Lineare Algebra II (Vogel)

Robin Heinemann

19. Oktober 2017

Inhaltsverzeichnis

18 Eigenwerte

In diesem Abschnitt sei $n \in \mathbb{N}$, V ein K-VR und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.
Frage: V endlichdim. Existiert eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V, sodass $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ eine Diagonalmatrix

ist, das heißt

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$?
Für $i = 1, \ldots, n$ wäre dann $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$

Definition 18.1 $\lambda \in K, v \in V$

- λ heißt Eigenwert von $\varphi \overset{\text{Def}}{\iff} \exists v \in V, v \neq 0 : \varphi(v) = \lambda v$
- v heißt Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \overset{\text{Def}}{\iff} v \neq 0 \wedge \varphi(v) = \lambda v$
- φ heißt diagonalisierbar $\overset{\text{Def}}{\iff} V$ besitzt eine Basis aus EV von φ

(Falls V endlichdimensional, ist die äquivalent zu: Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

)
Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit einer Matrix $A \in M(n \times n, K)$ sind über den Endomorphismus $\tilde{A} : K^n \to K^n$ definiert.

Bemerkung 18.2 $A \in M(n \times n, K)$. Dann sind äquivalent:

1. A ist diagonalisierbar.
2. Es gibt eine Basis von K^n aus Eigenvektoren von A
3. Es gibt ein $S \in \mathrm{GL}(n, K), \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$
4. A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix

In diesem Fall steht in den Spalten von S^{-1} eine Basis des K^n aus EU von A, und für jede Matrix $A \in M(n \times n, K)$ mit der Eigenschaft, dass die Spalten von S^{-1} eine Basis des K^n aus EV von A bilden, dann ist SAS^{-1} eine Diagonalmatrix (mit den EW auf der Diagonalen.)

Beweis Äquivalenz:

1. $\iff$ 2. Definition, 2. $\iff$ 3. aus Basiswechselsatz (16.6), 3. $\iff$ 4. aus Definition Ähnlichkeit (16.12)

Zusatz: Sei $S \in \mathrm{GL}(n,K)$ mit $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies A\big(S^{-1}e_j\big) = S^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j.$
Wegen $S^{-1} \in \mathrm{GL}(n,K)$ ist $S^{-1}e_j \neq 0$, das heißt S^{-1} ist EV von A zum EW λ_j
Wegen $S^{-1} \in \mathrm{GL}(n,K)$ ist $\big(S^{-1}e_1, \dots, S^{-1}e_n\big)$ eine Basis des K^n aus EV von A.
Sei $S \in \mathrm{GL}(n,K)$, das heißt die Spalten von S^{-1} eine Basis des K^n aus EV von A bilden, das heißt für alle $j \in \{1,\dots,n\}$ ist $AS^{-1}e_j = \lambda_j S^{-1}e_j$ für ein $\lambda_j \in K$.

$$\implies AS^{-1}e_j = S^{-1}\lambda_j e_j = S^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j \implies SAS^{-1}e_j = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j, j = 1,\dots,n$$

$$\implies SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ □

Beispiel 18.3
$K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$

1. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ Es ist $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, das heißt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV von φ zum EW 1.
   $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, also ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ EV von φ zum EW -1. Somit: $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus EV von φ, das heißt φ ist diagonalisierbar.
   In Termen von Matrizen: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist diagonalisierbar, und mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ist dann ist $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Achtung: Das φ diagonalisierbar ist, heißt nicht, dass jeder Vektor aus $V = \mathbb{R}^2$ ein EV von φ ist, zum Beispiel ist $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ (= Drehung um $\frac{\pi}{2}$). hat keinen EW.
   Beweis dafür: später.

Ziel: Suche Kriterien für Diagonalisierbarkeit.

Bemerkung 18.4 $v_1, \dots, v_m$ EV von φ zu paarweise verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$. Dann ist $(v_1, \dots, v_m)$ linear unabhängig, insbesondere ist $m \le \dim V$. Insbesondere gilt: ist V endlichdimensional, dann hat φ höchstens $\dim(v)$ Eigenwerte.

Beweis per Induktion nach m:
IA: $m = 1 : v_1 \neq 0$, da v_1 EV $\implies (v_1)$ linear unabhängig.
IS: sei $m \geq 2$, und die Aussage für $m-1$ bewiesen.
Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$ mit $\alpha_1\lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_m \lambda_m v_m = 0$. Außerdem: $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_m \lambda_1 v_m = 0$

$$\implies \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \cdots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1)v_m = 0$$
$$\alpha_2\lambda_2 - \lambda_1 = \cdots = \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1) = 0$$
$$\implies \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$$
$$\implies \alpha_1 v_1 = 0 \implies \alpha_1 = 0 \implies (v_1, \ldots, v_w) \text{ linear unabhängig}$$ □

Folgerung 18.5 V endlichdimensional, φ habe n paarweise verschiedene EW, wobei $n = \dim V$ Dann ist φ diagonalisierbar.

Beweis Für $i = 1, \ldots, n$ sei v_i ein EV von φ zum EW $\lambda_i \implies (v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig, wegen $n = \dim V$ ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V aus EV von φ □

Definition 18.6 $\lambda \in K$
$\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda) := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ heißt der Eigenraum von φ bezüglich λ.
$\mu_{geo}(\varphi, \lambda) := \dim \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda)$ heißt die geometrische Vielfachheit von λ.
Für $A \in M(n \times n, K)$ setzen wir $\operatorname{Eig}(A, \lambda) := \operatorname{Eig}\left(\tilde{A}, \lambda\right)$, $\mu_{geo}(A, \lambda) := \mu_{geo}\left(\tilde{A}, \lambda\right)$.

Bemerkung 18.7 $\lambda \in K$. Dann gilt:

1. $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda)$ ist ein UVR von V.
2. λ ist EW von $\varphi \iff \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\}$.
3. $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der zu λ gehörenden EV von φ.
4. $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda) = \ker(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi)$, insbesondere ist $\operatorname{Eig}(A, \lambda) = \ker(\lambda E_m - \varphi) = \text{Lös}(\lambda E_n - A, 0)$ für $A \in M(n \times n, K)$
5. Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in K mit \lambda_1 \neq \lambda_2$, dann $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1) \cap \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_2) = \{0\}$

Beweis 4. Es ist $v \in \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda) \iff \varphi(v) = \lambda v \iff \lambda v - \varphi(v) = 0 \iff (\lambda \operatorname{id}_V - \varphi)(v) = 0 \iff v \in \ker(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi)$ Es ist $\operatorname{Eig}(A, \lambda) = \ker\left(\lambda \operatorname{id}_{K^n} - \tilde{A}\right) = \ker\left(\widetilde{\lambda E_n - A}\right) = \ker(\lambda E_n - A) = \text{Lös}(\lambda E_n - A, 0)$

1. aus 4.
2. λ EW von $\varphi \iff \exists v \in V, v \neq 0$ mit $\varphi(v) = \lambda v \iff \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\}$.
3. klar.
5. Sei $\lambda_1 \neq \lambda_2, v \in \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1) \cap \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_2) \implies \lambda_1 v = \varphi(v) = \lambda_2 v \implies \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v = 0 \implies v = 0$ □

Bemerkung 18.8 V endlichdimensional, $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent:

1. λ ist EW von φ
2. $\det(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi) = 0$

Beweis 1. $\iff \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\} \implies \ker(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi) \neq \{0\} \implies \lambda \operatorname{id}_V - \varphi$ nicht injektiv $\implies$ $\lambda \operatorname{id}_V - \varphi$ kein Isomorphismus $\implies \det(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi) = 0$. □

Definition 18.9 K Körper, $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$

$$\chi_A^{char} := \det(tE_n - A) = \det \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ -a_{n1} & \dots & & t - a_{nn} \end{pmatrix} \in K[t]$$

heißt das **charakteristische Polynom** von A.

Anmerkung Hierfür nötig: Determinanten von Matrizen mit Einträgen in einem kommutativen Ring.
In manchen Büchern $\chi_A^{char} = \det(A - tE_n)$ (schlecht)

Beispiel 18.10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$$

$$\implies A\chi_a^{char} = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ -3 & t-4 \end{pmatrix} = (t-1)(t-4) - 6 = t^2 - 5t - 2$$

Bemerkung 18.11 $A, B \in M(n \times n, K), A \approx B$.
Dann ist $\chi_A^{char} = \chi_B^{char}$.

Beweis $A \approx B \implies \exists S \in \operatorname{GL}(n, K) : B = SAS^{-1}$

$$\implies tE_n - B = tE_n - SAS^{-1} = SS^{-1}tE_n - SAS^{-1} = StE_nS_{-1} - SAS^{-}1 = S(tE_n - A)S^{-1}$$

$$\implies \chi_B^{char} = \det(tE_n - B) = \det\big(S(tE_n - A)S^{-1}\big) = \det(S)\det(tE_n - A)\det\big(S^{-1}\big) = \underbrace{\det(S)\det(S)^{-1}}_{=1}\det(tE_n - A) = \chi_A^{char}$$

□

Definition 18.12 V endlichdim, $n = \dim V, \mathcal{B}$ Basis von $V, \varphi \in \operatorname{End}(V), A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$

$$\chi_\varphi^{char} := \chi_A^{char} = \det(tE_n - A) \in K[t]$$

heißt das **charakteristische Polynom** von φ.

Anmerkung χ_φ^{char} ist wohldefiniert, dann: Ist $\mathcal{B}'$ eine weitere Basis von V, $A' = M_{\mathcal{B}'}\varphi$, dann ist $A \approx A'$ und deshalb nach 18.11: $\chi_A^{char} = \chi_{A'}^{char}$.

Satz 18.13 V endlichdimensional, $n = \dim V$. Dann gilt:

1. χ_φ^{char} ist ein normiertes Polynom von Grad n:

$$\chi_\varphi^{char} = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_0$$

   mit $c_0 = (-1)^n \det \varphi$, $c_{n-1} = -^{(\varphi)}$ (vgl. Übung zur Spur)

2. Die Nullstellen von χ_φ^{char} sind genau die EW von φ:

$$\lambda \in K \text{ ist EW von } \varphi \iff \chi_\varphi^{char}\lambda = 0$$

Beweis Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V, $A := M_\mathcal{B}(\varphi) \in M(n \times n, K)$

1.

$$\begin{aligned}\chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \underbrace{(tE_n - A)}_{=:B=(B_{ij})} &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) B_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot B_{n,\sigma(n)} \\ &= (t - a_{11} \cdot \ldots \cdot (t - a_{nn})) + \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}} \operatorname{sgn}(\sigma) B_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot B_{n,\sigma(n)}}_{:=g}\end{aligned}$$

   Für $\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}$ treten in $B_{1,\sigma(1)}, \ldots, B_{n,\sigma(n)}$ höchstens $n-2$ Diagonalelemente auf, also $\deg(g) \leq n-2$.

$$\implies \chi_\varphi^{char} = t^n - (a_{11} + \cdots + a_{nn})t^{n-1} + \text{ Terme kleineren Grades}$$

   insbesondere:

$$c_{n-1} = -(a_{11} + \cdots + a_{nn}) = -^A = -^\varphi$$

   Es ist

$$c_0 = \chi_\varphi^{char}(0) = (\det(tE_n - A))(0) = \det(0E_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

2. Aus $A = M_\mathcal{B}(\varphi)$ folgt $\lambda E_n - A = M_\mathcal{B}(\lambda\,\mathrm{id}_V - \varphi)$. Also:

$$\begin{aligned}\chi_\varphi^{char}(\lambda) = 0 &\iff (\det(tE_n - A))(\lambda) = 0 \implies \det(\lambda E_n - A) = 0 \iff \det(M_\mathcal{B}(\lambda\,\mathrm{id}_V - \varphi)) = 0 \\ &\implies \det(\lambda\,\mathrm{id}_V - \varphi) = 0 \iff \lambda \text{ ist EW von } \varphi\end{aligned}$$

□

Definition 18.14 $\lambda \in K$

$$\mu_{alg}(\varphi, \lambda) := \mu\Big(\chi_\varphi^{char}, \lambda\Big)$$

heißt die **algebraische Vielfachheit**

Beispiel 18.15

1. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Es ist $\chi_\varphi^{char} = \chi_\varphi^{char} = \det \begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{pmatrix} =$
   $t^2 - 1 = (t-1)(t+1) \in \mathbb{R}[t] \implies$ EW von $\varphi : 1, -1$.
   Es ist $\mu_{alg}(\varphi, 1) = 1, \mu_{alg}(\varphi, -1) = 1$
   $$\mathrm{Eig}(\varphi, 1) = \mathrm{Eig}(A, 1) = \text{Lös}(E_2 - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
   also $\mu_{geo}(\varphi, 1) = \dim \mathrm{Eig}(\varphi, 1) = 1$
   $$\mathrm{Eig}(\varphi, -1) = \mathrm{Eig}(A, -1) = \text{Lös}((-1) \cdot E_2 - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, 0\right) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$
   also $\mu_{geo}(\varphi, -1) = 1$.

2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Es ist $\chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} =$
   $t^2 + 1, \chi_\varphi^{char}$ hat keine NS in $\mathbb{R} \implies \varphi$ hat keine EW.

3. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Es ist $\chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix} =$
   $(t-1)^2 \implies 1$ ist einziger EW von φ, es ist $\mu_{alg}(\varphi, 1) = 2$
   $$\mathrm{Eig}(\varphi, 1) = \mathrm{Eig}(A, 1) = \text{Lös}(1E_2 - A, 0)\, \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$
   $\implies \mu_{geo}(\varphi, 1) = 1. \implies \varphi$ ist nicht diagonalisierbar.

Satz 18.16 V endlichdimensional, $n = \dim V$

1. Ist φ diagonalisierbar, dann ist $\chi_\varphi^{char} = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, nicht notwendig verschieden, das heißt χ_φ^{char} zerfällt in Linearfaktoren.
2. Ist $\chi_\varphi^{char} = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n)$ mit paarweise verschiedene $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, dann ist φ diagonalisierbar.

Beweis

1. Sei φ diagonalisierbar $\to V$ besitzt Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ aus EV zu EW $\lambda_i \in K$.
   $$\implies M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies \chi_\varphi^{char} = \det \begin{pmatrix} t - \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t - \lambda_n \end{pmatrix} = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n)$$
2. Aus $\chi_\varphi^{char} = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ paarweise verschieden $\implies \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind paarweise verschiedene EW von $\varphi \implies \varphi$ diagonalisierbar. $\square$

Bemerkung 18.17 V endlichdimensional, $n = \dim V$, λ EW von φ. Dann gilt:

$$1 \leq \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \leq \mu_{alg}(\varphi, \lambda)$$

Beweis Sei $(v_1, \dots, v_s)$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) \implies s = \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \geq 1$, da λ EW von φ. Nach Basiserweiterungssatz $\exists v_{s+1}, \dots, v_n \in V$, sodass $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n)$ eine Basis von V ist.

$$\implies A := A_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & A' \end{array}\right), A' \in M((n-s) \times (n-s), K)$$

$$\implies \chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \left(\begin{array}{ccc|c} t-\lambda & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & t-\lambda & \\ \hline & 0 & & tE_{n-s} - A' \end{array}\right) = (t-\lambda)^s \det\big(tE_{n-s} - A'\big) = (t-\lambda)^s \chi_{A'}^{char}$$

$$\implies \mu_{geo}(\varphi, \lambda) = s \leq \mu\Big(\chi_\varphi^{char}, \lambda\Big) = \mu_{alg}(\varphi, \lambda)$$

□

Bemerkung 18.18 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ paarweise verschiedene EW von φ. Dann gilt:

$$\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_j) = \{0\} \forall i \in \{1, \dots, r\}$$

Beweis Sei $i \in \{1, \dots, r\}$. Annahme: $\exists v_i \in \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_j) : v_i \neq 0$.

$$\implies \exists v_j \in \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_j), j = 1, \dots, r, j \neq i : v_i = v_1 + \dots + v_{i-1} + v_{i+1} + \dots + v_r$$

Setze $J := \{j \in \{1, \dots r\}, j \neq i \mid v_j \neq 0\} = \{j_1, \dots, j_s\}$

$\implies v_i = v_{j_1} + \dots + v_{j_s} \implies v_{j_1} + \dots + v_{j_s} + (-1)v_i = 0 \implies (v_{j_1}, \dots, v_{j_s}, v_i)$ linear abhängig ↯

□

Satz 18.19 V endlichdimensional. Dann sind äquivalent:

1. φ diagonalisierbar
2. χ_φ^{char} zerfällt in Linearfaktoren und $\mu_{alg}(\varphi, \lambda) = \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \forall$ EW von φ.
3. Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen EW von φ, dann ist

$$V = \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_k)$$

In diesem Fall erhält man eine Basis von V aus EV von φ, indem man Basen von $\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_i), i = 1, \dots, k$ zusammenfügt.

Beweis 1. $\implies$ 2. Sei φ diagonalisierbar. $\implies$ $\exists$ Basis $\mathcal{B}$ von V aus EV von φ. Wir ordnen die EV in $\mathcal{B}$ den verschiedenen EW von φ zu und gelangen so zu Familien $\mathcal{B}_i := \left(v_1^{(i)}, \dots, v_{s_i}^{(i)}\right)$ von linear unabhängigen im $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda), i = 1, \dots, k$

a) Behauptung: $\mathcal{B}_i$ ist eine Basis von $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_i)$, denn gezeigt: $\mathcal{B}_i$ ist ein ES von $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_i)$. Sei $v \in \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_i) \leq V$

$$\implies \exists \lambda^{(j)} \in K : v = \sum_{j=1}^{k} \left(\lambda_1^{(j)} v_1^{(j)} + \dots + \lambda_{s_j}^{(j)} v_{s_j}^{(j)}\right)$$

$$\implies \underbrace{v - \left(\lambda_1^{(i)} v_1^{(i)} + \dots + \lambda_{s_i}^{(i)} v_{s_i}^{(i)}\right)}_{\in \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_i)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \left(\lambda_1^{(j)} v_1^{(j)} + \dots + \lambda_{s_j}^{(j)} v_{s_j}^{(j)}\right) \in \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_j)$$

$$\implies v = \lambda_1^{(i)} v_1^{(i)} + \dots + \lambda_{s_i}^{(i)} v_{s_i}^{(i)}$$

a) Nach 1. ist

$$\mu_{geo}(\varphi, \lambda_1) + \dots + \mu_{geo}(\varphi, \lambda_k) = s_1 + \dots + s_k = \dim V$$

χ_φ^{char} zerfällt nach 18.16 in Linearfaktoren, somit

$$\mu_{alg}(\varphi, \lambda_1) + \dots + \mu_{alg}(\varphi, \lambda_k) = \deg\left(\chi_\varphi^{char}\right) = \dim V$$

Wegen $\mu_{geo}(\varphi, \lambda_i) \leq \mu_{alg}(\varphi, \lambda_i)$ für $i = 1, \dots, k$ folgt: $\mu_{geo}(\varphi, \lambda_i) = \mu_{alg}(\varphi, \lambda_i)$ für $i = 1, \dots, k$.

2. $\implies$ 3. Es gelte 2. Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen EW von φ. Wir setzen $W := \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1) + \dots + \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_k)$. Wegen 18.18 ist

$$W = \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_k)$$

$$\begin{aligned} \implies \dim W &= \dim \operatorname{Eig}(\chi, \lambda_1) + \dots + \dim \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_k) \\ &= \mu_{geo}(\chi, \lambda_1) + \dots + \mu_{geo}(\varphi, \lambda_k) \\ &= \mu_{alg}(\chi, \lambda_1) + \dots + \mu_{alg}(\varphi, \lambda_k) = \deg\left(\chi_\varphi^{char}\right) \\ &= \dim V \end{aligned}$$

$\implies W = V$

3. $\implies$ 1. Es gelte 3. Sei $\mathcal{B} = \left(v_1^{(i)}, \dots, v_{s_i}^{(i)}\right)$ eine Basis von $\operatorname{Eig} \varphi, \lambda_i \implies \mathcal{B} := \left(v_1^{(1)}, \dots, v_{s_1}^{(1)}, \dots, v_1^{(k)}, v_{s_r}^{(k)}\right)$ ist eine Basis von V aus EV von $\varphi \implies \varphi$ diagonalisierbar. $\square$

Anmerkung In der Praxis ist es in der Regel schwierig festzustellen, ob χ_φ^{char} in Linearfaktoren zerfällt oder die NS von χ_φ^{char} zu bestimmen. Für Polynome von Grad ≥ 5 existiert keine Lösungsformel zur Bestimmung der NS. (Algebra 1 Vorlesung), die NS müssen numerisch bestimmt werden.

Beispiel 18.20

1. In 18.15.3 ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist $\chi_A^{char} = (t-1)^2, \mu_{geo}(A,1) = 1 < \mu_{alg}(A,1) = 2 \implies A$ nicht diagonalisierbar.
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$

$$\chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t-2 & 1 & 1 \\ 6 & t-1 & -1 \\ -3 & 1 & t+2 \end{pmatrix} = t^3 - t^2 - 5t - 3 = (t+1)^2(t-3)$$

EW von $A: -1, 3, \mu_{alg} = (A, -1) = 2, \mu_a lg(A, 3) = 1$

$$\operatorname{Eig}(A,-1) = \text{Lös}(-E_n - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

$\mu_{geo}(A,-1) = 2 = \mu_{alg}(A,-1)$.

$$\operatorname{Eig}(A,3) = \text{Lös}(3E_n - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, 0\right) = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$\mu_{geo}(A,3) = 1 = \mu_{alg}(A,3)$. Also ist A diagonalisierbar, $\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus EV von A,

$$M_{\mathcal{B}}\left(\tilde{A}\right) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$$

Mit

$$S := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, SAS^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$$

Anmerkung Ist $f = a_m t^m + \cdots + a_1 t + a_0 \in K[t]$, dann können wir in f:

- Endomorphismen $\varphi \in \operatorname{End}_K(V)$ einsetzen durch die Regel

$$f(\varphi) := a_m \varphi^m + \cdots + a_1 \varphi + a_0 \operatorname{id}_V \in \operatorname{End}_K(V)$$

wobei $\varphi^k := \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{\text{k-mal}}$

- Matrizen $A \in M(n \times n, K)$ einsetzen durch die Regel

$$f(A) := a_m A^m + \dots + a_1 A + a_0 E_n \in M(n \times n, K)$$

Für $f, g \in K[t], \varphi \in \operatorname{End}_K(V)$ ist $f(\varphi) \circ g(\varphi) = (fg)(\varphi) = (gf)(\varphi) = g(\varphi) \circ f(\varphi)$, analog für Matrizen.

Satz 18.21 (Satz von Cayley-Hamilton) V endlichdimensional. Dann gilt: $\chi_\varphi^{char}(\varphi) = 0$. Insbesondere gilt für alle $A \in M(n \times n, K)$: $\chi_A^{char}(A) = 0$.

Beweis 1. Es genügt zu zeigen, dass $\chi_A^{char} = 0$ für alle $A \in M(n \times n, K)$, denn:
Ist $\varphi \in \operatorname{End}_K(V), \mathcal{B}$ Basis von V, $A = A_\mathcal{B}, \chi_\varphi^{char} = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0 = \chi_A^{char} \in K[t]$

$$\begin{aligned} \implies 0 = \chi_A^{char}(A) &= A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0 E_n = M_\mathcal{B}\big(\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \dots + a_0 \operatorname{id}_V\big) \\ &= M_\mathcal{B}\Big(\chi_\varphi^{char}(\varphi)\Big) \end{aligned}$$

$$\implies \chi_\varphi^{char}(\varphi) = 0$$

2. Sei $A \in M(n \times n, K)$. Wir setzen $D := (tE_n - A)^\# \in M(n \times n, K[t])$

$$\implies D(tE_n - A) = \det(tE_n - A)E_n = \chi_A^{char} E_n$$

Sei $D = \sum_{i=0}^{n-1} D_i t^i$ mit $D_i \in M(n \times n, K), \chi_A^{char} = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ mit $a_i \in K$

$$\begin{aligned} \implies \sum_{i=0}^{n} a_i E_n t^i &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i\right) E_n = \chi_A^{char} E_n = D(tE_n = A) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} D_i t^i\right)(tE_n - A) = \sum_{i=0}^{n-1} D_i t^{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} D_i A t^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} (D_{i-1} - D_i A)t^i \qquad \text{(mit } D_{-1} := 0, D_n := 0\text{)} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert: $a_i A_n = D_{i-1} - D_i A$ für $i = 0, \dots, n$

$$\begin{aligned} \chi_A^{char} &= \sum_{i=0}^{n} a_i A_i = \sum_{i=0}^{n} (a_i E_n) A^i = \sum_{i=0}^{n} (D_{i-1} - D_i A) A^i \\ &= (D_{-1} - D_0 A) + (D_0 - D_1 A)A + \dots + (D_{n-1} - D_n A)A^n \\ &= D_{-1} - D_n A^{n+1} = 0 \end{aligned}$$

□

Anmerkung Der „Beweis“

$$\chi_A(A) = (\det(tE_n - A))(A) = \det(AE_n - A) = \det(A - A) = \det(0) = 0$$

funktioniert nicht, denn:

$$\underbrace{\underbrace{(\det(tE_n - A))}_{\in K[t]}(A)}_{\in M(n\times n,K)} \quad \underbrace{\det\underbrace{(AE_n - A)}_{\in M(n\times n,K)}}_{\in K}$$

Satz+Definition 18.22 V endlichdimensional, $I := \{f \in K[t] \mid f(\varphi) = 0\}$. Dann gilt:

1. Es gibt ein eindeutig bestimmtes, normiertes Polynom $\chi_\varphi^{min} \in K[t]$, sodass

$$I = \chi_\varphi^{min} K[t] := \{\chi_\varphi^{min} q \mid q \in K[t]\}$$

   χ_φ^{min} heißt das **Minimalpolynom** von φ. χ_φ^{min} ist das eindeutig bestimmte normierte Polynom kleinsten Grades mit $f(\varphi) = 0$.

2. $\chi_\varphi^{mit} \mid \chi_\varphi^{char}$, das heißt $\exists q \in K[t] : \chi_\varphi^{char} = q \cdot \chi_\varphi^{min}$

Analog konstruiert man für $A \in M(n \times n, K)$, das Minimalpolynom χ_A^{min}. Es ist $\chi_A^{min} = \chi_{\tilde{A}}^{min}$.

Beweis 1. Existenz: Wegen Satz von Cayley-Hamilton ist $\chi_\varphi^{char}(\varphi) = 0$. Somit ist $\chi_\varphi^{char} \in I$, insbesondere $I \neq \emptyset$.
$\deg(f) \mid f \in I, f \neq 0$ ist eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}_0$, hat somit ein minimales Element. $\implies \exists g \in I, g \neq 0 : \deg(g)$ minimal in $I \setminus \{0\}$ ist. Wir setzen

$$\chi_\varphi^{min} := \frac{1}{l(g)} g \implies \chi_\varphi^{min} \text{normiert}$$

und es ist

$$\chi_\varphi^{min}(\varphi) = \frac{1}{l(g)} gg(\varphi) = 0$$

das heißt $\chi_\varphi^{min} \in I$.
Behauptung: $I = \chi_\varphi^{min} K[t]$, denn:
„$\supseteq$“ Für $q \in K[t]$ ist $\left(\chi_\varphi^{min} q\right)(\varphi) = \underbrace{\chi_\varphi^{min}(\varphi)}_{=0} \cdot g(\varphi) = 0$, das heißt $\chi_\varphi^{min} q \in I$.
„$\subseteq$“ Sei $f \in I \implies \exists q, r \in K[t] : f = q\chi_\varphi^{min} + r, \deg(r) < \deg\left(\chi_\varphi^{min}\right)$

$$\implies 0 = f(\varphi) = \left(q\chi_\varphi^{min}\varphi + r\right)(\varphi) = q(\varphi) \cdot \chi_\varphi^{min}(\varphi) + r(\varphi) = r(\varphi) \implies r \in I$$

Wegen $\deg(r) < \deg\left(\chi_\varphi^{min}\right)$ und der Minimalität des Grades von χ_φ^{min} in $I \setminus \{0\}$ folgt $r = 0 \implies f = q\chi_\varphi^{min}$
Eindeutigkeit: Sei $\chi \in K[t]$ ein weiteres Polynom mit $I = \chi K[t] = \chi_\varphi^{min} K[t]$

$$\implies \chi = \chi \cdot 1 \in I = \chi_\varphi^{min} K[t] \implies \exists q \in K[t] : \chi = \chi_\varphi^{min} q$$

Analog $\exists p \in K[t] : \chi_\varphi^{min} = \chi p$

$$\implies \chi_\varphi^{min} = \chi p = \chi_\varphi^{min} qp \implies pq = 1 \implies p, q \in K^*$$

Wegen χ, χ_φ^{min} normiert folgt $p = q = 1$, also $\chi = \chi_\varphi^{min}$

2. Wegen $\chi_\varphi^{char}(\varphi) = 0$ nach Satz von Cayley-Hamilton folgt $\chi_\varphi^{char} \in I$.

$$\implies \exists q \in K[t] : \chi_\varphi^{char} = q\chi_\varphi^{min}$$

das heißt $\chi_\varphi^{min} \mid \chi_\varphi^{char}$ □

Bemerkung 18.23 V endlichdimensional, $\lambda \in K$. Dann gilt:

$$\chi_\varphi^{char}(\lambda) = 0 \iff \chi_\varphi^{min}(\lambda) = 0$$

Insbesondere haben χ_φ^{char} und χ_φ^{min} dieselben NS.

Beweis „ $\Longleftarrow$ “ Sei $\chi_\varphi^{min}(\lambda) = 0$. Nach 18.22 $\exists q \in K[t]$ mit $\chi_\varphi^{char} = q\chi_\varphi^{min}$

$$\implies \chi_\varphi^{char}(\lambda) = q(\lambda)\underbrace{\chi_\varphi^{min}(\lambda)} = 0$$

„ $\implies$ “ Sei $\chi_\varphi^{char}(\lambda) = 0 \implies \lambda$ ist EW von φ, sei $v \in V$ EV zum EW λ. Sei $\chi_\varphi^{min} = t^r + a_{r-1}t^{r-1} + \cdots + a_1 t + a_0$

$$\begin{aligned}\implies 0 = \big(\chi_\varphi^{min}(\varphi)\big)(v) &= \big(\varphi^r + a_{r-1}\varphi^{r-1} + \cdots + a_1\varphi + a_0 \,\mathrm{id}_V\big)(v)\\ &= \lambda^r v + a_{r-1}\lambda^{r-1}v + \cdots + a_1\lambda v + a_0 v\\ &= \underbrace{\big(\lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\big)}_{=\chi_\varphi^{min}(\lambda)} v\end{aligned}$$

$\implies \chi_\varphi^{min}(\lambda) = 0.$ □

Beispiel 18.24

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{Q}), \chi_A^{char} = (t-1)^2$ Wegen 18.22, 18.23 gilt: χ_A^{min} normiert, $\chi_A^{min} \mid \chi_A^{char}, \chi_A^{char}(1) = 0 \implies \chi_A^{min} \in \{t-1, (t-1)^2\}$ Wegen $A - E_2 = 0$ ist $\chi_A^{min} = t - 1$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{Q}) \implies \chi_A^{char} = (t-1)(t+1) \implies \chi_A^{min} = (t-1)(t+1)$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$

$$\implies \chi_A^{char} = (t+1)^2(t-3) \implies \chi_A^{min} = \{(t+1)(t-3), (t+1)^2(t-3)\}$$

Es ist $(A + E_n)(A - 3E_n) \neq 0$, also ist $\chi_A^{min} = (t+1)^2(t-3)$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \implies \chi_A^{char} = (t+1)^2(t-3)$

$$\chi_A^{min} \in \{(t+1)(t-3), (t+1)^2(t-3)\}$$

Es ist $(A + E_n)(A - 3E_n) = 0 \implies \chi_A^{min} = (t+1)(t-3)$

Satz 18.25 V endlichdimensional. Dann sind äquivalent:

1. φ diagonalisierbar

2. Das Minimalpolynom χ_φ^{min} zerfällt in Linearfaktoren und besitzt nur einfache NS, das heißt $\chi_\varphi^{min} = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_r)$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$

Beweis 1. $\implies$ 2. Sei φ diagonalisierbar, seinen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die verschiedenen EW von φ. Sei $v \in V$. Da φ diagonalisierbar, ist $V = \oplus_{i=1}^r \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_i)$ nach 18.19, das heißt es existieren $v_i \in \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_i), i = 1, \ldots, r$ mit $v = v_1 + \cdots + v_r$

$$\begin{aligned} \implies (\varphi - \lambda_r \operatorname{id}_V)(V) &= \varphi(v_1) + \cdots + \varphi(v_r) - \lambda_r v_1 - \cdots - \lambda_r v_r \\ &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r - \lambda_r v_1 - \cdots - \lambda_r v_r \\ &= (\lambda_1 - \lambda_r) v_1 + \cdots + (\lambda_{r-1} - \lambda_r) v_{r-1} \\ &\in \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_{r-1}) \end{aligned}$$

analog:

$(\varphi - \lambda_{r-1} \operatorname{id}_V) \circ (\varphi - \lambda_r \operatorname{id}_V)(v) \in \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_{r-2})$

Induktiv erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= (\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \circ (\varphi - \lambda_2 \operatorname{id}_V) \circ \cdots \circ (\varphi - \lambda_r \operatorname{id}_V)(V) \\ \implies 0 &= (\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \circ \cdots \circ (\varphi - \lambda_r \operatorname{id}_V) \\ \implies 0 &= ((t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_r))(\varphi) \end{aligned}$$

$\implies$ Es existiert $g \in K[t]$ mit $(t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_r) = g\chi_\varphi^{min}$. Wegen $\chi_\varphi^{min}(\lambda_1) = \cdots = \chi_\varphi^{min}(\lambda_r) = 0$ nach 18.23 existiert $h \in K[t]$ mit

$$\chi_\varphi^{min} = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_r) h = g\chi_\varphi^{min} h = gh\chi_\varphi^{min} \implies gh = 1$$

$\implies g, h \in K^*, \chi_\varphi^{min}$ normiert $\implies g = h = 1 \implies \chi_\varphi^{min} = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_r)$

2. $\implies$ 1. Sei $\chi_\varphi^{min} = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_1)$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ paarweise verschieden. Nach 18.23 sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die EW von φ. Beweis der Behauptung per Induktion nach $n := \dim V$
IA: $n = 1$ klar
IS: Sei $n > 1$, die Behauptung sei für $1, \ldots, n-1$ gezeigt.

a) Behauptung: $V = \ker(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \oplus \operatorname{im}(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)$, denn: Nach 7.6 $\exists v, s \in K[t]$ mit

$$(t-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_r) = q(t-\lambda_1) + s, \deg(s) < \deg(t-\lambda_1) = 1$$

das heißt s ist konstantes Polynom. Wegen

$$s(\lambda_1) = (\lambda_1-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(\lambda_1-\lambda_r) - q(\lambda_1)\underbrace{(\lambda_1-\lambda_1)}_{=0} \neq 0$$

das heißt $s \in K^*$. Einsetzen von φ liefert:

$$(\varphi-\lambda_2 \operatorname{id}_V)\circ\cdots\circ(\varphi-\lambda_r \operatorname{id}_V) = q(\varphi)\circ(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V) + s \operatorname{id}_V$$

$\implies \forall v \in V$ ist

$$\begin{aligned}
sv &= (\varphi-\lambda_2 \operatorname{id}_V)\circ\cdots\circ(\varphi-\lambda_r \operatorname{id}_V)(v) - q(\varphi)\circ(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)(v)\\
\implies v &= \frac{1}{s}\underbrace{(\varphi-\lambda_2 \operatorname{id}_V)\circ\cdots\circ(\varphi-\lambda_r \operatorname{id}_V)(v)}_{=:u} - \underbrace{q(\varphi)\circ(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)(v)}_{=:w}
\end{aligned}$$

$$(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)(u) = \frac{1}{s}(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)\circ\cdots\circ(\varphi-\lambda_r \operatorname{id}_V)(v) = \frac{1}{s}\underbrace{\chi_\varphi^{min}(\varphi)}_{=0}(v) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\implies n \in \ker(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)\\
w &= \frac{1}{s}q(\varphi)\circ(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)(v) = \frac{1}{s}((\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)\circ q(\varphi))(v) \in \operatorname{im}(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)\\
\implies V &= \ker(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V) + \operatorname{im}(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)
\end{aligned}$$

Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen ist

$$\dim\ker(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V) + \dim\operatorname{im}(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V) = \dim V$$

$\implies$ Summe ist direkt $\implies$ Behauptung.

b) Wir setzen $W := \operatorname{im}(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)$, dann ist

$$V = \ker(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)\oplus W = \underbrace{\operatorname{Eig}(\varphi,\lambda_1)}_{\neq 0}\oplus W$$

$\implies \dim W < \dim V$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\varphi\circ(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V) = \varphi\circ\varphi - \lambda_1\varphi = (\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)\circ\varphi\\
&\qquad\implies \varphi(W) = \varphi((\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)(V)) = (\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)(\varphi(V)) \leq (\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)(V) = W
\end{aligned}$$

Wir betrachten die Abbildung $\psi := \varphi|_W^W : W \to W$. Sei $\chi_\varphi^{min} = t^n + a_{n-1}t^{n-1} +$

$\dots + a_0$. $\implies \forall w \in W$ ist

$$\begin{aligned}\chi_\varphi^{min}(\psi)(w) &= (\psi_n + a_{n-1}\psi_{n-1} + \dots + a_0 \operatorname{id}_V)(w) \\ &= \psi^n(w) + a_{n-1}\psi^{n-1}(w) + \dots + a_0 w \\ &= \varphi_n(w) + a_{n-1}\varphi^{n-1}(w) + \dots + a_0 w \\ &= \big(\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \dots + a_0 \operatorname{id}_V\big)(w) \\ &= \underbrace{\big(\chi_\varphi^{min}(\varphi)\big)}_{=0}(w) = 0\end{aligned}$$

$$\implies \chi_\varphi^{min}\psi = 0 \implies \chi_\psi^{min} \mid \chi_\varphi^{min} = (t-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_r)$$

$\implies \chi_\psi^{min}$ zerfällt in Linearfaktoren und besitzt nur einfache Nullstellen. $\implies \psi$ diagonalisierbar, das heißt es existiert eine Basis von W aus EV zu $\psi = \varphi|_W^W$. Wegen $V = \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus W$ existiert nach 11.8 eine Basis von V aus EV zu φ, das heißt φ ist diagonalisierbar. $\square$

Beispiel 18.26

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$. Es ist $\chi_A^{min} = (t+1)^2(t-3) \implies A$ ist nicht diagonalisierbar.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$. Es ist $\chi_A^{min} = (t+1)(t-3) \implies A$ ist diagonalisierbar.

19 Dualraum

In diesem Abschnitt sei V ein K Vektorraum.

Definition 19.1 (Dualraum)

$$V^* := \operatorname{Hom}_K(V, K) = \{\varphi : V \to K \mid \varphi \text{ linear}\}$$

heißt der **Dualraum** von V, die Elemente aus V^* heißen **Linearformen** auf V.

Beispiel 19.2

1. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n, \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1$ ist eine Linearform auf $\mathbb{R}^n$.

2. $K = \mathbb{R}, V = \mathcal{C}[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$

$$\varphi : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

ist eine Linearform auf $\mathcal{C}[0,1]$

Bemerkung+Definition 19.3 V endlichdimensional $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V. Wir definieren für $i = 1, \ldots, n$ die linear Abbildung

$$v_i^* : V \to V, v_j \mapsto \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & 1 \neq j \end{cases}$$

Dann ist $\mathcal{B}^* := (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ ist eine Basis von V^*, die **duale Basis** zu $\mathcal{B}$.

Beweis

1. $\mathcal{B}^*$ ist linear unabhängig: Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K, \lambda_1 v_1^* + \cdots + \lambda_n v_n^* = 0. \implies$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ ist

$$0 = \underbrace{\lambda_1 v_1^*(v_i)}_{=0} + \cdots + \underbrace{\lambda_{i-1} v_{i-1}^*(v_i)}_{=0} + \underbrace{\lambda_i v_i^*(v_i)}_{=1} + \underbrace{\lambda_{i+1} v_{i+1}^*(v_i)}_{=0} + \cdots + \underbrace{\lambda_n v_n^*}_{=0} = \lambda_i$$

2. $\mathcal{B}^*$ ist ES von V^*: Sei $\varphi \in V^*$. Setze $\lambda_i := \varphi(v_i)$ für $i = 1, \ldots, n$

$$\implies (\lambda_1 v_1^* + \cdots + \lambda_n v_n^*)(v_i) = \lambda_i = \varphi(v_i), i = 1, \ldots, n$$
$$\implies \varphi = \lambda_1 v_1^* + \cdots + \lambda_n v_n^*$$

$\square$

Anmerkung Ist V unendlichdimensional mit Basis $(v_i)_{i \in I}$, dann ist $(v_i^*)_{i \in I}$ (analog definiert) linear unabhängig, aber kein ES von V.

Notation:
Elemente des K^n schreiben wir im Folgenden als Spaltenvektoren. Ist $\varphi \in (K^n)^* = \mathrm{Hom}_K(K^n, K)$, dann existiert nach LA1 ein eindeutig bestimmtes $A = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \in M(1 \times n, K)$ mit

$$\varphi = \tilde{A} : K^n \to K, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Es ist $A = M_{(e_1)}^{(e_1, \ldots, e_n)}(\varphi)$. Dementsprechende schreiben wir Elemente von $(K^n)^*$ als Zeilenvektoren.

Beispiel 19.4

1. $V = K^n, \mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n) \implies \mathcal{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ duale Basis zu $\mathcal{B}$ mit

$$e_i^* = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

Für die Abbildung aus 19.2.1 gilt $\varphi = e_1^* = (1, \ldots, 0)$.

2. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (v_1, v_2), v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es ist $e_1 = v_1, e_2 = v_2 - v_1$

$$\implies v_1^*(e_1) = v_1^*(v_1) = 1, v_1^*(e_2) = v_1^*(v_2 - v_1) = \underbrace{v_1^*(v_2)}_{=0} - \underbrace{v_1^*(v_1)}_{=1} = -1$$

$$\implies v_1^* = (1, -1)$$

$$\implies v_2^*(e_1) = v_2^*(v_1) = 0, v_2^*(e_2) = v_2^*(v_2 - v_1) = \underbrace{v_2^*(v_2)}_{=1} - \underbrace{v_2^*(v_1)}_{=0} = 1$$

$$\implies v_2^* = (0, 1)$$

Folgerung 19.5 V endlichdimensional, $v \in V, v \neq 0$. Dann existiert $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(v) \neq 0$

Beweis Ergänze die linear unbhängige Familie (v) zu einer Basis $(v, v_2, \dots, v_n)$ von V. Dann ist $(v^*, v_2^*, \dots, v_n^*)$ eine Basis von V^*, und es ist $v^*v = 1 \neq 0$. □

Anmerkung Die Aussage gilt auch ohne die Vorraussetzung „V endlichdimensional."

Folgerung 19.6 V endlichdimensional, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von $V, \mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ duale Basis zu $\mathcal{B}$. DAnn gibt es einen Isomorpismus

$$\psi_{\mathcal{B}} : V \to V^*, v_i \mapsto, v_i \mapsto v_i^* \quad (i = 1, \dots, n)$$

Insbesondere ist $\dim V = \dim V^*$

Beweis folgt direkt aus 19.3 □

Bemerkung+Definition 19.7 $U \subseteq V$ UVR

$$U^0 := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \forall u \in U\} \subseteq V^*$$

heißt der Annulator von U. U^0 ist ein UVR von V^*.

Beweis leicht nachzurechnen. □

Satz 19.8 V endlichdimensional, $U \subseteq V$ UVR, $(u_1, \dots, u_k)$ von $U, \mathcal{B} = (u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r)$ Basis von V. Dann ist die Teilfamilie $(v_1^*, \dots, v_r^*)$ von $\mathcal{B}^*$ eine Basis von U^0. Insbesondere ist $\dim U^0 = \dim V - \dim U$.

Beweis

1. $(v_1^*, \dots, v_r^*)$ linear unhabhängig, da Teilfamilie der Basis $\mathcal{B}^*$ von V^*
2. $\mathrm{Lin}((v_1^*, \dots, v_r^*)) = U^0$
   „$\subseteq$" $\varphi \in \mathrm{Lin}((v_1^*, \dots, v_r^*)) \implies$ Es existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit $\varphi = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_r v_r^*$.
   $\implies$ Für $i = 1, \dots, k$ ist $\varphi(u_i) = \lambda_1 v_1^*(u_i) + \dots + \lambda_1 v_r^*(u_i) = 0 \implies \varphi(u) = 0 \forall u \in U$
   „$\supseteq$" Sei $\varphi \in U^0$. Es existieren $\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit $\varphi = \mu_1 u_1^* + \dots + \mu_k^* + \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_r v_r^* \implies$ Für $i = 1, \dots, k$ ist $0 = \varphi(u_i) = \mu_i \implies \varphi \in \mathrm{Lin}((v_1^*, \dots, v_r^*))$
   □

Bemerkung+Definition 19.9 V, W K-Vr, $f : V \to W$ lineare Abbildung. Wir definieren $f^* : W^* \to V^*, \psi \mapsto f^*(\psi) := \psi \circ f$ f^* heißt die zu f duale **Abbildung**. Es gilt: f^* ist linear.

Beweis

- f^* ist wohldefiniert, da $f^*(\psi) = \psi \circ f \in V^* \forall \psi \in W^*$.
- f^* ist linear, denn: Seien $\varphi, \psi \in W^*, \lambda \in K$

$$\implies f^*(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi) \circ f = \varphi \circ f + \psi \circ f = f^*(\varphi) + f^*(\psi)$$

  $f^*(\lambda\varphi) = \lambda f^*(\varphi)$ analog. □

Bemerkung 19.10 V, W endlichdimensionaler K-VR. Dann ist die Abbildung

$$^* : \mathrm{Hom}_K(V, W) \to \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*), f \mapsto f^*$$

ist ein Isomorphismus von K-VR.

Beweis

1. * ist linear: Seien $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W), \psi \in W^*$

   $$\implies (f+g)^*(\psi) = \psi \circ (f+g) = \psi \circ f + \psi \circ g = f^*(\psi) + g^*(\psi) \implies (f+g)^* = f^* + g^*$$

   Rest analog.

2. * ist injektiv: Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ wit $f^* = 0 \implies \psi \circ f = 0 \forall \psi \in W^*$. Annahme: $f \neq 0 \implies \exists v \in V : f(v) \neq 0 \implies \exists \varphi \in W^* : \varphi(f(v)) = 0 \implies \circ\varphi \circ f \neq 0$ `

3. * ist surjektiv: Es ist $\dim \mathrm{Hom}_K(V, W) = \dim(V)\dim(W) = \dim(V^*)\dim(W^*) = \dim \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*) \implies {}^*$ surjektiv. □

Satz 19.11 (19.11) V, W endlichdimesionale K-VR, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Basen von V beziehungsweise W, $f : V \to W$ lineare Abbildung. Dann gilt:

$$M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(f^*) = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)\right)^T$$

Beweis Sei $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n), \mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m), M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ insbesondere

$$\begin{aligned} f(v_j) &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \\ \implies a_{ij} &= w_i^*(f(v_j)) = (w_i^* \circ f)(v_j) = f^*(w_i^*)(v_j) \end{aligned}$$

Sei $M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(f^*) = (b_{ij})_{\substack{1 \le j \le n \\ 1 \le i \le m}}$, dann ist

$$\begin{aligned} f^*(w_i^*) &= \sum_{j=1}^{n} b_{ji} v_j^* \\ \implies b_{ji} &= (f^*(w_i^*))(v_j) = a_{ij} \end{aligned}$$

□

Satz 19.12 V, W endlichdimesionale K-VR, $f : V \to W$ lineare Abbildung. Dann gilt:

1. $\mathrm{im}(f^*) = \ker(f)^0$
2. $\ker(f^*) = \mathrm{im}(f)^0$

Beweis 1. „$\subseteq$" Sei $\varphi \in \operatorname{im}(f^*) \subseteq V^* \implies \exists \psi W^* : f^*(\psi) = \varphi$, das heißt $\psi \circ f = \varphi$. $\implies \Big|_{\ker f} = 0 \implies \varphi \in (\ker f)^0$ „$\supseteq$" Sei $\varphi \in (\ker f)^0 \subseteq V^*$, das heißt $\varphi\Big|_{\ker f} = 0$. Zu zeigen: Es existiert ein $\psi \in W^*$ mit $\varphi = f^*(\psi) = \psi \circ f$. Sei $(v_1, \dots, v_k)$ eine Basis von $\ker f$, $(w_1, \dots, w_r)$ eine Basis von $\operatorname{im} f$, $u_i \in f^{-1}(\{w_i\}), i = 1, \dots, r \implies (v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_r)$ Basis von V. Wir ergänzen $(w_1, \dots, w_r)$ zu einer Basis $w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, w_m$ von W. $\implies$ Es existier genau eine lineare Abbildung $\psi : W \to K$ mit

$$\psi(w_i) = \begin{cases} \varphi(u_i) & 1 = 1, \dots, r \\ 0 & i = r+1, \dots, m \end{cases}$$

Für $i = 1, \dots, r$ ist $\varphi(u_i) = \psi(w_i) = \psi(f(u_i)) = (\psi \circ f)(u_i)$, und für $i = 1, \dots, k$ ist $\varphi(v_i) = 0 = \psi(f(v_i))$ Also: $\varphi = \psi \circ f = f^*(\psi)$, das heißt $\varphi \in \operatorname{im} f^*$

2. $\varphi \in \ker(f^*) \iff f^*(\varphi) = 0 \iff \varphi \circ f = 0 \iff \varphi(f(v)) = 0 \forall v \in V \iff \varphi\Big|_{imf} = 0 \iff \varphi \in (\operatorname{im} f)^0$ □

Folgerung 19.13 V, W endlichdimensionale K-VR, $f : V \to W$ lineare Abbildung. Dann gilt:

$$\operatorname{Rang}(f^*) = \operatorname{Rang}(f)$$

Beweis $\operatorname{Rang} f^* = \dim \operatorname{im} f^* = \dim(\ker f)^0 = \dim V - \dim \ker f = \dim \operatorname{im} f = \operatorname{Rang}(f)$□

Folgerung 19.14 $A \in M(m \times n, K)$. Dann gilt:

$$\operatorname{Zeilenrang}(A) = \operatorname{Spaltenrang}(A)$$

Beweis Es ist $A = M^{e_1,\dots,e_n}_{(e_1,\dots,e_m)}\left(\tilde{A}\right), A^T = M^{e_1^*,\dots,e_m^*}_{e_1^*,\dots,e_n^*}$

$$\operatorname{Spaltenrang}(A) = \dim \operatorname{im} \tilde{A} = \operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang}\left(\tilde{A}^*\right) = \operatorname{Spaltenrang}\left(A^t\right) = \operatorname{Zeilenrang}(A)$$

□

Definition 19.15 $V^{**} := (V^*)^* = \operatorname{Hom}_K(V^*, K)$ heißt der Bidualraum von V.

Satz 19.16 V endlichdimensional. Dann gibt es einen kanonischen (das heißt basisunabhängigen) Isomorphismus

$$i : V \to V^{**}, v \mapsto i_v, i_v : V^* \to K, \varphi \mapsto \varphi(v)$$

Beweis 1. i wohldefinier und linear: leicht nachzurechnen.

2. i injektiv: Sei $v \in \ker i \implies i_v = 0 \implies \forall \varphi \in V^* = \operatorname{Hom}_K(V, K) : \varphi(v) = 0 \implies v = 0$

3. $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$. Somit nach 12.15: i Isomorphismus □

Anmerkung • Im Gegensatz zu $\psi_{\mathcal{B}} : V \to V^*$ ist der Isomorphismus $i : V \to V^{**}$ unabhängig von der Wahl einer Basis, das heißt V und V^* sind unkanonisch isomorph, V nud V^{**} sind kanonisch isomorph (für V endlichdimensional).

• Ist V unendlichdimesionsal, dann liefert i zumindest nach eine kanonische Inklusion von V nach V^{**}. Diese ist jedoch die surjektiv.

20 Bilinearformen

In diesem Abschnitt sei V stets ein K-VR.

Definition 20.1 $\gamma : V \times V \to K$ heißt eine Bilinearform auf V, genau dann wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (B1) $\gamma(v_1 + v_2, w) = \gamma(v_1, w) + \gamma(v_2, w), \gamma(\lambda v, w) = \lambda\gamma(v, w)$
- (B2) $\gamma(v, w_1 + w_2) = \gamma(v, w_1) + \gamma(v, w_2), \gamma(v, \lambda w) = \lambda\gamma(v, w)$

$\forall v, w, v_1, v_2, w_1, w_2 \in V, \lambda \in K.$

Beispiel 20.2

1. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n, \gamma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \gamma\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_2$ ist eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$.
2. $K = \mathbb{R}, V = l[0,1], \gamma : l[0,1] \times l[0,1] \mapsto \mathbb{R}, \gamma(f,g) := \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ ist eine Bilinearform auf $l[0,1]$.
3. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, \gamma : \mathbb{R}^2 \times R^2 \to \mathbb{R}, \gamma\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2$ ist eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$.

Definition 20.3 V endlichdimensional, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V, γ Bilinearform auf V

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = (\gamma(v_i, v_j))_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \in M(n \times n, K)$$

heihßb die **Darstellungsmatrix** (**Fundamentalmatrix**) von γ bezüglich $\mathcal{B}$.

Beispiel 20.4

1. In 20.2a ist für $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) : M_{\mathcal{B}}(\gamma) = E_n$
2. In 20.2p ist für $\mathcal{B} = (e_1, e_2) : M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Bemerkung 20.5 V endlichdimensional, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V, γ Bilinearform auf V, $A = M_{\mathcal{B}}(\gamma)$, $\Phi_{\mathcal{B}} : K^n \to V$ Koordinatensystem zu $\mathcal{B}, v, w \in V, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)$, das heißt $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$,

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)$$

das heißt $w = q_1v_1 + \cdots + y_nv_n$. Dann gilt:

$$\gamma(v,w) = \Phi_{\mathcal{B}^{-1}}^T A \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) = x^t A y = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Beweis Es ist

$$\begin{aligned} y(v,w) &= \gamma(x_1v_1+\cdots+x_nv_n, y_1v_1+\cdots+y_nv_n) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_j\gamma(v_i,v_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n \gamma(v_i,y_j)y_j = x^TAy \end{aligned}$$ □

Bemerkung 20.6 V endlichdimensional, $\mathcal{B} = (v_1,\ldots,v_n)$ Basis von $V, A \in M(n\times n, K)$. Dann gilt: Durch

$$\Delta_A^{\mathcal{B}} : V\times V \to K, (v,w)\mapsto \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^TA\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)$$

ist eine Bilinearform auf V gegeben.

Beweis Nachrechnen. □

Beispiel 20.7 (wichtiger Spezialfall von 20.6)
$V = K^n, \mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n), A \in M(n\times n,K) \implies \Phi_{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{K^n}$. Durch

$$\Delta_A^{(e_1,\ldots,e_n)} : K^n\times K^n \to K, (v,w)\mapsto v^tAw$$

ist eine Bilinearform auf K^n gegeben. Wir setzen kurz $\Delta(A) := \Delta_A := \Delta_A^{(e_1,\ldots,e_n)}$

Bemerkung+Definition 20.8 $\mathrm{Bil}(V) := \{\gamma : V\times V\to K \mid \gamma \text{ ist Bilinearform }\}$ ist ein K-VR, ist ein UVR vom K-VR $\mathrm{Abb}(V\times V, K)$

Bemerkung 20.9 V endlichdimensional, $\mathcal{B} = (v_1,\ldots,v_n)$ Basis von V. Dann gilt: Die Abbildung

$$M_{\mathcal{B}} : \mathrm{Bil}(V) \to M(n\times n, K)$$

ist ein Isomorphismus von K-VR mit Umkehrabbildung

$$\Delta^{\mathcal{B}} : M(n\times n,K) \to \mathrm{Bil}(V), A\mapsto \Delta_A^{\mathcal{B}}$$

Beweis

1. $M_{\mathcal{B}}$ linear: nachrechnen.
2. $\Delta^{\mathcal{B}} \circ M_{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Bil}(V)}$, denn: Sei $\gamma \in \mathrm{Bil}(V)$

$$\begin{aligned} \implies \big(\Delta^{\mathcal{B}}\circ M_{\mathcal{B}}\big)(\gamma)(v_i,v_j) &= \Delta^{\mathcal{B}}_{M_{\mathcal{B}}(\gamma)}(v_i,v_j) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-v}(v_1)^tM_{\mathcal{B}}(\gamma)\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_j) \\ &= e_i^TM_{\mathcal{B}}(\gamma)e_j = \gamma(v_i,v_j) \end{aligned}$$

3. $M_{\mathcal{B}}\circ\Delta^{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{M(n\times n,K)}$, denn: Sei $A = (a_{ij}) \in M(n\times n,K), B = (b_{ij}) = \big(M_{\mathcal{B}}\circ\Delta^{\mathcal{B}}\big)(A) = M_{\mathcal{B}}\circ\Delta_A^{\mathcal{B}}$

$$b_{ij} = \Delta_A^{\mathcal{B}}(v_i,v_j) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_i)^TA\Phi_{\mathcal{B}}(v_j) = e_i^TAe_j = a_{ij}$$

$\implies B = A$ □

Satz 20.10 V endlichdimensional, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Basen von V, γ Bilinearform auf V. Dann gilt:

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

Beweis Für $v, w \in V$ ist

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{B}}(w) = \gamma(v, w) = \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}(w)$$

16.2.2: $\tilde{T}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}}$

$$\begin{aligned} &= \left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)\right)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) \\ &= \left(\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}\right)^T \left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) \\ \implies \Delta^{\mathcal{B}}(M_{\mathcal{B}}(\gamma))(v, w) &= \Delta^{\mathcal{B}}\left(\left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)(v, w) \\ \implies \Delta^{\mathcal{B}}(M_{\mathcal{B}}(\gamma)) &= \Delta^{\mathcal{B}}\left(\left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right) \end{aligned}$$

$\Delta^{\mathcal{B}}$ Isomorphismus

$$\implies M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$ □

Definition 20.11 V endlichdimensional, γ Bilinearform auf V. Wir setzen $\operatorname{Rang}(\gamma) := \operatorname{Rang} M_{\mathcal{B}}(\gamma)$, wobei $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist.

Anmerkung Dies ist wohldefiniert. (folgt aus 20.10, da die Matrizen $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ invertierbar sind)

Bemerkung+Definition 20.12 Es gilt:

1. Ist $\gamma : V \times V \to K$ eine Bilinearform, dann induziert γ die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \Gamma_l : V \to V^*, w \mapsto \gamma(\cdot, w) \qquad & \gamma(\cdot, w) : V \to K, v \mapsto \gamma(v, w) \\ \Gamma_r : V \to V^*, v \mapsto \gamma(v, \cdot) \qquad & \gamma(v, \cdot) : V \to K, v \mapsto \gamma(v, w) \end{aligned}$$

2. Jede lineare Abbildung $\Gamma : V \to V^*$ induziert Bilinearformen

$$\begin{aligned} \gamma_l : V \times V \to K, \gamma_l(v, w) := \Gamma(w)(v) \\ \gamma_r : V \times V \to K, \gamma_r(v, w) := \Gamma(v)(w) \end{aligned}$$

Die Zuordnungen aus 1., 2. induzieren den Isomorphismus $\operatorname{Bil}(V) \cong \operatorname{Hom}_K(V, V^*)$

Beweis Nachrechnen. □

Definition 20.13 γ Bilinearform auf V. γ heißt **nicht-ausgeartet** $\iff$ Γ_l und Γ_r sind injektiv.

$$\iff \gamma(v,w) = 0 \forall v \in V \implies w = 0$$

(Injektivität von Γ_l), und

$$\iff \gamma(v,w) = 0 \forall w \in V \implies v = 0$$

(Injektivität von Γ_r).
γ heißt **perfekt** $\iff$ Γ_l und Γ_r sind Isomorphismen.

Bemerkung 20.14 V endlichdimensional, γ Bilinearform auf V, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V, $\mathcal{B}^*$ duale Basis zu $\mathcal{B}$. Dann gilt:

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_l) = M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \left(M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_r)\right)^T$$

Beweis Behauptung: Es ist $\Gamma_l(v_i) = \gamma(v_1, v_i)v_1^* + \dots + \gamma(v_n, v_i)v_n^*$, denn $\Gamma_l(v_i)(v_j) = \gamma(v_j, v_i)$ nach Definition

$$(\gamma(v_1, v_i)v_1^* + \dots + \gamma(v_n, v_i)v_n^*)(v_j) = \gamma(v_j = v_i)$$

Somit: $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_l) = M_{\mathcal{B}}(\gamma)$.
Analog: $\Gamma_r(v_i) = \gamma(v_i, v_1)v_1^* + \dots + \gamma(v_i, v_n)v_n^* \implies M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_r) = (M_{\mathcal{B}}(\gamma))^T$ □

Folgerung 20.15 V endlichdimensional, γ Bilinearform auf V, $\mathcal{B}$ Basis von V. Dann sind äquivalent:

1. γ ist nich-ausgeartet
2. γ ist perfekt
3. $M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ invertierbar
4. Γ_l injektiv
5. Γ_r injektiv

Beweis 1. $\iff$ 2. wegen $\dim V = \dim V^*$ und 12.12
γ perfekt $\iff$ Γ_l, Γ_r Isomorphismen $\iff$ $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_l), M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_r)$ invertierbar $\iff$ $M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ invertierbar. $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_l), M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_r)$ $\iff$ Γ_l Isomorphismus $\iff$ $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}$ invertierbar. □

Definition 20.16 γ Bilinearform auf V.
γ heißt **symmetrisch** $\iff$ $\gamma(v,w) = \gamma(w,v) \forall v, w \in V$
γ heißt **antisymmetrisch** $\iff$ $\gamma(v,w) = -\gamma(w,v) \forall v, w \in V$
γ heißt **alterniernd** $\iff$ $\gamma(v,v) = 0 \forall v \in V$.

Anmerkung

- γ symmetrisch $\implies$ $\Gamma_l = \Gamma_r$
- Für $\operatorname{char}(K) \neq 2$ gilt: γ alternierned $\iff$ γ antisymmetrisch

- Für $\operatorname{char}(K) = 2$ gilt immer noch γ alternierend $\implies$ γ (anti)symmetrisch Die Umkehrung ist falsch: $\gamma : \mathbb{F}_2^3 \times \mathbb{F}_2^3 \to \mathbb{F}, \gamma(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ ist (anti)symmetrisch, aber nicht alternierend:
$$\gamma\left(\begin{pmatrix}\bar{1}\\ \bar{0}\\ \bar{0}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\bar{1}\\ \bar{0}\\ \bar{0}\end{pmatrix}\right) = \bar{1} \neq \bar{0}$$

Bemerkung 20.17 V endlichdimensional, $\mathcal{B}$ Basis von V, γ Bilinearform auf V. Dann gilt:

1. γ symmetrisch $\iff$ $M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ ist symmetrisch, das heißt $M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T = M_{\mathcal{B}}(\gamma)$
2. γ antisymmetrisch $\iff$ $M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ ist antisymmetrisch, das heißt $M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T = -M_{\mathcal{B}}(\gamma)$

Beweis 1. „$\implies$“ klar
„$\impliedby$“ Sei $M_{\mathcal{B}}(\gamma) = M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T$ $\implies$ Für v, w ist
$$\begin{aligned}\gamma(v, w) &= \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma)\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)^T \\ &= \underbrace{\left(\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma)\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}\right)^T}_{\in K} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma)\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v) = \gamma(w, v).\end{aligned}$$

2. analog. □

21 Quadratische Räume

Definition 21.1 (Quadratische Form) V K-VR. Eine Abbildung $q : V \to K$ heißt eine **quadratische Form** auf V, genau dann wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (Q1) $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v) \forall \lambda \in K, v \in V$
- (Q2) Die Abbildung $\varepsilon_q : V \times V \to K, (v, w) \mapsto q(v + w) - q(v) - q(w)$ ist eine (automatisch symmetrische) Bilinearform

Beispiel 21.2
$K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, q\left(\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ ist eine quatratische Form auf $\mathbb{R}^2$ (Q1) ist erfüllt, (Q2) ist ebenfalls erfüllt, denn
$$\begin{aligned}\varepsilon_q\left(\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\right) &= q\left(\begin{pmatrix}x_1 + y_1\\ x_2 + y_2\end{pmatrix}\right) - q\left(\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\right) - q\left(\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\right) \\ &= (x_1 + y_1)^2 + (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) + (x_2 + y_2)^2 - x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 - x_2^2 - y_1^2 - y_1y_2 - y_2^2 \\ &= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2\end{aligned}$$

das heißt ε_q ist symmetrische Bilinearform.

Bemerkung 21.3 char $K \neq 2, V$ K-VR, $\mathrm{SymBil}(V) := \{\gamma : V \times V \to K \mid \gamma$ ist symmetrische Bilinearform$\}$, Quad(
$\{q : V \to K \mid q$ ist eine quadratische Form$\}$. Dann sind die Abbildungen

$$\Phi : \mathrm{SymBil}(V) \to \mathrm{Quad}(V), \gamma \mapsto q_\gamma \quad q_\gamma : V \to K, v \mapsto \gamma(v, v)$$

$$\Psi : \mathrm{Quad}(V) \to \mathrm{SymBil}(V), q \mapsto \gamma_q \frac{1}{2}\varepsilon_q$$

zueinander inverse Bijektionen.

Beweis
1. Φ ist wohldefiniert, das heißt $q_\gamma \in \mathrm{Quad}(V) \forall \gamma \in \mathrm{SymBil}(V)$.
   Q1: Sei $\lambda \in K, v \in V \implies q_\gamma(\lambda v) = \gamma(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 \gamma(v, v) = \lambda^2 q_\gamma(v)$
   Q2:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{q_\gamma} &= q_\gamma(v + w) - q_\gamma(v) - q_\gamma(w) = \gamma(v + w, v + w) - \gamma(v, v) - \gamma(w, w) \\ &= \gamma(v, w) + \gamma(w, v) = 2\gamma(v, w) \end{aligned}$$

   $\implies \varepsilon_{q_\gamma}$ symmetrische Bilinearform.

2. Ψ ist wohldefiniert, denn für jedes $q \in \mathrm{Quad}(V)$ ist $\gamma_q = (1/2)\varepsilon_q \in \mathrm{SymBil}(V)$, da $\varepsilon_q \in \mathrm{SymBil}(V)$

3. $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathrm{Quad}(V)}$: Für $q \in \mathrm{Quad}(V), v \in V$ ist

$$(\Phi \circ \Psi)(q)(v) = \Phi(\gamma_q)(v) = \gamma_q(v, v) = \frac{1}{2}(q(v + v) - q(v) - q(v)) = q(v)$$

4. $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathrm{SymBil}(v)}$: Für $\gamma \in \mathrm{SymBil}(v), v, w \in V$ ist

$$(\Psi \circ \Phi)(\gamma)(v, w) = \Psi(q_\gamma)(v, w) = \frac{1}{2}\varepsilon_{q_\gamma}(v, w) = \gamma(v, w)$$

□

Anmerkung Philosophie dahinter: symmetrische Bilinearformen, quadratische Formen auf K sind für char $K \neq 2$ fast dasselbe. Für char $k = 2$ kann man die Abblidung Φ immer noch definieren, Φ ist im allgemeinen aber weder injekiv, noch surjektiv. Exemplarisch: Für $K = \mathbb{F}_2, V = \mathbb{F}_2^2$ liegt die quadratische Form $q : \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ liegt nicht im Bild vom Φ.

Für den Rest dieses Abschnittes sei K stets ein Körper mit char $K \neq 2$

Definition 21.4 (Quadratischer Raum) Ein **quadratischer Raum** ist ein Paar (V, γ), bestehend aus endlichdimensionalem K-VR V und einer symmetrischen Bilinearform γ auf V. $v, w \in V$ heißen **orthogonal** bezüglich $\gamma \iff \gamma(v, w) = 0$. $(v_i)_{i \in I}$ Familie von Vektoren aus V heißt orthogonal bezüglich $\gamma \iff \gamma(v_i, v_j) = 0 \forall i, j \in I, i \neq j$. Eine Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren aus V heißt eine **Orthogonalbasis** (OB) von $(V, \gamma) \iff (v_1, \ldots, v_n)$ ist eine Basis von V und ist orthogonal bezüglich γ.

Anmerkung
- Ist γ aus dem Kontext klar, wird es auch häufig weggelassen.

- Ist $\mathcal{B}$ eine Basis von V, dann gilt $\mathcal{B}$ OB von $(V, \gamma) \iff M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ ist eine Diagonalmatrix.

Definition 21.5 $(V, \gamma_v), (W, \gamma_w)$ quadratische Räume, $f : V \to W$ lineare Abbildung. f heißt **Homomophismus quadratischer Räume** $\iff$

$$\gamma_w(f(v_1), f(v_2)) = \gamma_v(v_1, v_2) \forall v_1, v_2 \in V$$

f heißt **Isomorphismus quadratischer Räume** $\iff$ f ist ein Isomorphismus von K-VR und ein Homomophismus quadratischer Räume. Notation: Wir schreiben häufig $f : (V, \gamma_v) \to (W, \gamma_w)$ für Abbildungen / Homomorphismen quadratischer Räume.

Anmerkung Ist $f : (V, \gamma_v) \to (W, \gamma_w)$ ein Isomorphismus quadratischer Räume, dann ist $f^{-1} : (W, \gamma_w) \to (V, \gamma_v)$ ebenfalls ein Isomorphismus quadratischer Räume, und es ist $\operatorname{Rang}(\gamma_v) = \operatorname{Rang}(\gamma_w)$ (nachrechnen...)

Ziel: Klassifiziere quadratische Räume bis auf Isomorphie quadratischer Räume.

Satz 21.6 (V, γ) quadratischer Raum. Dann besitzt (V, γ) eine OB.

Beweis per Induktion nach $n = \dim V$.
IA: $n = 0$: leere Familie ist OB.
IS: Sei $n \geq 1$

1. Fall: $\gamma(v, v) = 0 \forall v \in V$

$$\implies \forall v, w \in V : 0 = \gamma(v + w, v + w) = \gamma(v, v) + \gamma(w, w) + 2\gamma(v, w) = 2\gamma(v, w)$$

$\implies \gamma(v, w) = 0 \forall v, w \in V \implies$ Jede Basis von V ist OB von (V, γ)

2. $\exists v_1 \in V : \gamma(v_1, v_1) \neq 0$. Sei $\Gamma : V \to V^*, v \mapsto \gamma(v, \cdot)$ die zu γ gemäß 20.10 gehörige lineare Abbildung. Setze $H = \ker(\Gamma(v_1)) = \{w \in W \mid \gamma(v_1, w) = 0\}$

$$\implies \dim H = \dim V - \underbrace{\dim \operatorname{im}(\Gamma(v_1))}_{\leq K \text{ beachte: } \Gamma(v_1) \in V^*} \in \{n, n-1\}$$

Es ist $v_1 \notin H$ wegen $\gamma(v_1, v_1) \neq 0 \implies \dim H = n - 1 \implies V = \operatorname{Lin}((v_1)) \oplus H$. $(H, \gamma \mid_{H \times H})$ ist ein quadratischer Raum der Dimension $n - 1$. Wegen IV existiert eine OB $(v_2, \ldots, v_n)$ von $(H, \gamma \mid_{H \times H}) \implies (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ist OB von (V, γ) □

Folgerung 21.7 $A \in M(n \times n, K)$ symmetrisch. Dann existiert $T \in \operatorname{GL}(n, K)$, sodass $T^T A T$ eine Diagonalmatrix.

Beweis A definiert eine symmetrische Bilinearform $\Delta(A) = \Delta_A^{(e_1, \ldots, e_n)}$ auf K^n (vergleiche 20.7, $\Delta(A)(v, w) = v^T A w$). Nach 21.6 existiert eine OB $\mathcal{B}$ von $(K^n, \Delta(A)) \implies M_{\mathcal{B}}(\Delta(A))$ ist Diagonalmatrix, und es ist

$$M_{\mathcal{B}}(\Delta(A)) = \underbrace{\left(T^{\mathcal{B}}_{(e_1, \ldots, e_n)}\right)^T}_{=T^T} \underbrace{M_{(e_1, \ldots, e_n)}(\Delta(A))}_{A} \underbrace{T^{\mathcal{B}}_{(e_1, \ldots, e_n)}}_{=:T}$$

□

Folgerung 21.8 (V, γ) quadratischer Raum, $n = \dim V$, $r = \mathrm{Rang}(\gamma)$. Dann existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K \setminus \{0\}$ und ein Isomorphismus von quadratischen Räumen

$$\Phi : \left(K^n, \Delta \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} \right) \right) \to (V, \gamma)$$

Beweis Wegen 21.6 existiert eine OB $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von (V, γ). Nach Umordnung von $v_1, \ldots, v_n$ sei $\gamma(v_i, v_i) \neq 0$ für $i = 1, \ldots, s$ und $\gamma(v_i, v_i) = 0$ für $i = s+1, \ldots, n$

$$\implies M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_s & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in K \backslash \{0\}, r = \mathrm{Rang}(\gamma) = \mathrm{Rang}\, M_{\mathcal{B}}(\gamma) = s$$

Setze $\Phi := \Phi_{\mathcal{B}} : K^n \to V, e_i \mapsto v_i$ (Koordinatensystem zu $\mathcal{B}$, vegleiche 15.2). Φ ist Isomorphismus

$$\begin{aligned} \gamma(\Phi_{\mathcal{B}}(v), \Phi_{\mathcal{B}}(w)) &= \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(\Phi_{\mathcal{B}}(v))^T M_{\mathcal{B}}(\gamma) \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(\Phi_{\mathcal{B}}(w)) = v_t M_{\mathcal{B}}(\gamma) w \\ &= v^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} w = \Delta \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{pmatrix} \right) (v, w) \quad \square \end{aligned}$$

Anmerkung $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sind im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Frage: Kann man über speziellen Körpern mehr sagen? Wir werden $K = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ untersuchen.

Satz 21.9 (V, γ) quadratischer Raum über $\mathbb{C}$, $n = \dim V$, $r = \mathrm{Rang}\,\gamma$. Dass existiert eine Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ von (V, γ) mit

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Insbesondere existiert ein Isomorphismus quadratischer Räume $\Phi \left(\mathbb{C}^n, \Delta \left(\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right) \to (V, \gamma)$

Beweis Sei $(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n)$ eine Orthogonalbasis von (V, γ). Setze

$$v_i := \begin{cases} \tilde{v}_i & \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\tilde{v}_i, \tilde{v}_i}} \tilde{v}_i & \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) \neq 0 \end{cases}$$

Hierber ist $\sqrt{\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)}$ eine komplexe Zahl α mit $\alpha^2 = \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)$. Falls $\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) \neq 0$, dass ist

$$\gamma(v_i, v_i) = \gamma\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)}}, \frac{1}{\sqrt{\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)}}\right) = \frac{1}{\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)} \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) = 1$$

Außerdem: $\gamma(v_i, v_j) = 0 \forall i \neq j$, da $\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) = 0 \forall i \neq 0$. Setze $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_n)$. Nach eventueller Umnummerierung von $v_1, \ldots, v_n$ ist

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei $r = \text{Rang}\, M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \text{Rang}\, \gamma$. □

Folgerung 21.10 $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ symmetrisch, $r = \text{Rang}\, A$. Dass existiert ein $T \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$, sodass

$$T^T A T = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Folgerung 21.11 (21.11) $(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$ quadratische Räume über $\mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

1. Es gibt einen Isomorphismus quadratischer Räume $(V, \gamma_V) \to (W, \gamma_W)$
2. $\dim V = \dim W$ und $\text{Rang}\, \gamma_V = \text{Rang}\, \gamma_W$

Beweis 1. $\implies$ 2. vergleiche Anmerkung nach 21.5

2. $\implies$ 1. Sei $n = \dim V = \dim W, r = \text{Rang}\, \gamma_V = \text{Rang}\, \gamma_W. \implies (V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$ sind als quadratische Räume isomorph zu $\left(\mathbb{C}^n, \Delta\left(\begin{pmatrix} E_r & \\ & \end{pmatrix}\right)\right)$, also auch $(V, \gamma_V) \cong (W, \gamma_W)$

   □

Definition 21.12 (V, γ) quadratischer Raum, $U_1, \ldots, U_m \subseteq V$ UVR mit $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$. Die direkte Summe heißt **orthogonale direkte Summe**

$$\left(V = U_1 \hat{o}plus \ldots \hat{\oplus} U_m\right) \overset{\text{Def}}{\iff} \gamma(u_i, u_j) = 0 \forall u_i \in U_i, u_j \in U_j, i \neq j$$

alternativ ⊥

Satz 21.13 (V, γ) quadratischer Raum über $\mathbb{R}$, $n = \dim V$. Dann existiert eine Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ von (V, γ), sowie $r_+, r_- \in \{0, \dots, \dim V\}$ mit

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Insbesondere existiert ein Isomorphismus quadratischer Räume

$$\left(\mathbb{R}^n, \Delta\left(\begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\right)\right) \to (V, \gamma)$$

Die Zahlen r_+, r_- sind unabhängig von der Wahl einer solchen Basis. Wir nennen $\mathrm{Signatur}(\gamma) := (r_+, r_-)$ heißt die **Signatur** von γ.

Beweis 1. Sei $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ eine Orthogonalbasis von (V, γ). Wir setzen

$$v_i := \begin{cases} \tilde{v}_i & \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)|}} & \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) \neq 0 \end{cases}$$

Falls $\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) \neq 0$, dass ist

$$\begin{aligned} \gamma(v_i, v_i) &= \gamma\left(\frac{1}{\sqrt{|\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)|}}\tilde{v}_i, \frac{1}{\sqrt{|\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)|}}\tilde{v}_i\right) \\ &= \frac{1}{|\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)|}\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) \in \{\pm 1\} \end{aligned}$$

$\gamma(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$. Setze $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_n)$. Nach eventueller Umnummerierung von $v_1, \dots, v_n$ ist

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ 1 & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

mit geeigneten $r_+, r_- \in \{0, \dots, n\}$

2. r_+, r_- sind basisunabhängig: Es ist $r_+ + r_- = \operatorname{Rang}\gamma$, dies ist basisunabhängig. Es gilt zu zeigen: r_+ ist basisunabhängig. Setze $V_+ := \operatorname{Lin}\big((v_1, \dots, v_{r_+})\big), V_- = \operatorname{Lin}\big((v_{r_++1}, \dots, v_{r_++r_-})\big), V_0 := \operatorname{Lin}\big((v_{r_++r_-+1}, \dots, v_n)\big) \implies V = V_+ \hat{\oplus} V_- \hat{\oplus} V_0$. Setze

$$s := \max\{\dim W \mid W \subseteq V \text{ UVR mit } \gamma(w,w) > 0 \forall w \in W, w \neq 0\}$$

dies ist wohldefiniert. V_+ ist ein UVR von V mit $\gamma(w,w) > 0 \forall w \in V_+, w \neq 0$, denn für $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{r_+} v_{r_+}$ ist

$$\gamma(w,w) = \lambda_1^2 \underbrace{\gamma(v_1,v_1)}_{=1} + \dots + \lambda_{r_+}^2 \underbrace{v_{r_+}, v_{r_+}}_{=1} = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_{r_+}^2 > 0 \text{ falls } w \neq 0$$

$\implies s \geq \dim V_+ = r_+$ Annahme: Es existiert ein UVR $W \subseteq V$ mit $\gamma(w,w) > 0 \forall w \in W, w \neq 0$ und $\dim W > r_+$

$$\implies \underbrace{\dim W}_{>r_+} + \underbrace{\dim V_-}_{=r_-} + \underbrace{\dim V_0}_{n-(r_++r_-)} > n$$

$$\begin{aligned}
\implies \dim\big(W \cap (V_- \hat{\oplus} V_0)\big) &= \dim W + \dim\big(V_- \hat{\oplus} V_0\big) - \dim\big(W + (W_- \hat{\oplus} V_0)\big) \\
&= \underbrace{\dim W + \dim V_- + \dim V_0}_{>n} - \underbrace{\dim\big(W + (V_- \hat{\oplus} V_0)\big)}_{\leq n, \text{ da } W + (V_- \hat{\oplus} W_0) \text{ UVR von } V} \\
&=> 0
\end{aligned}$$

$\implies$ Es existiert $w \in W, w \neq 0$ mit $w \in W_- \hat{\oplus} V_0$.
$\implies$ Es existiert $w_- \in V_-, w_0 \in V_0$ mit $w = w_- + w_0$
$\implies \gamma(w,w) = \gamma(w_- + w_0, w_- + w_0) = \underbrace{\gamma(w_-, w_-)}_{<0} + \underbrace{\gamma(w_0, w_0)}_{=0} < 0$ Andererseits: $\gamma(w,w) > 0$ wegen $w \in W, w \neq 0$`. Somit: $r_+ = s$, insbesondere unabhängig von Basiswahl. ☐

Folgerung+Definition 21.14 (Sylvesterscher Trägheitssatz) $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Dann existieren $T \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{R}), r_+, r_- \in \{0, \dots, n\}$ mit

$$T^T A T = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Die Zahlen r_+, r_- sind unabhängig von der Wahl eines solchen T. $\operatorname{Signatur}(A) := (r_+, r_-)$ heißt **Signatur** von A.

Beweis folgt aus 21.13 (analog zum Beweis von 21.7). ☐

Anmerkung Ist $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, dann haben die Matrixen A und $S^T AS$ diesselbe Signatur, denn: Ist $\tilde{T} \in \mathrm{GL}(, \mathbb{R})$ mit

$$\tilde{T}^T(S^T AS)T = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

, dann ist

$$\left(S\tilde{T}\right)^T A\left(S\tilde{T}\right) = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Folgerung 21.15 $(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$ quadratische Räume über $\mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

1. Es gibt einen Isomorphismus quadratischer Räume $(V, \gamma_V) \to (W, \gamma_W)$
2. $\dim V = \dim W$ und $\mathrm{Signatur}(\gamma_V) = \mathrm{Signatur}(\gamma_W)$

Beweis 1. $\implies$ 2. Für $\mathrm{Signatur}(\gamma_V) = \mathrm{Signatur}(\gamma_W)$ verwende Charakterisierung von r_+ aus dem Beweis von 21.3.

2. $\implies$ 1. aus 21.13, analog zum Beweis von 21.11 □

Anmerkung Man kann Folgerung 21.11/21.15 verwenden, um quadratische Formen über $\mathbb{C}$ beziehungsweise $\mathbb{R}$ bis auf Äquivalenz zu klassifizieren (vergleiche Übungen)

22 Euklidische Räume

Definition 22.1 $V\mathbb{R}$ -VR, $\gamma : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform. γ heißt

- **positiv definit** $\overset{\text{Def}}{\iff} \gamma(v, v) > 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$
- **positiv semidefinit** $\overset{\text{Def}}{\iff} \gamma(v, v) \geq 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$
- **negativ definit** $\overset{\text{Def}}{\iff} \gamma(v, v) < 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$
- **negativ semidefinit** $\overset{\text{Def}}{\iff} \gamma(v, v) \leq 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$
- **indefinit** $\overset{\text{Def}}{\iff}$ γ ist weder positiv noch negativ semidefinit.

Eine positiv definite symmetrische Bilinearform nennt man auch ein **Skalarprodukt**.

Beispiel 22.2

1. $V = \mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ ist ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$. Positiv Definitheit:

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0, \text{ falls } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ heißt das **Standardskalarprodukt** auf dem $\mathbb{R}^n$.

2. $V = \mathcal{C}[0,1]$
$$\gamma : \mathcal{C}[0,1] \times \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}, (f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$$
ist ein Skalarprodukt.

Anmerkung Um die Definitheit einer symmetrischen Bilinearform nachzuweisen, genügt es nicht, das Verhalten auf den Basisvektoren zu untersuchen: Sei $\gamma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$\gamma = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right)$$
das heißt
$$M_{(e_1,e_2)}(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
Dann ist $\gamma(e_1,e_1) = 1, \gamma(e_2,e_2) = 1$ aber
$$\gamma\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 < 0$$
das heißt γ ist indefinit.

Definition 22.3 Ein **Euklidischer Raum** ist ein Paar (V,γ), bestehend aus einem endlichdimensionalen $\mathbb{R}$ -VR V und einem Skalarprodukt γ auf V. Für den Rest dieses Abschsittes sei (V,γ) ein Euklidischer Raum.

Definition 22.4 $v \in V$
$$\|v\| := \sqrt{\gamma(v,v)}$$
heißt die **Norm** auf V.
$(v_i)_{i\in I}$ Familie von Vektoren aus V heißt **orthonormal** $\overset{\text{Def}}{\iff}$ $(v_i)_{i\in I}$ ist orthogonal und $\|v_i\| = 1 \forall i \in I$.
$\mathcal{B} = (v_1,\dots,v_n)$ heißt *Orthonormalbasis von $V((V,\gamma))$ (ONB) $\iff$ $\mathcal{B}$ ist Basis von V und $\mathcal{B}$ ist orthonormal.

Bemerkung 22.5 $(v_1,\dots,v_n)$ orthogonale Familie von Vektoren aus $V \setminus \{0\}$. Dann gilt:

1. $\left(\frac{v_1}{\|v_1\|},\dots,\frac{v_n}{\|v_n\|}\right)$ ist eine orthonormale Familie
2. $(v_1,\dots,v_n)$ ist linear unabhängig.

Beweis 1. $\|v_i\|^2 = \gamma(v_i,v_i) \neq 0$, da γ positiv definit und $v_i \neq 0$.
$$\gamma\left(\frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_j}{\|v_j\|}\right) = \frac{1}{\|v_i\|\|v_j\|}\gamma(v_i,v_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \frac{\gamma(v_i,v_i)}{\|v_i\|^2} = 1 & i = j \end{cases}$$

2. Sei $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$

$$\begin{aligned} &\implies \lambda_1\gamma(v_1, v_i) + \cdots + \lambda_n\gamma(v_n, v_i) = 0 \\ &\implies \lambda_i = 0 \end{aligned}$$ □

Bemerkung 22.6 Es gilt:

1. (V, γ) besitzt eine Orthonormalbasis
2. γ ist nicht-ausgeartet
3. Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V mit $M_{\mathcal{B}}(\gamma) = E_n$, wobei $n = \dim V$

Beweis Der quadratische Raum (V, γ) hat eine Orthogonalbasas $(v_1, \ldots, v_n)$

$$\implies \mathcal{B} := \left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \ldots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right)$$

ist eine Orthonormalbasis von (V, γ). Es ist $M_{\mathcal{B}}(\gamma) = E_n$ ($\implies$ 3.), insbesodere ist $M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ invertierbar $\implies$ γ nich ausgeartet $\implies$ 2. □

Bemerkung 22.7 $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ Orthonormalbasis von $(V, \gamma), v \in V$. Dann gilt: Ist $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$, dann ist $\lambda_i = \gamma(v, v_i) \forall i = 1, \ldots, n$

Beweis $\gamma(v, v_i) = \lambda_1\gamma(v_1, v_i) + \cdots + \lambda_n\gamma(v_n, v_i) = \lambda_i \underbrace{\gamma(v_i, v_i)}_{=1} = \lambda_i$ □

Bemerkung+Definition 22.8 $U \subseteq V$ Untervektorraum.

$$U^\perp := \{v \in V \mid \gamma(v, u) = 0 \forall u \in U\}$$

heißt das **orthogonale Komplement** zu U. $U^\perp$ ist ein Untervektorraum von V.

Beweis leicht nachzurechnen □

Satz+Definition 22.9 $U \subseteq V$ Untervektorraum. Dann gilt:

1. $V = U \oplus U^\perp$
2. $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$
3. $\left(U^\perp\right)^\perp = U$
4. Ist $(u_1, \ldots, u_m)$ eine Orthogonalbasis von $(U, \gamma\mid_{U\times U})$, und ist $v \in V$ mit $v = u + v', u \in U, v' \in U^\perp$, dass ist

$$u = \sum_{j=1}^{m} \gamma(v, u_j) u_j$$

Die lineare Abbildung

$$\pi_u : V \to U, v \mapsto \sum_{j=1}^{m} \gamma(v, u_j) u_j$$

hießt die **Orthogonalprojektion** von V auf U.

Beweis 1. $U + U^\perp = V$, denn:
Sei $(u_1, \ldots, u_m)$ eine Orthogonalbasis von $(U, \gamma\mid_{n\times n})$, $v \in V$. Setze

$$v' := V - \sum_{j=1}^{m} \gamma(v, u_j) u_j$$

$$\implies \gamma\big(v', u_i\big) = \gamma(v, u_i) - \sum_{j=1}^{m} \gamma(v, u_j)\gamma(u_j, u_i) = \gamma(v, u_i) - \gamma(v, u_i) = 0 \forall i = 1, \ldots, m$$

$$\implies v' \in U^\perp$$

$$\implies v = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \gamma(v, u_j) u_j}_{\in U} + \underbrace{v'}_{\in U^\perp}$$

$$\implies V = U + U^\perp$$

$U \cap U^\perp = \{0\}$, denn: $u \in U \cap U^\perp \implies \gamma(u, u) = 0 \implies u = 0$ (da γ Skalarprodukt)

2. aus 1., 2.

3. Sei $u \in U \implies \gamma(u, w) = 0 \forall w = U^\perp \implies u \in \big(U^\perp\big)^\perp$, das heißt $U \subseteq U^{\perp\perp}$. Wegen $\dim\big(U^\perp\big)^\perp = \dim V - \dim U^\perp = \dim V - (\dim V - \dim U) = \dim U$ foglt $U = U^{\perp\perp}$
□

Anmerkung Insbesondere gilt für alle $v \in V : v - \pi_U(v) \in U^\perp$

Beispiel 22.10
$(V, \gamma) = \big(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle\big), U = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) \implies U^\perp = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$, denn $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \in U^\perp$ wegen $\langle\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\rangle = 0$, und es ist $\dim U^\perp = 2 - \dim U = 2 - 1 = 1$. Jedes Element aus V lässt sich eindeutig schreiben als

$$v = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

das heißt

$$\pi_u : v = \underbrace{\lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\mu\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}_{\in U^\perp} \mapsto \lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \gamma\left(v, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)1;\vec{1}$$

Frage: Wie bestimmt man explizit eine Orthogonalbasis eines Euklidischen Raumes?

Algorithmus 22.11 (Gram-Schmidt-Verfahren) **Eingabe**: $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V.
Ausgabe: Orthonormalbasis $(w_1, \ldots, w_n)$ von (V, γ)
Durchführung:

1. Setze
$$w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$$
2. Setze für $k = 2, \dots, n$
$$\tilde{w}_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \gamma(v_k, w_i) w_i, \quad w_k := \frac{\tilde{w}_k}{\|\tilde{w}_k\|}$$
3. $(w_1, \dots, w_n)$ ist eine Orthonormalbasis von (V, γ)

Beweis Sei $U_k := \mathrm{Lin}((v_1, \dots, v_k))$ für $k = 1, \dots, n$. Wir zeigen per Induktion nach k, dass $(w_1, \dots, w_k)$ eine Orthogonalbasis von $(U_k, \gamma \mid_{U_k \times U_k})$ ist (Behauptung folgt dann aus $k = n$).
Induktionsanfang: $k = 1$ klar
Induktionsschritt: Sei $\pi_{k-1} := \pi_{U_{k-1}} : V \to V_{k-1}$ die orthogonale Projektion.
$$\implies \tilde{w}_k = v_k - \pi_{k-1}(v_k)$$
da $(w_1, \dots, w_{k-1})$ Orthogonalbasis von U_{k-1} nach Induktionsvorraussetzung. $\implies \tilde{w}_k \in U_{k-1}^{\perp}$.
Außerdem $\tilde{w}_k \neq 0$, da sonst $v_k = \pi_{k-1}(v_k) \in U_{k-1}$` zu $(v_1, \dots, v_k)$ Basis von U_k
$$\implies w_k = \frac{\tilde{w}_k}{\|\tilde{w}_k\|} \in U_{k-1}^{\perp}$$
und es ist
$$\gamma(w_k, w_i) = \begin{cases} 0 & i = 1, \dots, k-1 \\ 1 & i = k \end{cases}$$
$\implies (w_1, \dots, w_k)$ Orthogonalbasis von U_k $\square$

Beispiel 22.12
Wir betrachten $\left(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle\right), U = \mathrm{Lin}((v_1, v_2))$ mit $v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Gesucht ist eine Orthogonalbasis von U bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Setze
$$w := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\tilde{w}_2 = v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\implies \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \text{ ist eine Orthogonalbasis von } U.$$

Definition 22.13 $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. A heißt **positiv definit** (Notation: $A > 0$) $\overset{\text{Def}}{\iff}$ Die symmetrische Bilinearform

$$\Delta(A) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^T A y$$

ist positiv definit.

Bemerkung 22.14 $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Dass sind äquivalent:

1. $A > 0$
2. $\exists T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : A = T^T T$

Beweis 1. $\implies$ 2. Sei $A > 0 \implies (\mathbb{R}^n, \Delta(A))$ Euklidischer Raum. Sei $\mathcal{B}$ Orthogonalbasis von $(\mathbb{R}^n, \Delta(A))$ $T := T_{\mathcal{B}}^{(e_1,\dots,e_n)}$

$$\implies E_n = M_{\mathcal{B}}(\Delta(A)) = \underbrace{\left(T^{\mathcal{B}}_{(e_1,\dots,e_n)}\right)^T}_{=(T^{-1})^T} \underbrace{M_{(e_1,\dots,e_n)}(\Delta(A))}_{=A} \underbrace{T^{\mathcal{B}}_{(e_1,\dots,e_n)}}_{=T^{-1}}$$

$$\implies A = T^T T$$

2. Sei $A = T^T T$ für ein $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Für $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ ist

$$\Delta(A)(x, x) = x^t A w = x^t T^t T x = (Tx)^T T x = \langle Tx, Tx \rangle > 0$$ □

Anmerkung 1., 2. sind äquivatent zu

3. Es existiert eine obere Dreiecksmatrix P mit Diagonaleinträgen, sodass $A = P^T P$ (siehe Übungen). Obiges P ist sogar eindeutig bestimmt, eine solche Zerlegung heißt Cholesky-Zerlegung.

Satz 22.15 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $v, w \in V$. Dann gil:

$$|\gamma(v, w)| \leq \|v\| \|w\|$$

Gleichheit gilt hierbar genau dann, wenn (v, w) linear abhängig.

Beweis 1. Beweis der Ungleichung: Falls $w = 0$, dass fertig. Im Folgenden sei $w \neq 0$. Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist

$$0 \leq \gamma(\lambda v + \mu w, \lambda v + \mu w) = \lambda^2 \gamma(v, v) + \mu^2 \gamma(w, w) + 2\lambda\mu\gamma(v, w)$$

Setze $\lambda := \gamma(w,w) > 0$, dividiere durch λ

$$0 \leq \gamma(v,v)\gamma(w,w) + \mu^2 + 2\mu\gamma(v,w)$$

Setze $\mu := -\gamma(v,w)$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \gamma(v,v)\gamma(w,w) + \gamma(v,w)^2 - 2\gamma(v,w)^2 \\ \gamma(v,w)^2 &\leq \gamma(v,v)\gamma(w,w) \\ |\gamma(v,w)| &\leq \|v\|\|w\| \end{aligned}$$

2. Gleichheitsaussage: Für $w = 0$: (v,w) linear abhängig und „=“ gilt. Ab jetzt also $w \neq 0$.
” $\Longleftarrow$ “ Sei (v,w) linear abhängig $\implies \exists \lambda \in K : v = \kappa w$

$$\implies |\gamma(v,w)|^2 = |\gamma(\lambda w,w)|^2 = \left|\lambda^2\right||\gamma(w,w)|^2 = |\gamma(w,w)||\gamma(\lambda w,\lambda w)| = \|w\|^2\|\lambda w\|^2$$

$$\implies |\gamma(v,w)| = \|w\|\|\lambda w\| = \|w\|\|v\|.$$

” $\Longrightarrow$ “ Es gelte, sei also $|\gamma(v,w)| = \|v\|\|w\|$. Führe die Rechnung wie in 1. rückwärts durch: Mit $\lambda := \gamma(w,w)$, $\mu = -\gamma(v,w)$ folgt dass

$$\gamma(\lambda v + \mu w, \lambda v + \mu w) = 0 \implies \lambda v + \mu w = 0 \implies (v,w) \text{ linear abhängig}$$ □

Bemerkung 22.16 (Eigenschaften der Norm) $v,w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2. $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Beweis 1. klar, da γ positiv definit

2. $\|\lambda v\|^2 = \gamma(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2\gamma(v,v) = \lambda^2\|v\| \implies \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$

3.

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 &= \gamma(v+w, v+w) = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\gamma(v,w) \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2|\gamma(v,w)| \\ &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2 \\ \implies \|v+w\| &\leq \|v\| + \|w\| \end{aligned}$$ □

Bemerkung 22.17 $v,w \in V$. Dann gilt:

1. $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \iff \gamma(v,w) = 0$ — Satz des Pythagoras
2. $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$ — Parallelogrammgleichung

Beweis 1. $\|v+w\|^2 = \gamma(v+w, v+w) = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\gamma(v,w) \implies$ Behauptung

2. $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = \gamma(v+w,v+w) + \gamma(v-w,v-w) = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$ $\square$

Anmerkung $V\mathbb{R}$ Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit den Eigenschaften 1. bis 3. aus 22.16 heißt eine Norm auf V, $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Man kann zeigen: Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, in dem die Parallelogrammgleichung gilt, dann ist durch

$$\gamma(v,w) := \frac{1}{2}\Big(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\Big)$$

ein Skalarprodukt auf V mit $\|v\| = \sqrt{\gamma(v,v)}$, das heißt in diesen Fällen ist (V,γ) ein euklidischer Vektorraum, dessen Norm mit die gegebenen übereinstimmt.

23 Die orthogonale Gruppe

Definition 23.1 $(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$ Euklidische Räume, $\varphi : V \to W$ lineare Abbildung. φ heißt **orthogonal** $\overset{\text{Def}}{\iff}$ φ ist ein Homomorphismus quadratischer Räume, das heißt

$$\gamma_W(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = \gamma_V(v_1, v_2) \forall v_1, v_2 \in V$$

Bemerkung 23.2 $(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$ Euklidische Räume, $\varphi : V \to W$ orthogonale Abbildung. Dann gilt:

1. $\|\varphi(v)\|_W = \|v\|_V \forall v \in V$
2. $v_1 \perp v_2 \iff \varphi(v_1) \perp \varphi(v_2) \forall v_1, v_2 \in V$
3. φ ist injektiv

Beweis 1. $\|\varphi(v)\|_W^2 = \gamma_W(\varphi(v), \varphi(v)) = \gamma_V(v,v) = \|v\|_V^2$

2. $v_1 \perp v_2 \iff \gamma_V(v_1, v_2) = 0 \iff \gamma_W(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = 0 \iff \varphi(v_1) \perp \varphi(v_2)$

3. Sei $v \in V$ mit $\varphi(v) = 0 \implies \|\varphi(v)\|_W = 0 \implies \|v\|_V = 0 \implies v = 0$ $\square$

Bemerkung 23.3 (V,γ) Euklidischer Raum, $n = \dim V, \mathcal{B}$ Orthogonalbasis von (V,γ). Dann ist das Koordinatensystem $\Phi_{\mathcal{B}} : (\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle) \to (V,\gamma)$ ein orthogonaler Isomorphismus.

Beweis $\Phi_{\mathcal{B}}$ Isomorphismus: klar. $\Phi_{\mathcal{B}}$ orthogonal, denn: Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ dann ist

$$\gamma(\Phi_{\mathcal{B}}(e_i), \Phi_{\mathcal{B}}(e_j)) = \gamma(v_1, v_j) = \delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$$ $\square$

Bemerkung 23.4 (V,γ) Euklidischer Raum, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ orthogonal. Dann gilt:

1. φ ist Isomorphismus

2. φ^{-1} ist orthogonal

3. $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von $\gamma \implies |\lambda| = 1$, das heißt $\lambda \in \{\pm 1\}$

Beweis 1. aus 23.2.3 folgt: φ injektiv $\implies \varphi$ Isomorphismus

2. $v_1, v_2 \in V \implies \gamma\big(\varphi^{-1}(v_1), \varphi^{-1}(v_2)\big) = \gamma\big(\varphi\big(\varphi^{-1}(v_1)\big), \varphi\big(\varphi^{-1}(v_2)\big)\big) = \gamma(v_1, v_2)$ $\implies \varphi^{-1}$ orthogonal

3. Sei $v \in V$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \implies \|v\| = \|\varphi(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\| \implies |\lambda| = 1$ □

Bemerkung 23.5 (V, γ) Euklidischer Raum, $n = \dim V$, $\mathcal{B}$ Orthogonalbasis von V, $\varphi \in \operatorname{End}(V)$, $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Dann sind äquivalent:

1. φ ist orthogonal

2. $A^T A = E_n$

Beweis Wir erhalten kommutierendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(V,\gamma) \arrow[d, "\varphi"'] & (V,\gamma) \arrow[l, "\Phi_{\mathcal{B}}"] \arrow[d, "\varphi"'] \\
(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle) & (\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle) \arrow[l, "\Phi_{\mathcal{B}}"]
\end{tikzcd}$$

Da $\Phi_{\mathcal{B}}$ orthogonaler Isomorphismus nach 23.3 folgt:

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ orthogonal} &\iff \tilde{A} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} = \varphi \circ \Phi_{\mathcal{B}} \text{ orthogonal} \\
&\iff \forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \\
&\iff \forall x, y \in \mathbb{R}^n : (Ax)^T Ay = x^T y \\
&\iff \forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle Ax, Ay\rangle = x^T A^T Ay = x^T y \\
&\iff \Delta\big(A^T A\big) = \Delta(E_n) \\
&\iff A^T A = E_n
\end{aligned}$$
□

Bemerkung+Definition 23.6 A heißt **orthogonal** $\overset{\text{Def}}{\iff} A^T A = E_n$

$$O(n) := \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid A \text{ ist orthogonal }\}$$

$O(n)$ ist bezüglich die Matrixmultiplikation eine Gruppe, die **orthogonale Gruppe** vom Rang n

Beweis Wohldefiniertheit von „·“ (das heißt Abgeschlossenheit bezüglich „·“): $A, B \in O(n) \implies (AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T B = E_n \implies AB \in O(n)$.
Existenz des neutralen Elements: $E_n \in O(n)$
Assoziativität: klar
Existenz von Inversen: Sei $A \in A(n) \implies A^T A = E_n \implies A^{-1} = A^t \implies \left(A^{-1}\right)^T A^{-1} = \left(A^T\right)^T A^T = AA^T = AA^{-1} = E_n$ □

Anmerkung $A \in O(n) \implies \det(A) \in \{\pm 1\}$, denn $1 = \det(E_n) = \det\left(A^T A\right) = \det\left(A^T\right)\det(A) = \det(A)^2$

Bemerkung 23.7 $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Dann sind äquivalent:

1. $A \in O(n)$
2. $AA^T = E_n$
3. $A^T A = E_n$
4. Die Transponierten der Zeilen von A bilden eine Orthogonalbasis von $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$
5. Die Spalten von A bilden eine Orthogonalbasis von $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$
6. Die Abbildung $\tilde{A} : (\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle) \to (\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist orthogonal

Beweis 1. $\iff$ 2. $\iff$ 3. $\iff$ klar

2. $\iff$ 4., 3. $\iff$ 5.

1. $\iff$ 6. aus 23.5 (setze $V = (\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle), \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$) □

Satz 23.8 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (nicht notwendig linear) abstandstreu, das heißt

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y\| \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

wobie $\|\cdot\|$ die Norm auf $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ bezeichne. Dann existieren eindeutig bestimmte $A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n$, sodass

$$\varphi(x) = Ax + b$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$

Bemerkung+Definition 23.9 $SO(n) := \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$ ist eine Untergruppe von $O(n)$ (das heißt $SO(n) \subseteq O(n)$ und ist eine Gruppe bezüglich der eingeschränkten Verknüpfung), die **spezielle orthogonale Gruppe** vom Rang n.

Beweis Wohldefiniertheit von „·“ (= Abgeschlossenheit bezüglich „·“)

$$A, B \in SO(n) \implies AB \in O(n) \wedge \det(AB) = \det(A)\det(B) = 1 \cdot 1 = 1$$

neutrales Element: $E_n \in SO(n)$
Assoziativität: klar
Existenz von Inversem: $A \in SO(n) \implies A^{-1} \in O(n), \det\left(A^{-1}\right) = \det(A)^{-1} = 1 \implies A^{-1} \in SO(n)$ □

Beispiel 23.10
$n = 1 : O(1) = \{\pm 1\}, SO(1) = \{0\}$

Bemerkung 23.11 $A \in O(2)$. Dann gilt:

1. $A \in SO(2) \iff \exists! \alpha \in [0, 2\pi]$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

In diesem Fall beschreibt A eine Drehung mit Zentrum 0 um den Winkel α. Außer im Fall $\alpha \in \{0, \pi\}$ besitzt A keine Eigenwerte. Falls $\alpha = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

einziger Eigenwert: 1. Falls $\alpha = \pi$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

einziger Eigenwert: -1.

2. $A \in O(2) \setminus SO(2) \iff \exists! \alpha \in [0, 2\pi]$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

In diesem Fall beschreibt A eine Spiegelung an der Geraden $\mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}\right)$. A besitzt die Eigenwerte ± 1, und es existiert eine Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ von $\left(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ mit

$$M_{\mathcal{B}}\left(\tilde{A}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beweis Sei $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O(2)$

$$\implies 1 = \|e_1\|^2 = \|Ae_1\|^2 = a^2 + b^2$$
$$\implies 1 = \|e_2\|^2 = \|Ae_2\|^2 = c^2 + d^2$$

Außerdem: $e_1 \perp e_2 \implies Ae_1 \perp Ae_2$

$$\implies \langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \rangle = 0$$

$$\implies \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \operatorname{Lin}\left(\left(\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\right)\right)$$

das heißt es existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\implies A = \begin{pmatrix} a & -\lambda b \\ b & \lambda a \end{pmatrix}, \det A = \lambda\big(a^2 + b^2\big) = \lambda \in \{\pm 1\}$$

1. Fall: $\lambda = 1 \iff \det A = 1 \iff A \in SO(2)$ Wegen $a^2 + b^2 = 1$ ist $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ein Punkt auf dem Einheitskreis. $\implies \exists! \alpha \in [0, 2\pi)$ mit $a = \cos\alpha, b = \sin\alpha$. Somit:

   $$A \in SO(2) \iff A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

   für eindeutig bestimmte $\alpha \in [0, 2\pi)$. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$ ein Punkt auf dem Einheitskreis

   $$A \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha + \beta \\ \sin\alpha + \beta \end{pmatrix}$$

   $\implies$ A beschreibt eine Drehung mit Zentrum 0 um den Winkel α. A hat nur Eigenwerte, wenn $\alpha = 0$ beziehungsweise $\alpha = \pi$ (Eigenwert: 1 beziehungsweise -1):

   $$\chi_A^{char} = t^2 - \operatorname{sp}(A)t + \det A = t^2 - 2\cos\alpha + 1$$

   Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1}$, Eigenwert in $\mathbb{R} \iff \cos^2\alpha - 1 \geq 0 \iff \alpha = 1$ oder $\alpha = \pi$

2. $\lambda = -1 \iff A \in O(2) \setminus SO(2)$:

   $$\iff A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

   Wegen $a^2 + b^2 = 1$ existiert genau ein $\alpha \in [0, 2\pi)$ mit $a = \cos\alpha, b = \sin\alpha$. Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$ ein Punkt auf dem Einheitskreis.

   $$\implies A \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{pmatrix} = \big(\cos(\alpha - b), \sin\alpha - B\big)$$

   $$\implies A \begin{pmatrix} \cos\big(\frac{\alpha}{2} + \beta\big) \\ \sin\big(\frac{\alpha}{2} + \beta\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\big(\frac{\alpha}{2} - \beta\big) \\ \sin\big(\frac{\alpha}{2} - \beta\big) \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ A beschreibt Spiegelung an der Geraden $\text{Lin}\left(\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha}{2}\\ \sin\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix}\right)$

$$\chi_A^{char} = t^2 - \text{sp}(A)t + \det A = t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$$

$\Longrightarrow$ A diagonalisierbar und hat Eigenwert ± 1. Sei v_1 Eigenvektor von A zum Eigenwert 1 mit $\|v_1\| = 1$, v_2 Eigenvektor von A zum Eigenwert -1 mit $\|v_2\| = 1$

$$\Longrightarrow \langle v_1, v_2\rangle = \langle Av_1, Av_2\rangle = \langle v_1, -v_2\rangle = -\langle v_1, v_2\rangle \Longrightarrow \langle v_1, v_2\rangle = 0 \Longleftrightarrow v_1 \perp v_2$$

Bezüglich der Orthogonalbasis (v_1, v_2) des $\left(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ ist $M_{\mathcal{B}}\left(\tilde{A}\right) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ □

Folgerung 23.12 $\varphi : \left(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle\right) \to \left(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ orthogonale Abbildung. Dann existiert eine Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ von $\left(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$, sodass

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix}\pm 1 & 0\\ 0 & \pm 1\end{pmatrix} \text{ oder } M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}, \alpha \in (0,\pi)$$

Die Anzahl der ± 1 sowie α sind unabhängig von der Wahl einer solchen Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ (das heißt sind Invarianten von φ).

Beweis Existenz von $\mathcal{B}$: Sei $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$, $A := M_{\mathcal{C}}(\varphi)$, insbesondere $A \in O(2)$.

1. Fall: $A \in SO(2) \Longrightarrow \exists \beta \in (0, 2\pi), \beta \neq \pi$ mit

$$A = \begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix} \text{ oder } A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ oder } A = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

   Falls $\beta \in (0,\pi)$, setze $\alpha := \beta, \mathcal{B} = \mathcal{C}$.
   Falls $\beta \in (\pi, 2\pi)$

$$\Longrightarrow M_{(e_2,e_1)}(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$$

   Setze $\alpha := 2\pi - B, \mathcal{B} := (e_2, e_1) \Longrightarrow \beta = 2\pi - \alpha \Longrightarrow \cos\beta = \cos\alpha, \sin\beta = -\sin\beta$

$$\Longrightarrow M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

2. $A \in O(2) \setminus SO(2) \Longrightarrow \exists$ Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ von $\left(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ mit $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

Eindeutigkeit: Falls $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix}\pm 1 & 0\\ 0 & \pm - 1\end{pmatrix}$, dann Anzahl der $\pm 1 = \mu_{alg}$ der Eigenwirte ± 1. Falls $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, dann $\chi_{\varphi}^{char} = t^2 - 2\cos\alpha t + 1 \Longrightarrow \cos\alpha$ ist unabhängig von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$. Wegen $\alpha \in (0,\pi)$ ist α unabhängig von $\mathcal{B}$. □

Anmerkung Verallgemeinerung von 23.12 auf $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist möglich.

24 Der Spektralsatz

In diesem Abschnitt sei (V,γ) stets ein Euklidischer Raum.

Bemerkung 24.1 Die Abbildung $\Gamma : V \to V^*, w \mapsto \gamma(\cdot, w)$ ist ein Isomorphismus.

Beweis γ nicht ausgeartet nach 22.6 $\implies$ γ perfekt, das heißt Γ Isomorphismus. $\square$

Anmerkung Insbesondere ist für einen Euklidischen Vektorraum (V,γ) die Vektorräume V und V^* kanonisch isomorph.

Bemerkung 24.2 $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ Orthonormalbasis von (V,γ), $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ duale Basis zu $\mathcal{B}$, $U \subseteq V$ Untervektorraum, $\Gamma : V \to V^*$ kanonische Abbildung aus 24.1. Dass gilt:

1. $\Gamma\big(U^\perp\big) = U^0$
2. $\Gamma(v_i) = v_i^*, i = 1, \ldots, n$

Beweis
1. $\Gamma\big(U^\perp\big) \subseteq U^0$, denn: Für $v \in U^\perp, u \in U$ ist $(\Gamma(v))(w) = \gamma(u,v) = 0 \implies \Gamma\big(U^\perp\big) \subseteq U^0$.
$$\dim \Gamma\Big(U^\perp\Big) = \dim U^\perp = \dim V - \dim U = \dim U^0$$
2. Es ist $\Gamma(v_i)(v_j) = \gamma(v_j, v_i) = \delta_{ij} = v_i^*(v_j), j = 1, \ldots, n$, das heißt $\Gamma(v_i) = v_i^*$ $\square$

Bemerkung+Definition 24.3 $(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$ Euklidische Räume, $\varphi : V \to W$. Dass existiert genau eine lineare Abbildung $\varphi^{ad} : W \to V$ mit
$$\gamma_W(\varphi(v), w) = \gamma_V\Big(v, \varphi^{ad}(w)\Big) \forall v \in V, w \in W$$
φ^{ad} heißt die zu φ **adjungierte Abbildung**

Beweis Existenz: Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\Gamma_V"'] & W \\
V^* \arrow[u, "\varphi^{ad}"] \arrow[r, "\Gamma_W"'] & W^* \arrow[u, "\varphi^*"']
\end{tikzcd}$$

und setzen $\varphi^{ad} := \Gamma_V^{-1} \circ \varphi^* \circ \Gamma_W$, φ^{ad} ist linear nach Konstruktion. Es gilt für $v \in V, w \in W$:
$$\begin{aligned}
\gamma_W(\varphi(v), w) &= \Gamma_W(w)(\varphi(v)) = (\Gamma_W(w) \circ \varphi)(v) = \varphi^*(\Gamma_W(w))(v) \\
&= ((\varphi^* \circ \Gamma_W)(w))(v) = \Big(\Big(\Gamma_V \circ \varphi^{ad}\Big)(w)\Big)(v) = \Gamma_V\Big(\varphi^{ad}(w)\Big)(v) \\
&= \gamma\Big(v, \varphi^{ad}(w)\Big)
\end{aligned}$$
Eindeutigkeit: Damit obige Gleichung für alle $v \in V, w \in W$ gilt, muss das Diagramm kommutieren, das heißt $\Gamma_V \circ \varphi^{ad} = \varphi^* \circ \Gamma_W$, also $\varphi^{ad} = \Gamma_V^{-1} \circ \varphi^* \circ \Gamma_W$. $\square$

Anmerkung Ist φ orthogonal, dann ist $\varphi^{ad} = \varphi^{-1}$, denn für $v, w \in V$

$$\gamma(\varphi(v), w) = \gamma\big(\varphi(v), \varphi\big(\varphi^{-1}(w)\big)\big) = \gamma(v, \varphi(w))$$

Bemerkung 24.4 $(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$ euklidische Räume, $\mathcal{A}$ Orthonormalbasis von (V, γ_V), $\mathcal{B}$ Orthonormalbasis von (W, γ_W), $\varphi : V \to W$ lineare Abbildung. Dass gilt

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\Big(\varphi^{ad}\Big) = \big(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)\big)^T$$

Insbesondere ist $\left(\varphi^{ad}\right)^{ad} = \varphi$

Beweis

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\Big(\varphi^{ad}\Big) &= M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\big(\Gamma_V^{-1} \circ \varphi^* \circ \Gamma_W\big) = \underbrace{M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}^*}\big(\Gamma_V^{-1}\big)}_{E_{\dim V}} \underbrace{M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}}_{\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)\right)^T} \underbrace{M_{BB^*}^{\mathcal{B}}(\Gamma_W)}_{=E_{\dim W}} \\ &= \big(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)\big)^T \end{aligned}$$

□

Satz 24.5 $(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$ euklidische Räume, $\varphi : V \to W$ lineare Abbildung. Dann gilt:

1. $\ker\big(\varphi^{ad}\big) = (\operatorname{im} \varphi)^{\perp}$
2. $\operatorname{im}\big(\varphi^{ad}\big) = (\ker \varphi)^{\perp}$

Beweis

1. $w \in (\operatorname{im} \varphi)^{\perp} \iff \gamma_W(\varphi(v), w) = 0 \forall v \in V \iff \gamma_V\big(v, \varphi^{ad}(w)\big) = 0 \forall v \in V$, γ nicht ausgeartet $\implies \varphi^{ad}(w) = 0 \iff w \in \ker\big(\varphi^{ad}\big)$
2. $\big(\operatorname{im}\big(\varphi^{ad}\big)\big)^{\perp} = \ker\left(\varphi^{ad}\right)^{ad} = \ker \varphi \iff (\ker \varphi)^{\perp} = \Big(\operatorname{im}\big(\varphi^{ad}\big)^{\perp}\Big)^{\perp} = \operatorname{im} \varphi^{ad}$ □

Folgerung 24.6 $\varphi \in \operatorname{End}(V)$. Dann gilt:

$$V = \ker \varphi \hat{\oplus} \operatorname{im} \varphi^{ad} \quad \text{sowie} \quad V = \ker \varphi^{ad} \hat{\oplus} \operatorname{im} \varphi$$

Beweis Es ist

$$V = (\ker \varphi) \hat{\oplus} (\ker \varphi)^{\perp} = \ker \varphi \hat{\oplus} \operatorname{im} \varphi^{ad}$$

andere Gleichung analog. □

Definition 24.7 (Selbstadjungiert) $\varphi \in \operatorname{End}(V)$ heißt **selbstadjungiert** $\iff \varphi = \varphi^{ad}$

Bemerkung 24.8 $\mathcal{B}$ Orthonormalbasis von (V, γ). Dann sind äquivalent:

1. φ selbstadjungiert
2. $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ symmetrisch

In diesem Fall $V = \ker\varphi \hat{\oplus} \operatorname{im}\varphi$

Beweis φ selbstadjungiert $\iff \varphi = \varphi^{ad} \iff M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}\varphi^{ad} = (M_{\mathcal{B}}(\varphi))^T$. Nach 24.6 ist dann $V = \ker\varphi \hat{\oplus} \operatorname{im}\varphi^{ad} = \ker\varphi \hat{\oplus} \operatorname{im}\varphi$ □

Satz 24.9 Es gilt:

1. $\varphi \in \operatorname{End}(V)$ selbstadjungiert $\implies \gamma' : V \times V \to \mathbb{R}, \gamma'(x,y) = \gamma(\varphi(x), y)$ ist eine symmetrische Bilinearform
2. Ist $\gamma' : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform, dann existiert genau ein selbstadjungierter Endormorphisums $\varphi \in \operatorname{End}(V)$ mit $\gamma'(x,y) = \gamma(\varphi(x), y) \forall x, y \in V$

In diesem Fällen gilt bezüglich jeder Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von (V, γ):

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma') = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

Beweis

1. φ selbstadjungiert $\implies \gamma'(x,y) = \gamma(\varphi(x), y) = \gamma(x, \varphi(y)) = \gamma(\varphi(y), x) = \gamma'(y,x)$, γ' bilinear klar.
2. Sei $\gamma' : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform, $x \in V \implies \rho_x := \gamma'(x, \cdot) : V \to \mathbb{R}, \gamma \mapsto \gamma'(x,y)$ ist ein Element von V^*. Nach 24.1 ist $\Gamma : V \to V^*, w \mapsto \gamma(\cdot, w)$ ein Isomorphismus $\implies$ Es existiert genau ein $z \in V$ mit $\Gamma(z) = \rho_x$, das heißt mit

$$\gamma(y,z) = \Gamma(z)(y) = \rho_x(y) = \gamma'(x,y) \forall y \in V$$

Wir definieren $\varphi : V \to V, x \mapsto k$ mit $\Gamma(z) = \rho_x \implies$ Für alle $x, y \in V$ ist $\gamma(\varphi(x), y) = \gamma(y, \varphi(x)) = \gamma'(x,y)$.
φ ist linear: Seien $x_1, x_2, y \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\implies \Gamma(\varphi(\lambda x_1 + \mu x_2) - \lambda\varphi(x_1) - \mu\varphi(x_2))(y) = \gamma(y, \varphi(\lambda x_1 + \mu x_2) - \lambda\varphi(x_1) - \mu\varphi(x_2))$$
$$= \gamma(y, \varphi(\upsilon x_1$$
$$= \gamma'(\lambda x_1 + \mu x$$

γ' bilnear

$$= 0$$

Das gilt für alle $y \in V$

$$\implies \Gamma(\varphi(\lambda x_1 + \mu x_2) - \lambda\varphi(x_1) - \mu\varphi(x_2)) = 0$$
$$\implies \varphi(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda\varphi(x_1) + \mu\varphi(x_2)$$

φ selbstadjudgiert: Für $x, y \in V$ ist

$$\gamma(\varphi(x), y) = \gamma'(x,y) = \gamma'(y,x) = \gamma(\varphi(y), x) = \gamma(x, \varphi(y)) \implies \varphi = \varphi^{ad}$$

φ ist eindeutig: Sei $\tilde{\varphi}$ selbstadjudgiert mit $\gamma'(x,y) = \gamma(\varphi(x),y) = \gamma(\tilde{\varphi}(x),y) \forall x,y \in V$

$$\begin{aligned} \implies \Gamma(\varphi(x))(y) &= \Gamma(\tilde{\varphi}(x))(y) \forall x,y \in V \\ \implies \Gamma(\varphi(x)) &= \Gamma(\tilde{\varphi}(x)) \end{aligned}$$

Γ Isomorphismus

$$\begin{aligned} \implies \varphi(x) = \tilde{\varphi}(x) \forall x \in V \\ \implies \varphi = \tilde{\varphi} \end{aligned}$$

Darstellungsmatrizen: Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Orthogonalbasis von (V,γ). $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (a_{ij})$

$$\implies \gamma'(v_i,v_j) = \gamma(\varphi(v_i),v_j) = \gamma\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}v_k, v_j\right) = a_{ji} \overset{\varphi \text{ selbstadjudgiert}}{=} a_{ij}$$

$\implies M_{\mathcal{B}}(\gamma') = M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ □

Anmerkung Interpretation für $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$: Ist $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch, dann ist A

- Darstellungsmatrix bezüglich $(e_1, \dots, e_n)$ des selbstadjungierten Endomorphismus $\tilde{A}$ von $\mathbb{R}^n$
- Darstellungsmatrix bezügilch $(e_1, \dots, e_n)$ der symmetrischen Bilinearform $\gamma' = \Delta(A) : (x,y) \mapsto x^t Ay$

Es ist $\gamma'(x,y) = x^t Ay = x^t A^t y = (Ax)^t y = \langle Ax, y\rangle = \langle \tilde{A}(x), y\rangle \forall x,y \in \mathbb{R}^n$. Bezüglich jeder Orthogonalbasis von $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ gilt $M_{\mathcal{B}}\left(\tilde{A}\right) = M_{\mathcal{B}}(\gamma')$

Bemerkung 24.10 $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert, $U \subseteq V$ Untervektorraum mit $\varphi(U) \subseteq U$. Dann gilt $\varphi(U^\perp) \subseteq U^\perp$

Beweis Sei $v \in U^\perp \implies \forall u \in U : \gamma(u,\varphi(v)) = \gamma\left(\underbrace{\varphi(u)}_{\in U}, \underbrace{v}_{\in U^\perp}\right) = 0 \implies \varphi(v) \in U^\perp$ □

Bemerkung 24.11 $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert. Dann zerfällt χ_φ^{char} über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren.

Beweis Sei $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von (V,γ), $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi) \implies \chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char}, A = A^T$ wegen φ selbstadjungiert. Wir betrachet die $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung $\tilde{A}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, z \mapsto Az$. Es ist

$$\chi_A^{char} = \chi_{\tilde{A}_{\mathbb{C}}}^{char} = (t-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_n), \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$$

Behauptung: $\lambda_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, \dots, n$, denn: Sei $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i von $\tilde{A}_{\mathbb{C}}$. Wir setzen $\bar{z} := \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$ und erhalten

$$\lambda_i z^T \bar{z} = (\lambda_i z)^T \bar{z} = (Az)^T \bar{z} = z^T A^T \bar{z} = z^T A \bar{z} = z^T \overline{Az} = z^T \overline{\lambda_i z} = \bar{\lambda}_i z^T \bar{z}$$

Es ist $z^T \bar{z} = (z_1, \dots, z_n) \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix} = z_1 \bar{z}_1 + \dots + z_n \bar{z}_n = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \neq 0 \implies \lambda_i = \bar{\lambda}_i \implies \lambda_i \in \mathbb{R}$ □

Satz 24.12 (Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen) $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungierter Endomorphismus. Dann existiert eine Orthonormalbasis von (V, γ) aus Eigenvektoren von φ. Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte von φ, so ist

$$V = Eig(\varphi, \lambda_1) \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_r)$$

Beweis per Induktion nach $n = \dim V$.
Induktionsanfang: $n = 0$: trivial
Induktionsschritt: Sei $n \geq 1$. Nach 24.11 existiert ein Eigenwert λ von φ und es sei w_1 ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ. Setze

$$v_i := \frac{w_1}{\|w_1\|}, U := \operatorname{Lin}((v_i)) \implies \varphi(U) \subseteq U \implies \varphi\Big(U^\perp \subseteq U^\perp\Big)$$

Wir setzen $\psi := \varphi\big|_{U^\perp}^{U^\perp} : U^\perp \to U^\perp$. ψ ist selbstadjungiert, denn: Für alle $x, y \in U^\perp$ ist

$$\gamma(\psi(x), y) = \gamma(\varphi(x), y) = \gamma(x, \varphi(y)) = \gamma(x, \psi(y))$$

Nach 22.9 ist $V = U \hat{\oplus} U^\perp$, $\dim U^\perp = \dim V - \dim U = n - 1$. Nach Induktionsvorrausetzung existiert eine Orthonormalbasis von $(v_2, \dots, v_n)$ von $U^\perp$ aus Eigenvektoren von $\varphi \implies (v_1, \dots, v_n)$ ist von Orthonormalbasis (V, γ) aus Eigenvektoren von $\varphi \implies V = \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1) \hat{\oplus} \dots \hat{\oplus} \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_r)$□

Folgerung 24.13 $\gamma' : V \times V : \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform, $n = \dim V$. Dann existiert eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von (V, γ) bezüglich derer die Darstellungsmatrix von γ' Diagonalgestalt hat:

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma') = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Hierbei sind $\lambda_i, \dots, \lambda_n$ die Eigenvektoren (mit Vielfachen) des zu γ' gehörenden eindeutig bestimmten selbstadjungierten Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ mit $\gamma'(x, y) = \gamma(\varphi(x), y)$

Beweis Sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ der entsprechende Endomorphismus von V nach 24.9. Spektralsatz $\Longrightarrow$ Es existiert eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von (V,γ) aus Eigenvektoren von φ zu Eigenwerten $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ (nicht notwendig verschieden)

$$\Longrightarrow M_{\mathcal{B}}\big(\gamma'\big) \overset{24.9}{=} M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

Folgerung 24.14 $A \in M(n\times n,\mathbb{R})$ symmetrisch. Dann existiert ein $T \in O(n)$, sodass

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Hierbei sind $\lambda_i,\dots,\lambda_n$ die Eigenwerte (mit Vielfachheit) von A. Die Spalten von T bilden eine Orthonormalbasas von $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ aus Eigenvektoren von A.

Beweis $\tilde{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist selbstadjungierter Endomorphismus von $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Spektralsatz $\Longrightarrow$ es existiert eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ aus Eigenvektoren von A des $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ mit

$$M_{\mathcal{B}}\big(\tilde{A}\big) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Es ist

$$M_{\mathcal{B}}\big(\tilde{A}\big) = \underbrace{\Big(T^{\mathcal{B}}_{(e_1,\dots,e_n)}\Big)^{-1}}_{=T^{-1}} \underbrace{M^{(e_1,\dots,e_n)}_{(e_1,\dots,e_n)}\big(\tilde{A}\big)}_{A} \underbrace{T^{\mathcal{B}}_{(e_1,\dots,e_n)}}_{=:T}$$

Es ist $T \in O(n)$, da $\mathcal{B}$ Orthogonalbasis von $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ (vergleiche 23.7) □

Anmerkung Man kann sogar stets $T \in SO(n)$ erreichen (indem man gegebenfalls eine Spalte v_i von T durch $-v_i$ ersetzt.)

Algorithmus 24.15 (Hauptachsentransformation) Eingabe: $A \in M(n\times n,\mathbb{R})$ symmetrisch
Ausgabe: $T \in O(n)$, sodass $T^{-1}AT$ Diagonalmatrix
Durchführung:

1. Bestimme $\chi_A^{char} \in \mathbb{R}[t]$ sowie eine Zerlegung

   $$\chi_A^{char} = (t-\lambda_1)^{T_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{T_A}$$

   mit $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ paarweise verschieden

2. Bestimme für $i = 1,\dots,k$ jeweils eine Basis von $\mathrm{Eig}(\varphi,\lambda_i)$

3. Bestimme mit dem Gram-Schmidt-Verfahren für $i = 1, \ldots, k$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_i = (v_{i,1}, \ldots, v_{i,r_i})$ von $\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_i)$

4. Die Orthogonalbasis $\mathcal{B}_i, i = 1, \ldots, k$ bilden zusammen eine Orthonormalbasis
$$\mathcal{B} = (v_{1,1}, \ldots, v_{1,r_1}, \ldots, v_{k,1}, \ldots, v_{k,r_k})$$
des $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ aus Eigenvektoren von A

5. Schreibe die Basisvektoren aus $\mathcal{B}$ in Spalten von T. Es ist dann
$$T^{-1}AT = (\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_k)E_n$$

Anmerkung Um $T \in SO(n)$ zu erreichen ersetze man gegebenfalls $v_{1,1}$ durch $-v_{1,1}$.

Beispiel 24.16

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

Es ist $\chi_A^{char} = t^3 - 3t^2 - 9t + 27 = (t-3)^2(t+3)$. Es ist $\mathrm{Eig}(A, 3) = \cdots = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Nach Beispiel 22.12 ist $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Eig}(A, 3)$.

$\mathrm{Eig}(A, -3) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \implies \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ ist Orthonormalbasis von $\mathrm{Eig}(A, -2)$.

$$\implies \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$$

ist Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot, \_\rangle)$ aus Eigenvektoren von A. Mit

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Es ist $\det(T) = -1$, also $T \in O(3) \setminus (3)$. Setzt man

$$T' := \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{ist} \quad T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

und es ist $T' \in SO(3)$.

25 Unitäre Räume

Definition 25.1 (Sesquilinearform) V $\mathbb{C}$ Vektorraum, $h : V \times V \to \mathbb{C}, (v, w) \mapsto h(v, w)$ heißt eine **Sesquilinearform** auf V genau dann wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (S1) $h(v_1 + v_2, w) = h(v_1, w) + h(v_2, w), h(\lambda v, w) = \lambda(h(v, w))$
- (S2) $h(v, w_1 + w_2) = h(v, w_1) + h(v, w_2), h(v, \lambda w) = \bar{\lambda} h(v, w)$

für alle $v_1, v_2, w_1, w_2, v, w \in V, \lambda \in \mathbb{C}$

Beispiel 25.2
$h : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, h(x, y) := x^t \bar{y}$ ist eine Sesquilinearform auf $\mathbb{C}^n$ (beachte $h(x, \lambda y) = x^t \overline{\lambda y} = \bar{\lambda} x^t y$), aber keine Bilinearform auf $\mathbb{C} * n$

Bemerkung 25.3 V $\mathbb{C}$ Vektorraum, $h : V \times V \to \mathbb{C}$ Sesquilinearform auf V. Dann induziert h eine „semilineare" Abbildung

$$\Gamma : V \to V^*, w \mapsto h(\cdot, w)$$

das heißt $\Gamma(w_1 + w_2) = \Gamma(w_1) + \Gamma(w_2), \Gamma(\lambda w) = \bar{\lambda}\Gamma(w) \forall w_1, w_2, w \in V, \lambda \in \mathbb{C}$

Definition 25.4 (Darstellungsmatrix / Fundamentalmatrix) V endlichdimensional, $\mathbb{C}$ Vektorraum, h Sesquilinearform auf V, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V

$$M_{\mathcal{B}}(h) = (h(v_i, v_j))_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$$

heißt die **Darstellungsmatrix** (**Fundamentalmatrix**) von h bezüglich $\mathcal{B}$

Bemerkung 25.5 V endlichdimensionaler $\mathbb{C}$ Vektorraum, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V.

$$\mathrm{Sesq}(V) := \{h : V \times V \to \mathbb{C} \mid h \text{ ist eine Sesquilinearform}\}$$

ist ein $\mathbb{C}$ Vektorraum und Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(V \times V, \mathbb{C})$. Dann gilt: Die Abbildun $M_{\mathcal{B}} \to M(n \times n, \mathbb{C}), h \mapsto M_{\mathcal{B}}(h)$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$ Vektorräumen mit Umkehrabbildung $\Delta^{\mathcal{B}} : M(n \times n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Sesq}(V)$ mit

$$\Delta^{\mathcal{B}}(A)(v, w) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T A \overline{\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)}$$

Satz 25.6 V endlichdimensionaler $\mathbb{C}$ Vektorraum, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Basin von V, h Sesquilinearform auf V. Dann gilt:

$$M_{\mathcal{B}}(h) = \left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^T M_{\mathcal{A}}(h) \overline{T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}}$$

Definition 25.7 (hermitesch) V $\mathbb{C}$ Vektorraum, h Sesquilinearform auf V. h heißt **hermitesch** genau dann wenn:

$$h(w, v) = \overline{h(v, w)} \forall v, w \in V$$

Anmerkung In diesem Fall ist $h(v, v) = \overline{h(v, v)}$, das heißt $h(v, v) \in \mathbb{R} \forall v \in V$

Bemerkung 25.8 V endlichdimensionaler $\mathbb{C}$ Vektorraum, h Sesquilinearform auf $V, \mathcal{B}$ Basis von $V, A = M_{\mathcal{B}}(h)$. Dann sind äquivalent:

1. h ist hermitesch
2. $\bar{A}^t = A$

Anmerkung Matrizen $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ mit $\bar{A}^T = A$ heißen **hermitesche Matrizen**.

Definition 25.9 V $\mathbb{C}$ Vektorraum, h hermitesche Form auf V. h heißt **positiv definit** genau dann wenn

$$h(v, v) > 0 \forall v \in V, v \neq 0$$

Eine positiv definite hermitesche Form nennt man auch ein **Skalarprodukt**.

Beispiel 25.10
$V = \mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times C^n \to \mathbb{C}, \langle x, y \rangle := x^T \bar{y}$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ (das **Standardskalarprodukt** auf $\mathbb{C}^n$):

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist sesquilinear (vergleiche 25.2)
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist hermitesch: $\langle y, x \rangle = y^T \bar{x} = \left(y^T \bar{x}\right)^T = \bar{x}^T y = \overline{x^T \bar{y}} = \overline{\langle x, y \rangle}$
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist positiv definit:

$$\langle x, x \rangle = x^T \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_n \bar{x}_n$$
$$= |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 > 0 \text{ für } x \neq 0$$

Definition 25.11 (Unitärer Raum) Ein **unitärer Raum** ist ein Paar (V, h), bestehend aus einem endlichdimensionalen $\mathbb{C}$ Vektorraum V und einem Skalarprodukt h auf V.

Für den Rest des Abschnitts sei (V, h) stets ein unitärer Raum.

Anmerkung Analog zu Euklidischen Räumen definiert man die Begriffe: Norm, orthogonal, orthonormal, Orthogonalbasis, Orthonormalbasis, orthogonales Komplement. Es gilt dabei:

- Cauchy-Schwarz-Ungleichung: $|h(v, w)| \leq \|v\| \|w\| \forall v, w \in V$
- Gram-Schmidt-Verfahren (mit h statt γ) liefert Orthonormalbasis
- $V = U \hat{U}^\perp, U^{\perp\perp} = U$ für $U \subseteq V$ Untervektorraum

Definition 25.12 $(V, h_V), (W, h_W)$ unitäre Räume, $\varphi : V \to W$ lineare Abbildung. φ heißt **unitär** genau dann wenn:

$$h_W(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = h_V(v_1, v_2) \forall v_1, v_2 \in V$$

Bemerkung 25.13 $n = \dim V, \mathcal{B}$ Orthonormalbasis von (V, h). Dann ist das Koordinatensystem $\Phi_{\mathcal{B}} : (\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) \to (V, h)$ ein unitärer Isomorphismus.

Bemerkung 25.14 $\mathcal{B}$ Orthonormalbasisv on $(V, h), \varphi \in \operatorname{End}(V), A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Dann sind äquivalent:

1. φ ist unitär
2. $\bar{A}^T A = E_n$

Bemerkung+Definition 25.15 $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. A heißt **unitär** genau dann wenn: $\bar{A}^T A = E_n$.

$$U(n) := \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) \mid A \text{ ist unitär}\}$$

$U(n)$ ist eine Gruppe bezüglich „·“, die **unitäre Gruppe** vom Rang n

$$SU(n) := \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$$

ist eine Untergruppe von $U(n)$, die **spezielle unitäre Gruppe** von Rang n.

Bemerkung 25.16 $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ Orthonormalbasis von $(V, h), \mathcal{B}^* = (v_1^*, \ldots, v_n^*)$ duale Basis. Dann ist die Abbildung

$$\Gamma : V \to V^*, w \mapsto h(\cdot, w)$$

ein Semiisomorphismus mit $\Gamma(v_i) = v_i^*$ für $i = 1, \ldots, n$.

Satz+Definition 25.17 $(V, h_V), (W, h_W)$ unitäre Räume, $\varphi : V \to W$ lineare Abbildung, $\mathcal{A}$ Orthonormalbasis von (V, h_V), $\mathcal{B}$ Orthonormalbasis von (W, h_W). Dann gilt:

1. Es gibt genau eine lineare Abbildung $\varphi^{ad} : W \to V$ mit $h_W(\varphi(v), w) = h_V\big(v, \varphi^{ad}(w)\big) \forall v \in V, w \in W$, φ^{ad} heißt die **zu** φ **adjungierte Abbildung**
2. $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\big(\varphi^{ad}\big) = \overline{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)}^T$

Beweis 1. Wie im reellen Fall betrachte man das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\Gamma_V"'] & W \\
V^* \arrow[u, "\varphi^{ad}"] \arrow[r, "\Gamma_W"'] & W^* \arrow[u, "\varphi^*"]
\end{tikzcd}$$

und setzten $\varphi^{ad} := \Gamma_V^{-1} \circ \varphi^* \circ \Gamma_W$. φ^{ad} ist linear, da sowohl Γ_V als auch Γ_W semilinear sind. Rest wie im reellen Fall

2. Sei $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n), \mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_n), M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi) = (a_{ij}), M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\varphi^{ad}) = (b_ij)$

$$\begin{aligned}
&\implies \varphi(v_j) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} w_k, \varphi^{ad} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} v_k \\
&\implies a_{ij} = h_W\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} w_k, w_i\right) = h_W(\varphi(w_j, w_i)) = h_V\Big(v_j, \varphi^{ad}(w_i)\Big) \\
&\qquad = h_V\left(v_j, \sum_{k=1}^{m} b_{ki} v_k\right) = h_V(v_j, b_{ji} v_j) = \overline{b_{ji}} h(v_j, v_j) = \overline{b_{ji}} \qquad \square
\end{aligned}$$

Bemerkung 25.18 $\varphi \in \operatorname{End}(V)$. Dann gilt:

1. $\ker \varphi^{ad} = (\operatorname{im} \varphi)^{\perp}$
2. $\operatorname{im} \varphi^{ad} = (\ker \varphi)^{\perp}$

Definition 25.19 $\varphi \in \operatorname{End}(V)$. φ heißt *selbstadjungierte genau dann wenn: $\varphi = \varphi^{ad}$

Bemerkung 25.20 $\varphi \in \operatorname{End}(V), \mathcal{B}$ Orthonormalbasis von (V, h), $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Dann sind äquivalent:

1. φ selbstadjungiert
2. $\bar{A}^T = A$, das heißt A ist hermitesch

Bemerkung 25.21 $\varphi \in \operatorname{End}(V)$ selbstadjungiert. Dann sind alle Eigenwerte von φ reell.

Beweis Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von φ, v Eigenvektor zum Eigenwert λ.

$$\implies \lambda h(v, v) = h(\lambda v, v) = h(\varphi(v), v) = h\Big(v, \varphi^{ad}(v)\Big) = h(v, \varphi(v)) = h(v, \lambda v) = \bar{\lambda} h(v, v)$$

$$\implies \lambda = \bar{\lambda} \implies \lambda \in \mathbb{R} \qquad \square$$

Definition 25.22 $\varphi \in \operatorname{End}(V)$. φ heißt **normal** genau dann wenn: $\varphi^{ad} \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^{ad}$. $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ heißt **normal** genau dann wenn: $\bar{A}^T A = A \bar{A}^T$

Anmerkung Ist $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von (V, h), dann: φ normal $\iff M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ normal.

Bemerkung 25.23 $\varphi \in \operatorname{End}(V)$. Dann gilt:

1. φ unitär $\implies \varphi$ normal
2. φ selbstadjungiert $\implies \varphi$ normal

Für $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ gilt: A unitär $\implies A$ normal, A hermitesch $\implies A$ normal.

Beweis 1. Seien $v, w \in V \implies h\big(v, \varphi^{-1}(w)\big) = h\big(\varphi(v), \varphi\big(\varphi^{-1}(w)\big)\big) = h(\varphi(v), w)$ $\implies \varphi^{ad} = \varphi^{-1} \implies \varphi^{ad} \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ \varphi = \operatorname{id}_V = \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{ad}$

2. φ selbstadjungiert $\implies \varphi = \varphi^{ad} \implies \varphi^{ad} \circ \varphi = \varphi \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^{ad}$ □

Satz 25.24 $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ normal. Dann gilt:

1. $\ker \varphi^{ad} = \ker \varphi$
2. $\operatorname{im} \varphi^{ad} = \operatorname{im} \varphi$

Insbesondere ist $V = \ker \varphi \hat{\oplus} \operatorname{im} \varphi$

Beweis 1. Es gilt:

$$\begin{aligned} v \in \ker \varphi \iff 0 = h(\varphi(v), \varphi(v)) = h\Big(v, \varphi^{ad}(\varphi(v))\Big) = h\Big(v, \varphi\Big(\varphi^{ad}(v)\Big)\Big) \\ = \overline{h(\varphi(\varphi^{ad}(v)), v)} = h\Big(\varphi^{ad}(v), \varphi^{ad}(v)\Big) \iff \varphi^{ad}(v) = 0 \\ \iff v \in \ker \varphi^{ad} \end{aligned}$$

2. Es ist $\operatorname{im} \varphi^{ad} = (\ker \varphi)^{\perp} = \left(\perp \varphi^{ad}\right)^{\perp} = \left((\operatorname{im} \varphi)^{\perp}\right)^{\perp} = \operatorname{im} \varphi$

$$\implies V = \ker \varphi \hat{\oplus} (\ker \varphi)^{\perp} = \ker \varphi \hat{\oplus} \operatorname{im}\Big(\varphi^{ad}\Big) = \ker \varphi \hat{\oplus} \operatorname{im} \varphi$$ □

Bemerkung 25.25 $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ normal, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

1. $\varphi - \lambda \operatorname{id}_V$ ist normal
2. $\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) = \mathrm{Eig}\big(\varphi^{ad}, \bar{\lambda}\big)$

Beweis 1. Setze $\psi := \varphi - \lambda \operatorname{id}_V$. Für $v, w \in V$ ist $h(\lambda v, w) = h\big(v, \bar{\lambda} w\big)$, das heißt $(\lambda \operatorname{id}_V)^{ad} = \bar{\lambda} \operatorname{id}_V$

$$\begin{aligned} &\implies \psi^{ad} = \varphi^{ad} - \bar{\lambda} \operatorname{id}_V \\ &\implies \psi^{ad} = \varphi^{ad} - \bar{\lambda} \operatorname{id}_V \\ \implies \psi^{ad} \circ \psi &= \left(\varphi^{ad} - \bar{\lambda} \operatorname{id}_V\right) \circ (\varphi - \lambda \operatorname{id}_V) = \underbrace{\varphi^{ad} \circ \varphi}_{=\varphi \circ \varphi^{ad}} - \bar{\lambda}\varphi - \lambda \varphi^{ad} + \lambda \bar{\lambda} \operatorname{id}_V \\ &= (\varphi - \lambda \operatorname{id}_V) \circ \left(\varphi^{ad} - \bar{\lambda} \operatorname{id}_V\right) = \psi \circ \psi^{ad} \end{aligned}$$

2. $\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) = \ker \psi = \ker \psi^{ad} = \ker\big(\varphi^{ad} - \bar{\lambda} \operatorname{id}_V\big) = \mathrm{Eig}\big(\varphi^{ad}, \bar{\lambda}\big)$ □

Satz 25.26 (Spektralsatz für normale Endomorphismen) $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Dann sind äquivalent:

1. Es gibt eine Orthonormalbasis von (V, h) aus Eigenvektoren von φ.

2. φ ist normal

Beweis 1. $\implies$ 2. Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von (V, h) aus Eigenvektoren von φ zu Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Es ist $\big(\varphi \circ \varphi^{ad}\big)(v_i) = \varphi\big(\varphi^{ad}(v_i)\big) = \varphi\big(\bar{\lambda}_i, v_i\big) = \bar{\lambda}_i \varphi(v_i) = \bar{\lambda}_i \lambda_i v_i = \big(\varphi^{ad} \circ \varphi\big)(v_i) \forall i = 1, \ldots, n \implies \varphi \circ \varphi^{ad} = \varphi^{ad} \circ \varphi$

2. $\implies$ 1. per Induktion nach $n = \dim V$.
Induktionsanfang: $n = 0$: trivial
Induktionsschritt: $n \geq 1$: Sei $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von φ. Sei $U = \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1) = \ker(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)$. Sei $(v_1, \ldots, v_r)$ eine Orthonormalbasis von $\left(U, h\Big|_{n \times n}\right)$. Nach 25.25 ist $\psi := \varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V$ normal

$$\begin{aligned} V &= \ker \psi \hat{\oplus} \operatorname{im} \psi \\ &= \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1) \hat{\oplus} \underbrace{\operatorname{im}(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)}_{=:W} \end{aligned}$$

Es ist $\varphi(W) = \varphi(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)(V) = ((\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \circ \varphi)(V) = (\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \left(\underbrace{\varphi(V)}_{\subseteq V}\right) \subseteq \operatorname{im}(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) = W$. Außerdem:

$$\begin{aligned} \varphi^{ad}(W) &= \varphi^{ad}(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)(V) = \Big(\varphi^{ad} \circ \varphi - \lambda_1 \varphi^{ad}\Big)(V) \\ &= \Big(\varphi \circ \varphi^{ad} - \lambda_1 \varphi^{ad}\Big)(V) = \Big((\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \circ \varphi^{ad}\Big)(V) \subseteq W \end{aligned}$$

$\varphi\Big|_W^W$ ist normal, denn: Nach Eindeutigkeit der adjungierten Abbildung ist $\left(\varphi\Big|_W^W\right)^{ad} = \left(\varphi^{ad}\right)\Big|_W^W$

$$\begin{aligned} (\varphi\Big|_W^W)^{ad} \circ \varphi\Big|_W^W &= \left(\varphi^{ad}\right)\Big|_W^W \circ \varphi\Big|_W^W = \left(\varphi^{ad} \circ \varphi\right)\Big|_W^W = \left(\varphi \circ \varphi^{ad}\right)\Big|_W^W \\ &= \varphi\Big|_W^W \circ \left(\varphi^{ad}\right)\Big|_W^W = \varphi\Big|_W^W \circ \left(\varphi\Big|_W^W\right)^{ad} \end{aligned}$$

Nach Induktionsanfang existiert eine Orthonormalbasis $(v_{r+1}, \ldots, v_n)$ von $\left(V, h\Big|_{W \times W}\right)$ aus Eigenvektoren von $\varphi \implies (v_1, \ldots, v_n)$ ist Orthonormalbasis von (V, h) aus Eigenvektoren von φ. $\square$

Anmerkung Insbesondere gilt:

- Für jedes selbstadjungierten / unitären Endomorphismus existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren
- Jede reelle orthogonale Matrix ist **über** $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

Achtung: Über $\mathbb{R}$ reicht „normal" nich aus: Es gibt orthogonale Matrizen, die über $\mathbb{R}$ nich diagonalisierbar sind (zum Beispiel $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (Drehung um $\pi/2$))

Folgerung 25.27 $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Dann sind äquivalens:

1. A ist normal
2. Es gibt eis $T \in U(n)$, sodass

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

   $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ Eigenwerte von A

Beweis Wende 25.26 auf $(\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und $\varphi = \tilde{A}$ an. □

26 Ringe, Ideale und Teilbarkeit

In diesem Abschnitt seien R, S stets kommutative Ringe (bei uns immer mit Eins)

Definition 26.1 (Ringhomomorphismus) $\varphi : R \to S$ Abbildung. φ heißt **Ringhomomorphismus** genau dann wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (RH1) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \forall a, b \in R$
- (RH2) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \forall a, b \in R$
- (RH3) $\varphi(1_R) = 1_S$

Definition 26.2 (Ideal) $I \subseteq R$. I heißt ein **Ideal** in R genau dann wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (I1) $0 \in I$
- (I2) $a, b \in I \implies a + b \in I$
- (I3) $r \in R, a \in I \implies ra \in I$

Beispiel 26.3

1. $\{0\}, R$ sind Ideale in R
2. FÜr $n \in \mathbb{Z}$ ist $n\mathbb{Z}\{na \mid a \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Ideal

Bemerkung+Definition 26.4 $\varphi : R \to S$ Ringhomomorphismus. Dann gilt:

1. $J \subseteq S$ Ideal $\implies \varphi^{-1}(J) \subseteq R$ Ideal

2. $\ker\varphi := \{a \in R \mid \varphi(a) = 0\} \subseteq R$ Ideal
3. φ injektiv $\iff \ker\varphi = \{0\}$
4. $I \subseteq R$ Ideal und φ surjektiv $\implies \varphi(I) \subseteq S$ Ideal
5. $\operatorname{im}\varphi := \varphi(R)$ ist ein Unterring von S (das heißt ein Ring bezüglich der eingeschränkten Verknüpfungen.)

Beweis 1. (I1): $0 \in \varphi^{-1}(J)$, denn $\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0) + \varphi(0) \implies \varphi(0) = 0 \in J \implies 0 \in \varphi^{-1}(J)$
(I2): $a, b \in \varphi^{-1}(J) \implies \varphi(a), \varphi(b) \in J \implies \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \in J \implies a + b \in \varphi^{-1}(J)$
(I3): $r \in R, a.\varphi^{-1}(J) \implies \varphi(a) \in J \implies \varphi(ra) = \varphi(r)\varphi(a) \in J \implies ra \in \varphi^{-1}(J)$

2. aus 1., wegen $\ker\varphi = \varphi^{-1}(\{0\}), \{0\} \subseteq S$ Ideal

3., 4., 5.: nachrechnen □

Anmerkung 4. wird falsch, wenn man die Vorraussetzung φ surjektiv weglässt: Die kanonische Inklusion $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, x \mapsto x$ ist ein Ringhomomorphismus, $\mathbb{Z}$ ist ein Ideal in $\mathbb{Z}$, aber $\mathbb{Z} = i(\mathbb{Z})$ ist kein Ideal in $\mathbb{Q}$, denn:

$$\underbrace{\frac{1}{3}}_{\in\mathbb{Q}} \cdot \underbrace{2}_{\in\mathbb{Z}} = \frac{2}{3} \dot{\in} \mathbb{Z}$$

$\mathbb{Z}$ ist zumindest ein Unterring von $\mathbb{Q}$.

Satz+Definition 26.5 $I \subseteq R$ Ideal. Dann ist durch $r_1 \sim r_2 \overset{\text{Def}}{\iff} r_1 - r_2 \in I$ eine Äquivalenzrelation auf R gegeben, welche die zusätzliche Eigenschaft

$$r_1 \sim r_2, s_1 \sim s_2 \implies r_1 + s_1 \sim r_2 + s_2, r_1 s_1 \sim r_2 s_2$$

hat („Kongruenzrelation"). Die Äquivalenzklasse von $r \in R$ ist durch

$$\bar{r} := r + I := \{r + a \mid a \in I\}$$

gegeben und heißt die **Restklasse** von r modulo I. Die Menge die Restklassen bezeichnen wir mit ${}^{R}\!/_{I}$.

Beweis 1. „$\sim$" ist Äquivalenzrelation: nachrechnen

2. Verträglichkeit mit $+, \cdot$: Sei $r_1 \sim r_2, s_1 \sim s_2 \implies r_1 - r_2 \in I, s_1 - s_2 \in I$

$$\implies (r_1 + s_1) - (r_2 - s_2) = \underbrace{(r_1 - r_2)}_{\in I} + \underbrace{(s_1 - s_2)}_{\in I} \in I \implies r_1 + s_1 \sim r_2 + s_2$$

Außerdem:

$$r_1 s_1 - r_2 s_2 = \underbrace{r_1(s_1 - s_2)}_{\in I} + \underbrace{s_2(r_1 - r_2)}_{\in I} \in I \in r_1 s_1 \sim r_2 s_2$$ □

Satz+Definition 26.6 $I \subseteq R$ Ideal. Dann wird $R/_I$ mit der Addition

$$+ : R/_I \times R/_I \to R/_I, \bar{r} + \bar{s} := \overline{r+s}$$

und der Multiplikation

$$\cdot : R/_I \times R/_I \to R/_I, \bar{r} \cdot \bar{s} := \overline{rs}$$

zu einem kommutativen Ring, dam **Faktorring** (**Restklassenring**) $R/_I$. Die Abbildung $\pi : R \to R/_I, r \mapsto \bar{r}$ ist ein surjektiver Ringhomomorphismus mit $\ker \pi = I$.

Beweis **Wohldefiniertheit** von „+“„·“: Nach 26.5 ist für $r_1, r_2, s_1, s_2 \in R$ mit $r_1 \sim r_2, s_1 \sim s_2$ auch $r_1 + s_1 \sim r_2 + s_2, r_1 s_1 \sim r_2 s_2$.
Ringeigenschaften: vererben sich aufgrund der vertreterweisen Definiton von R.
π ist Ringhomomorphismus nach Konstruktion: $\pi(a+b) = \overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b} = \pi(a) + \pi(b)$, analog für „·“, $\pi(1) = \bar{1}$
$\ker \pi = \{r \in R \mid \bar{r} = \bar{0}\} = \{r \in R \mid r \sim 0\} = \{r \in R \mid r - 0 \in I\} = I$ □

Anmerkung Insbesondere sind die Ideale in R genau die Kerne von Ringhomomorphismen, die von R ausgehen.

Beispiel 26.7
Ist $R = \mathbb{Z}, I = n\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}$, dann erhält man die aus der LA1 bekannten Restklassenringe $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ (vergleiche 6.4).

Satz 26.8 (26.8 (Homomorphiesatz für Ring)) $\varphi : R \to S$ Ringhomomorphismus. Dann gibt es einen Ringisomorphismus

$$\Phi : R/_{\ker \varphi} \to \operatorname{im} \varphi, \bar{r} = r + \ker \varphi \mapsto \varphi(r)$$

Beweis **Wohldefiniertheit von** Φ: Seien $r_1, r_2 \in R$ mit $\bar{r}_1 = \bar{r}_2$

$$\implies r_1 - r_2 \in \ker \varphi \mathbb{R} \varphi(r_1 - r_2) = 0 \implies \varphi(r_1) = \varphi(r_2)$$

Φ **ist Ringhomomorphismus**:

$$\Phi(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = \Phi(\overline{r_1 + r_2}) = \varphi(r_1 + r_2) = \varphi(r_1) + \varphi(r_2) = \Phi(\bar{r}_1) + \Phi(\{barr_2\})$$

analog für „·“, $\Phi(\bar{1}) = \varphi(1) = 1$
Φ **ist injektiv**: Sei $r \in R$ mit $\Phi(\bar{r}) = 0$

$$\implies \varphi(r) = 0 \implies r \in \ker \varphi \implies \bar{r} = r + \ker \varphi = \ker \varphi = \bar{0}$$

das heißt $\ker \Phi = \{\bar{0}\}$.
Φ **ist surjektiv**: nach Konstruktion. □

Beispiel 26.9
K Körper, $R = K[t], \varphi : K[t] \to K, f \mapsto f(0)$. φ ist Ringhomomorphismus (nachrechnen), $\operatorname{im} \varphi = K, \ker \varphi = \{f \in K[t] \mid \operatorname{im} f(0) = 0\} = \{fg \mid g \in K[t]\} = tK[t]$. Wir erhalten einen Ringisomorphismus

$$\Phi : K[t]/_{tK[t]} \to K, f + tK[t] \mapsto f(0)$$

Definition 26.10 (26.10) $x \in R$ heißt **Nullteiler** $\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ Es existiert $y \in R, y \neq 0$ mit $xy = 0. \setminus R$ heißt **Nullteiler** (**Integritätsbereich**) $\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ $R \neq 0$ und $0 \in R$ der einzige Nullteiler in R.

Anmerkung $R \neq 0 \implies 0$ ist ein Nullteiler in R (wegen $0 \cdot 1 = 0, 0 \neq 1$)

Beispiel 26.11

1. $\mathbb{Z}$ ist nullteilerfrei
2. $\bar{2} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist Nullteiler wegen $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{0}$ ist $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$
3. Analog zu $K[t]$ kann man den Polynomring $R[t]$ erklären. Es gilt dann: R nullteilerfrei $\implies$ $R[t]$ nullteilerfrei. (Übungen)

Bemerkung+Definition 26.12 (Einheit) $v \in R$ heißt **Einheit** $\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ es existiert ein $y \in R$ mit $xy = 1$. $R^* := \{x \in R \mid x \text{ ist Einheit }\}$ bildet eine abelsche Gruppe bezüglich „·“.

Beweis nachrechnen. □

Beispiel 26.13

1. $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$, dann: $1 \cdot 1 = 1, (-1)(-1) = 1, ab = 1 \implies |a||b| = 1 \implies |a| = |b| = 1$
2. K Körper $\implies K^* = K \setminus \{0\}$
3. $R[t]^* = R^*$ (Übungen)

Definition 26.14 $a_1, \dots, a_n \in R, I \subseteq R$ Ideal.

$$(a_1, \dots, a_n) := \{\sum_{i=1}^{n} a_i r_i \mid r_1, \dots, r_n \in R\}$$

heißt das **von** $a_1, \dots, a_n$ **erzeugte Ideal**. I heißt **Hauptideal** $\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ es existiert ein $a \in R$ mit $I = (a) = \{ra \mid r \in R\} =: Ra$.
R heißt **Hauptidealring** (HIR) $\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ R ist nullteilerfrei und jedes Ideal in R ist ein Hauptideal.

Anmerkung $(a_1, \dots, a_n)$ ist ein Ideal in R (leicht nachzurechnen)

Bemerkung 26.15 Z ist ein Hauptidealring. Ist $I \subseteq \mathbb{Z}$ ein Ideal, dann existiert ein eindeutig bestimmtes $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$I = (n) = n\mathbb{Z}$$

Beweis $\mathbb{Z}$ **nullteilerfrei**: klar.
Existenz: Sei $I \subseteq \mathbb{Z}$ Ideal.

1. Fall: $I = \{0\} = (0)$, dann fertig

2. Fall: $I \neq \{0\}$. Mat $a \in I$ ist auch $-a = (-1)a \in I$ somit $I \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$. $I \cap \mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element b. Behauptung: $I = (b)$
„$\supseteq$" $x \in (b) \implies$ es existiert ein $r \in \mathbb{Z}$ mit $x = rb \implies x \in I$
„$\subseteq$" Sei $x \in I \implies$ es existieren $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $x = qb + r, 0 \leq r < b \implies r = x - qb \in I$. Wegen Minimalität von b in $I \cap N$ folgt $r = 0 \implies x = qb \in (b)$

Eindeutigkeit: Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $(m) = (n)$. Offenbar gilt: $m = 0 \iff n = 0$. Im Folgenden seien $m, n \neq 0$. Wegen $(m) = (n)$ ist $m \in (n), n \in (m) \implies$ es existieren $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ mit $m = r_1 n$ und $n = r_2 m$

$$\implies m = r_1 n = r_1 r_2 m \implies r_1 r_2 = 1 \implies r_1 = r_2 = 1 \vee r_1 = r_2 = -1 \xRightarrow{m,n \in \mathbb{N}_0}$$

$$r_1 = r_2 = 1 \implies m = n$$ □

Beispiel 26.16
$\mathbb{Z}[t]$ ist kein Hauptidealring: Es gibt $f \in \mathbb{Z}[t]$ mit $(2, t) = (f)$, dann: Annahme: Es existiert $f \in \mathbb{Z}[t]$ mit $2 = hf \implies \deg h = \deg f = 0$, das heißt f ist konstantes Polynom, etwa $f = a$ für ein $a \in \mathbb{Z}$. Außerdem existiert $\tilde{h} \in \mathbb{Z}[t]$ mit $t = \tilde{h}f = ha \implies a = \pm 1 \implies f = \pm 1$. Aber: $\pm 1 \notin (2, t)$, dann andernfalls existieren $u, v \in \mathbb{Z}[t]$ mit $\pm 1 = 2u + tv \xRightarrow{t=0} \pm 1 = 2u(0) + 0 \cdot v(0) = 2u(0)$

Definition 26.17 R nullteilerfrei, $a, b \in R$. b heißt ein **Teiler** von a (Notation: $b \mid a$) $\overset{\text{Def}}{\iff}$ es existiert ein $c \in R$ mit $a = bc$.
a, b heißen assoziiert (Notation: $a \triangleq b$) $\overset{\text{Def}}{\iff} a \mid b$ und $b \mid a$

Beispiel 26.18
$R = \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z} \implies a \triangleq -a$

Bemerkung 26.19 R nullteilerfrei, $a, b \in R$. Dann sind äquivalent:

1. $a \triangleq b$
2. Es existiert $e \in \mathbb{R}^*$ mit $a = be$
3. $(a) = (b)$

Beweis 1. $\implies$ 2. Sei $a \triangleq b \implies a \mid b$ und $b \mid a \implies$ es existieren $c, d \in R$ mit $b = ac, a = bd$

$$\implies b = ac = bdc \implies b(1 - dc) = 0$$

a) Fall: $b = 0 \implies a = bd = 0$. Setze $e :=$, fertig: $a = b \cdot 1$
b) Fall: $b \neq 0 \implies 1 - dc = 0 \implies dc = 1 \implies c, d \in R^*$. Setze $e := d$, dann $a = bd = bc$

2. Sei $a = be$ mit $e \in R^* \implies a \in (b) \implies (a) \subseteq (b)$. Wegen $e \in R^*$ ist $b = e^{-1}a \implies (b) \subseteq (a)$

3. Sei $(a) = (b) \implies a \in (b) \implies$ es existiert $c \in R$ mit $a = bc \implies b \mid a$. Analog: $a \mid b$ also $a \triangleq b$ □

Definition 26.20 R nullteilerfrei, $a_1, \ldots, a_n \in R$. $d \in R$ heißt **größter gemeinsamer Teiler** von $a_1, \ldots, a_n \overset{\text{Def}}{\iff}$ Die folgenden Bedingungen sind erfüllt:

- (GGT1) $d \mid a_1, \ldots, d \mid a_n$
- (GGT2) $c \mid a_1, \ldots, c \mid a_n \iff c \mid d$

Beweis Wir bezeichnent die Menge aller größten gemeinsamen Teiler von $a_1, \ldots, a_n$ mit $\mathrm{GGT}(a_1, \ldots, a_n)$.□

Anmerkung
- Seien $d_1, d_2 \in \mathrm{GGT}(a_1, \ldots, a_n)$, dann folgt $d_1 \mid d_2$ und $d_2 \mid d_1$, also $d_1 \triangleq d_2$.
- Ist $d \in \mathrm{GGT}(a_1, \ldots, a_n)$ und $d' \triangleq d$, dann ist $d' \in \mathrm{GGT}(a_1, \ldots, a_n)$
- Ohne zusätzliche Vorraussetzungen an R kann man im allgemeinen nicht erwarten, dass $\mathrm{GGT}(a_1, \ldots, a_n) \neq \emptyset$. Zum Beispiel ist $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ ist $\mathrm{GGT}\big(4, 2 \cdot \big(1 + \sqrt{-3}\big)\big) = \emptyset$ (Übungen)

Bemerkung 26.21 R Hauptidealring, $a_1, \ldots, a_n \in R$. Dann gilt:

1. $\mathrm{GGT}(a_1, \ldots, a_n) \neq \emptyset$
2. $d \in \mathrm{GGT}(a_1, \ldots, a_n) \iff (d) = (a_1, \ldots, a_n)$

Beweis
1. R Hauptidealring $\implies$ es existiert $\tilde{d} \in R$ mit $(a_1, \ldots, a_n) = \left(\tilde{d}\right)$. Behauptung: $\tilde{d} \in \mathrm{GGT}(a_1, \ldots, a_n)$, denn:
   (GGT1): $a_1 \in (a_1, \ldots, a_n) = \left(\tilde{d}\right) \implies \tilde{d} \mid a_i \forall i = 1, \ldots n$
   (GGT2): Wegen $\tilde{d} \in (a_1, \ldots, a_n)$ existieren $r_1, \ldots, r_n \in R$ mit $\tilde{d} = r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n$. Ist $c \in R$ mit $c \mid a_1, \ldots, c \mid a_n$, dann folgt $c \mid r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n = \tilde{d}$
2. „$\implies$“ $d \in \mathrm{GGT}(a_1, \ldots, a_n) \implies d \triangleq \tilde{d} \implies (d) = \left(\tilde{d}\right) = (a_1, \ldots, a_n)$ „$\impliedby$“ Sei $(d) = (a_1, \ldots, a_n) \implies d \in \mathrm{GGT}(a_1, \ldots, a_n)$ mit Argument aus dem Beweis von 1. □

Anmerkung
- Im Fall $R = \mathbb{Z}, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ ist $\mathrm{GGT}(a_1, \ldots, a_n) \cap \mathbb{N}_0 = \{d\}$ für ein $d \in \mathbb{N}_0$ (beachte $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$). Mann nennt dann d **den** größten gemeinsamen Teiler von $a_1, \ldots, a_n$
$$d =: \mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n)$$
- Im Fall $R = K[T]$ (wobei K Körper, in 27, dies ein Hauptidealring), $f_1, \ldots, f_n \in K[t]$, nicht alle $f_i = 0$, existiert ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom $d \in K[t]$ mit $d \in \mathrm{GGT}(f_1, \ldots, f_n)$ (bechte: $K[t]^* = K^*$). Man nennt
$$d =: \mathrm{ggT}(f_1, \ldots, f_n)$$
den größten gemeinsamen Teiler von $f_1, \ldots, f_n$ und setzt
$$\mathrm{ggT}(0, \ldots, 0) := 0$$

Folgerung 26.22 R Hauptidealring, $a, b \in R, d \in \mathrm{GGT}(a, b)$. Dann existieren $u, v \in R$ mit $d = ua + vb$.

Beweis aus 26.21: $(d) = (a, b)$ □

Definition 26.23 R nullteilerfrei, $p \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$

- p heißt **irreduzibel** $\overset{\text{Def}}{\iff}$ Aus $p = ab$ mit $a, b \in R$ folgt stets $a \in R^*$ oder $b \in R^*$
- p heißt **Primelement** $\overset{\text{Def}}{\iff}$ Aus $p \mid ab$ folgt stets $p \mid a$ oder $p \mid b$

Anmerkung p irreduzibel / Primelement, $p' \mathrel{\hat{=}} p \implies p'$ irreduzibel / Primelment

Beispiel 26.24
irreduzible Elemente inn $\mathbb{Z}$ = Primzahlen p aus N sowie deren Negative $-p$. Primelelemente in $\mathbb{Z}$?

Frage: Zusammenhang zwischen irreduziblen Elementen und Primelementen?

Bemerkung 26.25 R nullteilerfrei, $p \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$ Primelement. Dann ist p irreduzibel.

Beweis
1. Wir setzet $S := {}^{R}\!/_{(p)}$. Behauptung S ist nullteilerfrei, denn: Wegen $p \notin R^*$ ist $(p) \neq R$, das heißt $S \neq 0$. Sind $\bar{x}, \bar{y} \in S$ mit $\bar{x}\bar{y} = \bar{0}$ und $\bar{y} \neq \bar{0}$, das heißt $xy \in (p)$ und $y \notin (p) \implies p \mid xy$ und $p \nmid p \implies p \mid x \implies \bar{x} = \bar{0}$
2. Sei $p = ab$ mit $a, b \in R$. In $s = {}^{R}\!/_{(p)}$ ist $\bar{0} = \bar{p} = \bar{a}\bar{b} \implies \bar{a} = \bar{0} \vee \bar{b} = \bar{0}$. Ohne Einschränkung $\bar{a} = \bar{0} \implies$ Es existierte $d \in R$ mit $a = pd \implies p = ab = pdb \implies p(1 - db) = 0 \implies 1 - db = 0 \implies db = 1 \implies b \in R^*$ □

Anmerkung Es gibt Beispiele für irreduzible Elemente, die keine Primelemente sind (Übungen)

Satz 26.26 R Hauptidealring, $p \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$. Dann sind äquivalent:

1. p ist irreduzibel
2. p ist Primelement

Beweis 2. $\implies$ 1. aus 26.25

1. $\impliedby$ 2. Sei p irreduzibel.
   a) Behauptung: Ist $I \subseteq R$ mit $(p) \subsetneq I$, dann ist $I = R$, denn: Sei $(p) \subsetneq I$. Da R Hauptidealring existiert $a \in R$ mit $I = (a) \implies \exists c \in R : p = ac \implies a \in R^* \vee c \in \mathbb{R}^*$. Falls $c \in R^*$, dann $(p) = (a) = I$` Also $a \in R^*$, das heißt $(a) = I = R$.
   b) ${}^{R}\!/_{(p)}$ ist ein Körper, denn: Sei $\bar{x} \in {}^{R}\!/_{(p)}, \bar{x} \neq \bar{0} \implies x \notin (p) \implies I := (x, p)$ ist ein Ideal in R mit $(p) \subsetneq I \implies I = R \implies 1 \in I \implies \exists u, v \in R : 1 = ux + vp \implies \bar{1} = \bar{u}\bar{x} + \bar{v}\underbrace{\bar{p}}_{=0} = \bar{u}\bar{x}$

c) p ist Primelement, denn: Seien $a, b \in R$ mit $p \mid ab \implies$ in ${R}/{(p)}$ ist $\bar{0} = \bar{p} = \bar{a}\bar{b}$. Nach 2. ist ${R}/{(p)}$ ein Körper, also nullteilerfrei (6.11) $\implies \bar{a} = \bar{0} \vee \bar{b} = \bar{0} \implies p \mid a \vee p \mid b$
□

Anmerkung • Beweis hat gezeigt: R Hauptidealring, p irreduzibles Element in R, dann ist ${R}/{(p)}$ ein Körper.

- Primelement in $\mathbb{Z}$ = irreduzibles Element in $\mathbb{Z}$

Frage: Wann gilt in R ein Analogon des Satzes über die eindeutige Primfaktorzerlegung in $\mathbb{Z}$?

Definition 26.27 R nullteilerfrei. R heißt **faktoriell** $\overset{\text{Def}}{\iff}$ Jedes $a \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$ lässt sich eindeutig bis auf Reihenfolge und Assoziiertheit als Produkt irreduzibler Elemente aus R schreiben, das heißt es existieren irreduzible Elemente $p_1, \dots, p_r \in R$ mit $a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ und sind $q_1, \dots, q_s \in R$ irreduzible Elemente mit $a = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s$, so ist $r = s$ und nach Umordnen ist $p_i \mathrel{\hat{=}} q_i$ für $i = 1, \dots, r$

Ziel: Hauptidealringe sind faktoriell.

Definition 26.28 R heißt **noethersch** $\overset{\text{Def}}{\iff}$ Für jede aufsteigende Kette $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ von Idealen in R existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $I_k = I_n$ für alle $k \geq n$

Bemerkung 26.29 R Hauptidealring. Dann ist R noethersch.

Beweis Sei $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ eine aufsteigende Kette von Idealen aus R. Setze

$$I := \cup_{k \geq 1} I_k$$

1. I ist ein Ideal in R, dann:
   (I1) $0 \in I_k \forall k \in \mathbb{N} \implies 0 \in I$
   (I2) Seien $a, b \in I \implies \exists k, l \in \mathbb{N} : a \in I_k, b \in I_l$. Mit $m := \max\{k, l\}$ ist $a, b \in I_m \implies a + b \in I_m \subseteq I$
   (I3) $a \in I, r \in R \implies \exists k \in \mathbb{N} : a \in I_k \implies ra \in I_k \subseteq I$
2. Wegen 1. und R Hauptidealring existiert ein $a \in R$ mit $I = (a)$, insbesondere $a \in I \implies \exists n \in \mathbb{N} : a \in I_n \implies (a) \subseteq I_n \subseteq I = (a) \implies I_n = I \implies I_k = I = I_n \forall k \geq n$ □

Satz 26.30 R Hauptidealring. Dann ist R faktoriell.

Beweis 1. Existenz von Zerlegung in irreduzible Elemente. Setze

$$M := \{(a) \mid a \in R \setminus (R^* \cup \{0\}) \mid \text{ besitzt keine Faktorisierung in irreduziblen Elementen}\}$$

M ist wohldefiniert, da Bedingung an a invariant unter Assoziativitätheit.
Annahme: $M \neq \emptyset$

Wegen 26.29 existiert bezüglich „$\subseteq$“ maximales Element $I \in M$, denn: Anderenfalls existiert zu jedem $I \in M$ ein $I' \in M$ mit $I \subsetneq I'$, das liefert eine unendliche strikt aufsteigende Kette von von Idealen in R ↯zu R noethersch.
Es existiert $a \in R$ mit $I = (a)$. a ist nicht irreduzibel, denn für a irreduzibel wäre a selbst eine Faktorisierung in irreduzible Elemente $\implies I = (a) \notin M$ ↯. $\implies \exists a_1, a_2 \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$ mit $a = a_1 a_2 \implies (a) \subseteq (a_1), (a) \subseteq (a_2)$. Wäre $(a) = (a_1)$, dann existiert $b \in R^*$ mit $a = a_1 b = a_1 a_2 \implies a_2 = b \in \mathbb{R}^*$ ↯. Also $(a) \subsetneq (a_1)$, analog $(a) \subsetneq (a_2)$
$\implies (a_1), (a_2) \notin M \implies a_1, a_2$ haben Faktorisierung in irreduzible Elemente also auch $a = a_1 a_2$ ↯. Also $M = \emptyset \implies$ Existenz

2. Eindeutigkeit von Zerlegung: Sei $a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s$ mit $p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_s$ irreduzibel. Beweis per Induktion nach r:
Induktionsanfang: $r = 0 \implies a = 1 \implies s = 0$ (sonst $q_1, \ldots, q_s \in R^{*}$`)
Induktionsschritt: Behauptung für $0, \ldots, r-1$ bewiesen.

$$p_1 \mid p_1 \cdot \ldots \cdot p_r = q_1 \cdot \ldots \cdot q_s \implies \exists j \in \{1, \ldots, s\} : p_1 \mid q_j$$

Nach Umnummerierung sei $j = 1$ also $p_1 \mid q_1$, etwa $q_1 = cp_1$ mit $c \in R$. Da q_1 irreduzibel folgt $c \in R^*$, also $p_1 \mathrel{\hat{=}} q_1$.

$$\implies p_1 \cdot \ldots \cdot p_r = cp_1 q_2 \cdot \ldots \cdot q_s \implies p_1(p_2 \cdot \ldots \cdot p_r - cq_2 \cdot \ldots \cdot q_s) = 0$$

$\implies p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = (cq_2) \cdot \ldots \cdot q_s$. Wegen $c \in R^*$ ist cq_2 irreduzibel $\implies r - 1 = s - 1$ ($\implies r = s$) und nach Umnummerierung

$$p_2 \mathrel{\hat{=}} cq_2 = q_2, p_3 \mathrel{\hat{=}} q_3, \ldots, p_r \mathrel{\hat{=}} q_r$$ □

Anmerkung • Fasst man in einer Zerlegung eines Elementes zueinander assoziierter Faktoren zusammen und erlaubt einen Vorfaktor $c \in R^*$, so erhält man eine Darstellung für Elemente $a \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$ der FOrm

$$a = cp_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r}$$

mit $c.R^*, p_1, \ldots, p_r$ irreduzibel, $p_1 \mathrel{\hat{\neq}} p_j$ für $i \neq j, e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N}$. Ist dann $a = dq_1^{f_1} \cdot \ldots \cdot q_s^{f_s}$ mit $d \in R^*, q_1, \ldots, q_s$ irreduzibel, $q_i \mathrel{\hat{\neq}} q_j$ FÜr $i \neq j$, $f_1, \ldots, f_s \in \mathbb{N}$, dann ist $r = s$ und nach Umnummerierung ist $p_i \mathrel{\hat{=}} q_i, e_i = f_i$ für $i = 1, \ldots, r$.

27 Euklidische Ringe

In diesem Abschnitt sei R stets ein kommutativer Ring.

Definition 27.1 R nullteilerfrei. R heißt **Euklidischer Ring**, wenn es eine Abbildung $\delta : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0$, sodass gilt:

$$\forall f, g \in R, g \neq 0 \exists q, r \in R : f = qg + r \wedge (\delta(r) < \delta(g) \vee r = 0)$$

δ heißt eine **Normabbildung** auf R.

Beispiel 27.2

1. $R = \mathbb{Z}$ mit $\delta = |\cdot|$ ist ein Euklidischer Ring (vergleiche Elementare Zahlentheorie-Skript, Satz 1.3)
2. K Körper $\implies R = K[T]$ mit $\delta = \deg$ ist ein Euklidischer Ring (vergleiche 7.6)
3. $R = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C}$ mit $\delta(x + iy) = x^2 + y^2$ ist ein Euklidischer Ring (Ring der ganzen Gaußschen Zahlen) (Übungen)
4. K Körper mit $\delta : K \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0, x \mapsto 1$ ist ein Euklidischer Ring (hier ist stets „$r = 0$“)

Satz 27.3 R Euklidischer Ring. Dann ist R ein Hauptidealring.

Beweis Sei $I \subseteq R$ Ideal, $I \neq 0$. Es ist $\emptyset \neq \{\delta(a) \mid a \in I \setminus \{0\}\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Wähle $a \in I$, sodass $\delta(a)$ minimal. Behauptung: $I = (a)$, denn:
„$\supseteq$“: Wegen $a \in I$ ist $(a) \subseteq I$
„$\subseteq$“ Sei $f \in I \implies \exists q, r : f = qa + r$ und $(\delta(r) < \delta(a) \vee r = 0) \implies r = f - qa \in I$. Wegen $\delta(a)$ minimal folgt $r = 0 \implies f = qa \in (a)$ □

Folgerung 27.4 R Euklidischer Ring. Dann ist R faktoriell.

Beweis R Euklidisch $\implies \mathbb{R}$ Hauptidealring $\implies R$ faktoriell. □

Folgerung 27.5 K Körper, $f \in K[t]$, $f \neq 0$. Dann besitzt f eine bis auf Reihenfolge der Faktoren eindeutige Darstellung

$$f = cp_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r}$$

mit $c \in K^*, r \geq 0, e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N}_0$ und paarweise verschiedenen irreduziblen normierten Polynomen $p_1, \ldots, p_r$.

Beweis $K[t]$ ist Euklidischer Ring, also faktoriell nach 27.4. Wegen $K[t]^* = K^*$ gilt für $f, g \in K[t] : f \triangleq g \iff \exists \lambda \in K^* : f = \lambda g$. Insbesondere existiert in jeder Äquivalenzklasse bezüglich „$\triangleq$“ in $K[t] \setminus \{0\}$ genau ein normiertes Polynom $\implies$ Behauptung. □

Satz 27.6 (Euklidischer Algorithmus) R Euklidischer Ring mit Normabstand $\delta, a, b \in R \setminus \{0\}$. Wir betrachten eine Folge $a_0, a_1, \ldots$ von Elementen aus R, die induktiv wie folgt gegeben ist:

$$\begin{aligned} a_0 &:= a \\ a_1 &:= b \\ a_0 &= q_0 a_1 + a_2 \quad \text{mit } \delta(a_2) < \delta(a_1) \text{ oder } a_2 = 0 \end{aligned}$$

Falls $a_2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} a_1 &= q_1 a_2 + a_3 \quad \text{mit } \delta(a_3) < \delta(a_2) \text{ oder } a_3 = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Falls $a_i \neq 0$:

$$a_{i-1} = q_i a_i + a_{i+1} \quad \text{mit } \delta(a_{i+1}) < \delta(a_i) \text{ oder } a_{i+1} = 0$$

Dann existiert ein eindeutig bestimmter Index $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0, a_{n+1} = 0$. Es ist dann

$$d := a_n \in \mathrm{GGT}(a, b)$$

Durch Rückwärtseinsetzen lässt sich d als Linearkombination von a, b darstellen (vergleiche 26.22):

$$d = a_n = a_{n-2} q_{n-2} a_{n-1} = \cdots = ua + vb$$

mit $u, v \in R$ („erweiterter Euklidischer Algorithmus").

Beweis Falls $a_i \neq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dann wäre $\delta(a_1) > \delta(a_2) > \ldots$ eine streng monoton fallende unendliche Folge in $\mathbb{N}_0$ ↯.
$\Longrightarrow$ es existiert ein eindeutig bestimmtes $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0, a_{n+1} = 0$. Wir betrachten die Gleichungen

$$\begin{aligned}
(G_0) \quad & a_0 = q_0 a_1 + a_2 \\
& \vdots \\
(G_{n-2}) \quad & a_{n-2} = q_{n-2} a_{n-1} + a_n \\
(G_{n-1}) \quad & a_{n-1} = q_{n-1} a_n
\end{aligned}$$

Dann gilt: $a_n \mid a_{n-1} \Longrightarrow a_n \mid (q_{n-2} a_{n-1} + a_n) = a_{n-2} \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow a_n \mid a_1, a_n \mid a_0$. Sei $c \in R$ mit $c \mid a_0$ und $c \mid a_1 \Longrightarrow c \mid (a_0 - q_0 a_1) = a_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow c \mid a_n$. Also: $a_n \in \mathrm{GGT}(a_0, a_1) = \mathrm{GGT}(a, b)$.
Es ist

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-2} - q_{n-2} a_{n-1} = a_{n-2} - q_{n-2}(q_{n-3} - q_{n-3} a_{n-2}) \\
&= (1 + q_{n-2} q_{n-3}) a_{n-2} - q_{n-2} a_{n-3} = \cdots = ua + vb
\end{aligned}$$

mit geeigneten $u, v \in R$. □

Beispiel 27.7
$R = \mathbb{Z}, a = 24, b = 15$.

$$\begin{aligned}
24 &= 1 \cdot 15 + 9 \\
15 &= 1 \cdot 9 + 6 \\
9 &= 1 \cdot 6 + 3 \\
6 &= 2 \cdot 3 + 0
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \mathrm{ggT}(24, 15) = 3$.

$$3 = 9 - 1 \cdot 6 = 9 - (15 - 1 \cdot 9) = 2 \cdot 9 - 1 \cdot 15 = 2 \cdot (25 - 1 \cdot 15) - 15 = 2 \cdot 24 - 3 \cdot 15$$

Anmerkung Für Matrizen aus $M(n \times n, R)$ kann man analog zu LA1 (vergleiche 10.5) elementare Zeilen- und Spaltenoperationen erklären.

Satz 27.8 (Gauß-Diagonalisierung für Euklidische Ringe) R Euklidischer Ring, $A \in M(m \times n, R)$. Dann gilt: A lässt sich durch wiederholte Anwendung von elementaren Zeilen- und Spaltenoperationen vom Typ 3 (Addition des λ -fachen einer Zeile/Spalte zu einer anderen Zeile / Spalte, $\lambda \in R$) sowie des Typ 4 (Zeilen / Spaltenvertauschung) in eine Matrix der Gestalt

$$\begin{array}{ccc|c} c_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & c_r & \\ \hline 0 & & & 0 \end{array}$$

mit $c_1, \dots, c_r.R \setminus \{0\}, c_1 \mid c_2 \mid \cdots \mid c_r$. überführen.

Beweis (= Algorithmus zur Durchführung). Falls $A = 0$, dann fertig. Im Folgenden sei $A \neq 0$. Sei δ eine Normabberechnung auf R.

1. Schritt: Durch Zeilen und Spaltenvertauschung erreichen wir $a_{11} \neq 0$ und $\delta(a_1 1) \leq \delta(a_{ij}) \forall i, j, a_{ij} \neq 0$.

2. Schritt: Bring A auf die Form

$$\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}$$

   a) Fall: In der ersten Spalte / Zeile stehen keine Elemente $\neq 0$ außer a_{11}, dann fertig.

   b) Fall: In der ersten Spalte / Zeile stehen noch Elemente $\neq 0$, ohne Einschränkung $a_{21} \neq 0 \implies \exists q \in R : a_{21} = qa_{11}$ oder $\delta(a_{21} - qa_{11}) < \delta(a_1 1)$. Addiere das $(-q)$ -fache der 1. Zeile zur 2. Zeile $\implies$ Erhalte Matrix $A' = \left(a'_{ij}\right)$ mit $a'_{21} = 0$ oder $\delta(a'_{21}) < \delta(a_{11})$. Falls $a'_{21} \neq 0$, dann erhalte durch Zeilen sowie gegebenenfalls Spaltenvertauchung eine Matrix $A'' = \left(a''_{ij}\right)$ mit $a''_{11} \neq 0, \delta(a''_{11}) \leq \delta\left(a''_{ij}\right)$ für alle i, j mit $a''_{ij} \neq 0$, mit $\delta(a''_{11}) < \delta(a_1 1)$. Dieser Prozess bricht nach endlich vielen Iterationen ab und wir erhalten eine Matrix der From

$$\begin{array}{c|c} d_{11} & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}$$

   $d_{11} \neq 0, \delta(d_{11}) \leq \delta(d_{ij})$ falls $d_{ij} \neq 0, \delta(d_{11}) \leq \delta(a_1 1)$

3. Schritt: Erreiche $d_{11} \mid d_{ij} \forall i, j$:

   a) Fall: Es gilt bereits $d_{11} \mid d_{ij} \forall i, j$, dann fertig.

b) Fall: Es existiert i, j mit $d_{11} \nmid d_{ij} \implies$ Es existiert ein $q \in R$ mit $d_{ij} - qd_{11} \neq 0$ und $\delta(d_{ij} - qd_{11}) < d_{11}$. Addiere erste Zeile von D zur i-ten Zeile von D, erhalte:

$$\begin{array}{c|ccccc}
d_{11} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\hline
0 & & & & & \\
\vdots & & & * & & \\
0 & & & & & \\
a_{11} & d_{iz} & \dots & d_{ij} & \dots & d_{in} \\
0 & & & & & \\
\vdots & & & & & \\
0 & & & * & &
\end{array}$$

Subtrahiere das q -fache der ersten Spalte von der j-ten Spalte diser Matrix, erhalte:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
d_{11} & 0 & \dots & 0 & -qd_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\hline
0 & & & & & & & & \\
\vdots & & & & * & & & & \\
0 & & & & & & & & \\
a_{11} & * & & & d_{ij} - qd_{11} & & & * & \\
0 & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & \\
0 & & & & * & & & &
\end{array}$$

mit $d'_{ij} = d_{ij} - qd_{11}, \delta\left(d'_{ij}\right) < \delta(d_1 1) \leq d_{11}$. Wiederhole die gesamte bisherige Prozedur für die Matrix D'. Dieser Prozess bricht nach endlich vielen Schritten ab. Wir erhalten eine Matrix

$$C = (c_{ij}) = \begin{array}{c|c}
c_{11} & 0 \\
\hline
0 & C'
\end{array}$$

mit $c_{11} \neq 0, \delta(c_{11}) \leq \delta(a_1 1), c_{11} \mid c_{ij} \forall i, j$

4. Schritt: Wende das Verfahren auf C' an (und iteriere dies). Operationen an C' erhalten die Teilbarkeit durch c_{11}, wir können daher die Matrix auf die Gestalt

$$\begin{array}{ccc|c}
c_1 & & & \\
& \ddots & & 0 \\
& & c_r & \\
\hline
0 & & & 0
\end{array}$$

mit $c_1 \mid c_2 \mid c_3 \mid \cdots \mid c_r$ bringen. $\square$

Beispiel 27.9

1. $\mathbb{R} = \mathbb{Z}$ mit $\delta = |\cdot|$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. $R = \mathbb{Q}[t]$ mit $\delta = \deg$

$$A = \begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ -1 & t-1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & t-1 \\ t-1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & t-1 \\ 0 & (t-1)^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & (t-1)^2 \end{pmatrix}$$

Anmerkung Wir haben bei der Gauß-Diagonalisierung nur elementare Operationen vom Typ 3, 4 verwendet. Umformungen von Typ 1 (Multiplikation von einer Zeile / Spalte mit $\lambda \in R^*$), sowie Typ 2 (Addition einer Zeile / Spalte) auf eine andere Zeile oder Spalte.

Frage: Eindeutigkeitsaussage für $c_1, \ldots, c_r$?

Bemerkung+Definition 27.10 $\mathrm{GL}(n, R) := \{A \in M(n \times n, R) \mid \exists B \in M(n \times n, R) : AB = BA = E_n\}$ ist eine Gruppe bezüglich „·“, **die allgemeine lineare Gruppe** über R vom Rang n. Es ist

$$\mathrm{GL}(n, R) = \{A \in M(n \times n, R) \mid \det(A) \in \mathbb{R}^*\}$$

Beweis Gruppeneigenschaft: klar.
$A \in \mathrm{GL}(n, R) \iff \det(A) \in R^*$, denn: „ $\Longrightarrow$ “ $AB = E_n \implies \det(A)\det(B) = 1 \implies \det(A) \in R^*$
„ $\Longleftarrow$ “ sei $\det(A) \in R^*$. Es ist $AA^\# \in R^*$. Es ist $AA^\# = \det(A)E_n = A^\# A$

$$\implies A\frac{1}{\det(A)}A^\# = E_n = \frac{1}{\det(A)}A^\# A$$

□

Bemerkung+Definition 27.11 $A, B \in M(m \times n, R)$. A heißt **äquivalent** zu B ($A \sim B$)

$$\iff \exists S \in \mathrm{GL}(m, R), T \in \mathrm{GL}(n, R) : B = SAT^{-1}$$

Falls $m = n$, dann heißt A ähnlich zu B ($A \approx B$)

$$\iff \exists S \in \mathrm{GL}(n, R) : B = SAS^{-1}$$

$\sim, \approx$ sind Äquivalenzrelationen auf $M(m \times n, R)$ beziehungsweise $M(n \times n, R)$.

Erinnerung: In LA1 gezeigt (vergleiche 16.11): K Körper, $A, B \in M(m \times n, K)$, dann gilt $A \sim B \iff \mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(B)$. Ist Rang $A = r$, dann

$$A \sim \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ziel: Klassifikation von Matrizen aus $M(m \times n, R)$, R Euklidischer Ring bis auf Äquivalenz.

Definition 27.12 $A \in M(m \times n, R), 1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq n$. $B \in M(k \times l, R)$ heißt eine **Untermatrix** von $A \overset{\text{Def}}{\iff}$ aus A durch Streichen von $m-k$ Zeilen und $n-l$ Spalten. Ist $B \in M(l \times l, R)$ eine quadratische Untermatrix von A, dann heißt $\det(B)$ ein **Minor** l -ter Stufe von A.

$$\mathrm{Fit}_l(A) = (\det(B) \mid B \text{ ist } l \times l\text{-Untermatrix von } A) \subseteq R$$

(das von allen Minoren l -ter Stufe von A erzeugte Ideal in R) heißt das l **-te Fittingideal von** A.

Beispiel 27.13

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{Z})$$

$$\mathrm{Fit}_1(A) = (\det(1), \det(2), \det(3), \det(4)) = (1,2,3,4) = (1) = \mathbb{Z}$$

$$\mathrm{Fit}_2(A) = \left(\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = (-2) = (2)$$

Satz 27.14 (Fittings Lemma) $A \in M(m \times n, R), S \in \mathrm{GL}(m, R), T \in \mathrm{GL}(n, R), l \leq \min\{m, n\}$. Dann gilt:

$$\mathrm{Fit}_l(A) = \mathrm{Fit}_l(SA) = \mathrm{Fit}_l(AT)$$

Beweis 1. $\mathrm{Fit}_l(SA) \subseteq \mathrm{Fit}_l(A)$, denn: $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, R), S = (s_{ij}) \in \mathrm{GL}(m, R), SA = (b_{ij}) \in M(m \times n, R)$. Seinen $1 \leq 1_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq m, 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_l \leq n$. Wir betrachten die $l \times l$ -Untermatrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{i_1,j_1} & \dots & b_{i_1,j_l} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i_l,j_1} & \dots & b_{i_l,j_l} \end{pmatrix}$$

von SA.

$$\implies \det B = \det \begin{pmatrix} \sum_{r_1=1}^m s_{i_1,r_1} a_{r_1,j_1} & \dots & \sum_{r_1=1}^m s_{i_1,r_1} a_{r_1,j_l} \\ b_{i_2,j_1} & \dots & b_{i_2,j_l} \\ \vdots & 8 & \vdots \\ b_{i_l,j_1} & \dots & b_{i_l,j_l} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{r_1=1}^{s_{i_1,r_1}} \det \begin{pmatrix} a_{r_1,j_1} & \dots & a_{r_1,j_l} \\ b_{i_2,j_1} & \dots & b_{i_2,j_l} \\ \vdots & 8 & \vdots \\ b_{i_l,j_1} & \dots & b_{i_l,j_l} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{r_l=1}^{m} \cdots \sum_{r_1=1}^{m} s_{i_1,r_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_l,r_l} \det \begin{pmatrix} a_{r_1,j_1} & \dots & a_{r_1,j_l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r_l,j_1} & \dots & a_{r_l,j_l} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{r_l=1}^{m} \cdots \sum_{r_1=1}^{m} s_{i_1,r_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_l,r_l} \det \begin{cases} 0 \text{falls } i \neq j \text{ existiert mit } r_i = r_j \\ I \text{ ein Minor } l \text{ -ter Stufe von } A \end{cases}$$

$$\in \mathrm{Fit}_l(A)$$

2. Wende 1. auf $S^{-1} \in \mathrm{GL}(m,R), SA \in M(m \times n, R)$ an: $\implies \mathrm{Fit}_l\big(S^{-1}(SA)\big) \subseteq \mathrm{Fit}_l(SA)$, also $\mathrm{Fit}_l(A) \subseteq \mathrm{Fit}_l(SA)$. Außerdem: $\mathrm{Fit}_l(A) = \mathrm{Fit}_l\big(A^T\big)$, also

$$\mathrm{Fit}_l(AT) = \mathrm{Fit}_l\Big((AT)^T\Big) = \mathrm{Fit}_l\big(T^T A^T\big) = \mathrm{Fit}_l\big(A^T\big) = \mathrm{Fit}_l(A) \qquad \square$$

Folgerung 27.15 $A, B \in M(m \times n, R)$ mit $A \sim B$. Dann gilt: $\mathrm{Fit}_l(A) = \mathrm{Fit}_l(B)$ für alle $1 \leq l \leq \min\{m,n\}$.

Beweis $A \sim B \implies \exists S \in \mathrm{GL}(m,R), T \in \mathrm{GL}(n,R) : B = SAT^{-1}$

$$\implies \mathrm{Fit}_l(B) = \mathrm{Fit}_l\big(SAT^{-1}\big) = \mathrm{Fit}_l\big(AT^{-1}\big) = \mathrm{Fit}_l(A) \qquad \square$$

Bemerkung 27.16 R nullteilerfreier Ring,

$$A = \left.\begin{array}{cc|c} c_1 & 0 & \\ \ddots & & 0 \\ 0 & c_r & \\ \hline 0 & & 0 \end{array}\right. \in M(m \times n, R)$$

mit $c_1 \mid \cdots \mid c_r$. Dann gilt:

$$\mathrm{Fit}_l(A) = \begin{cases} (c_1 \cdot \ldots \cdot c_l) & 1 \leq l \leq r \\ (0) \end{cases}$$

Insbesondere gilt: $\mathrm{Fit}_l(A) \subseteq \mathrm{Fit}_{r-1}(A) \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{Fit}_1(A)$

Beweis Für $l > r$ enthält jede $l \times l$ -Untermatrix von A stets eine Nullzeile, das heißt $\mathrm{Fit}_l(1) = (0)$. $l \leq r$: Die einzige $l \times l$ Untermatrix von A, die keine Nullzeile enthalten, sind von der Form

$$\begin{pmatrix} c_{i_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{i_l} \end{pmatrix}$$

mit $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq r$.

$$\begin{aligned} &\implies \mathrm{Fit}_l(A) = (c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_l} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq r) \\ &\implies (c_1 \cdot \ldots c_l) \subseteq \mathrm{Fit}_l(A) \end{aligned}$$

Umgekehrt folgt $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq r$: $i_1 \geq 1, i_2 \geq 2, \ldots, i_l \geq l$.

$$\begin{aligned} &\implies c_1 \mid c_{i_1}, \ldots, c_l \mid c_{i_l} \implies c_1 \cdot \ldots \cdot c_l \mid c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_l} \implies (c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_l}) \subseteq (c_1 \cdot \ldots \cdot c_l) \\ &\implies \mathrm{Fit}_l(A) \subseteq (c_1, \ldots, c_l) \end{aligned}$$

$\implies$ „=“ $\square$

Satz+Definition 27.17 (Elementarteilersatz über Euklidischen Ringen) R Euklidischer Ring, $A \in M(mbn, R)$. Dann existieren $c_1, \dots, c_r \in R \setminus \{0\}$ mit $c_1 \mid c_2 \mid \cdots \mid c_r$, sodass

$$A \sim \begin{array}{ccc|c} c_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & c_r & \\ & 0 & & 0 \end{array}$$

r ist eindeutig bestimmt, $c_1, \dots, c_r$ sind eindeutig bestimmt bis auf Assoziiertheit. $c_1, \dots, c_r$ heißen die **Elementarteiler** von A.

Beweis 1. Nach Gauß-Diagonalisierung 27.8 lässt sich A durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen auf die Form

$$\begin{array}{ccc|c} c_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & c_r & \\ & 0 & & 0 \end{array}$$

mit $c_1, \dots, c_r \in R \setminus \{0\}, c_1 \mid c_2 \mid \cdots \mid c_r$ bringen. Wie in LA1 (Übungsblatt 8, Aufgabe 3) entsprechen elementare Zeilenoperationen Multiplikation mit speziellen invertierbaren Matrizen von links, Spaltenoperationen mit speziellen invertierbaren Matrixen von rechts $\implies \exists S \in \mathrm{GL}(m, R), T \in \mathrm{GL}(n, R) :$

$$SAT^{-1} = \begin{array}{ccc|c} c_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & c_r & \\ & 0 & & 0 \end{array} \iff A \sim \begin{array}{ccc|c} c_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & c_r & \\ & 0 & & 0 \end{array}$$

2. Eindeutigkeit von r: Sei

$$A \sim \begin{array}{ccc|c} c_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & c_r & \\ & 0 & & 0 \end{array}, A \sim \begin{array}{ccc|c} d_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & d_s & \\ & 0 & & 0 \end{array}$$

mit $c_1, \dots, c_r, d_1, \dots, d_s \in R \setminus \{0\}, c_1 \mid \cdots \mid c_r, d_1 \mid \cdots \mid d_s$.

$$\implies \mathrm{Fit}_l(A) = \begin{cases} (c_1 \cdot \ldots \cdot c_l) & l \leq r \\ (0) & l > r \end{cases} = \begin{cases} (d_1 \cdot \ldots \cdot d_l) \\ l \leq s \\ (0) & l > s \end{cases}$$

für alle $l \in \{1, \dots, \min\{m, n\}\}$

$$\implies r = \max\{l \in \{1, \dots, \min\{m, n\} \mid \mathrm{Fit}_l(A) \neq (0)\}\} = s$$

3. $c_l \triangleq d_l \forall l = 1, \ldots, r$ per Induktion nach l:
   Induktionsanfang: $\mathrm{Fit}_1(A) = (c_1) = (d_1) \implies c_1 \triangleq d_1$.
   Indukitionsschritt: $\mathrm{Fit}_l(A) = (c_1 \cdot \ldots \cdot c_l) = (d_1 \cdot \ldots \cdot d_l) \implies c_1 \cdot \ldots \cdot c_l \triangleq d_1 \cdot \ldots \cdot d_l \implies c_l \triangleq d_l$ □

Satz 27.18 (27.18) R Euklidischer Ring, $A, B \in M(m \times n, R)$. Dann sind äquivalent:

1. $A \sim B$
2. Die Elementarteiler von A und B stimmen bis auf Assoziiertheit überein.
3. $\mathrm{Fit}_l(A) = \mathrm{Fit}_l(B) \forall 1 \leq l \leq \min\{m, n\}$

Beweis 1. $\implies$ 2. aus 27.18

3. 2. Seien $c_1, \ldots, c_r$ beziehungsweise $d_1, \ldots, d_s$ die Elementarteiler von A beziehungsweise B. Insbesondere

$$A \sim \left.\begin{array}{ccc|c} c_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & c_r & \\ & 0 & & 0 \end{array}\right., B \sim \left.\begin{array}{ccc|c} d_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & d_s & \\ & 0 & & 0 \end{array}\right.$$

   Argumentiere nun wie im Beweis von 27.17 in 2., 3..27.17 in 2., 3..

2. $\implies$ 1. Sei

$$A \sim \left.\begin{array}{ccc|c} c_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & c_r & \\ & 0 & & 0 \end{array}\right., B \sim \left.\begin{array}{ccc|c} d_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & d_r & \\ & 0 & & 0 \end{array}\right.$$

   mit $c_1 \triangleq d_1, \ldots, c_r \triangleq d_r$, etwa $d_1 = \lambda_1 c_1, \ldots, d_r = \lambda_r c_r$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in R^*$.

$$\left.\begin{array}{ccc|c} d_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & d_r & \\ & 0 & & 0 \end{array}\right. = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \left.\begin{array}{ccc|c} c_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & c_r & \\ & 0 & & 0 \end{array}\right.$$

$$\implies A \sim \left.\begin{array}{ccc|c} c_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & c_r & \\ & 0 & & 0 \end{array}\right. \sim \left.\begin{array}{ccc|c} d_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & d_r & \\ & 0 & & 0 \end{array}\right. \sim B$$

□

Beispiel 27.19

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{Z}) \implies \mathrm{Fit}_1(A) = (1), \mathrm{Fit}_2(A) = (2)$$

$\implies$ Elementarteiler von A: $1, 2$, insbesondere $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Sei

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{Z}) \implies \mathrm{Fit}_1(B) = (2,3,4) = (1), \mathrm{Fit}_2(B) = (2)$$

$\implies A \sim B$

28 Normalformen von Endomorphismen

In diesem Abschnitt sei K stets ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.
Ziel: $A, B \in M(n \times n, K)$

- Wann ist $A \approx B$?
- Suche möglichst einfache Vertreter der Äquivalenzklasse bezüglich „$\approx$“ ($\rightarrow$ Normalformen)

In Termen von Endomorphismen: Gegeben sei $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, V endlichdimensionaler K-Vektorraum. Wir suchen Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ möglichst eincah ist.

Definition 28.1 $A \in M(n \times n, K)$.

$$P_A := tE_n - A \in M(n \times n, K[t])$$

heißt die charakteristische Matrix von A.

Anmerkung Insbesondere ist $\chi_A^{char} = \det(P_A)$.

Satz 28.2 (Satz von Frobenius) $A, B \in M(n \times n, K)$. Dann sind äquivalent:

1. $A \approx B$ (in $M(n \times n, K)$)
2. $P_A \sim P_B$ (in $M(n \times n, K[t])$)

Beweis 1. $\implies$ 2. Sei $A \approx B \implies \exists S \in \mathrm{GL}(n, K) : B = SAS^{-1}$

$$\begin{aligned} \implies P_B &= tE_n - B = tE_n - SAS^{-1} = StE_nS{-}1 - SAS^{-1} \\ &= S\underbrace{(tE_n - A)}_{=P_A}S^{-1} \end{aligned}$$

$$\implies P_B \approx P_A \implies P_B \sim P_A$$

2. $\implies$ 1. Sei $P_A \sim P_B$:

a) Wir konstruieren $R \in M(n \times n, K)$ mit $AR = RB$:
$\implies \exists S, T \in \mathrm{GL}(n, K[t]) : P_A = SP_BT^{-1}$, das heißt $SP_B = P_AT$

$$\implies S(tE_n - B) = (tE_n - A)T$$

Wir schreiben S, T in der folgenden Form:

$$S = \sum_{i=0}^{m} t^i S_i, T = \sum_{i=0}^{m} t^i T_i, \quad S_i, T_i \in M(n \times n, K)$$

$$\implies S(tE_n - B) = \sum_{i=0}^{m} t^i S_i(tE_n - B) = \sum_{i=0}^{m} \big(t^{i+1}S_i - t^i S_i B\big)$$

$$(tE_n - A)T = (tE_n - A)\sum_{i=0}^{m} t^i T_i = \sum_{i=0}^{m} \Big(t^{i+1dT_i - t^i AT_i}\Big)$$

$$\implies \sum_{i=0}^{m+1} (S_{i-1} - S_iB)t^i = \sum_{i=0}^{m+1} (T_{i-1} - AT_i)t^i$$

wobei $S_{-1}, T_{-1}, S_{m+1}, T_{m+1} = 0$

$$\implies S_{i-1} - S_ib = T_{i-1} - aT_i \qquad 0 \le i \le m+1$$

$$\implies A^iS_{i-1} - A^iS_iB = A^iT_{i-1} - A^{i+1}T_i \qquad 0 \le i \le m+1$$

$$\begin{aligned}\implies \sum_{i=0}^{m+1} \big(A^iS_{i-1} - A^iS_iB\big) &= \sum_{i=0}^{m+1} \big(A^iT_{i-1} - A^{i+1}T_i\big)\\ &= \big(A^0T_{-1} - AT_0\big) + \big(AT_0 - A^2T_1\big) + \cdots + \big(A^{m+1}T_m - A^{m+2}T_{m+1}\big)\\ &= A^0T_{-1} - A^{m+2}T_{m+1} = 0\end{aligned}$$

$$\implies \sum_{i=0}^{m+1} A^iS_{i-1} = \sum_{i=0}^{m+1} A^iS_iB$$

$$\implies \sum_{i=1}^{m+1} A^iS_{i-1} = \sum_{i=0}^{m} A_iS_iB$$

$$\implies A\left(\sum_{i=0}^{m} A^iS_i\right) = \left(\sum_{i=0}^{m} A^iS_i\right)B$$

$$\implies R := \sum_{i=0}^{m} A^iS_i$$

dann $AR = RB$.

a) Wir zeigen $R \in \mathrm{GL}(n,K)$ (wegen $AR = RB$ ist dann $A = RBR^{-1}$, also $A \approx B$, fergit.) Nach Vorraussetzung ist $S \in \mathrm{GL}(n, K[t]) \implies \exists M \in \mathrm{GL}(n, K[lt])$: $SM = E_n, M = \sum_{i=0}^m t^i M_i$ mit $M_i \in M(n \times n, K)$, ohne Einschränkung dasselbe n wie vorhin. Behauptung: Mit

$$N := \sum_{j=0}^m B^j M_j \in M(n \times n, K)$$

gilt $RN = E_n$ also $R \in \mathrm{GL}(n,K)$, denn: Es ist

$$RN = \sum_{j=0}^m RB^j M_j$$

Wegen $RB = AR$ folgt $RB^j = RBB^{j-1} = ARB^{j-1} = \cdots = A^j R$

$$\implies RN = \sum_{j=0}^m A^j R M_j = \sum_{j=0}^m A^j \left(\sum_{i=0}^m A^i S_i\right) M_j = \sum_{i,j=0}^m A^{i+j} S_i M_j$$

Wegen $SM = E_n$ folgt

$$\left(\sum_{i=0}^m t^i S_i\right)\left(\sum_{j=0}^m t^j M_j\right) = E_n$$

$$\implies S_0 M_0 + \sum_{k=1}^{2m} \left(\sum_{i+j=k} S_i M_j\right) t^k = E_n$$

$$\implies S_0 M_0 = E_n, \sum_{i+j=k} S_i M_j = 0 \quad k \geq 1$$

$$\implies RN = \sum_{i,j=0}^m A^{i+j} S_i M_j = S_0 M_0 + \sum_{k=1}^{2m} A^k \underbrace{\sum_{i+j=k} S_i M_j}_{=0} = S_0 M_0 = E_n$$

Bemerkung+Definition 28.3 $A \in M(n \times n, K)$. Dann gilt:

1. Es gibt eindeutig bestimmte normierte Polynome $c_i(A), \ldots, c_n(A) \in K[t]$ mit

$$P_A \sim \begin{pmatrix} c_1(A) & & 3 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n(A) \end{pmatrix}, \quad c_1(A) \mid c_2(A) \mid \cdots \mid c_n(A)$$

$c_1(A), \ldots, c_n(A)$ heißen die **Invariantenteiler** von A.

2. Es gibt eindeutig bestimmte normierte Polynorme $d_1(A), \dots, d_n(A) \in K[t]$ mit

$$\mathrm{Fit}_l(A) = (d_l(A)) \quad l = 1, \dots, n$$

Es ist

$$d_l(A) = \mathrm{ggT}(\det(B) \mid B \text{ ist } l \times l \text{ -Untermatrix von } P_A)$$

. Insbesondere ist $d_n(A) = \chi_A^{char}$. $d_1(A), \dots, d_n(A)$ heißen die **Determinantenteiler** von A.

Beweis 1. Existenz: $K[t]$ ist ein Euklidischer Ring. Elementarteilersatz $\implies \exists \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_r \in K[t]$:

$$P_a \sim \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \tilde{c}_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \tilde{c}_1 \mid \cdots \mid \tilde{c}_r$$

Es ist $\mathrm{Fit}_n(F_A) = (\det(P_A)) = \left(\chi_A^{char}\right) \neq (0) \to r = 0$ und

$$\mathrm{Fit}_n(P_A) = (\tilde{c}_1 \cdot \ldots \cdot \tilde{c}_n)$$

Da $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n \neq 0$ eindeutig bis auf Assoziiertheit, existieren eindeutig bestimmte normierte Polynome $c_1(A), \dots, c_n(A)$ mit $c_1(A) \mathrel{\hat{=}} \tilde{c}_1, \dots, c_n(A) \mathrel{\hat{=}} \tilde{c}_n$.

$$\implies P_A \sim \begin{pmatrix} c_1(A) & & \\ & \ddots & \\ & & c_n(A) \end{pmatrix}$$

2. $K[t]$ Hauptidealring $\implies$ $\mathrm{Fit}_l(P_A), l = 1, \dots, n$ sind Hauptideale und nach 27.16 ist $\mathrm{Fit}_l(P_A) = (c_1(A) \cdot \ldots \cdot c_l(A))$ für $l = 1, \dots, n$, insbesondere $\mathrm{Fit}_l(P_a) \neq (0)$. Erzeuger der Hauptideale $\mathrm{Fit}_l(P_A)$ sind eindeutig bis auf Assoziiertheit. $\implies$ Es existieren eindeutig bestimmte normierte Polynome $d_1(A), \dots, d_n(A) \in K[t]$ mit $\mathrm{Fit}_l(P_A) = (d_l(A))$ für $l = 1, \dots, n$. $

$$\implies \mathrm{Fit}_l(P_A) = (\det(B) \mid B \text{ ist } l \times l \text{ -Untermatrix von } A) = (d_l(A))$$

mit $d_l(A)$ normiert und $\mathrm{ggT}(\dots)$ normiert $\implies$ Behauptung. □

Anmerkung Also:

- Invatriantenteiler von A = normierte Elementarteiler von P_A
- Determinatenteiler von A = normierte Erzeuger der Fittingideale von P_A.

Folgerung 28.4 $A \in M(n \times n, K)$. Dann gilt: $d_l(A) = c_1(A) \cdot \ldots \cdot c_l(A) \forall l = 1, \ldots, n$. Insbesondere gilt:

$$\chi_A^{char} = d_n(A) = c_1(A) \cdot \ldots \cdot c_n(A)$$

sowie

$$d_1(A) \mid \cdots \mid d_n(A)$$

Satz 28.5 (Invariantenteilersatz) $A, B \in M(n \times n, K)$. Dann sind äquivalent:

1. $A \approx B$
2. Die Invatiantenteiler von A stimmen mit den Invariantenteilern von B überein:
$$c_1(A) = c_1(B), \ldots, c_n(A) = c_n(B)$$
3. Die Determinantenteiler von A stimmen mit den Determinantenteilern von B überein:
$$d_1(A) = d_1(B), \ldots, d_n(A) = d_n(B)$$

Beweis aus Satz von Probenius und Satz 27.18 □

Beispiel 28.6
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q})$$

Es ist

$$P_A = \begin{pmatrix} t & -1 & -3 \\ -3 & t-1 & 4 \\ 2 & -1 & t-5 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q}[t])$$

Bestimmung der Determinantenteiler von $A : d_1(A) = \mathrm{ggT}(-1, \ldots) = 1$

$$\begin{aligned} d_2(A) &= \mathrm{ggT}((-1) \cdot 4 - (-3)(t-1), (-3)(-1) - 2(t-1), \ldots) \\ &= \mathrm{ggT}(3t - 7, -2t + 5, \ldots) = 1 \\ d_3(A) &= \chi_A^{char} \qquad\qquad = (t-2)^3 \\ \Longrightarrow\ & c_1(A) = 1, c_2(A) = 1, c_3(A) = (t-2)^3 \end{aligned}$$

Sei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q}) \implies P_B = \begin{pmatrix} t-1 & -1 & -2 \\ -1 & t-1 & 2 \\ 1 & -1 & t-4 \end{pmatrix}$$

Bestimme Invariantenteiler von B:

$$
\begin{aligned}
P_B = \begin{pmatrix} t-1 & -1 & -2 \\ -1 & t-1 & 2 \\ 1 & -1 & t-4 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} -1 & t-1 & 2 \\ t-1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & t-4 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} -1 & t-1 & 2 \\ 0 & (t-1)^2-1 & -2+2(t-1) \\ 0 & t-2 & t-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & t^2-2t & 2t-4 \\ 0 & t-2 & t-2 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & t-2 & t-2 \\ 0 & t^2-2t & 2t-4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & t-2 & 0 \\ 0 & t^2-2t & -t^2+3t-4 \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & -(t-2)^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & (t-2)^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\implies c_1(B) = 1, c_2(B) = t-2, c_3(B) = (t-2)^2 \\
d_1(B) = 1, d_2(B) &= t-2, d_3(B) = (t-2)^3
\end{aligned}
$$

Bemerkung 28.7 (28.7) $A, B \in M(n \times n, K)$, K Teilkörper eines Körpers L, dann sind folgende Aussagen äquivalent

1. $A \approx B$ in $M(n \times n, K)$
2. $A \approx B$ in $M(n \times n, L)$

Beweis Übung □

Ziel: Such möglichst einfache Matrizen, die vorgegebne Invarianten- beziehungsweise Determinantenteiler haben.

Definition 28.8 $g = t^2 + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 \in K[t], n \geq 1$

$$
\begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}
$$

heißt die **Begleitmatrix** zu g.

Bemerkung 28.9 $g \in K[t]$ nicht konstant, normiert. Dann ist $c_1(B_g) = \dots = c_{n-1}(B_g) = 1, c_n(B_g) = g$, also

$$
P_{B_g} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & g \end{pmatrix}
$$

$d_1(B_g) = \dots = d_{n-1}(B_g) = 1, d_n(B_g) = \chi_{B_g}^{char} = g$

Beweis Sei $g = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$

$$\implies P_{B_g} = \begin{pmatrix} t & & & & a_0 \\ -1 & t & & & a_1 \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & t & a_{n-2} \\ & & & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

streiche erste Zeile, letzte Spalte von P_{B_g}, erhalte Untermatrix

$$C = \begin{pmatrix} -1 & t & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & t \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

mit $\det(C) = (-1)^{n-1} \implies d_{n-1}(B_g) = 1 \implies d_1(B_g) = \cdots = d_{n-1}(B_g) = 1$, sowie $c_1(B_g) = \cdots = c_{n-1}(B_g) = 1$. Wir zeigen per Induktion nach n, dass $d_n(B_g) = \chi_{B_g}^{char} = g$.
Induktionsanfang: $n = 1$: $g = t + a_0, B_g = (-a_0) \implies \chi_{B_g}^{char} = t + a_0 = g$
Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} \chi_{b_g}^{char} &= \det \begin{pmatrix} t & & & a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & t & a_{n-2} \\ & & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= t \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} t & & & a_1 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & t & a_{n-2} \\ & & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix}}_{=a_1 + a_2 t + \cdots + a_{n-1}t^{n-2} + t^{n-1} =: \tilde{g}} + (-1)^{n+1} a_0 \underbrace{\det \begin{pmatrix} -1 & t & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & t \\ & & & -1 \end{pmatrix}}_{=(-1)^{n-1}} \\ &= a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n + a_0 = g \end{aligned}$$

□

Bemerkung+Definition 28.10 $g_1, \ldots, g_r \in K[t]$ normiert, nichtkonstant mit $g_1 \mid g_2 \mid \cdots \mid g_r$, $n := \deg(g_1) + \cdots + \deg(g_r)$

$$B_{g_1,\ldots,g_r} := \begin{pmatrix} B_{g_1} & & & \\ & B_{g_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{g_r} \end{pmatrix} \in M(n \times nK)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} c_1(B_{g_1,\ldots,g_r}) = 1, \ldots, c_{n-1}(B_{g_1,\ldots,g_r}) = 1 \\ c_{n-r+1}(B_{g_1,\ldots,g_r}) = g_1, \ldots, c_n(B_{g_1,\ldots,g_r}) = g_r \end{aligned}$$

Beweis

$$P_{B_{g_1,\dots,g_r}} = \begin{pmatrix} P_{B_{g_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & P_{B_{g_r}} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & g_1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & g_r \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & g_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & g_r \end{pmatrix} \qquad \square$$

Satz 28.11 (Frobenius-Normalform) $A \in M(n \times n, K)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $r \in \mathbb{N}$ sowie eindeutig bestimmte normierte nichtkonstante Polynome $g_1, \dots, g_r \in K[t]$ mit $g_1 \mid \dots \mid g_r$ und $A \approx B_{g_1,\dots,g_r}$. $g_1, \dots, g_r$ sind genau die nichtkonstanten Invariantenteiler von A. $B_{g_1,\dots,g_r}$ heißt die **Frobenius-Normalform** (FNF) von A.

Beweis 1. Existenz: Setze

$$\begin{aligned} k &:= \max\{l \in \{1, \dots, n\} \mid c_l(A) = 1\} \\ r &:= n - k \\ g_i &:= g_{k+i}(A) \forall i = 1, \dots, r \\ \implies n &= \deg\left(\chi_A^{char}\right) = \deg(d_n(A)) = \deg(c_1(A) \cdot \ldots \cdot c_n(A)) = \deg(g_1 \cdot \ldots \cdot g_r) \\ &= \deg(g_1) + \dots + \deg(g_r) \end{aligned}$$

$\implies$ Die Invariantenteiler von A stimmen mit den Invariantenteilern von $B_{g_1,\dots,g_r}$ überein
$\implies A \approx B_{g_1,\dots,g_r}$

2. Eindeutigkeit: $A \approx B_{g_1,\dots,g_r} \approx B_{k_1,\dots,k_s} \implies r = s \wedge g_1 = k_1, \dots, g_r = k_r$ $\square$

Beispiel 28.12

1.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q})$$

$$\Longrightarrow c_1(A) = 1, c_2(A) = 1, c_3(A) = (t-2)^3 = t^3 - 6t^2 + 12t - 8 =: g_1$$

$$\Longrightarrow A \approx B_{g_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q})$$

$$\Longrightarrow c_1(A) = 1, c_2(A) = t - 2 =: g_1, c_3(A) = (t-2)^2 = t^2 - 4t + 4 =: g_2$$

$$\Longrightarrow A \approx B_{g_1,g_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{Q})$$

$c_1(A) = 1, c_2(A) = 1, c_3(A) = t - 3 =: g_1, c_3(A) = (t-3)^3(t-2) = t^3 - 8t^3 + 21t - 18 =: g_2$

$$\Longrightarrow A \approx B_{g_1,g_2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 28.13 $A \in M(n \times n, K)$. Dann ist $c_n(A) = \chi_A^{min}$

Beweis Übung. □

Bemerkung 28.14 $g \in K[t], g = h_1 \cdot \ldots \cdot h_k$ mit $h_1, \ldots, h_k \in K[t]$ normiert, nicht konstant, paarweise teilerfremd

$$\Longrightarrow B_g \approx \begin{pmatrix} B_{h_1} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{h_k} \end{pmatrix}$$

Beweis 1. Sei C definiert als die rechte Seite, dann ist

$$P_c = \begin{pmatrix} P_{B_{h_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{B_{h_k}} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & h_1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & h_k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & h_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & h_k \end{pmatrix} =: H$$

$$P_{B_g} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & g \end{pmatrix} =: G$$

2. G, H haben dieselben Fittingideale, denn: Sei $n = \deg(g)$, insbesondere $G, H \in M(n \times n, K[t])$
   - $\mathrm{Fit}_n(H) = (\det(H)) = (h_1 \cdot \ldots \cdot h_k) = (g) = (\det(G)) = \mathrm{Fit}_n(G)$
   - $\mathrm{Fit}_1(G) = \cdots = \mathrm{Fit}_{n-1}(G) = (1)$
   - $\mathrm{Fit}_{n-1}(H) \supseteq (h_1 \cdot \ldots \cdot h_{i-1} \cdot h_{i+1} \cdot \ldots \cdot h_k \mid i = 1, \ldots, k) = (1)$, also $\mathrm{Fit}_{n-1}(H) = (1)$ (da $h_1, \ldots, h_k$) paarweise teilerfremd. Analog: $\mathrm{Fit}_{n-k+i}(H) = (1)$ für $i = 1, \ldots, k-2$. Klar: $\mathrm{Fit}_l(H) = (1)$ für $l = 1, \ldots, n-k$

3. Wegen 2. ist $G \sim H \implies P_{B_g} \sim P_c \implies B_g \approx C$. □

Satz+Definition 28.15 (Weierstrass-Normalform) $A \in M(n \times n, K)$. Dann existieren eindeutig bestimmte $m \in \mathbb{N}$, Polynome $h_1, \ldots, h_m \in K[t]$, die Potenzen von irreduziblen, normierten Polynomen sind, sodass

$$A \approx B_{h_1,\ldots,h_m}$$

$h_1, \ldots, h_m$ sind bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmt und heißen **Weierstrassteiler** von A. $B_{h_1,\ldots,h_m}$ heißt eine **Weierstrass-Normalform** von A (WNF). $h_1, \ldots, h_m$ sind die Potenzen irreduzibler Polynome, die in den Primfaktorzerlegung der nichtkonstanten Invariantenteiler von A auftauchen.

Beweis 1. Existenz: (Algorithmus zuv Herstellung der Weierstrassnormalform)
Seien $g_1, \ldots, g_r \in K[t]$ die nichtkonstanten Invariantenteiler von A (mit $g_1 \mid \cdots \mid g_r$)

$$A \approx B_{g_1,\ldots,g_r} = \begin{pmatrix} B_{g_1} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{g_r} \end{pmatrix}$$

Nach 27.5 ist $K[t]$ ein faktorieller Ring, das heißt für $i = 1, \dots, r$ existieren paarweise teilerfremde Polynome $h_{i,1}, \dots, h_{i,k_i}$, deii Potenzen irreduzibler Polynome sind, sodass $g_i = h_{i,1} \cdot \ldots \cdot h_{i,k_i}$

$$\xRightarrow{28.14} A \approx \begin{pmatrix} B_{h_{1,1}} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & B_{h_{1,k_1}} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & B_{h_{r,1}} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & B_{h_{r,k_r}} \end{pmatrix}$$

2. Eindeutigkeit von m sowie von $h_1, \dots, h_m$ bis auf Reihenfolge. Sei

$$A \approx \begin{pmatrix} B_{h_1} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{h_m} \end{pmatrix}$$

wobei $h_1, \dots, h_m$ Potenzen irreduzibler Polynome. Wir sortieren $h_1, \dots, h_m$ so, dass $h_1 = p_1^{e_1}, \dots, b_k = p_k^{e_k}, p_1, \dots, p_k$ irreduzibel, normiert, paarweise verschieden, sodass alle weiteren h_i Potenzen von $p_1, \dots, p_k$ sind mit kleinerem oder gleichem Exponenten. Setze $f_1 := \mathrm{kgV}(h_1, \dots, h_m) = h_1 \cdot \ldots \cdot h_k, h_1, \dots, h_k$ paarweise teilerfremd, f_1 normiert vom Grad ≥ 1.

$$A \approx \begin{pmatrix} B_{f_1} & & & \\ & B_{h_{k+1}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{h_m} \end{pmatrix}, f_1 \cdot h_{k+1} \cdot \ldots \cdot h_m = h_1 \cdot \ldots \cdot h_m$$

Wende dieses Verfahren auf die Matrix

$$\begin{pmatrix} B_{h_{k+1}} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{h_m} \end{pmatrix}$$

an: Nach Umsortieren von $h_{k+1}, \dots, h_m$ wie oben erhalten wir $f_2 \in K[t]$ mit

$$A \approx \begin{pmatrix} B_{f_1} & & & & \\ & B_{f_2} & & & \\ & & B_{h_l} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & B_{h_m} \end{pmatrix}, f_2 \mid f_1, f_1 f_2 h_l \cdot \ldots \cdot h_m = h_1 \cdot \ldots \cdot h_m$$

f_2 normiert vom Grad ≥ 1. Iteriere dieses Verfahren, dies bricht ab, erhalte normierte Polynome $f_1, \ldots, f_r$ vom Grad ≥ 1, sodass $f_r \mid f_{r-1} \mid \cdots \mid f_1, f_1 \cdot \ldots \cdot f_r = h_1 \cdot \ldots \cdot h_m$ und

$$A \approx \begin{pmatrix} B_{f_1} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{f_r} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} B_{f_r} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{f_1} \end{pmatrix} = B_{f_r,\ldots,f_1}$$

Eindeutigkeit der Frobeniusnormalform $\Longrightarrow$ $f_1, \ldots, f_r$ eindeutig bestimmt. Über die Faktoren von $f_1, \ldots, f_r$ bekommt man m und $h_1, \ldots, h_n$ (bis auf Reihenfolge) zurück. $\Longrightarrow$ m eindeutig bestimmt, $h_1, \ldots, h_m$ eindeutig bis auf Reihenfolge. □

Beispiel 28.16

1.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q})$$

$\Longrightarrow$ $c_1(A) = 1, c_2(A) = 1, c_3(A) = (t-1)(t-2)^2$. Mit $h_1 = t-1, h_2 = (t-2)^2 = t^2 - 4t + 4$ ist

$$A \approx B_{h_1,h_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(Weierstrassnormalform von A)

2. (vergleiche 28.6.2)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{Q})$$

$\Longrightarrow$ $c_1(A) = 1, c_2(A) = 1, c_3(A) = t-3, c_4(A) = (t-3)^2(t-2)$. Mit $h_1 := t-3, h_2 := (t-3)^2 = t^2 - 6t + 9, h_3 := t-2$ ist

$$A = B_{h_1,h_2,h_3} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(Weierstrassnormalform von A)

Ziel: Einfachere Normalform, falls χ_A^{char} in Linearfakotren zerfällt (und damit alle Weierstrassteiler Potenzen linearer Polynome sind.)

Bemerkung+Definition 28.17 $\lambda \in K, f = (t-\lambda)^e \in K[t]$. Dann gilt:

$$B_f \approx \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix} =: J(\lambda, e) \in M(e \times e, K)$$

($e = 1 : J(\lambda, 1) = (\lambda)$). Eine Matrix der Form $J(\lambda, e)$ heißt **Jordanmatrix** über K.

Beweis Sei $J := J(\lambda, e)$

$$\implies P_J = \begin{pmatrix} t-\lambda & & & \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & t-\lambda \end{pmatrix} \implies d_e(J) = (t-\lambda)^e$$

Es ist

$$\det\left(\begin{pmatrix} t-\lambda & & & \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & t-\lambda \end{pmatrix}\right) = (-1)^{e-1} \implies d_{e-1} = 1$$

$\overset{28.4}{\implies} d_1(J) = \cdots = d_{e-2}(J) = 1. \implies$ Determinantenteiler von J stimmen mit Determinatenteilern von B_f überein $\xrightarrow{\text{Invariantenteilersatz}} B_f \approx J$ $\square$

Satz+Definition 28.18 (Jordansche Normalform) $A \in M(n \times n, K), \chi_A^{char}$ zerfalle in $K[t]$ in Linearfaktoren. Dann existieren Jordanmatrixen $J_1 = J(\lambda_1, e_1), \ldots, J_m = J(\lambda_m, e_m)$ über K, sodass

$$A \approx \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{pmatrix} =: J$$

Hierbei sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die (nicht notwendigerweise verschiedenen) Eigenwerte von A (= Nullstellen von χ_A^{char}). $J_1, \ldots, J_m$ sind bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmt. Die Matrix J heißt eine **Jordansche Normalform** (JNF) von A.

Beweis 1. Existenz: Es ist $\chi_A^{char} = d_n(A) = c_1(A) \cdot \ldots \cdot c_n(A) \implies c_1(A), \ldots, c_n(A)$ zerfallen alle in Linearfaktoren. $\implies$ Alle Weierstrassteiler $h_1, \ldots, h_m$ von A sind Potenzen von linearen Polynomen $h_i = (t-\lambda_i)^{e_i}$ für ein $\lambda_i \in K, e_i.\mathbb{N}$. Wegen $h_1 \cdot \ldots \cdot h_m = c_1(A) \cdot \ldots \cdot c_n(A) = \chi_A^{char}$ sind die λ_i genau die Eigenwerte von A. Setze $J_i := J(\lambda_i, e_i) \overset{28.17}{\implies} B_{h_i} \approx J(\lambda_i, e_i) \forall i = 1, \ldots, m$.

$$\implies A \approx \begin{pmatrix} B_{h_1} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{h_m} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_m \end{pmatrix}$$

2. Eindeutigkeit von $J_1, \ldots, J_m$ bis auf Reihenfolge: folgt aus Eindeutigkeit der Weierstrassnormalform bis auf Reihenfolge von $h_1, \ldots, h_m$ □

Anmerkung
- Üblicherweise gruppiert man in der Jordanschen Normalform Jordanmatrizen zu gleichen Eigenwerten zusammen. (zu einem Block mit aufsteigenden e_i 's)
- Es gilt: A diagonalisierbar $\iff$ Jordansche Normalform von A ist eine Diagonalmatrix (denn: „ $\Longleftarrow$ “ trivial „ $\Longrightarrow$ “ da Diagonalmatrizen bereits in Jordanscher Normalform sind) (mit 1×1 - Jordanmatrizen)

Algorithmus 28.19 (Algorithmus zur Jordanschen Normalform) **Eingabe:** $A \in M(n \times n, K)$, sodass χ_A^{char} in Linearfaktoren zerfällt.
Ausgabe: Jordansche Normalform von A.
Durchführung:

1. Bestimme die nicht konstanten Invariantenteiler von $g_1, \ldots, g_r$ von A.
2. Bestimme die Primfaktorzerlegung
$$g_i = (t - \lambda_{i,1})^{m_{i,1}} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_{i,k_i})^{m_{i,k_i}}$$
3. Erhalte:
$$A \approx \begin{pmatrix} J(\lambda_{1,1}, m_{1,1}) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\lambda_{r,k_r}, m_{r,k_r}) \end{pmatrix}$$
4. Gruppiere Jordanmatrizen zu gleichen Eigenwerten zusammen (jeweils nach aufsteigender Größe geordnet.)

Beispiel 28.20 (28.20)
1. (vergleiche 28.16.2)
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{Q})$$
$\Longrightarrow$ $c_1(A) = 1, c_2(A) = 1, c_3(A) = t - 1 =: g_1, c_4(A) = (t-3)^2(t-2) =: g_2$.
Weierstrassteiler von A: $h_1 = t - 3, h_2 = (t-3)^2, h_3 = t - 2$
$$\Longrightarrow A \approx B_{h_1,h_2,h_3} = \begin{pmatrix} B_{h_1} & & \\ & B_{h_2} & \\ & & B_{h_3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} J(3,1) & & \\ & J(3,2) & \\ & & J(2,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. (vergleiche 28.6)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q}) \implies c_1(A) = 1, c_2(A) = 1, c_3(A) = (t-2)^3$$

$\implies$ Weierstrassteiler von A: $h_1 = (t-2)^3$

$$\implies A \approx B_{h_1} = J(2,3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q})$$

$\implies c_1(A) = 1, c_2(A) = t-2, c_3(A) = (t-2)^2 \implies$ Weierstrassteiler von A: $h_1 = t-2, h_2 = (t-2)^2$

$$\implies A \approx B_{h_1,h_2} = \begin{pmatrix} B_{h_1} & \\ & B_{h_2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} J(2,1) & \\ & J(2,2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

29 Moduln

In diesem Abschnitt sei R sets ein kommutativer Ring.

Definition 29.1 (Modul) Eine Menge M zusammen mit einer Verknüpfung

$$+ : M \times M \to M, (x,y) \mapsto x + y$$

(genannt **Addition**) und einer äußeren Verknüpfung

$$\cdot : R \times M \to M, (a,x) \times ax$$

(genannt **skalare Multiplikation**) heißt ein **R-Modul**, wenn gilt:

- (M1) $(M,+)$ ist eine abelsche Gruppe, Das neutrale Element bezeichnen wir mit 0, das Inverse zu $x \in M$ mit $-x$.
- (M2) Die skalare Multiplikation ist in folgender Weise mit den Verknüpfungen auf M und R verträglich:
  - $(a+b)x = ax + bx$
  - $a(x+y) = ax + ay$

- $(ab)x = a(bx)$
- $1 \cdot x = x$

$\forall a, b \in R, x, y.M$

Beispiel 29.2

1. K Körper, V K-Vektorraum $\implies$ V ist ein K-Modul.
2. $(G, +)$ abelsche Gruppe wird zum $\mathbb{Z}$ -Modul durch

$$\mathbb{Z} \times G \to G, (n, g) \mapsto \begin{cases} \underbrace{g + \cdots + g}_{n\text{ -mal}} & n \in \mathbb{N} \\ 0 & n = 0 \\ -\underbrace{(g + \cdots + g)}_{n\text{ -mal}} & -n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   Umgekhert ist jeder $\mathbb{Z}$ -Modul eine abelsche Gruppe bezüglich „+".

3. $I \subseteq R$ Ideal $\implies$ I ist ein R -Modul (Addition: auf I eingeschränkte Addition von R, skalare Multiplikation: $R \times I \to I, (a, x) \mapsto ax$). Insbesondere ist R ein R -Modul.
4. $I \subseteq R$ Ideal $\implies$ ${}^{R}\!/\!_{I}$ ist ein R -Modul (skalare Multiplikation: $R \times {}^{R}\!/\!_{I} \to {}^{R}\!/\!_{I}, (a, \bar{x}) \mapsto \overline{ax}$)
5. K Körper, V K-Vektorraum, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ $\implies$ V ist $K[t]$ -Modul via skalare Multiplikation:

$$K[t] \times V \to V, (f, v) \mapsto f(\varphi)(v)$$

Definition 29.3 M, N R-Moduln, $\varphi : M \to N$. φ heißt R-Modul-**Homomorphisum** $\overset{\text{Def}}{\iff}$ Für alle $x, y \in M, a \in R$ gilt:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$
$$\varphi(ax) = a\varphi(x)$$

φ heißt (R-Modul)-**Isomorphimus** $\overset{\text{Def}}{\iff}$ φ ist ein bijektiver R-Modul-Homomorphismus. $\exists$ ein Isomorphismus zwischen M, N, so scheiben wir $M \cong N$.

Definition 29.4 M R-Modul, $N \subseteq M$. N heißt ein **Untermodul** von N $\overset{\text{Def}}{\iff}$ Folgende Bedingungen sind erfüllt:

- (U1) $0 \in N$
- (U2) $x, y \in N \implies x + y \in N$
- (U3) $a \in R, x \in N \implies ax \in N$

Beispiel 29.5

1. K Körper, V K-Vektorraum $\implies$ Untermoduln von V = Untervektorraum von V

2. $M = R$ als R-Modul $\implies$ Untermodul von M = Ideale in R.

Bemerkung+Definition 29.6 M R-Modul, $N \subseteq M$ Untermodul. Dann gilt: Durch $x \sim y \overset{\text{Def}}{\iff} x - y \in N$ ein eine Äquivalentzrelation definiert. Die Äquivalenzklasse $\bar{x}$ von $x \in M$ ist gegeben durch

$$\bar{x} = x + N = \{x + y \mid y \in N\}$$

Die Menge aller Äquivalenzklassen bezeichenn wir mit M/N. M/N wird mit den Verknüpfungen

$$+ : M/N \times M/N \to M/N, \bar{x} + \bar{y} := \overline{x + y}$$
$$\cdot : R \times M/N \to M/N, a \cdot \bar{x} := \overline{ax}$$

zu einem R-Modul, dem **Faktormodul** M/N. Die **kanonische Projektion**

$$\pi : M \to M/N, x \mapsto \bar{x}$$

ist ein surjektiver R-Modulhomomorphismus

Beweis analog zu K-Vektorraum, vergleiche 13.7,13.8 □

Bemerkung+Definition 29.7 M, N R-Moduln, $\varphi : M \to N$ Homomorphismus. Dann gilt:

1. $\ker \varphi := \{x \in M \mid \varphi(x) = 0\}$ ist ein Untermodul von M.
2. φ ist injektiv $\iff \ker \varphi = \{0\}$
3. $\operatorname{im} \varphi := \varphi(M)$ ist ein Untermodul von N.
4. $\operatorname{coker} \varphi := N/\operatorname{im} \varphi$ heißt der **Cokern** von φ, es gilt: φ surjektiv $\iff \operatorname{coker} \varphi = \{0\}$
5. (Homomorphiesatz) φ induziert einen Isomorphismus

$$\Phi : M/\ker \varphi \to \operatorname{im} \varphi, x + \ker \varphi \mapsto \varphi(x)$$

Beweis analog wie für K-Vektorraum. □

Bemerkung+Definition 29.8 M R-Modul, $(M_i)_{i \in I}$ Familie von Untermoduln von M. Dann gilt:

1.
$$\sum_{i=I} M_i := \{\sum_{i \in I} x_i \mid x_i \in M_I, x_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I\}$$

ist ein Untermodul von M und heißt die **Summe** der $M_i, i \in I$.

2.
$$\cap_{i \in I} M_i$$

ein ein Untermodul von M.

Beweis nachrechnen. □

Bemerkung+Definition 29.9 $(M_i)_{i \in I}$ Familie von R-Moduln. Dann gilt:

1.
$$\prod_{i \in I} M_i := \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in M_i\}$$
wird mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation ein R-Modul, das **direkte Produkt** der $M_i, i \in I$

2.
$$\oplus_{i \in I} M_i := \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in M_i, x_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I\}$$
wird mit komponentenweiser Addiiton und skalarer Multiplikation ein R-Modul, die **direkte Summe** der $M_i, i \in I$

Falls I endlich, dann ist
$$\prod_{i \in I} M_i = \oplus_{i \in I} M_i$$
Spezialfall:
$$R^n = \oplus_{i=1}^n R$$

Beweis nachrechnen. □

Anmerkung Zusammenhang zur direkten Summe von Untervektorräumen aus LA1: Sei M R-Modul, $M_1, M_2 \subseteq M$ Untermoduln
$$M_1 \oplus M_2 = \{(m_1, m_2) \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$$
$\implies$ Erhaltne surjektiven Homomorphisums
$$\varphi : M_1 \oplus M_2 \to M_1 + M_2, (m_1, m_2) \mapsto m_1 + m_2$$
ist $M_1 \cap M_2 = \{0\}$, dann ist
$$\ker \varphi = \{(m_1, m_2) \in M_1 \oplus M_2 \mid m_1 + m_2 = 0\} = \{0\}$$
denn: $m_1 + m_2 = 0 \implies m_1 = -m_2 \in M_1 \cap M_2 = \{0\}$, also $m_1 = m_2 = 0$. das heißt wir erhalten einen Isomorphismus von R-Moduln $M_1 \oplus M_2 \cong M_1 + M_2$. Insbesondere: ist $M_1 + M_2 = M, M_1 \cap M_2 = \{0\}$, dann ist $M_1 \oplus M_2 \cong M$.

Bemerkung+Definition 29.10 $I \subseteq R$ Ideal, M R-Modul, $(x_i)_{i \in I}$ Familie von Elementen aus M. Dann gilt:

1.
$$JM := \{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i \mid a_i \in I, x_i \in M, n \in \mathbb{N}\}$$
ist ein Untermodul von M.

2.
$$\mathrm{Lin}\big((x_i)_{i\in I}\big) := \{\sum_{i\in I} a_i x_i \mid a_i \in R, a_i = 0 \text{ für fast alle } i \in I\}$$
ist ein Untermodul von M, die **lineare Hülle** von $(x_i)_{i\in I}$.

Definition 29.11 M R-Modul, $(x_i)_{i\in I}$ Familie von Elementen aus M. $(x_i)_{i\in I}$ heißt

- **Erzeugendensystem** von $M \overset{\text{Def}}{\iff} M = \mathrm{Lin}\big((x_i)_{i\in I}\big)$.
- **linear unabhängig** $\overset{\text{Def}}{\iff}$ aus
$$\sum_{i\in I} a_i x_i = 0$$
wobei $a_i \in R, a_i = 0$ für fast alle $i \in I$ folgt $a_i = 0 \forall i \in I$
- **Basis** von $M \overset{\text{Def}}{\iff} (x_i)_{i\in I}$ ist ein linear unabhängiges Erzeugendessystem von M.

M heißt

- **endlicherzeugt** $\overset{\text{Def}}{\iff} M$ besitzt ein endliches Erzeugendessystem
- **frei** $\overset{\text{Def}}{\iff} M$ besitzt eine Basis
- **endlichfrei** $\overset{\text{Def}}{\iff} M$ besitzt eine endliche Basis

Beispiel 29.12

1. K Körper $\implies$ Jeder K-Vektorraum ist frei
2. R ist freier R-Modul ((1) ist eine Basis)
3. Sei $n \in \mathbb{N}, n > 1$
   - $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist endlicherzeugtes $\mathbb{Z}$ -Modul, denn:
     - $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist als abelsche Gruppe ein $\mathbb{Z}$ -Modul.
     - $\mathrm{Lin}((\bar{1})) = \{r \cdot \bar{1} \mid r \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{r} \mid r \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $(\bar{1})$ ist ein Erzeugendessystem von $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}$ -Modul.
     - $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist kein freier $\mathbb{Z}$ -Modul, denn: Sei $x = \bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \implies nx = n\bar{a} = \overline{na} = \bar{0}$, aber $n \neq 0$. $\implies$ (x) linear abhängig $\implies$ Jede Familie $\neq ()$ von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist linear abhängig. Insbesondere kann $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ keine Basis als $\mathbb{Z}$ -Modul haben.

Beachte: Als $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ -Modul ist $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ frei (siehe 2.)

Fazit: Es gibt Moduln, die keine Basis haben.

Bemerkung 29.13 M freier R-Modul, $\mathcal{B} = (x_i)_{i \in I}$ Basis von M. Dann existiert ein Modulisomorphisums

$$\Phi_{\mathcal{B}} : \oplus_{i \in I} R \to M, (a_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} a_i x_i$$

(beachte: $a_i = 0$ für fast alle $i \in I$)

Beweis
- $\Phi_{\mathcal{B}}$ Homomorphismus: klar
- $\Phi_{\mathcal{B}}$ surjektiv, denn: $\mathcal{B}$ Erzeugendessystem von M
- $\Phi_{\mathcal{B}}$ injektiv, denn: $\mathcal{B}$ linear unabhängig □

Anmerkung
- Man kann zeigen: Sind $(x_i)_{i \in I}, (y_j)_{j \in J}$ Basen des freien R-Moduls M, dass existiert eine Bijektion $I \to J$, das heißt $|I| = |J|$. Wir werden obige Aussage in 30 für endlich freie Moduln über Hauptidealringe zeigen.
- Man kann zeigen: M endlicherzeugt $\iff$ M endlich frei
- Achtung: Es gilt im Allgemeinen kein Analogon des Basisauswahlsatzes: $(2, 3)$ ist ein Erzeugendensystem des freien $\mathbb{Z}$ -Moduls $\mathbb{Z}$ wegen $1 = (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 3$, aber weder (2) noch (3) sind Basen von $\mathbb{Z}$.

Anmerkung Man kann zeigen: Sind M, N endlich freie R-Moduln, dann kann man ananlog zu LA1 jeden Modulhomomorphismus $\varphi : M \to N$ nach Wahl von Basen $\mathcal{A}$ von M, $\mathcal{B}$ von N durch eine Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\varphi)$ beschreiben. Es gilt die Basiswechselformel

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\varphi) = T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}'}$$

wobei $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}'} = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}'}(\mathrm{id}_M), T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_M)$ (Beweis analog zu LA1).

Bemerkung 29.14 M, N R-Moduln, $\varphi : M \to N$ Homomorphismus, sodass $\ker(\varphi), \mathrm{im}(\varphi)$ endlich erzeugt. Dann ist M ein endlich erzeugtes R-Modul.

Beweis Sei $(x_1, \dots, x_m)$ ein Erzeugendensystem von $\ker \varphi \subseteq M$, $(y_1, \dots, y_n)$ ein Erzeugendensystem von $\mathrm{im}\, \varphi \subseteq N$. Wir wählen $\tilde{y}_i \in \varphi^{-1}(\{y_i\})$ für $i = 1, \dots, n$. Behauptung: $(x_1, \dots, x_m, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$ ist ein Erzeugendensystem von M, denn: Sei $m \in M \implies \varphi(m) \in \mathrm{im}\, \varphi$, das heißt $\exists a_1, \dots, a_n \in R$, sodass

$$\begin{aligned} \varphi(m) &= a_1 y_1 + \dots + a_n y_n = a_1 \varphi(\tilde{y}_1) + \dots + a_n \varphi(\tilde{y}_n) \\ &= \varphi(a_1 \tilde{y}_1 + \dots + a_n \tilde{y}_n) \end{aligned}$$

$$\implies m - (a_1 \tilde{y}_1 + \dots + a_n \tilde{y}_n) \in \ker \varphi$$

$$\begin{aligned} &\implies \exists b_1, \dots, b_m \in R : m - (a_1 \tilde{y}_1 + \dots + a_n \tilde{y}_n) = b_1 x_1 + \dots b_m x_m \\ &\implies m = b_1 x_1 + \dots + b_m x_m + a_1 \tilde{y}_1 + \dots + a_n \tilde{y}_n \end{aligned}$$ □

Bemerkung+Definition 29.15 M R-Modul. $x \in M$ heißt ein **Torsionselement** von $M \overset{\text{Def}}{\iff} \exists a \in R$, a kein Nullteiler, mit $ax = 0$.

$$T(M) = \{x \in M \mid x \text{ ist ein Torsionselement}\}$$

ist ein Untermodul von M, der **Torsionsuntermodul** von M. M heißt
Torsions-R-Modul $\overset{\text{Def}}{\iff} T(M) = M$
torsionsfreier R-Modul $\overset{\text{Def}}{\iff} T(M) = \{0\}$

Beweis U1: $0 \in T(M)$ wegen $1_R \cdot 0 = 0$.
U2: $x, y \in T(M) \implies \exists a, b \in R$, a, b keine Nullteiler mit $ax = 0, by = 0$.

$$\implies abx = 0, aby = 0 \implies ab(x + y) = 0$$

Wegen a, b keine Nullteiler ist ab auch kein Nullteiler $\implies x + y \in T(M)$.
U3: Sei $x \in T(M), a \in R \implies \exists b \in R, b$ kein Nullteiler mit $bx = 0$

$$\implies b(ax) = 0 = (ba)x = (ab)x = a\underbrace{(bx)}_{=0} = 0 \implies ax \in T(M)$$

□

Anmerkung Falls R nullteilerfrei, dann $T(M) = \{x \in M \mid \exists a \in R, a \neq 0 : ax = 0\}$

Beispiel 29.16

1. K Körper, V K-Vektorraum $\implies$ V ist torsionsfreier K-Modul, denn:

$$T(V) = \{x \in V \mid \exists \lambda \in K, \lambda \neq 0 : \lambda x = 0\} = \{0\}$$

2. $\mathbb{Z}$ ist ein torsionsfreier $\mathbb{Z}$ -Modul, denn:

$$T(\mathbb{Z}) = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists a \in \mathbb{Z}, a \neq 0 : ax = 0\} = \{0\}$$

3. Für $n \in \mathbb{N}, n > 1$ ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist ein Torsions- $\mathbb{Z}$ -Modul, denn für alle $\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist

$$n \cdot \bar{a} = \overline{na} = \bar{0}$$

das heißt

$$T\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

Bemerkung 29.17 F freier R-Modul. Dann sit F torsionsfrei, das heißt $T(F) = \{0\}$

Beweis Sei $(x_i)_{i \in I}$ eine Basis von $F, y \in T(F), a \in R$ kein Nullteiler mit $ay = 0$. $\implies$ $\exists b_{i_1}, \ldots, b_{i_j} : y = b_{i_1}x_{i_1} + \cdots + b_{i_s}x_{i_s}$.

$$\implies 0 = ay = ab_{i_1}x_{i_1} + \cdots + ab_{i_s}x_{i_s} \implies ab_{i_1} = \cdots = ab_{i_s} = 0$$

$\implies b_{i_1} = \cdots = b_{i_s} = 0 \implies y = 0$, also $T(F) = \{0\}$ □

Anmerkung Die Umkehrung ist falsch: $\mathbb{Q}$ ist torsionsfreier $\mathbb{Z}$ -Modul, aber kein freier $\mathbb{Z}$ -Modul.

- $\mathbb{Q}$ ist torsionsfreier $\mathbb{Z}$ -Modul, denn: $T(\mathbb{Q}) = \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists a \in \mathbb{Z}, a \neq 0 : ax = 0\} = \{0\}$
- $\mathbb{Q}$ ist kein freier $\mathbb{Z}$ -Modul, denn:
  - Sind $a, b \in \mathbb{Q}$, dann ist die Familie (a, b) $\mathbb{Z}$ -linear abhängig, da: Ist $a = m_1/n_1 \neq 0, b = m_2/n_2 \neq 0$, dann ist
$$m_2 n_1 a - m_1 n_2 b = 0$$
  - Leere Familie, beziehungsweise einelementige Familien sind keine Erzeugendensysteme von $\mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}$ -Modul.

Definition 29.18 (Länge) M R-Modul.

$l_R(M) := \sup\{l \in \mathbb{N}_0 \mid M_0 = \{0\} \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_l = M$ ist eine Kette von Untermoduln von $M\} \in N_0 \cup$

heißt die **Länge** von M.

Beispiel 29.19

1. K Körper, V K-Vektorraum $\implies L_K(V) = \dim_K(V)$, denn:
   - $\dim_K(V) = n < \infty \implies$ Wähle Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V, dann ist
$$M_0 = \{0\} \subsetneq \text{Lin}(v_1) \subsetneq \text{Lin}(v_1, v_2) \subsetneq \cdots \subsetneq \text{Lin}(v_1, \ldots, v_n) = V$$
     eine Kette von Untervektorräumen von $V \implies l_K(V) \geq n$.
     Ist $M_0 = \{0\} \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_l = V$ eine Kette von Untermoduln, dann ist $0 < \dim M_1 < \cdots < \dim M_l = \dim V = n$, insbesondere $\dim V = \dim M_l \geq l$, also $l_K(V) \leq n$.
   - $\dim_K(V) = \infty \implies l_K(V) = \infty$.
2. $l_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}) = \infty$, dann: für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $0 \subsetneq 2^n\mathbb{Z} \subsetneq 2^{n-1}\mathbb{Z} \subsetneq \cdots \subsetneq 2\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$ eine Kette von Untermoduln von $\mathbb{Z}$.
3. $l_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\right) = 2$, dann: Für $\bar{a} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist
$$\text{Lin}(\bar{a}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & \bar{a} \in \{\bar{1}, \bar{5}\} \\ \{\bar{0}\} & \bar{a} = \bar{0} \\ \{\bar{0}, \bar{3}\} & \bar{a} = \bar{3} \\ \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} & \bar{a} \in \{\bar{2}, \bar{4}\} \end{cases}$$
   $\implies$ Die beiden Ketten $\{0\} \subsetneq \text{Lin}(\{\bar{3}\}) \subsetneq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\{\bar{0}\} \subsetneq \text{Lin}(\bar{2}) \subsetneq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ können nicht weiter verfeinert werden, also $l_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\right) = 2$
4. $l_R(M) = 0 \iff M = \{0\}$

Bemerkung 29.20 M R-Modul, $N \subseteq M$ Untermodul. Dann gilt: $l_R(N) \leq l_R(M)$.

Beweis Ist $0 \subsetneq N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \cdots \subsetneq N_l = N$ eine Kette von Untermoduln von N, dann ist $0 \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_l = N \subseteq M$ eine Kette von Untermoduln von M gleicher oder gröherer Länge. □

Bemerkung 29.21 M', M'' R-Moduln. Dann gilt: $l_R(M' \oplus M'') = l_R(M') + l_R(M'')$.

Beweis

1. Es genügt zu zeigen: M R-Modul, $M', M'' \subseteq M$ Untermoduln mit $M = M' \oplus M''$, dann ist
$$l_R(M) = l_R\big(M'\big) + l_R\big(M''\big)$$
(Setze $M = M' \oplus M''$, ersetze M', M'' durch isomorphen Moduln $M' \oplus \{0\}, \{0\} \oplus M''$, M ist die direkte Summe dieser Untermoduln)

2. Beweis von „$\geq$"
Seien $\{0\} \subsetneq M'_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M'_r = M', \{0\} \subsetneq M''_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M''_s = M''$ Ketten von Untermoduln von M' beziehungsweise von M''.
$$\Longrightarrow \{0\} \subsetneq M'_1 \oplus \{0\} \subsetneq \cdots \subsetneq M'_r \oplus \{0\} \subsetneq M'_r \oplus M''_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M'_r \oplus M''_s = M$$
ist eine Kette von Untermoduln von M.

3. Beweise von „$\leq$"
Sei $0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_l = M$ eine Kette von Untermoduln von M. Wir betrachten die Abbildung
$$\pi : M = M' \oplus M'' \to M'', a + b \mapsto b$$
Behautung: Für alle $0 \leq i < l$ gilt:
$$M_i \cap M' \subsetneq M_{i+1} \cap M' \text{ oder } \pi(M_i) \subsetneq \pi(M_{i+1})$$
Annahme: Es existiert i mit $M_i \cap M' = M_{i+1} \cap M'$ und $\pi(M_i) = \pi(M_{i+1})$. $\Longrightarrow$ Für alle $a \in M_{i+1} \exists b \in M_i : \pi(a) = \pi(b)$.
$$\Longrightarrow a - b \in \ker \pi = M' \Longrightarrow a - b \in M_{i+1} \in M_{i+1} \cap M' = M_i \cap M' \subseteq M_i$$
$$a = (a - b) + b \in M_i \Longrightarrow M_{i+1} \subseteq M_i \subseteq M_{i+1} \Longrightarrow M_{i+1} = M_i`$$
Wegen der Behautung gibt es in den Ketten $0 \subseteq \pi(M_1) \subseteq \ldots \subseteq \pi(M_l) = M''$ und $0 \subseteq M_1 \cap M' \subseteq \ldots \subseteq M_l \cap M' = M'$ zusammen mindestens l echte Inklusionen, höchstens aber $l_R(M'') + l_R(M')$ echte Inklusionen. $\Longrightarrow l \leq l_R(M') + l_R(M'')$ □

30 Moduln über Hauptidealringen

In diesem Abschnitt sei R stets ein Hauptidealring.
Ziel: Struktursatz für endlich erzeugte R-Moduln.

Bemerkung+Definition 30.1 F endlich freier R-Modul. Dann gilt: Je zwei Basen von F haben dieselbe Kardinalität. Diese heißt **Rang** von F.

Beweis

1. Falls R Körper, dann F endlichdimensionaler R-Vektorraum, Behautung folgt aus 9.8. Im Folgenden sei R kein Körper.

2. Da F endlich frei, existiert endliche Basis $(v_1, \dots, v_s)$ von F. Sei $(w_i)_{i\in I}$ eine beliebige Basis von F
$$\implies F \cong R^s, \quad F \cong \oplus_{i\in I} R =: M$$
$\implies \exists$ R -Modulisomorphismus $\rho : R^s \to M$.

3. Es existiert irreduzibles Element $p \in R$. dann: R kein Körper $\implies \exists a \in R\backslash(R^* \cup \{0\}) \implies$ a lässt sich als Produkt irreduzibler Elemente schreiben $\implies$ es existieren irreduzible Elemente $p \in R$.

4. Wir betrachten Abbildung $\bar{\rho} : R^s \to {}^{M}\!/\!_{pM}, x \mapsto \rho(x) + pM$
   - $\bar{\rho}$ ist Homomorphismus, da ρ Homomorphismus
   - $\bar{\rho}$ ist surjektiv, da ρ surjektiv
   - $\ker \bar{\rho} = pR^s$, denn: „$\supseteq$“: Sei $x \in pR^s \exists y \in R^s : x = py \implies \bar{\rho}(x) = \rho(x) + pM = \rho(py) + pM = \underbrace{p\rho(y)}_{\in pM} + pM \implies x \in \ker \bar{\rho}$

     „$\subseteq$“ Sei $x \in \ker \bar{\rho} \implies \rho(x) \in pM \implies \exists y \in M : \rho(x) = py \implies \exists \tilde{y} \in R^s$:
     $$y = \rho(\tilde{y}) \implies \rho(x) = p\rho(\tilde{y}) = \rho(p\tilde{y}) \implies x = p\tilde{y} \in pR^s$$

   Nach Homomorphiesatz erhalten wir einen Isomorphismus
   $$R^s/pR^s \to M/pM$$
   von R-Moduln

5. Die Abbildung $\theta : R^s/pR^s \to \left(R/pR\right)^s, (x_1, \dots, x_s) + pR^s \mapsto (x_1 + pR, \dots, x_s + pR)$ ist ein Isomorphismus von R-Moduln:
   - θ Homomorphismus: klar
   - θ surjektiv: klar
   - θ injektiv: Sei $\theta((x_1, \dots, x_s) + pR^s) = 0 = (pR, \dots, pR) \implies (x_1 + pR, \dots, x_s + pR) = (pR, \dots, pR) \implies x_1, \dots, x_s \in pR \implies (x_1, \dots, x_s) + pR^s = pR^s$.

   Analog ist
   $$M/pM = \oplus_{i\in I} R/p \oplus_{i\in I} R \cong \oplus_{i\in I} R/pR$$

6. Aus 4., 5. erhalten wir Isomorphismus $\Phi : \left(R/_{pR}\right)^s \to \oplus_{i\in I} R/_{pR}$ von R-Moduln. Da p irreduzibel, ist $K := R/_{pR}$ ein Körper (Anmerkung nach 26.26). Quelle / Ziel von Φ sind K-Vektorräume via skalarer Multiplikation.

$$K \times \left(R/_{pR}\right)^s \to \left(R/_{pR}\right)^s, (a+pR)\cdot(x_1+p_R,\ldots,x_s+pR) := (ax_1+pR,\ldots,ax_s+pR) = a(x_1+pR$$

analog für $\oplus_{i\in I} R/_{pR}$. Φ ist auch ein Isomorphismus von K-Vektorräumen, denn

$$\begin{aligned}\Phi((a+pR)(x_1+pR,\ldots,x_s+pR)) &= \Phi(a(x_1+pR,\ldots,x_s+pR)) = a\Phi(x_1+pR,\ldots,x_s+pR)\\ &= (a+pR)\Phi(x_1+pR,\ldots,x_s+pR)\end{aligned}$$

7. Wegen 6. ist $\Phi : K^s \to \oplus_{i\in I} K$ ein K-Vektorraum-Isomorphismus. Wegen 1. folgt $|I| = s$. □

Satz+Definition 30.2 $A \in M(m \times n, R)$. Dann existeren $r \in \mathbb{N}_0, c_1, \ldots, c_r \in R \setminus \{0\}$, sodass

$$A \sim \begin{pmatrix} c_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & c_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

mit $c_1 \mid \cdots \mid c_r$. r ist eindeutig bestimmt, $c_1, \ldots, c_r$ sind eindeutigb bestimmt bis auf Assoziiertheut und heißen die **Elementarteiler** von A.

Beweis 1. Eindeutigkeit: Wie im Beweis von 27.17 über Fittingideale

2. Existenz: Wir gehen ähnlich vor wie bei Gauß-Diagonalisierung (vergleiche Beweis von 27.8) und modifizieren das Verfahren wie folgt: Setze $\delta : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0, a \mapsto$ Anzahl der Primfaktoren von a (mit Vielfachheit gerechnet). (insbesondere $\delta(a) = 0$ für $a \in R^*$)
   a) Schritt: Erreiche durch Zeilen- und Spaltenvertauschung, dass $\delta(a_11) \leq \delta(a_{ij}) \forall i, j$ mit $a_{ij} \neq 0$
   b) Schritt: Bringe A auf die Form

$$\left(\begin{array}{c|c} a_{11} & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

   Falls $a_{11} \mid a_{1i}$ und $a_{11} \mid a_{j1}$ für alle i, j, dann erreiche obige Form durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen. Andernfalls: Ohne Einschränkung gelte $a_{11} \nmid a_{i1}$ für ein $i > 1$. Da R Hauptidealring, ist $\mathrm{GGT}(a_{i1}, a_{11}) \neq \emptyset$. Sei $\beta \in \mathrm{GGT}(a_{11}, a_{i1})$.

Da $a_{11} \nmid a_{i1}$ ist $\delta(\beta) < \delta(a_{11})$ (β kann nicht gleich viele Primteiler wie a_{11} haben, sonst $\beta \triangleq a_{11} \implies a_{11} \mid a_{i1}$ ↯) Nach 26.22 existieren $u, v \in R$ mit $\beta = ua_{11} + va_{i1}$, und es existieren $\tilde{u}, \tilde{v} \in R$ mit

$$a_{11} = \beta\tilde{u}, a_{i1} = \beta\tilde{v} \implies \beta = u\beta\tilde{u}+v\beta\tilde{v} = \beta(u\tilde{u} + v\tilde{v}) \implies \beta(1 - (u\tilde{u} + v\tilde{v})) = 0$$

$\implies u\tilde{u} + v\tilde{v} = 1$. Es ist

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u & & & & v & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ -\tilde{v} & & & & \tilde{u} & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}}_{=:B} \begin{pmatrix} u & & & & -v & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ \tilde{v} & & & & \tilde{u} & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ 0 & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

das heißt $B \in \mathrm{GL}(n, R)$. Multiplikation von B von links bewirkt folgende Zeilenoperationen:

- neue erste Zeile = u -faches der alten ersten Zeile + v -faches der alten i-ten Zeile
- neue i-te Zeile = $-\tilde{v}$ -faches der alten ersten Zeile + $\tilde{u}$ -faches der alten i-ten Zeile

In der Matrix BA steht links oben das Element β mit $\delta(\beta) < \delta(a_{11})$. Erhalte durch Zeilen-/Spaltenvertauschung an $A' = BA$ eine Matrix $A'' = \left(a''_{ij}\right)$ mit $\delta(a''_{11}) < \delta\left(a''_{ij}\right)$ für alle $i, j, a''_{ij} \neq 0$ und $\delta(a''_{11}) < \delta(a_{11})$. Dieser Prozess bricht nach endlich vielen Iterationen ab. Wir erhalten eine Matrix der Form

$$D = \left(\begin{array}{c|c} d_{11} & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right), d_{11} \neq 0, \delta(d_{11}) \leq \delta(a_{11}), \delta(d_{11}) \leq \delta(d_{ij}) \forall i, j, d_{ij} \neq 0$$

c) Schritt: Führe das Verfahren analog zu der Gauß-Diagonalisierung über Euklidischen Ringen weiter (mit Modifikationen analog zu oben). □

Bemerkung 30.3 R Hauptidealring, $a \in R \setminus (R^* \cup \{0\}), a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ mit irreduziblen Elementen $p_1, \ldots, p_r$ (nicht notwendig paarweise verschieden). Dann ist

$$l_R\left({R}/{aR}\right) = r$$

insbesondere ist $l_R\left({R}/{aR}\right) < \infty$

Beweis 1. Nach Übungen induziert die kanonische Projektion $\pi : R \to R/_{aR}$ eine Bijektion

$$\Phi : \{\text{Ideale } I \subseteq R, I \supseteq aR\} \to \{\text{Ideale von } R/_{aR}\}$$

Hierbei: Ideale in $R/_{aR}$ = $R/_{aR}$ -Untermoduln von $R/_{aR}$ = R -Untermoduln von $R/_{aR}$ (skalare Multiplikation: $R \times R/_{aR} \to R/_{aR}$, $(b, x + aR) \mapsto bx + aR$)

2. Aus 1. folgt:

$$\begin{aligned} l_R\left(R/_{aR}\right) &= \sup\{l \in \mathbb{N}_0 \mid (a) \subsetneq I_1 \subsetneq \cdots \subsetneq I_l = R, I_k \text{ Ideale in } R\} \\ &= \sup\{l \in \mathbb{N}_0 \mid (a) \subsetneq (a_1) \subsetneq \cdots \subsetneq (a_l) = R, a_i \in R\} \\ &= \sup\{l \in \mathbb{N}_0 \mid a_l \mid a_{l-1} \mid \cdots \mid a_1 \mid a_0 := a, a_i \in R, a_l \in R^*, a_i \not\triangleq a_{i+1}, i = 0, \dots, l-1\} \end{aligned}$$

3. Wegen $1 \mid p_1 \mid p_1 p_2 \mid \cdots \mid p_1 \cdot \ldots \cdot p_r = a$ folgt $l_R\left(R/_{aR}\right) \geq r$
Da R Hauptidealring und insbesondere faktoriell, hat a bis auf Assoziiertheit nur endlich viele Teiler, insbesondere $l_R\left(R/_{aR}\right) < \infty$. Annahme:

$$l_R\left(R/_{aR}\right) = s > r \implies \exists a_1, \dots, a_s \in R \setminus \{0\} : a_s \mid a_{s-1} \mid \cdots \mid a_1 \mid a_0 = 0$$

ohne Einschränkung $a_s = 1, a_i \not\triangleq a_{i+1}$ für $i = 0, \dots, s-1$. $\implies \exists c_1, \dots, c_s \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$ mit

$$a = c_1 a_1 = c_1 c_2 a_2 = \cdots = c_1 \cdot \ldots \cdot c_{s-1} a_{s-1} = c_1 \cdot \ldots \cdot c_s \grave{}$$

zu $a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$, R faktoriell. □

Bemerkung 30.4 $c_1, \dots, c_r \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$ mit $c_1 \mid c_2 \mid \cdots \mid c_r$. M R-Modul mit

$$M \cong \oplus_{i=1}^r R/_{c_i R}$$

Dann gilt: r ist eindeutig bestimmt, $c_1, \dots, c_r$ sind eindeutig bestimmt bis auf Assoziertheit durch M.

Beweis Sei

$$M \cong \oplus_{i=1}^s R/_{(\alpha_i)} \cong \oplus_{j=1}^t R/_{(\beta_j)}$$

mit
$\alpha_s \mid \alpha_{s-1} \mid \cdots \mid \alpha_1, \alpha_i \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$
$\beta_t \mid \beta_{t-1} \mid \cdots \mid \beta_1, \beta_i \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$

1. Behautung: Für alle $k \leq \min\{s, t\}$ ist $(\alpha_k) = (\beta_k)$, das heißt $\alpha_k \triangleq \beta_k$, denn:
Annahme: Dies gilt nicht, ohne Einstränkung sei $k \leq \min\{s, t\}$ mit $(\alpha_k) \neq (\beta_k)$. $\implies$ für $1 \leq i \leq k$ ist $(\alpha_i) = (\beta_i)$.

$$\implies \alpha_k M \cong \oplus_{i=1}^s \alpha_k R/_{(\alpha_i)} = \oplus_{i=1}^{k-1} \alpha_k R/_{(\alpha_i)}$$

denn für $i = k, \dots, s$ ist $\alpha_i \mid \alpha_k$ und somit $(\alpha_k) \subseteq (\alpha_i)$. Andererseits:

$$\begin{aligned}\alpha_k M &\cong \oplus_{j=1}^{t} \alpha_k {}^{R}\!/_{(\beta_j)} = \oplus_{j=1}^{k-1} \alpha_k {}^{R}\!/_{(\beta_j)} \oplus \oplus_{j=k}^{t} \alpha_k {}^{R}\!/_{(\beta_j)} \\ &= \oplus_{j=1}^{k-1} \alpha_k {}^{R}\!/_{(\alpha_j)} \oplus \oplus_{j=k}^{t} \alpha_k {}^{R}\!/_{(\beta_j)}\end{aligned}$$

Es ist

$$l_R(\alpha_k M) \leq l_R(M) = \sum_{i=1}^{r} l_R\left({}^{R}\!/_{c_i R}\right) < \infty$$

$\Longrightarrow$ Längen aller auftretenden Moduln sind endlich. Es ist

$$l_R(\alpha_k M) = \sum_{i=1}^{k-1} l_R\left(\alpha_k {}^{R}\!/_{(\alpha_i)}\right) = \sum_{j=1}^{k-1} l_R\left(\alpha_k {}^{R}\!/_{(\alpha_j)}\right) + \sum_{j=k}^{t} l_R\left(\alpha_k {}^{R}\!/_{(\beta_j)}\right)$$

$$\Longrightarrow l_R\left(\alpha_k {}^{R}\!/_{(\beta_j)}\right) = 0, \quad j = k, \dots, t$$

$$\Longrightarrow \alpha_k {}^{R}\!/_{(\beta_j)} = 0 \quad j = k, \dots, t$$

insbesondere $\alpha_k {}^{R}\!/_{(\beta_k)} = 0 \implies (\alpha_k) \subseteq (\beta_k)$ Durch Vertauschen der Rollen von α_i, β_i im obigen Beweis erhalten wir $(\beta_k) \subseteq (\alpha_k) \implies (\alpha_k) = (\beta_k)$`

2. Nach 1. ist $(\alpha_i) = (\beta_i)$, das heißt $\alpha_i \triangleq \beta_i \forall 1 \leq i \leq min\{s, t\}$, ohne Einschränkung $s \leq t$. Annahme: $s < t$

$$\Longrightarrow M \cong \oplus_{i=1}^{s} {}^{R}\!/_{(\alpha_i)} \oplus \oplus_{j=s+1}^{k} {}^{R}\!/_{(\beta_i)} \cong \oplus_{i=1}^{s} {}^{R}\!/_{(\alpha_i)}$$

$$\Longrightarrow 0 = l_R\left(\oplus_{j=s+1}^{t} {}^{R}\!/_{(\beta_j)}\right) = \sum_{j=s+1}^{t} l_R\left({}^{R}\!/_{(\beta_j)}\right) \implies {}^{R}\!/_{(\beta_j)} = 0 \quad j = s+1, \dots, t$$

$\Longrightarrow \beta_{s+1}, \dots, \beta_t \in R^{*}$`. Also $s = t$. □

Satz+Definition 30.5 (Elementarteilersatz) F endlich freier R-Modul, $M \subseteq R$ Untermodul. Dann existiert eine Basis $(x_1, \dots x_m)$ von F sowie $s \in \mathbb{N}_0, c_1, \dots, c_s \in R \setminus \{0\}$ mit folgenden Eigenschaften

1. $(c_1 x_1, \dots, c_s x_s)$ ist eine Basis von M.
2. $c_1 \mid c_2 \mid \cdots \mid c_s$

s ist eindeutig, $c_1, \dots, c_s$ sind eindeutig bis aus Assoziiertheit durch M bestimmt. (sind insbesondere unabhängig von der Wahl der Basis $(x_1, \dots, x_m)$) und heißen die **Elementarteiler** von $M \subseteq F$.

Beweis Existenz: Sei $(y_1, \dots, y_m)$ eine Basis von F.

1. Behauptung: M ist endlich erzeugt, denn: Beweis per Induktion nach m
   $m = 1$: dann existiert ein Isomorphismus $\varphi : F \to R, \varphi(M) \subseteq R$ ist ein Untermodul, insbesondere endlich erzeugt, da R Hauptidealring $\implies M$ endlich erzeugt.
   $m > 1$: Wir setzen $F' := \operatorname{Lin}((y_1, \ldots, y_{m-1})), F'' := \operatorname{Lin}((y_m))$. Wir betrachten die Projektiosabbildung $\pi : F = F' \oplus F'' \to F'', a + b \to b$ sowie $\pi\big|_M$. Es ist $\ker\big(\pi\big|_M\big) = \ker(\pi) \cap M = F' \cap M \subseteq F', \operatorname{im}\big(\pi\big|_M\big) = \pi(M) \subseteq F''$. Nach Induktionsvorrausetzung sind die Untermoduln $\ker\big(\pi\big|_M\big) \subseteq F'$, sowie $\operatorname{im}\big(\pi\big|_M\big) \subseteq F''$ endlich erzeugt $\implies M$ endlich erzeugt.

2. Sei $(z_1, \ldots, z_n)$ ein endliches Erzeugendensystem von M. Wir betrachten den R-Modulhomomorphismus $\varphi : R^n \to F, e_j \mapsto z_j, j = 1, \ldots, n$ mit $e_1, \ldots, e_n$ wie üblich. $\operatorname{im}\varphi = \operatorname{Lin}((z_1, \ldots, z_n)) = M$. Setze

$$A := M^{(e_1,\ldots,e_n)}_{(y_1,\ldots,y_m)}(\varphi) = (\alpha_{ij}) \implies z_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i \quad j = 1, \ldots, n$$

   nach 30.2 existieren S, T invertierbare Matrizen über $R, c_1, \ldots, c_s \in R \setminus \{0\}$ mit

$$SAT^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} c_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & c_s & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right), \quad c_1 \mid \cdots \mid c_s$$

   $\implies$ Es existieren Basen $(x_1, \ldots, x_m)$ von F, $(v_1, \ldots, v_n)$ von R^n mit

$$M^{v_1,\ldots,v_n}_{(x_1,\ldots,x_m)}(\varphi) = \left(\begin{array}{ccc|c} c_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & c_s & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

   $\implies (c_1x_1, \ldots, c_sx_s)$ ist ein Erzeugendensystem von $\operatorname{im}\varphi = M$.

3. $(c_1x_1, \ldots, c_sx_s)$ ist linear unabhängig, denn: Sei

$$\lambda_1 c_1 x_1 + \cdots + l_s c_s x_s = 0 \implies \lambda_1 c_1 = \cdots = \lambda_s c_s = 0$$

   R nullteilerfrei $\implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$. Somit: $(c_1x_1, \ldots, c_sx_s)$ ist eine Basis von M.

*Eindeutigkeitsaussage: Setze $T' := \operatorname{Lin}((x_1, \ldots, x_s))$

1. Behauptung: $F' = \{a \in F \mid \exists \lambda \in R \setminus \{0\} : \lambda a \in M\}$, insbesondere hängt F' nur von M ab, denn:
   „$\subseteq$“ Sei $x \in \operatorname{Lin}((x_1, \ldots, x_s)) = F'$, etwa $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s$. $\implies c_s x = \lambda_1 c_s x_1 + \cdots + \lambda_s c_s x_s$. Wegen $c_1 \mid c_2 \mid \cdots \mid c_s$ existiert $\mu_i \in R$ mit $c_s = \mu_i c_i, i = 1, \ldots, s$.

$$\implies c_s x = \lambda_1 \mu_1 c_1 x_1 + \cdots + \lambda_{s_1} \mu_{s-1} c_{s-1} x_{s-1} + \lambda_s c_s x_s \in \operatorname{Lin}((c_1x_1, \ldots, c_sx_s)) = M$$

„$\supseteq$“ Sei $a \in F$, etwa $a = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_m x_m$ und $\lambda \in R \setminus \{0\}$, sodass $\lambda a \in M$.

$\implies \lambda a = \lambda\mu_1 x_1 + \cdots + \lambda\mu_m x_m \in M = \operatorname{Lin}((c_1x_1, \ldots, c_sx_s)) \subseteq \operatorname{Lin}((x_1, \ldots, x_s)) = F'$

$\implies \exists \delta_1, \ldots, \delta_s \in R$ mit

$$\lambda a = \delta_1 x_1 + \cdots + \delta_s x_s$$

$$\implies 0 = (\lambda\mu_1 - \delta_1)x_1 + \cdots + (\lambda\mu_s - \delta_s)x_s + \lambda\mu_{s+1}x_{s+1} + \cdots + \lambda\mu_m x_m$$

$\implies \lambda\mu_{s+1} = \cdots = \lambda\mu_m = 0 \implies \mu_{s+1} = \cdots = \mu_m = 0 \implies a = \mu_1x_1 + \cdots + \mu_s x_s \in F'$

2. Wir betrachten die Abbildung

   $\psi : F' = \operatorname{Lin}((x_1, \ldots, x_s)) \to \oplus_{i=1}^s R/_{c_iR}, \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_s x_s \mapsto (\alpha_1 + c_1R, \ldots, \alpha_s + c_sR)$

   ψ ist ein wohldefinierter Homomorphimus, ψ ist surjektiv.

   $\ker \psi = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_s x_s \in F'1 \mid c_1 \mid \alpha_1, \ldots, c_s \mid a_s\} \operatorname{Lin}((c_1x_1, \ldots, c_sx_s)) = M$

   $\implies$ Erhalten Isomorphismus

   $$\bar{\psi} : F'/_M \to \oplus_{i=1}^s R/_{c_iR}$$

   von R-Moduln, die linke Seite ist wegen 1. nur von M abhängig. Ist $c_1 \in R^*$, dann ist $c_1R = R$, also $R/_{c_iR} = 0$. Wegen 30.4 sind damit die Nichteinheiten unter $c_1, \ldots, c_s$ eindeutig bestimmt bis auf Asoziiertheit, ihre Anzahl ist eindeutig bestimmt. Da $(c_1x_1, \ldots, c_sx_s)$ Basis von M, ist $s = \operatorname{Rang}(M)$ eindeutig bestimmt. $\implies$ Anzahl der Einheiten unter $c_1, \ldots, c_s$ eindeutig bestimmt, Einheiten unter $c_1, \ldots, c_s$ sind eindeutig bis aus Asoziiertheit. □

Folgerung 30.6 F endlich freier R-Modul, $M \subseteq F$ Untermodul. Dann ist M endlich frei und $\operatorname{Rang}(M) \leq \operatorname{Rang}(F)$.

Anmerkung

- Aus $M \subsetneq$ folgt nicht $\operatorname{Rang}(M) < \operatorname{Rang}(F)$: zum Beispiel ist $\mathbb{Z}$ ein freier $\mathbb{Z}$ -Modul vom Rang 1, $2\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$ ist ein freier $\mathbb{Z}$ -Modul, aber $\operatorname{Rang}(2\mathbb{Z}) = 1 = \operatorname{Rang}(\mathbb{Z})$.
- Man kann zeigen (unter Verwendung des Auswahlaxiom): F freier R-Modul, $M \subseteq F$ Untermodul $\implies M$ frei (R Hauptidealring!)
- ohne die Vorraussetzung, dann R ein Hauptidealring ist, wird 30.6 falsch: Beispiel: $F = \mathbb{Q}[X,Y]$ als $F = \mathbb{Q}[X,Y]$ -Modul (R ist kein Hauptidearing!), $M = \operatorname{Lin}((X,Y))$ ist **nicht** frei als R-Modul.

Satz+Definition 30.7 (Hautsatz für endlich erzeugte Modult über Hauptidealringen, Variante 1) M eindlich erzeugt. Dann gilt:

1. Es gibt einen endlich freien Untermodul $F \subseteq M$, etwa $F \cong R^d$ mit $M = F \oplus T(M)$. Hiebei ist $d = \operatorname{Rang} F$ eindeutig bestimmt.

2. Es gibt $s \in \mathbb{N}_0, c_1, \ldots, c_s \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$ mit
$$T(M) \cong \oplus_{j=1}^{s} R/_{c_j R}$$
mit $c_1 \mid c_2 \mid \cdots \mid c_s$

3. Die Zahl s ist eindeutig bestimmt, $c_1, \ldots, c_s$ sind eindeutig bestimmt bis auf Assoziiertheit und heißen die **Elementarteiler** von M.

Also:
$$M \cong R^d \oplus R/_{c_1 R} \oplus \cdots \oplus R/_{c_s R}$$

Beweis 1. Existenz: Setze $(z_1, \ldots, z_m)$ ein endliches Erzeugendensystem von M. Wir betrachten den R -Modulhomomorphismus
$$\varphi : R^m \to M, e_i \mapsto z_i, i = 1, \ldots, m$$
φ ist surjektiv $\implies$
$$M \cong R^m/_{\ker \varphi}$$
Nach Elementarteiler-Satz für $\ker \varphi \subseteq R^m$ existiert eine Basis $(x_1, \ldots, x_m)$ vom R^m, sowie $c_1, \ldots, c_t \in R \setminus \{0\}$, sodass $(c_1 x_1, \ldots, c_t x_t)$ eine Basis von $\ker \varphi$ ist. Setze $c_{t+1} = \cdots = c_m := 0$, außerdem
$$\rho : R^m \to R/_{(c_1)} \oplus \cdots \oplus R/_{(c_m)}, \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m \mapsto (\alpha_1 + (c_1), \ldots, \alpha_m + (c_m))$$
$\implies$ ρ ist wohldefinierter R-Modulhomomorphismus, ρ ist surjektiv mit $\ker \rho = \operatorname{Lin}((c_1 x_1, \ldots, c_t x_t)) = \ker \varphi$.
$$\implies M \cong R^m/_{\ker \varphi} = R^m/_{\ker \rho} \cong R/_{(c_1)} \oplus \cdots \oplus R/_{(c_m)} \cong R/_{(c_1)} \oplus R/_{(c_t)} \oplus R^{m-t}$$
Setze $d := m - t$. Für $c_i \in R^*$ ist $c_i R = R$, also $R/_{(c_i)} = 0$. Nach Weglassen der Einheiten aus $c_1, \ldots, c_t$ und Umordnen zu $c_1, \ldots, c_s \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$ mit $c_1 \mid \cdots \mid c_s$ ist
$$M \cong R^d \oplus R/_{(c_1)} \oplus \cdots \oplus R/_{(c_s)}$$

2. Eindeutigkeit: Wir betrachten die Abbildung:
$$\delta : M \underset{\gamma}{\xrightarrow{\cong}} R^d \oplus R/_{(c_1)} \oplus \cdots \oplus R/_{(c_s)} \xrightarrow[\text{kan. Proj.}]{\pi} R^d$$
σ ist surjektiver R-Modulhomomorphismus mit
$$\begin{aligned}\ker(\delta) &= \gamma^{-1}(\ker \pi) = \gamma^{-1}\Big(R/_{(c_1)} \oplus \cdots \oplus R/_{(c_s)}\Big)\gamma^{-1}\Big(T\Big(R/_{(c_1)} \oplus \cdots \oplus R/_{(c_s)} \oplus R^d\Big)\Big) \\ &= T(M)\end{aligned}$$
Homomorphiesatz: $M/_{T(M)} \cong R^d \implies$ d eindeutig bestimmt. Wegen $T(M) \cong R/_{(c_1)} \oplus \cdots \oplus R/_{(c_s)}$ sind nach 30.4 auch s eindeutig bestimmt sowie $c_1, \ldots, c_s$ eindeutig bis auf Assoziiertheit.

3. Existenz (Teil 2): Es ist
$$M = \gamma^{-1}\Big(R^d \oplus {}^{R}\!/\!_{(c_1)} \oplus \dots \oplus {}^{R}\!/\!_{(c_s)}\Big) = \underbrace{\gamma^{-1}\Big(R^d\Big)}_{=:F} \oplus \underbrace{\gamma^{-1}\Big({}^{R}\!/\!_{(c_1)} \oplus \dots \oplus {}^{R}\!/\!_{(c_s)}\Big)}_{=T(M)}$$
$\square$

Anmerkung Ohne Vorraussetzung „M endlich erzeugt“ wird die Aussage falsch: $\mathbb{Q}$ ist ein (nicht endlich erzeugter) $\mathbb{Z}$ -Modul mit $T(\mathbb{Q}) = \{0\}$, aber $\mathbb{Q}$ ist kein freier $\mathbb{Z}$ -Modul (vergleiche Annahme nach 29.17)

Folgerung 30.8 M R-Modul. Dann sind äquivalent:

1. M ist endlich erzeugt und frei
2. M ist endlich frei

Beweis 2. $\implies$ 1. trivial

1. $\implies$ 2. Nach Hautsatz existiert eindlich freier Untermodul $F \subseteq M$ mit $M = F \oplus T(M)$. Wegen 29.17 ist $T(M) = \{0\}$, also $M = F \implies M$ endlich frei. $\square$

Folgerung 30.9 (Hautsatz über endich erzeugte abersche Gruppen, Variante 1) G endlich erzeugte abersche Gruppe (= endlich erzeugter $\mathbb{Z}$ -Modul). Dann existiert ein Isomorphismus
$$G \cong \mathbb{Z}^d \oplus {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{c_1\mathbb{Z}} \oplus \dots \oplus {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{c_s\mathbb{Z}}$$
mit $d \in \mathbb{N}_0, c_1, \dots, c_s \in \mathbb{N}_{>1}, c_1, \dots, c_s$. d sowie $s, c_1, \dots, c_s$ sind eindeutig bestimmt. Es ist G endlich $\iff d = 0$. In diesem Fall ist $|G| = c_1 \cdot \ldots \cdot c_s$

Beispiel 30.10

1. abelsche Grueen mit 4 Elementen bus auf Isomorphie:
   a) Fall: $s = 1, c_1 = 4 : {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{4\mathbb{Z}}$
   b) Fall: $s = 2, c_1 = 2, c_2 = 2 : {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{2\mathbb{Z}} \oplus {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{2\mathbb{Z}}$

   $\implies$ bis auf Isomorphie gibt es 2 abelsche Gruppen mit 4 Elementen.
2. abelsche Gruppen mit 24 Elementen bis auf Isomorphie
   a) Fall: $s = 1, c_1 = 24 : {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{24\mathbb{Z}}$
   b) Fall: $s = 2, c_1 = 2, c_2 = 12$: ${}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{2\mathbb{Z}} \oplus {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{12\mathbb{Z}}$
   c) Fall: $s = 3, c_1 = 2, c_2 = 2, c_3 = 6$: ${}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{2\mathbb{Z}} \oplus {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{2\mathbb{Z}} \oplus {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{6\mathbb{Z}}$

$\implies$ Bis auf Isomorphie gibt es 3 abelsche Gruppen mit 24 Elementen.

Frage: ${}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{3\mathbb{Z}} \oplus {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{8\mathbb{Z}}$ ist ebenfalls eine abelsche Gruppe mit 24 Elementen. Zu welcher der Gruppen aus der Liste von 30.16.b ist diese isomorph?

Bemerkung 30.11 (Spezialfall des Chinesischen Restsatzes) $a \in R \setminus (R^* \cup \{0\}), a = cp_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$ mit $c \in R^*, p_1, \ldots, p_r$ irreduzibel, paarweise nicht-assoziiert.

$$\pi_i : R \to R/(p_i^{n_i}), b \mapsto b + (p_i^{n_1})$$

kanonische Projektion für $i = 1, \ldots, r$. Dann ist die Abbildung

$$\varphi : R \to R/(p_i^{n_1}) \times \ldots \times R/(p_r^{n_r}), b \mapsto (\pi_1(b), \ldots, \pi_r(b))$$

ein surjektiver Ringhomomorphismus mit $\ker \varphi = (a)$, das heißt wir erhalten einen Ringisomorphismus

$$\Phi : R/(a) \xrightarrow{\cong} R/(c_1^{n_1}) \times \ldots \times R/(p_r^{n_r})$$

Hierbei ist $R/(c_1^{n_1}) \times \ldots \times R/(p_r^{n_r})$ via komponentenweiser Addition und Multiplikation ein Ring. Insbesondere erhalten wir einen Isomorphismus von R-Moduln

$$R/(a) \cong R/(p_1^{n_1}) \times \ldots \times R/(p_r^{n_r})$$

Beweis 1. φ Ringhomomorphismus, da $\pi_1, \ldots, \pi_r$ Ringhomomorphismus

2. φ surjektiv: Es ist $1 \in \mathrm{GGT}\left(p_j^{n_j}, p_i^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_{j_1}^{n_{j-1}} p_{j+1}^{n_{j+1}} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}\right)$.

$$\implies \exists u_j, v_j \in R : 1 = \underbrace{u_j p_j^{n_j}}_{=:d_j} + \underbrace{v_j p_i^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_{j_1}^{n_{j-1}} p_{j+1}^{n_{j+1}} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}}_{e_j}$$

$$\implies \pi_i(e_j) = \bar{0} \text{ für } i \pm j, \pi_j(e_j) = \pi_j(1 - d_j) = \pi_j(1) - \pi_j(d_j) = \bar{1} - \bar{0} = \bar{1}$$
$$\implies \varphi(e_j) = (\bar{0}, \ldots, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \ldots, \bar{0})$$

Für $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r) \in R/(p_1^{n_1}) \times \ldots \times R/p_r^{n_r}$ ist

$$\varphi(a_1 e_1 + \cdots + a_r e_r) = \underbrace{\varphi(a_1)\varphi(e_1)}_{(\bar{a}_1, \bar{0}, \ldots, \bar{0})} + \cdots + \underbrace{\varphi(a_r)\varphi(e_r)}_{=(\bar{0}, \ldots, \bar{0}\bar{a}_r)} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r)$$

3.

$$\ker \varphi = \{a \in R \mid p_1^{n_1} \mid a, \ldots, p_r^{n_r} \mid a\} = \{a \in R \mid p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r \mid a\} = (p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}) = (pp_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}) = ($$

4. Rest aus Homomorphiesatz für Ringe □

Beispiel 30.12
Nach 30.11 ist $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$

Satz 30.13 (Hautsatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen, Variante 2) M endlich erzeugter R-Modul, $\mathbb{P}$ sei ein Vertretersystem der Primelelemente von R bis auf Assoziiertheit, für $p \in \mathbb{P}$ sei

$$M_p := \{x \in M \mid \exists n \in \mathbb{N} : p^n x = 0\} \subseteq T(M)$$

(ist offenbar ein Untermodul). Dann gilt:

1. Es gibt einen endlich erzeugten freien Untermodul $F \subseteq M$, sodass $M = F \oplus T(M)$, $d := \mathrm{Rang}\, F$ ist eindeutig bestimmt.
2. $T(M) = \oplus_{p \in \mathbb{P}} M_p$, wobei $M_p = 0$ für fast alle $p \in \mathbb{P}$
3. Für jedes $p \in \mathbb{P}$ mit $M_p \neq 0$ gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $1 \leq n_{p,1\_} eq \cdots \leq n_{p,s_p}$ mit
$$M \cong R^d \oplus \oplus_{p \in \mathbb{P}} \Big({R}\big/{p^{n_{p,1}} R} \oplus \cdots \oplus {R}\big/{p^{n_{p,s_p}} R} \Big)$$

Beweis 1. folgt aus 30.10

2., 3.:

1. Nach Hauptsatz für endlich erzeugte R-Moduln (Variante 1) ist $M = F \oplus T(M), T(M) \cong {R}/{(c_1)} \oplus \cdots \oplus {R}/{(c_s)}$ mit $c_1, \ldots, c_s \in R \setminus (R^* \cup \{0\}), c_1 \mid \cdots \mid c_s$. Wir faktorisieren $c_1, \ldots, c_s$ in R: $\{p_1, \ldots, p_r\} \subseteq \mathbb{P}$ sei die Menge der Primteiler von c_s (bis auf Assoziiertheit). Sei $c_j = \varepsilon_j p_1^{n_{1,j}} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_{r,j}}, \varepsilon_j \in R^*, n_{1,j}, \ldots, n_{r,j} \in \mathbb{N}_0$ ($j = 1, \ldots, r$).
$$\implies T(M) \cong \oplus_{j=1}^s {R}/{(c_j)} \cong \oplus_{j=1}^s \oplus_{i=1}^r {R}/{p_i^{n_{i,j}}} \cong \oplus_{i=1}^r \oplus_{j=1}^s {R}/{(p_i^{n_{i,j}})}$$
2. Es sei ein Isomorphismus $\gamma : T(M) \to \oplus_{i=1}^r \oplus_{j=1}^s {R}/{(p_i^{n_{i,j}})}$ fixiert. Behauptung:
$$\gamma(M_{p_i}) = \oplus_{j=1}^s {R}/{(p_i^{n_{i,j}})}$$
denn: „$\subseteq$“ Sei $a \in M_{p_i}$, etwa $p_i^m a = 0 \implies \gamma(p_i^m a) = 0 \implies p_i^m \gamma(a) = 0$. Es ist $\gamma(a)$ von der Form
$$\gamma(a) = \begin{pmatrix} \bar{x}_{1,1}, & \ldots, & \bar{x}_{1,s}, & \ldots, & \bar{x}_{r,1}, & \ldots, & \bar{x}_{r,s} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ {R}/{(p_i^{n_{1,1}})} & & {R}/{(p_i^{n_{1,s}})} & & {R}/{(p_i^{n_{r,1}})} & & {R}/{(p_i^{n_{r,s}})} \end{pmatrix}$$
Für $j \neq i$ ist $1 \in \mathrm{GGT}\Big(p_i^m, p_j^{n_{j,k}}\Big), k \in \{1, \ldots, r\}. \implies \exists u_1, v_i \in R : 1 = u_i p_i^m + v_i p_j^{n_{j,k}}$. In ${R}/{\big(p_j^{n_{j,k}}\big)}$ ist $\bar{1} = \bar{u}_i \bar{p}_i^m$, das heißt $\bar{p}_i^m$ ist Einheit in ${R}/{\big(p_j^{n_{j,k}}\big)}$. Aus $p_i^m \gamma(a) = 0$ folgt für $j \neq i, k = 1, \ldots, s : p_i^m \bar{x}_{j,k} = 0 \implies \bar{p}_i^m \bar{x}_{j,k} = 0 \implies \bar{x}_{j,k} = 0$
$$\implies \gamma(a) \in \oplus_{j=1}^s {R}/{(p_i^{n_{i,j}})}$$

„$\supseteq$" Sei $x \in \oplus_{j=1}^{s} R/_{(p_i^{n_{i,j}})}$. Setze $m := \max\{n_{i,1}, \ldots, n_{i,s}\} = n_{i,s}$, dann $p_i^m x = 0$. Setze $y := \gamma^{-1}(x)$. Dann ist $p_i^m y = p_i^m y^{-1}(x) = \gamma^{-1}(p_i^m x) = 0$. $\Longrightarrow$ $y \in M_{p_i}$ und $\gamma(y) = x$, das heißt $x \in \gamma(M_{p_i})$.

3. Aus 2. folgt:

$$T(M) = \gamma^{-1}\left(\oplus_{i=1}^{r} \oplus_{j=1}^{s} R/_{(p_i^{n_{i,j}})}\right) = \gamma^{-1}(\oplus_{i=1}^{r}\gamma(M_{p_i})) = \oplus_{i=1}^{r} M_{p_i}$$

Behauptung: $M_p = 0$ für $p \neq p_1, \ldots, p_r$, denn: Sei $p \neq p_1, \ldots, p_r \Longrightarrow 1 \in \mathrm{GGT}(p^m, c_j)$ für $j = 1, \ldots, s, m \in \mathbb{N}$. $\Longrightarrow$ $p^m + (c_j) \in \left(R/_{(c_j)}\right)^*$ für $j = 1, \ldots, s$

$\Longrightarrow$ Aus $p^m x = 0$ für $x \in \oplus_{j=1}^{s} R/_{(c_j)}$ folgt $x = 0$

$\Longrightarrow$ Aus $p^m x = 0$ für $x \in T(M)$ folgt $x = 0$

$\Longrightarrow$ Aus $p^m x = 0$ für $x \in M$ folgt $x = 0$

$\Longrightarrow$ $M_p = 0$ für $p \neq p_1, \ldots, p_r, p \in \mathbb{P}$ $\Longrightarrow$ $M_p = 0$ für fast alle $p \in \mathbb{P}$ und $T(M) = \oplus_{p \in \mathbb{P}} M_p$

4. Nach Umbenennung erhalten wir

$$M_p \cong \oplus_{j=1}^{s_p} R/_{(p^{n_{p,j}})}$$

mit $1 \leq n_{p,1} \leq \cdots \leq n_{p,s_p}$, falls $s_p \neq 0$. M_p mit $p \neq 0$ hängt nur von M, p b. Die Zahlen $n_{p_1}, \ldots, n_{p,s_p}$ sind wegen 30.4 eindeutig bestimmt. ☐

Folgerung 30.14 (Haupsatz für endlicherzeugte abelsche Gruppen, Variante 2) G endlich erzeugte Gruppe, $\mathbb{P}$ Menge der Primzahlen in $\mathbb{N}$. Dass existiert ein Isomorphismus

$$G \cong \mathbb{Z}^d \oplus \oplus_{p \in \mathbb{P}}\left(\mathbb{Z}/_{(p^{n_{p,1}})} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/_{(p^{n_{p,s_p}})}\right), 1 \leq n_{p,1} \leq \cdots \leq n_{p,s_p}$$

Die Zahlen d, s_p, n_{p_i} sind eindeutig bestimmt. Es ist $s_p = 0$ für fast alle $p \in \mathbb{P}$. Es ist G endlich $\Longleftrightarrow$ $d = 0$. In diesem Fall ist $|G| = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{n_{p,1} + \cdots + n_{p,s_p}}$.

Beispiel 30.15
Endliche abelsche Gruppen mit 24 Elementen, bis auf Isomorphie: Es ist $24 = 2^3 \cdot 3 = 2 \cdot 2^2 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ $\Longrightarrow$ Isomorphietypen:

$$\mathbb{Z}/_{8\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$$

Es ist

$$\mathbb{Z}/_{8\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/_{24\mathbb{Z}}$$
$$\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}}$$
$$\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$$