

# Lineare Algebra II (Vogel)

Robin Heinemann

16. Mai 2017

## Inhaltsverzeichnis

18 Eigenwerte	1
19 Dualraum	16
20 Bilinearformen	21
21 Quadratische Räume	25
22 Euklidische Räume	32

## 18 Eigenwerte

In diesem Abschnitt sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V$  ein  $K$ -VR und  $\varphi \in \text{End}_K(V)$ .

Frage:  $V$  endlichdim. Existiert eine Basis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $V$ , sodass  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  eine Diagonalmatrix ist, das heißt

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ ?

Für  $i = 1, \dots, n$  wäre dann  $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$

**Definition 18.1**  $\lambda \in K, v \in V$

- $\lambda$  heißt Eigenwert von  $\varphi \stackrel{\text{Def}}{\iff} \exists v \in V, v \neq 0 : \varphi(v) = \lambda v$
- $v$  heißt Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda \stackrel{\text{Def}}{\iff} v \neq 0 \wedge \varphi(v) = \lambda v$
- $\varphi$  heißt diagonalisierbar  $\stackrel{\text{Def}}{\iff} V$  besitzt eine Basis aus EV von  $\varphi$

(Falls  $V$  endlichdimensional, ist die äquivalent zu: Es gibt eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  mit

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

)

Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit einer Matrix  $A \in M(n \times n, K)$  sind über den Endomorphismus  $\tilde{A} : K^n \rightarrow K^n$  definiert.

**Bemerkung 18.2**  $A \in M(n \times n, K)$ . Dann sind äquivalent:

1.  $A$  ist diagonalisierbar.
2. Es gibt eine Basis von  $K^n$  aus Eigenvektoren von  $A$

$$3. \text{ Es gibt ein } S \in \text{GL}(n, K), \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \text{ mit } SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

4.  $A$  ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix

In diesem Fall steht in den Spalten von  $S^{-1}$  eine Basis des  $K^n$  aus EV von  $A$ , und für jede Matrix  $A \in M(n \times n, K)$  mit der Eigenschaft, dass die Spalten von  $S^{-1}$  eine Basis des  $K^n$  aus EV von  $A$  bilden, dann ist  $SAS^{-1}$  eine Diagonalmatrix (mit den EW auf der Diagonalen.)

**Beweis** Äquivalenz: \ 1.  $\iff$  2. Definition, 2.  $\iff$  3. aus Basiswechselsatz (16.6), 3.  $\iff$  4. aus Definition Ähnlichkeit (16.12)

$$\text{Zusatz: Sei } S \in \text{GL}(n, K) \text{ mit } SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies A(S^{-1}e_j) = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j.$$

Wegen  $S^{-1} \in \text{GL}(n, K)$  ist  $S^{-1}e_j \neq 0$ , das heißt  $S^{-1}$  ist EV von  $A$  zum EW  $\lambda_j$

Wegen  $S^{-1} \in \text{GL}(n, K)$  ist  $(S^{-1}e_1, \dots, S^{-1}e_n)$  eine Basis des  $K^n$  aus EV von  $A$ .

Sei  $S \in \text{GL}(n, K)$ , das heißt die Spalten von  $S^{-1}$  eine Basis des  $K^n$  aus EV von  $A$  bilden, das heißt für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$  ist  $AS^{-1}e_j = \lambda_j S^{-1}e_j$  für ein  $\lambda_j \in K$ .

$$\begin{aligned} \implies AS^{-1}e_j &= S^{-1}\lambda_j e_j = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j \implies SAS^{-1}e_j = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j, j = 1, \dots, n \\ \implies SAS^{-1} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

### Beispiel 18.3

$K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$

1.  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  Es ist  $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , das heißt  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist EV von  $\varphi$  zum EW 1.

$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ , also ist  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  EV von  $\varphi$  zum EW  $-1$ . Somit:  $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$  ist eine Basis des  $\mathbb{R}^2$  aus EV von  $\varphi$ , das heißt  $\varphi$  ist diagonalisierbar.

In Termen von Matrizen:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$  ist diagonalisierbar, und mit  $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  ist dann ist  $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  Achtung: Das  $\varphi$  diagonalisierbar ist, heißt nicht, dass jeder Vektor aus  $V = \mathbb{R}^2$  ein EV von  $\varphi$  ist, zum Beispiel ist  $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

2.  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$  (= Drehung um  $\frac{\pi}{2}$ ). hat keinen EW.  
Beweis dafür: später.

Ziel: Suche Kriterien für Diagonalisierbarkeit.

**Bemerkung 18.4**  $v_1, \dots, v_m$  EV von  $\varphi$  zu paarweise verschiedenen EW  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ . Dann ist  $(v_1, \dots, v_m)$  linear unabhängig, insbesondere ist  $m \leq \dim V$ . Insbesondere gilt: ist  $V$  endlichdimensional, dann hat  $\varphi$  höchstens  $\dim(V)$  Eigenwerte.

**Beweis** per Induktion nach  $m$ :

IA:  $m = 1$  :  $v_1 \neq 0$ , da  $v_1$  EV  $\implies (v_1)$  linear unabhängig.

IS: sei  $m \geq 2$ , und die Aussage für  $m - 1$  bewiesen.

Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$  mit  $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m = 0$ . Außerdem:  $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_1 v_m = 0$

$$\implies \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \dots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1)v_m = 0$$

$$\alpha_2\lambda_2 - \lambda_1 = \dots = \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1) = 0$$

$$\implies \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$$

$$\implies \alpha_1 v_1 = 0 \implies \alpha_1 = 0 \implies (v_1, \dots, v_m) \text{ linear unabhängig} \quad \square$$

**Folgerung 18.5**  $V$  endlichdimensional,  $\varphi$  habe  $n$  paarweise verschiedene EW, wobei  $n = \dim V$ . Dann ist  $\varphi$  diagonalisierbar.

**Beweis** Für  $i = 1, \dots, n$  sei  $v_i$  ein EV von  $\varphi$  zum EW  $\lambda_i \implies (v_1, \dots, v_n)$  linear unabhängig, wegen  $n = \dim V$  ist  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$  aus EV von  $\varphi$   $\square$

**Definition 18.6**  $\lambda \in K$ 

$\text{Eig}(\varphi, \lambda) := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$  heißt der Eigenraum von  $\varphi$  bezüglich  $\lambda$ .

$\mu_{geo}(\varphi, \lambda) := \dim \text{Eig}(\varphi, \lambda)$  heißt die geometrische Vielfachheit von  $\lambda$ .

Für  $A \in M(n \times n, K)$  setzen wir  $\text{Eig}(A, \lambda) := \text{Eig}(\tilde{A}, \lambda)$ ,  $\mu_{geo}(A, \lambda) := \mu_{geo}(\tilde{A}, \lambda)$ .

**Bemerkung 18.7**  $\lambda \in K$ . Dann gilt:

1.  $\text{Eig}(\varphi, \lambda)$  ist ein UVR von  $V$ .
2.  $\lambda$  ist EW von  $\varphi \iff \text{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\}$ .
3.  $\text{Eig}(\varphi, \lambda) \setminus \{0\}$  ist die Menge der zu  $\lambda$  gehörenden EV von  $\varphi$ .
4.  $\text{Eig}(\varphi, \lambda) = \ker(\lambda \text{id}_V - \varphi)$ , insbesondere ist  $\text{Eig}(A, \lambda) = \ker(\lambda E_n - A) = \text{Lös}(\lambda E_n - A, 0)$  für  $A \in M(n \times n, K)$
5. Sind  $\lambda_1, \lambda_2 \in K$  mit  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , dann  $\text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \cap \text{Eig}(\varphi, \lambda_2) = \{0\}$

**Beweis** 4. Es ist  $v \in \text{Eig}(\varphi, \lambda) \iff \varphi(v) = \lambda v \iff \lambda v - \varphi(v) = 0 \iff (\lambda \text{id}_V - \varphi)(v) = 0 \iff v \in \ker(\lambda \text{id}_V - \varphi)$  Es ist  $\text{Eig}(A, \lambda) = \ker(\lambda \text{id}_{K^n} - \tilde{A}) = \ker(\widetilde{\lambda E_n - A}) = \ker(\lambda E_n - A) = \text{Lös}(\lambda E_n - A, 0)$

1. aus 4.
2.  $\lambda$  EW von  $\varphi \iff \exists v \in V, v \neq 0$  mit  $\varphi(v) = \lambda v \iff \text{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\}$ .
3. klar.
5. Sei  $\lambda_1 \neq \lambda_2, v \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \cap \text{Eig}(\varphi, \lambda_2) \implies \lambda_1 v = \varphi(v) = \lambda_2 v \implies \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v = 0 \implies v = 0$   $\square$

**Bemerkung 18.8**  $V$  endlichdimensional,  $\lambda \in K$ . Dann sind äquivalent:

1.  $\lambda$  ist EW von  $\varphi$
2.  $\det(\lambda \text{id}_V - \varphi) = 0$

**Beweis** 1.  $\iff \text{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\} \implies \ker(\lambda \text{id}_V - \varphi) \neq \{0\} \implies \lambda \text{id}_V - \varphi$  nicht injektiv  $\implies \lambda \text{id}_V - \varphi$  kein Isomorphismus  $\implies \det(\lambda \text{id}_V - \varphi) = 0$ .  $\square$

**Definition 18.9**  $K$  Körper,  $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$

$$\chi_A^{char} := \det(tE_n - A) = \det \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ -a_{n1} & \dots & & t - a_{nn} \end{pmatrix} \in K[t]$$

heißt das **charakteristische Polynom** von  $A$ .

**Anmerkung** Hierfür nötig: Determinanten von Matrizen mit Einträgen in einem kommutativen Ring.

In manchen Büchern  $\chi_A^{char} = \det(A - tE_n)$  (schlecht)

**Beispiel 18.10**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$$

$$\implies A\chi_a^{char} = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ -3 & t-4 \end{pmatrix} = (t-1)(t-4) - 6 = t^2 - 5t - 2$$

**Bemerkung 18.11**  $A, B \in M(n \times n, K), A \approx B$ .

Dann ist  $\chi_A^{char} = \chi_B^{char}$ .

**Beweis**  $A \approx B \implies \exists S \in GL(n, K) : B = SAS^{-1}$

$$\begin{aligned} \implies tE_n - B &= tE_n - SAS^{-1} = SS^{-1}tE_n - SAS^{-1} = StE_nS^{-1} - SAS^{-1} = S(tE_n - A)S^{-1} \\ \implies \chi_B^{char} &= \det(tE_n - B) = \det(S(tE_n - A)S^{-1}) = \det(S) \det(tE_n - A) \det(S^{-1}) = \\ &\quad \underbrace{\det(S) \det(S)^{-1}}_{=1} \det(tE_n - A) = \chi_A^{char} \quad \square \end{aligned}$$

**Definition 18.12**  $V$  endlichdim,  $n = \dim V$ ,  $\mathcal{B}$  Basis von  $V$ ,  $\varphi \in \text{End}(V)$ ,  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$

$$\chi_{\varphi}^{char} := \chi_A^{char} = \det(tE_n - A) \in K[t]$$

heißt das **charakteristische Polynom** von  $\varphi$ .

**Anmerkung**  $\chi_{\varphi}^{char}$  ist wohldefiniert, dann: Ist  $\mathcal{B}'$  eine weitere Basis von  $V$ ,  $A' = M_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ , dann ist  $A \approx A'$  und deshalb nach 18.11:  $\chi_A^{char} = \chi_{A'}^{char}$ .

**Satz 18.13**  $V$  endlichdimensional,  $n = \dim V$ . Dann gilt:

1.  $\chi_{\varphi}^{char}$  ist ein normiertes Polynom von Grad  $n$ :

$$\chi_{\varphi}^{char} = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_0$$

mit  $c_0 = (-1)^n \det \varphi$ ,  $c_{n-1} = -(\varphi)$  (vgl. Übung zur Spur)

2. Die Nullstellen von  $\chi_{\varphi}^{char}$  sind genau die EW von  $\varphi$ :

$$\lambda \in K \text{ ist EW von } \varphi \iff \chi_{\varphi}^{char} \lambda = 0$$

**Beweis** Sei  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$ ,  $A := M_{\mathcal{B}}(\varphi) \in M(n \times n, K)$

1.

$$\begin{aligned}
\chi_\varphi^{char} &= \chi_A^{char} = \det(\underbrace{tE_n - A}_{=:B=(B_{ij})}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) B_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot B_{n,\sigma(n)} \\
&= (t - a_{11} \cdot \dots \cdot (t - a_{nn})) + \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n \setminus \{\operatorname{id}\}} \operatorname{sgn}(\sigma) B_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot B_{n,\sigma(n)}}_{:=g}
\end{aligned}$$

Für  $\sigma \in S_n \setminus \{\operatorname{id}\}$  treten in  $B_{1,\sigma(1)}, \dots, B_{n,\sigma(n)}$  höchstens  $n-2$  Diagonalelemente auf, also  $\deg(g) \leq n-2$ .

$$\implies \chi_\varphi^{char} = t^n - (a_{11} + \dots + a_{nn})t^{n-1} + \text{Terme kleineren Grades}$$

insbesondere:

$$c_{n-1} = -(a_{11} + \dots + a_{nn}) = -A = -\varphi$$

Es ist

$$c_0 = \chi_\varphi^{char}(0) = (\det(tE_n - A))(0) = \det(0E_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

2. Aus  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  folgt  $\lambda E_n - A = M_{\mathcal{B}}(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi)$ . Also:

$$\begin{aligned}
\chi_\varphi^{char}(\lambda) = 0 &\iff (\det(tE_n - A))(\lambda) = 0 \implies \det(\lambda E_n - A) = 0 \iff \det(M_{\mathcal{B}}(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi)) = 0 \\
&\implies \det(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi) = 0 \iff \lambda \text{ ist EW von } \varphi \quad \square
\end{aligned}$$

**Definition 18.14**  $\lambda \in K$ 

$$\mu_{alg}(\varphi, \lambda) := \mu(\chi_\varphi^{char}, \lambda)$$

heißt die **algebraische Vielfachheit****Beispiel 18.15**

$$1. \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \text{ Es ist } \chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{pmatrix} =$$

$$t^2 - 1 = (t-1)(t+1) \in \mathbb{R}[t] \implies \text{EW von } \varphi : 1, -1.$$

$$\text{Es ist } \mu_{alg}(\varphi, 1) = 1, \mu_{alg}(\varphi, -1) = 1$$

$$\operatorname{Eig}(\varphi, 1) = \operatorname{Eig}(A, 1) = \operatorname{Lös}(E_2 - A, 0) = \operatorname{Lös}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{also } \mu_{geo}(\varphi, 1) = \dim \operatorname{Eig}(\varphi, 1) = 1$$

$$\operatorname{Eig}(\varphi, -1) = \operatorname{Eig}(A, -1) = \operatorname{Lös}((-1) \cdot E_2 - A, 0) = \operatorname{Lös}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, 0\right) = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{also } \mu_{geo}(\varphi, -1) = 1.$$

$$2. \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \text{ Es ist } \chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} =$$

$t^2 + 1, \chi_\varphi^{char}$  hat keine NS in  $\mathbb{R} \implies \varphi$  hat keine EW.

$$3. \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \text{ Es ist } \chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix} =$$

$(t-1)^2 \implies 1$  ist einziger EW von  $\varphi$ , es ist  $\mu_{alg}(\varphi, 1) = 2$

$$\text{Eig}(\varphi, 1) = \text{Eig}(A, 1) = \text{Lös}(1E_2 - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$\implies \mu_{geo}(\varphi, 1) = 1. \implies \varphi$  ist nicht diagonalisierbar.

**Satz 18.16**  $V$  endlichdimensional,  $n = \dim V$

1. Ist  $\varphi$  diagonalisierbar, dann ist  $\chi_\varphi^{char} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n)$  mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ , nicht notwendig verschieden, das heißt  $\chi_\varphi^{char}$  zerfällt in Linearfaktoren.
2. Ist  $\chi_\varphi^{char} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n)$  mit paarweise verschiedene  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ , dann ist  $\varphi$  diagonalisierbar.

**Beweis** 1. Sei  $\varphi$  diagonalisierbar  $\rightarrow V$  besitzt Basis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  aus EV zu EW  $\lambda_i \in K$ .

$$\implies M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies \chi_\varphi^{char} = \det \begin{pmatrix} t - \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t - \lambda_n \end{pmatrix} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n)$$

2. Aus  $\chi_\varphi^{char} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n)$  mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  paarweise verschieden  $\implies \lambda_1, \dots, \lambda_n$  sind paarweise verschiedene EW von  $\varphi \implies \varphi$  diagonalisierbar.  $\square$

**Bemerkung 18.17**  $V$  endlichdimensional,  $n = \dim V$ ,  $\lambda$  EW von  $\varphi$ . Dann gilt:

$$1 \leq \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \leq \mu_{alg}(\varphi, \lambda)$$

**Beweis** Sei  $(v_1, \dots, v_s)$  eine Basis von  $\text{Eig}(\varphi, \lambda) \implies s = \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \geq 1$ , da  $\lambda$  EW von  $\varphi$ . Nach Basiserweiterungssatz  $\exists v_{s+1}, \dots, v_n \in V$ , sodass  $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$  ist.

$$\implies A := A_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \lambda & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & \lambda & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda \end{array} \right), A' \in M((n-s) \times (n-s), K)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \chi_{\varphi}^{char} &= \chi_A^{char} = \det \left( \begin{array}{ccc|c} t-\lambda & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & t-\lambda & \\ \hline & & 0 & tE_{n-s} - A' \end{array} \right) = (t-\lambda)^s \det(tE_{n-s} - A') = (t-\lambda)^s \chi_{A'}^{char} \\ \Rightarrow \mu_{geo}(\varphi, \lambda) &= s \leq \mu(\chi_{\varphi}^{char}, \lambda) = \mu_{alg}(\varphi, \lambda) \quad \square \end{aligned}$$

**Bemerkung 18.18**  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  paarweise verschiedene EW von  $\varphi$ . Dann gilt:

$$\text{Eig}(\varphi, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \text{Eig}(\varphi, \lambda_j) = \{0\} \forall i \in \{1, \dots, r\}$$

**Beweis** Sei  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Annahme:  $\exists v_i \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \text{Eig}(\varphi, \lambda_j) : v_i \neq 0$ .

$$\Rightarrow \exists v_j \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_j), j = 1, \dots, r, j \neq i : v_i = v_1 + \dots + v_{i-1} + v_{i+1} + \dots + v_r$$

Setze  $J := \{j \in \{1, \dots, r\}, j \neq i \mid v_j \neq 0\} = \{j_1, \dots, j_s\}$

$$\Rightarrow v_i = v_{j_1} + \dots + v_{j_s} \Rightarrow v_{j_1} + \dots + v_{j_s} + (-1)v_i = 0 \Rightarrow (v_{j_1}, \dots, v_{j_s}, v_i) \text{ linear abhängig} \nexists \quad \square$$

**Satz 18.19**  $V$  endlichdimensional. Dann sind äquivalent:

1.  $\varphi$  diagonalisierbar
2.  $\chi_{\varphi}^{char}$  zerfällt in Linearfaktoren und  $\mu_{alg}(\varphi, \lambda) = \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \forall$  EW von  $\varphi$ .
3. Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die paarweise verschiedenen EW von  $\varphi$ , dann ist

$$V = \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Eig}(\varphi, \lambda_k)$$

In diesem Fall erhält man eine Basis von  $V$  aus EV von  $\varphi$ , indem man Basen von  $\text{Eig}(\varphi, \lambda_i), i = 1, \dots, k$  zusammenfügt.

**Beweis** 1.  $\Rightarrow$  2. Sei  $\varphi$  diagonalisierbar.  $\Rightarrow \exists$  Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  aus EV von  $\varphi$ . Wir ordnen die EV in  $\mathcal{B}$  den verschiedenen EW von  $\varphi$  zu und gelangen so zu Familien  $\mathcal{B}_i := \left( v_1^{(i)}, \dots, v_{s_i}^{(i)} \right)$  von linear unabhängigen im  $\text{Eig}(\varphi, \lambda_i), i = 1, \dots, k$

- a) Behauptung:  $\mathcal{B}_i$  ist eine Basis von  $\text{Eig}(\varphi, \lambda_i)$ , denn gezeigt:  $\mathcal{B}_i$  ist ein ES von  $\text{Eig}(\varphi, \lambda_i)$ .  
Sei  $v \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_i) \leq V$



$$\begin{aligned}
&\implies \exists \lambda^{(j)} \in K : v = \sum_{j=1}^k \left( \lambda_1^{(j)} v_1^{(j)} + \dots + \lambda_{s_j}^{(j)} v_{s_j}^{(j)} \right) \\
&\implies \underbrace{v - \left( \lambda_1^{(i)} v_1^{(i)} + \dots + \lambda_{s_i}^{(i)} v_{s_i}^{(i)} \right)}_{\in \text{Eig}(\varphi, \lambda_i)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \left( \lambda_1^{(j)} v_1^{(j)} + \dots + \lambda_{s_j}^{(j)} v_{s_j}^{(j)} \right) \in \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \text{Eig}(\varphi, \lambda_j) \\
&\implies v = \lambda_1^{(i)} v_1^{(i)} + \dots + \lambda_{s_i}^{(i)} v_{s_i}^{(i)}
\end{aligned}$$

a) Nach 1. ist

$$\mu_{geo}(\varphi, \lambda_1) + \dots + \mu_{geo}(\varphi, \lambda_k) = s_1 + \dots + s_k = \dim V$$

$\chi_\varphi^{char}$  zerfällt nach 18.16 in Linearfaktoren, somit

$$\mu_{alg}(\varphi, \lambda_1) + \dots + \mu_{alg}(\varphi, \lambda_k) = \deg(\chi_\varphi^{char}) = \dim V$$

Wegen  $\mu_{geo}(\varphi, \lambda_i) \leq \mu_{alg}(\varphi, \lambda_i)$  für  $i = 1, \dots, k$  folgt:  $\mu_{geo}(\varphi, \lambda_i) = \mu_{alg}(\varphi, \lambda_i)$  für  $i = 1, \dots, k$ .

2.  $\implies$  3. Es gelte 2. Es seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die verschiedenen EW von  $\varphi$ . Wir setzen  $W := \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) + \dots + \text{Eig}(\varphi, \lambda_k)$ . Wegen 18.18 ist

$$W = \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Eig}(\varphi, \lambda_k)$$

$$\begin{aligned}
\implies \dim W &= \dim \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) + \dots + \dim \text{Eig}(\varphi, \lambda_k) \\
&= \mu_{geo}(\varphi, \lambda_1) + \dots + \mu_{geo}(\varphi, \lambda_k) \\
&= \mu_{alg}(\varphi, \lambda_1) + \dots + \mu_{alg}(\varphi, \lambda_k) = \deg(\chi_\varphi^{char}) \\
&= \dim V
\end{aligned}$$

$$\implies W = V$$

3.  $\implies$  1. Es gelte 3. Sei  $\mathcal{B} = \left( v_1^{(i)}, \dots, v_{s_i}^{(i)} \right)$  eine Basis von  $\text{Eig} \varphi, \lambda_i \implies \mathcal{B} := \left( v_1^{(1)}, \dots, v_{s_1}^{(1)}, \dots, v_1^{(k)}, v_{s_r}^{(k)} \right)$  ist eine Basis von  $V$  aus EV von  $\varphi \implies \varphi$  diagonalisierbar.  
 $\square$

**Anmerkung** In der Praxis ist es in der Regel schwierig festzustellen, ob  $\chi_\varphi^{char}$  in Linearfaktoren zerfällt oder die NS von  $\chi_\varphi^{char}$  zu bestimmen. Für Polynome von Grad  $\geq 5$  existiert keine Lösungsformel zur Bestimmung der NS. (Algebra 1 Vorlesung), die NS müssen numerisch bestimmt werden.

**Beispiel 18.20**

1. In 18.15.3 ist  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$  ist  $\chi_A^{char} = (t-1)^2$ ,  $\mu_{geo}(A, 1) = 1 < \mu_{alg}(A, 1) = 2 \implies A$  nicht diagonalisierbar.

2.  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$

$$\chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t-2 & 1 & 1 \\ 6 & t-1 & -1 \\ -3 & 1 & t+2 \end{pmatrix} = t^3 - t^2 - 5t - 3 = (t+1)^2(t-3)$$

EW von  $A$  :  $-1, 3, \mu_{alg} = (A, -1) = 2, \mu_{alg}(A, 3) = 1$

$$\text{Eig}(A, -1) = \text{Lös}(-E_n - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mu_{geo}(A, -1) = 2 = \mu_{alg}(A, -1).$$

$$\text{Eig}(A, 3) = \text{Lös}(3E_n - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mu_{geo}(A, 3) = 1 = \mu_{alg}(A, 3). \text{ Also ist } A \text{ diagonalisierbar, } \mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

ist eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  aus EV von  $A$ ,

$$M_{\mathcal{B}}(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$$

Mit

$$S := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, SAS^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$$

**Anmerkung** Ist  $f = a_m t^m + \dots + a_1 t + a_0 \in K[t]$ , dann können wir in  $f$ :

- Endomorphismen  $\varphi \in \text{End}_K(V)$  einsetzen durch die Regel

$$f(\varphi) := a_m \varphi^m + \dots + a_1 \varphi + a_0 \text{id}_V \in \text{End}_K(V)$$

wobei  $\varphi^k := \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{k\text{-mal}}$

- Matrizen  $A \in M(n \times n, K)$  einsetzen durch die Regel

$$f(A) := a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 E_n \in M(n \times n, K)$$

Für  $f, g \in K[t]$ ,  $\varphi \in \text{End}_K(V)$  ist  $f(\varphi) \circ g(\varphi) = (fg)(\varphi) = (gf)(\varphi) = g(\varphi) \circ f(\varphi)$ , analog für Matrizen.

**Satz 18.21 (Satz von Cayley-Hamilton)**  $V$  endlichdimensional. Dann gilt:  $\chi_\varphi^{\text{char}}(\varphi) = 0$ . Insbesondere gilt für alle  $A \in M(n \times n, K)$ :  $\chi_A^{\text{char}}(A) = 0$ .

**Beweis** 1. Es genügt zu zeigen, dass  $\chi_A^{\text{char}} = 0$  für alle  $A \in M(n \times n, K)$ , denn:

Ist  $\varphi \in \text{End}_K(V)$ ,  $\mathcal{B}$  Basis von  $V$ ,  $A = A_{\mathcal{B}}$ ,  $\chi_\varphi^{\text{char}} = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0 = \chi_A^{\text{char}} \in K[t]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \chi_A^{\text{char}}(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_0 E_n = M_{\mathcal{B}}(\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \cdots + a_0 \text{id}_V) \\ &= M_{\mathcal{B}}(\chi_\varphi^{\text{char}}(\varphi)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \chi_\varphi^{\text{char}}(\varphi) = 0$$

2. Sei  $A \in M(n \times n, K)$ . Wir setzen  $D := (tE_n - A)^\# \in M(n \times n, K[t])$

$$\Rightarrow D(tE_n - A) = \det(tE_n - A)E_n = \chi_A^{\text{char}} E_n$$

Sei  $D = \sum_{i=0}^{n-1} D_i t^i$  mit  $D_i \in M(n \times n, K)$ ,  $\chi_A^{\text{char}} = \sum_{i=0}^n a_i t^i$  mit  $a_i \in K$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{i=0}^n a_i E_n t^i &= \left( \sum_{i=0}^n a_i t^i \right) E_n = \chi_A^{\text{char}} E_n = D(tE_n - A) \\ &= \left( \sum_{i=0}^{n-1} D_i t^i \right) (tE_n - A) = \sum_{i=0}^{n-1} D_i t^{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} D_i A t^i \\ &= \sum_{i=0}^n (D_{i-1} - D_i A) t^i \quad (\text{mit } D_{-1} := 0, D_n := 0) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert:  $a_i A_n = D_{i-1} - D_i A$  für  $i = 0, \dots, n$

$$\begin{aligned} \chi_A^{\text{char}} &= \sum_{i=0}^n a_i A^i = \sum_{i=0}^n (a_i E_n) A^i = \sum_{i=0}^n (D_{i-1} - D_i A) A^i \\ &= (D_{-1} - D_0 A) + (D_0 - D_1 A) A + \cdots + (D_{n-1} - D_n A) A^n \\ &= D_{-1} - D_n A^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad \square$$

**Anmerkung** Der „Beweis“

$$\chi_A(A) = (\det(tE_n - A))(A) = \det(AE_n - A) = \det(A - A) = \det(0) = 0$$

funktioniert nicht, denn:

$$\underbrace{\underbrace{(\det(tE_n - A))}_{\in K[t]}(A)}_{\in M(n \times n, K)} \quad \underbrace{\det(AE_n - A)}_{\in M(n \times n, K)}_{\in K}$$

**Satz+Definition 18.22**  $V$  endlichdimensional,  $I := \{f \in K[t] \mid f(\varphi) = 0\}$ . Dann gilt:

1. Es gibt ein eindeutig bestimmtes, normiertes Polynom  $\chi_\varphi^{\min} \in K[t]$ , sodass

$$I = \chi_\varphi^{\min} K[t] := \{\chi_\varphi^{\min} q \mid q \in K[t]\}$$

$\chi_\varphi^{\min}$  heißt das **Minimalpolynom** von  $\varphi$ .  $\chi_\varphi^{\min}$  ist das eindeutig bestimmte normierte Polynom kleinsten Grades mit  $f(\varphi) = 0$ .

2.  $\chi_\varphi^{\min} \mid \chi_\varphi^{\text{char}}$ , das heißt  $\exists q \in K[t] : \chi_\varphi^{\text{char}} = q \cdot \chi_\varphi^{\min}$

Analog konstruiert man für  $A \in M(n \times n, K)$ , das Minimalpolynom  $\chi_A^{\min}$ . Es ist  $\chi_A^{\min} = \chi_{\tilde{A}}^{\min}$ .

**Beweis** 1. Existenz: Wegen Satz von Cayley-Hamilton ist  $\chi_\varphi^{\text{char}}(\varphi) = 0$ . Somit ist  $\chi_\varphi^{\text{char}} \in I$ , insbesondere  $I \neq \emptyset$ .

$\deg(f) \mid f \in I, f \neq 0$  ist eine nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{N}_0$ , hat somit ein minimales Element.  $\implies \exists g \in I, g \neq 0 : \deg(g)$  minimal in  $I \setminus \{0\}$  ist. Wir setzen

$$\chi_\varphi^{\min} := \frac{1}{l(g)} g \implies \chi_\varphi^{\min} \text{ normiert}$$

und es ist

$$\chi_\varphi^{\min}(\varphi) = \frac{1}{l(g)} g(\varphi) = 0$$

das heißt  $\chi_\varphi^{\min} \in I$ .

**Behauptung:**  $I = \chi_\varphi^{\min} K[t]$ , denn:

„ $\supseteq$ “ Für  $q \in K[t]$  ist  $(\chi_\varphi^{\min} q)(\varphi) = \underbrace{\chi_\varphi^{\min}(\varphi)}_{=0} \cdot g(\varphi) = 0$ , das heißt  $\chi_\varphi^{\min} q \in I$ .

„ $\subseteq$ “ Sei  $f \in I \implies \exists q, r \in K[t] : f = q\chi_\varphi^{\min} + r, \deg(r) < \deg(\chi_\varphi^{\min})$

$$\implies 0 = f(\varphi) = (q\chi_\varphi^{\min} + r)(\varphi) = q(\varphi) \cdot \chi_\varphi^{\min}(\varphi) + r(\varphi) = r(\varphi) \implies r \in I$$

Wegen  $\deg(r) < \deg(\chi_\varphi^{\min})$  und der Minimalität des Grades von  $\chi_\varphi^{\min}$  in  $I \setminus \{0\}$  folgt  $r = 0 \implies f = q\chi_\varphi^{\min}$

Eindeutigkeit: Sei  $\chi \in K[t]$  ein weiteres Polynom mit  $I = \chi K[t] = \chi_\varphi^{\min} K[t]$

$$\implies \chi = \chi \cdot 1 \in I = \chi_\varphi^{\min} K[t] \implies \exists q \in K[t] : \chi = \chi_\varphi^{\min} q$$

Analog  $\exists p \in K[t] : \chi_\varphi^{\min} = \chi p$

$$\implies \chi_\varphi^{\min} = \chi p = \chi_\varphi^{\min} q p \implies qp = 1 \implies p, q \in K^*$$

Wegen  $\chi, \chi_\varphi^{\min}$  normiert folgt  $p = q = 1$ , also  $\chi = \chi_\varphi^{\min}$

2. Wegen  $\chi_\varphi^{char}(\varphi) = 0$  nach Satz von Cayley-Hamilton folgt  $\chi_\varphi^{char} \in I$ .

$$\implies \exists q \in K[t] : \chi_\varphi^{char} = q\chi_\varphi^{min}$$

das heißt  $\chi_\varphi^{min} \mid \chi_\varphi^{char}$

□

**Bemerkung 18.23**  $V$  endlichdimensional,  $\lambda \in K$ . Dann gilt:

$$\chi_\varphi^{char}(\lambda) = 0 \iff \chi_\varphi^{min}(\lambda) = 0$$

Insbesondere haben  $\chi_\varphi^{char}$  und  $\chi_\varphi^{min}$  dieselben NS.

**Beweis** „  $\Leftarrow$  “ Sei  $\chi_\varphi^{min}(\lambda) = 0$ . Nach 18.22  $\exists q \in K[t]$  mit  $\chi_\varphi^{char} = q\chi_\varphi^{min}$

$$\implies \chi_\varphi^{char}(\lambda) = q(\lambda) \underbrace{\chi_\varphi^{min}(\lambda)} = 0$$

„  $\implies$  “ Sei  $\chi_\varphi^{char}(\lambda) = 0 \implies \lambda$  ist EW von  $\varphi$ , sei  $v \in V$  EV zum EW  $\lambda$ . Sei  $\chi_\varphi^{min} = t^r + a_{r-1}t^{r-1} + \dots + a_1t + a_0$

$$\begin{aligned} \implies 0 &= (\chi_\varphi^{min}(\varphi))(v) = (\varphi^r + a_{r-1}\varphi^{r-1} + \dots + a_1\varphi + a_0 \text{id}_V)(v) \\ &= \lambda^r v + a_{r-1}\lambda^{r-1}v + \dots + a_1\lambda v + a_0v \\ &= \underbrace{(\lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)}_{=\chi_\varphi^{min}(\lambda)} v \end{aligned}$$

$$\implies \chi_\varphi^{min}(\lambda) = 0.$$

□

**Beispiel 18.24**

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{Q})$ ,  $\chi_A^{char} = (t-1)^2$  Wegen 18.22, 18.23 gilt:  $\chi_A^{min}$  normiert,  $\chi_A^{min} \mid \chi_A^{char}$ ,  $\chi_A^{char}(1) = 0 \implies \chi_A^{min} \in \{t-1, (t-1)^2\}$  Wegen  $A - E_2 = 0$  ist  $\chi_A^{min} = t-1$

2.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{Q}) \implies \chi_A^{char} = (t-1)(t+1) \implies \chi_A^{min} = (t-1)(t+1)$

3.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$

$$\implies \chi_A^{char} = (t+1)^2(t-3) \implies \chi_A^{min} = \{(t+1)(t-3), (t+1)^2(t-3)\}$$

Es ist  $(A + E_n)(A - 3E_n) \neq 0$ , also ist  $\chi_A^{min} = (t+1)^2(t-3)$

$$4. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \implies \chi_A^{char} = (t+1)^2(t-3)$$

$$\chi_A^{min} \in \{(t+1)(t-3), (t+1)^2(t-3)\}$$

$$\text{Es ist } (A + E_n)(A - 3E_n) = 0 \implies \chi_A^{min} = (t+1)(t-3)$$

**Satz 18.25**  $V$  endlichdimensional. Dann sind äquivalent:

1.  $\varphi$  diagonalisierbar
2. Das Minimalpolynom  $\chi_\varphi^{min}$  zerfällt in Linearfaktoren und besitzt nur einfache NS, das heißt  $\chi_\varphi^{min} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r)$  mit paarweise verschiedenen  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$

**Beweis** 1.  $\implies$  2. Sei  $\varphi$  diagonalisierbar, seinen  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  die verschiedenen EW von  $\varphi$ . Sei  $v \in V$ . Da  $\varphi$  diagonalisierbar, ist  $V = \bigoplus_{i=1}^r \text{Eig}(\varphi, \lambda_i)$  nach 18.19, das heißt es existieren  $v_i \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_i), i = 1, \dots, r$  mit  $v = v_1 + \dots + v_r$

$$\begin{aligned} \implies (\varphi - \lambda_r \text{id}_V)(V) &= \varphi(v_1) + \dots + \varphi(v_r) - \lambda_r v_1 - \dots - \lambda_r v_r \\ &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r - \lambda_r v_1 - \dots - \lambda_r v_r \\ &= (\lambda_1 - \lambda_r)v_1 + \dots + (\lambda_{r-1} - \lambda_r)v_{r-1} \\ &\in \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Eig}(\varphi, \lambda_{r-1}) \end{aligned}$$

analog:

$$(\varphi - \lambda_{r-1} \text{id}_V) \circ (\varphi - \lambda_r \text{id}_V)(v) \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Eig}(\varphi, \lambda_{r-2})$$

Induktiv erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \circ (\varphi - \lambda_2 \text{id}_V) \circ \dots \circ (\varphi - \lambda_r \text{id}_V)(V) \\ \implies 0 &= (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \circ \dots \circ (\varphi - \lambda_r \text{id}_V) \\ \implies 0 &= ((t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r))(\varphi) \end{aligned}$$

$\implies$  Es existiert  $g \in K[t]$  mit  $(t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r) = g\chi_\varphi^{min}$ . Wegen  $\chi_\varphi^{min}(\lambda_1) = \dots = \chi_\varphi^{min}(\lambda_r) = 0$  nach 18.23 existiert  $h \in K[t]$  mit

$$\chi_\varphi^{min} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r)h = g\chi_\varphi^{min}h = gh\chi_\varphi^{min} \implies gh = 1$$

$$\implies g, h \in K^*, \chi_\varphi^{min} \text{ normiert} \implies g = h = 1 \implies \chi_\varphi^{min} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r)$$

2.  $\implies$  1. Sei  $\chi_\varphi^{min} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r)$ , wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$  paarweise verschieden. Nach 18.23 sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  die EW von  $\varphi$ . Beweis der Behauptung per Induktion nach  $n := \dim V$

IA:  $n = 1$  klar

IS: Sei  $n > 1$ , die Behauptung sei für  $1, \dots, n - 1$  gezeigt.

- a) Behauptung:  $V = \ker(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \oplus \text{im}(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)$ , denn: Nach 7.6  $\exists v, s \in K[t]$  mit

$$(t - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r) = q(t - \lambda_1) + s, \deg(s) < \deg(t - \lambda_1) = 1$$

das heißt  $s$  ist konstantes Polynom. Wegen

$$s(\lambda_1) = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda_1 - \lambda_r) - q(\lambda_1) \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_1)}_{=0} \neq 0$$

das heißt  $s \in K^*$ . Einsetzen von  $\varphi$  liefert:

$$(\varphi - \lambda_2 \text{id}_V) \circ \dots \circ (\varphi - \lambda_r \text{id}_V) = q(\varphi) \circ (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) + s \text{id}_V$$

$\implies \forall v \in V$  ist

$$\begin{aligned} sv &= (\varphi - \lambda_2 \text{id}_V) \circ \dots \circ (\varphi - \lambda_r \text{id}_V)(v) - q(\varphi) \circ (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(v) \\ \implies v &= \frac{1}{s} \underbrace{(\varphi - \lambda_2 \text{id}_V) \circ \dots \circ (\varphi - \lambda_r \text{id}_V)(v)}_{=:u} - \underbrace{q(\varphi) \circ (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(v)}_{=:w} \\ (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(u) &= \frac{1}{s} (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \circ \dots \circ (\varphi - \lambda_r \text{id}_V)(v) = \frac{1}{s} \underbrace{\chi_\varphi^{\min}(\varphi)(v)}_{=0} = 0 \\ \implies u &\in \ker(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \\ w &= \frac{1}{s} q(\varphi) \circ (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(v) = \frac{1}{s} ((\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \circ q(\varphi))(v) \in \text{im}(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \\ \implies V &= \ker(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) + \text{im}(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \end{aligned}$$

Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen ist

$$\dim \ker(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) + \dim \text{im}(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) = \dim V$$

$\implies$  Summe ist direkt  $\implies$  Behauptung.

- b) Wir setzen  $W := \text{im}(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)$ , dann ist

$$V = \ker(\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \oplus W = \underbrace{\text{Eig}(\varphi, \lambda_1)}_{\neq 0} \oplus W$$

$\implies \dim W < \dim V$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \varphi \circ (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) &= \varphi \circ \varphi - \lambda_1 \varphi = (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V) \circ \varphi \\ \implies \varphi(W) &= \varphi((\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(V)) = (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(\varphi(V)) \leq (\varphi - \lambda_1 \text{id}_V)(V) = W \end{aligned}$$

Wir betrachten die Abbildung  $\psi := \varphi|_W^W : W \rightarrow W$ . Sei  $\chi_\varphi^{\min} = t^n + a_{n-1}t^{n-1} +$

$\cdots + a_0 \implies \forall w \in W$  ist

$$\begin{aligned}\chi_\varphi^{\min}(\psi)(w) &= (\psi^n + a_{n-1}\psi^{n-1} + \cdots + a_0 \text{id}_V)(w) \\ &= \psi^n(w) + a_{n-1}\psi^{n-1}(w) + \cdots + a_0 w \\ &= \varphi^n(w) + a_{n-1}\varphi^{n-1}(w) + \cdots + a_0 w \\ &= (\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \cdots + a_0 \text{id}_V)(w) \\ &= \underbrace{(\chi_\varphi^{\min}(\varphi))}_{=0}(w) = 0\end{aligned}$$

$$\implies \chi_\varphi^{\min}\psi = 0 \implies \chi_\psi^{\min} \mid \chi_\varphi^{\min} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r)$$

$\implies \chi_\psi^{\min}$  zerfällt in Linearfaktoren und besitzt nur einfache Nullstellen.  $\implies \psi$  diagonalisierbar, das heißt es existiert eine Basis von  $W$  aus EV zu  $\psi = \varphi|_W$ . Wegen  $V = \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus W$  existiert nach 11.8 eine Basis von  $V$  aus EV zu  $\varphi$ , das heißt  $\varphi$  ist diagonalisierbar.  $\square$

**Beispiel 18.2** 1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ . Es ist  $\chi_A^{\min} = (t+1)^2(t-3) \implies A$  ist nicht diagonalisierbar.

2.  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ . Es ist  $\chi_A^{\min} = (t+1)(t-3) \implies A$  ist diagonalisierbar.

## 19 Dualraum

In diesem Abschnitt sei  $V$  ein  $K$  Vektorraum.

**Definition 19.1 (Dualraum)**

$$V^* := \text{Hom}_K(V, K) = \{\varphi : V \rightarrow K \mid \varphi \text{ linear}\}$$

heißt der **Dualraum** von  $V$ , die Elemente aus  $V^*$  heißen **Linearformen** auf  $V$ .

**Beispiel 19.2**

1.  $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n, \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1$  ist eine Linearform auf  $\mathbb{R}^n$ .

2.  $K = \mathbb{R}, V = \mathcal{C}[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$

$$\varphi : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f(t) dt$$

ist eine Linearform auf  $\mathcal{C}[0, 1]$



**Bemerkung+Definition 19.3**  $V$  endlichdimensional  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  Basis von  $V$ . Wir definieren für  $i = 1, \dots, n$  die linear Abbildung

$$v_i^* : V \rightarrow K, v_j \mapsto \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Dann ist  $\mathcal{B}^* := (v_1^*, \dots, v_n^*)$  ist eine Basis von  $V^*$ , die **duale Basis** zu  $\mathcal{B}$ .

**Beweis** 1.  $\mathcal{B}^*$  ist linear unabhängig: Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K, \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^* = 0. \implies \forall i \in \{1, \dots, n\}$  ist

$$0 = \underbrace{\lambda_1 v_1^*(v_i)}_{=0} + \dots + \underbrace{\lambda_{i-1} v_{i-1}^*(v_i)}_{=0} + \underbrace{\lambda_i v_i^*(v_i)}_{=1} + \underbrace{\lambda_{i+1} v_{i+1}^*(v_i)}_{=0} + \dots + \underbrace{\lambda_n v_n^*(v_i)}_{=0} = \lambda_i$$

2.  $\mathcal{B}^*$  ist ES von  $V^*$ : Sei  $\varphi \in V^*$ . Setze  $\lambda_i := \varphi(v_i)$  für  $i = 1, \dots, n$

$$\implies (\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*)(v_i) = \lambda_i = \varphi(v_i), i = 1, \dots, n$$

$$\implies \varphi = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^* \quad \square$$

**Anmerkung** Ist  $V$  unendlichdimensional mit Basis  $(v_i)_{i \in I}$ , dann ist  $(v_i^*)_{i \in I}$  (analog definiert) linear unabhängig, aber kein ES von  $V$ .

**Notation:**

Elemente des  $K^n$  schreiben wir im Folgenden als Spaltenvektoren. Ist  $\varphi \in (K^n)^* = \text{Hom}_K(K^n, K)$ , dann existiert nach LA1 ein eindeutig bestimmtes  $A = (a_1 \dots a_n) \in M(1 \times n, K)$  mit

$$\varphi = \tilde{A} : K^n \rightarrow K, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto (a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Es ist  $A = M_{(e_1)}^{(e_1, \dots, e_n)}(\varphi)$ . Dementsprechende schreiben wir Elemente von  $(K^n)^*$  als Zeilenvektoren.

**Beispiel 19.4**

1.  $V = K^n, \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \implies \mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$  duale Basis zu  $\mathcal{B}$  mit

$$e_i^* = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

Für die Abbildung aus 19.2.1 gilt  $\varphi = e_1^* = (1, \dots, 0)$ .

2.  $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (v_1, v_2), v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Es ist  $e_1 = v_1, e_2 = v_2 - v_1$

$$\implies v_1^*(e_1) = v_1^*(v_1) = 1, v_1^*(e_2) = v_1^*(v_2 - v_1) = \underbrace{v_1^*(v_2)}_{=0} - \underbrace{v_1^*(v_1)}_{=1} = -1$$

$$\implies v_1^* = (1, -1)$$

$$\implies v_2^*(e_1) = v_2^*(v_1) = 0, v_2^*(e_2) = v_2^*(v_2 - v_1) = \underbrace{v_2^*(v_2)}_{=1} - \underbrace{v_2^*(v_1)}_{=0} = 1$$

$$\implies v_2^* = (0, 1)$$

**Folgerung 19.5**  $V$  endlichdimensional,  $v \in V, v \neq 0$ . Dann existiert  $\varphi \in V^*$  mit  $\varphi(v) \neq 0$

**Beweis** Ergänze die linear unabhängige Familie  $(v)$  zu einer Basis  $(v, v_2, \dots, v_n)$  von  $V$ . Dann ist  $(v^*, v_2^*, \dots, v_n^*)$  eine Basis von  $V^*$ , und es ist  $v^*v = 1 \neq 0$ .  $\square$

**Anmerkung** Die Aussage gilt auch ohne die Voraussetzung „ $V$  endlichdimensional.“

**Folgerung 19.6**  $V$  endlichdimensional,  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  Basis von  $V$ ,  $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$  duale Basis zu  $\mathcal{B}$ . Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\psi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow V^*, v_i \mapsto v_i^* \quad (i = 1, \dots, n)$$

Insbesondere ist  $\dim V = \dim V^*$

**Beweis** folgt direkt aus 19.3  $\square$

**Bemerkung+Definition 19.7**  $U \subseteq V$  UVR

$$U^0 := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \forall u \in U\} \subseteq V^*$$

heißt der Annulator von  $U$ .  $U^0$  ist ein UVR von  $V^*$ .

**Beweis** leicht nachzurechnen.  $\square$

**Satz 19.8**  $V$  endlichdimensional,  $U \subseteq V$  UVR,  $(u_1, \dots, u_k)$  von  $U$ ,  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r)$  Basis von  $V$ . Dann ist die Teilfamilie  $(v_1^*, \dots, v_r^*)$  von  $\mathcal{B}^*$  eine Basis von  $U^0$ . Insbesondere ist  $\dim U^0 = \dim V - \dim U$ .

**Beweis** 1.  $(v_1^*, \dots, v_r^*)$  linear unabhängig, da Teilfamilie der Basis  $\mathcal{B}^*$  von  $V^*$

2.  $\text{Lin}((v_1^*, \dots, v_r^*)) = U^0$

„ $\subseteq$ “  $\varphi \in \text{Lin}((v_1^*, \dots, v_r^*)) \implies$  Es existieren  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$  mit  $\varphi = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_r v_r^*$ .

$\implies$  Für  $i = 1, \dots, k$  ist  $\varphi(u_i) = \lambda_1 v_1^*(u_i) + \dots + \lambda_r v_r^*(u_i) = 0 \implies \varphi(u) = 0 \forall u \in U$

„ $\supseteq$ “ Sei  $\varphi \in U^0$ . Es existieren  $\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$  mit  $\varphi = \mu_1 u_1^* + \dots + \mu_k u_k^* + \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_r v_r^* \implies$  Für  $i = 1, \dots, k$  ist  $0 = \varphi(u_i) = \mu_i \implies \varphi \in \text{Lin}((v_1^*, \dots, v_r^*))$

$\square$

**Bemerkung+Definition 19.9**  $V, W$   $K$ -Vr,  $f : V \rightarrow W$  lineare Abbildung. Wir definieren  $f^* : W^* \rightarrow V^*, \psi \mapsto f^*(\psi) := \psi \circ f$   $f^*$  heißt die zu  $f$  duale **Abbildung**. Es gilt:  $f^*$  ist linear.

**Beweis** •  $f^*$  ist wohldefiniert, da  $f^*(\psi) = \psi \circ f \in V^* \forall \psi \in W^*$ .

•  $f^*$  ist linear, denn: Seien  $\varphi, \psi \in W^*, \lambda \in K$

$$\implies f^*(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi) \circ f = \varphi \circ f + \psi \circ f = f^*(\varphi) + f^*(\psi)$$

$$f^*(\lambda\varphi) = \lambda f^*(\varphi) \text{ analog.}$$

$\square$

**Bemerkung 19.10**  $V, W$  endlichdimensionaler  $K$ -VR. Dann ist die Abbildung

$$*: \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow \text{Hom}_K(W^*, V^*), f \mapsto f^*$$

ist ein Isomorphismus von  $K$ -VR.

**Beweis** 1.  $*$  ist linear: Seien  $f, g \in \text{Hom}_K(V, W), \psi \in W^*$

$$\implies (f+g)^*(\psi) = \psi \circ (f+g) = \psi \circ f + \psi \circ g = f^*(\psi) + g^*(\psi) \implies (f+g)^* = f^* + g^*$$

Rest analog.

2.  $*$  ist injektiv: Sei  $f \in \text{Hom}_K(V, W)$  mit  $f^* = 0 \implies \psi \circ f = 0 \forall \psi \in W^*$ . Annahme:  $f \neq 0 \implies \exists v \in V : f(v) \neq 0 \implies \exists \varphi \in W^* : \varphi(f(v)) \neq 0 \implies \varphi \circ f \neq 0$

3.  $*$  ist surjektiv: Es ist  $\dim \text{Hom}_K(V, W) = \dim(V) \dim(W) = \dim(V^*) \dim(W^*) = \dim \text{Hom}_K(W^*, V^*) \implies *$  surjektiv.  $\square$

**Satz 19.11 (19.11)**  $V, W$  endlichdimensionale  $K$ -VR,  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  Basen von  $V$  beziehungsweise  $W$ ,  $f : V \rightarrow W$  lineare Abbildung. Dann gilt:

$$M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(f^*) = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f))^T$$

**Beweis** Sei  $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n), \mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m), M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  insbesondere

$$\begin{aligned} f(v_j) &= \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \\ \implies a_{ij} &= w_i^*(f(v_j)) = (w_i^* \circ f)(v_j) = f^*(w_i^*)(v_j) \end{aligned}$$

Sei  $M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(f^*) = (b_{ij})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}$ , dann ist

$$\begin{aligned} f^*(w_i^*) &= \sum_{j=1}^n b_{ji} v_j^* \\ \implies b_{ji} &= (f^*(w_i^*))(v_j) = a_{ij} \end{aligned} \quad \square$$

**Satz 19.12**  $V, W$  endlichdimensionale  $K$ -VR,  $f : V \rightarrow W$  lineare Abbildung. Dann gilt:

1.  $\text{im}(f^*) = \ker(f)^0$
2.  $\ker(f^*) = \text{im}(f)^0$

**Beweis** 1. „ $\subseteq$ “ Sei  $\varphi \in \text{im}(f^*) \subseteq V^* \implies \exists \psi \in W^* : f^*(\psi) = \varphi$ , das heißt  $\psi \circ f = \varphi$ .  
 $\implies \varphi|_{\ker f} = 0 \implies \varphi \in (\ker f)^0$  „ $\supseteq$ “ Sei  $\varphi \in (\ker f)^0 \subseteq V^*$ , das heißt  $\varphi|_{\ker f} = 0$ .  
 0. Zu zeigen: Es existiert ein  $\psi \in W^*$  mit  $\varphi = f^*(\psi) = \psi \circ f$ . Sei  $(v_1, \dots, v_k)$  eine Basis von  $\ker f$ ,  $(w_1, \dots, w_r)$  eine Basis von  $\text{im } f$ ,  $u_i \in f^{-1}(\{w_i\})$ ,  $i = 1, \dots, r \implies (v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_r)$  Basis von  $V$ . Wir ergänzen  $(w_1, \dots, w_r)$  zu einer Basis  $w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m$  von  $W$ .  $\implies$  Es existiert genau eine lineare Abbildung  $\psi : W \rightarrow K$  mit

$$\psi(w_i) = \begin{cases} \varphi(u_i) & i = 1, \dots, r \\ 0 & i = r+1, \dots, m \end{cases}$$

Für  $i = 1, \dots, r$  ist  $\varphi(u_i) = \psi(w_i) = \psi(f(u_i)) = (\psi \circ f)(u_i)$ , und für  $i = 1, \dots, k$  ist  $\varphi(v_i) = 0 = \psi(f(v_i))$ . Also:  $\varphi = \psi \circ f = f^*(\psi)$ , das heißt  $\varphi \in \text{im } f^*$

$$\begin{aligned} 2. \varphi \in \ker(f^*) &\iff f^*(\varphi) = 0 \iff \varphi \circ f = 0 \iff \varphi(f(v)) = 0 \forall v \in V \iff \\ &\varphi|_{\text{im } f} = 0 \iff \varphi \in (\text{im } f)^0 \quad \square \end{aligned}$$

**Folgerung 19.13**  $V, W$  endlichdimensionale  $K$ -VR,  $f : V \rightarrow W$  lineare Abbildung. Dann gilt:

$$\text{Rang}(f^*) = \text{Rang}(f)$$

**Beweis**  $\text{Rang } f^* = \dim \text{im } f^* = \dim(\ker f)^0 = \dim V - \dim \ker f = \dim \text{im } f = \text{Rang}(f) \square$

**Folgerung 19.14**  $A \in M(m \times n, K)$ . Dann gilt:

$$\text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A)$$

**Beweis** Es ist  $A = M_{(e_1, \dots, e_m)}^{e_1, \dots, e_n}(\tilde{A})$ ,  $A^T = M_{e_1^*, \dots, e_n^*}^{e_1^*, \dots, e_m^*}$

$$\text{Spaltenrang}(A) = \dim \text{im } \tilde{A} = \text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang}(\tilde{A}^*) = \text{Spaltenrang}(A^t) = \text{Zeilenrang}(A) \quad \square$$

**Definition 19.15**  $V^{**} := (V^*)^* = \text{Hom}_K(V^*, K)$  heißt der Bidualraum von  $V$ .

**Satz 19.16**  $V$  endlichdimensional. Dann gibt es einen kanonischen (das heißt basisunabhängigen) Isomorphismus

$$i : V \rightarrow V^{**}, v \mapsto i_v, i_v : V^* \rightarrow K, \varphi \mapsto \varphi(v)$$

**Beweis** 1.  $i$  wohldefinierter und linear: leicht nachzurechnen.

$$2. i \text{ injektiv: Sei } v \in \ker i \implies i_v = 0 \implies \forall \varphi \in V^* = \text{Hom}_K(V, K) : \varphi(v) = 0 \implies v = 0$$

$$3. \dim V^{**} = \dim V^* = \dim V. \text{ Somit nach 12.15: } i \text{ Isomorphismus} \quad \square$$

**Anmerkung** • Im Gegensatz zu  $\psi_B : V \rightarrow V^*$  ist der Isomorphismus  $i : V \rightarrow V^{**}$  unabhängig von der Wahl einer Basis, das heißt  $V$  und  $V^*$  sind unkanonisch isomorph,  $V$  und  $V^{**}$  sind kanonisch isomorph (für  $V$  endlichdimensional).

• Ist  $V$  unendlichdimensional, dann liefert  $i$  zumindest noch eine kanonische Inklusion von  $V$  nach  $V^{**}$ . Diese ist jedoch nicht surjektiv.

## 20 Bilinearformen

In diesem Abschnitt sei  $V$  stets ein  $K$ -VR.

**Definition 20.1**  $\gamma : V \times V \rightarrow K$  heißt eine Bilinearform auf  $V$ , genau dann wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (B1)  $\gamma(v_1 + v_2, w) = \gamma(v_1, w) + \gamma(v_2, w)$ ,  $\gamma(\lambda v, w) = \lambda \gamma(v, w)$
- (B2)  $\gamma(v, w_1 + w_2) = \gamma(v, w_1) + \gamma(v, w_2)$ ,  $\gamma(v, \lambda w) = \lambda \gamma(v, w)$

$\forall v, w, v_1, v_2, w_1, w_2 \in V, \lambda \in K$ .

**Beispiel 20.2**

1.  $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n, \gamma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \gamma\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$  ist eine Bilinearform auf  $\mathbb{R}^n$ .
2.  $K = \mathbb{R}, V = l[0, 1], \gamma : l[0, 1] \times l[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \gamma(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)dt$  ist eine Bilinearform auf  $l[0, 1]$ .
3.  $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, \gamma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \gamma\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 - x_2 y_2$  ist eine Bilinearform auf  $\mathbb{R}^2$ .

**Definition 20.3**  $V$  endlichdimensional,  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  Basis von  $V$ ,  $\gamma$  Bilinearform auf  $V$

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = (\gamma(v_i, v_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M(n \times n, K)$$

heißt die **Darstellungsmatrix (Fundamentalmatrix)** von  $\gamma$  bezüglich  $\mathcal{B}$ .

**Beispiel 20.4**

1. In 20.2a ist für  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) : M_{\mathcal{B}}(\gamma) = E_n$
2. In 20.2p ist für  $\mathcal{B} = (e_1, e_2) : M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

**Bemerkung 20.5**  $V$  endlichdimensional,  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  Basis von  $V$ ,  $\gamma$  Bilinearform auf  $V$ ,  $A =$

$M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ ,  $\Phi_{\mathcal{B}} : K^n \rightarrow V$  Koordinatensystem zu  $\mathcal{B}$ ,  $v, w \in V, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)$ , das heißt

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n,$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)$$

das heißt  $w = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n$ . Dann gilt:

$$\gamma(v, w) = \Phi_{\mathcal{B}^{-1}}^T A \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) = x^t A y = (x_1 \quad \dots \quad x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

**Beweis** Es ist

$$\begin{aligned} y(v, w) &= \gamma(x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n, y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \gamma(v_i, v_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n \gamma(v_i, v_j) y_j = x^T A y \end{aligned} \quad \square$$

**Bemerkung 20.6**  $V$  endlichdimensional,  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  Basis von  $V$ ,  $A \in M(n \times n, K)$ . Dann gilt: Durch

$$\Delta_A^{\mathcal{B}} : V \times V \rightarrow K, (v, w) \mapsto \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T A \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)$$

ist eine Bilinearform auf  $V$  gegeben.

**Beweis** Nachrechnen.  $\square$

**Beispiel 20.7 (wichtiger Spezialfall von 20.6)**

$V = K^n, \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n), A \in M(n \times n, K) \implies \Phi_{\mathcal{B}} = \text{id}_{K^n}$ . Durch

$$\Delta_A^{(e_1, \dots, e_n)} : K^n \times K^n \rightarrow K, (v, w) \mapsto v^t A w$$

ist eine Bilinearform auf  $K^n$  gegeben. Wir setzen kurz  $\Delta(A) := \Delta_A := \Delta_A^{(e_1, \dots, e_n)}$

**Bemerkung+Definition 20.8**  $\text{Bil}(V) := \{\gamma : V \times V \rightarrow K \mid \gamma \text{ ist Bilinearform}\}$  ist ein  $K$ -VR, ist ein UVR vom  $K$ -VR  $\text{Abb}(V \times V, K)$

**Bemerkung 20.9**  $V$  endlichdimensional,  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  Basis von  $V$ . Dann gilt: Die Abbildung

$$M_{\mathcal{B}} : \text{Bil}(V) \rightarrow M(n \times n, K)$$

ist ein Isomorphismus von  $K$ -VR mit Umkehrabbildung

$$\Delta^{\mathcal{B}} : M(n \times n, K) \rightarrow \text{Bil}(V), A \mapsto \Delta_A^{\mathcal{B}}$$

**Beweis** 1.  $M_{\mathcal{B}}$  linear: nachrechnen.

2.  $\Delta^{\mathcal{B}} \circ M_{\mathcal{B}} = \text{id}_{\text{Bil}(V)}$ , denn: Sei  $\gamma \in \text{Bil}(V)$

$$\begin{aligned} \implies (\Delta^{\mathcal{B}} \circ M_{\mathcal{B}})(\gamma)(v_i, v_j) &= \Delta_{M_{\mathcal{B}}(\gamma)}^{\mathcal{B}}(v_i, v_j) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_i)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma) \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_j) \\ &= e_i^T M_{\mathcal{B}}(\gamma) e_j = \gamma(v_i, v_j) \end{aligned}$$

3.  $M_{\mathcal{B}} \circ \Delta^{\mathcal{B}} = \text{id}_{M(n \times n, K)}$ , denn: Sei  $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K), B = (b_{ij}) = (M_{\mathcal{B}} \circ \Delta^{\mathcal{B}})(A) = M_{\mathcal{B}} \circ \Delta_A^{\mathcal{B}}$

$$b_{ij} = \Delta_A^{\mathcal{B}}(v_i, v_j) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_i)^T A \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_j) = e_i^T A e_j = a_{ij}$$

$$\implies B = A \quad \square$$

**Satz 20.10**  $V$  endlichdimensional,  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  Basen von  $V$ ,  $\gamma$  Bilinearform auf  $V$ . Dann gilt:

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = (T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

**Beweis** Für  $v, w \in V$  ist

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{B}}(w) = \gamma(v, w) = \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}(w)$$

$$16.2.2: \tilde{T}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{aligned} &= (T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v))^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) \\ &= (\Phi_{\mathcal{B}}^{-1})^T (T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) \\ \implies \Delta^{\mathcal{B}}(M_{\mathcal{B}}(\gamma))(v, w) &= \Delta^{\mathcal{B}}\left((T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)(v, w) \\ \implies \Delta^{\mathcal{B}}(M_{\mathcal{B}}(\gamma)) &= \Delta^{\mathcal{B}}\left((T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right) \end{aligned}$$

$\Delta^{\mathcal{B}}$  Isomorphismus

$$\implies M_{\mathcal{B}}(\gamma) = (T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}})^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

□

**Definition 20.11**  $V$  endlichdimensional,  $\gamma$  Bilinearform auf  $V$ . Wir setzen  $\text{Rang}(\gamma) := \text{Rang } M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ , wobei  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$  ist.

**Anmerkung** Dies ist wohldefiniert. (folgt aus 20.10, da die Matrizen  $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$  invertierbar sind)

**Bemerkung+Definition 20.12** Es gilt:

1. Ist  $\gamma : V \times V \rightarrow K$  eine Bilinearform, dann induziert  $\gamma$  die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \Gamma_l : V &\rightarrow V^*, w \mapsto \gamma(\cdot, w) & \gamma(\cdot, w) : V &\rightarrow K, v \mapsto \gamma(v, w) \\ \Gamma_r : V &\rightarrow V^*, v \mapsto \gamma(v, \cdot) & \gamma(v, \cdot) : V &\rightarrow K, v \mapsto \gamma(v, w) \end{aligned}$$

2. Jede lineare Abbildung  $\Gamma : V \rightarrow V^*$  induziert Bilinearformen

$$\begin{aligned} \gamma_l : V \times V &\rightarrow K, \gamma_l(v, w) := \Gamma(w)(v) \\ \gamma_r : V \times V &\rightarrow K, \gamma_r(v, w) := \Gamma(v)(w) \end{aligned}$$

Die Zuordnungen aus 1., 2. induzieren den Isomorphismus  $\text{Bil}(V) \cong \text{Hom}_K(V, V^*)$

**Beweis** Nachrechnen.

□

**Definition 20.13**  $\gamma$  Bilinearform auf  $V$ .  $\gamma$  heißt **nicht-ausgeartet**  $\iff \Gamma_l$  und  $\Gamma_r$  sind injektiv.

$$\iff \gamma(v, w) = 0 \forall v \in V \implies w = 0$$

(Injektivität von  $\Gamma_l$ ), und

$$\iff \gamma(v, w) = 0 \forall w \in V \implies v = 0$$

(Injektivität von  $\Gamma_r$ ).

$\gamma$  heißt **perfekt**  $\iff \Gamma_l$  und  $\Gamma_r$  sind Isomorphismen.

**Bemerkung 20.14**  $V$  endlichdimensional,  $\gamma$  Bilinearform auf  $V$ ,  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  Basis von  $V$ ,  $\mathcal{B}^*$  duale Basis zu  $\mathcal{B}$ . Dann gilt:

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_l) = M_{\mathcal{B}}(\gamma) = (M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_r))^T$$

**Beweis** Behauptung: Es ist  $\Gamma_l(v_i) = \gamma(v_1, v_i)v_1^* + \dots + \gamma(v_n, v_i)v_n^*$ , denn  $\Gamma_l(v_i)(v_j) = \gamma(v_j, v_i)$  nach Definition

$$(\gamma(v_1, v_i)v_1^* + \dots + \gamma(v_n, v_i)v_n^*)(v_j) = \gamma(v_j, v_i)$$

Somit:  $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_l) = M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ .

Analog:  $\Gamma_r(v_i) = \gamma(v_i, v_1)v_1^* + \dots + \gamma(v_i, v_n)v_n^* \implies M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_r) = (M_{\mathcal{B}}(\gamma))^T$  □

**Folgerung 20.15**  $V$  endlichdimensional,  $\gamma$  Bilinearform auf  $V$ ,  $\mathcal{B}$  Basis von  $V$ . Dann sind äquivalent:

1.  $\gamma$  ist nicht-ausgeartet
2.  $\gamma$  ist perfekt
3.  $M_{\mathcal{B}}(\gamma)$  invertierbar
4.  $\Gamma_l$  injektiv
5.  $\Gamma_r$  injektiv

**Beweis** 1.  $\iff$  2. wegen  $\dim V = \dim V^*$  und 12.12

$\gamma$  perfekt  $\iff \Gamma_l, \Gamma_r$  Isomorphismen  $\iff M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_l), M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_r)$  invertierbar  $\iff M_{\mathcal{B}}(\gamma)$  invertierbar.  $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_l), M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_r) \iff \Gamma_l$  Isomorphismus  $\iff M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}$  invertierbar. □

**Definition 20.16**  $\gamma$  Bilinearform auf  $V$ .

$\gamma$  heißt **symmetrisch**  $\iff \gamma(v, w) = \gamma(w, v) \forall v, w \in V$

$\gamma$  heißt **antisymmetrisch**  $\iff \gamma(v, w) = -\gamma(w, v) \forall v, w \in V$

$\gamma$  heißt **alternierend**  $\iff \gamma(v, v) = 0 \forall v \in V$ .

**Anmerkung** •  $\gamma$  symmetrisch  $\implies \Gamma_l = \Gamma_r$

• Für  $\text{char}(K) \neq 2$  gilt:  $\gamma$  alternierend  $\iff \gamma$  antisymmetrisch



- Für  $\text{char}(K) = 2$  gilt immer noch  $\gamma$  alternierend  $\implies \gamma$  (anti)symmetrisch. Die Umkehrung ist falsch:  $\gamma : \mathbb{F}_2^3 \times \mathbb{F}_2^3 \rightarrow \mathbb{F}, \gamma(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$  ist (anti)symmetrisch, aber nicht alternierend:

$$\gamma\left(\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}\right) = \bar{1} \neq \bar{0}$$

**Bemerkung 20.17**  $V$  endlichdimensional,  $\mathcal{B}$  Basis von  $V$ ,  $\gamma$  Bilinearform auf  $V$ . Dann gilt:

- $\gamma$  symmetrisch  $\iff M_{\mathcal{B}}(\gamma)$  ist symmetrisch, das heißt  $M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T = M_{\mathcal{B}}(\gamma)$
- $\gamma$  antisymmetrisch  $\iff M_{\mathcal{B}}(\gamma)$  ist antisymmetrisch, das heißt  $M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T = -M_{\mathcal{B}}(\gamma)$

**Beweis** 1. „ $\implies$ “ klar

„ $\impliedby$ “ Sei  $M_{\mathcal{B}}(\gamma) = M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T \implies$  Für  $v, w$  ist

$$\begin{aligned} \gamma(v, w) &= \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma) \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)^T \\ &= \underbrace{\left( \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma) \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \right)^T}_{\in K} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma) \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v) = \gamma(w, v). \end{aligned}$$

2. analog. □

## 21 Quadratische Räume

**Definition 21.1 (Quadratische Form)**  $V$   $K$ -VR. Eine Abbildung  $q : V \rightarrow K$  heißt eine **quadratische Form** auf  $V$ , genau dann wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (Q1)  $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v) \forall \lambda \in K, v \in V$
- (Q2) Die Abbildung  $\varepsilon_q : V \times V \rightarrow K, (v, w) \mapsto q(v+w) - q(v) - q(w)$  ist eine (automatisch symmetrische) Bilinearform

**Beispiel 21.2**

$K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$  ist eine quadratische Form auf  $\mathbb{R}^2$  (Q1) ist erfüllt,

(Q2) ist ebenfalls erfüllt, denn

$$\begin{aligned} \varepsilon_q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) &= q\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) - q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) - q\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= (x_1 + y_1)^2 + (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) + (x_2 + y_2)^2 - x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 - y_1^2 - y_1y_2 - y_2^2 \\ &= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 \end{aligned}$$

das heißt  $\varepsilon_q$  ist symmetrische Bilinearform.

**Bemerkung 21.3**  $\text{char } K \neq 2, V \text{ K-VR}, \text{SymBil}(V) := \{\gamma : V \times V \rightarrow K \mid \gamma \text{ ist symmetrische Bilinearform}\}, \text{Quad}(V) := \{q : V \rightarrow K \mid q \text{ ist eine quadratische Form}\}$ . Dann sind die Abbildungen

$$\Phi : \text{SymBil}(V) \rightarrow \text{Quad}(V), \gamma \mapsto q_\gamma \quad q_\gamma : V \rightarrow K, v \mapsto \gamma(v, v)$$

$$\Psi : \text{Quad}(V) \rightarrow \text{SymBil}(V), q \mapsto \gamma_q \frac{1}{2} \varepsilon_q$$

zueinander inverse Bijektionen.

**Beweis** 1.  $\Phi$  ist wohldefiniert, das heißt  $q_\gamma \in \text{Quad}(V) \forall \gamma \in \text{SymBil}(V)$ .

Q1: Sei  $\lambda \in K, v \in V \implies q_\gamma(\lambda v) = \gamma(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 \gamma(v, v) = \lambda^2 q_\gamma(v)$

Q2:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{q_\gamma} &= q_\gamma(v+w) - q_\gamma(v) - q_\gamma(w) = \gamma(v+w, v+w) - \gamma(v, v) - \gamma(w, w) \\ &= \gamma(v, w) + \gamma(w, v) = 2\gamma(v, w) \end{aligned}$$

$\implies \varepsilon_{q_\gamma}$  symmetrische Bilinearform.

2.  $\Psi$  ist wohldefiniert, denn für jedes  $q \in \text{Quad}(V)$  ist  $\gamma_q = (1/2)\varepsilon_q \in \text{SymBil}(V)$ , da  $\varepsilon_q \in \text{SymBil}(V)$

3.  $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{\text{Quad}(V)}$ : Für  $q \in \text{Quad}(V), v \in V$  ist

$$(\Phi \circ \Psi)(q)(v) = \Phi(\gamma_q)(v) = q_\gamma(v) = \frac{1}{2}(q(v+v) - q(v) - q(v)) = q(v)$$

4.  $\Psi \circ \Phi = \text{id}_{\text{SymBil}(V)}$ : Für  $\gamma \in \text{SymBil}(V), v, w \in V$  ist

$$(\Psi \circ \Phi)(\gamma)(v, w) = \Psi(q_\gamma)(v, w) = \frac{1}{2}\varepsilon_{q_\gamma}(v, w) = \gamma(v, w) \quad \square$$

**Anmerkung** Philosophie dahinter: symmetrische Bilinearformen, quadratische Formen auf  $K$  sind für  $\text{char } K \neq 2$  fast dasselbe. Für  $\text{char } k = 2$  kann man die Abbildung  $\Phi$  immer noch definieren,  $\Phi$  ist im allgemeinen aber weder injektiv, noch surjektiv. Exemplarisch: Für  $K = \mathbb{F}_2, V = \mathbb{F}_2^2$  liegt die quadratische Form  $q : \mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$  liegt nicht im Bild vom  $\Phi$ .

Für den Rest dieses Abschnittes sei  $K$  stets ein Körper mit  $\text{char } K \neq 2$

**Definition 21.4 (Quadratischer Raum)** Ein **quadratischer Raum** ist ein Paar  $(V, \gamma)$ , bestehend aus endlichdimensionalem K-VR  $V$  und einer symmetrischen Bilinearform  $\gamma$  auf  $V$ .  $v, w \in V$  heißen **orthogonal** bezüglich  $\gamma \iff \gamma(v, w) = 0$ .  $(v_i)_{i \in I}$  Familie von Vektoren aus  $V$  heißt orthogonal bezüglich  $\gamma \iff \gamma(v_i, v_j) = 0 \forall i, j \in I, i \neq j$ . Eine Familie  $(v_1, \dots, v_n)$  von Vektoren aus  $V$  heißt eine **Orthogonalbasis** (OB) von  $(V, \gamma) \iff (v_1, \dots, v_n)$  ist eine Basis von  $V$  und ist orthogonal bezüglich  $\gamma$ .

**Anmerkung** • Ist  $\gamma$  aus dem Kontext klar, wird es auch häufig weggelassen.

- Ist  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$ , dann gilt  $\mathcal{B}$  OB von  $(V, \gamma) \iff M_{\mathcal{B}}(\gamma)$  ist eine Diagonalmatrix.

**Definition 21.5**  $(V, \gamma_v), (W, \gamma_w)$  quadratische Räume,  $f : V \rightarrow W$  lineare Abbildung.  $f$  heißt **Homomorphismus quadratischer Räume**  $\iff$

$$\gamma_w(f(v_1), f(v_2)) = \gamma_v(v_1, v_2) \forall v_1, v_2 \in V$$

$f$  heißt **Isomorphismus quadratischer Räume**  $\iff f$  ist ein Isomorphismus von  $K$ -VR und ein Homomorphismus quadratischer Räume. Notation: Wir schreiben häufig  $f : (V, \gamma_v) \rightarrow (W, \gamma_w)$  für Abbildungen / Homomorphismen quadratischer Räume.

**Anmerkung** Ist  $f : (V, \gamma_v) \rightarrow (W, \gamma_w)$  ein Isomorphismus quadratischer Räume, dann ist  $f^{-1} : (W, \gamma_w) \rightarrow (V, \gamma_v)$  ebenfalls ein Isomorphismus quadratischer Räume, und es ist  $\text{Rang}(\gamma_v) = \text{Rang}(\gamma_w)$  (nachrechnen...)

**Ziel:** Klassifiziere quadratische Räume bis auf Isomorphie quadratischer Räume.

**Satz 21.6**  $(V, \gamma)$  quadratischer Raum. Dann besitzt  $(V, \gamma)$  eine OB.

**Beweis** per Induktion nach  $n = \dim V$ .

IA:  $n = 0$ : leere Familie ist OB.

IS: Sei  $n \geq 1$

1. Fall:  $\gamma(v, v) = 0 \forall v \in V$

$$\implies \forall v, w \in V : 0 = \gamma(v + w, v + w) = \gamma(v, v) + \gamma(w, w) + 2\gamma(v, w) = 2\gamma(v, w)$$

$$\implies \gamma(v, w) = 0 \forall v, w \in V \implies \text{Jede Basis von } V \text{ ist OB von } (V, \gamma)$$

2.  $\exists v_1 \in V : \gamma(v_1, v_1) \neq 0$ . Sei  $\Gamma : V \rightarrow V^*, v \mapsto \gamma(v, \cdot)$  die zu  $\gamma$  gemäß 20.10 gehörige lineare Abbildung. Setze  $H = \ker(\Gamma(v_1)) = \{w \in V \mid \gamma(v_1, w) = 0\}$

$$\implies \dim H = \dim V - \underbrace{\dim \text{im}(\Gamma(v_1))}_{\leq K \text{ beachte: } \Gamma(v_1) \in V^*} \in \{n, n-1\}$$

Es ist  $v_1 \notin H$  wegen  $\gamma(v_1, v_1) \neq 0 \implies \dim H = n-1 \implies V = \text{Lin}((v_1)) \oplus H$ .  $(H, \gamma|_{H \times H})$  ist ein quadratischer Raum der Dimension  $n-1$ . Wegen IV existiert eine OB  $(v_2, \dots, v_n)$  von  $(H, \gamma|_{H \times H}) \implies (v_1, v_2, \dots, v_n)$  ist OB von  $(V, \gamma)$   $\square$

**Folgerung 21.7**  $A \in M(n \times n, K)$  symmetrisch. Dann existiert  $T \in \text{GL}(n, K)$ , sodass  $T^T A T$  eine Diagonalmatrix.

**Beweis**  $A$  definiert eine symmetrische Bilinearform  $\Delta(A) = \Delta_A^{(e_1, \dots, e_n)}$  auf  $K^n$  (vergleiche 20.7,  $\Delta(A)(v, w) = v^T A w$ ). Nach 21.6 existiert eine OB  $\mathcal{B}$  von  $(K^n, \Delta(A)) \implies M_{\mathcal{B}}(\Delta(A))$  ist Diagonalmatrix, und es ist

$$M_{\mathcal{B}}(\Delta(A)) = \underbrace{\left(T_{(e_1, \dots, e_n)}^{\mathcal{B}}\right)^T}_{=: T^T} \underbrace{M_{(e_1, \dots, e_n)}(\Delta(A))}_A \underbrace{T_{(e_1, \dots, e_n)}^{\mathcal{B}}}_{=: T} \quad \square$$

**Folgerung 21.8**  $(V, \gamma)$  quadratischer Raum,  $n = \dim V$ ,  $r = \text{Rang}(\gamma)$ . Dann existieren  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K \setminus \{0\}$  und ein Isomorphismus von quadratischen Räumen

$$\Phi : \left( K^n, \Delta \left( \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \right) \right) \rightarrow (V, \gamma)$$

**Beweis** Wegen 21.6 existiert eine OB  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $(V, \gamma)$ . Nach Umordnung von  $v_1, \dots, v_n$  sei  $\gamma(v_i, v_i) \neq 0$  für  $i = 1, \dots, s$  und  $\gamma(v_i, v_i) = 0$  für  $i = s+1, \dots, n$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_s & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_s \in K \setminus \{0\}, r = \text{Rang}(\gamma) = \text{Rang } M_{\mathcal{B}}(\gamma) = s$$

Setze  $\Phi := \Phi_{\mathcal{B}} : K^n \rightarrow V, e_i \mapsto v_i$  (Koordinatensystem zu  $\mathcal{B}$ , vergleiche 15.2).  $\Phi$  ist Isomorphismus

$$\begin{aligned} \gamma(\Phi_{\mathcal{B}}(v), \Phi_{\mathcal{B}}(w)) &= \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(\Phi_{\mathcal{B}}(v))^T M_{\mathcal{B}}(\gamma) \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(\Phi_{\mathcal{B}}(w)) = v^T M_{\mathcal{B}}(\gamma) w \\ &= v^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} w = \Delta \left( \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{pmatrix} \right) (v, w) \quad \square \end{aligned}$$

**Anmerkung**  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  sind im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

**Frage:** Kann man über speziellen Körpern mehr sagen? Wir werden  $K = \mathbb{C}, \mathbb{R}$  untersuchen.

**Satz 21.9**  $(V, \gamma)$  quadratischer Raum über  $\mathbb{C}$ ,  $n = \dim V$ ,  $r = \text{Rang } \gamma$ . Dann existiert eine Orthogonalbasis  $\mathcal{B}$  von  $(V, \gamma)$  mit

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Insbesondere existiert ein Isomorphismus quadratischer Räume  $\Phi \left( \mathbb{C}^n, \Delta \left( \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right) \rightarrow (V, \gamma)$

**Beweis** Sei  $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$  eine Orthogonalbasis von  $(V, \gamma)$ . Setze

$$v_i := \begin{cases} \tilde{v}_i & \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)}} \tilde{v}_i & \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) \neq 0 \end{cases}$$

Hierbei ist  $\sqrt{\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)}$  eine komplexe Zahl  $\alpha$  mit  $\alpha^2 = \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)$ . Falls  $\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) \neq 0$ , dann ist

$$\gamma(v_i, v_i) = \gamma\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)}}, \frac{1}{\sqrt{\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)}}\right) = \frac{1}{\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)} \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) = 1$$

Außerdem:  $\gamma(v_i, v_j) = 0 \forall i \neq j$ , da  $\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) = 0 \forall i \neq j$ . Setze  $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_n)$ . Nach eventueller Umnummerierung von  $v_1, \dots, v_n$  ist

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei  $r = \text{Rang } M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \text{Rang } \gamma$ . □

**Folgerung 21.10**  $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$  symmetrisch,  $r = \text{Rang } A$ . Dann existiert ein  $T \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ , sodass

$$T^T A T = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Folgerung 21.11 (21.11)**  $(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$  quadratische Räume über  $\mathbb{C}$ . Dann sind äquivalent:

1. Es gibt einen Isomorphismus quadratischer Räume  $(V, \gamma_V) \rightarrow (W, \gamma_W)$
2.  $\dim V = \dim W$  und  $\text{Rang } \gamma_V = \text{Rang } \gamma_W$

**Beweis** 1.  $\implies$  2. vergleiche Anmerkung nach 21.5

2.  $\implies$  1. Sei  $n = \dim V = \dim W, r = \text{Rang } \gamma_V = \text{Rang } \gamma_W$ .  $\implies (V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$  sind als quadratische Räume isomorph zu  $\left(\mathbb{C}^n, \Delta\left(\begin{pmatrix} E_r \\ \end{pmatrix}\right)\right)$ , also auch  $(V, \gamma_V) \cong (W, \gamma_W)$

□

**Definition 21.12**  $(V, \gamma)$  quadratischer Raum,  $U_1, \dots, U_m \subseteq V$  UVR mit  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$ . Die direkte Summe heißt **orthogonale direkte Summe**

$$(V = U_1 \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} U_m) \stackrel{\text{Def}}{\iff} \gamma(u_i, u_j) = 0 \forall u_i \in U_i, u_j \in U_j, i \neq j$$

alternativ  $\oplus$

**Satz 21.13**  $(V, \gamma)$  quadratischer Raum über  $\mathbb{R}$ ,  $n = \dim V$ . Dann existiert eine Orthogonalbasis  $\mathcal{B}$  von  $(V, \gamma)$ , sowie  $r_+, r_- \in \{0, \dots, \dim V\}$  mit

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Insbesondere existiert ein Isomorphismus quadratischer Räume

$$\left( \mathbb{R}^n, \Delta \left( \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right) \right) \rightarrow (V, \gamma)$$

Die Zahlen  $r_+, r_-$  sind unabhängig von der Wahl einer solchen Basis. Wir nennen  $\text{Signatur}(\gamma) := (r_+, r_-)$  heißt die **Signatur** von  $\gamma$ .

**Beweis** 1. Sei  $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$  eine Orthogonalbasis von  $(V, \gamma)$ . Wir setzen

$$v_i := \begin{cases} \tilde{v}_i & \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)|}} \tilde{v}_i & \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) \neq 0 \end{cases}$$

Falls  $\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) \neq 0$ , dass ist

$$\begin{aligned} \gamma(v_i, v_i) &= \gamma\left(\frac{1}{\sqrt{|\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)|}} \tilde{v}_i, \frac{1}{\sqrt{|\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)|}} \tilde{v}_i\right) \\ &= \frac{1}{|\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)|} \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) \in \{\pm 1\} \end{aligned}$$

$\gamma(v_i, v_j) = 0$  für  $i \neq j$ . Setze  $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_n)$ . Nach eventueller Umnummerierung von  $v_1, \dots, v_n$  ist

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ 1 & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

mit geeigneten  $r_+, r_- \in \{0, \dots, n\}$

2.  $r_+, r_-$  sind basisunabhängig: Es ist  $r_+ + r_- = \text{Rang } \gamma$ , dies ist basisunabhängig. Es gilt zu zeigen:  $r_+$  ist basisunabhängig. Setze  $V_+ := \text{Lin}((v_1, \dots, v_{r_+}))$ ,  $V_- = \text{Lin}((v_{r_++1}, \dots, v_{r_++r_-}))$ ,  $V_0 := \text{Lin}((v_{r_++r_-+1}, \dots, v_n)) \implies V = V_+ \hat{\oplus} V_- \hat{\oplus} V_0$ . Setze

$$s := \max\{\dim W \mid W \subseteq V \text{ UVR mit } \gamma(w, w) > 0 \forall w \in W, w \neq 0\}$$

dies ist wohldefiniert.  $V_+$  ist ein UVR von  $V$  mit  $\gamma(w, w) > 0 \forall w \in V_+, w \neq 0$ , denn für  $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{r_+} v_{r_+}$  ist

$$\gamma(w, w) = \lambda_1^2 \underbrace{\gamma(v_1, v_1)}_{=1} + \dots + \lambda_{r_+}^2 \underbrace{\gamma(v_{r_+}, v_{r_+})}_{=1} = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_{r_+}^2 > 0 \text{ falls } w \neq 0$$

$\implies s \geq \dim V_+ = r_+$  Annahme: Es existiert ein UVR  $W \subseteq V$  mit  $\gamma(w, w) > 0 \forall w \in W, w \neq 0$  und  $\dim W > r_+$

$$\implies \underbrace{\dim W}_{> r_+} + \underbrace{\dim V_-}_{= r_-} + \underbrace{\dim V_0}_{n - (r_+ + r_-)} > n$$

$$\begin{aligned} \implies \dim(W \cap (V_- \hat{\oplus} V_0)) &= \dim W + \dim(V_- \hat{\oplus} V_0) - \dim(W + (V_- \hat{\oplus} V_0)) \\ &= \underbrace{\dim W + \dim V_- + \dim V_0}_{> n} - \underbrace{\dim(W + (V_- \hat{\oplus} V_0))}_{\leq n, \text{ da } W + (V_- \hat{\oplus} V_0) \text{ UVR von } V} \\ &\implies 0 \end{aligned}$$

$\implies$  Es existiert  $w \in W, w \neq 0$  mit  $w \in W_- \hat{\oplus} V_0$ .

$\implies$  Es existiert  $w_- \in V_-, w_0 \in V_0$  mit  $w = w_- + w_0$

$\implies \gamma(w, w) = \gamma(w_- + w_0, w_- + w_0) = \underbrace{\gamma(w_-, w_-)}_{< 0} + \underbrace{\gamma(w_0, w_0)}_{= 0} < 0$  Andererseits:

$\gamma(w, w) > 0$  wegen  $w \in W, w \neq 0$ . Somit:  $r_+ = s$ , insbesondere unabhängig von Basiswahl.  $\square$

**Folgerung+Definition 21.14 (Sylvesterscher Trägheitssatz)**  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$  symmetrisch. Dann existieren  $T \in \text{GL}(n, \mathbb{R}), r_+, r_- \in \{0, \dots, n\}$  mit

$$T^T A T = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Die Zahlen  $r_+, r_-$  sind unabhängig von der Wahl eines solchen  $T$ .  $\text{Signatur}(A) := (r_+, r_-)$  heißt **Signatur** von  $A$ .

**Beweis** folgt aus 21.13 (analog zum Beweis von 21.7).  $\square$

**Anmerkung** Ist  $S \in GL(n, \mathbb{R})$ , dann haben die Matrixen  $A$  und  $S^T A S$  diesselbe Signatur, denn: Ist  $\tilde{T} \in GL(r, \mathbb{R})$  mit

$$\tilde{T}^T (S^T A S) \tilde{T} = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

, dann ist

$$(S\tilde{T})^T A (S\tilde{T}) = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

**Folgerung 21.15**  $(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$  quadratische Räume über  $\mathbb{R}$ . Dann sind äquivalent:

1. Es gibt einen Isomorphismus quadratischer Räume  $(V, \gamma_V) \rightarrow (W, \gamma_W)$
2.  $\dim V = \dim W$  und  $\text{Signatur}(\gamma_V) = \text{Signatur}(\gamma_W)$

**Beweis** 1.  $\implies$  2. Für  $\text{Signatur}(\gamma_V) = \text{Signatur}(\gamma_W)$  verwende Charakterisierung von  $r_+$  aus dem Beweis von 21.3.

2.  $\implies$  1. aus 21.13, analog zum Beweis von 21.11 □

**Anmerkung** Man kann Folgerung 21.11/21.15 verwenden, um quadratische Formen über  $\mathbb{C}$  beziehungsweise  $\mathbb{R}$  bis auf Äquivalenz zu klassifizieren (vergleiche Übungen)

## 22 Euklidische Räume

**Definition 22.1**  $V$   $\mathbb{R}$ -VR,  $\gamma : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  symmetrische Bilinearform.  $\gamma$  heißt

- **positiv definit**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff} \gamma(v, v) > 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$
- **positiv semidefinit**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff} \gamma(v, v) \geq 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$
- **negativ definit**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff} \gamma(v, v) < 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$
- **negativ semidefinit**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff} \gamma(v, v) \leq 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$
- **\*indefinit**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff} \gamma$  ist weder positiv noch negativ semidefinit.

Eine positiv definite symmetrische Bilinearform nennt man auch ein **Skalarprodukt**.

**Beispiel 22.2**

1.  $V = \mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$  ist ein

Skalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Positiv Definitheit:

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0, \text{ falls } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$$



$\langle \cdot, \cdot \rangle$  heißt das **Standardskalarprodukt** auf dem  $\mathbb{R}^n$ .

2.  $V = \mathcal{C}[0, 1]$

$$\gamma : \mathcal{C}[0, 1] \times \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

ist ein Skalarprodukt.

**Anmerkung** Um die Definitheit einer symmetrischen Bilinearform nachzuweisen, genügt es nicht, das Verhalten auf den Basisvektoren zu untersuchen: Sei  $\gamma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\gamma = \Delta \left( \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

das heißt

$$M_{(e_1, e_2)}(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist  $\gamma(e_1, e_1) = 1, \gamma(e_2, e_2) = 1$  aber

$$\gamma \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 < 0$$

das heißt  $\gamma$  ist indefinit.

**Definition 22.3** Ein **Euklidischer Raum** ist ein Paar  $(V, \gamma)$ , bestehend aus einem endlichdimensionalen  $\mathbb{R}$ -VR  $V$  und einem Skalarprodukt  $\gamma$  auf  $V$ . Für den Rest dieses Abschnittes sei  $(V, \gamma)$  ein Euklidischer Raum.

**Definition 22.4**  $v \in V$

$$\|v\| := \sqrt{\gamma(v, v)}$$

heißt die **Norm** auf  $V$ .

$(v_i)_{i \in I}$  Familie von Vektoren aus  $V$  heißt **orthonormal**  $\stackrel{\text{Def}}{\iff} (v_i)_{i \in I}$  ist orthogonal und  $\|v_i\| = 1 \forall i \in I$ .

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  heißt **Orthonormalbasis** von  $V((V, \gamma))$  (ONB)  $\iff \mathcal{B}$  ist Basis von  $V$  und  $\mathcal{B}$  ist orthonormal.

**Bemerkung 22.5**  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  Orthonormalbasis von  $(V, \gamma), v \in V$ . Dann gilt: Ist  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ , dann ist  $\lambda_i = \gamma(v, v_i) \forall i = 1, \dots, n$

**Beweis**  $\gamma(v, v_i) = \lambda_1 \gamma(v_1, v_i) + \dots + \lambda_n \gamma(v_n, v_i) = \lambda_i \underbrace{\gamma(v_i, v_i)}_{=1} = \lambda_i$  □

**Bemerkung+Definition 22.6**  $U \subseteq V$  Untervektorraum.

$$U^\perp := \{v \in V \mid \gamma(v, u) = 0 \forall u \in U\}$$

heißt das **orthogonale Komplement** zu  $U$ .  $U^\perp$  ist ein Untervektorraum von  $V$ .

**Beweis** leicht nachzurechnen □

**Satz+Definition 22.7**  $U \subseteq V$  Untervektorraum. Dann gilt:

1.  $V = U \oplus U^\perp$
2.  $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$
3.  $(U^\perp)^\perp = U$
4. Ist  $(u_1, \dots, u_m)$  eine Orthogonalbasis von  $(U, \gamma|_{U \times U})$ , und ist  $v \in V$  mit  $v = u + v', u \in U, v' \in U^\perp$ , dass ist

$$u = \sum_{j=1}^m \gamma(v, u_j) u_j$$

Die lineare Abbildung

$$\pi_u : V \rightarrow U, v \mapsto \sum_{j=1}^m \gamma(v, u_j) u_j$$

heißt die **Orthogonalprojektion** von  $V$  auf  $U$ .

**Beweis** 1.  $U + U^\perp = V$ , denn:

Sei  $(u_1, \dots, u_m)$  eine Orthogonalbasis von  $(U, \gamma|_{n \times n})$ ,  $v \in V$ . Setze

$$v' := v - \sum_{j=1}^m \gamma(v, u_j) u_j$$

$$\Rightarrow \gamma(v', u_i) = \gamma(v, u_i) - \sum_{j=1}^m \gamma(v, u_j) \gamma(u_j, u_i) = \gamma(v, u_i) - \gamma(v, u_i) = 0 \forall i = 1, \dots, m$$

$$\Rightarrow v' \in U^\perp$$

$$\Rightarrow v = \underbrace{\sum_{j=1}^m \gamma(v, u_j) u_j}_{\in U} + \underbrace{v'}_{\in U^\perp}$$

$$\Rightarrow V = U + U^\perp$$

$$U \cap U^\perp = \{0\}, \text{ denn: } u \in U \cap U^\perp \Rightarrow \gamma(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ (da } \gamma \text{ Skalarprodukt)}$$

2. aus 1., 2.

3. Sei  $u \in U \Rightarrow \gamma(u, w) = 0 \forall w \in U^\perp \Rightarrow u \in (U^\perp)^\perp$ , das heißt  $U \subseteq U^{\perp\perp}$ . Wegen  $\dim(U^\perp)^\perp = \dim V - \dim U^\perp = \dim V - (\dim V - \dim U) = \dim U$  folgt  $U = U^{\perp\perp}$

□

**Anmerkung** Insbesondere gilt für alle  $v \in V : v - \pi_U(v) \in U^\perp$

**Beispiel 22.8**

$(V, \gamma) = (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle), U = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \implies U^\perp = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ , denn  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U^\perp$

wegen  $\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$ , und es gilt  $\dim U^\perp = 2 - \dim U = 2 - 1 = 1$ . Jedes Element aus  $V$  lässt sich eindeutig schreiben als

$$v = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

das heißt

$$\pi_U : v = \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in U^\perp} \mapsto \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \gamma\left(v, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \vec{1}$$

**Frage:** Wie bestimmt man explizit eine Orthogonalbasis eines Euklidischen Raumes?

**Algorithmus 22.9 (Gram-Schmidt-Verfahren)** **Eingabe:**  $(v_1, \dots, v_n)$  Basis von  $V$ .

**Ausgabe:** Orthogonalbasis  $(w_1, \dots, w_n)$  von  $(V, \gamma)$

**Durchführung:**

1. Setze

$$w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

2. Setze für  $k = 2, \dots, n$

$$\tilde{w}_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \gamma(v_k, w_i) w_i, \quad w_k := \frac{\tilde{w}_k}{\|\tilde{w}_k\|}$$

3.  $(w_1, \dots, w_n)$  ist eine Orthogonalbasis von  $(V, \gamma)$

**Beweis** Sei  $U_k := \text{Lin}((v_1, \dots, v_k))$  für  $k = 1, \dots, n$ . Wir zeigen per Induktion nach  $k$ , dass  $(w_1, \dots, w_k)$  eine Orthogonalbasis von  $(U_k, \gamma|_{U_k \times U_k})$  ist (Behauptung folgt dann aus  $k = n$ ).

Induktionsanfang:  $k = 1$  klar

Induktionsschritt: Sei  $\pi_{k-1} := \pi_{U_{k-1}} : V \rightarrow U_{k-1}$  die orthogonale Projektion.

$$\implies \tilde{w}_k = v_k - \pi_{k-1}(v_k)$$

da  $(w_1, \dots, w_{k-1})$  Orthogonalbasis von  $U_{k-1}$  nach Induktionsvoraussetzung.  $\implies \tilde{w}_k \in U_{k-1}^\perp$ .  
Außerdem  $\tilde{w}_k \neq 0$ , da sonst  $v_k = \pi_{k-1}(v_k) \in U_{k-1}$  zu  $(v_1, \dots, v_k)$  Basis von  $U_{k-1}$

$$\implies w_k = \frac{\tilde{w}_k}{\|\tilde{w}_k\|} \in U_{k-1}^\perp$$

und es ist

$$\gamma(w_k, w_i) = \begin{cases} 0 & i = 1, \dots, k-1 \\ 1 & i = k \end{cases}$$

$\implies (w_1, \dots, w_k)$  Orthogonalbasis von  $U_k$

□

**Beispiel 22.10**

Wir betrachten  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ,  $U = \text{Lin}((v_1, v_2))$  mit  $v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Gesucht ist

eine Orthogonalbasis von  $U$  bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Setze

$$w := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_2 &= v_2 - \langle v_2, w \rangle w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \text{ ist eine Orthogonalbasis von } U.$$

**Definition 22.11**  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$  symmetrisch.  $A$  heißt **positiv definit** (Notation:  $A > 0$ )  $\stackrel{\text{Def}}{\iff}$  Die symmetrische Bilinearform

$$\Delta(A) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^T A y$$

ist positiv definit.

**Bemerkung 22.12**  $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$  symmetrisch. Das sind äquivalent:

1.  $A > 0$
2.  $\exists T \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) : A = T^T T$

**Beweis** 1.  $\Rightarrow$  2. Sei  $A > 0 \Rightarrow (\mathbb{R}^n, \Delta(A))$  Euklidischer Raum. Sei  $\mathcal{B}$  Orthogonalbasis von  $(\mathbb{R}^n, \Delta(A))$   $T := T_{\mathcal{B}}^{(e_1, \dots, e_n)}$

$$\Rightarrow E_n = M_{\mathcal{B}}(\Delta(A)) = \underbrace{\left( T_{(e_1, \dots, e_n)}^{\mathcal{B}} \right)^T}_{=(T^{-1})^T} \underbrace{M_{(e_1, \dots, e_n)}(\Delta(A))}_{=A} \underbrace{T_{(e_1, \dots, e_n)}^{\mathcal{B}}}_{=T^{-1}}$$

$$\Rightarrow A = T^T T$$

2. Sei  $A = T^T T$  für ein  $T \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ . Für  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$  ist

$$\Delta(A)(x, x) = x^T A x = x^T T^T T x = (Tx)^T T x = \langle Tx, Tx \rangle > 0$$

□

**Anmerkung** 1., 2. sind äquivalent zu

3. Es existiert eine obere Dreiecksmatrix  $P$  mit Diagonaleinträgen, sodass  $A = P^T P$  (siehe Übungen). Obiges  $P$  ist sogar eindeutig bestimmt, eine solche Zerlegung heißt Cholesky-Zerlegung.

**Satz 22.13 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)**  $v, w \in V$ . Dann gilt:

$$|\gamma(v, w)| \leq \|v\| \|w\|$$

Gleichheit gilt hierbar genau dann, wenn  $(v, w)$  linear abhängig.

**Beweis** 1. Beweis der Ungleichung: Falls  $w = 0$ , dass fertig. Im Folgenden sei  $w \neq 0$ . Für  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ist

$$0 \leq \gamma(\lambda v + \mu w, \lambda v + \mu w) = \lambda^2 \gamma(v, v) + \mu^2 \gamma(w, w) + 2\lambda\mu \gamma(v, w)$$

Setze  $\lambda := \gamma(w, w) > 0$ , dividiere durch  $\lambda$

$$0 \leq \gamma(v, v) \gamma(w, w) + \mu^2 + 2\mu \gamma(v, w)$$

Setze  $\mu := -\gamma(v, w)$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \gamma(v, v) \gamma(w, w) + \gamma(v, w)^2 - 2\gamma(v, w)^2 \\ \gamma(v, w)^2 &\leq \gamma(v, v) \gamma(w, w) \\ |\gamma(v, w)| &\leq \|v\| \|w\| \end{aligned}$$

2. Gleichheitsaussage: Für  $w \neq 0$ :  $(v, w)$  linear abhängig und „ $=$ “ gilt. Ab jetzt also  $w \neq 0$ .

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $(v, w)$  linear abhängig  $\implies \exists \lambda \in K : v = \lambda w$

$$\implies |\gamma(v, w)|^2 = |\gamma(\lambda w, w)|^2 = |\lambda|^2 |\gamma(w, w)|^2 = |\gamma(w, w)| |\gamma(\lambda w, \lambda w)| = \|w\|^2 \|\lambda w\|^2$$

$$\implies |\gamma(v, w)| = \|w\| \|\lambda w\| = \|w\| \|v\|.$$

„ $\implies$ “ Es gelte, sei also  $|\gamma(v, w)| = \|v\| \|w\|$ . Führe die Rechnung wie in 1. rückwärts durch:

Mit  $\lambda := \gamma(w, w)$ ,  $\mu = -\gamma(v, w)$  folgt dass

$$\gamma(\lambda v + \mu w, \lambda v + \mu w) = 0 \implies \lambda v + \mu w = 0 \implies (v, w) \text{ linear abhängig} \quad \square$$