n}$ . Durch

$$\Delta_A^{(e_1, \dots, e_n)} : K^n \times K^n \rightarrow K, (v, w) \mapsto v^t A w$$

ist eine Bilinearform auf  $K^n$  gegeben. Wir setzen kurz  $\Delta(A) := \Delta_A := \Delta_A^{(e_1, \dots, e_n)}$

**Bemerkung+Definition 20.8**  $\text{Bil}(V) := \{\gamma : V \times V \rightarrow K \mid \gamma \text{ ist Bilinearform}\}$  ist ein  $K$ -VR, ist ein UVR vom  $K$ -VR  $\text{Abb}(V \times V, K)$

**Bemerkung 20.9**  $V$  endlichdimensional,  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  Basis von  $V$ . Dann gilt: Die Abbildung

$$M_{\mathcal{B}} : \text{Bil}(V) \rightarrow M(n \times n, K)$$

ist ein Isomorphismus von  $K$ -VR mit Umkehrabbildung

$$\Delta^{\mathcal{B}} : M(n \times n, K) \rightarrow \text{Bil}(V), A \mapsto \Delta_A^{\mathcal{B}}$$

**Beweis** 1.  $M_{\mathcal{B}}$  linear: nachrechnen.

2.  $\Delta^{\mathcal{B}} \circ M_{\mathcal{B}} = \text{id}_{\text{Bil}(V)}$ , denn: Sei  $\gamma \in \text{Bil}(V)$

$$\begin{aligned} \implies (\Delta^{\mathcal{B}} \circ M_{\mathcal{B}})(\gamma)(v_i, v_j) &= \Delta_{M_{\mathcal{B}}(\gamma)}^{\mathcal{B}}(v_i, v_j) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_i)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma) \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_j) \\ &= e_i^T M_{\mathcal{B}}(\gamma) e_j = \gamma(v_i, v_j) \end{aligned}$$

3.  $M_{\mathcal{B}} \circ \Delta^{\mathcal{B}} = \text{id}_{M(n \times n, K)}$ , denn: Sei  $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K), B = (b_{ij}) = (M_{\mathcal{B}} \circ \Delta^{\mathcal{B}})(A) = M_{\mathcal{B}} \circ \Delta_A^{\mathcal{B}}$

$$b_{ij} = \Delta_A^{\mathcal{B}}(v_i, v_j) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_i)^T A \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_j) = e_i^T A e_j = a_{ij}$$

$$\implies B = A \quad \square$$

**Satz 20.10**  $V$  endlichdimensional,  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  Basen von  $V$ ,  $\gamma$  Bilinearform auf  $V$ . Dann gilt:

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = (T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

**Beweis** Für  $v, w \in V$  ist

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{B}}(w) = \gamma(v, w) = \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}(w)$$

$$16.2.2: \tilde{T}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{aligned} &= (T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v))^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) \\ &= (\Phi_{\mathcal{B}}^{-1})^T (T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) \\ \implies \Delta^{\mathcal{B}}(M_{\mathcal{B}}(\gamma))(v, w) &= \Delta^{\mathcal{B}}\left((T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)(v, w) \\ \implies \Delta^{\mathcal{B}}(M_{\mathcal{B}}(\gamma)) &= \Delta^{\mathcal{B}}\left((T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right) \end{aligned}$$

$\Delta^{\mathcal{B}}$  Isomorphismus

$$\implies M_{\mathcal{B}}(\gamma) = (T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

□

**Definition 20.11**  $V$  endlichdimensional,  $\gamma$  Bilinearform auf  $V$ . Wir setzen  $\text{Rang}(\gamma) := \text{Rang } M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ , wobei  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$  ist.

**Anmerkung** Dies ist wohldefiniert. (folgt aus 20.10, da die Matrizen  $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$  invertierbar sind)

**Bemerkung+Definition 20.12** Es gilt:

1. Ist  $\gamma : V \times V \rightarrow K$  eine Bilinearform, dann induziert  $\gamma$  die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \Gamma_l : V &\rightarrow V^*, w \mapsto \gamma(\cdot, w) & \gamma(\cdot, w) : V &\rightarrow K, v \mapsto \gamma(v, w) \\ \Gamma_r : V &\rightarrow V^*, v \mapsto \gamma(v, \cdot) & \gamma(v, \cdot) : V &\rightarrow K, v \mapsto \gamma(v, w) \end{aligned}$$

2. Jede lineare Abbildung  $\Gamma : V \rightarrow V^*$  induziert Bilinearformen

$$\begin{aligned} \gamma_l : V \times V &\rightarrow K, \gamma_l(v, w) := \Gamma(w)(v) \\ \gamma_r : V \times V &\rightarrow K, \gamma_r(v, w) := \Gamma(v)(w) \end{aligned}$$

Die Zuordnungen aus 1., 2. induzieren den Isomorphismus  $\text{Bil}(V) \cong \text{Hom}_K(V, V^*)$

**Beweis** Nachrechnen.

□

**Definition 20.13**  $\gamma$  Bilinearform auf  $V$ .  $\gamma$  heißt **nicht-ausgeartet**  $\iff \Gamma_l$  und  $\Gamma_r$  sind injektiv.

$$\iff \gamma(v, w) = 0 \forall v \in V \implies w = 0$$

(Injektivität von  $\Gamma_l$ ), und

$$\iff \gamma(v, w) = 0 \forall w \in V \implies v = 0$$

(Injektivität von  $\Gamma_r$ ).

$\gamma$  heißt **perfekt**  $\iff \Gamma_l$  und  $\Gamma_r$  sind Isomorphismen.

**Bemerkung 20.14**  $V$  endlichdimensional,  $\gamma$  Bilinearform auf  $V$ ,  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  Basis von  $V$ ,  $\mathcal{B}^*$  duale Basis zu  $\mathcal{B}$ . Dann gilt:

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_l) = M_{\mathcal{B}}(\gamma) = (M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_r))^T$$

**Beweis** Behauptung: Es ist  $\Gamma_l(v_i) = \gamma(v_1, v_i)v_1^* + \dots + \gamma(v_n, v_i)v_n^*$ , denn  $\Gamma_l(v_i)(v_j) = \gamma(v_j, v_i)$  nach Definition

$$(\gamma(v_1, v_i)v_1^* + \dots + \gamma(v_n, v_i)v_n^*)(v_j) = \gamma(v_j, v_i)$$

Somit:  $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_l) = M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ .

Analog:  $\Gamma_r(v_i) = \gamma(v_i, v_1)v_1^* + \dots + \gamma(v_i, v_n)v_n^* \implies M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_r) = (M_{\mathcal{B}}(\gamma))^T$  □

**Folgerung 20.15**  $V$  endlichdimensional,  $\gamma$  Bilinearform auf  $V$ ,  $\mathcal{B}$  Basis von  $V$ . Dann sind äquivalent:

1.  $\gamma$  ist nicht-ausgeartet
2.  $\gamma$  ist perfekt
3.  $M_{\mathcal{B}}(\gamma)$  invertierbar
4.  $\Gamma_l$  injektiv
5.  $\Gamma_r$  injektiv

**Beweis** 1.  $\iff$  2. wegen  $\dim V = \dim V^*$  und 12.12

$\gamma$  perfekt  $\iff \Gamma_l, \Gamma_r$  Isomorphismen  $\iff M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_l), M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_r)$  invertierbar  $\iff M_{\mathcal{B}}(\gamma)$  invertierbar.  $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_l), M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_r) \iff \Gamma_l$  Isomorphismus  $\iff M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}$  invertierbar. □

**Definition 20.16**  $\gamma$  Bilinearform auf  $V$ .

$\gamma$  heißt **symmetrisch**  $\iff \gamma(v, w) = \gamma(w, v) \forall v, w \in V$

$\gamma$  heißt **antisymmetrisch**  $\iff \gamma(v, w) = -\gamma(w, v) \forall v, w \in V$

$\gamma$  heißt **alternierend**  $\iff \gamma(v, v) = 0 \forall v \in V$ .

**Anmerkung** •  $\gamma$  symmetrisch  $\implies \Gamma_l = \Gamma_r$

- Für  $\text{char}(K) \neq 2$  gilt:  $\gamma$  alternierend  $\iff \gamma$  antisymmetrisch



- Für  $\text{char}(K) = 2$  gilt immer noch  $\gamma$  alternierend  $\implies \gamma$  (anti)symmetrisch. Die Umkehrung ist falsch:  $\gamma : \mathbb{F}_2^3 \times \mathbb{F}_2^3 \rightarrow \mathbb{F}, \gamma(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$  ist (anti)symmetrisch, aber nicht alternierend:

$$\gamma\left(\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}\right) = \bar{1} \neq \bar{0}$$

**Bemerkung 20.17**  $V$  endlichdimensional,  $\mathcal{B}$  Basis von  $V$ ,  $\gamma$  Bilinearform auf  $V$ . Dann gilt:

- $\gamma$  symmetrisch  $\iff M_{\mathcal{B}}(\gamma)$  ist symmetrisch, das heißt  $M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T = M_{\mathcal{B}}(\gamma)$
- $\gamma$  antisymmetrisch  $\iff M_{\mathcal{B}}(\gamma)$  ist antisymmetrisch, das heißt  $M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T = -M_{\mathcal{B}}(\gamma)$

**Beweis** 1. „ $\implies$ “ klar

„ $\impliedby$ “ Sei  $M_{\mathcal{B}}(\gamma) = M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T \implies$  Für  $v, w$  ist

$$\begin{aligned} \gamma(v, w) &= \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma) \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)^T \\ &= \underbrace{\left( \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma) \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v) \right)^T}_{\in K} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma) \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v) = \gamma(w, v). \end{aligned}$$

2. analog. □

## 21 Quadratische Räume

**Definition 21.1 (Quadratische Form)**  $V$   $K$ -VR. Eine Abbildung  $q : V \rightarrow K$  heißt eine **quadratische Form** auf  $V$ , genau dann wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (Q1)  $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v) \forall \lambda \in K, v \in V$
- (Q2) Die Abbildung  $\varepsilon_q : V \times V \rightarrow K, (v, w) \mapsto q(v+w) - q(v) - q(w)$  ist eine (automatisch symmetrische) Bilinearform

**Beispiel 21.2**

$K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$  ist eine quadratische Form auf  $\mathbb{R}^2$  (Q1) ist erfüllt,

(Q2) ist ebenfalls erfüllt, denn

$$\begin{aligned} \varepsilon_q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= q\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) - q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) - q\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= (x_1 + y_1)^2 + (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) + (x_2 + y_2)^2 - x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 - y_1^2 - y_1y_2 - y_2^2 \\ &= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 \end{aligned}$$

das heißt  $\varepsilon_q$  ist symmetrische Bilinearform.

**Bemerkung 21.3**  $\text{char } K \neq 2, V \text{ K-VR}, \text{SymBil}(V) := \{\gamma : V \times V \rightarrow K \mid \gamma \text{ ist symmetrische Bilinearform}\}, \text{Quad}(V) := \{q : V \rightarrow K \mid q \text{ ist eine quadratische Form}\}$ . Dann sind die Abbildungen

$$\Phi : \text{SymBil}(V) \rightarrow \text{Quad}(V), \gamma \mapsto q_\gamma \quad q_\gamma : V \rightarrow K, v \mapsto \gamma(v, v)$$

$$\Psi : \text{Quad}(V) \rightarrow \text{SymBil}(V), q \mapsto \gamma_q \frac{1}{2} \varepsilon_q$$

zueinander inverse Bijektionen.

**Beweis** 1.  $\Phi$  ist wohldefiniert, das heißt  $q_\gamma \in \text{Quad}(V) \forall \gamma \in \text{SymBil}(V)$ .

Q1: Sei  $\lambda \in K, v \in V \implies q_\gamma(\lambda v) = \gamma(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 \gamma(v, v) = \lambda^2 q_\gamma(v)$

Q2:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{q_\gamma} &= q_\gamma(v+w) - q_\gamma(v) - q_\gamma(w) = \gamma(v+w, v+w) - \gamma(v, v) - \gamma(w, w) \\ &= \gamma(v, w) + \gamma(w, v) = 2\gamma(v, w) \end{aligned}$$

$\implies \varepsilon_{q_\gamma}$  symmetrische Bilinearform.

2.  $\Psi$  ist wohldefiniert, denn für jedes  $q \in \text{Quad}(V)$  ist  $\gamma_q = (1/2)\varepsilon_q \in \text{SymBil}(V)$ , da  $\varepsilon_q \in \text{SymBil}(V)$

3.  $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{\text{Quad}(V)}$ : Für  $q \in \text{Quad}(V), v \in V$  ist

$$(\Phi \circ \Psi)(q)(v) = \Phi(\gamma_q)(v) = q_\gamma(v) = \frac{1}{2}(q(v+v) - q(v) - q(v)) = q(v)$$

4.  $\Psi \circ \Phi = \text{id}_{\text{SymBil}(V)}$ : Für  $\gamma \in \text{SymBil}(V), v, w \in V$  ist

$$(\Psi \circ \Phi)(\gamma)(v, w) = \Psi(q_\gamma)(v, w) = \frac{1}{2}\varepsilon_{q_\gamma}(v, w) = \gamma(v, w) \quad \square$$

**Anmerkung** Philosophie dahinter: symmetrische Bilinearformen, quadratische Formen auf  $K$  sind für  $\text{char } K \neq 2$  fast dasselbe. Für  $\text{char } k = 2$  kann man die Abbildung  $\Phi$  immer noch definieren,  $\Phi$  ist im allgemeinen aber weder injektiv, noch surjektiv. Exemplarisch: Für  $K = \mathbb{F}_2, V = \mathbb{F}_2^2$  liegt die quadratische Form  $q : \mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$  liegt nicht im Bild vom  $\Phi$ .

Für den Rest dieses Abschnittes sei  $K$  stets ein Körper mit  $\text{char } K \neq 2$

**Definition 21.4 (Quadratischer Raum)** Ein **quadratischer Raum** ist ein Paar  $(V, \gamma)$ , bestehend aus endlichdimensionalem K-VR  $V$  und einer symmetrischen Bilinearform  $\gamma$  auf  $V$ .  $v, w \in V$  heißen **orthogonal** bezüglich  $\gamma \iff \gamma(v, w) = 0$ .  $(v_i)_{i \in I}$  Familie von Vektoren aus  $V$  heißt orthogonal bezüglich  $\gamma \iff \gamma(v_i, v_j) = 0 \forall i, j \in I, i \neq j$ . Eine Familie  $(v_1, \dots, v_n)$  von Vektoren aus  $V$  heißt eine **Orthogonalbasis** (OB) von  $(V, \gamma) \iff (v_1, \dots, v_n)$  ist eine Basis von  $V$  und ist orthogonal bezüglich  $\gamma$ .

**Anmerkung** • Ist  $\gamma$  aus dem Kontext klar, wird es auch häufig weggelassen.

- Ist  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$ , dann gilt  $\mathcal{B}$  OB von  $(V, \gamma) \iff M_{\mathcal{B}}(\gamma)$  ist eine Diagonalmatrix.

**Definition 21.5**  $(V, \gamma_v), (W, \gamma_w)$  quadratische Räume,  $f : V \rightarrow W$  lineare Abbildung.  $f$  heißt **Homomorphismus quadratischer Räume**  $\iff$

$$\gamma_w(f(v_1), f(v_2)) = \gamma_v(v_1, v_2) \forall v_1, v_2 \in V$$

$f$  heißt **Isomorphismus quadratischer Räume**  $\iff f$  ist ein Isomorphismus von  $K$ -VR und ein Homomorphismus quadratischer Räume. Notation: Wir schreiben häufig  $f : (V, \gamma_v) \rightarrow (W, \gamma_w)$  für Abbildungen / Homomorphismen quadratischer Räume.

**Anmerkung** Ist  $f : (V, \gamma_v) \rightarrow (W, \gamma_w)$  ein Isomorphismus quadratischer Räume, dann ist  $f^{-1} : (W, \gamma_w) \rightarrow (V, \gamma_v)$  ebenfalls ein Isomorphismus quadratischer Räume, und es ist  $\text{Rang}(\gamma_v) = \text{Rang}(\gamma_w)$  (nachrechnen...)

**Ziel:** Klassifiziere quadratische Räume bis auf Isomorphie quadratischer Räume.

**Satz 21.6**  $(V, \gamma)$  quadratischer Raum. Dann besitzt  $(V, \gamma)$  eine OB.

**Beweis** per Induktion nach  $n = \dim V$ .

IA:  $n = 0$ : leere Familie ist OB.

IS: Sei  $n \geq 1$

1. Fall:  $\gamma(v, v) = 0 \forall v \in V$

$$\implies \forall v, w \in V : 0 = \gamma(v + w, v + w) = \gamma(v, v) + \gamma(w, w) + 2\gamma(v, w) = 2\gamma(v, w)$$

$$\implies \gamma(v, w) = 0 \forall v, w \in V \implies \text{Jede Basis von } V \text{ ist OB von } (V, \gamma)$$

2.  $\exists v_1 \in V : \gamma(v_1, v_1) \neq 0$ . Sei  $\Gamma : V \rightarrow V^*, v \mapsto \gamma(v, \cdot)$  die zu  $\gamma$  gemäß 20.10 gehörige lineare Abbildung. Setze  $H = \ker(\Gamma(v_1)) = \{w \in V \mid \gamma(v_1, w) = 0\}$

$$\implies \dim H = \dim V - \underbrace{\dim \text{im}(\Gamma(v_1))}_{\leq K \text{ beachte: } \Gamma(v_1) \in V^*} \in \{n, n-1\}$$

Es ist  $v_1 \notin H$  wegen  $\gamma(v_1, v_1) \neq 0 \implies \dim H = n-1 \implies V = \text{Lin}((v_1)) \oplus H$ .  $(H, \gamma|_{H \times H})$  ist ein quadratischer Raum der Dimension  $n-1$ . Wegen IV existiert eine OB  $(v_2, \dots, v_n)$  von  $(H, \gamma|_{H \times H}) \implies (v_1, v_2, \dots, v_n)$  ist OB von  $(V, \gamma)$   $\square$

**Folgerung 21.7**  $A \in M(n \times n, K)$  symmetrisch. Dann existiert  $T \in \text{GL}(n, K)$ , sodass  $T^T A T$  eine Diagonalmatrix.

**Beweis**  $A$  definiert eine symmetrische Bilinearform  $\Delta(A) = \Delta_A^{(e_1, \dots, e_n)}$  auf  $K^n$  (vergleiche 20.7,  $\Delta(A)(v, w) = v^T A w$ ). Nach 21.6 existiert eine OB  $\mathcal{B}$  von  $(K^n, \Delta(A)) \implies M_{\mathcal{B}}(\Delta(A))$  ist Diagonalmatrix, und es ist

$$M_{\mathcal{B}}(\Delta(A)) = \underbrace{\left(T_{(e_1, \dots, e_n)}^{\mathcal{B}}\right)^T}_{=: T^T} \underbrace{M_{(e_1, \dots, e_n)}(\Delta(A))}_A \underbrace{T_{(e_1, \dots, e_n)}^{\mathcal{B}}}_{=: T} \quad \square$$

**Folgerung 21.8**  $(V, \gamma)$  quadratischer Raum,  $n = \dim V$ ,  $r = \text{Rang}(\gamma)$ . Dann existieren  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K \setminus \{0\}$  und ein Isomorphismus von quadratischen Räumen

$$\Phi : \left( K^n, \Delta \left( \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \right) \right) \rightarrow (V, \gamma)$$

**Beweis** Wegen 21.6 existiert eine OB  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $(V, \gamma)$ . Nach Umordnung von  $v_1, \dots, v_n$  sei  $\gamma(v_i, v_i) \neq 0$  für  $i = 1, \dots, s$  und  $\gamma(v_i, v_i) = 0$  für  $i = s+1, \dots, n$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_s & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_s \in K \setminus \{0\}, r = \text{Rang}(\gamma) = \text{Rang } M_{\mathcal{B}}(\gamma) = s$$

Setze  $\Phi := \Phi_{\mathcal{B}} : K^n \rightarrow V, e_i \mapsto v_i$  (Koordinatensystem zu  $\mathcal{B}$ , vergleiche 15.2).  $\Phi$  ist Isomorphismus

$$\begin{aligned} \gamma(\Phi_{\mathcal{B}}(v), \Phi_{\mathcal{B}}(w)) &= \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(\Phi_{\mathcal{B}}(v))^T M_{\mathcal{B}}(\gamma) \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(\Phi_{\mathcal{B}}(w)) = v^T M_{\mathcal{B}}(\gamma) w \\ &= v^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} w = \Delta \left( \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{pmatrix} \right) (v, w) \quad \square \end{aligned}$$

**Anmerkung**  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sind im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

**Frage:** Kann man über speziellen Körpern mehr sagen? Wir werden  $K = \mathbb{C}, \mathbb{R}$  untersuchen.

**Satz 21.9**  $(V, \gamma)$  quadratischer Raum über  $\mathbb{C}$ ,  $n = \dim V$ ,  $r = \text{Rang } \gamma$ . Dann existiert eine Orthogonalbasis  $\mathcal{B}$  von  $(V, \gamma)$  mit

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Insbesondere existiert ein Isomorphismus quadratischer Räume  $\Phi \left( \mathbb{C}^n, \Delta \left( \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right) \rightarrow (V, \gamma)$

**Beweis** Sei  $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$  eine Orthogonalbasis von  $(V, \gamma)$ . Setze

$$v_i := \begin{cases} \tilde{v}_i & \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)}} \tilde{v}_i & \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) \neq 0 \end{cases}$$

Hierbei ist  $\sqrt{\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)}$  eine komplexe Zahl  $\alpha$  mit  $\alpha^2 = \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)$ . Falls  $\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) \neq 0$ , dann ist

$$\gamma(v_i, v_i) = \gamma\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)}}, \frac{1}{\sqrt{\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)}}\right) = \frac{1}{\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)} \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) = 1$$

Außerdem:  $\gamma(v_i, v_j) = 0 \forall i \neq j$ , da  $\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) = 0 \forall i \neq j$ . Setze  $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_n)$ . Nach eventueller Umnummerierung von  $v_1, \dots, v_n$  ist

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei  $r = \text{Rang } M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \text{Rang } \gamma$ . □

**Folgerung 21.10**  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$  symmetrisch,  $r = \text{Rang } A$ . Dann existiert ein  $T \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ , sodass

$$T^T A T = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Folgerung 21.11 (21.11)**  $(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$  quadratische Räume über  $\mathbb{C}$ . Dann sind äquivalent:

1. Es gibt einen Isomorphismus quadratischer Räume  $(V, \gamma_V) \rightarrow (W, \gamma_W)$
2.  $\dim V = \dim W$  und  $\text{Rang } \gamma_V = \text{Rang } \gamma_W$

**Beweis** 1.  $\implies$  2. vergleiche Anmerkung nach 21.5

2.  $\implies$  1. Sei  $n = \dim V = \dim W, r = \text{Rang } \gamma_V = \text{Rang } \gamma_W$ .  $\implies (V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$  sind als quadratische Räume isomorph zu  $\left(\mathbb{C}^n, \Delta\left(\begin{pmatrix} E_r \\ \end{pmatrix}\right)\right)$ , also auch  $(V, \gamma_V) \cong (W, \gamma_W)$
- 

**Definition 21.12**  $(V, \gamma)$  quadratischer Raum,  $U_1, \dots, U_m \subseteq V$  UVR mit  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$ . Die direkte Summe heißt **orthogonale direkte Summe**

$$(V = U_1 \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} U_m) \stackrel{\text{Def}}{\iff} \gamma(u_i, u_j) = 0 \forall u_i \in U_i, u_j \in U_j, i \neq j$$

alternativ  $\oplus$

**Satz 21.13**  $(V, \gamma)$  quadratischer Raum über  $\mathbb{R}$ ,  $n = \dim V$ . Dann existiert eine Orthogonalbasis  $\mathcal{B}$  von  $(V, \gamma)$ , sowie  $r_+, r_- \in \{0, \dots, \dim V\}$  mit

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Insbesondere existiert ein Isomorphismus quadratischer Räume

$$\left( \mathbb{R}^n, \Delta \left( \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right) \right) \rightarrow (V, \gamma)$$

Die Zahlen  $r_+, r_-$  sind unabhängig von der Wahl einer solchen Basis. Wir nennen  $\text{Signatur}(\gamma) := (r_+, r_-)$  heißt die **Signatur** von  $\gamma$ .

**Beweis** 1. Sei  $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$  eine Orthogonalbasis von  $(V, \gamma)$ . Wir setzen

$$v_i := \begin{cases} \tilde{v}_i & \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)|}} \tilde{v}_i & \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) \neq 0 \end{cases}$$

Falls  $\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) \neq 0$ , dass ist

$$\begin{aligned} \gamma(v_i, v_i) &= \gamma\left(\frac{1}{\sqrt{|\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)|}} \tilde{v}_i, \frac{1}{\sqrt{|\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)|}} \tilde{v}_i\right) \\ &= \frac{1}{|\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)|} \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) \in \{\pm 1\} \end{aligned}$$

$\gamma(v_i, v_j) = 0$  für  $i \neq j$ . Setze  $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_n)$ . Nach eventueller Umnummerierung von  $v_1, \dots, v_n$  ist

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 1 & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

mit geeigneten  $r_+, r_- \in \{0, \dots, n\}$

2.  $r_+, r_-$  sind basisunabhängig: Es ist  $r_+ + r_- = \text{Rang } \gamma$ , dies ist basisunabhängig. Es gilt zu zeigen:  $r_+$  ist basisunabhängig. Setze  $V_+ := \text{Lin}((v_1, \dots, v_{r_+}))$ ,  $V_- = \text{Lin}((v_{r_++1}, \dots, v_{r_++r_-}))$ ,  $V_0 := \text{Lin}((v_{r_++r_-+1}, \dots, v_n)) \implies V = V_+ \hat{\oplus} V_- \hat{\oplus} V_0$ . Setze

$$s := \max\{\dim W \mid W \subseteq V \text{ UVR mit } \gamma(w, w) > 0 \forall w \in W, w \neq 0\}$$

dies ist wohldefiniert.  $V_+$  ist ein UVR von  $V$  mit  $\gamma(w, w) > 0 \forall w \in V_+, w \neq 0$ , denn für  $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{r_+} v_{r_+}$  ist

$$\gamma(w, w) = \lambda_1^2 \underbrace{\gamma(v_1, v_1)}_{=1} + \dots + \lambda_{r_+}^2 \underbrace{\gamma(v_{r_+}, v_{r_+})}_{=1} = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_{r_+}^2 > 0 \text{ falls } w \neq 0$$

$\implies s \geq \dim V_+ = r_+$  Annahme: Es existiert ein UVR  $W \subseteq V$  mit  $\gamma(w, w) > 0 \forall w \in W, w \neq 0$  und  $\dim W > r_+$

$$\implies \underbrace{\dim W}_{> r_+} + \underbrace{\dim V_-}_{= r_-} + \underbrace{\dim V_0}_{n - (r_+ + r_-)} > n$$

$$\begin{aligned} \implies \dim(W \cap (V_- \hat{\oplus} V_0)) &= \dim W + \dim(V_- \hat{\oplus} V_0) - \dim(W + (V_- \hat{\oplus} V_0)) \\ &= \underbrace{\dim W + \dim V_- + \dim V_0}_{> n} - \underbrace{\dim(W + (V_- \hat{\oplus} V_0))}_{\leq n, \text{ da } W + (V_- \hat{\oplus} V_0) \text{ UVR von } V} \\ &\implies 0 \end{aligned}$$

$\implies$  Es existiert  $w \in W, w \neq 0$  mit  $w \in W_- \hat{\oplus} V_0$ .

$\implies$  Es existiert  $w_- \in V_-, w_0 \in V_0$  mit  $w = w_- + w_0$

$\implies \gamma(w, w) = \gamma(w_- + w_0, w_- + w_0) = \underbrace{\gamma(w_-, w_-)}_{< 0} + \underbrace{\gamma(w_0, w_0)}_{= 0} < 0$  Andererseits:

$\gamma(w, w) > 0$  wegen  $w \in W, w \neq 0$ . Somit:  $r_+ = s$ , insbesondere unabhängig von Basiswahl.  $\square$

**Folgerung+Definition 21.14 (Sylvesterscher Trägheitssatz)**  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$  symmetrisch. Dann existieren  $T \in \text{GL}(n, \mathbb{R}), r_+, r_- \in \{0, \dots, n\}$  mit

$$T^T A T = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Die Zahlen  $r_+, r_-$  sind unabhängig von der Wahl eines solchen  $T$ .  $\text{Signatur}(A) := (r_+, r_-)$  heißt **Signatur** von  $A$ .

**Beweis** folgt aus 21.13 (analog zum Beweis von 21.7).  $\square$

**Anmerkung** Ist  $S \in GL(n, \mathbb{R})$ , dann haben die Matrixen  $A$  und  $S^T A S$  diesselbe Signatur, denn: Ist  $\tilde{T} \in GL(n, \mathbb{R})$  mit

$$\tilde{T}^T (S^T A S) \tilde{T} = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

, dann ist

$$(S\tilde{T})^T A (S\tilde{T}) = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

**Folgerung 21.15**  $(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$  quadratische Räume über  $\mathbb{R}$ . Dann sind äquivalent:

1. Es gibt einen Isomorphismus quadratischer Räume  $(V, \gamma_V) \rightarrow (W, \gamma_W)$
2.  $\dim V = \dim W$  und  $\text{Signatur}(\gamma_V) = \text{Signatur}(\gamma_W)$

**Beweis** 1.  $\implies$  2. Für  $\text{Signatur}(\gamma_V) = \text{Signatur}(\gamma_W)$  verwende Charakterisierung von  $r_+$  aus dem Beweis von 21.3.

2.  $\implies$  1. aus 21.13, analog zum Beweis von 21.11 □

**Anmerkung** Man kann Folgerung 21.11/21.15 verwenden, um quadratische Formen über  $\mathbb{C}$  beziehungsweise  $\mathbb{R}$  bis auf Äquivalenz zu klassifizieren (vergleiche Übungen)

## 22 Euklidische Räume

**Definition 22.1**  $V$   $\mathbb{R}$ -VR,  $\gamma : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  symmetrische Bilinearform.  $\gamma$  heißt

- **positiv definit**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff} \gamma(v, v) > 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$
- **positiv semidefinit**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff} \gamma(v, v) \geq 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$
- **negativ definit**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff} \gamma(v, v) < 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$
- **negativ semidefinit**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff} \gamma(v, v) \leq 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$
- **indefinit**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff} \gamma$  ist weder positiv noch negativ semidefinit.

Eine positiv definite symmetrische Bilinearform nennt man auch ein **Skalarprodukt**.

**Beispiel 22.2**

1.  $V = \mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$  ist ein

Skalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Positiv Definitheit:

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0, \text{ falls } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$$



$\langle \cdot, \cdot \rangle$  heißt das **Standardskalarprodukt** auf dem  $\mathbb{R}^n$ .

2.  $V = \mathcal{C}[0, 1]$

$$\gamma : \mathcal{C}[0, 1] \times \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

ist ein Skalarprodukt.

**Anmerkung** Um die Definitheit einer symmetrischen Bilinearform nachzuweisen, genügt es nicht, das Verhalten auf den Basisvektoren zu untersuchen: Sei  $\gamma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\gamma = \Delta \left( \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

das heißt

$$M_{(e_1, e_2)}(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist  $\gamma(e_1, e_1) = 1, \gamma(e_2, e_2) = 1$  aber

$$\gamma \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 < 0$$

das heißt  $\gamma$  ist indefinit.

**Definition 22.3** Ein **Euklidischer Raum** ist ein Paar  $(V, \gamma)$ , bestehend aus einem endlichdimensionalen  $\mathbb{R}$ -VR  $V$  und einem Skalarprodukt  $\gamma$  auf  $V$ . Für den Rest dieses Abschnittes sei  $(V, \gamma)$  ein Euklidischer Raum.

**Definition 22.4**  $v \in V$

$$\|v\| := \sqrt{\gamma(v, v)}$$

heißt die **Norm** auf  $V$ .

$(v_i)_{i \in I}$  Familie von Vektoren aus  $V$  heißt **orthonormal**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff} (v_i)_{i \in I}$  ist orthogonal und  $\|v_i\| = 1 \forall i \in I$ .

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  heißt \*Orthonormalbasis von  $V((V, \gamma))$  (ONB)  $\iff \mathcal{B}$  ist Basis von  $V$  und  $\mathcal{B}$  ist orthonormal.

**Bemerkung 22.5**  $(v_1, \dots, v_n)$  orthogonale Familie von Vektoren aus  $V \setminus \{0\}$ . Dann gilt:

1.  $\left( \frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right)$  ist eine orthonormale Familie
2.  $(v_1, \dots, v_n)$  ist linear unabhängig.

**Beweis** 1.  $\|v_i\|^2 = \gamma(v_i, v_i) \neq 0$ , da  $\gamma$  positiv definit und  $v_i \neq 0$ .

$$\gamma \left( \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_j}{\|v_j\|} \right) = \frac{1}{\|v_i\| \|v_j\|} \gamma(v_i, v_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{\gamma(v_i, v_i)}{\|v_i\|^2} = 1 & i = j \end{cases}$$

2. Sei  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$

$$\implies \lambda_1 \gamma(v_1, v_i) + \dots + \lambda_n \gamma(v_n, v_i) = 0$$

$$\implies \lambda_i = 0$$

□

**Bemerkung 22.6** Es gilt:

1.  $(V, \gamma)$  besitzt eine Orthonormalbasis
2.  $\gamma$  ist nicht-ausgeartet
3. Es gibt eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  mit  $M_{\mathcal{B}}(\gamma) = E_n$ , wobei  $n = \dim V$

**Beweis** Der quadratische Raum  $(V, \gamma)$  hat eine Orthogonalbasen  $(v_1, \dots, v_n)$

$$\implies \mathcal{B} := \left( \frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right)$$

ist eine Orthonormalbasis von  $(V, \gamma)$ . Es ist  $M_{\mathcal{B}}(\gamma) = E_n$  ( $\implies$  3.), insbesondere ist  $M_{\mathcal{B}}(\gamma)$  invertierbar  $\implies \gamma$  nicht ausgeartet  $\implies$  2. □

**Bemerkung 22.7**  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  Orthonormalbasis von  $(V, \gamma)$ ,  $v \in V$ . Dann gilt: Ist  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ , dann ist  $\lambda_i = \gamma(v, v_i) \forall i = 1, \dots, n$

**Beweis**  $\gamma(v, v_i) = \lambda_1 \gamma(v_1, v_i) + \dots + \lambda_n \gamma(v_n, v_i) = \lambda_i \underbrace{\gamma(v_i, v_i)}_{=1} = \lambda_i$  □

**Bemerkung+Definition 22.8**  $U \subseteq V$  Untervektorraum.

$$U^\perp := \{v \in V \mid \gamma(v, u) = 0 \forall u \in U\}$$

heißt das **orthogonale Komplement** zu  $U$ .  $U^\perp$  ist ein Untervektorraum von  $V$ .

**Beweis** leicht nachzurechnen □

**Satz+Definition 22.9**  $U \subseteq V$  Untervektorraum. Dann gilt:

1.  $V = U \oplus U^\perp$
2.  $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$
3.  $(U^\perp)^\perp = U$
4. Ist  $(u_1, \dots, u_m)$  eine Orthogonalbasis von  $(U, \gamma|_{U \times U})$ , und ist  $v \in V$  mit  $v = u + v', u \in U, v' \in U^\perp$ , dass ist

$$u = \sum_{j=1}^m \gamma(v, u_j) u_j$$

Die lineare Abbildung

$$\pi_u : V \rightarrow U, v \mapsto \sum_{j=1}^m \gamma(v, u_j) u_j$$

heißt die **Orthogonalprojektion** von  $V$  auf  $U$ .

**Beweis** 1.  $U + U^\perp = V$ , denn:

Sei  $(u_1, \dots, u_m)$  eine Orthogonalbasis von  $(U, \gamma|_{n \times n})$ ,  $v \in V$ . Setze

$$v' := v - \sum_{j=1}^m \gamma(v, u_j) u_j$$

$$\implies \gamma(v', u_i) = \gamma(v, u_i) - \sum_{j=1}^m \gamma(v, u_j) \gamma(u_j, u_i) = \gamma(v, u_i) - \gamma(v, u_i) = 0 \forall i = 1, \dots, m$$

$$\implies v' \in U^\perp$$

$$\implies v = \underbrace{\sum_{j=1}^m \gamma(v, u_j) u_j}_{\in U} + \underbrace{v'}_{\in U^\perp}$$

$$\implies V = U + U^\perp$$

$$U \cap U^\perp = \{0\}, \text{ denn: } u \in U \cap U^\perp \implies \gamma(u, u) = 0 \implies u = 0 \text{ (da } \gamma \text{ Skalarprodukt)}$$

2. aus 1., 2.

3. Sei  $u \in U \implies \gamma(u, w) = 0 \forall w \in U^\perp \implies u \in (U^\perp)^\perp$ , das heißt  $U \subseteq U^{\perp\perp}$ . Wegen  $\dim(U^\perp)^\perp = \dim V - \dim U^\perp = \dim V - (\dim V - \dim U) = \dim U$  folgt  $U = U^{\perp\perp}$   
□

**Anmerkung** Insbesondere gilt für alle  $v \in V : v - \pi_U(v) \in U^\perp$

**Beispiel 22.10**

$$(V, \gamma) = (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle), U = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \implies U^\perp = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \text{ denn } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U^\perp$$

wegen  $\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$ , und es ist  $\dim U^\perp = 2 - \dim U = 2 - 1 = 1$ . Jedes Element aus  $V$  lässt sich eindeutig schreiben als

$$v = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

das heißt

$$\pi_u : v = \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in U^\perp} \mapsto \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma\left(v, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \vec{1}; \vec{1}$$

**Frage:** Wie bestimmt man explizit eine Orthogonalbasis eines Euklidischen Raumes?

**Algorithmus 22.11 (Gram-Schmidt-Verfahren)** **Eingabe:**  $(v_1, \dots, v_n)$  Basis von  $V$ .

**Ausgabe:** Orthonormalbasis  $(w_1, \dots, w_n)$  von  $(V, \gamma)$

**Durchführung:**

1. Setze

$$w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

2. Setze für  $k = 2, \dots, n$

$$\tilde{w}_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \gamma(v_k, w_i) w_i, \quad w_k := \frac{\tilde{w}_k}{\|\tilde{w}_k\|}$$

3.  $(w_1, \dots, w_n)$  ist eine Orthonormalbasis von  $(V, \gamma)$

**Beweis** Sei  $U_k := \text{Lin}((v_1, \dots, v_k))$  für  $k = 1, \dots, n$ . Wir zeigen per Induktion nach  $k$ , dass  $(w_1, \dots, w_k)$  eine Orthogonalbasis von  $(U_k, \gamma|_{U_k \times U_k})$  ist (Behauptung folgt dann aus  $k = n$ ).

Induktionsanfang:  $k = 1$  klar

Induktionsschritt: Sei  $\pi_{k-1} := \pi_{U_{k-1}} : V \rightarrow V_{k-1}$  die orthogonale Projektion.

$$\implies \tilde{w}_k = v_k - \pi_{k-1}(v_k)$$

da  $(w_1, \dots, w_{k-1})$  Orthogonalbasis von  $U_{k-1}$  nach Induktionsvoraussetzung.  $\implies \tilde{w}_k \in U_{k-1}^\perp$ .  
Außerdem  $\tilde{w}_k \neq 0$ , da sonst  $v_k = \pi_{k-1}(v_k) \in U_{k-1}$  zu  $(v_1, \dots, v_k)$  Basis von  $U_{k-1}$

$$\implies w_k = \frac{\tilde{w}_k}{\|\tilde{w}_k\|} \in U_{k-1}^\perp$$

und es ist

$$\gamma(w_k, w_i) = \begin{cases} 0 & i = 1, \dots, k-1 \\ 1 & i = k \end{cases}$$

$\implies (w_1, \dots, w_k)$  Orthogonalbasis von  $U_k$

□

### Beispiel 22.12

Wir betrachten  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle), U = \text{Lin}((v_1, v_2))$  mit  $v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Gesucht ist

eine Orthogonalbasis von  $U$  bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Setze

$$w := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_2 &= v_2 - \langle v_2, w \rangle w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ w_2 &= \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \text{ ist eine Orthogonalbasis von } U.$$

**Definition 22.13**  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$  symmetrisch.  $A$  heißt **positiv definit** (Notation:  $A > 0$ )  $\stackrel{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$  Die symmetrische Bilinearform

$$\Delta(A) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^T A y$$

ist positiv definit.

**Bemerkung 22.14**  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$  symmetrisch. Das sind äquivalent:

1.  $A > 0$
2.  $\exists T \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) : A = T^T T$

**Beweis** 1.  $\Rightarrow$  2. Sei  $A > 0 \Rightarrow (\mathbb{R}^n, \Delta(A))$  Euklidischer Raum. Sei  $\mathcal{B}$  Orthogonalbasis von  $(\mathbb{R}^n, \Delta(A))$   $T := T_{\mathcal{B}}^{(e_1, \dots, e_n)}$

$$\Rightarrow E_n = M_{\mathcal{B}}(\Delta(A)) = \underbrace{\left( T_{(e_1, \dots, e_n)}^{\mathcal{B}} \right)^T}_{=(T^{-1})^T} \underbrace{M_{(e_1, \dots, e_n)}(\Delta(A))}_{=A} \underbrace{T_{(e_1, \dots, e_n)}^{\mathcal{B}}}_{=T^{-1}}$$

$$\Rightarrow A = T^T T$$

2. Sei  $A = T^T T$  für ein  $T \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ . Für  $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$  ist

$$\Delta(A)(x, x) = x^t A w = x^t T^t T x = (T x)^T T x = \langle T x, T x \rangle > 0 \quad \square$$

**Anmerkung** 1., 2. sind äquivalent zu

3. Es existiert eine obere Dreiecksmatrix  $P$  mit Diagonaleinträgen, sodass  $A = P^T P$  (siehe Übungen). Obiges  $P$  ist sogar eindeutig bestimmt, eine solche Zerlegung heißt Cholesky-Zerlegung.

**Satz 22.15 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)**  $v, w \in V$ . Dann gilt:

$$|\gamma(v, w)| \leq \|v\| \|w\|$$

Gleichheit gilt hierbar genau dann, wenn  $(v, w)$  linear abhängig.

**Beweis** 1. Beweis der Ungleichung: Falls  $w = 0$ , dass fertig. Im Folgenden sei  $w \neq 0$ . Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ist

$$0 \leq \gamma(\lambda v + \mu w, \lambda v + \mu w) = \lambda^2 \gamma(v, v) + \mu^2 \gamma(w, w) + 2\lambda\mu \gamma(v, w)$$

Setze  $\lambda := \gamma(w, w) > 0$ , dividiere durch  $\lambda$

$$0 \leq \gamma(v, v)\gamma(w, w) + \mu^2 + 2\mu\gamma(v, w)$$

Setze  $\mu := -\gamma(v, w)$

$$0 \leq \gamma(v, v)\gamma(w, w) + \gamma(v, w)^2 - 2\gamma(v, w)^2$$

$$\gamma(v, w)^2 \leq \gamma(v, v)\gamma(w, w)$$

$$|\gamma(v, w)| \leq \|v\|\|w\|$$

2. Gleichheitsaussage: Für  $w \neq 0$ :  $(v, w)$  linear abhängig und „ $=$ “ gilt. Ab jetzt also  $w \neq 0$ .

”  $\iff$  “ Sei  $(v, w)$  linear abhängig  $\implies \exists \lambda \in K : v = \lambda w$

$$\implies |\gamma(v, w)|^2 = |\gamma(\lambda w, w)|^2 = |\lambda|^2 |\gamma(w, w)|^2 = |\gamma(w, w)| |\gamma(\lambda w, \lambda w)| = \|w\|^2 \|\lambda w\|^2$$

$$\implies |\gamma(v, w)| = \|w\| \|\lambda w\| = \|w\| \|v\|.$$

”  $\implies$  “ Es gelte, sei also  $|\gamma(v, w)| = \|v\|\|w\|$ . Führe die Rechnung wie in 1. rückwärts durch:

Mit  $\lambda := \gamma(w, w)$ ,  $\mu = -\gamma(v, w)$  folgt dass

$$\gamma(\lambda v + \mu w, \lambda v + \mu w) = 0 \implies \lambda v + \mu w = 0 \implies (v, w) \text{ linear abhängig} \quad \square$$

**Bemerkung 22.16 (Eigenschaften der Norm)**  $v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

1.  $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2.  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$
3.  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

**Beweis** 1. klar, da  $\gamma$  positiv definit

$$2. \|\lambda v\|^2 = \gamma(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 \gamma(v, v) = \lambda^2 \|v\|^2 \implies \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

3.

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \gamma(v + w, v + w) = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\gamma(v, w) \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2|\gamma(v, w)| \\ &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2 \\ \implies \|v + w\| &\leq \|v\| + \|w\| \quad \square \end{aligned}$$

**Bemerkung 22.17**  $v, w \in V$ . Dann gilt:

$$1. \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \iff \gamma(v, w) = 0$$

Satz des Pythagoras

$$2. \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

Parallelogrammgleichung

- Beweis** 1.  $\|v + w\|^2 = \gamma(v + w, v + w) = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\gamma(v, w) \implies$  Behauptung
2.  $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = \gamma(v + w, v + w) + \gamma(v - w, v - w) = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \quad \square$

**Anmerkung**  $V$   $\mathbb{R}$  Vektorraum. Eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit den Eigenschaften 1. bis 3. aus 22.16 heißt eine Norm auf  $V$ ,  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum. Man kann zeigen: Ist  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter Vektorraum, in dem die Parallelogrammgleichung gilt, dann ist durch

$$\gamma(v, w) := \frac{1}{2} (\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

ein Skalarprodukt auf  $V$  mit  $\|v\| = \sqrt{\gamma(v, v)}$ , das heißt in diesen Fällen ist  $(V, \gamma)$  ein euklidischer Vektorraum, dessen Norm mit die gegebenen übereinstimmt.

## 23 Die orthogonale Gruppe

**Definition 23.1**  $(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$  Euklidische Räume,  $\varphi : V \rightarrow W$  lineare Abbildung.  $\varphi$  heißt **orthogonal**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff} \varphi$  ist ein Homomorphismus quadratischer Räume, das heißt

$$\gamma_W(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = \gamma_V(v_1, v_2) \forall v_1, v_2 \in V$$

**Bemerkung 23.2**  $(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$  Euklidische Räume,  $\varphi : V \rightarrow W$  orthogonale Abbildung. Dann gilt:

1.  $\|\varphi(v)\|_W = \|v\|_V \forall v \in V$
2.  $v_1 \perp v_2 \iff \varphi(v_1) \perp \varphi(v_2) \forall v_1, v_2 \in V$
3.  $\varphi$  ist injektiv

- Beweis** 1.  $\|\varphi(v)\|_W^2 = \gamma_W(\varphi(v), \varphi(v)) = \gamma_V(v, v) = \|v\|_V^2$
2.  $v_1 \perp v_2 \iff \gamma_V(v_1, v_2) = 0 \iff \gamma_W(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = 0 \iff \varphi(v_1) \perp \varphi(v_2)$
3. Sei  $v \in V$  mit  $\varphi(v) = 0 \implies \|\varphi(v)\|_W = 0 \implies \|v\|_V = 0 \implies v = 0 \quad \square$

**Bemerkung 23.3**  $(V, \gamma)$  Euklidischer Raum,  $n = \dim V$ ,  $\mathcal{B}$  Orthogonalbasis von  $(V, \gamma)$ . Dann ist das Koordinatensystem  $\Phi_{\mathcal{B}} : (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (V, \gamma)$  ein orthogonaler Isomorphismus.

**Beweis**  $\Phi_{\mathcal{B}}$  Isomorphismus: klar.  $\Phi_{\mathcal{B}}$  orthogonal, denn: Sei  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  dann ist

$$\gamma(\Phi_{\mathcal{B}}(e_i), \Phi_{\mathcal{B}}(e_j)) = \gamma(v_i, v_j) = \delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle \quad \square$$

**Bemerkung 23.4**  $(V, \gamma)$  Euklidischer Raum,  $\varphi \in \text{End}(V)$  orthogonal. Dann gilt:

1.  $\varphi$  ist Isomorphismus

2.  $\varphi^{-1}$  ist orthogonal
3.  $\lambda \in \mathbb{R}$  Eigenwert von  $\gamma \implies |\lambda| = 1$ , das heißt  $\lambda \in \{\pm 1\}$

**Beweis** 1. aus 23.2.3 folgt:  $\varphi$  injektiv  $\implies \varphi$  Isomorphismus

2.  $v_1, v_2 \in V \implies \gamma(\varphi^{-1}(v_1), \varphi^{-1}(v_2)) = \gamma(\varphi(\varphi^{-1}(v_1)), \varphi(\varphi^{-1}(v_2))) = \gamma(v_1, v_2) \implies \varphi^{-1}$  orthogonal
3. Sei  $v \in V$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda \implies \|v\| = \|\varphi(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \implies |\lambda| = 1$   $\square$

**Bemerkung 23.5**  $(V, \gamma)$  Euklidischer Raum,  $n = \dim V$ ,  $\mathcal{B}$  Orthogonalbasis von  $V$ ,  $\varphi \in \text{End}(V)$ ,  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ . Dann sind äquivalent:

1.  $\varphi$  ist orthogonal
2.  $A^T A = E_n$

**Beweis** Wir erhalten kommutierendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 (V, \gamma) & \xleftarrow{\Phi_{\mathcal{B}}} & (V, \gamma) \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) & \xleftarrow{\Phi_{\mathcal{B}}} & (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)
 \end{array}$$

Da  $\Phi_{\mathcal{B}}$  orthogonaler Isomorphismus nach 23.3 folgt:

$$\begin{aligned}
 \varphi \text{ orthogonal} &\iff \tilde{A} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} = \varphi \circ \Phi_{\mathcal{B}} \text{ orthogonal} \\
 &\iff \forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \\
 &\iff \forall x, y \in \mathbb{R}^n : (Ax)^T Ay = x^T y \\
 &\iff \forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle Ax, Ay \rangle = x^T A^T Ay = x^T y \\
 &\iff \Delta(A^T A) = \Delta(E_n) \\
 &\iff A^T A = E_n
 \end{aligned}$$

$\square$

**Bemerkung+Definition 23.6**  $A$  heißt **orthogonal**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff} A^T A = E_n$

$$O(n) := \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid A \text{ ist orthogonal}\}$$

$O(n)$  ist bezüglich die Matrixmultiplikation eine Gruppe, die **orthogonale Gruppe** vom Rang  $n$



**Beweis** Wohldefiniertheit von „ $\cdot$ “ (das heißt Abgeschlossenheit bezüglich „ $\cdot$ “):  $A, B \in O(n) \implies (AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T B = E_n \implies AB \in O(n)$ .

Existenz des neutralen Elements:  $E_n \in O(n)$

Assoziativität: klar

Existenz von Inversen: Sei  $A \in O(n) \implies A^T A = E_n \implies A^{-1} = A^t \implies (A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^T A^T = AA^T = AA^{-1} = E_n$   $\square$

**Anmerkung**  $A \in O(n) \implies \det(A) \in \{\pm 1\}$ , denn  $1 = \det(E_n) = \det(A^T A) = \det(A^T) \det(A) = \det(A)^2$

**Bemerkung 23.7**  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ . Dann sind äquivalent:

1.  $A \in O(n)$
2.  $AA^T = E_n$
3.  $A^T A = E_n$
4. Die Transponierten der Zeilen von  $A$  bilden eine Orthogonalbasis von  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$
5. Die Spalten von  $A$  bilden eine Orthogonalbasis von  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$
6. Die Abbildung  $\tilde{A} : (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist orthogonal

**Beweis** 1.  $\iff$  2.  $\iff$  3.  $\iff$  klar

2.  $\iff$  4., 3.  $\iff$  5.

1.  $\iff$  6. aus 23.5 (setze  $V = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ )  $\square$

**Satz 23.8**  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (nicht notwendig linear) abstandstreu, das heißt

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y\| \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

wobei  $\|\cdot\|$  die Norm auf  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  bezeichne. Dann existieren eindeutig bestimmte  $A \in O(n)$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ , sodass

$$\varphi(x) = Ax + b$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^n$

**Bemerkung+Definition 23.9**  $SO(n) := \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$  ist eine Untergruppe von  $O(n)$  (das heißt  $SO(n) \subseteq O(n)$  und ist eine Gruppe bezüglich der eingeschränkten Verknüpfung), die **spezielle orthogonale Gruppe** vom Rang  $n$ .

**Beweis** Wohldefiniertheit von „ $\cdot$ “ (= Abgeschlossenheit bezüglich „ $\cdot$ “)

$$A, B \in SO(n) \implies AB \in O(n) \wedge \det(AB) = \det(A) \det(B) = 1 \cdot 1 = 1$$

neutrales Element:  $E_n \in SO(n)$

Assoziativität: klar

Existenz von Inversen:  $A \in SO(n) \implies A^{-1} \in O(n), \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = 1 \implies A^{-1} \in SO(n)$   $\square$

**Beispiel 23.10**

$n = 1 : O(1) = \{\pm 1\}, SO(1) = \{1\}$

**Bemerkung 23.11**  $A \in O(2)$ . Dann gilt:

1.  $A \in SO(2) \iff \exists! \alpha \in [0, 2\pi]$  mit

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

In diesem Fall beschreibt  $A$  eine Drehung mit Zentrum 0 um den Winkel  $\alpha$ . Außer im Fall  $\alpha \in \{0, \pi\}$  besitzt  $A$  keine Eigenwerte. Falls  $\alpha = 0$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

einzigster Eigenwert: 1. Falls  $\alpha = \pi$ :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

einzigster Eigenwert:  $-1$ .

2.  $A \in O(2) \setminus SO(2) \iff \exists! \alpha \in [0, 2\pi]$  mit

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

In diesem Fall beschreibt  $A$  eine Spiegelung an der Geraden  $\text{Lin}\left(\begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}\right)$ .  $A$  besitzt die Eigenwerte  $\pm 1$ , und es existiert eine Orthogonalbasis  $\mathcal{B}$  von  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit

$$M_{\mathcal{B}}(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Beweis** Sei  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O(2)$

$$\implies 1 = \|e_1\|^2 = \|Ae_1\|^2 = a^2 + b^2$$

$$\implies 1 = \|e_2\|^2 = \|Ae_2\|^2 = c^2 + d^2$$

Außerdem:  $e_1 \perp e_2 \implies Ae_1 \perp Ae_2$

$$\implies \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\right)$$

das heißt es existiert  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\implies A = \begin{pmatrix} a & -\lambda b \\ b & \lambda a \end{pmatrix}, \det A = \lambda(a^2 + b^2) = \lambda \in \{\pm 1\}$$

1. Fall:  $\lambda = 1 \iff \det A = 1 \iff A \in SO(2)$  Wegen  $a^2 + b^2 = 1$  ist  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  ein Punkt auf dem Einheitskreis.  $\implies \exists! \alpha \in [0, 2\pi)$  mit  $a = \cos \alpha, b = \sin \alpha$ . Somit:

$$A \in SO(2) \iff A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

für eindeutig bestimmte  $\alpha \in [0, 2\pi)$ . Sei  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$  ein Punkt auf dem Einheitskreis

$$A \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

$\implies A$  beschreibt eine Drehung mit Zentrum 0 um den Winkel  $\alpha$ .  $A$  hat nur Eigenwerte, wenn  $\alpha = 0$  beziehungsweise  $\alpha = \pi$  (Eigenwert: 1 beziehungsweise  $-1$ ):

$$\chi_A^{\text{char}} = t^2 - \text{sp}(A)t + \det A = t^2 - 2 \cos \alpha + 1$$

Eigenwerte:  $\lambda_{1,2} = \cos \alpha \pm \sqrt{\cos^2 \alpha - 1}$ , Eigenwert in  $\mathbb{R} \iff \cos^2 \alpha - 1 \geq 0 \iff \alpha = 0$  oder  $\alpha = \pi$

2.  $\lambda = -1 \iff A \in O(2) \setminus SO(2)$ :

$$\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

Wegen  $a^2 + b^2 = 1$  existiert genau ein  $\alpha \in [0, 2\pi)$  mit  $a = \cos \alpha, b = \sin \alpha$ . Sei  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$  ein Punkt auf dem Einheitskreis.

$$\implies A \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{pmatrix} = (\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$$

$$\implies A \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2} + \beta) \\ \sin(\frac{\alpha}{2} + \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2} - \beta) \\ \sin(\frac{\alpha}{2} - \beta) \end{pmatrix}$$

$\implies A$  beschreibt Spiegelung an der Geraden  $\text{Lin}\left(\begin{pmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}\right)$

$$\chi_A^{\text{char}} = t^2 - \text{sp}(A)t + \det A = t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$$

$\implies A$  diagonalisierbar und hat Eigenwert  $\pm 1$ . Sei  $v_1$  Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert 1 mit  $\|v_1\| = 1$ ,  $v_2$  Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $-1$  mit  $\|v_2\| = 1$

$$\implies \langle v_1, v_2 \rangle = \langle Av_1, Av_2 \rangle = \langle v_1, -v_2 \rangle = -\langle v_1, v_2 \rangle \implies \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \iff v_1 \perp v_2$$

Bezüglich der Orthogonalbasis  $(v_1, v_2)$  des  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist  $M_{\mathcal{B}}(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$   $\square$

**Folgerung 23.12**  $\varphi : (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  orthogonale Abbildung. Dann existiert eine Orthogonalbasis  $\mathcal{B}$  von  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , sodass

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \text{ oder } M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in (0, \pi)$$

Die Anzahl der  $\pm 1$  sowie  $\alpha$  sind unabhängig von der Wahl einer solchen Orthogonalbasis  $\mathcal{B}$  (das heißt sind Invarianten von  $\varphi$ ).

**Beweis** Existenz von  $\mathcal{B}$ : Sei  $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ ,  $A := M_{\mathcal{C}}(\varphi)$ , insbesondere  $A \in O(2)$ .

1. Fall:  $A \in SO(2) \implies \exists \beta \in (0, 2\pi), \beta \neq \pi$  mit

$$A = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \text{ oder } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Falls  $\beta \in (0, \pi)$ , setze  $\alpha := \beta$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ .

Falls  $\beta \in (\pi, 2\pi)$

$$\implies M_{(e_2, e_1)}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

Setze  $\alpha := 2\pi - \beta$ ,  $\mathcal{B} := (e_2, e_1) \implies \beta = 2\pi - \alpha \implies \cos \beta = \cos \alpha, \sin \beta = -\sin \alpha$

$$\implies M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

2.  $A \in O(2) \setminus SO(2) \implies \exists$  Orthogonalbasis  $\mathcal{B}$  von  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Eindeutigkeit: Falls  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ , dann Anzahl der  $\pm 1 = \mu_{\text{alg}}$  der Eigenwerte  $\pm 1$ .

Falls  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ , dann  $\chi_{\varphi}^{\text{char}} = t^2 - 2 \cos \alpha t + 1 \implies \cos \alpha$  ist unabhängig von der Wahl der Basis  $\mathcal{B}$ . Wegen  $\alpha \in (0, \pi)$  ist  $\alpha$  unabhängig von  $\mathcal{B}$ .  $\square$

**Anmerkung** Verallgemeinerung von 23.12 auf  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist möglich.

## 24 Der Spektralsatz

In diesem Abschnitt sei  $(V, \gamma)$  stets ein Euklidischer Raum.

**Bemerkung 24.1** Die Abbildung  $\Gamma : V \rightarrow V^*, w \mapsto \gamma(\cdot, w)$  ist ein Isomorphismus.

**Beweis**  $\gamma$  nicht ausgeartet nach 22.6  $\implies \gamma$  perfekt, das heißt  $\Gamma$  Isomorphismus.  $\square$

**Anmerkung** Insbesondere ist für einen Euklidischen Vektorraum  $(V, \gamma)$  die Vektorräume  $V$  und  $V^*$  kanonisch isomorph.

**Bemerkung 24.2**  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  Orthonormalbasis von  $(V, \gamma)$ ,  $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$  duale Basis zu  $\mathcal{B}$ ,  $U \subseteq V$  Untervektorraum,  $\Gamma : V \rightarrow V^*$  kanonische Abbildung aus 24.1. Dass gilt:

1.  $\Gamma(U^\perp) = U^0$
2.  $\Gamma(v_i) = v_i^*, i = 1, \dots, n$

**Beweis** 1.  $\Gamma(U^\perp) \subseteq U^0$ , denn: Für  $v \in U^\perp, u \in U$  ist  $(\Gamma(v))(u) = \gamma(u, v) = 0 \implies \Gamma(U^\perp) \subseteq U^0$ .

$$\dim \Gamma(U^\perp) = \dim U^\perp = \dim V - \dim U = \dim U^0$$

2. Es ist  $\Gamma(v_i)(v_j) = \gamma(v_j, v_i) = \delta_{ij} = v_i^*(v_j), j = 1, \dots, n$ , das heißt  $\Gamma(v_i) = v_i^*$   $\square$

**Bemerkung+Definition 24.3**  $(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$  Euklidische Räume,  $\varphi : V \rightarrow W$ . Dass existiert genau eine lineare Abbildung  $\varphi^{ad} : W \rightarrow V$  mit

$$\gamma_W(\varphi(v), w) = \gamma_V(v, \varphi^{ad}(w)) \forall v \in V, w \in W$$

$\varphi^{ad}$  heißt die zu  $\varphi$  **adjungierte Abbildung**

**Beweis** Existenz: Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\Gamma_V} & W \\ \varphi^{ad} \uparrow & & \uparrow \varphi^* \\ V^* & \xrightarrow{\Gamma_W} & W^* \end{array}$$

und setzen  $\varphi^{ad} := \Gamma_V^{-1} \circ \varphi^* \circ \Gamma_W$ ,  $\varphi^{ad}$  ist linear nach Konstruktion. Es gilt für  $v \in V, w \in W$ :

$$\begin{aligned} \gamma_W(\varphi(v), w) &= \Gamma_W(w)(\varphi(v)) = (\Gamma_W(w) \circ \varphi)(v) = \varphi^*(\Gamma_W(w))(v) \\ &= ((\varphi^* \circ \Gamma_W)(w))(v) = \left( (\Gamma_V \circ \varphi^{ad})(w) \right)(v) = \Gamma_V(\varphi^{ad}(w))(v) \\ &= \gamma_V(v, \varphi^{ad}(w)) \end{aligned}$$

Eindeutigkeit: Damit obige Gleichung für alle  $v \in V, w \in W$  gilt, muss das Diagramm kommutieren, das heißt  $\Gamma_V \circ \varphi^{ad} = \varphi^* \circ \Gamma_W$ , also  $\varphi^{ad} = \Gamma_V^{-1} \circ \varphi^* \circ \Gamma_W$ .  $\square$

**Anmerkung** Ist  $\varphi$  orthogonal, dann ist  $\varphi^{ad} = \varphi^{-1}$ , denn für  $v, w \in V$

$$\gamma(\varphi(v), w) = \gamma(\varphi(v), \varphi(\varphi^{-1}(w))) = \gamma(v, \varphi(w))$$

**Bemerkung 24.4**  $(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$  euklidische Räume,  $\mathcal{A}$  Orthonormalbasis von  $(V, \gamma_V)$ ,  $\mathcal{B}$  Orthonormalbasis von  $(W, \gamma_W)$ ,  $\varphi : V \rightarrow W$  lineare Abbildung. Dann gilt

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\varphi^{ad}) = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi))^T$$

Insbesondere ist  $(\varphi^{ad})^{ad} = \varphi$

**Beweis**

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\varphi^{ad}) &= M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\Gamma_V^{-1} \circ \varphi^* \circ \Gamma_W) = \underbrace{M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}^*}(\Gamma_V^{-1})}_{E_{\dim V}} \underbrace{M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}}_{(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi))^T} \underbrace{M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_W)}_{=E_{\dim W}} \\ &= (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi))^T \end{aligned} \quad \square$$

**Satz 24.5**  $(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$  euklidische Räume,  $\varphi : V \rightarrow W$  lineare Abbildung. Dann gilt:

1.  $\ker(\varphi^{ad}) = (\operatorname{im} \varphi)^{\perp}$
2.  $\operatorname{im}(\varphi^{ad}) = (\ker \varphi)^{\perp}$

**Beweis** 1.  $w \in (\operatorname{im} \varphi)^{\perp} \iff \gamma_W(\varphi(v), w) = 0 \forall v \in V \iff \gamma_V(v, \varphi^{ad}(w)) = 0 \forall v \in V, \gamma$  nicht ausgeartet  $\implies \varphi^{ad}(w) = 0 \iff w \in \ker(\varphi^{ad})$

$$2. (\operatorname{im}(\varphi^{ad}))^{\perp} = \ker(\varphi^{ad})^{ad} = \ker \varphi \iff (\ker \varphi)^{\perp} = (\operatorname{im}(\varphi^{ad})^{\perp})^{\perp} = \operatorname{im} \varphi^{ad} \quad \square$$

**Folgerung 24.6**  $\varphi \in \operatorname{End}(V)$ . Dann gilt:

$$V = \ker \varphi \hat{\oplus} \operatorname{im} \varphi^{ad} \quad \text{sowie} \quad V = \ker \varphi^{ad} \hat{\oplus} \operatorname{im} \varphi$$

**Beweis** Es ist

$$V = (\ker \varphi) \hat{\oplus} (\ker \varphi)^{\perp} = \ker \varphi \hat{\oplus} \operatorname{im} \varphi^{ad}$$

andere Gleichung analog.  $\square$

**Definition 24.7 (Selbstadjungiert)**  $\varphi \in \operatorname{End}(V)$  heißt **selbstadjungiert**  $\iff \varphi = \varphi^{ad}$

**Bemerkung 24.8**  $\mathcal{B}$  Orthonormalbasis von  $(V, \gamma)$ . Dann sind äquivalent:

1.  $\varphi$  selbstadjungiert
2.  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  symmetrisch

In diesem Fall  $V = \ker \varphi \hat{\oplus} \operatorname{im} \varphi$

**Beweis**  $\varphi$  selbstadjungiert  $\iff \varphi = \varphi^{ad} \iff M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}\varphi^{ad} = (M_{\mathcal{B}}(\varphi))^T$ . Nach 24.6 ist dann  $V = \ker \varphi \hat{\oplus} \operatorname{im} \varphi^{ad} = \ker \varphi \hat{\oplus} \operatorname{im} \varphi$   $\square$

**Satz 24.9** Es gilt:

1.  $\varphi \in \operatorname{End}(V)$  selbstadjungiert  $\implies \gamma' : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \gamma'(x, y) = \gamma(\varphi(x), y)$  ist eine symmetrische Bilinearform
2. Ist  $\gamma' : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform, dann existiert genau ein selbstadjungierter Endomorphismus  $\varphi \in \operatorname{End}(V)$  mit  $\gamma'(x, y) = \gamma(\varphi(x), y) \forall x, y \in V$

In diesem Fällen gilt bezüglich jeder Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $(V, \gamma)$ :

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma') = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

**Beweis** 1.  $\varphi$  selbstadjungiert  $\implies \gamma'(x, y) = \gamma(\varphi(x), y) = \gamma(x, \varphi(y)) = \gamma(\varphi(y), x) = \gamma'(y, x)$ ,  $\gamma'$  bilinear klar.

2. Sei  $\gamma' : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  symmetrische Bilinearform,  $x \in V \implies \rho_x := \gamma'(x, \cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}, \gamma \mapsto \gamma'(x, y)$  ist ein Element von  $V^*$ . Nach 24.1 ist  $\Gamma : V \rightarrow V^*, w \mapsto \gamma(\cdot, w)$  ein Isomorphismus  $\implies$  Es existiert genau ein  $z \in V$  mit  $\Gamma(z) = \rho_x$ , das heißt mit

$$\gamma(y, z) = \Gamma(z)(y) = \rho_x(y) = \gamma'(x, y) \forall y \in V$$

Wir definieren  $\varphi : V \rightarrow V, x \mapsto k$  mit  $\Gamma(z) = \rho_x \implies$  Für alle  $x, y \in V$  ist  $\gamma(\varphi(x), y) = \gamma(y, \varphi(x)) = \gamma'(x, y)$ .

$\varphi$  ist linear: Seien  $x_1, x_2, y \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\implies \Gamma(\varphi(\lambda x_1 + \mu x_2) - \lambda \varphi(x_1) - \mu \varphi(x_2))(y) = \gamma(y, \varphi(\lambda x_1 + \mu x_2) - \lambda \varphi(x_1) - \mu \varphi(x_2))$$

$$= \gamma(y, \varphi(\lambda x_1 + \mu x_2) - \lambda \varphi(x_1) - \mu \varphi(x_2)) \\ = \gamma'(\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda \gamma'(x_1, y) - \mu \gamma'(x_2, y)$$

$\gamma'$  bilinear

$$= 0$$

Das gilt für alle  $y \in V$

$$\implies \Gamma(\varphi(\lambda x_1 + \mu x_2) - \lambda \varphi(x_1) - \mu \varphi(x_2)) = 0$$

$$\implies \varphi(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda \varphi(x_1) + \mu \varphi(x_2)$$

$\varphi$  selbstadjungiert: Für  $x, y \in V$  ist

$$\gamma(\varphi(x), y) = \gamma'(x, y) = \gamma'(y, x) = \gamma(\varphi(y), x) = \gamma(x, \varphi(y)) \implies \varphi = \varphi^{ad}$$

$\varphi$  ist eindeutig: Sei  $\tilde{\varphi}$  selbstadjungiert mit  $\gamma'(x, y) = \gamma(\varphi(x), y) = \gamma(\tilde{\varphi}(x), y) \forall x, y \in V$

$$\begin{aligned} \implies \Gamma(\varphi(x))(y) &= \Gamma(\tilde{\varphi}(x))(y) \forall x, y \in V \\ \implies \Gamma(\varphi(x)) &= \Gamma(\tilde{\varphi}(x)) \end{aligned}$$

$\Gamma$  Isomorphismus

$$\begin{aligned} \implies \varphi(x) &= \tilde{\varphi}(x) \forall x \in V \\ \implies \varphi &= \tilde{\varphi} \end{aligned}$$

Darstellungsmatrizen: Sei  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  Orthogonalbasis von  $(V, \gamma)$ .  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (a_{ij})$

$$\implies \gamma'(v_i, v_j) = \gamma(\varphi(v_i), v_j) = \gamma\left(\sum_{k=1}^n a_{ki} v_k, v_j\right) = a_{ji} \stackrel{\varphi \text{ selbstadjungiert}}{=} a_{ij}$$

$$\implies M_{\mathcal{B}}(\gamma') = M_{\mathcal{B}}(\gamma) \quad \square$$

**Anmerkung** Interpretation für  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ : Ist  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$  symmetrisch, dann ist  $A$

- Darstellungsmatrix bezüglich  $(e_1, \dots, e_n)$  des selbstadjungierten Endomorphismus  $\tilde{A}$  von  $\mathbb{R}^n$
- Darstellungsmatrix bezüglich  $(e_1, \dots, e_n)$  der symmetrischen Bilinearform  $\gamma' = \Delta(A) : (x, y) \mapsto x^t A y$

Es ist  $\gamma'(x, y) = x^t A y = x^t A^t y = (Ax)^t y = \langle Ax, y \rangle = \langle \tilde{A}(x), y \rangle \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ . Bezüglich jeder Orthogonalbasis von  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  gilt  $M_{\mathcal{B}}(\tilde{A}) = M_{\mathcal{B}}(\gamma')$

**Bemerkung 24.10**  $\varphi \in \text{End}(V)$  selbstadjungiert,  $U \subseteq V$  Untervektorraum mit  $\varphi(U) \subseteq U$ . Dann gilt  $\varphi(U^\perp) \subseteq U^\perp$

**Beweis** Sei  $v \in U^\perp \implies \forall u \in U : \gamma(u, \varphi(v)) = \gamma\left(\underbrace{\varphi(u)}_{\in U}, \underbrace{v}_{\in U^\perp}\right) = 0 \implies \varphi(v) \in U^\perp \quad \square$

**Bemerkung 24.11**  $\varphi \in \text{End}(V)$  selbstadjungiert. Dann zerfällt  $\chi_\varphi^{\text{char}}$  über  $\mathbb{R}$  in Linearfaktoren.

**Beweis** Sei  $\mathcal{B}$  eine Orthonormalbasis von  $(V, \gamma)$ ,  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi) \implies \chi_\varphi^{\text{char}} = \chi_A^{\text{char}}, A = A^T$  wegen  $\varphi$  selbstadjungiert. Wir betrachten die  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $\tilde{A}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, z \mapsto Az$ . Es ist

$$\chi_A^{\text{char}} = \chi_{\tilde{A}_{\mathbb{C}}}^{\text{char}} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n), \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$$



Behauptung:  $\lambda_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n$ , denn: Sei  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_i$

von  $\tilde{A}_{\mathbb{C}}$ . Wir setzen  $\bar{z} := \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$  und erhalten

$$\lambda_i z^T \bar{z} = (\lambda_i z)^T \bar{z} = (Az)^T \bar{z} = z^T A^T \bar{z} = z^T A \bar{z} = z^T \overline{A z} = z^T \overline{\lambda_i z} = \bar{\lambda}_i z^T \bar{z}$$

Es ist  $z^T \bar{z} = (z_1, \dots, z_n) \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix} = z_1 \bar{z}_1 + \dots + z_n \bar{z}_n = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \neq 0 \implies \lambda_i =$

$\bar{\lambda}_i \implies \lambda_i \in \mathbb{R}$  □

**Satz 24.12 (Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen)**  $\varphi \in \text{End}(V)$  selbstadjungierter Endomorphismus. Dann existiert eine Orthonormalbasis von  $(V, \gamma)$  aus Eigenvektoren von  $\varphi$ . Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  die verschiedenen Eigenwerte von  $\varphi$ , so ist

$$V = \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} \text{Eig}(\varphi, \lambda_r)$$

**Beweis** per Induktion nach  $n = \dim V$ .

Induktionsanfang:  $n = 0$ : trivial

Induktionsschritt: Sei  $n \geq 1$ . Nach 24.1.1 existiert ein Eigenwert  $\lambda$  von  $\varphi$  und es sei  $w_1$  ein Eigenvektor von  $\varphi$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Setze

$$v_i := \frac{w_1}{\|w_1\|}, U := \text{Lin}((v_i)) \implies \varphi(U) \subseteq U \implies \varphi(U^\perp \subseteq U^\perp)$$

Wir setzen  $\psi := \varphi|_{U^\perp} : U^\perp \rightarrow U^\perp$ .  $\psi$  ist selbstadjungiert, denn: Für alle  $x, y \in U^\perp$  ist

$$\gamma(\psi(x), y) = \gamma(\varphi(x), y) = \gamma(x, \varphi(y)) = \gamma(x, \psi(y))$$

Nach 22.9 ist  $V = U \hat{\oplus} U^\perp$ ,  $\dim U^\perp = \dim V - \dim U = n - 1$ . Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine Orthonormalbasis von  $(v_2, \dots, v_n)$  von  $U^\perp$  aus Eigenvektoren von  $\varphi \implies (v_1, \dots, v_n)$  ist von Orthonormalbasis  $(V, \gamma)$  aus Eigenvektoren von  $\varphi \implies V = \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} \text{Eig}(\varphi, \lambda_r)$  □

**Folgerung 24.13**  $\gamma' : V \times V : \mathbb{R}$  symmetrische Bilinearform,  $n = \dim V$ . Dann existiert eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $(V, \gamma)$  bezüglich derer die Darstellungsmatrix von  $\gamma'$  Diagonalgestalt hat:

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma') = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Hierbei sind  $\lambda_i, \dots, \lambda_n$  die Eigenwerte (mit Vielfachen) des zu  $\gamma'$  gehörenden eindeutig bestimmten selbstadjungierten Endomorphismus  $\varphi \in \text{End}(V)$  mit  $\gamma'(x, y) = \gamma(\varphi(x), y)$

**Beweis** Sei  $\varphi \in \text{End}(V)$  der entsprechende Endomorphismus von  $V$  nach 24.9. Spektralsatz  $\implies$  Es existiert eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $(V, \gamma)$  aus Eigenvektoren von  $\varphi$  zu Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (nicht notwendig verschieden)

$$\implies M_{\mathcal{B}}(\gamma') \stackrel{24.9}{=} M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \square$$

**Folgerung 24.14**  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$  symmetrisch. Dann existiert ein  $T \in O(n)$ , sodass

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Hierbei sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die Eigenwerte (mit Vielfachheit) von  $A$ . Die Spalten von  $T$  bilden eine Orthonormalbasen von  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  aus Eigenvektoren von  $A$ .

**Beweis**  $\tilde{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist selbstadjungierter Endomorphismus von  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Spektralsatz  $\implies$  es existiert eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  aus Eigenvektoren von  $\tilde{A}$  des  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit

$$M_{\mathcal{B}}(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Es ist

$$M_{\mathcal{B}}(\tilde{A}) = \underbrace{\left(T_{(e_1, \dots, e_n)}^{\mathcal{B}}\right)^{-1}}_{=T^{-1}} \underbrace{M_{(e_1, \dots, e_n)}^{(e_1, \dots, e_n)}(\tilde{A})}_A \underbrace{T_{(e_1, \dots, e_n)}^{\mathcal{B}}}_{=:T}$$

Es ist  $T \in O(n)$ , da  $\mathcal{B}$  Orthogonalbasis von  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  (vergleiche 23.7)  $\square$

**Anmerkung** Man kann sogar stets  $T \in SO(n)$  erreichen (indem man gegebenenfalls eine Spalte  $v_i$  von  $T$  durch  $-v_i$  ersetzt.)

**Algorithmus 24.15 (Hauptachsentransformation)** Eingabe:  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$  symmetrisch  
Ausgabe:  $T \in O(n)$ , sodass  $T^{-1}AT$  Diagonalmatrix  
Durchführung:

1. Bestimme  $\chi_A^{char} \in \mathbb{R}[t]$  sowie eine Zerlegung

$$\chi_A^{char} = (t - \lambda_1)^{T_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_k)^{T_k}$$

mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  paarweise verschieden

2. Bestimme für  $i = 1, \dots, k$  jeweils eine Basis von  $\text{Eig}(\varphi, \lambda_i)$

3. Bestimme mit dem Gram-Schmidt-Verfahren für  $i = 1, \dots, k$  eine Orthonormalbasis  $\mathcal{B}_i = (v_{i,1}, \dots, v_{i,r_i})$  von  $\text{Eig}(\varphi, \lambda_i)$

4. Die Orthonormalbasis  $\mathcal{B}_i, i = 1, \dots, k$  bilden zusammen eine Orthonormalbasis

$$\mathcal{B} = (v_{1,1}, \dots, v_{1,r_1}, \dots, v_{k,1}, \dots, v_{k,r_k})$$

des  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  aus Eigenvektoren von  $A$

5. Schreibe die Basisvektoren aus  $\mathcal{B}$  in Spalten von  $T$ . Es ist dann

$$T^{-1}AT = (\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_k)E_n$$

**Anmerkung** Um  $T \in SO(n)$  zu erreichen ersetze man gegebenenfalls  $v_{1,1}$  durch  $-v_{1,1}$ .

### Beispiel 24.16

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

Es ist  $\chi_A^{char} = t^3 - 3t^2 - 9t + 27 = (t - 3)^2(t + 3)$ . Es ist  $\text{Eig}(A, 3) = \dots = \text{Lin} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ .

Nach Beispiel 22.12 ist  $\left( \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$  eine Orthonormalbasis von  $\text{Eig}(A, 3)$ .

$\text{Eig}(A, -3) = \text{Lin} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \Rightarrow \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$  ist Orthonormalbasis von  $\text{Eig}(A, -2)$ .

$$\Rightarrow \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

ist Orthonormalbasis von  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  aus Eigenvektoren von  $A$ . Mit

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Es ist  $\det(T) = -1$ , also  $T \in O(3) \setminus (3)$ . Setzt man

$$T' := \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad T'^{-1}AT' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

und es ist  $T' \in SO(3)$ .

## 25 Unitäre Räume

**Definition 25.1 (Sesquilinearform)**  $V \mathbb{C}$  Vektorraum,  $h : V \times V \rightarrow \mathbb{C}, (v, w) \mapsto h(v, w)$  heißt eine **Sesquilinearform** auf  $V$  genau dann wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (S1)  $h(v_1 + v_2, w) = h(v_1, w) + h(v_2, w), h(\lambda v, w) = \lambda(h(v, w))$
- (S2)  $h(v, w_1 + w_2) = h(v, w_1) + h(v, w_2), h(v, \lambda w) = \bar{\lambda}h(v, w)$

für alle  $v_1, v_2, w_1, w_2, v, w \in V, \lambda \in \mathbb{C}$

**Beispiel 25.2**

$h : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, h(x, y) := x^t \bar{y}$  ist eine Sesquilinearform auf  $\mathbb{C}^n$  (beachte  $h(x, \lambda y) = x^t \bar{\lambda y} = \bar{\lambda} x^t \bar{y}$ ), aber keine Bilinearform auf  $\mathbb{C} * n$

**Bemerkung 25.3**  $V \mathbb{C}$  Vektorraum,  $h : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  Sesquilinearform auf  $V$ . Dann induziert  $h$  eine „semilineare“ Abbildung

$$\Gamma : V \rightarrow V^*, w \mapsto h(\cdot, w)$$

das heißt  $\Gamma(w_1 + w_2) = \Gamma(w_1) + \Gamma(w_2), \Gamma(\lambda w) = \bar{\lambda}\Gamma(w) \forall w_1, w_2, w \in V, \lambda \in \mathbb{C}$

**Definition 25.4 (Darstellungsmatrix / Fundamentalmatrix)**  $V$  endlichdimensional,  $\mathbb{C}$  Vektorraum,  $h$  Sesquilinearform auf  $V, \mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  Basis von  $V$

$$M_{\mathcal{B}}(h) = (h(v_i, v_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

heißt die **Darstellungsmatrix (Fundamentalmatrix)** von  $h$  bezüglich  $\mathcal{B}$

**Bemerkung 25.5**  $V$  endlichdimensionaler  $\mathbb{C}$  Vektorraum,  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  Basis von  $V$ .

$$\text{Sesq}(V) := \{h : V \times V \rightarrow \mathbb{C} \mid h \text{ ist eine Sesquilinearform}\}$$

ist ein  $\mathbb{C}$  Vektorraum und Untervektorraum von  $\text{Abb}(V \times V, \mathbb{C})$ . Dann gilt: Die Abbildung  $M_{\mathcal{B}} \rightarrow M(n \times n, \mathbb{C}), h \mapsto M_{\mathcal{B}}(h)$  ist ein Isomorphismus von  $\mathbb{C}$  Vektorräumen mit Umkehrabbildung  $\Delta^{\mathcal{B}} : M(n \times n, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Sesq}(V)$  mit

$$\Delta^{\mathcal{B}}(A)(v, w) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T A \overline{\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)}$$

**Satz 25.6**  $V$  endlichdimensionaler  $\mathbb{C}$  Vektorraum,  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  Basis von  $V, h$  Sesquilinearform auf  $V$ . Dann gilt:

$$M_{\mathcal{B}}(h) = (T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T M_{\mathcal{A}}(h) \overline{T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}}$$

**Definition 25.7 (hermitesch)**  $V \mathbb{C}$  Vektorraum,  $h$  Sesquilinearform auf  $V$ .  $h$  heißt **hermitesch** genau dann wenn:

$$h(w, v) = \overline{h(v, w)} \forall v, w \in V$$

**Anmerkung** In diesem Fall ist  $h(v, v) = \overline{h(v, v)}$ , das heißt  $h(v, v) \in \mathbb{R} \forall v \in V$

**Bemerkung 25.8**  $V$  endlichdimensionaler  $\mathbb{C}$  Vektorraum,  $h$  Sesquilinearform auf  $V$ ,  $\mathcal{B}$  Basis von  $V$ ,  $A = M_{\mathcal{B}}(h)$ . Dann sind äquivalent:

1.  $h$  ist hermitesch
2.  $\bar{A}^t = A$

**Anmerkung** Matrizen  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$  mit  $\bar{A}^t = A$  heißen **hermitesche Matrizen**.

**Definition 25.9**  $V$   $\mathbb{C}$  Vektorraum,  $h$  hermitesche Form auf  $V$ .  $h$  heißt **positiv definit** genau dann wenn

$$h(v, v) > 0 \forall v \in V, v \neq 0$$

Eine positiv definite hermitesche Form nennt man auch ein **Skalarprodukt**.

**Beispiel 25.10**

$V = \mathbb{C}^n$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\langle x, y \rangle := x^T \bar{y}$  ist ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{C}^n$  (das **Standardskalarprodukt** auf  $\mathbb{C}^n$ ):

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist sesquilinear (vergleiche 25.2)
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist hermitesch:  $\langle y, x \rangle = y^T \bar{x} = (y^T \bar{x})^T = \bar{x}^T y = \overline{x^T \bar{y}} = \overline{\langle x, y \rangle}$
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist positiv definit:

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= x^T \bar{x} = (x_1 \quad \dots \quad x_n) \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_n \bar{x}_n \\ &= |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 > 0 \text{ für } x \neq 0 \end{aligned}$$

**Definition 25.11 (Unitärer Raum)** Ein **unitärer Raum** ist ein Paar  $(V, h)$ , bestehend aus einem endlichdimensionalen  $\mathbb{C}$  Vektorraum  $V$  und einem Skalarprodukt  $h$  auf  $V$ .

Für den Rest des Abschnitts sei  $(V, h)$  stets ein unitärer Raum.

**Anmerkung** Analog zu Euklidischen Räumen definiert man die Begriffe: Norm, orthogonal, orthonormal, Orthogonalbasis, Orthonormalbasis, orthogonales Komplement. Es gilt dabei:

- Cauchy-Schwarz-Ungleichung:  $|h(v, w)| \leq \|v\| \|w\| \forall v, w \in V$
- Gram-Schmidt-Verfahren (mit  $h$  statt  $\gamma$ ) liefert Orthonormalbasis
- $V = U \hat{U}^\perp$ ,  $U^{\perp\perp} = U$  für  $U \subseteq V$  Untervektorraum

**Definition 25.12**  $(V, h_V), (W, h_W)$  unitäre Räume,  $\varphi: V \rightarrow W$  lineare Abbildung.  $\varphi$  heißt **unitär** genau dann wenn:

$$h_W(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = h_V(v_1, v_2) \forall v_1, v_2 \in V$$

**Bemerkung 25.13**  $n = \dim V$ ,  $\mathcal{B}$  Orthonormalbasis von  $(V, h)$ . Dann ist das Koordinatensystem  $\Phi_{\mathcal{B}} : (\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (V, h)$  ein unitärer Isomorphismus.

**Bemerkung 25.14**  $\mathcal{B}$  Orthonormalbasis von  $(V, h)$ ,  $\varphi \in \text{End}(V)$ ,  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ . Dann sind äquivalent:

1.  $\varphi$  ist unitär
2.  $\bar{A}^T A = E_n$

**Bemerkung+Definition 25.15**  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ .  $A$  heißt **unitär** genau dann wenn:  $\bar{A}^T A = E_n$ .

$$U(n) := \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) \mid A \text{ ist unitär}\}$$

$U(n)$  ist eine Gruppe bezüglich „ $\cdot$ “, die **unitäre Gruppe** vom Rang  $n$

$$SU(n) := \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$$

ist eine Untergruppe von  $U(n)$ , die **spezielle unitäre Gruppe** von Rang  $n$ .

**Bemerkung 25.16**  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  Orthonormalbasis von  $(V, h)$ ,  $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$  duale Basis. Dann ist die Abbildung

$$\Gamma : V \rightarrow V^*, w \mapsto h(\cdot, w)$$

ein Semiisomorphismus mit  $\Gamma(v_i) = v_i^*$  für  $i = 1, \dots, n$ .

**Satz+Definition 25.17**  $(V, h_V)$ ,  $(W, h_W)$  unitäre Räume,  $\varphi : V \rightarrow W$  lineare Abbildung,  $\mathcal{A}$  Orthonormalbasis von  $(V, h_V)$ ,  $\mathcal{B}$  Orthonormalbasis von  $(W, h_W)$ . Dann gilt:

1. Es gibt genau eine lineare Abbildung  $\varphi^{ad} : W \rightarrow V$  mit  $h_W(\varphi(v), w) = h_V(v, \varphi^{ad}(w)) \forall v \in V, w \in W$ ,  $\varphi^{ad}$  heißt die **zu  $\varphi$  adjungierte Abbildung**
2.  $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\varphi^{ad}) = \overline{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)}^T$

**Beweis** 1. Wie im reellen Fall betrachte man das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\Gamma_V} & W \\ \varphi^{ad} \uparrow & & \uparrow \varphi^* \\ V^* & \xrightarrow{\Gamma_W} & W^* \end{array}$$

und setzen  $\varphi^{ad} := \Gamma_V^{-1} \circ \varphi^* \circ \Gamma_W$ .  $\varphi^{ad}$  ist linear, da sowohl  $\Gamma_V$  als auch  $\Gamma_W$  semilinear sind. Rest wie im reellen Fall

2. Sei  $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n), \mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n), M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) = (a_{ij}), M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\varphi^{ad}) = (b_{ij})$

$$\begin{aligned} \implies \varphi(v_j) &= \sum_{k=1}^m a_{kj} w_k, \varphi^{ad} = \sum_{k=1}^n b_{ki} v_k \\ \implies a_{ij} &= h_W \left( \sum_{k=1}^m a_{kj} w_k, w_i \right) = h_W(\varphi(w_j), w_i) = h_V(v_j, \varphi^{ad}(w_i)) \\ &= h_V \left( v_j, \sum_{k=1}^m b_{ki} v_k \right) = h_V(v_j, b_{ji} v_j) = \overline{b_{ji}} h(v_j, v_j) = \overline{b_{ji}} \quad \square \end{aligned}$$

**Bemerkung 25.18**  $\varphi \in \text{End}(V)$ . Dann gilt:

1.  $\ker \varphi^{ad} = (\text{im } \varphi)^\perp$
2.  $\text{im } \varphi^{ad} = (\ker \varphi)^\perp$

**Definition 25.19**  $\varphi \in \text{End}(V)$ .  $\varphi$  heißt \*selbstadjungierte genau dann wenn:  $\varphi = \varphi^{ad}$

**Bemerkung 25.20**  $\varphi \in \text{End}(V), \mathcal{B}$  Orthonormalbasis von  $(V, h), A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ . Dann sind äquivalent:

1.  $\varphi$  selbstadjungiert
2.  $\bar{A}^T = A$ , das heißt  $A$  ist hermitesch

**Bemerkung 25.21**  $\varphi \in \text{End}(V)$  selbstadjungiert. Dann sind alle Eigenwerte von  $\varphi$  reell.

**Beweis** Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  Eigenwert von  $\varphi, v$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ .

$$\implies \lambda h(v, v) = h(\lambda v, v) = h(\varphi(v), v) = h(v, \varphi^{ad}(v)) = h(v, \varphi(v)) = h(v, \lambda v) = \bar{\lambda} h(v, v)$$

$$\implies \lambda = \bar{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R} \quad \square$$

**Definition 25.22**  $\varphi \in \text{End}(V)$ .  $\varphi$  heißt **normal** genau dann wenn:  $\varphi^{ad} \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^{ad}$ .  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$  heißt **normal** genau dann wenn:  $\bar{A}^T A = A \bar{A}^T$

**Anmerkung** Ist  $\mathcal{B}$  eine Orthonormalbasis von  $(V, h)$ , dann:  $\varphi$  normal  $\iff M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  normal.

**Bemerkung 25.23**  $\varphi \in \text{End}(V)$ . Dann gilt:

1.  $\varphi$  unitär  $\implies \varphi$  normal
2.  $\varphi$  selbstadjungiert  $\implies \varphi$  normal

Für  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$  gilt:  $A$  unitär  $\implies A$  normal,  $A$  hermitesch  $\implies A$  normal.

**Beweis** 1. Seien  $v, w \in V \implies h(v, \varphi^{-1}(w)) = h(\varphi(v), \varphi(\varphi^{-1}(w))) = h(\varphi(v), w)$   
 $\implies \varphi^{ad} = \varphi^{-1} \implies \varphi^{ad} \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ \varphi = \text{id}_V = \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{ad}$

$$2. \varphi \text{ selbstadjungiert} \implies \varphi = \varphi^{ad} \implies \varphi^{ad} \circ \varphi = \varphi \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^{ad} \quad \square$$

**Satz 25.24**  $\varphi \in \text{End}(V)$  normal. Dann gilt:

1.  $\ker \varphi^{ad} = \ker \varphi$
2.  $\text{im } \varphi^{ad} = \text{im } \varphi$

Insbesondere ist  $V = \ker \varphi \hat{\oplus} \text{im } \varphi$

**Beweis** 1. Es gilt:

$$\begin{aligned} v \in \ker \varphi &\iff 0 = h(\varphi(v), \varphi(v)) = h(v, \varphi^{ad}(\varphi(v))) = h(v, \varphi(\varphi^{ad}(v))) \\ &= \overline{h(\varphi(\varphi^{ad}(v)), v)} = h(\varphi^{ad}(v), \varphi^{ad}(v)) \iff \varphi^{ad}(v) = 0 \\ &\iff v \in \ker \varphi^{ad} \end{aligned}$$

$$2. \text{ Es ist } \text{im } \varphi^{ad} = (\ker \varphi)^\perp = (\perp \varphi^{ad})^\perp = ((\text{im } \varphi)^\perp)^\perp = \text{im } \varphi$$

$$\implies V = \ker \varphi \hat{\oplus} (\ker \varphi)^\perp = \ker \varphi \hat{\oplus} \text{im } (\varphi^{ad}) = \ker \varphi \hat{\oplus} \text{im } \varphi \quad \square$$

**Bemerkung 25.25**  $\varphi \in \text{End}(V)$  normal,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dann gilt:

1.  $\varphi - \lambda \text{id}_V$  ist normal
2.  $\text{Eig}(\varphi, \lambda) = \text{Eig}(\varphi^{ad}, \bar{\lambda})$

**Beweis** 1. Setze  $\psi := \varphi - \lambda \text{id}_V$ . Für  $v, w \in V$  ist  $h(\lambda v, w) = h(v, \bar{\lambda} w)$ , das heißt  $(\lambda \text{id}_V)^{ad} = \bar{\lambda} \text{id}_V$

$$\begin{aligned} \implies \psi^{ad} &= \varphi^{ad} - \bar{\lambda} \text{id}_V \\ \implies \psi^{ad} &= \varphi^{ad} - \bar{\lambda} \text{id}_V \\ \implies \psi^{ad} \circ \psi &= (\varphi^{ad} - \bar{\lambda} \text{id}_V) \circ (\varphi - \lambda \text{id}_V) = \underbrace{\varphi^{ad} \circ \varphi}_{= \varphi \circ \varphi^{ad}} - \bar{\lambda} \varphi - \lambda \varphi^{ad} + \lambda \bar{\lambda} \text{id}_V \\ &= (\varphi - \lambda \text{id}_V) \circ (\varphi^{ad} - \bar{\lambda} \text{id}_V) = \psi \circ \psi^{ad} \end{aligned}$$

$$2. \text{ Eig}(\varphi, \lambda) = \ker \psi = \ker \psi^{ad} = \ker(\varphi^{ad} - \bar{\lambda} \text{id}_V) = \text{Eig}(\varphi^{ad}, \bar{\lambda}) \quad \square$$

**Satz 25.26 (Spektralsatz für normale Endomorphismen)**  $\varphi \in \text{End}(V)$ . Dann sind äquivalent:

1. Es gibt eine Orthonormalbasis von  $(V, h)$  aus Eigenvektoren von  $\varphi$ .



2.  $\varphi$  ist normal

**Beweis** 1.  $\implies$  2. Sei  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  eine Orthonormalbasis von  $(V, h)$  aus Eigenvektoren von  $\varphi$  zu Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ . Es ist  $(\varphi \circ \varphi^{ad})(v_i) = \varphi(\varphi^{ad}(v_i)) = \varphi(\bar{\lambda}_i v_i) = \bar{\lambda}_i \varphi(v_i) = \bar{\lambda}_i \lambda_i v_i = (\varphi^{ad} \circ \varphi)(v_i) \forall i = 1, \dots, n \implies \varphi \circ \varphi^{ad} = \varphi^{ad} \circ \varphi$

2.  $\implies$  1. per Induktion nach  $n = \dim V$ .

Induktionsanfang:  $n = 0$ : trivial

Induktionsschritt:  $n \geq 1$ : Sei  $\lambda_1 \in \mathbb{C}$  ein Eigenwert von  $\varphi$ . Sei  $U = \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) = \ker(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)$ .

Sei  $(v_1, \dots, v_r)$  eine Orthonormalbasis von  $\left(U, h|_{n \times n}\right)$ . Nach 25.25 ist  $\psi := \varphi - \lambda_1 \text{id}_V$  normal

$$\begin{aligned} V &= \ker \psi \hat{\oplus} \text{im } \psi \\ &= \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \hat{\oplus} \underbrace{\text{im}(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)}_{=: W} \end{aligned}$$

$$\text{Es ist } \varphi(W) = \varphi(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(V) = ((\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \circ \varphi)(V) = (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \left( \underbrace{\varphi(V)}_{\subseteq V} \right) \subseteq$$

$\text{im}(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) = W$ . Außerdem:

$$\begin{aligned} \varphi^{ad}(W) &= \varphi^{ad}(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(V) = (\varphi^{ad} \circ \varphi - \lambda_1 \varphi^{ad})(V) \\ &= (\varphi \circ \varphi^{ad} - \lambda_1 \varphi^{ad})(V) = ((\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \circ \varphi^{ad})(V) \subseteq W \end{aligned}$$

$\varphi|_W^W$  ist normal, denn: Nach Eindeutigkeit der adjungierten Abbildung ist  $\left(\varphi|_W^W\right)^{ad} = \left(\varphi^{ad}\right)|_W^W$

$$\begin{aligned} \left(\varphi|_W^W\right)^{ad} \circ \varphi|_W^W &= \left(\varphi^{ad}\right)|_W^W \circ \varphi|_W^W = \left(\varphi^{ad} \circ \varphi\right)|_W^W = \left(\varphi \circ \varphi^{ad}\right)|_W^W \\ &= \varphi|_W^W \circ \left(\varphi^{ad}\right)|_W^W = \varphi|_W^W \circ \left(\varphi|_W^W\right)^{ad} \end{aligned}$$

Nach Induktionsanfang existiert eine Orthonormalbasis  $(v_{r+1}, \dots, v_n)$  von  $\left(V, h|_{W \times W}\right)$  aus Eigenvektoren von  $\varphi \implies (v_1, \dots, v_n)$  ist Orthonormalbasis von  $(V, h)$  aus Eigenvektoren von  $\varphi$ .  $\square$

**Anmerkung** Insbesondere gilt:

- Für jedes selbstadjungierten / unitären Endomorphismus existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren
- Jede reelle orthogonale Matrix ist **über**  $\mathbb{C}$  diagonalisierbar.

Achtung: Über  $\mathbb{R}$  reicht „normal“ nicht aus: Es gibt orthogonale Matrizen, die über  $\mathbb{R}$  nicht diagonalisierbar sind (zum Beispiel  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  (Drehung um  $\pi/2$ ))

**Folgerung 25.27**  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ . Dann sind äquivalenz:

1.  $A$  ist normal
2. Es gibt ein  $T \in U(n)$ , sodass

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$  Eigenwerte von  $A$

**Beweis** Wende 25.26 auf  $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  und  $\varphi = \tilde{A}$  an. □

## 26 Ringe, Ideale und Teilbarkeit

In diesem Abschnitt seien  $R, S$  stets kommutative Ringe (bei uns immer mit Eins)

**Definition 26.1 (Ringhomomorphismus)**  $\varphi : R \rightarrow S$  Abbildung.  $\varphi$  heißt **Ringhomomorphismus** genau dann wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (RH1)  $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \forall a, b \in R$
- (RH2)  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \forall a, b \in R$
- (RH3)  $\varphi(1_R) = 1_S$

**Definition 26.2 (Ideal)**  $I \subseteq R$ .  $I$  heißt ein **Ideal** in  $R$  genau dann wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (I1)  $0 \in I$
- (I2)  $a, b \in I \implies a + b \in I$
- (I3)  $r \in R, a \in I \implies ra \in I$

**Beispiel 26.3**

1.  $\{0\}, R$  sind Ideale in  $R$
2. Für  $n \in \mathbb{Z}$  ist  $n\mathbb{Z} = \{na \mid a \in \mathbb{Z}\}$  ist ein Ideal

**Bemerkung+Definition 26.4**  $\varphi : R \rightarrow S$  Ringhomomorphismus. Dann gilt:

1.  $J \subseteq S$  Ideal  $\implies \varphi^{-1}(J) \subseteq R$  Ideal

2.  $\ker \varphi := \{a \in R \mid \varphi(a) = 0\} \subseteq R$  Ideal
3.  $\varphi$  injektiv  $\iff \ker \varphi = \{0\}$
4.  $I \subseteq R$  Ideal und  $\varphi$  surjektiv  $\implies \varphi(I) \subseteq S$  Ideal
5.  $\text{im } \varphi := \varphi(R)$  ist ein Unterring von  $S$  (das heißt ein Ring bezüglich der eingeschränkten Verknüpfungen.)

**Beweis** 1. (I1):  $0 \in \varphi^{-1}(J)$ , denn  $\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0) + \varphi(0) \implies \varphi(0) = 0 \in J \implies 0 \in \varphi^{-1}(J)$   
 (I2):  $a, b \in \varphi^{-1}(J) \implies \varphi(a), \varphi(b) \in J \implies \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \in J \implies a+b \in \varphi^{-1}(J)$   
 (I3):  $r \in R, a \in \varphi^{-1}(J) \implies \varphi(a) \in J \implies \varphi(ra) = \varphi(r)\varphi(a) \in J \implies ra \in \varphi^{-1}(J)$

2. aus 1., wegen  $\ker \varphi = \varphi^{-1}(\{0\}), \{0\} \subseteq S$  Ideal  
 3., 4., 5.: nachrechnen □

**Anmerkung** 4. wird falsch, wenn man die Voraussetzung  $\varphi$  surjektiv weglässt: Die kanonische Inklusion  $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}, x \mapsto x$  ist ein Ringhomomorphismus,  $\mathbb{Z}$  ist ein Ideal in  $\mathbb{Z}$ , aber  $\mathbb{Z} = i(\mathbb{Z})$  ist kein Ideal in  $\mathbb{Q}$ , denn:

$$\underbrace{\frac{1}{3}}_{\in \mathbb{Q}} \cdot \underbrace{2}_{\in \mathbb{Z}} = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$$

$\mathbb{Z}$  ist zumindest ein Unterring von  $\mathbb{Q}$ .

**Satz+Definition 26.5**  $I \subseteq R$  Ideal. Dann ist durch  $r_1 \sim r_2 \stackrel{\text{Def}}{\iff} r_1 - r_2 \in I$  eine Äquivalenzrelation auf  $R$  gegeben, welche die zusätzliche Eigenschaft

$$r_1 \sim r_2, s_1 \sim s_2 \implies r_1 + s_1 \sim r_2 + s_2, r_1 s_1 \sim r_2 s_2$$

hat („Kongruenzrelation“). Die Äquivalenzklasse von  $r \in R$  ist durch

$$\bar{r} := r + I := \{r + a \mid a \in I\}$$

gegeben und heißt die **Restklasse** von  $r$  modulo  $I$ . Die Menge der Restklassen bezeichnen wir mit  $R/I$ .

**Beweis** 1. „ $\sim$ “ ist Äquivalenzrelation: nachrechnen

2. Verträglichkeit mit  $+, \cdot$ : Sei  $r_1 \sim r_2, s_1 \sim s_2 \implies r_1 - r_2 \in I, s_1 - s_2 \in I$

$$\implies (r_1 + s_1) - (r_2 + s_2) = \underbrace{(r_1 - r_2)}_{\in I} + \underbrace{(s_1 - s_2)}_{\in I} \in I \implies r_1 + s_1 \sim r_2 + s_2$$

Außerdem:

$$r_1 s_1 - r_2 s_2 = \underbrace{r_1(s_1 - s_2)}_{\in I} + \underbrace{s_2(r_1 - r_2)}_{\in I} \in I \implies r_1 s_1 \sim r_2 s_2 \quad \square$$

**Satz+Definition 26.6**  $I \subseteq R$  Ideal. Dann wird  $R/I$  mit der Addition

$$+ : R/I \times R/I \rightarrow R/I, \bar{r} + \bar{s} := \overline{r+s}$$

und der Multiplikation

$$\cdot : R/I \times R/I \rightarrow R/I, \bar{r} \cdot \bar{s} := \overline{rs}$$

zu einem kommutativen Ring, dem **Faktorring (Restklassenring)**  $R/I$ . Die Abbildung  $\pi : R \rightarrow R/I, r \mapsto \bar{r}$  ist ein surjektiver Ringhomomorphismus mit  $\ker \pi = I$ .

**Beweis Wohldefiniertheit** von „+“, „·“: Nach 26.5 ist für  $r_1, r_2, s_1, s_2 \in R$  mit  $r_1 \sim r_2, s_1 \sim s_2$  auch  $r_1 + s_1 \sim r_2 + s_2, r_1 s_1 \sim r_2 s_2$ .

**Ringeigenschaften:** vererben sich aufgrund der vertreterweisen Definition von  $R$ .

$\pi$  ist Ringhomomorphismus nach Konstruktion:  $\pi(a+b) = \overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b} = \pi(a) + \pi(b)$ , analog für „·“,  $\pi(1) = \bar{1}$

$$\ker \pi = \{r \in R \mid \bar{r} = \bar{0}\} = \{r \in R \mid r \sim 0\} = \{r \in R \mid r - 0 \in I\} = I \quad \square$$

**Anmerkung** Insbesondere sind die Ideale in  $R$  genau die Kerne von Ringhomomorphismen, die von  $R$  ausgehen.

### Beispiel 26.7

Ist  $R = \mathbb{Z}, I = n\mathbb{Z}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ , dann erhält man die aus der LA1 bekannten Restklassenringe  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  (vergleiche 6.4).

**Satz 26.8 (26.8 (Homomorphiesatz für Ring))**  $\varphi : R \rightarrow S$  Ringhomomorphismus. Dann gibt es einen Ringisomorphismus

$$\Phi : R/\ker \varphi \rightarrow \text{im } \varphi, \bar{r} = r + \ker \varphi \mapsto \varphi(r)$$

**Beweis Wohldefiniertheit von  $\Phi$ :** Seien  $r_1, r_2 \in R$  mit  $\bar{r}_1 = \bar{r}_2$

$$\implies r_1 - r_2 \in \ker \varphi \implies \varphi(r_1 - r_2) = 0 \implies \varphi(r_1) = \varphi(r_2)$$

\* $\Phi$  ist Ringhomomorphismus:

$$\Phi(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = \Phi(\overline{r_1 + r_2}) = \varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2) = \Phi(\bar{r}_1) + \Phi(\bar{r}_2)$$

analog für „·“,  $\Phi(\bar{1}) = \varphi(1) = 1$

**$\Phi$  ist injektiv:** Sei  $r \in R$  mit  $\Phi(\bar{r}) = 0$

$$\implies \varphi(r) = 0 \implies r \in \ker \varphi \implies \bar{r} = r + \ker \varphi = \ker \varphi = \bar{0}$$

das heißt  $\ker \Phi = \{\bar{0}\}$ .

**$\Phi$  ist surjektiv:** nach Konstruktion.  $\square$

### Beispiel 26.9

$K$  Körper,  $R = K[t], \varphi : K[t] \rightarrow K, f \mapsto f(0)$ .  $\varphi$  ist Ringhomomorphismus (nachrechnen),  $\text{im } \varphi = K, \ker \varphi = \{f \in K[t] \mid \text{im } f(0) = 0\} = \{fg \mid g \in K[t]\} = tK[t]$ . Wir erhalten einen Ringisomorphismus

$$\Phi : K[t]/tK[t] \rightarrow K, f + tK[t] \mapsto f(0)$$

**Definition 26.10 (26.10)**  $x \in R$  heißt **Nullteiler**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff}$  Es existiert  $y \in R, y \neq 0$  mit  $xy = 0$ .  $R$  heißt **Nullteiler (Integritätsbereich)**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff} R \neq 0$  und  $0 \in R$  der einzige Nullteiler in  $R$ .

**Anmerkung**  $R \neq 0 \implies 0$  ist ein Nullteiler in  $R$  (wegen  $0 \cdot 1 = 0, 0 \neq 1$ )

**Beispiel 26.11**

1.  $\mathbb{Z}$  ist nullteilerfrei
2.  $\bar{2} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  ist Nullteiler wegen  $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{0}$  ist  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
3. Analog zu  $K[t]$  kann man den Polynomring  $R[t]$  erklären. Es gilt dann:  $R$  nullteilerfrei  $\implies R[t]$  nullteilerfrei. (Übungen)

**Bemerkung+Definition 26.12 (Einheit)**  $v \in R$  heißt **Einheit**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff}$  es existiert ein  $y \in R$  mit  $xy = 1$ .  $R^* := \{x \in R \mid x \text{ ist Einheit}\}$  bildet eine abelsche Gruppe bezüglich „ $\cdot$ “.

**Beweis** nachrechnen. □

**Beispiel 26.13**

1.  $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$ , dann:  $1 \cdot 1 = 1, (-1)(-1) = 1, ab = 1 \implies |a||b| = 1 \implies |a| = |b| = 1$
2.  $K$  Körper  $\implies K^* = K \setminus \{0\}$
3.  $R[t]^* = R^*$  (Übungen)

**Definition 26.14**  $a_1, \dots, a_n \in R, I \subseteq R$  Ideal.

$$(a_1, \dots, a_n) := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i r_i \mid r_1, \dots, r_n \in R \right\}$$

heißt das **von**  $a_1, \dots, a_n$  **erzeugte Ideal**.  $I$  heißt **Hauptideal**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff}$  es existiert ein  $a \in R$  mit  $I = (a) = \{ra \mid r \in R\} =: Ra$ .

$R$  heißt **Hauptidealring (HIR)**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff} R$  ist nullteilerfrei und jedes Ideal in  $R$  ist ein Hauptideal.

**Anmerkung**  $(a_1, \dots, a_n)$  ist ein Ideal in  $R$  (leicht nachzurechnen)

**Bemerkung 26.15**  $\mathbb{Z}$  ist ein Hauptidealring. Ist  $I \subseteq \mathbb{Z}$  ein Ideal, dann existiert ein eindeutig bestimmtes  $n \in \mathbb{N}_0$  mit

$$I = (n) = n\mathbb{Z}$$

**Beweis**  $\mathbb{Z}$  nullteilerfrei: klar.

**Existenz:** Sei  $I \subseteq \mathbb{Z}$  Ideal.

1. Fall:  $I = \{0\} = (0)$ , dann fertig

2. Fall:  $I \neq \{0\}$ . Mat  $a \in I$  ist auch  $-a = (-1)a \in I$  somit  $I \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$ .  $I \cap \mathbb{N}$  besitzt ein kleinstes Element  $b$ . Behauptung:  $I = (b)$

„ $\supseteq$ “  $x \in (b) \implies$  es existiert ein  $r \in \mathbb{Z}$  mit  $x = rb \implies x \in I$

„ $\subseteq$ “ Sei  $x \in I \implies$  es existieren  $q, r \in \mathbb{Z}$  mit  $x = qb + r, 0 \leq r < b \implies r = x - qb \in I$ .

Wegen Minimalität von  $b$  in  $I \cap \mathbb{N}$  folgt  $r = 0 \implies x = qb \in (b)$

**Eindeutigkeit:** Seien  $m, n \in \mathbb{N}_0$  mit  $(m) = (n)$ . Offenbar gilt:  $m = 0 \iff n = 0$ . Im Folgenden seien  $m, n \neq 0$ . Wegen  $(m) = (n)$  ist  $m \in (n), n \in (m) \implies$  es existieren  $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$  mit  $m = r_1 n$  und  $n = r_2 m$

$$\implies m = r_1 n = r_1 r_2 m \implies r_1 r_2 = 1 \implies r_1 = r_2 = 1 \vee r_1 = r_2 = -1 \xrightarrow{m, n \in \mathbb{N}_0} r_1 = r_2 = 1 \implies m = n$$

□

### Beispiel 26.16

$\mathbb{Z}[t]$  ist kein Hauptidealring: Es gibt  $f \in \mathbb{Z}[t]$  mit  $(2, t) = (f)$ , dann: Annahme: Es existiert  $f \in \mathbb{Z}[t]$  mit  $2 = hf \implies \deg h = \deg f = 0$ , das heißt  $f$  ist konstantes Polynom, etwa  $f = a$  für ein  $a \in \mathbb{Z}$ . Außerdem existiert  $\tilde{h} \in \mathbb{Z}[t]$  mit  $t = \tilde{h}f = ha \implies a = \pm 1 \implies f = \pm 1$ . Aber:  $\pm 1 \notin (2, t)$ , dann andernfalls existieren  $u, v \in \mathbb{Z}[t]$  mit  $\pm 1 = 2u + tv \xrightarrow{t=0} \pm 1 = 2u(0) + 0 \cdot v(0) = 2u(0)$

**Definition 26.17**  $R$  nullteilerfrei,  $a, b \in R$ .  $b$  heißt ein **Teiler** von  $a$  (Notation:  $b \mid a$ )  $\stackrel{\text{Def}}{\iff}$  es existiert ein  $c \in R$  mit  $a = bc$ .

$a, b$  heißen assoziiert (Notation:  $a \stackrel{\wedge}{=} b$ )  $\stackrel{\text{Def}}{\iff} a \mid b$  und  $b \mid a$

### Beispiel 26.18

$$R = \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z} \implies a \stackrel{\wedge}{=} -a$$

**Bemerkung 26.19**  $R$  nullteilerfrei,  $a, b \in R$ . Dann sind äquivalent:

1.  $a \stackrel{\wedge}{=} b$
2. Es existiert  $e \in R^*$  mit  $a = be$
3.  $(a) = (b)$

**Beweis** 1.  $\implies$  2. Sei  $a \stackrel{\wedge}{=} b \implies a \mid b$  und  $b \mid a \implies$  es existieren  $c, d \in R$  mit  $b = ac, a = bd$

$$\implies b = ac = bdc \implies b(1 - dc) = 0$$

a) Fall:  $b = 0 \implies a = bd = 0$ . Setze  $e := 1$ , fertig:  $a = b \cdot 1$

b) Fall:  $b \neq 0 \implies 1 - dc = 0 \implies dc = 1 \implies c, d \in R^*$ . Setze  $e := d$ , dann  $a = bd = bc$

2. Sei  $a = be$  mit  $e \in R^* \implies a \in (b) \implies (a) \subseteq (b)$ . Wegen  $e \in R^*$  ist  $b = e^{-1}a \implies (b) \subseteq (a)$

3. Sei  $(a) = (b) \implies a \in (b) \implies$  es existiert  $c \in R$  mit  $a = bc \implies b \mid a$ . Analog:  $a \mid b$  also  $a \stackrel{\wedge}{=} b$  □

**Definition 26.20**  $R$  nullteilerfrei,  $a_1, \dots, a_n \in R$ .  $d \in R$  heißt \*größter gemeinsamer Teiler von  $a_1, \dots, a_n$   $\stackrel{\text{Def}}{\iff}$  Die folgenden Bedingungen sind erfüllt:

- (GGT1)  $d \mid a_1, \dots, d \mid a_n$
- (GGT2)  $c \mid a_1, \dots, c \mid a_n \iff c \mid d$

**Beweis** Wir bezeichnen die Menge aller größten gemeinsamen Teiler von  $a_1, \dots, a_n$  mit  $\text{GGT}(a_1, \dots, a_n)$ .  $\square$

**Anmerkung** • Seien  $d_1, d_2 \in \text{GGT}(a_1, \dots, a_n)$ , dann folgt  $d_1 \mid d_2$  und  $d_2 \mid d_1$ , also  $d_1 \stackrel{\wedge}{=} d_2$ .

- Ist  $d \in \text{GGT}(a_1, \dots, a_n)$  und  $d' \stackrel{\wedge}{=} d$ , dann ist  $d' \in \text{GGT}(a_1, \dots, a_n)$
- Ohne zusätzliche Voraussetzungen an  $R$  kann man im allgemeinen nicht erwarten, dass  $\text{GGT}(a_1, \dots, a_n) \neq \emptyset$ . Zum Beispiel ist  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$  ist  $\text{GGT}(4, 2 \cdot (1 + \sqrt{-3})) = \emptyset$  (Übungen)

**Bemerkung 26.21**  $R$  Hauptidealring,  $a_1, \dots, a_n \in R$ . Dann gilt:

1.  $\text{GGT}(a_1, \dots, a_n) \neq \emptyset$
2.  $d \in \text{GGT}(a_1, \dots, a_n) \iff (d) = (a_1, \dots, a_n)$

**Beweis** 1.  $R$  Hauptidealring  $\implies$  es existiert  $\tilde{d} \in R$  mit  $(a_1, \dots, a_n) = (\tilde{d})$ . Behauptung:

$\tilde{d} \in \text{GGT}(a_1, \dots, a_n)$ , denn:

(GGT1):  $a_1 \in (a_1, \dots, a_n) = (\tilde{d}) \implies \tilde{d} \mid a_i \forall i = 1, \dots, n$

(GGT2): Wegen  $\tilde{d} \in (a_1, \dots, a_n)$  existieren  $r_1, \dots, r_n \in R$  mit  $\tilde{d} = r_1 a_1 + \dots + r_n a_n$ . Ist  $c \in R$  mit  $c \mid a_1, \dots, c \mid a_n$ , dann folgt  $c \mid r_1 a_1 + \dots + r_n a_n = \tilde{d}$

2. „ $\implies$ “  $d \in \text{GGT}(a_1, \dots, a_n) \implies d \stackrel{\wedge}{=} \tilde{d} \implies (d) = (\tilde{d}) = (a_1, \dots, a_n)$  „ $\longleftarrow$ “ Sei  $(d) = (a_1, \dots, a_n) \implies d \in \text{GGT}(a_1, \dots, a_n)$  mit Argument aus dem Beweis von 1.  $\square$

**Anmerkung** • Im Fall  $R = \mathbb{Z}$ ,  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  ist  $\text{GGT}(a_1, \dots, a_n) \cap \mathbb{N}_0 = \{d\}$  für ein  $d \in \mathbb{N}_0$  (beachte  $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$ ). Man nennt dann  $d$  **den** größten gemeinsamen Teiler von  $a_1, \dots, a_n$

$$d =: \text{ggT}(a_1, \dots, a_n)$$

- Im Fall  $R = K[T]$  (wobei  $K$  Körper, in 27, dies ein Hauptidealring),  $f_1, \dots, f_n \in K[t]$ , nicht alle  $f_i = 0$ , existiert ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom  $d \in K[t]$  mit  $d \in \text{GGT}(f_1, \dots, f_n)$  (beachte:  $K[t]^* = K^*$ ). Man nennt

$$d =: \text{ggT}(f_1, \dots, f_n)$$

**den** größten gemeinsamen Teiler von  $f_1, \dots, f_n$  und setzt

$$\text{ggT}(0, \dots, 0) := 0$$

**Folgerung 26.22**  $R$  Hauptidealring,  $a, b \in R, d \in \text{GGT}(a, b)$ . Dann existieren  $u, v \in R$  mit  $d = ua + vb$ .

**Beweis** aus 26.21:  $(d) = (a, b)$  □

**Definition 26.23**  $R$  nullteilerfrei,  $p \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$

- $p$  heißt **irreduzibel**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff}$  Aus  $p = ab$  mit  $a, b \in R$  folgt stets  $a \in R^*$  oder  $b \in R^*$
- $p$  heißt **Primelement**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff}$  Aus  $p \mid ab$  folgt stets  $p \mid a$  oder  $p \mid b$

**Anmerkung**  $p$  irreduzibel / Primelement,  $p' \stackrel{\wedge}{=} p \implies p'$  irreduzibel / Primelement

**Beispiel 26.24**

irreduzible Elemente in  $\mathbb{Z}$  = Primzahlen  $p$  aus  $N$  sowie deren Negative  $-p$ . Primelemente in  $\mathbb{Z}$ ?

Frage: Zusammenhang zwischen irreduziblen Elementen und Primelementen?

**Bemerkung 26.25**  $R$  nullteilerfrei,  $p \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$  Primelement. Dann ist  $p$  irreduzibel.

**Beweis** 1. Wir setzen  $S := R/(p)$ . Behauptung  $S$  ist nullteilerfrei, denn: Wegen  $p \notin R^*$  ist  $(p) \neq R$ , das heißt  $S \neq 0$ . Sind  $\bar{x}, \bar{y} \in S$  mit  $\bar{x}\bar{y} = \bar{0}$  und  $\bar{y} \neq \bar{0}$ , das heißt  $xy \in (p)$  und  $y \notin (p) \implies p \mid xy$  und  $p \nmid y \implies p \mid x \implies \bar{x} = \bar{0}$

2. Sei  $p = ab$  mit  $a, b \in R$ . In  $s = R/(p)$  ist  $\bar{0} = \bar{p} = \bar{a}\bar{b} \implies \bar{a} = \bar{0} \vee \bar{b} = \bar{0}$ . Ohne Einschränkung  $\bar{a} = \bar{0} \implies$  Es existierte  $d \in R$  mit  $a = pd \implies p = ab = pdb \implies p(1 - db) = 0 \implies 1 - db = 0 \implies db = 1 \implies b \in R^*$  □

**Anmerkung** Es gibt Beispiele für irreduzible Elemente, die keine Primelemente sind (Übungen)

**Satz 26.26**  $R$  Hauptidealring,  $p \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$ . Dann sind äquivalent:

1.  $p$  ist irreduzibel
2.  $p$  ist Primelement

**Beweis** 2.  $\implies$  1. aus 26.25

1.  $\iff$  2. Sei  $p$  irreduzibel.

- a) Behauptung: Ist  $I \subseteq R$  mit  $(p) \subsetneq I$ , dann ist  $I = R$ , denn: Sei  $(p) \subsetneq I$ . Da  $R$  Hauptidealring existiert  $a \in R$  mit  $I = (a) \implies \exists c \in R : p = ac \implies a \in R^* \vee c \in R^*$ . Falls  $c \in R^*$ , dann  $(p) = (a) = I$ . Also  $a \in R^*$ , das heißt  $(a) = I = R$ .
- b)  $R/(p)$  ist ein Körper, denn: Sei  $\bar{x} \in R/(p), \bar{x} \neq \bar{0} \implies x \notin (p) \implies I := (x, p)$  ist ein Ideal in  $R$  mit  $(p) \subsetneq I \implies I = R \implies 1 \in I \implies \exists u, v \in R : 1 = ux + vp \implies \bar{1} = \bar{u}\bar{x} + \underbrace{\bar{v}\bar{p}}_{=0} = \bar{u}\bar{x}$



- c)  $p$  ist Primelement, denn: Seien  $a, b \in R$  mit  $p \mid ab \implies$  in  $R/(p)$  ist  $\bar{0} = \bar{p} = \bar{a}\bar{b}$ . Nach 2. ist  $R/(p)$  ein Körper, also nullteilerfrei (6.11)  $\implies \bar{a} = \bar{0} \vee \bar{b} = \bar{0} \implies p \mid a \vee p \mid b$   
 $\square$

**Anmerkung** • Beweis hat gezeigt:  $R$  Hauptidealring,  $p$  irreduziblet Element in  $R$ , dann ist  $R/(p)$  ein Körper.

- Primelement in  $\mathbb{Z}$  = irreduzibles Element in  $\mathbb{Z}$

Frage: Wann gilt in  $R$  ein Analogon des Satzes über die eindeutige Primfaktorzerlegung in  $\mathbb{Z}$ ?

**Definition 26.27**  $R$  nullteilerfrei.  $R$  heißt **faktoriell**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff}$  Jedes  $a \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$  lässt sich eindeutig bis auf Reihenfolge und Assoziiertheit als Produkt irreduzibler Elemente aus  $R$  schreiben, das heißt es existieren irreduzible Elemente  $p_1, \dots, p_r \in R$  mit  $a = p_1 \cdot \dots \cdot p_r$  und sind  $q_1, \dots, q_s \in R$  irreduzible Elemente mit  $a = q_1 \cdot \dots \cdot q_s$ , so ist  $r = s$  und nach Umordnen ist  $p_i \stackrel{\wedge}{=} q_i$  für  $i = 1, \dots, r$

Ziel: Hauptidealringe sind faktoriell.

**Definition 26.28**  $R$  heißt **noethersch**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff}$  Für jede aufsteigende Kette  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$  von Idealen in  $R$  existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $I_k = I_n$  für alle  $k \geq n$

**Bemerkung 26.29**  $R$  Hauptidealring. Dann ist  $R$  noethersch.

**Beweis** Sei  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$  eine aufsteigende Kette von Idealen aus  $R$ . Setze

$$I := \cup_{k \geq 1} I_k$$

1.  $I$  ist ein Ideal in  $R$ , dann:
  - (I1)  $0 \in I_k \forall k \in \mathbb{N} \implies 0 \in I$
  - (I2) Seien  $a, b \in I \implies \exists k, l \in \mathbb{N} : a \in I_k, b \in I_l$ . Mit  $m := \max\{k, l\}$  ist  $a, b \in I_m \implies a + b \in I_m \subseteq I$
  - (I3)  $a \in I, r \in R \implies \exists k \in \mathbb{N} : a \in I_k \implies ra \in I_k \subseteq I$
2. Wegen 1. und  $R$  Hauptidealring existiert ein  $a \in R$  mit  $I = (a)$ , insbesondere  $a \in I \implies \exists n \in \mathbb{N} : a \in I_n \implies (a) \subseteq I_n \subseteq I = (a) \implies I_n = I \implies I_k = I = I_n \forall k \geq n \quad \square$

**Satz 26.30**  $R$  Hauptidealring. Dann ist  $R$  faktoriell.

**Beweis** 1. Existenz von Zerlegung in irreduzible Elemente. Setze

$$M := \{(a) \mid a \in R \setminus (R^* \cup \{0\}) \mid \text{besitzt keine Faktorisierung in irreduziblen Elementen}\}$$

$M$  ist wohldefiniert, da Bedingung an  $a$  invariant unter Assoziativität.

Annahme:  $M \neq \emptyset$

Wegen 26.29 existiert bezüglich „ $\subseteq$ “ maximales Element  $I \in M$ , denn: Anderenfalls existiert zu jedem  $I \in M$  ein  $I' \in M$  mit  $I \subsetneq I'$ , das liefert eine unendliche strikt aufsteigende Kette von Idealen in  $R$  zu  $R$  noethersch.

Es existiert  $a \in R$  mit  $I = (a)$ .  $a$  ist nicht irreduzibel, denn für  $a$  irreduzibel wäre  $a$  selbst eine Faktorisierung in irreduzible Elemente  $\Rightarrow I = (a) \notin M$ .  $\Rightarrow \exists a_1, a_2 \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$  mit  $a = a_1 a_2 \Rightarrow (a) \subseteq (a_1), (a) \subseteq (a_2)$ . Wäre  $(a) = (a_1)$ , dann existiert  $b \in R^*$  mit  $a = a_1 b = a_1 a_2 \Rightarrow a_2 = b \in R^*$ . Also  $(a) \subsetneq (a_1)$ , analog  $(a) \subsetneq (a_2)$   
 $\Rightarrow (a_1), (a_2) \notin M \Rightarrow a_1, a_2$  haben Faktorisierung in irreduzible Elemente also auch  $a = a_1 a_2$ . Also  $M = \emptyset \Rightarrow$  Existenz

2. Eindeutigkeit von Zerlegung: Sei  $a = p_1 \cdot \dots \cdot p_r = q_1 \cdot \dots \cdot q_s$  mit  $p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_s$  irreduzibel. Beweis per Induktion nach  $r$ :

Induktionsanfang:  $r = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow s = 0$  (sonst  $q_1, \dots, q_s \in R^*$ )

Induktionsschritt: Behauptung für  $0, \dots, r-1$  bewiesen.

$$p_1 \mid p_1 \cdot \dots \cdot p_r = q_1 \cdot \dots \cdot q_s \Rightarrow \exists j \in \{1, \dots, s\} : p_1 \mid q_j$$

Nach Umnummerierung sei  $j = 1$  also  $p_1 \mid q_1$ , etwa  $q_1 = c p_1$  mit  $c \in R$ . Da  $q_1$  irreduzibel folgt  $c \in R^*$ , also  $p_1 \stackrel{\wedge}{=} q_1$ .

$$\Rightarrow p_1 \cdot \dots \cdot p_r = c p_1 q_2 \cdot \dots \cdot q_s \Rightarrow p_1(p_2 \cdot \dots \cdot p_r - c q_2 \cdot \dots \cdot q_s) = 0$$

$\Rightarrow p_2 \cdot \dots \cdot p_r = (c q_2) \cdot \dots \cdot q_s$ . Wegen  $c \in R^*$  ist  $c q_2$  irreduzibel  $\Rightarrow r-1 = s-1$  ( $\Rightarrow r = s$ ) und nach Umnummerierung

$$p_2 \stackrel{\wedge}{=} c q_2 = q_2, p_3 \stackrel{\wedge}{=} q_3, \dots, p_r \stackrel{\wedge}{=} q_r \quad \square$$

**Anmerkung** • Fasst man in einer Zerlegung eines Elementes zueinander assoziierter Faktoren zusammen und erlaubt einen Vorfaktor  $c \in R^*$ , so erhält man eine Darstellung für Elemente  $a \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$  der Form

$$a = c p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_r^{e_r}$$

mit  $c, p_1, \dots, p_r$  irreduzibel,  $p_i \not\sim p_j$  für  $i \neq j$ ,  $e_1, \dots, e_r \in \mathbb{N}$ . Ist dann  $a = d q_1^{f_1} \cdot \dots \cdot q_s^{f_s}$  mit  $d \in R^*$ ,  $q_1, \dots, q_s$  irreduzibel,  $q_i \not\sim q_j$  für  $i \neq j$ ,  $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{N}$ , dann ist  $r = s$  und nach Umnummerierung ist  $p_i \stackrel{\wedge}{=} q_i$ ,  $e_i = f_i$  für  $i = 1, \dots, r$ .