Experimentalphysik II (H.-C. Schulz-Coulon)

Robin Heinemann

28. April 2017

Inhaltsverzeichnis

11 Elektrostatik

11.1 Elektrische Ladung

- Neue Kraft
- anziehend oder abstoßend
- Konzept der elektrischen Ladung

Experimetelle Erkenntnisse:

- Erzeugung von Ladungen durch Reibung
- Ladungen gleicher Vorzeichen: Abstoßung
- Ladungen ungleicher Vorzeichen: Anziehung
- Ladung kann transportiert werden
- Elektrische Kräfte sind Fernkräfte

- Ladungen sind erhalten

Definition 11.1 Influenz Ladungstrennung durch die (Fern) Wirkung elektrischer Kräfte nennt man Influenz oder elektrostatische Induktion.

11.2 Mikroskopische Deutung

Elektron: negativ
Proton: positiv
Atome elektrische neutral

- Z: Anzahl Protonen / Elektronen
- N: Anzahl Neutronen
- A: Anzahl Neutronen + Protonen

Leiter und Nichtleiter: Unterschiedliche Verfügbarkeit von Ladungsträgern

11.3 Coulombsches Gesetz

Experimentelles Resultat:

$$\vec{F}_C = K\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

Definition 11.2

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

mit $\varepsilon_0 = 8.854\,16 \times 10^{-12}\,\mathrm{C\,N^{-1}\,m^{-2}}$

Vergleich: Coulomb vs. Gravitation

$$\vec{F}_G = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$
$$\vec{F}_C = K\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$
$$\frac{F_C}{F_G} = 227 \times 10^{39}$$

11.4 elektrisches Feld

Definition 11.3 (Elektrisches Feld)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_C(\vec{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

Das elektrische Feld hängt nur von der Ladung Q ab, aber nicht von der Testladung q. Es gilt damit:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

Bedeutung das elektrischen Feldes:
Coulomb-Gesetz bescheibt Fernwirkung.
Aber: Wodurch wird diese Wirkung übertragen?
Geschieht die Übertragung instantan? (nein!)
Feldwirkungstheorie: Elektrische Kraftübertragung über Ausbreitung des elektrischen Feldes, das mit der Probeladung q. Elektrostatik: Fernwirkung- und Feldwerungstheorie äquivalent.
Elektrodynamik: Feldbegriff essentiell.
Feld einer allgemeinen Ladungsverteilung:
Wichtig: Es gilt das Superpositionsprinzips. Es gilt

$$\mathrm{d}Q = \rho(\vec{r})\mathrm{d}V$$

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\vec{R}-\vec{r}}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|^3}\rho(\vec{r})\mathrm{d}V$$

Für diskrete Ladungen:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}$$

Die Anweseheit von Ladungen verändern den Raum. Es entstehte in Vektorfeld, dessen Stärke und Richtung in jedem Raumpunkt die normierte Kraft $\frac{\vec{F}}{q}$ auf eine Probeladung angibt.
Eigenschaften der Feldlinien

1. Das $\vec{E}$ -Feld zeigt tangential zu den Feldlinien
2. Feldlinien zeigen weg von positiven Ladungen
3. Feldliniendischte entspricht Stärke des Feldes.

11.5 Elektrischer Fluss

Definition 11.4 (Elektrischer Fluss ϕ_E) Maß für die Anzahl der Feldlinien, die Fläche A durchstoßen.

Für geschlossene Oberflächen:

$$Q_{innen} = 0 \Rightarrow \phi_E = 0$$
$$Q_{innen} > 0 \Rightarrow \phi_E > 0$$
$$Q_{innen} < 0 \Rightarrow \phi_E < 0$$

Mathematisch:

- Homogenes Feld, $\perp$ zur Oberfläche $\Rightarrow \phi E = EA$
- Homogenes elektrisches Feld $EA' = EA\cos\theta = \vec{E}\vec{A} = \vec{E}\vec{n}A$

Verallgemeinerung:

$$\begin{aligned}\Delta\phi_i &= \vec{E}_i\vec{n}_i\Delta A_i\\ \phi_E &= \lim_{\Delta A_i\to 0}\sum \vec{E}_i\vec{n}_i\Delta A\\ \phi_A &= \int \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} && \text{(Definition von Elektrischem Fluss)}\end{aligned}$$

Ladung einer Kugel:

$$\begin{aligned}\phi_A &= \int \vec{E}\mathrm{d}\vec{A}\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\int \mathrm{d}\vec{D}\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}4\pi R^2\\ &= \frac{Q}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

Definition 11.5 (Gauß'sches Gesetz (1. Maxwell-Gleichung))

$$\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{\text{innen}}}{\varepsilon_0}$$

Das Gauß'sche Gesetz ist allgemeingültig, da:

$$\begin{aligned}\oint_{A_2} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} - \oint_{A_1} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} &= 0\\ \oint_{A_2} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \oint_{A_1} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} &= \frac{Q_{\text{innen}}}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

Zusammen mit Superpositionsprinzip und homogener Fläche erhält man die Allgemeingültigkeit des Gauß'schen Gesetz.

Herleitung des Coulombschen Gesetz mit Gauß'schen Gesetz:

$$\begin{aligned}\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} &= \frac{Q}{\varepsilon_0}\\ E\oint \mathrm{d}\vec{A} &= \frac{Q}{\varepsilon_0}\\ E4\pi R^2 &= \frac{Q}{\varepsilon_0}\\ E(R) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2}\end{aligned}$$

Beispiel 11.6 (Unendlich langer Draht) Ladungsdichte: $\lambda = Q/L$

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \vec{E}(R)$$

- Mantelfläche:e $\vec{E} \parallel \mathrm{d}\vec{A}$
- Deckel: $\vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{D}$

$$\phi_E = \oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \int_{\text{Mantel}} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} + \underbrace{\int_{\text{Deckel}} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A}}_{=0} = E\int_{\text{Mantel}} \mathrm{d}A = E2\pi RL = \frac{V}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\frac{Q}{L}}{2\pi R\varepsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

Beispiel 11.7 (Unendlich ausgedehnte Flächenladung) Flächenladungsdichte: $\sigma = Q/A$
Symmetrie:
$\vec{E}$ konstant für festen Abstand.
$\vec{E} \parallel \vec{A}$

$$\phi_E = \oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \underbrace{\int_{\text{Mantel}} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A}}_{0} + \int_{\text{Deckel}} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = EA_1 + EA_2 = 2EA$$

$$\phi_E = 2EA = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Beispiel 11.8 (Plattenkondensator)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

11.6 Elektrische Felder innerhalb von Leitern

Innerhalb eines Leiters verschwindet das elektrostatische Feld.
Bei einem geladenem, isolierten Leiter sitzen alle Ladungen auf der Oberfläche.
Dazu betrachte Oberfläche, die gerade kleiner als der Leiter ist, dort ist das Elektrische Feld gleich null, also folgt:

$$\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = 0 = \frac{Q_{\text{innen}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow Q_{\text{innen}} = 0$$

Leiter mit Hohlrum:

$$\oint_O \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = 0 \Rightarrow Q = 0$$

11.7 Differentielle Form des Gaußschen Gesetzes

$$\oint_A \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \int_V \operatorname{div}\vec{E}\mathrm{d}V$$

$\operatorname{div}\vec{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z$
Zur Divergenz:
Schreibweise: $\operatorname{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}, \vec{\nabla} = \left(\partial_x, \partial_y, \partial_z\right)$ in Anschauung:

$$\begin{aligned}\phi_E &= E_O\Delta A - E_i\Delta A\\ &= \Delta E_x\Delta A\\ &= \frac{\Delta E_x}{\Delta x}\Delta x\Delta A = \underbrace{\partial_x E_x}_{\text{„div“}}\Delta V\end{aligned}$$

$$\int_V \operatorname{div}\vec{E}\mathrm{d}V = \oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\mathrm{d}V$$

Differentielle Form des Gaus Gesetz, 1. Maxwell Gleichung:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ρ: Ladungsdichte.

11.8 Elektrisches Potential

Coulombkraft ist konservativ da radialsymmetrisch.

$$\begin{aligned}W &= E_{pot}(2) - E_{pot}(1) = -\int_1^2 \vec{F}_C\mathrm{d}\vec{s}\\ \vec{F}_C &= -\operatorname{grad}E_{pot}\\ E_{pot}(\vec{r}) &= -\int_\infty^{+r}\vec{F}_C\mathrm{d}\vec{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{Qq}{r^2}\mathrm{d}r\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r} \qquad \text{(Theorie: } Qq/r\text{)}\end{aligned}$$

Definition 11.9 (Coulombpotential)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{E_{pot}(\vec{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}, \varphi(\infty) = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta\varphi = \varphi(\vec{r}_2)l\varphi\vec{r}_1 &= -\int\vec{E}\mathrm{d}\vec{s}\\ \oint\vec{E}\mathrm{d}\vec{s} &= 0\\ \vec{E}(\vec{r}) &= -\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})\end{aligned}$$

Allgemeine Ladungsverteilung:

$$\varphi\left(\vec{R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r})}{\left|\vec{R} - \vec{r}\right|} \mathrm{d}V$$

Definition 11.10 (Elektrische Spannung)

$$U_{12} = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi_{21} = -\int_1^2 \vec{E}\mathrm{d}\vec{s}$$

11.9 Grundgleichungen der Elektrostatik

Integralform:

$$\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{s} = 0$$

Differentialform:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = 0$$

Stokscher Satz:

$$\oint_C E\mathrm{d}\vec{s} = \int_A \operatorname{rot}\vec{E}\mathrm{d}\vec{A}$$

Zur Rotation:
Schreibweise:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E}, \vec{\nabla} = \left(\partial_x, \partial_y, \partial_z\right)$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \left(\partial_y E_z - \partial_z E_y, \partial_z E_x - \partial_x E_z, \partial_x E_y - \partial_y E_x\right)$$

Anschauung:

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{A}\mathrm{d}\vec{s} &= \Delta E_2 \Delta z - \Delta E_x \Delta x \\ &= \frac{\Delta E_z}{\Delta_x}\Delta x \Delta z - \frac{\Delta E_x}{\Delta z}\Delta z \Delta x \\ &= \underbrace{\left(\partial_x E_z - \partial_z E_x\right)}_{\mathrm{rot}} \Delta A\end{aligned}$$