

$$\forall \alpha \pi \in \beta \xi \chi \chi \varphi \zeta \kappa \rho \iota \epsilon \alpha \theta \sigma \nu \tau \lambda \nu \subset \eta \psi \kappa \mu \omega \phi \theta \vee \oint \Pi \mapsto x \Xi \Gamma \zeta \Phi \mathbb{Z} \cap \mathbb{R} \Rightarrow \exists \forall \nabla \Delta \Sigma \mathbb{N} \Leftrightarrow \Lambda \Upsilon \mathbb{Q} \subseteq \Lambda \Psi \subseteq \int \Omega \cup \Theta \times$$

1 Mengen und Zahlen

Quantoren, Mengen (operationen),
Äquivalenzrelationen, Abbildungen
 $f: X \rightarrow Y$ heißt
injektiv, wenn $\forall x_1, x_2 \in X: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
surjektiv, wenn $f(X) = Y \Leftrightarrow \forall y \in Y \exists x \in X: f(x) = y$
bijektiv, wenn surjektiv und injektiv $\Leftrightarrow \exists! g: Y \rightarrow X, g \circ f = \text{id}_X, f \circ g = \text{id}_Y$
 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ injektiv/surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv/surjektiv.
 $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv
Natürliche Zahlen:
Peano-Axiome
vollständige Induktion
Körper \mathbb{Q}, \mathbb{R} , Ordnungsrelationen
Abzählbarkeit: $n \in \mathbb{N}, A_n := \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\} = \{1, \dots, n\}$
Menge M heißt
endlich, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $f: M \rightarrow A_n$ gibt.
abzählbar unendlich, wenn es eine bijektive Abbildung $f: M \rightarrow \mathbb{N}$ gibt.
 $(\mathbb{N}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ kartesisches Produkt abzählbarer Mengen,
abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen)
überabzählbar, wenn sie weder endlich noch abzählbar ist.
 (\mathbb{R}) , Menge der Folgen mit Werten in $[0, 1]$ höchstens abzählbar, wenn sie abzählbar oder endlich ist
Schranken: M Menge, $A \subseteq M$, dann heißt $S \in M$ obere Schranke, wenn $\forall x \in A: x \leq S$
untere Schranke, wenn $\forall x \in A: x \geq S$
Supremum von A , wenn für alle oberen Schranken S' von A gilt $S \leq S'$
Infimum von A , wenn für alle unteren Schranken S' von A gilt $S' \leq S$
Axiome der reellen Zahlen: Körper, geordnet, Einbettung von \mathbb{N}
Vollständigkeit: Jede nach oben beschränkte Teilmenge hat ein Supremum.
Archimedisches Prinzip: $\forall x \in \mathbb{R}: \exists n \in \mathbb{N}: x \leq n$
 $M \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt:
 S (obere Schranke) ist Supremum $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M: S - \varepsilon < x$
 S (untere Schranke) ist Infimum $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M: S + \varepsilon > x$
 $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, sodass $A \subseteq B$, dann $\sup A \leq \sup B$
Monotonie:
 $f: A \rightarrow B$ heißt (streng) monoton wachsend, wenn $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq (<) f(y)$
 $f: A \rightarrow B$ heißt (streng) monoton fallend, wenn $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq (>) f(y)$

Betrag: $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \begin{matrix} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{matrix}$
Signum: $\text{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}, x \mapsto \begin{matrix} x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{matrix}$
 $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, |x + y| \leq |x| + |y|, |x| - |y| \leq |x - y|, |x - y| \leq \varepsilon \Leftrightarrow x - \varepsilon \leq y \leq x + \varepsilon$
Fakultät/Binominalkoeffizient: $k, n \in \mathbb{N}_0$
 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
Binominalsatz: $\forall n \in \mathbb{N}_0, x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$
Bernoulli-Ungleichung: Für $x \geq -1, n \in \mathbb{N}$ gilt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$
Intervalle: $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt Intervall, wenn es für $x, y \in D$ mit $x \leq y$ für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $x \leq z \leq y$ gilt $z \in D$
(beschränkt) offene Intervalle $(a, b), a, b \in \mathbb{R}$
(beschränkt) abgeschlossene Intervalle $[a, b], a, b \in \mathbb{R}$
Halbgeraden
 $(a, \infty), (-\infty, b), [a, \infty), (-\infty, b], a, b \in \mathbb{R}$
reelle Gerade $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$
Komplexe Zahlen: definiere auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
 $+: (x_1, y_1), (x_2, y_2) \mapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
 $\cdot: (x_1, y_1), (x_2, y_2) \mapsto (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$
 $\mathbb{C} := (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ ist Körper mit Lösungen der Gleichung
 $(x, y) \cdot (x, y) + (1, 0) = (0, 0)$ der Form $\pm i := (0, \pm 1)$
Schreibweise: $z \in \mathbb{C}, z = x + iy$
 $x =: \Re(z), y =: \Im(z), \mathbb{R}$ ist eingebetteter Unterkörper
 $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = 0\}$
 $|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+, z \mapsto \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$
 $\bar{\cdot}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z} := \Re(z) - i\Im(z)$
 $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
Es existiert keine Ordnungsrelation auf \mathbb{C} , die die Körperstruktur respektiert. $(0 < i^2 < i^2 + 1 = 0 \frac{1}{2})$
Fundamentalsatz der Algebra:
Jedes Polynom $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ mit Koeffizienten in \mathbb{C} hat eine Nullstelle in \mathbb{C}

2 Folgen und Reihen

(reelle) Folge ist Abbildung $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $a(n) =: a_n, a =: (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass
 $|a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq N_\varepsilon$
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass
 $|a_n - a_m| \leq \varepsilon \forall m, n \geq N_\varepsilon$
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\Leftrightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge.
 a heißt Häufungswert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder im Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ liegen.

jeder Grenzwert ist auch ein Häufungswert (aber nicht notwendig umgekehrt)
Grenzwerte sind eindeutig (Häufungswerte aber nicht notwendig).
 $M \subseteq \mathbb{R}, a$ Häufungspunkt von M , wenn für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele $x \in M$ im Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge, $M := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, dann a Häufungswert der Folge $\Leftrightarrow a$ Häufungspunkt der Menge, **aber** nicht notwendig umgekehrt, $(a_n := 1 \forall n \in \mathbb{N})$
Eigenschaften des Grenzwerts
Eindeutigkeit: sind a, a' Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dann gilt $a = a'$
Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte, monoton wachsende Folge $M := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, dann $a_n \rightarrow^{n \rightarrow \infty} \sup M$
Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte, monoton fallende Folge $M := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, dann $a_n \rightarrow^{n \rightarrow \infty} \inf M$
Stabilität: Sind $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit Grenzwert a, b , dann
 $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow^{n \rightarrow \infty} a + b$
 $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow^{n \rightarrow \infty} a \cdot b$
 $|a_n| \rightarrow^{n \rightarrow \infty} |a|$
 $b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}, b \neq 0: a_n/b_n \rightarrow^{n \rightarrow \infty} a/b$
Ist $a = b, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit $a_n \leq c_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$, dann
 $c_n \rightarrow^{n \rightarrow \infty} a = b$
 $\exists \gamma \in (0, 1): |b_{n+1}| \leq \gamma |b_n| \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n \rightarrow^{n \rightarrow \infty} 0$
 $1/n, 1/n^2, 1/n^3, \dots \rightarrow^{n \rightarrow \infty} 0$
geometrische Folge, $|q| < 1$
 $a_n = cq^n \rightarrow^{n \rightarrow \infty} 0$
 $\sum_{k=0}^n cq^k = c \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \rightarrow^{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - q}$
 $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow^{n \rightarrow \infty} e \quad (1 - \frac{1}{n})^n \rightarrow^{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}$
 $|x| > 1: \frac{x^n}{n!} \rightarrow^{n \rightarrow \infty} 0 \quad \frac{n!}{n^n} \rightarrow^{n \rightarrow \infty} 0$
Bolzano-Weierstraß: Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:
 A ist beschränkt und abgeschlossen.
jede Folge in A hat einen Häufungswert in A .
jede Folge in A hat eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert A .
Jede Folge hat eine monotone Teilfolge.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow$ Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

Konvergenzkriterien:
Notwendig: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge
Cauchy: $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n > m \geq N_\varepsilon:$

$$|\sum_{k=m+1}^n a_k| < \varepsilon$$

Leibnitz: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alternierend und $|a_n|$ ist

monoton fallend und $a_n \rightarrow^{n \rightarrow \infty} 0$. Außerdem

$$|\sum_{k=m}^{\infty} a_k| \leq |a_m| \forall m \in \mathbb{N}$$

Absolute Konvergenz: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_n| \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

Majorante: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (absolut) konvergent und

gilt $|a_k| \leq b_k$ für fast alle $k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut

konvergent.

Minorante: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent und gilt $b_k \leq |a_k|$

für fast alle $k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Wurzelkriterium: wenn es $q \in (0, 1)$ mit $\sqrt[n]{|a_k|} \leq q < 1 \forall k \Rightarrow$ absolute Konvergenz
 $\sum a_k$ (alternativ: $\limsup \sqrt[n]{|a_k|} < 1$ Konvergenz, $\limsup \sqrt[n]{|a_k|} > 1 \Rightarrow$ Divergenz)

Quotientenkriterium: wenn es $g \in (0, 1)$ gibt mit $|a_{n+1}/a_n| \leq q < 1 \Rightarrow$ absolute Konvergenz $\sum a_k$ (alternativ: $\limsup |a_{k+1}/a_k| < 1$)

Cauchy'scher Verdichtungssatz: Reihe $\sum a_k, a_k \geq 0, a_k \rightarrow^{k \rightarrow \infty} 0$, dann gilt

$$\sum a_k \Leftrightarrow \sum 2^k a_{2^k}$$

Teleskopreihe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge \Rightarrow

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_1$$

oder auch

$$a_n \rightarrow^{n \rightarrow \infty} a_1 - S \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k-1}) = S$$

Umordnungsatz: Ist $\sum a_n$ absolut konvergent, dann gilt $\forall \tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (bijektiv) ist auch $\sum a_{\tau(n)}$ absolut konvergent mit dem gleichen Grenzwert.

Potenzreihen: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$.

Entwicklungspunkt x_0 .

Potenzreihe konvergieren absolut $\forall x \in \mathbb{C}$ mit

$$|x - x_0| < \rho := \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$$

(mit der Konvention $1/\infty = 0, \frac{1}{0} = \infty$)

ρ heißt Konvergenzradius.

3 Stetige Funktionen

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D$ wenn für alle Folgen in D mit $x_n \rightarrow^{n \rightarrow \infty} x_0$ gilt

$$f(x_n) \rightarrow^{n \rightarrow \infty} f(x_0)$$

f heißt stetig auf D , wenn f in allen Punkten von D stetig ist.

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in \bar{D}$ einen Grenzwert, wenn

für alle Folgen in D mit $x_n \rightarrow^{x \rightarrow \infty} x_0$ gilt
 $f(x_n) \rightarrow^{n \rightarrow \infty} a$, schreibe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$

einseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) := \lim_{x \rightarrow x_0} f \mid x > x_0 \quad (x)$$

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) := \lim_{x \rightarrow x_0} f \mid x < x_0 \quad (x)$$

Asymptotik: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, D unbeschränkt.

f hat Grenzwert a in ∞ , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c \in \mathbb{R} : |f(x) - a| < \varepsilon \forall x > c$$

$f(x) \rightarrow^{x \rightarrow x_0} \pm \infty$, wenn $\forall c \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : f(x) > c, < -c \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (D \setminus x_0)$

Stetigkeit ist stabil gegenüber punktwweisen Summen, Produkt, Quotient ($\neq 0$) und Komposition, das heißt

f, g stetig $\Rightarrow f + g, f \cdot g, (f/g)(g \neq 0), g \circ f$ stetig.
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x), (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

ε - δ -Kriterium: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in D$,
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{\varepsilon, x_0} > 0 : \forall x \in D$:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gleichmäßige Stetigkeit: Eine stetige Funktion f heißt gleichmäßig stetig, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x, y \in D :$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Lipschitz-Stetigkeit: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Lipschitzstetig, wenn es $L > 0$, sodass $\forall x, y \in D$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Lipschitz-stetig \Rightarrow gleichmäßig stetig \Rightarrow stetig.

Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit:

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f$ ist gleichmäßig stetig auf $[a, b]$ Abbildungseigenschaften stetiger Funktionen: Satz vom Extremum: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, D beschränkt und abgeschlossen. Dann existieren x_{\min}, x_{\max} , sodass

$$\sup_{x \in D} f(x) = f(x_{\max}) \quad \inf_{x \in D} f(x) = f(x_{\min})$$

Zwischenwertsatz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es zu $y \in [f(a), f(b)]$ ein $\xi \in (a, b)$, sodass $f(\xi) = y$ (stärker: $\forall y \in [\min f, \max f]$)

Monotonie: $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist genau dann injektiv, wenn sie streng monoton ist.

Funktionsfolgen: $n \in \mathbb{N}, f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise, wenn für alle $x \in D$ die Zahlenfolge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen Grenzfunktion $f : f_n(x) \rightarrow^{n \rightarrow \infty} f(x)$. (sprich: $\forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq N_{\varepsilon, x}$)

gleichmäßige Konvergenz: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt gleichmäßig konvergent auf D gegen die Grenzfunktion f , wenn $\forall \varepsilon > 0$

$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq N_\varepsilon \forall x \in D$
 $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f , dann ist auch f stetig.

Funktionsräume: $\mathcal{C}([a, b]) := f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f$ stetig

\mathbb{R} -Vektorraum (in der Regel unendlich dimensional)

$$\|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}_+, f \mapsto \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Norm, normierter Raum $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

$\forall x, y \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Konvergenzbegriff in Norm: $f_n \rightarrow f$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \forall n \geq N$

Satz von Arzela-Ascoli: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}([a, b])$

Folge von gleichmäßig beschränkten (das heißt $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$) und gleichgradig stetig (das heißt $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall n \in \mathbb{N} : \sup_{|x - y| < \delta} |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$) dann gibt es eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $\mathcal{C}([a, b])$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$

4 Differentialrechnung

$f : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D$, definiere

$$D_h f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

f heißt differenzierbar in x_0 , wenn für jede Nullfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Differenzenquotienten $(D_{h_n} f(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} D_{h_n} f(x_0)$ heißt Ableitung von f im Punkt $x_0, f'(x_0)$.

Alternativ: $\exists L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + r(x - x_0)$ mit $(r(x - x_0))/(x - x_0) \rightarrow^{x \rightarrow x_0} 0, f'(x_0) = L$

f differenzierbar in $x_0 \Rightarrow f$ stetig in x_0 .

f ist differenzierbar auf D , wenn f in jedem Punkt differenzierbar ist.

Fasse f' als Funktion $f' : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$

f heißt stetig differenzierbar, wenn f' stetig ist.

n -te Ableitung: $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0), f^{(0)} = f$.

f heißt glatt, wenn $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert.

Stabilität: $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D$

$$\text{Linearität: } (\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\text{Produktregel: } (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

hat g keine Nullstelle, so gilt:

$$\text{Quotientenregel: } (f/g)'(x_0) = (f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0))/g^2(x_0)$$

Kettenregel: $f : D \rightarrow D', g : D' \rightarrow \mathbb{R}$ beide differenzierbar in $x_0 \in D, f(x_0) \in D'$. dann

ist $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$ Satz von der inversen Funktion: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, injektiv, D abgeschlossen, f differenzierbar in $x_0 \in D, f : D \rightarrow$

$f(D)$ bijektiv $\Rightarrow \exists f^{-1} : f(D) \rightarrow D$ und es gilt $(f^{-1})'(f(x_0)) = 1/f'(x_0)$

Extremwertheorie: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein globales Extremum wenn gilt:
 $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in D$ (Maximum)
 $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in D$ (Minimum)

f hat ein lokales Extremum, wenn obige Bedingungen auf einer δ -Umgebung von x_0 zutreffen.

Satz von Extremum: (notwendige Bedingung)

$f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar hat lokales Extremum in $x_0 \in (a, b)$, dann gilt $f'(x_0) = 0$

1. Mittelwertsatz: Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a, b) , dann gibt es $x \in (a, b)$, sodass

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Hinreichende Bedingung: Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$, dann folgt f hat in x_0 ein lokales Extremum. (Maximum für $<$, Minimum für $>$)

Taylorentwicklung: $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal stetig differenzierbar

$$t_n(x_0, x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

n -te Taylorpolynom mit Entwicklungsstelle x_0 .

f $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar, dann gibt es zu jedem $x \in (a, b)$ ein ξ zwischen x_0 und x , sodass

$$f(x) - t_n(x_0, x) = R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

f glatt \Rightarrow

$$t_\infty(x_0, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

f ist analytisch in x_0 , wenn es in $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ eine Umgebung gibt, sodass $f(x) = t_\infty(x_0, x)$ Regel von L'Hospital: $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sodass $g'(x) \neq 0$ und der Grenzwert $f'(x)/g'(x) \rightarrow^{x \rightarrow a} c \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \in -\infty, 0, \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

Differentiation und Limes: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge stetig differenzierbarer Funktionen auf beschränkten Intervallen mit punktwweisen Grenzwert $f_n(x) \rightarrow^{n \rightarrow \infty} f(x)$ und gilt $f'_n \rightarrow^{n \rightarrow \infty} f^*$ gleichmäßig, dann gilt f ist differenzierbar mit $f'(x) = f^*(x)$

5 Integration

Zerlegung: $[a, b], Z := x_0, \dots, x_n, x_0 = a, x_n = b, x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

Feinheit: $h := \max_{k=1, \dots, n} |x_k - x_{k-1}|$

Zerlegung äquidistant: $\Leftrightarrow h$ konstant in k .

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, Z \text{ Zerlegung, } I_k = [x_{k-1}, x_k]$$

$$\text{Obersumme: } \bar{S}_z f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{x \in I_k} f(x) (x_k - x_{k-1})$$

$$\text{Untersumme: } \underline{S}_z f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{x \in I_k} f(x) (x_k - x_{k-1})$$

$$\text{Oberintegral: } \int_a^b f(x) dx := \inf_{Z \in \mathcal{Z}(a, b)} \bar{S}_Z f(x)$$

$$\text{Unterintegral: } \int_a^b f(x) dx := \sup_{Z \in \mathcal{Z}(a, b)} \underline{S}_Z f(x)$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

\int_a^b heißt Riemann-integrierbar, wenn

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists Z \in \mathcal{Z}(a, b) |\bar{S}_Z f(x) - \underline{S}_Z f(x)| < \varepsilon$$

Riemannsche Summe: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, Z$ Zerlegung, $\xi_k \in I_k$

$$RS_Z(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

Sei f beschränkt. f ist Riemann-integrierbar $\Leftrightarrow \forall (Z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit $h_n \rightarrow 0$ die zugehörigen Riemannschen Summen konvergieren und den gleichen Grenzwert haben.

stetige Funktionen sind integrierbar. monotone Funktionen sind integrierbar.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, dann auch für jedes $[c, d] \subseteq [a, b]$ und es gilt für $c \in [a, b]$:

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Ferner ist das Integral linear, das heißt $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Monoton: $g(x) \geq f(x) \forall x \in [a, b] \Rightarrow$:

$$\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$$

Standardabschätzung: $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b] \Rightarrow$:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Definitheit: $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b], \int_a^b f(x) dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

Mittelwertsatz: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ohne Vorraussetzungen, dann gibt es $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx \quad \text{Stammfunktion:}$$

$F, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, F$ differenzierbar heißt Stammfunktion von f , wenn gilt: $F' = f$.

Fundamentalsatz der Analysis: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig \Rightarrow :

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx \text{ ist eine Stammfunktion von } f.$$

Ist F Stammfunktion von f , dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Partielle Integration: $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

Substitution: $\phi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar, dann gilt:

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x) dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx$$