

# Experimentalphysik III (Oberthaler)

Robin Heinemann

24. Oktober 2017

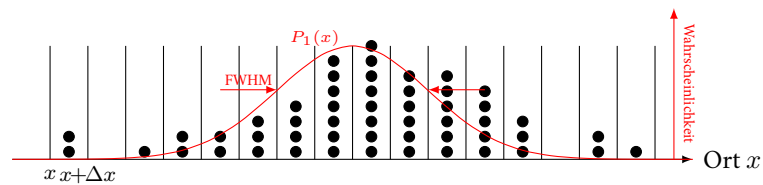
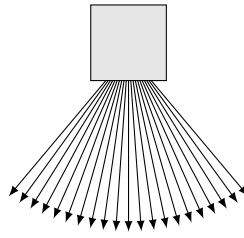
## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorspann</b>	<b>1</b>
1.1	Ein Experiment mit klassischen Teilchen . . . . .	1
1.2	Ein Experiment mit klassischen Wellen . . . . .	2
1.3	Ein Experiment mit Elektronen/Atomen . . . . .	4
1.4	Zusammenfassung . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Materiewellen</b>	<b>7</b>
2.1	Historische Herleitung von de Broglie . . . . .	7
2.2	Wie sieht die Materiewelle aus? . . . . .	9
2.3	Das Wellenpaket - physikalische Wellenfunktion durch Überlagerung (Superposition von ebenen Wellen) . . . . .	10

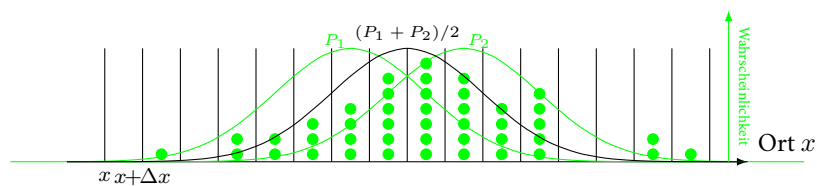
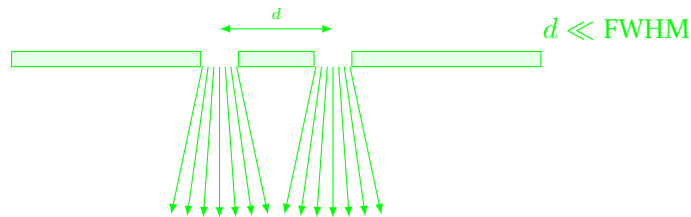
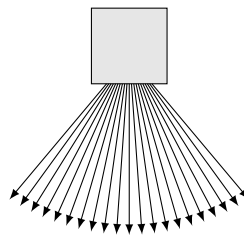
## 1 Vorspann

### 1.1 Ein Experiment mit klassischen Teilchen

1. Fall: Quelle von nicht weiter zerteilbaren Teilchen mit zufälliger Richtung. Es werden die Anzahl der Teilchen auf einem Raster  $x$  mit Gitterkonstante  $\Delta x$  gemessen. Dann werden in der Mitte die meisten Teilchen ankommen. Die diskrete Verteilung kann mit einer kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben werden. Die wichtigen Größen sind hier die Position der maximalen Wahrscheinlichkeit und die Breite (FWHM - full width half maximum)



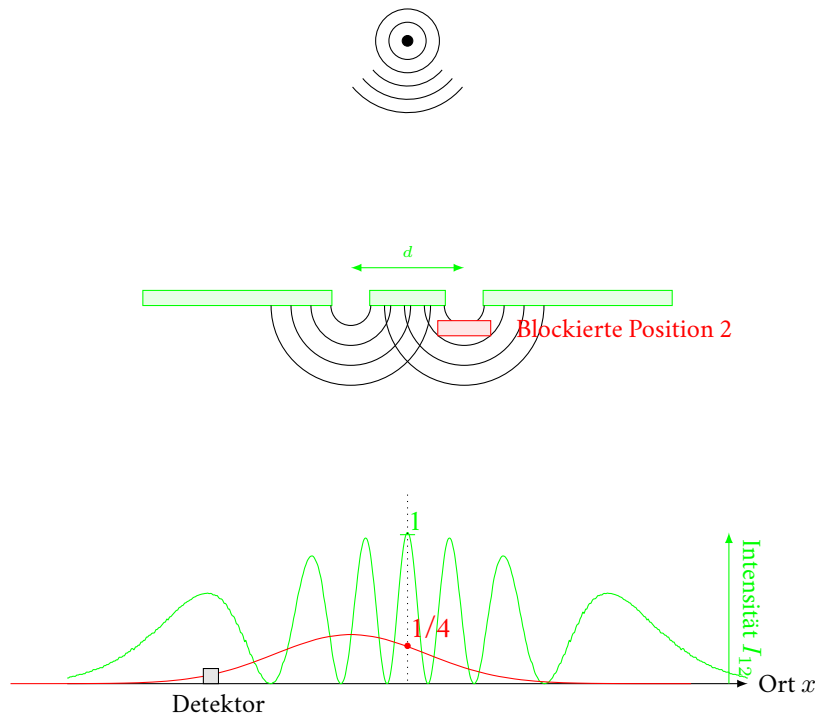
2. Fall: 2 Quellen (mittels Doppelspalt der Breite  $d$ ,  $d \ll \text{FWHM}$ )



Wichtig: Diskrete Zahlen. Die theoretische Wahrscheinlichkeitsverteilung kann nur annähernd gemessen werden!  
Anzahl der Teilchen  $\rightarrow \infty \Rightarrow P_1(x)$ .

## 1.2 Ein Experiment mit klassischen Wellen

Quelle sendet Kugelwellen aus (fixe Frequenz, fixe Amplitude), Doppelspalt. Ein Detektor misst Strom  $\propto$  Intensität. Man erhält das Intensitätsmuster  $I_{12}$  eines Doppelspalts. Bei blockieren eines der Öffnungen des Doppelspalt erhält man einen Einzelspalt und somit nur noch das Intensitätsmuster eines Einzelspalts, mit Maximum bei dem nicht blockierten Spalt. Wichtig: Intensität ist kontinuierlich  $I_{12}$  kann genau gemessen werden.



Warum hat  $I_{12}$  die angegebene Form?

$$I(x) = c\epsilon_0 \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E(x, t) dt$$

$$E(x, t) = E_1 \cos(\omega t + \vec{k} \vec{R}_1) + E_2 \cos(\omega t + \vec{k} \vec{R}_2)$$

mit Hilfe von komplexer Schreibweise

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \Re\{E_1 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{R}_1)} + E_2 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{R}_2)}\} \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &\quad \text{reell} \qquad \qquad \text{reell} \\ &= \Re\left\{ \underbrace{E_1 e^{-i(\vec{k} \vec{R}_1)}}_{a_1} + \underbrace{E_2 e^{-i\vec{k} \vec{R}_2}}_{a_2} \right\} e^{i\omega t} \\ \Rightarrow I_{12}(x) &\propto |a_1 + a_2|^2 \end{aligned}$$

Wir interessieren uns nur für  $x$ -Abhängigkeit, nicht für absolute Werte

$$\begin{aligned} I_{12}(x) \propto |a_1 + a_2|^2 &= (a_1^* + a_2^*)(a_1 + a_2) \\ &= |a_1|^2 + |a_2|^2 + a_1^* a_2 + a_2^* a_1 \\ |a_1|^2 &= E_1 e^{ikR_1} E_1 e^{-ikR_1} = E_1^2 \sim I_1 \\ |a_2|^2 &= E_2 e^{ikR_2} E_2 e^{-ikR_2} = E_2^2 \sim I_2 \\ a_1^* a_2 + a_2^* a_1 &= a_1^* a_2 + \text{c. c.} \\ &= 2\Re\{a_1^* a_2\} = 2\Re\{E_1 E_2 e^{ik(\vec{R}_2 - \vec{R}_1)}\} \\ &= 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\underbrace{\vec{k}(\vec{R}_2 - \vec{R}_1)}_{\phi}\right) \\ \Rightarrow \boxed{I_{12} &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \phi} \end{aligned}$$

Maximale Intensität  $\phi = 0$   $|\vec{R}_1| = |\vec{R}_2|$ . Für  $I_1 = I_2 = I_0$ :

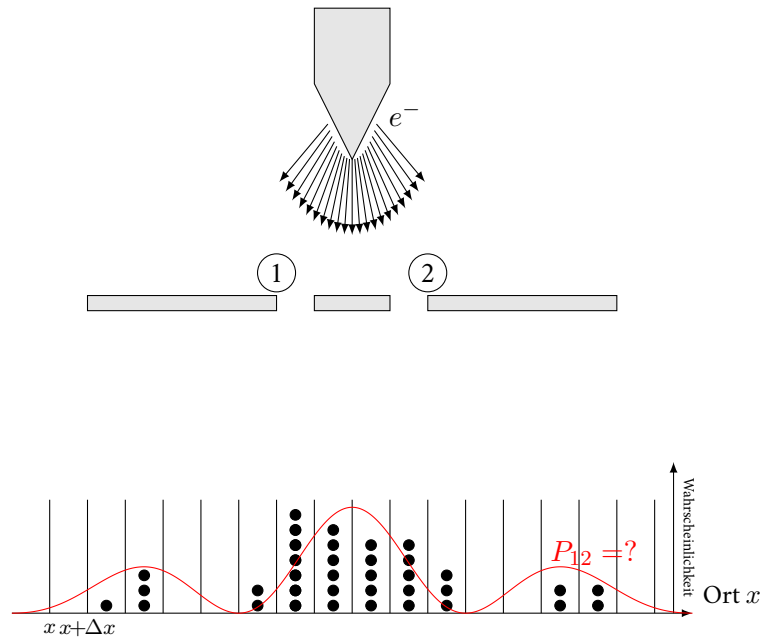
$$I_{\text{MAX}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = 4I_0$$

$$I_{\text{MIN}} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = 0$$

Intensität wird räumlich umverteilt, gesamt Intensität bleibt erhalten

$$I_1 + I_2 = \text{Energieerhaltung}$$

### 1.3 Ein Experiment mit Elektronen/Atomen

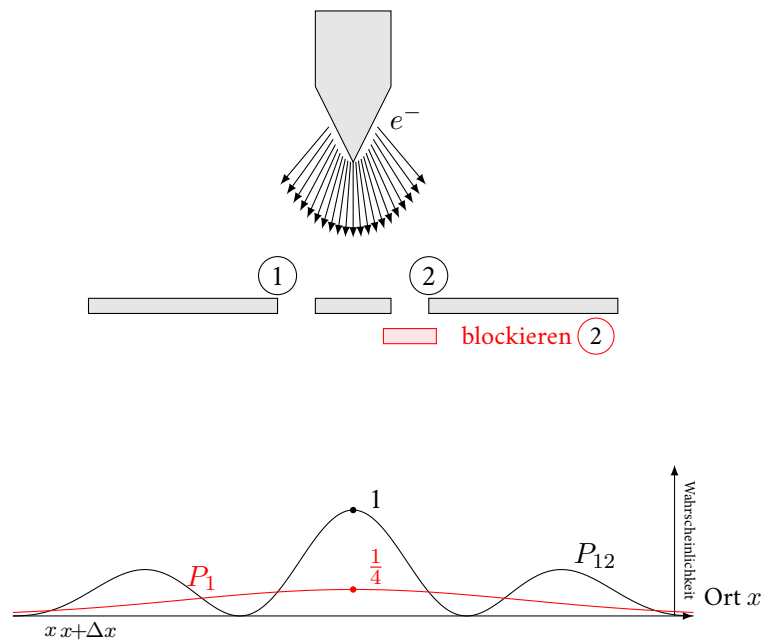


Quelle: Metallspitze aus hohem negativen Potential. Wieder diskrete Detektoren, Messung über Elektronenvervielfacher: durch anliegende Spannung löst ein Elektron aus einer Metallplatte weitere Elektronen aus, die wieder weiter auslösen. Es entsteht ein kurzer Strom-Peak, der gemessen werden kann.

Annahmen:

1. Das Elektron geht entweder durch Blende ①, oder Blende ②
2. Mit „komplizierter“ Dynamik

Einfacher Test für Annahme 2.: Blockieren einer Blende (hier ②). Man würde eine Verteilung ähnlich der mit zwei Blendern erwarten.



Teilchen verschwinden in den Minima bei der  $P_{12}$ , obwohl sie nach der Verteilung für eine Blende auch dort ankommen müssten.

$$\Rightarrow P_{12} \neq \frac{1}{2}\{P_1 + P_2\}$$

Mathematische „einfach“: Einführen der komplexen Wahrscheinlichkeitsamplitude  $\phi$ . Wahrscheinlichkeiten sind gegeben durch

$$P_1 = |\phi_1|^2$$

$$P_2 = |\phi_2|^2$$

$$P_{12} = |\phi_1 + \phi_2|^2$$

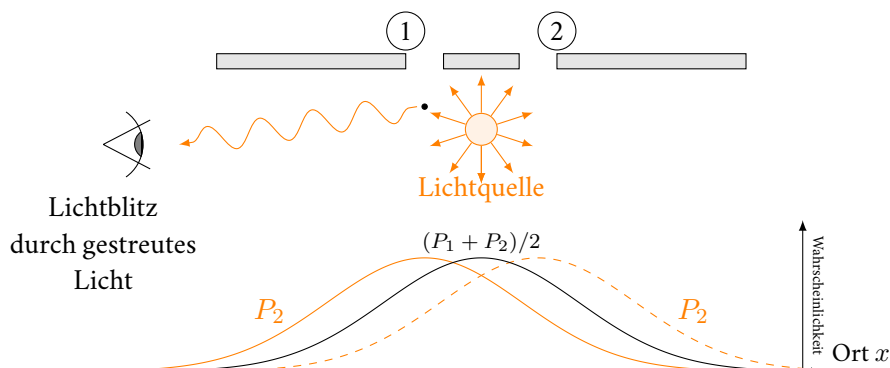
### Wichtig

Elektronen werden einzeln gezählt. Es gibt keine "halben" Elektronen. Wahrscheinlichkeitsverteilung kann nur annähernd gemessen werden.  $P_{12} \hat{=}$  unendlich viele Experimente.

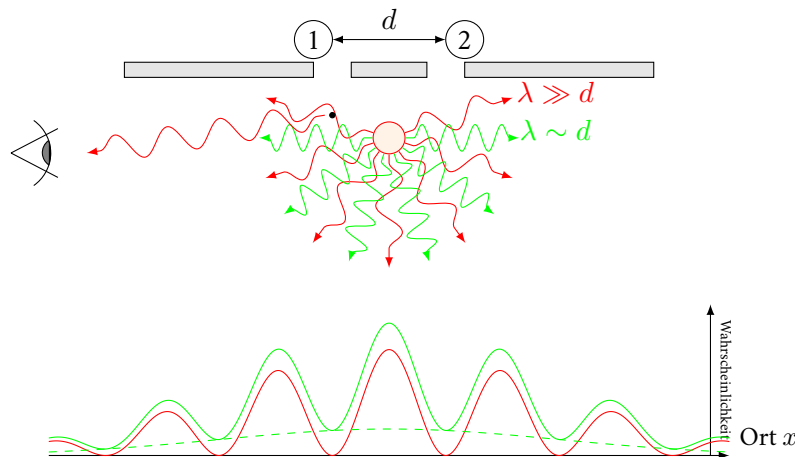
### Welle-Teilchen Dualismus

Elektronen werden nur als Einheiten detektiert, die räumliche Verteilung kann als Interferenz von Wahrscheinlichkeits-Amplituden (komplexes  $\phi$ ) beschrieben werden.

Beobachtung der Elektronen an jedem Spalt.



Es entstehen Lichtblitze durch gestreutes Licht.  $P_1$ : Blitz bei ①,  $P_2$ : Blitz bei ②. Blitz bei ① und ② wird nie beobachtet. Dies bestätigt Annahme ①.



Bei  $\lambda > d$  ist nicht mehr feststellbar, ob das Elektron durch ① oder ② kommt. Bei  $\lambda \sim d$  erhält man eine Überlagerung von  $|\phi_1 + \phi_2|$  und  $\frac{1}{2}(P_1 + P_2)$

Quantenmechanik kann das beschreiben, weil das prinzipiell mögliche Wissen einer physikalischen

## 1.4 Zusammenfassung

Für fundierte Diskussion eines Quantenmechanischen Experiments muss definiert werden

1. Präparation des Anfangszustand
2. Wechselwirkung / Zeitliche Entwicklung
3. Detektion - Was wird beobachtet

Ein **Ereignis** ist definiert als ein spezielles Set von 1. bis 3..

**Beispiel 1.1** Ein  $e^-$  verlässt die Quelle kann nicht alle Orte im Raum erreichen (Blenden),  $e^-$  wird in einem Ortsintervall  $[x, x + \Delta x]$  detektiert.

Vorhersagen nach folgenden Regeln

1. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in einem idealen Experiment ist gegeben als das Quadrat des Absolutbetrages einer im allgemeinen komplexen Wahrscheinlichkeitsamplitude  
 $P \dots$  Wahrscheinlichkeit  
 $\phi \dots$  Wahrscheinlichkeits-Amplitude  
 $P = |\phi|^2 = \phi^* \phi$
2. Wenn ein Ereignis in verschiedener Art und Weise stattfinden kann, dann ist die Wahrscheinlichkeits-Amplitude gegeben als Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeits-Amplituden der Möglichkeiten.

**Beispiel 1.2**  $e^- \rightarrow$  Detektor über

- Blende ①
- Blende ②

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \quad (\text{Superposition})$$

$$P = |\phi|^2 = |\phi_1 + \phi_2|^2$$

3. Kann man die einzelnen Möglichkeiten prinzipiell unterscheiden, addieren sich die Wahrscheinlichkeiten

$$P = (P_1 + P_2)/2$$

## 2 Materiewellen

### 2.1 Historische Herleitung von de Broglie

Ziel:

- Dispersionsrelation für massive Teilchen
- Superpositionen von unphysikalischen Wellen können Natur beschreiben
- Zerlegung in de Broglie-Wellen erlaubt vorhersagen

Louis de Broglie. "XXXV. A tentative theory of light quanta". In: *Philosophical Magazine Series 6* 47.278 (1924), S. 446–458

3 Grundlegende Hypothesen ( $3 \times$  Einstein)

1.  $E = m_0 c^2$  Masse = Energie,  $m_0$ : Ruhemasse,  $c$ : Lichtgeschwindigkeit
2.  $E = h\nu_0$  Photoeffekt,  $h = 6.626\,069\,934(89) \times 10^{-34}$  J s Planck Konstante,  $\nu_0$ : Frequenz
3. Gleichmäßig bewegte Bezugssysteme sind mit Lorentz Transformation verknüpft

Aus 1. und 2. folgt, dass man jedem Teilchen im Ruhesystem eine Frequenz zuordnen kann

$$\nu_0 = \frac{m_0 c^2}{h}$$

Sei  $S$  ein ruhendes Bezugssystem, betrachte ein ruhendes Teilchen ( $v = 0$ ). Man erhält

$$\psi = e^{i\nu_0 2\pi t}$$

Nun betrachte ein bewegtes Bezugssystem  $S'$  mit  $v_x = v$ ,  $v_{y,z} = 0$ . Man erhält

$$\psi = e^{i\nu_0 2\pi t'}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Die Zeit wird ortsabhängig!

$$S' : e^{i2\pi\nu_0 t'}$$

$$S : e^{i2\pi\nu_0 \left( \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right)} = e^{i(\omega_{dB}t - k_{dB}x)}$$

(die de Broglie Welle)

mit

$$\begin{aligned} \omega_{dB} &= \frac{2\pi\nu_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{2\pi}{h} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{E_{\text{gesRuhe}}}{\hbar} \\ \hbar &= \frac{h}{2\pi} \\ \vec{k}_{dB} &= \frac{2\pi\nu_0 \vec{v}}{c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{2\pi}{h} \frac{m_0 c^2 \vec{v}}{c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{\vec{P}_{\text{mel}}}{\hbar} \end{aligned}$$

**nicht relativistischer Limes**  $v \ll c$

$$\omega_{dB} = \frac{1}{\hbar} \left( m_0 c^2 + \frac{m_0 \vec{v}^2}{2} + \dots \right)$$

$$\vec{k}_{dB} = \frac{1}{\hbar} m_0 \vec{v}$$

$$\psi(x, t) = e^{-i(\omega_{dB}t - \vec{k}_{dB} \vec{x})} = e^{i \underbrace{\frac{m_0 \vec{v}^2}{2\hbar} t}_{\omega}} e^{i \underbrace{\frac{m_0 \vec{v}}{\hbar} \vec{x}}_{\vec{k}}} = e^{i \frac{m_0 c^2}{\hbar} t} e^{i \frac{m_0 \vec{v}}{\hbar} \vec{x}}$$

const. hängt nur von der Masse ab

**Materiewelle**

$$\psi(x, t) = e^{-i(\omega t - kx)}$$

mit

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

$$\hbar k = mv$$

Beschreibt ein massives Teilchen mit Masse  $m$ , das sich mit wohldefinierter / scharf definierter Geschwindigkeit  $v \ll c$  bewegt (Impuls Eigenzustand).

Den Zusammenhang  $\omega(k) = f(k)$  nennt man Dispersionsrelation.



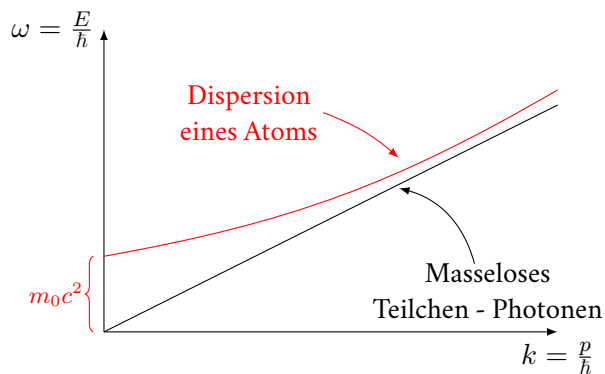
### Wichtig

Unterschied zu elektromagnetischen Wellen im Vakuum:

$$\lambda \nu = c \implies \omega = ck$$

Materiewellen

$$\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2 \text{ (2)}$$





## 2.2 Wie sieht die Materiewelle aus?

$$\begin{aligned}
 t = 0 \quad \psi(x, t = 0) &= e^{ik_{dB}x} \\
 &= \cos(k_{dB}x) + i \sin(k_{dB}x) \\
 k_{dB} &= \frac{2\pi}{\lambda_{dB}} \\
 E &= \frac{\hbar^2 k_{dB}^2}{2m} = \frac{mv^2}{2} \\
 \Rightarrow \lambda_{dB} &= \frac{h}{mv}
 \end{aligned}$$

de Broglie Beziehung

### Größenordnung

Thermisches Gas:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

mittlere Geschwindigkeit

$$\hat{v} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

wahrscheinlichste Geschwindigkeit

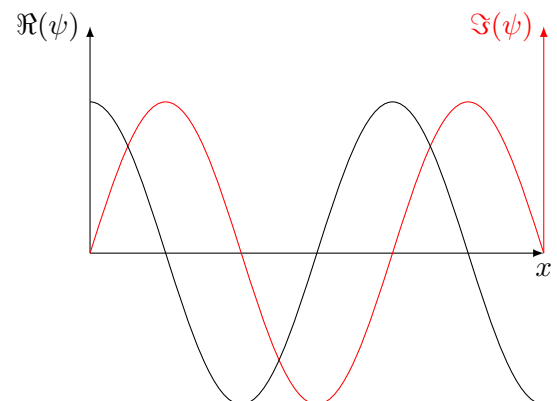
$T$	$\hat{v}$	$\hat{\lambda}_{dB}$
300 K	$\sim 240 \text{ m s}^{-1}$	19 pm
10 $\mu\text{K}$	$\sim 4 \text{ cm s}^{-1}$	0.1 $\mu\text{m}$
10 nK	$\sim 1.4 \text{ cm s}^{-1}$	3.3 $\mu\text{m}$

$$\lambda_{dB} \propto \frac{1}{\sqrt{T}}$$

$\psi(x, t)$  ist ein komplexes Feld:

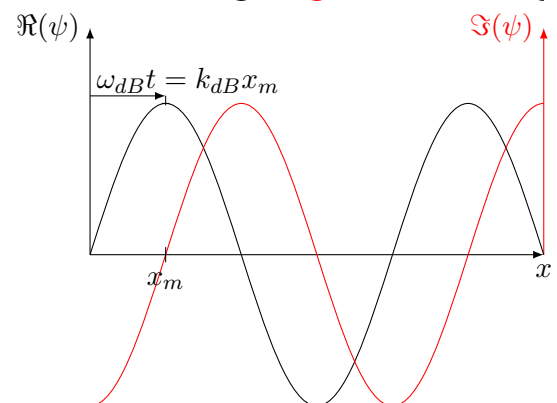
Zeit  $t = 0$

$$\psi(x, t = 0) = e^{ik_{dB}x}$$



Zeit  $t$

$$\psi(x, t) = e^{-i(\omega_{dB}t - k_{dB}x)}$$



- globale Phase spielt keine Rolle
- Energienullpunkt  $E = m_0 c^2$

$\psi(x, t)$  ist ein komplexes Feld:

$$\omega_{dB} t = k_{dB} x_m$$

$$x_m = \underbrace{\frac{\omega_{dB}}{k_{dB}} t}_{v_{ph}^{dB}}$$

$$v_{ph}^{dB} = \frac{mv^2}{2\hbar} \frac{\hbar}{mv} = \frac{v}{2}$$

Phasengeschwindigkeit

Phasengeschwindigkeit ist nicht physikalisch! Gegeben eine de Broglie Welle mit  $k_{dB} = k$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen irgendwo zu finden?

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{p(x)}_{\text{W.-Dichte}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx = \infty$$

Eine de Broglie Welle ist nicht normierbar! Analoges Problem: Energieinhalt in einer ebenen Elektromagnetischen Welle.

⇒ Lösung: Superposition (Überlagerung) von ebenen (unphysikalischen) Wellen erlaubt, um physikalischen Situation zu beschreiben.

Zusammenfassung: Neue Beschreibung der Bewegung von Teilchen ⇒ Wellenoptik. Für  $\psi(x, t)$  ⇒  $|\psi(x, t)|^2 dx$  ist die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen zur Zeit  $t$  im Intervall  $[x, x+dx]$  zu beobachten. Klassische Teilchenmechanik entspricht dem geometrischen „Optik-Limit“ der Wellenmechanik.

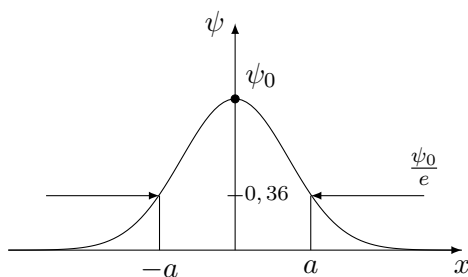
### Fermat'sches Prinzip in der Wellenoptik

Licht breitet sich entlang des kürzesten optischen Weges aus

$$\underbrace{\delta \int \frac{ds}{\lambda}}_{\text{Variation}} = 0 = \delta \int \frac{ds}{\frac{h}{mv}} = \frac{1}{h} \delta \underbrace{\int mv ds}_{\text{Maupertuis Prinzip der kleinsten Wirkung}} = 0$$

## 2.3 Das Wellenpaket - physikalische Wellenfunktion durch Überlagerung (Superposition von ebenen Wellen)

Das Wellenpaket (ruhend)  
 $t = 0$



$$\psi(x, t=0) = \underbrace{\left(\frac{2}{\pi a^2}\right)^{1/4}}_{\text{Normierung}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 \quad \text{Quadrat-Integrieren}$$

$t = T$ ? Wir wissen „nur“ wie sich de Broglie Wellen ausbreiten  $\Rightarrow$  zerlege  $\psi(x, t = 0)$  in ebene Wellen mit Wellenvektor  $k_{dB}$ . Jede Welle wird sich entsprechend

$$\omega_{dB} = \frac{\hbar k_{dB}^2}{2m}$$

ausbreiten.

$$\psi(x, t = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Amplitude der Welle}}}{\tilde{\psi}(k)} e^{ikx} dk$$

de Broglie Welle  $t = 0$

$\Rightarrow$  triviale Zeitentwicklung

$$\begin{aligned} \psi(x, t = T) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(k) e^{ikx} e^{-i\omega T} dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\tilde{\psi}(k) e^{-i\frac{\hbar}{2m}k^2 T}}_{\text{Phase}} e^{ikx} dk \end{aligned}$$

Nur die Phase der komplexen Wahrscheinlichkeits-Amplitude ändert sich. Die zeitliche Änderung ist **linear** in der Zeit, aber quadratisch in  $k$ .

Da

$$\Psi = \tilde{\psi}(k) e^{i(kx - \omega t)}$$

einer de Broglie Welle und damit einem Teilchen mit scharf definiertem Impuls  $p = mv = \hbar k$  entspricht, bezeichnet man  $\tilde{\psi}(k)$  als Impulsdarstellung / Impulsamplitude. Entsprechend  $\Psi(x)$  ist die Ortsdarstellung / Ortsamplitude des Quantenmechanischen-Zustandes. Die Ausbreitung im Impulsraum ist trivial

$$\underbrace{\tilde{\psi}(k)}_{t=0} \rightarrow \underbrace{\tilde{\psi}(k)}_t e^{-i\frac{\hbar k^2}{2m}t}$$

$\downarrow$   
Rotation in komplexer Zahlenebene

Aber wie sieht die räumlich Wahrscheinlichkeitsverteilung aus?

Wiederholung: Fourier-Transformation.

### Periodische Funktionen (Fourier 1822)

$$f(x + d) = f(x) \quad d: \text{Periode}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{inGx} \quad G = \frac{2\pi}{d}$$

$$g_n = \frac{1}{d} \int_x^{x+d} f(x) e^{-inGx} dx$$

$$\begin{aligned}
\int_0^d f(x) e^{-imGx} dx &= \int_0^d \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{i(n-m)Gx} dx = g_m d \\
\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n^* e^{-inGx} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m e^{imGx} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \sum_m g_n^* g_m e^{i(m-n)Gx} dx \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g_n|^2 = 1
\end{aligned}$$

Normierung

$f(x)$  reell  $\rightarrow g_n = g_n^*$

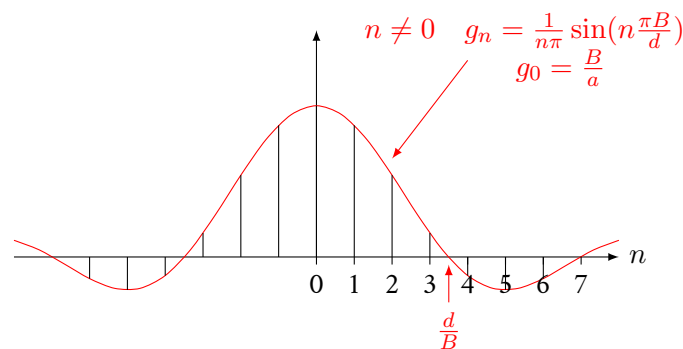
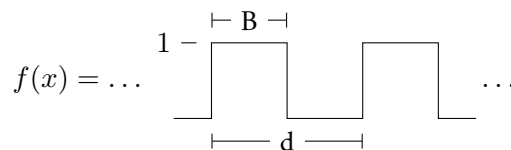
$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{inGx} &= g_0 + \sum_{n=-\infty}^{-1} g_n e^{inGx} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{inGx} \\
&= g_0 + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} g_n^* e^{-inGx} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{inGx} \right\} \\
z^* + z &= (a + ib)^* + (a + ib) = 2\Re\{z\}
\end{aligned}$$

Einfache Beispiele

$$f(x) = \cos(Gx) = \frac{1}{2} e^{-iGx} + \frac{1}{2} e^{iGx}$$

Fouriertransformierte

$$g_{-1} = \frac{1}{2} \quad g_0 = 0 \quad g_1 = \frac{1}{2} \quad g_{|n|>1} = 0$$



Je kleiner die Struktur im Ortsraum, umso breiter wird die Verteilung im Impulsraum.

## Literatur

- [1] Louis de Broglie. "XXXV. A tentative theory of light quanta". In: *Philosophical Magazine Series 6* 47.278 (1924), S. 446–458.