Analysis III (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

19. Oktober 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie

Motivation: Erweiterung des Riemannintegrals auf einen größeren Bereich von Funktionen

Satz 1.1 (1.1 Kriterium für Riemann Integrierbarkeit) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f genau dann Riemann integrierbar, falls die Menge S der Unstetigkeiten von f eine Nullmenge ist, im Sinne, dass es für jedes für jedes $\varepsilon > 0$ eine abzählbare Familie von Intervallen I_i gibt, mit

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon$$

Bemerkung Insbesondere ist die Funktion

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nicht Riemann integrierbar.

Das Riemann-Integral der Funktion ist definiert über eine Zerlegnug des Definitionsbereiches in kleine Intervalle. Beim Lebesgue Integral wird stattdessen der Bildbereich zerlegt! Für eine nichtnegative $f : \Omega \to [0, \infty], \Omega \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Mengen

$$E_k := f^{-1}((t_k, t_{k+1}]) \subset \mathbb{R}^n$$

wobei $t_k = hk$ für ein vorgegebenens $h > 0$, und approximieren dann das Integral von f durch

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_k^{(h)} \mu(E_k) \leq \int f(x) \mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{\infty} t_{k+1}^{(h)} \mu(E_k) \tag{$*$}$$

wobei das **Maß** $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ eine Abbildung ist, welche das Maß der Menge $E = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ misst. Das Integral ergibt sich aus $(*)$ im Limes $h \to 0$. Für das Lebesgue-Integral müssen wir ein geeignetes Maß definieren $\to$ Lebesguemaß $\mathcal{L}^n$

$$\int_0^1 f(x) \mathrm{d}\mathcal{L}^1(x) = \underbrace{\mathcal{L}^1(\mathbb{Q})}_{0} \cdot 1 + \underbrace{\mathcal{L}^2(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}_{1} \cdot 0 = 0$$

Definition 1.2 (Maßproblem) Wir suchen eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ mit den folgenden Eigenschaft

1. $\mu(A) \subseteq \mu(B) \forall A \subset B$ (Monotonie)
2. $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ falls $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$ (σ-Additivität)
3. $\mu([0,1]^n) = 1$ (Normierung)
4. $\mu(QA + y) = \mu(A)$ falls $Q \in O(n), y \in \mathbb{R}^n$ (Euklidische Invarianz)

Dieses Problem heißt Maßproblem. In einer etwas schwächeren Version kann man auch fordern

2. $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)$
4. $\mu(A + y) = \mu(A)$ für $y \in \mathbb{R}^n$

Satz 1.3 (Vitali: 1908) Es gibt keine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ welche die Forderungen des Maßproblems erfüllt.

Beweis Sei $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ eine Abbildung die die Forderungen des Maßproblems erfüllt. Sei $q_i, i \in \mathbb{N}$ eine Abzählung von $[0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$. Wir definieren die Äquivalenzrelation $x \sim y$ auf $E := [0,1]^n$ durch $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Nach dem Auswahlaxiom gibt es eine Menge $M_0 \subset [0,1]^n$, welche aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält, das heißt es gilt:

1. $\forall y \in [0,1]^n \exists x \in M_0 : x \sim y \in \mathbb{Q}$
2. Aus $x, y \in M_0, x - y \in \mathbb{Q} \implies x = y$

Wir definieren $M_i = M_0 + q_i$. Aus der Definition von M_i folgt $M_i \cap M_j = \emptyset \forall i \neq j$. In der Tat falls $x \in M_i \cap M_j$, dann $x - q_i \in M_0$ und $x - q_j \in M_0 \overset{1.}{\Rightarrow} q_i = q_j$. Außerdem gilt $[0,1]^n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \subset [0,2]^n$. Die erste Einbettung folgt aus 1., die zweite Einbettung gilt, da $y + q_j \in [0,2]^n \forall y \in M_0$ und $y \in [0,1]^n$ schließlich gilt $\mu(M_j) = \mu(M_0) \forall j \in \mathbb{N}$. Dies folgt aus den Forderungen 1., 3., 4. (abgeschwächte Version reicht).

$$\implies 1 = \mu([0,1]^n) \leq \mu\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} M_j\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(M_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(M_0) \implies \mu(M_i) = \mu(M_0) > 0$$

und

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i\right) = \infty$$

Aus 3. und 4. folgt andererseits

$$\mu([0,2]^n) = 2^n \mu([0,1]^n) = 2^n$$
$$\stackrel{(*)}{\Longrightarrow} \mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i\right) \leq \mu([0,2]^n) = 2^n < \infty` \qquad \square$$

Bemerkung Jedes Maß, welche die Eigenschaften des Maßproblems erfüllt, kann also nicht auf der ganzen $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ definiert sein, sondern auf einer Untermenge der $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Frage: Welche ist die „größte“ (eine „gute“) Untermenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, sodass es eine Lösung des Maßproblems gibt?

Definition 1.4 (Algebra und σ-Algebra) Eine Algebra $\mathcal{A}$ ist die Familie von Teilmengen einer gegebenen Menge X mit

- $x \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \implies A^C := X \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$

Falls

$$(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \implies \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A \in \mathcal{A}$$

so spricht man von einer σ-Algebra.