

# Übungszettel 7

Robin Heinemann

February 14, 2017

## Aufgabe 7.2

a) Der optimale Fall ist, wenn das Array bereits sortiert ist. Dann wird von der inneren Schleife immer nur der erste Durchlauf ausgeführt. Die äußere Schleife wird genau  $n$  mal ausgeführt, damit erhält man  $f_1(n) = n$ , dies lässt sich zu  $n \in \Omega(n) \implies g_1(n) = n$  umformen. Hier muss  $\Omega$ -Notation verwendet werden, da es sich um den günstigsten Fall handelt, es gibt Fälle, bei denen  $O(n)$  nicht die obere Schranke ist.

b) Der schlechteste Fall tritt auf, wenn das Array genau invers sortiert ist. Die innere Schleife wird also immer genau  $n - i$  mal durchlaufen, wobei  $i$  die Anzahl der Durchläufe der äußeren Schleife bezeichnet. Damit erhält man:

$$f_2(n) = \sum_{i=1}^n n - i = \frac{1}{2}(n^2 - n)$$

Dies lässt sich zu:

$$f_2(n) \in O(n^2) \implies g_2(n) = n^2$$

vereinfachen.

c) Analog zum schlechtesten Fall erhält man dann für die innere Schleife  $\frac{n-i}{2}$  Durchläufe:

$$f_2(n) = \sum_{i=1}^n \frac{n-i}{2} = \frac{1}{4}(n^2 - n)$$

und damit:

$$f_3(n) \in O(n^2) \implies g_3(n) = n^2$$

d)

· ohne Optimierungen insertion sort best case:

$n$	Zeit in Sekunden	Zeit / $n \log n$
1000000	0.0384659	$3.846\,59 \times 10^{-8}$
1200000	0.0470058	$3.917\,15 \times 10^{-8}$
1440000	0.0567039	$3.937\,77 \times 10^{-8}$
1727999	0.0673467	$3.897\,38 \times 10^{-8}$
2073600	0.0811057	$3.911\,35 \times 10^{-8}$
2488319	0.098592	$3.962\,19 \times 10^{-8}$
2985983	0.116828	$3.912\,55 \times 10^{-8}$
3583180	0.140203	$3.9128 \times 10^{-8}$
4299816	0.16865	$3.922\,27 \times 10^{-8}$
5159780	0.203377	$3.941\,58 \times 10^{-8}$
6191736	0.243178	$3.927\,46 \times 10^{-8}$
7430083	0.292753	$3.940\,11 \times 10^{-8}$
8916100	0.350108	$3.9267 \times 10^{-8}$
10699320	0.414265	$3.871\,89 \times 10^{-8}$
12839184	0.50081	$3.900\,63 \times 10^{-8}$
15407021	0.59793	$3.880\,89 \times 10^{-8}$
18488425	0.724838	$3.9205 \times 10^{-8}$
22186111	0.880652	$3.969\,38 \times 10^{-8}$
26623333	1.04973	$3.942\,91 \times 10^{-8}$
31947999	1.26629	$3.963\,61 \times 10^{-8}$
38337599	1.50603	$3.928\,33 \times 10^{-8}$
46005119	1.83551	$3.9898 \times 10^{-8}$
55206143	2.18521	$3.958\,28 \times 10^{-8}$
66247372	2.5922	$3.9129 \times 10^{-8}$
79496847	3.12522}	$3.931\,26 \times 10^{-8}$

Durchschnitt:  $3.925\,05 \times 10^{-8}$

insertion sort worst case:

$n$	Zeit in Sekunden	Zeit / $n \log n$
2000	0.0563335	$1.408\,34 \times 10^{-8}$
2140	0.0637945	$1.393\,02 \times 10^{-8}$
2289	0.0708066	$1.3514 \times 10^{-8}$
2450	0.0824421	$1.373\,46 \times 10^{-8}$
2621	0.0940372	$1.368\,88 \times 10^{-8}$
2805	0.107795	$1.370\,04 \times 10^{-8}$
3001	0.127077	$1.411\,03 \times 10^{-8}$
3211	0.14668	$1.422\,62 \times 10^{-8}$
3436	0.161834	$1.370\,76 \times 10^{-8}$
3676	0.18396	$1.361\,35 \times 10^{-8}$
3934	0.21371	$1.380\,88 \times 10^{-8}$
4209	0.2442	$1.378\,44 \times 10^{-8}$
4504	0.291699	$1.437\,93 \times 10^{-8}$
4819	0.324696	$1.398\,18 \times 10^{-8}$
5157	0.377055	$1.417\,79 \times 10^{-8}$
5518	0.429574	$1.410\,83 \times 10^{-8}$
5904	0.494398	$1.418\,35 \times 10^{-8}$
6317	0.575462	$1.4421 \times 10^{-8}$
6759	0.637805	$1.396\,12 \times 10^{-8}$
7233	0.757041	$1.447\,05 \times 10^{-8}$
7739	0.850441	$1.419\,95 \times 10^{-8}$
8281	1.0016	$1.460\,59 \times 10^{-8}$
8860	1.10167	$1.403\,41 \times 10^{-8}$
9481	1.27307	$1.416\,27 \times 10^{-8}$
10144	1.4453}	$1.404\,56 \times 10^{-8}$

Durchschnitt:  $1.402\,53 \times 10^{-8}$

insertion sort typical case:

$n$	Zeit in Sekunden	Zeit / $n \log n$
5000	0.179809	$7.192\,36 \times 10^{-9}$
5350	0.202922	$7.089\,59 \times 10^{-9}$
5724	0.236923	$7.231\,16 \times 10^{-9}$
6125	0.270223	$7.202\,95 \times 10^{-9}$
6553	0.311509	$7.254\,21 \times 10^{-9}$
7012	0.35963	$7.314\,28 \times 10^{-9}$
7503	0.427693	$7.597\,35 \times 10^{-9}$
8028	0.475772	$7.382\,17 \times 10^{-9}$
8590	0.558334	$7.566\,72 \times 10^{-9}$
9192	0.648983	$7.680\,92 \times 10^{-9}$
9835	0.750438	$7.758\,29 \times 10^{-9}$
10524	0.812448	$7.335\,57 \times 10^{-9}$
11260	0.912265	$7.195\,23 \times 10^{-9}$
12049	1.10621	$7.619\,65 \times 10^{-9}$
12892	1.2469	$7.502\,25 \times 10^{-9}$
13795	1.41741	$7.448\,23 \times 10^{-9}$
14760	1.5875	$7.286\,85 \times 10^{-9}$
15794	1.86811	$7.4889 \times 10^{-9}$
16899	2.0874	$7.309\,42 \times 10^{-9}$
18082	2.37665	$7.268\,97 \times 10^{-9}$
19348	2.74368	$7.329\,27 \times 10^{-9}$
20702	3.09305	$7.2171 \times 10^{-9}$
22152	3.58881	$7.3135 \times 10^{-9}$
23702	4.0872	$7.275\,38 \times 10^{-9}$
25361	4.64648	$7.224\,23 \times 10^{-9}$

Durchschnitt:  $7.363\,38 \times 10^{-9}$

std::sort:

$n$	Zeit in Sekunden	Zeit / $n \log n$
100000	0.0448357	$3.89438 \times 10^{-8}$
107000	0.0485742	$3.92005 \times 10^{-8}$
114490	0.0526924	$3.95112 \times 10^{-8}$
122504	0.0572872	$3.99146 \times 10^{-8}$
131079	0.0620617	$4.01804 \times 10^{-8}$
140255	0.0672582	$4.04635 \times 10^{-8}$
150073	0.0706144	$3.9478 \times 10^{-8}$
160578	0.0765097	$3.975 \times 10^{-8}$
171818	0.0809247	$3.90728 \times 10^{-8}$
183845	0.087469	$3.92494 \times 10^{-8}$
196715	0.0945126	$3.94154 \times 10^{-8}$
210485	0.0999723	$3.87497 \times 10^{-8}$
225219	0.10864	$3.91384 \times 10^{-8}$
240984	0.118354	$3.96311 \times 10^{-8}$
257853	0.126013	$3.92211 \times 10^{-8}$
275903	0.136135	$3.93856 \times 10^{-8}$
295216	0.151025	$4.06159 \times 10^{-8}$
315881	0.158583	$3.96454 \times 10^{-8}$
337993	0.168726	$3.92121 \times 10^{-8}$
361652	0.180095	$3.89093 \times 10^{-8}$
386968	0.194031	$3.89717 \times 10^{-8}$
414056	0.207441	$3.87356 \times 10^{-8}$
443040	0.226052	$3.92442 \times 10^{-8}$
474052	0.241299	$3.8948 \times 10^{-8}$
507236	0.258856	$3.88472 \times 10^{-8}$

Durchschnitt:  $3.93774 \times 10^{-8}$

- mit Optimierungen insertion sort best case:

$n$	Zeit in Sekunden	Zeit / $n$
1000000	0.00180217	$1.802\,17 \times 10^{-9}$
1200000	0.00221753	$1.847\,94 \times 10^{-9}$
1440000	0.00302139	$2.098\,19 \times 10^{-9}$
1727999	0.00383213	$2.217\,67 \times 10^{-9}$
2073600	0.00465811	$2.246\,39 \times 10^{-9}$
2488319	0.00552709	$2.221\,21 \times 10^{-9}$
2985983	0.00680263	$2.278\,19 \times 10^{-9}$
3583180	0.00791746	$2.209\,62 \times 10^{-9}$
4299816	0.00957455	$2.226\,73 \times 10^{-9}$
5159780	0.0114418	$2.2175 \times 10^{-9}$
6191736	0.013643	$2.203\,43 \times 10^{-9}$
7430083	0.0169643	$2.283\,19 \times 10^{-9}$
8916100	0.0204979	$2.298\,97 \times 10^{-9}$
10699320	0.0237447	$2.219\,27 \times 10^{-9}$
12839184	0.028712	$2.236\,28 \times 10^{-9}$
15407021	0.0342781	$2.224\,84 \times 10^{-9}$
18488425	0.0410346	$2.219\,47 \times 10^{-9}$
22186111	0.0506048	$2.280\,92 \times 10^{-9}$
26623333	0.0595367	$2.236\,26 \times 10^{-9}$
31947999	0.0714738	$2.237\,19 \times 10^{-9}$
38337599	0.0865582	$2.257\,79 \times 10^{-9}$
46005119	0.103315	$2.245\,72 \times 10^{-9}$
55206143	0.132733	$2.404\,31 \times 10^{-9}$
66247372	0.171755	$2.592\,63 \times 10^{-9}$
79496847	0.195373	$2.457\,63 \times 10^{-9}$

Durchschnitt:  $2.230\,54 \times 10^{-9}$

insertion sort worst case:

$n$	Zeit in Sekunden	Zeit / $n^2$
2000	0.00131307	$3.282\,68 \times 10^{-10}$
2140	0.00151938	$3.317\,71 \times 10^{-10}$
2289	0.00175493	$3.3494 \times 10^{-10}$
2450	0.00203224	$3.385\,66 \times 10^{-10}$
2621	0.00289405	$4.2128 \times 10^{-10}$
2805	0.00272793	$3.467\,11 \times 10^{-10}$
3001	0.00347161	$3.854\,77 \times 10^{-10}$
3211	0.00443669	$4.303\,07 \times 10^{-10}$
3436	0.00420283	$3.559\,88 \times 10^{-10}$
3676	0.00480767	$3.557\,82 \times 10^{-10}$
3934	0.00556181	$3.593\,75 \times 10^{-10}$
4209	0.00692586	$3.909\,45 \times 10^{-10}$
4504	0.00730396	$3.600\,49 \times 10^{-10}$
4819	0.00962725	$4.145\,61 \times 10^{-10}$
5157	0.00958699	$3.604\,86 \times 10^{-10}$
5518	0.0116548	$3.827\,74 \times 10^{-10}$
5904	0.0129458	$3.713\,94 \times 10^{-10}$
6317	0.0144537	$3.622\,09 \times 10^{-10}$
6759	0.0172369	$3.773\,07 \times 10^{-10}$
7233	0.0190871	$3.6484 \times 10^{-10}$
7739	0.0219383	$3.662\,97 \times 10^{-10}$
8281	0.02532	$3.6923 \times 10^{-10}$
8860	0.0298174	$3.798\,42 \times 10^{-10}$
9481	0.0346395	$3.853\,57 \times 10^{-10}$
10144	0.0427375}	$4.153\,27 \times 10^{-10}$

Durchschnitt:  $3.715\,63 \times 10^{-10}$

insertion sort worst case:

$n$	Zeit in Sekunden	Zeit / $n^2$
5000	0.00493283	$1.973\,13 \times 10^{-10}$
5350	0.00571745	$1.997\,54 \times 10^{-10}$
5724	0.00632268	$1.929\,75 \times 10^{-10}$
6125	0.0076292	$2.033\,61 \times 10^{-10}$
6553	0.00888076	$2.068\,09 \times 10^{-10}$
7012	0.00992745	$2.019\,08 \times 10^{-10}$
7503	0.0112757	$2.002\,97 \times 10^{-10}$
8028	0.0131061	$2.033\,57 \times 10^{-10}$
8590	0.0155581	$2.108\,48 \times 10^{-10}$
9192	0.0172611	$2.042\,91 \times 10^{-10}$
9835	0.020206	$2.088\,97 \times 10^{-10}$
10524	0.0228511	$2.063\,22 \times 10^{-10}$
11260	0.026403	$2.082\,46 \times 10^{-10}$
12049	0.029942	$2.062\,43 \times 10^{-10}$
12892	0.0342058	$2.058\,07 \times 10^{-10}$
13795	0.0388196	$2.039\,89 \times 10^{-10}$
14760	0.0452196	$2.075\,65 \times 10^{-10}$
15794	0.0519203	$2.081\,39 \times 10^{-10}$
16899	0.0591509	$2.071\,28 \times 10^{-10}$
18082	0.0680828	$2.0823 \times 10^{-10}$
19348	0.07862	$2.1002 \times 10^{-10}$
20702	0.0894472	$2.087\,09 \times 10^{-10}$
22152	0.102976	$2.098\,51 \times 10^{-10}$
23702	0.117309	$2.088\,14 \times 10^{-10}$
25361	0.13398	$2.083\,09 \times 10^{-10}$

Durchschnitt:  $2.054\,87 \times 10^{-10}$

std::sort typical case:



$n$	Zeit in Sekunden	Zeit / $n \log n$
100000	0.00763783	$6.634\,14 \times 10^{-9}$
107000	0.00816836	$6.592\,05 \times 10^{-9}$
114490	0.00882383	$6.616\,52 \times 10^{-9}$
122504	0.00930791	$6.485\,25 \times 10^{-9}$
131079	0.0102184	$6.615\,67 \times 10^{-9}$
140255	0.0109099	$6.563\,59 \times 10^{-9}$
150073	0.0118967	$6.651\,05 \times 10^{-9}$
160578	0.0125743	$6.5329 \times 10^{-9}$
171818	0.0138146	$6.670\,08 \times 10^{-9}$
183845	0.0147697	$6.627\,53 \times 10^{-9}$
196715	0.0159018	$6.631\,69 \times 10^{-9}$
210485	0.0170402	$6.604\,85 \times 10^{-9}$
225219	0.0181737	$6.547\,22 \times 10^{-9}$
240984	0.0194615	$6.516\,74 \times 10^{-9}$
257853	0.0210726	$6.558\,77 \times 10^{-9}$
275903	0.0227183	$6.572\,72 \times 10^{-9}$
295216	0.0244938	$6.587\,22 \times 10^{-9}$
315881	0.0263135	$6.578\,31 \times 10^{-9}$
337993	0.028485	$6.619\,93 \times 10^{-9}$
361652	0.030154	$6.514\,74 \times 10^{-9}$
386968	0.0329184	$6.611\,75 \times 10^{-9}$
414056	0.0351035	$6.554\,92 \times 10^{-9}$
443040	0.03794	$6.586\,64 \times 10^{-9}$
474052	0.0404175	$6.523\,78 \times 10^{-9}$
507236	0.0432129	$6.485\,08 \times 10^{-9}$

Durchschnitt:  $6.579\,33 \times 10^{-9}$

· Analyse:

- Es zeigt sich wie erwartet für insertion sort worst / typical case ein quadratisches Verhalten und für best case lineares Verhalten. Außerdem bestätigt sich die Annahme, dass im typischen Fall nur die Hälfte der Inneren Schleife durchschritten wird.
- Die Optimierung wirkt sich sehr positiv auf die Laufzeit aus (bis zu 40x, beim typischen Fall), allerdings unterschiedlich stark auf die insertion sort und std::sort
- Um zu Berechnen, bis zu welchen  $n$  Insertion Sort mit std::sort mithalten kann muss man einfach das jeweilige  $c$  einsetzen:

$$2.054\,87 \times 10^{-10} n^2 = 6.579\,33 \times 10^{-9} n \log n \implies n \approx 163$$

## Aufgabe 7.3

a)

$$\begin{aligned} t_{64} &= c \cdot f(64) \\ t_{32} &= c \cdot f(32) = 5 \text{ s} \\ c &= \frac{5 \text{ s}}{f(32)} \\ t_{64} &= \frac{f(64) 5 \text{ s}}{f(32)} \end{aligned}$$

Damit erhält man für die verschiedenen Komplexitäten:

$$\begin{aligned} t_{64} &= \frac{\log_2(64) \cdot 5 \text{ s}}{\log_2(32)} = 6 \text{ s} \\ t_{64} &= \frac{64 \cdot 5 \text{ s}}{32} = 10 \text{ s} \\ t_{64} &= \frac{64 \log_2(64) \cdot 5 \text{ s}}{32 \log_2(32)} = 12 \text{ s} \\ t_{64} &= \frac{64^2 \cdot 5 \text{ s}}{32^2} = 20 \text{ s} \\ t_{64} &= \frac{2^{64} \cdot 5 \text{ s}}{2^{32}} = 21\,474\,836\,480 \text{ s} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \log_a(n) &= \frac{\log_b(n)}{\log_b(a)} \\ \implies \log_b(a) \log_a(n) &\leq \log_b(n) \quad \forall n \\ \implies \exists C : C \log_a(n) &\leq \log_b(n) \quad \forall n, C = \log_b(a) \end{aligned}$$

c)

Die Reihenfolge ist:

$$\begin{aligned} &\log(n), \sqrt{n}, n \log(n), n^2, 2^n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\log n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} n} = \sqrt{\infty} = \infty \\ \log(x) = x \log(x) &\implies x = 1 \implies \log(x) > 0 \implies x \log(x) > \log(x) \iff x > 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n \log(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\log(n) + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n = \infty \end{aligned}$$