Lineare Algebra II (Vogel)

Robin Heinemann

20. Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

18 Eigenwerte

In diesem Abschnitt sei $n \in \mathbb{N}$, V ein K-VR und $\varphi \in \operatorname{End}_K(V)$.
Frage: V endlichdim. Existiert eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V, sodass $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ eine Diagonalmatrix ist, das heißt

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$?
Für $i = 1, \dots, n$ wäre dann $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$

Definition 18.1 $\lambda \in K, v \in V$

- λ heißt Eigenwert von $\varphi \overset{\text{Def}}{\iff} \exists v \in V, v \neq 0 : \varphi(v) = \lambda v$
- v heißt Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \overset{\text{Def}}{\iff} v \neq 0 \wedge \varphi(v) = \lambda v$
- φ heißt diagonalisierbar $\overset{\text{Def}}{\iff}$ V besitzt eine Basis aus EV von φ

(Falls V endlichdimensional, ist die äquivalent zu: Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

)
Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit einer Matrix $A \in M(n \times n, K)$ sind über den Endomorphismus $\tilde{A} : K^n \to K^n$ definiert.

Bemerkung 18.2 $A \in M(n \times n, K)$. Dann sind äquivalent:

1. A ist diagonalisierbar.
2. Es gibt eine Basis von K^n aus Eigenvektoren von A
3. Es gibt ein $S \in \mathrm{GL}(n, K), \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$
4. A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix

In diesem Fall steht in den Spalten von S^{-1} eine Basis des K^n aus EU von A, und für jede Matrix $A \in M(n \times n, K)$ mit der Eigenschaft, dass die Spalten von S^{-1} eine Basis des K^n aus EV von A bilden, dann ist SAS^{-1} eine Diagonalmatrix (mit den EW auf der Diagonalen.)

Beweis Äquivalenz:

1. $\iff$ 2. Definition, 2. $\iff$ 3. aus Basiswechselsatz (16.6), 3. $\iff$ 4. aus Definition Ähnlichkeit (16.12)

Zusatz: Sei $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies A\big(S^{-1}e_j\big) = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j$.
Wegen $S^{-1} \in \mathrm{GL}(n, K)$ ist $S^{-1}e_j \neq 0$, das heißt S^{-1} ist EV von A zum EW λ_j
Wegen $S^{-1} \in \mathrm{GL}(n, K)$ ist $\big(S^{-1}e_1, \dots, S^{-1}e_n\big)$ eine Basis des K^n aus EV von A.
Sei $S \in \mathrm{GL}(n, K)$, das heißt die Spalten von S^{-1} eine Basis des K^n aus EV von A bilden, das heißt für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ ist $AS^{-1}e_j = \lambda_j S^{-1}e_j$ für ein $\lambda_j \in K$.

$$\implies AS^{-1}e_j = S^{-1}\lambda_j e_j = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j \implies SAS^{-1}e_j = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j, j = 1, \dots, n$$

$$\implies SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

Beispiel 18.3
$K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$

1. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ Es ist $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, das heißt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV von φ zum EW 1.
   $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, also ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ EV von φ zum EW -1. Somit: $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus EV von φ, das heißt φ ist diagonalisierbar.
   In Termen von Matrizen: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist diagonalisierbar, und mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ist dann ist $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Achtung: Das φ diagonalisierbar ist, heißt nicht, dass jeder Vektor aus $V = \mathbb{R}^2$ ein EV von φ ist, zum Beispiel ist $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ (= Drehung um $\frac{\pi}{2}$). hat keinen EW.
   Beweis dafür: später.

Ziel: Suche Kriterien für Diagonalisierbarkeit.

Bemerkung 18.4 $v_1, \dots, v_m$ EV von φ zu paarweise verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$. Dann ist $(v_1, \dots, v_m)$ linear unabhängig, insbesondere ist $m \leq \dim V$. Insbesondere gilt: ist V endlichdimensional, dann hat φ höchstens $\dim(v)$ Eigenwerte.

Beweis per Induktion nach m:
IA: $m = 1 : v_1 \neq 0$, da v_1 EV $\implies (v_1)$ linear unabhängig.
IS: sei $m \geq 2$, und die Aussage für $m - 1$ bewiesen.
Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ mit $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_m \lambda_m v_m = 0$. Außerdem: $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_m \lambda_1 v_m = 0$

$$\begin{aligned} \implies \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \cdots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1)v_m = 0 \\ \alpha_2 \lambda_2 - \lambda_1 = \cdots = \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1) = 0 \\ \implies \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0 \\ \implies \alpha_1 v_1 = 0 \implies \alpha_1 = 0 \implies (v_1, \dots, v_w) \text{ linear unabhängig} \end{aligned}$$ □

Folgerung 18.5 V endlichdimensional, φ habe n paarweise verschiedene EW, wobei $n = \dim V$ Dann ist φ diagonalisierbar.

Beweis Für $i = 1, \dots, n$ sei v_i ein EV von φ zum EW $\lambda_i \implies (v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig, wegen $n = \dim V$ ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V aus EV von φ □

Definition 18.6 $\lambda \in K$
$\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda) := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ heißt der Eigenraum von φ bezüglich λ.
$\mu_{geo}(\varphi, \lambda) := \dim \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda)$ heißt die geometrische Vielfachheit von λ.
Für $A \in M(n \times n, K)$ setzen wir $\operatorname{Eig}(A, \lambda) := \operatorname{Eig}\left(\tilde{A}, \lambda\right)$, $\mu_{geo}(A, \lambda) := \mu_{geo}\left(\tilde{A}, \lambda\right)$.

Bemerkung 18.7 $\lambda \in K$. Dann gilt:

1. $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda)$ ist ein UVR von V.
2. λ ist EW von $\varphi \iff \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\}$.
3. $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der zu λ gehörenden EV von φ.
4. $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda) = \ker(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi)$, insbesondere ist $\operatorname{Eig}(A, \lambda) = \ker(\lambda E_m - \varphi) = \text{Lös}(\lambda E_n - A, 0)$ für $A \in M(n \times n, K)$
5. Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in K mit \lambda_1 \neq \lambda_2$, dann $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1) \cap \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_2) = \{0\}$

Beweis 4. Es ist $v \in \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda) \iff \varphi(v) = \lambda v \iff \lambda v - \varphi(v) = 0 \iff (\lambda \operatorname{id}_V - \varphi)(v) = 0 \iff v \in \ker(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi)$ Es ist $\operatorname{Eig}(A, \lambda) = \ker\left(\lambda \operatorname{id}_{K^n} - \tilde{A}\right) = \ker\left(\widetilde{\lambda E_n - A}\right) = \ker(\lambda E_n - A) = \text{Lös}(\lambda E_n - A, 0)$

1. aus 4.
2. λ EW von $\varphi \iff \exists v \in V, v \neq 0$ mit $\varphi(v) = \lambda v \iff \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\}$.
3. klar.
5. Sei $\lambda_1 \neq \lambda_2, v \in \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1) \cap \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_2) \implies \lambda_1 v = \varphi(v) = \lambda_2 v \implies \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v = 0 \implies v = 0$ □

Bemerkung 18.8 V endlichdimensional, $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent:

1. λ ist EW von φ
2. $\det(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi) = 0$

Beweis 1. $\iff \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\} \implies \ker(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi) \neq \{0\} \implies \lambda \operatorname{id}_V - \varphi$ nicht injektiv $\implies \lambda \operatorname{id}_V - \varphi$ kein Isomorphismus $\implies \det(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi) = 0$. □

Definition 18.9 K Körper, $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$

$$\chi_A^{char} := \det(tE_n - A) = \det \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ -a_{n1} & \dots & & t - a_{nn} \end{pmatrix} \in K[t]$$

heißt das **charakteristische Polynom** von A.

Anmerkung Hierfür nötig: Determinanten von Matrizen mit Einträgen in einem kommutativen Ring.
In manchen Büchern $\chi_A^{char} = \det(A - tE_n)$ (schlecht)

Beispiel 18.10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$$
$$\implies A\chi_a^{char} = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ -3 & t-4 \end{pmatrix} = (t-1)(t-4) - 6 = t^2 - 5t - 2$$

Bemerkung 18.11 $A, B \in M(n \times n, K), A \approx B$.
Dann ist $\chi_A^{char} = \chi_B^{char}$.

Beweis $A \approx B \implies \exists S \in \mathrm{GL}(n, K) : B = SAS^{-1}$

$$\implies tE_n - B = tE_n - SAS^{-1} = SS^{-1}tE_n - SAS^{-1} = StE_nS_{-1} - SAS^-1 = S(tE_n - A)S^{-1}$$
$$\implies \chi_B^{char} = \det(tE_n - B) = \det\big(S(tE_n - A)S^{-1}\big) = \det(S)\det(tE_n - A)\det\big(S^{-1}\big) = \underbrace{\det(S)\det(S)^{-1}}_{=1}\det(tE_n - A) = \chi_A^{char}$$ □

Definition 18.12 V endlichdim, $n = \dim V$, $\mathcal{B}$ Basis von V, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $A = M_\mathcal{B}(\varphi)$

$$\chi_\varphi^{char} := \chi_A^{char} = \det(tE_n - A) \in K[t]$$

heißt das **charakteristische Polynom** von φ.

Anmerkung χ_φ^{char} ist wohldefiniert, dann: Ist $\mathcal{B}'$ eine weitere Basis von V, $A' = M_{\mathcal{B}'}\varphi$, dann ist $A \approx A'$ und deshalb nach 18.11: $\chi_A^{char} = \chi_{A'}^{char}$.

Satz 18.13 V endlichdimensional, $n = \dim V$. Dann gilt:

1. χ_φ^{char} ist ein normiertes Polynom von Grad n:
$$\chi_\varphi^{char} = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_0$$
mit $c_0 = (-1)^n \det \varphi$, $c_{n-1} = -^{(\varphi)}$ (vgl. Übung zur Spur)
2. Die Nullstellen von χ_φ^{char} sind genau die EW von φ:
$$\lambda \in K \text{ ist EW von } \varphi \iff \chi_\varphi^{char}\lambda = 0$$

Beweis Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V, $A := M_\mathcal{B}(\varphi) \in M(n \times n, K)$

1.

$$\chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \underbrace{(tE_n - A)}_{=:B=(B_{ij})} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) B_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot B_{n,\sigma(n)}$$

$$= (t - a_{11} \cdot \ldots \cdot (t - a_{nn})) + \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}} \operatorname{sgn}(\sigma) B_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot B_{n,\sigma(n)}}_{:=g}$$

Für $\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}$ treten in $B_{1,\sigma(1)}, \ldots, B_{n,\sigma(n)}$ höchstens $n-2$ Diagonalelemente auf, also $\deg(g) \leq n-2$.

$$\Longrightarrow \chi_\varphi^{char} = t^n - (a_{11} + \cdots + a_{nn})t^{n-1} + \text{ Terme kleineren Grades}$$

insbesondere:

$$c_{n-1} = -(a_{11} + \cdots + a_{nn}) = -^A = -^\varphi$$

Es ist

$$c_0 = \chi_\varphi^{char}(0) = (\det(tE_n - A))(0) = \det(0E_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

2. Aus $A = M_\mathcal{B}(\varphi)$ folgt $\lambda E_n - A = M_\mathcal{B}(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi)$. Also:

$$\chi_\varphi^{char}(\lambda) = 0 \iff (\det(tE_n - A))(\lambda) = 0 \Longrightarrow \det(\lambda E_n - A) = 0 \iff \det(M_\mathcal{B}(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi)) = 0$$
$$\Longrightarrow \det(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi) = 0 \iff \lambda \text{ ist EW von } \varphi \qquad \square$$

Definition 18.14 $\lambda \in K$

$$\mu_{alg}(\varphi, \lambda) := \mu\left(\chi_\varphi^{char}, \lambda\right)$$

heißt die **algebraische Vielfachheit**

Beispiel 18.15

1. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Es ist $\chi_\varphi^{char} = \chi_\varphi^{char} = \det \begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{pmatrix} =$

   $t^2 - 1 = (t-1)(t+1) \in \mathbb{R}[t] \Longrightarrow$ EW von $\varphi : 1, -1$.
   Es ist $\mu_{alg}(\varphi, 1) = 1, \mu_{alg}(\varphi, -1) = 1$

$$\operatorname{Eig}(\varphi, 1) = \operatorname{Eig}(A, 1) = \text{Lös}(E_2 - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

   also $\mu_{geo}(\varphi, 1) = \dim \operatorname{Eig}(\varphi, 1) = 1$

$$\operatorname{Eig}(\varphi, -1) = \operatorname{Eig}(A, -1) = \text{Lös}((-1) \cdot E_2 - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, 0\right) = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

   also $\mu_{geo}(\varphi, -1) = 1$.

2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Es ist $\chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} = t^2 + 1, \chi_\varphi^{char}$ hat keine NS in $\mathbb{R} \implies \varphi$ hat keine EW.

3. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Es ist $\chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix} = (t-1)^2 \implies 1$ ist einziger EW von φ, es ist $\mu_{alg}(\varphi, 1) = 2$

$$\mathrm{Eig}(\varphi, 1) = \mathrm{Eig}(A, 1) = \text{Lös}(1E_2 - A, 0)\, \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$\implies \mu_{geo}(\varphi, 1) = 1. \implies \varphi$ ist nicht diagonalisierbar.

Satz 18.16 V endlichdimensional, $n = \dim V$

1. Ist φ diagonalisierbar, dann ist $\chi_\varphi^{char} = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, nicht notwendig verschieden, das heißt χ_φ^{char} zerfällt in Linearfaktoren.

2. Ist $\chi_\varphi^{char} = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n)$ mit paarweise verschiedene $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, dann ist φ diagonalisierbar.

Beweis 1. Sei φ diagonalisierbar $\to V$ besitzt Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ aus EV zu EW $\lambda_i \in K$.

$$\implies M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies \chi_\varphi^{char} = \det \begin{pmatrix} t - \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t - \lambda_n \end{pmatrix} = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n)$$

2. Aus $\chi_\varphi^{char} = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ paarweise verschieden $\implies \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind paarweise verschiedene EW von $\varphi \implies \varphi$ diagonalisierbar. □

Bemerkung 18.17 V endlichdimensional, $n = \dim V$, λ EW von φ. Dann gilt:

$$1 \leq \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \leq \mu_{alg}(\varphi, \lambda)$$

Beweis Sei $(v_1, \ldots, v_s)$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) \implies s = \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \geq 1$, da λ EW von φ. Nach Basiserweiterungssatz $\exists v_{s+1}, \ldots, v_n \in V$, sodass $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis von V ist.

$$\implies A := A_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & A' \end{array}\right), A' \in M((n-s) \times (n-s), K)$$

$$\implies \chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det\left(\begin{array}{ccc|c} t-\lambda & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & t-\lambda & \\ \hline & 0 & & tE_{n-s}-A' \end{array}\right) = (t-\lambda)^s \det\big(tE_{n-s}-A'\big) = (t-\lambda)^s \chi_{A'}^{char}$$

$$\implies \mu_{geo}(\varphi,\lambda) = s \leq \mu\Big(\chi_\varphi^{char},\lambda\Big) = \mu_{alg}(\varphi,\lambda)$$

□

Bemerkung 18.18 $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ paarweise verschiedene EW von φ. Dann gilt:

$$\operatorname{Eig}(\varphi,\lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \operatorname{Eig}(\varphi,\lambda_j) = \{0\} \forall i \in \{1,\dots,r\}$$

Beweis Sei $i \in \{1,\dots,r\}$. Annahme: $\exists v_i \in \operatorname{Eig}(\varphi,\lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \operatorname{Eig}(\varphi,\lambda_j) : v_i \neq 0$.

$$\implies \exists v_j \in \operatorname{Eig}(\varphi,\lambda_j), j = 1,\dots,r, j \neq i : v_i = v_1 + \dots + v_{i-1} + v_{i+1} + \dots + v_r$$

Setze $J := \{j \in \{1,\dots r\}, j \neq i \mid v_j \neq 0\} = \{j_1,\dots,j_s\}$

$$\implies v_i = v_{j_1} + \dots + v_{j_s} \implies v_{j_1} + \dots + v_{j_s} + (-1)v_i = 0 \implies (v_{j_1},\dots,v_{j_s},v_i) \text{ linear abhängig } ↯$$

□

Satz 18.19 V endlichdimensional. Dann sind äquivalent:

1. φ diagonalisierbar
2. χ_φ^{char} zerfällt in Linearfaktoren und $\mu_{alg}(\varphi,\lambda) = \mu_{geo}(\varphi,\lambda) \forall$ EW von φ.
3. Sind $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ die paarweise verschiedenen EW von φ, dann ist

$$V = \operatorname{Eig}(\varphi,\lambda_1) \oplus \dots \oplus \operatorname{Eig}(\varphi,\lambda_k)$$

   In diesem Fall erhält man eine Basis von V aus EV von φ, indem man Basen von $\operatorname{Eig}(\varphi,\lambda_i), i = 1,\dots,k$ zusammenfügt.

Beweis 1. $\implies$ 2. Sei φ diagonalisierbar. $\implies$ $\exists$ Basis $\mathcal{B}$ von V aus EV von φ. Wir ordnen die EV in $\mathcal{B}$ den verschiedenen EW von φ zu und gelangen so zu Familien $\mathcal{B}_i := \Big(v_1^{(i)},\dots,v_{s_i}^{(i)}\Big)$ von linear unabhängigen im $\operatorname{Eig}(\varphi,\lambda), i = 1,\dots,k$

a) Behauptung: $\mathcal{B}_i$ ist eine Basis von $\operatorname{Eig}(\varphi,\lambda_i)$, denn gezeigt: $\mathcal{B}_i$ ist ein ES von $\operatorname{Eig}(\varphi,\lambda_i)$. Sei $v \in \operatorname{Eig}(\varphi,\lambda_i) \leq V$

$$\Longrightarrow \exists \lambda^{(j)} \in K : v = \sum_{j=1}^{k} \left(\lambda_1^{(j)} v_1^{(j)} + \cdots + \lambda_{s_j}^{(j)} v_{s_j}^{(j)} \right)$$

$$\Longrightarrow \underbrace{v - \left(\lambda_1^{(i)} v_1^{(i)} + \cdots + \lambda_{s_i}^{(i)} v_{s_i}^{(i)} \right)}_{\in \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_i)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \left(\lambda_1^{(j)} v_1^{(j)} + \cdots + \lambda_{s_j}^{(j)} v_{s_j}^{(j)} \right) \in \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_j)$$

$$\Longrightarrow v = \lambda_1^{(i)} v_1^{(i)} + \cdots + \lambda_{s_i}^{(i)} v_{s_i}^{(i)}$$

a) Nach 1. ist

$$\mu_{geo}(\varphi, \lambda_1) + \cdots + \mu_{geo}(\varphi, \lambda_k) = s_1 + \cdots + s_k = \dim V$$

χ_φ^{char} zerfällt nach 18.16 in Linearfaktoren, somit

$$\mu_{alg}(\varphi, \lambda_1) + \cdots + \mu_{alg}(\varphi, \lambda_k) = \deg\left(\chi_\varphi^{char} \right) = \dim V$$

Wegen $\mu_{geo}(\varphi, \lambda_i) \leq \mu_{alg}(\varphi, \lambda_i)$ für $i = 1, \ldots, k$ folgt: $\mu_{geo}(\varphi, \lambda_i) = \mu_{alg}(\varphi, \lambda_i)$ für $i = 1, \ldots, k$.

2. $\Longrightarrow$ 3. Es gelte 2. Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen EW von φ. Wir setzen $W := \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_1) + \cdots + \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_k)$. Wegen 18.18 ist

$$W = \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_k)$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \dim W &= \dim \mathrm{Eig}(\chi, \lambda_1) + \cdots + \dim \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_k) \\ &= \mu_{geo}(\chi, \lambda_1) + \cdots + \mu_{geo}(\varphi, \lambda_k) \\ &= \mu_{alg}(\chi, \lambda_1) + \cdots + \mu_{alg}(\varphi, \lambda_k) = \deg\left(\chi_\varphi^{char} \right) \\ &= \dim V \end{aligned}$$

$\Longrightarrow W = V$

3. $\Longrightarrow$ 1. Es gelte 3. Sei $\mathcal{B} = \left(v_1^{(i)}, \ldots, v_{s_i}^{(i)} \right)$ eine Basis von $\mathrm{Eig}\, \varphi, \lambda_i \Longrightarrow \mathcal{B} := \left(v_1^{(1)}, \ldots, v_{s_1}^{(1)}, \ldots, v_1^{(k)}, v_{s_r}^{(k)} \right)$ ist eine Basis von V aus EV von $\varphi \Longrightarrow \varphi$ diagonalisierbar.
□

Anmerkung In der Praxis ist es in der Regel schwierig festzustellen, ob χ_φ^{char} in Linearfaktoren zerfällt oder die NS von χ_φ^{char} zu bestimmen. Für Polynome von Grad ≥ 5 existiert keine Lösungsformel zur Bestimmung der NS. (Algebra 1 Vorlesung), die NS müssen numerisch bestimmt werden.

Beispiel 18.20

1. In 18.15.3 ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist $\chi_A^{char} = (t-1)^2, \mu_{geo}(A,1) = 1 < \mu_{alg}(A,1) = 2 \implies A$ nicht diagonalisierbar.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$

$$\chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t-2 & 1 & 1 \\ 6 & t-1 & -1 \\ -3 & 1 & t+2 \end{pmatrix} = t^3 - t^2 - 5t - 3 = (t+1)^2(t-3)$$

EW von $A: -1, 3, \mu_{alg} = (A,-1) = 2, \mu_a lg(A,3) = 1$

$$\mathrm{Eig}(A,-1) = \mathrm{Lös}(-E_n - A, 0) = \mathrm{Lös}\left(\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

$\mu_{geo}(A,-1) = 2 = \mu_{alg}(A,-1)$.

$$\mathrm{Eig}(A,3) = \mathrm{Lös}(3E_n - A, 0) = \mathrm{Lös}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, 0\right) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$\mu_{geo}(A,3) = 1 = \mu_{alg}(A,3)$. Also ist A diagonalisierbar, $\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus EV von A,

$$M_{\mathcal{B}}\left(\tilde{A}\right) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$$

Mit

$$S := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, SAS^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$$

Anmerkung Ist $f = a_m t^m + \cdots + a_1 t + a_0 \in K[t]$, dann können wir in f:

- Endomorphismen $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ einsetzen durch die Regel

$$f(\varphi) := a_m \varphi^m + \cdots + a_1 \varphi + a_0 \,\mathrm{id}_V \in \mathrm{End}_K(V)$$

wobei $\varphi^k := \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{\text{k-mal}}$

- Matrizen $A \in M(n \times n, K)$ einsetzen durch die Regel

$$f(A) := a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 E_n \in M(n \times n, K)$$

Für $f, g \in K[t], \varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ ist $f(\varphi) \circ g(\varphi) = (fg)(\varphi) = (gf)(\varphi) = g(\varphi) \circ f(\varphi)$, analog für Matrizen.

Satz 18.21 (Satz von Cayley-Hamilton) V endlichdimensional. Dann gilt: $\chi_\varphi^{char}(\varphi) = 0$. Insbesondere gilt für alle $A \in M(n \times n, K) : \chi_A^{char}(A) = 0$.

Beweis 1. Es genügt zu zeigen, dass $\chi_A^{char} = 0$ für alle $A \in M(n \times n, K)$, denn:
Ist $\varphi \in \mathrm{End}_K(V), \mathcal{B}$ Basis von V, $A = A_\mathcal{B}, \chi_\varphi^{char} = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0 = \chi_A^{char} \in K[t]$

$$\begin{aligned} \implies 0 &= \chi_A^{char}(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_0 E_n = M_\mathcal{B}\big(\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \cdots + a_0 \,\mathrm{id}_V\big) \\ &= M_\mathcal{B}\Big(\chi_\varphi^{char}(\varphi)\Big) \end{aligned}$$

$$\implies \chi_\varphi^{char}(\varphi) = 0$$

2. Sei $A \in M(n \times n, K)$. Wir setzen $D := (tE_n - A)^\# \in M(n \times n, K[t])$

$$\implies D(tE_n - A) = \det(tE_n - A)E_n = \chi_A^{char} E_n$$

Sei $D = \sum_{i=0}^{n-1} D_i t^i$ mit $D_i \in M(n \times n, K), \chi_A^{char} = \sum_{i=0}^n a_i t^i$ mit $a_i \in K$

$$\begin{aligned} \implies \sum_{i=0}^n a_i E_n t^i &= \left(\sum_{i=0}^n a_i t^i\right) E_n = \chi_A^{char} E_n = D(tE_n = A) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} D_i t^i\right)(tE_n - A) = \sum_{i=0}^{n-1} D_i t^{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} D_i A t^i \\ &= \sum_{i=0}^n (D_{i-1} - D_i A)t^i \qquad \text{(mit } D_{-1} := 0, D_n := 0\text{)} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert: $a_i A_n = D_{i-1} - D_i A$ für $i = 0, \ldots, n$

$$\begin{aligned} \chi_A^{char} &= \sum_{i=0}^n a_i A_i = \sum_{i=0}^n (a_i E_n)A^i = \sum_{i=0}^n (D_{i-1} - D_i A)A^i \\ &= (D_{-1} - D_0 A) + (D_0 - D_1 A)A + \cdots + (D_{n-1} - D_n A)A^n \\ &= D_{-1} - D_n A^{n+1} = 0 \end{aligned}$$

□

Anmerkung Der „Beweis“

$$\chi_A(A) = (\det(tE_n - A))(A) = \det(AE_n - A) = \det(A - A) = \det(0) = 0$$

funktioniert nicht, denn:

$$\underbrace{\underbrace{(\det(tE_n - A))}_{\in K[t]}(A)}_{\in M(n\times n,K)} \quad \underbrace{\det\underbrace{(AE_n - A)}_{\in M(n\times n,K)}}_{\in K}$$

Satz+Definition 18.22 V endlichdimensional, $I := \{f \in K[t] \mid f(\varphi) = 0\}$. Dann gilt:

1. Es gibt ein eindeutig bestimmtes, normiertes Polynom $\chi_\varphi^{min} \in K[t]$, sodass

$$I = \chi_\varphi^{min} K[t] := \{\chi_\varphi^{min} q \mid q \in K[t]\}$$

   χ_φ^{min} heißt das **Minimalpolynom** von φ. χ_φ^{min} ist das eindeutig bestimmte normierte Polynom kleinsten Grades mit $f(\varphi) = 0$.

2. $\chi_\varphi^{mit} \mid \chi_\varphi^{char}$, das heißt $\exists q \in K[t] : \chi_\varphi^{char} = q \cdot \chi_\varphi^{min}$

Analog konstruiert man für $A \in M(n \times n, K)$, das Minimalpolynom χ_A^{min}. Es ist $\chi_A^{min} = \chi_{\tilde{A}}^{min}$.

Beweis 1. Existenz: Wegen Satz von Cayley-Hamilton ist $\chi_\varphi^{char}(\varphi) = 0$. Somit ist $\chi_\varphi^{char} \in I$, insbesondere $I \neq \emptyset$.
$\deg(f) \mid f \in I, f \neq 0$ ist eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}_0$, hat somit ein minimales Element. $\implies \exists g \in I, g \neq 0 : \deg(g)$ minimal in $I \setminus \{0\}$ ist. Wir setzen

$$\chi_\varphi^{min} := \frac{1}{l(g)} g \implies \chi_\varphi^{min} \text{normiert}$$

und es ist

$$\chi_\varphi^{min}(\varphi) = \frac{1}{l(g)} g g(\varphi) = 0$$

das heißt $\chi_\varphi^{min} \in I$.
Behauptung: $I = \chi_\varphi^{min} K[t]$, denn:
„$\supseteq$“ Für $q \in K[t]$ ist $\big(\chi_\varphi^{min} q\big)(\varphi) = \underbrace{\chi_\varphi^{min}(\varphi)}_{=0} \cdot g(\varphi) = 0$, das heißt $\chi_\varphi^{min} q \in I$.
„$\subseteq$“ Sei $f \in I \implies \exists q, r \in K[t] : f = q\chi_\varphi^{min} + r, \deg(r) < \deg\big(\chi_\varphi^{min}\big)$

$$\implies 0 = f(\varphi) = \big(q\chi_\varphi^{min}\varphi + r\big)(\varphi) = q(\varphi) \cdot \chi_\varphi^{min}(\varphi) + r(\varphi) = r(\varphi) \implies r \in I$$

Wegen $\deg(r) < \deg\big(\chi_\varphi^{min}\big)$ und der Minimalität des Grades von χ_φ^{min} in $I \setminus \{0\}$ folgt $r = 0 \implies f = q\chi_\varphi^{min}$
Eindeutigkeit: Sei $\chi \in K[t]$ ein weiteres Polynom mit $I = \chi K[t] = \chi_\varphi^{min} K[t]$

$$\implies \chi = \chi \cdot 1 \in I = \chi_\varphi^{min} K[t] \implies \exists q \in K[t] : \chi = \chi_\varphi^{min} q$$

Analog $\exists p \in K[t] : \chi_\varphi^{min} = \chi p$

$$\implies \chi_\varphi^{min} = \chi p = \chi_\varphi^{min} q p \implies pq = 1 \implies p, q \in K^*$$

Wegen χ, χ_φ^{min} normiert folgt $p = q = 1$, also $\chi = \chi_\varphi^{min}$

2. Wegen $\chi_\varphi^{char}(\varphi) = 0$ nach Satz von Cayley-Hamilton folgt $\chi_\varphi^{char} \in I$.

$$\implies \exists q \in K[t] : \chi_\varphi^{char} = q\chi_\varphi^{min}$$

das heißt $\chi_\varphi^{min} \mid \chi_\varphi^{char}$ □

Bemerkung 18.23 V endlichdimensional, $\lambda \in K$. Dann gilt:

$$\chi_\varphi^{char}(\lambda) = 0 \iff \chi_\varphi^{min}(\lambda) = 0$$

Insbesondere haben χ_φ^{char} und χ_φ^{min} dieselben NS.

Beweis „ $\Longleftarrow$ " Sei $\chi_\varphi^{min}(\lambda) = 0$. Nach 18.22 $\exists q \in K[t]$ mit $\chi_\varphi^{char} = q\chi_\varphi^{min}$

$$\implies \chi_\varphi^{char}(\lambda) = q(\lambda)\underbrace{\chi_\varphi^{min}(\lambda)} = 0$$

„ $\implies$ " Sei $\chi_\varphi^{char}(\lambda) = 0 \implies \lambda$ ist EW von φ, sei $v \in V$ EV zum EW λ. Sei $\chi_\varphi^{min} = t^r + a_{r-1}t^{r-1} + \cdots + a_1 t + a_0$

$$\begin{aligned}\implies 0 = \big(\chi_\varphi^{min}(\varphi)\big)(v) &= \big(\varphi^r + a_{r-1}\varphi^{r-1} + \cdots + a_1\varphi + a_0 \operatorname{id}_V\big)(v)\\ &= \lambda^r v + a_{r-1}\lambda^{r-1}v + \cdots + a_1\lambda v + a_0 v\\ &= \underbrace{\big(\lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\big)}_{=\chi_\varphi^{min}(\lambda)} v\end{aligned}$$

$\implies \chi_\varphi^{min}(\lambda) = 0$. □

Beispiel 18.24

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{Q}), \chi_A^{char} = (t-1)^2$ Wegen 18.22, 18.23 gilt: χ_A^{min} normiert, $\chi_A^{min} \mid \chi_A^{char}, \chi_A^{char}(1) = 0 \implies \chi_A^{min} \in \{t-1, (t-1)^2\}$ Wegen $A - E_2 = 0$ ist $\chi_A^{min} = t - 1$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{Q}) \implies \chi_A^{char} = (t-1)(t+1) \implies \chi_A^{min} = (t-1)(t+1)$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$

$$\implies \chi_A^{char} = (t+1)^2(t-3) \implies \chi_A^{min} = \{(t+1)(t-3), (t+1)^2(t-3)\}$$

Es ist $(A + E_n)(A - 3E_n) \neq 0$, also ist $\chi_A^{min} = (t+1)^2(t-3)$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \implies \chi_A^{char} = (t+1)^2(t-3)$

$$\chi_A^{min} \in \{(t+1)(t-3), (t+1)^2(t-3)\}$$

Es ist $(A + E_n)(A - 3E_n) = 0 \implies \chi_A^{min} = (t+1)(t-3)$

Satz 18.25 V endlichdimensional. Dann sind äquivalent:

1. φ diagonalisierbar

2. Das Minimalpolynom χ_φ^{min} zerfällt in Linearfaktoren und besitzt nur einfache NS, das heißt $\chi_\varphi^{min} = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_r)$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$

Beweis 1. $\implies$ 2. Sei φ diagonalisierbar, seinen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die verschiedenen EW von φ. Sei $v \in V$. Da φ diagonalisierbar, ist $V = \oplus_{i=1}^r \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_i)$ nach 18.19, das heißt es existieren $v_i \in \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_i), i = 1, \ldots, r$ mit $v = v_1 + \cdots + v_r$

$$\begin{aligned} \implies (\varphi - \lambda_r \operatorname{id}_V)(V) &= \varphi(v_1) + \cdots + \varphi(v_r) - \lambda_r v_1 - \cdots - \lambda_r v_r \\ &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r - \lambda_r v_1 - \cdots - \lambda_r v_r \\ &= (\lambda_1 - \lambda_r) v_1 + \cdots + (\lambda_{r-1} - \lambda_r) v_{r-1} \\ &\in \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_{r-1}) \end{aligned}$$

analog:

$(\varphi - \lambda_{r-1} \operatorname{id}_V) \circ (\varphi - \lambda_r \operatorname{id}_V)(v) \in \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_{r-2})$

Induktiv erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= (\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \circ (\varphi - \lambda_2 \operatorname{id}_V) \circ \cdots \circ (\varphi - \lambda_r \operatorname{id}_V)(V) \\ \implies 0 &= (\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \circ \cdots \circ (\varphi - \lambda_r \operatorname{id}_V) \\ \implies 0 &= ((t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_r))(\varphi) \end{aligned}$$

$\implies$ Es existiert $g \in K[t]$ mit $(t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_r) = g \chi_\varphi^{min}$. Wegen $\chi_\varphi^{min}(\lambda_1) = \cdots = \chi_\varphi^{min}(\lambda_r) = 0$ nach 18.23 existiert $h \in K[t]$ mit

$$\chi_\varphi^{min} = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_r) h = g \chi_\varphi^{min} h = gh \chi_\varphi^{min} \implies gh = 1$$

$\implies g, h \in K^*, \chi_\varphi^{min}$ normiert $\implies g = h = 1 \implies \chi_\varphi^{min} = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_r)$

2. $\implies$ 1. Sei $\chi_\varphi^{min} = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_1)$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ paarweise verschieden. Nach 18.23 sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die EW von φ. Beweis der Behauptung per Induktion nach $n := \dim V$
IA: $n = 1$ klar
IS: Sei $n > 1$, die Behauptung sei für $1, \ldots, n-1$ gezeigt.

a) Behauptung: $V = \ker(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \oplus \operatorname{im}(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)$, denn: Nach 7.6 $\exists v, s \in K[t]$ mit

$$(t-\lambda_2)\cdot \ldots \cdot (t-\lambda_r) = q(t-\lambda_1) + s, \deg(s) < \deg(t-\lambda_1) = 1$$

das heißt s ist konstantes Polynom. Wegen

$$s(\lambda_1) = (\lambda_1-\lambda_2)\cdot \ldots \cdot (\lambda_1-\lambda_r) - q(\lambda_1)\underbrace{(\lambda_1-\lambda_1)}_{=0} \neq 0$$

das heißt $s \in K^*$. Einsetzen von φ liefert:

$$(\varphi - \lambda_2 \operatorname{id}_V)\circ\cdots\circ(\varphi-\lambda_r \operatorname{id}_V) = q(\varphi)\circ(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V) + s \operatorname{id}_V$$

$\Longrightarrow$ $\forall v \in V$ ist

$$\begin{aligned} sv &= (\varphi - \lambda_2 \operatorname{id}_V)\circ\cdots\circ(\varphi-\lambda_r \operatorname{id}_V)(v) - q(\varphi)\circ(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)(v) \\ \Longrightarrow\ v &= \frac{1}{s}\underbrace{(\varphi - \lambda_2 \operatorname{id}_V)\circ\cdots\circ(\varphi-\lambda_r \operatorname{id}_V)(v)}_{=:u} - \underbrace{q(\varphi)\circ(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)(v)}_{=:w} \end{aligned}$$

$$(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)(u) = \frac{1}{s}(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)\circ\cdots\circ(\varphi-\lambda_r \operatorname{id}_V)(v) = \frac{1}{s}\underbrace{\chi_\varphi^{min}(\varphi)}_{=0}(v) = 0$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow\ n \in \ker(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V) \\ w &= \frac{1}{s}q(\varphi)\circ(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)(v) = \frac{1}{s}((\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)\circ q(\varphi))(v) \in \operatorname{im}(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V) \\ \Longrightarrow\ V &= \ker(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V) + \operatorname{im}(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V) \end{aligned}$$

Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen ist

$$\dim\ker(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V) + \dim\operatorname{im}(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V) = \dim V$$

$\Longrightarrow$ Summe ist direkt $\Longrightarrow$ Behauptung.

b) Wir setzen $W := \operatorname{im}(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)$, dann ist

$$V = \ker(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)\oplus W = \underbrace{\operatorname{Eig}(\varphi,\lambda_1)}_{\neq 0}\oplus W$$

$\Longrightarrow$ $\dim W < \dim V$. Es gilt:

$$\begin{aligned} &\varphi\circ(\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V) = \varphi\circ\varphi - \lambda_1\varphi = (\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)\circ\varphi \\ &\quad\Longrightarrow\ \varphi(W) = \varphi((\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)(V)) = (\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)(\varphi(V)) \leq (\varphi-\lambda_1 \operatorname{id}_V)(V) = W \end{aligned}$$

Wir betrachten die Abbildung $\psi := \varphi\big|_W^W : W \to W$. Sei $\chi_\varphi^{min} = t^n + a_{n-1}t^{n-1} +$

$\cdots + a_0$. $\implies \forall w \in W$ ist

$$\begin{aligned}\chi_\varphi^{min}(\psi)(w) &= (\psi_n + a_{n-1}\psi_{n-1} + \cdots + a_0 \operatorname{id}_V)(w)\\ &= \psi^n(w) + a_{n-1}\psi^{n-1}(w) + \cdots + a_0 w\\ &= \varphi_n(w) + a_{n-1}\varphi^{n-1}(w) + \cdots + a_0 w\\ &= \big(\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \cdots + a_0 \operatorname{id}_V\big)(w)\\ &= \underbrace{\big(\chi_\varphi^{min}(\varphi)\big)}_{=0}(w) = 0\end{aligned}$$

$$\implies \chi_\varphi^{min}\psi = 0 \implies \chi_\psi^{min} \mid \chi_\varphi^{min} = (t-\lambda_1)\cdot \ldots \cdot (t-\lambda_r)$$

$\implies$ χ_ψ^{min} zerfällt in Linearfaktoren und besitzt nur einfache Nullstellen. $\implies$ ψ diagonalisierbar, das heißt es existiert eine Basis von W aus EV zu $\psi = \varphi\big|_W^W$. Wegen $V = \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus W$ existiert nach 11.8 eine Basis von V aus EV zu φ, das heißt φ ist diagonalisierbar. □

Beispiel 18.26

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ -8 & 1 & 4\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix} \in M(3\times 3, \mathbb{R})$. Es ist $\chi_A^{min} = (t+1)^2(t-3) \implies A$ ist nicht diagonalisierbar.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1\\ -6 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix} \in M(3\times 3, \mathbb{R})$. Es ist $\chi_A^{min} = (t+1)(t-3) \implies A$ ist diagonalisierbar.

19 Dualraum

In diesem Abschnitt sei V ein K Vektorraum.

Definition 19.1 (Dualraum)

$$V^* := \operatorname{Hom}_K(V, K) = \{\varphi : V \to K \mid \varphi \text{ linear}\}$$

heißt der **Dualraum** von V, die Elemente aus V^* heißen **Linearformen** auf V.

Beispiel 19.2

1. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n, \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1\\ \ldots\\ x_n\end{pmatrix} \mapsto x_1$ ist eine Linearform auf $\mathbb{R}^n$.

2. $K = \mathbb{R}, V = \mathcal{C}[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$

$$\varphi : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

ist eine Linearform auf $\mathcal{C}[0,1]$

Bemerkung+Definition 19.3 V endlichdimensional $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V. Wir definieren für $i = 1, \dots, n$ die linear Abbildung

$$v_i^* : V \to V, v_j \mapsto \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & 1 \neq j \end{cases}$$

Dann ist $\mathcal{B}^* := (v_1^*, \dots, v_n^*)$ ist eine Basis von V^*, die **duale Basis** zu $\mathcal{B}$.

Beweis 1. $\mathcal{B}^*$ ist linear unabhängig: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K, \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^* = 0. \implies$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ist

$$0 = \underbrace{\lambda_1 v_1^*(v_i)}_{=0} + \dots + \underbrace{\lambda_{i-1} v_{i-1}^*(v_i)}_{=0} + \underbrace{\lambda_i v_i^*(v_i)}_{=1} + \underbrace{\lambda_{i+1} v_{i+1}^*(v_i)}_{=0} + \dots + \underbrace{\lambda_n v_n^*}_{=0} = \lambda_i$$

2. $\mathcal{B}^*$ ist ES von V^*: Sei $\varphi \in V^*$. Setze $\lambda_i := \varphi(v_i)$ für $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} &\implies (\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*)(v_i) = \lambda_i = \varphi(v_i), i = 1, \dots, n \\ &\implies \varphi = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^* \end{aligned}$$

$\square$

Anmerkung Ist V unendlichdimensional mit Basis $(v_i)_{i \in I}$, dann ist $(v_i^*)_{i \in I}$ (analog definiert) linear unabhängig, aber kein ES von V.

Notation:
Elemente des K^n schreiben wir im Folgenden als Spaltenvektoren. Ist $\varphi \in (K^n)^* = \mathrm{Hom}_K(K^n, K)$, dann existiert nach LA1 ein eindeutig bestimmtes $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in M(1 \times n, K)$ mit

$$\varphi = \tilde{A} : K^n \to K, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Es ist $A = M_{(e_1)}^{(e_1, \dots, e_n)}(\varphi)$. Dementsprechende schreiben wir Elemente von $(K^n)^*$ als Zeilenvektoren.

Beispiel 19.4

1. $V = K^n, \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \implies \mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ duale Basis zu $\mathcal{B}$ mit

$$e_i^* = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

Für die Abbildung aus 19.2.1 gilt $\varphi = e_1^* = (1, \dots, 0)$.

2. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (v_1, v_2), v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es ist $e_1 = v_1, e_2 = v_2 - v_1$

$$\implies v_1^*(e_1) = v_1^*(v_1) = 1, v_1^*(e_2) = v_1^*(v_2 - v_1) = \underbrace{v_1^*(v_2)}_{=0} - \underbrace{v_1^*(v_1)}_{=1} = -1$$

$$\implies v_1^* = (1, -1)$$

$$\implies v_2^*(e_1) = v_2^*(v_1) = 0, v_2^*(e_2) = v_2^*(v_2 - v_1) = \underbrace{v_2^*(v_2)}_{=1} - \underbrace{v_2^*(v_1)}_{=0} = 1$$

$$\implies v_2^* = (0, 1)$$

Folgerung 19.5 V endlichdimensional, $v \in V, v \neq 0$. Dann existiert $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(v) \neq 0$

Beweis Ergänze die linear unbhängige Familie (v) zu einer Basis $(v, v_2, \dots, v_n)$ von V. Dann ist $(v^*, v_2^*, \dots, v_n^*)$ eine Basis von V^*, und es ist $v^*v = 1 \neq 0$. □

Anmerkung Die Aussage gilt auch ohne die Vorraussetzung „V endlichdimensional."

Folgerung 19.6 V endlichdimensional, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von $V, \mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ duale Basis zu $\mathcal{B}$. DAnn gibt es einen Isomorpismus

$$\psi_{\mathcal{B}} : V \to V^*, v_i \mapsto, v_i \mapsto v_i^* \quad (i = 1, \dots, n)$$

Insbesondere ist $\dim V = \dim V^*$

Beweis folgt direkt aus 19.3 □

Bemerkung+Definition 19.7 $U \subseteq V$ UVR

$$U^0 := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \forall u \in U\} \subseteq V^*$$

heißt der Annulator von U. U^0 ist ein UVR von V^*.

Beweis leicht nachzurechnen. □

Satz 19.8 V endlichdimensional, $U \subseteq V$ UVR, $(u_1, \dots, u_k)$ von $U, \mathcal{B} = (u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r)$ Basis von V. Dann ist die Teilfamilie $(v_1^*, \dots, v_r^*)$ von $\mathcal{B}^*$ eine Basis von U^0. Insbesondere ist $\dim U^0 = \dim V - \dim U$.

Beweis

1. $(v_1^*, \dots, v_r^*)$ linear unhabhängig, da Teilfamilie der Basis $\mathcal{B}^*$ von V^*
2. $\mathrm{Lin}((v_1^*, \dots, v_r^*)) = U^0$
   „$\subseteq$" $\varphi \in \mathrm{Lin}((v_1^*, \dots, v_r^*)) \implies$ Es existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit $\varphi = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_r v_r^*$.
   $\implies$ Für $i = 1, \dots, k$ ist $\varphi(u_i) = \lambda_1 v_1^*(u_i) + \dots + \lambda_1 v_r^*(u_i) = 0 \implies \varphi(u) = 0 \forall u \in U$
   „$\supseteq$" Sei $\varphi \in U^0$. Es existieren $\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit $\varphi = \mu_1 u_1^* + \dots + \mu_k^* + \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_r v_r^* \implies$ Für $i = 1, \dots, k$ ist $0 = \varphi(u_i) = \mu_i \implies \varphi \in \mathrm{Lin}((v_1^*, \dots, v_r^*))$
   □

Bemerkung+Definition 19.9 V, W K-Vr, $f : V \to W$ lineare Abbildung. Wir definieren $f^* : W^* \to V^*, \psi \mapsto f^*(\psi) := \psi \circ f$ f^* heißt die zu f duale **Abbildung**. Es gilt: f^* ist linear.

Beweis

- f^* ist wohldefiniert, da $f^*(\psi) = \psi \circ f \in V^* \forall \psi \in W^*$.
- f^* ist linear, denn: Seien $\varphi, \psi \in W^*, \lambda \in K$

  $$\implies f^*(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi) \circ f = \varphi \circ f + \psi \circ f = f^*(\varphi) + f^*(\psi)$$

  $f^*(\lambda\varphi) = \lambda f^*(\varphi)$ analog. □

Bemerkung 19.10 V, W endlichdimensionaler K-VR. Dann ist die Abbildung

$$^* : \mathrm{Hom}_K(V, W) \to \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*), f \mapsto f^*$$

ist ein Isomorphismus von K-VR.

Beweis

1. * ist linear: Seien $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W), \psi \in W^*$

   $$\implies (f+g)^*(\psi) = \psi \circ (f+g) = \psi \circ f + \psi \circ g = f^*(\psi) + g^*(\psi) \implies (f+g)^* = f^* + g^*$$

   Rest analog.

2. * ist injektiv: Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ wit $f^* = 0 \implies \psi \circ f = 0 \forall \psi \in W^*$. Annahme: $f \neq 0 \implies \exists v \in V : f(v) \neq 0 \implies \exists \varphi \in W^* : \varphi(f(v)) = 0 \implies \circ \varphi \circ f \neq 0$ \`

3. * ist surjektiv: Es ist $\dim \mathrm{Hom}_K(V, W) = \dim(V) \dim(W) = \dim(V^*) \dim(W^*) = \dim \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*) \implies {}^*$ surjektiv. □

Satz 19.11 (19.11) V, W endlichdimesionale K-VR, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Basen von V beziehungsweise W, $f : V \to W$ lineare Abbildung. Dann gilt:

$$M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(f^*) = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)\right)^T$$

Beweis Sei $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n), \mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m), M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ insbesondere

$$\begin{aligned} f(v_j) &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \\ \implies a_{ij} &= w_i^*(f(v_j)) = (w_i^* \circ f)(v_j) = f^*(w_i^*)(v_j) \end{aligned}$$

Sei $M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(f^*) = (b_{ij})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}$, dann ist

$$\begin{aligned} f^*(w_i^*) &= \sum_{j=1}^{n} b_{ji} v_j^* \\ \implies b_{ji} &= (f^*(w_i^*))(v_j) = a_{ij} \end{aligned}$$

□

Satz 19.12 V, W endlichdimesionale K-VR, $f : V \to W$ lineare Abbildung. Dann gilt:

1. $\mathrm{im}(f^*) = \ker(f)^0$
2. $\ker(f^*) = \mathrm{im}(f)^0$

Beweis 1. „$\subseteq$“ Sei $\varphi \in \operatorname{im}(f^*) \subseteq V^* \implies \exists \psi W^* : f^*(\psi) = \varphi$, das heißt $\psi \circ f = \varphi$. $\implies \Big|_{\ker f} = 0 \implies \varphi \in (\ker f)^0$ „$\supseteq$“ Sei $\varphi \in (\ker f)^0 \subseteq V^*$, das heißt $\varphi\Big|_{\ker f} = 0$. Zu zeigen: Es existiert ein $\psi \in W^*$ mit $\varphi = f^*(\psi) = \psi \circ f$. Sei $(v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von $\ker f$, $(w_1, \ldots, w_r)$ eine Basis von $\operatorname{im} f$, $u_i \in f^{-1}(\{w_i\}), i = 1, \ldots, r \implies (v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_r)$ Basis von V. Wir ergänzen $(w_1, \ldots, w_r)$ zu einer Basis $w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, w_m$ von W. $\implies$ Es existier genau eine lineare Abbildung $\psi : W \to K$ mit

$$\psi(w_i) = \begin{cases} \varphi(u_i) & 1 = 1, \ldots, r \\ 0 & i = r+1, \ldots, m \end{cases}$$

Für $i = 1, \ldots, r$ ist $\varphi(u_i) = \psi(w_i) = \psi(f(u_i)) = (\psi \circ f)(u_i)$, und für $i = 1, \ldots, k$ ist $\varphi(v_i) = 0 = \psi(f(v_i))$ Also: $\varphi = \psi \circ f = f^*(\psi)$, das heißt $\varphi \in \operatorname{im} f^*$

2. $\varphi \in \ker(f^*) \iff f^*(\varphi) = 0 \iff \varphi \circ f = 0 \iff \varphi(f(v)) = 0 \forall v \in V \iff \varphi\Big|_{imf} = 0 \iff \varphi \in (\operatorname{im} f)^0$ □

Folgerung 19.13 V, W endlichdimensionale K-VR, $f : V \to W$ lineare Abbildung. Dann gilt:

$$\operatorname{Rang}(f^*) = \operatorname{Rang}(f)$$

Beweis $\operatorname{Rang} f^* = \dim \operatorname{im} f^* = \dim(\ker f)^0 = \dim V - \dim \ker f = \dim \operatorname{im} f = \operatorname{Rang}(f)$□

Folgerung 19.14 $A \in M(m \times n, K)$. Dann gilt:

$$\operatorname{Zeilenrang}(A) = \operatorname{Spaltenrang}(A)$$

Beweis Es ist $A = M^{e_1,\ldots,e_n}_{(e_1,\ldots,e_m)}\left(\tilde{A}\right), A^T = M^{e_1^*,\ldots,e_m^*}_{e_1^*,\ldots,e_n^*}$

$\operatorname{Spaltenrang}(A) = \dim \operatorname{im} \tilde{A} = \operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang}\left(\tilde{A}^*\right) = \operatorname{Spaltenrang}\left(A^t\right) = \operatorname{Zeilenrang}(A)$

□

Definition 19.15 $V^{**} := (V^*)^* = \operatorname{Hom}_K(V^*, K)$ heißt der Bidualraum von V.

Satz 19.16 V endlichdimensional. Dann gibt es einen kanonischen (das heißt basisunabhängigen) Isomorphismus

$$i : V \to V^{**}, v \mapsto i_v, i_v : V^* \to K, \varphi \mapsto \varphi(v)$$

Beweis 1. i wohldefinier und linear: leicht nachzurechnen.

2. i injektiv: Sei $v \in \ker i \implies i_v = 0 \implies \forall \varphi \in V^* = \operatorname{Hom}_K(V, K) : \varphi(v) = 0 \implies v = 0$

3. $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$. Somit nach 12.15: i Isomorphismus □

Anmerkung
- Im Gegensatz zu $\psi_{\mathcal{B}} : V \to V^*$ ist der Isomorphismus $i : V \to V^{**}$ unabhängig von der Wahl einer Basis, das heißt V und V^* sind unkanonisch isomorph, V nud V^{**} sind kanonisch isomorph (für V endlichdimensional).
- Ist V unendlichdimesionsal, dann liefert i zumindest nach eine kanonische Inklusion von V nach V^{**}. Diese ist jedoch die surjektiv.

20 Bilinearformen

In diesem Abschnitt sei V stets ein K-VR.

Definition 20.1 $\gamma : V \times V \to K$ heißt eine Bilinearform auf V, genau dann wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (B1) $\gamma(v_1 + v_2, w) = \gamma(v_1, w) + \gamma(v_2, w), \gamma(\lambda v, w) = \lambda\gamma(v, w)$
- (B2) $\gamma(v, w_1 + w_2) = \gamma(v, w_1) + \gamma(v, w_2), \gamma(v, \lambda w) = \lambda\gamma(v, w)$

$\forall v, w, v_1, v_2, w_1, w_2 \in V, \lambda \in K.$

Beispiel 20.2

1. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n, \gamma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \gamma\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_2$ ist eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$.
2. $K = \mathbb{R}, V = l[0,1], \gamma : l[0,1] \times l[0,1] \mapsto \mathbb{R}, \gamma(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ ist eine Bilinearform auf $l[0,1]$.
3. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, \gamma : \mathbb{R}^2 \times R^2 \to \mathbb{R}, \gamma\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 - x_2 y_2$ ist eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$.

Definition 20.3 V endlichdimensional, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V, γ Bilinearform auf V

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = (\gamma(v_i, v_j))_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \in M(n \times n, K)$$

heihßb die **Darstellungsmatrix** (**Fundamentalmatrix**) von γ bezüglich $\mathcal{B}$.

Beispiel 20.4

1. In 20.2a ist für $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) : M_{\mathcal{B}}(\gamma) = E_n$
2. In 20.2p ist für $\mathcal{B} = (e_1, e_2) : M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Bemerkung 20.5 V endlichdimensional, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V, γ Bilinearform auf V, $A = M_{\mathcal{B}}(\gamma)$, $\Phi_{\mathcal{B}} : K^n \to V$ Koordinatensystem zu $\mathcal{B}, v, w \in V, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)$, das heißt $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$,

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)$$

das heißt $w = q_1 v_1 + \cdots + y_n v_n$. Dann gilt:

$$\gamma(v, w) = \Phi_{\mathcal{B}^{-1}}^T A \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) = x^t A y = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Beweis Es ist

$$y(v,w) = \gamma(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n, y_1v_1 + \cdots + y_nv_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j\gamma(v_i,v_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} \gamma(v_i,y_j)y_j = x^TAy \qquad \square$$

Bemerkung 20.6 V endlichdimensional, $\mathcal{B} = (v_1,\ldots,v_n)$ Basis von $V, A \in M(n\times n, K)$. Dann gilt: Durch

$$\Delta_A^{\mathcal{B}} : V \times V \to K, (v,w) \mapsto \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T A \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)$$

ist eine Bilinearform auf V gegeben.

Beweis Nachrechnen. $\square$

Beispiel 20.7 (wichtiger Spezialfall von 20.6)
$V = K^n, \mathcal{B} = (e_1,\ldots,e_n), A \in M(n\times n,K) \implies \Phi_{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{K^n}$. Durch

$$\Delta_A^{(e_1,\ldots,e_n)} : K^n \times K^n \to K, (v,w) \mapsto v^tAw$$

ist eine Bilinearform auf K^n gegeben. Wir setzen kurz $\Delta(A) := \Delta_A := \Delta_A^{(e_1,\ldots,e_n)}$

Bemerkung+Definition 20.8 $\mathrm{Bil}(V) := \{\gamma : V\times V \to K \mid \gamma \text{ ist Bilinearform }\}$ ist ein K-VR, ist ein UVR vom K-VR $\mathrm{Abb}(V\times V, K)$

Bemerkung 20.9 V endlichdimensional, $\mathcal{B} = (v_1,\ldots,v_n)$ Basis von V. Dann gilt: Die Abbildung

$$M_{\mathcal{B}} : \mathrm{Bil}(V) \to M(n\times n,K)$$

ist ein Isomorphismus von K-VR mit Umkehrabbildung

$$\Delta^{\mathcal{B}} : M(n\times n,K) \to \mathrm{Bil}(V), A \mapsto \Delta_A^{\mathcal{B}}$$

Beweis
1. $M_{\mathcal{B}}$ linear: nachrechnen.
2. $\Delta^{\mathcal{B}} \circ M_{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Bil}(V)}$, denn: Sei $\gamma \in \mathrm{Bil}(V)$
$$\implies \big(\Delta^{\mathcal{B}} \circ M_{\mathcal{B}}\big)(\gamma)(v_i,v_j) = \Delta^{\mathcal{B}}_{M_{\mathcal{B}}(\gamma)}(v_i,v_j) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-v}(v_1)^t M_{\mathcal{B}}(\gamma)\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_j)$$
$$= e_i^T M_{\mathcal{B}}(\gamma)e_j = \gamma(v_i,v_j)$$
3. $M_{\mathcal{B}}\circ\Delta^{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{M(n\times n,K)}$, denn: Sei $A = (a_{ij}) \in M(n\times n,K), B = (b_{ij}) = \big(M_{\mathcal{B}} \circ \Delta^{\mathcal{B}}\big)(A) = M_{\mathcal{B}} \circ \Delta_A^{\mathcal{B}}$
$$b_{ij} = \Delta_A^{\mathcal{B}}(v_i,v_j) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_i)^T A \Phi_{\mathcal{B}}(v_j) = e_i^TAe_j = a_{ij}$$
$\implies B = A$ $\square$

Satz 20.10 V endlichdimensional, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Basen von V, γ Bilinearform auf V. Dann gilt:

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

Beweis Für $v, w \in V$ ist

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{B}}(w) = \gamma(v, w) = \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}(w)$$

16.2.2: $\tilde{T}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}}$

$$\begin{aligned}
&= \left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)\right)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) \\
&= \left(\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}\right)^T \left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) \\
\implies \Delta^{\mathcal{B}}(M_{\mathcal{B}}(\gamma))(v, w) &= \Delta^{\mathcal{B}}\Big(\left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\Big)(v, w) \\
\implies \Delta^{\mathcal{B}}(M_{\mathcal{B}}(\gamma)) &= \Delta^{\mathcal{B}}\Big(\left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\Big)
\end{aligned}$$

$\Delta^{\mathcal{B}}$ Isomorphismus

$$\implies M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$ □

Definition 20.11 V endlichdimensional, γ Bilinearform auf V. Wir setzen $\operatorname{Rang}(\gamma) := \operatorname{Rang} M_{\mathcal{B}}(\gamma)$, wobei $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist.

Anmerkung Dies ist wohldefiniert. (folgt aus 20.10, da die Matrizen $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ invertierbar sind)

Bemerkung+Definition 20.12 Es gilt:

1. Ist $\gamma : V \times V \to K$ eine Bilinearform, dann induziert γ die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned}
\Gamma_l : V \to V^*, w \mapsto \gamma(\cdot, w) &\qquad \gamma(\cdot, w) : V \to K, v \mapsto \gamma(v, w) \\
\Gamma_r : V \to V^*, v \mapsto \gamma(v, \cdot) &\qquad \gamma(v, \cdot) : V \to K, v \mapsto \gamma(v, w)
\end{aligned}$$

2. Jede lineare Abbildung $\Gamma : V \to V^*$ induziert Bilinearformen

$$\begin{aligned}
\gamma_l : V \times V \to K, \gamma_l(v, w) := \Gamma(w)(v) \\
\gamma_r : V \times V \to K, \gamma_r(v, w) := \Gamma(v)(w)
\end{aligned}$$

Die Zuordnungen aus 1., 2. induzieren den Isomorphismus $\operatorname{Bil}(V) \cong \operatorname{Hom}_K(V, V^*)$

Beweis Nachrechnen. □

Definition 20.13 γ Bilinearform auf V. γ heißt **nicht-ausgeartet** $\iff$ Γ_l und Γ_r sind injektiv.

$$\iff \gamma(v,w) = 0 \forall v \in V \implies w = 0$$

(Injektivität von Γ_l), und

$$\iff \gamma(v,w) = 0 \forall w \in V \implies v = 0$$

(Injektivität von Γ_r).
γ heißt **perfekt** $\iff$ Γ_l und Γ_r sind Isomorphismen.

Bemerkung 20.14 V endlichdimensional, γ Bilinearform auf V, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V, $\mathcal{B}^*$ duale Basis zu $\mathcal{B}$. Dann gilt:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\Gamma_l) = M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\Gamma_r)\right)^T$$

Beweis Behauptung: Es ist $\Gamma_l(v_i) = \gamma(v_1, v_i)v_1^* + \dots + \gamma(v_n, v_i)v_n^*$, denn $\Gamma_l(v_i)(v_j) = \gamma(v_j, v_i)$ nach Definition

$$(\gamma(v_1, v_i)v_1^* + \dots + \gamma(v_n, v_i)v_n^*)(v_j) = \gamma(v_j = v_i)$$

Somit: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\Gamma_l) = M_{\mathcal{B}}(\gamma)$.
Analog: $\Gamma_r(v_i) = \gamma(v_i, v_1)v_1^* + \dots + \gamma(v_i, v_n)v_n^* \implies M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\Gamma_r) = (M_{\mathcal{B}}(\gamma))^T$ □

Folgerung 20.15 V endlichdimensional, γ Bilinearform auf V, $\mathcal{B}$ Basis von V. Dann sind äquivalent:

1. γ ist nich-ausgeartet
2. γ ist perfekt
3. $M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ invertierbar
4. Γ_l injektiv
5. Γ_r injektiv

Beweis 1. $\iff$ 2. wegen $\dim V = \dim V^*$ und 12.12
γ perfekt $\iff$ Γ_l, Γ_r Isomorphismen $\iff$ $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\Gamma_l), M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\Gamma_r)$ invertierbar $\iff$ $M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ invertierbar. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\Gamma_l), M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\Gamma_r)$ $\iff$ Γ_l Isomorphismus $\iff$ $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}$ invertierbar. □

Definition 20.16 γ Bilinearform auf V.
γ heißt **symmetrisch** $\iff$ $\gamma(v,w) = \gamma(w,v) \forall v,w \in V$
γ heißt **antisymmetrisch** $\iff$ $\gamma(v,w) = -\gamma(w,v) \forall v,w \in V$
γ heißt **alterniernd** $\iff$ $\gamma(v,v) = 0 \forall v \in V$.

Anmerkung

- γ symmetrisch $\implies$ $\Gamma_l = \Gamma_r$
- Für $\mathrm{char}(K) \neq 2$ gilt: γ alterniernd $\iff$ γ antisymmetrisch

- Für $\operatorname{char}(K) = 2$ gilt immer noch γ alternierend $\implies$ γ (anti)symmetrisch Die Umkehrung ist falsch: $\gamma : \mathbb{F}_2^3 \times \mathbb{F}_2^3 \to \mathbb{F}, \gamma(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ ist (anti)symmetrisch, aber nicht alternierend:
$$\gamma\left(\begin{pmatrix}\bar{1}\\\bar{0}\\\bar{0}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\bar{1}\\\bar{0}\\\bar{0}\end{pmatrix}\right) = \bar{1} \neq \bar{0}$$

Bemerkung 20.17 V endlichdimensional, $\mathcal{B}$ Basis von V, γ Bilinearform auf V. Dann gilt:

1. γ symmetrisch $\iff$ $M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ ist symmetrisch, das heißt $M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T = M_{\mathcal{B}}(\gamma)$
2. γ antisymmetrisch $\iff$ $M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ ist antisymmetrisch, das heißt $M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T = -M_{\mathcal{B}}(\gamma)$

Beweis 1. „$\implies$" klar
„$\impliedby$" Sei $M_{\mathcal{B}}(\gamma) = M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T$ $\implies$ Für v, w ist

$$\begin{aligned}\gamma(v, w) &= \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma)\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)^T \\ &= \underbrace{\left(\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma)\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}\right)^T}_{\in K} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma)\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v) = \gamma(w, v).\end{aligned}$$

2. analog. □

21 Quadratische Räume

Definition 21.1 (Quadratische Form) V K-VR. Eine Abbildung $q : V \to K$ heißt eine **quadratische Form** auf V, genau dann wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (Q1) $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v) \forall \lambda \in K, v \in V$
- (Q2) Die Abbildung $\varepsilon_q : V \times V \to K, (v, w) \mapsto q(v + w) - q(v) - q(w)$ ist eine (automatisch symmetrische) Bilinearform

Beispiel 21.2
$K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, q\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ ist eine quatratische Form auf $\mathbb{R}^2$ (Q1) ist erfüllt, (Q2) ist ebenfalls erfüllt, denn

$$\begin{aligned}\varepsilon_q\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) &= q\left(\begin{pmatrix}x_1 + y_1\\x_2 + y_2\end{pmatrix}\right) - q\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) - q\left(\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) \\ &= (x_1 + y_1)^2 + (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) + (x_2 + y_2)^2 - x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 - x_2^2 - y_1^2 - y_1y_2 - y_2^2 \\ &= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2\end{aligned}$$

das heißt ε_q ist symmetrische Bilinearform.

Bemerkung 21.3 char $K \neq 2, V$ K-VR, $\mathrm{SymBil}(V) := \{\gamma : V \times V \to K \mid \gamma$ ist symmetrische Bilinearform$\}$, Quad(
$\{q : V \to K \mid q$ ist eine quadratische Form$\}$. Dann sind die Abbildungen

$$\Phi : \mathrm{SymBil}(V) \to \mathrm{Quad}(V), \gamma \mapsto q_\gamma \quad q_\gamma : V \to K, v \mapsto \gamma(v, v)$$

$$\Psi : \mathrm{Quad}(V) \to \mathrm{SymBil}(V), q \mapsto \gamma_q \frac{1}{2} \varepsilon_q$$

zueinander inverse Bijektionen.

Beweis 1. Φ ist wohldefiniert, das heißt $q_\gamma \in \mathrm{Quad}(V) \forall \gamma \in \mathrm{SymBil}(V)$.
Q1: Sei $\lambda \in K, v \in V \implies q_\gamma(\lambda v) = \gamma(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 \gamma(v, v) = \lambda^2 q_\gamma(v)$
Q2:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{q_\gamma} &= q_\gamma(v + w) - q_\gamma(v) - q_\gamma(w) = \gamma(v + w, v + w) - \gamma(v, v) - \gamma(w, w) \\ &= \gamma(v, w) + \gamma(w, v) = 2\gamma(v, w) \end{aligned}$$

$\implies \varepsilon_{q_\gamma}$ symmetrische Bilinearform.

2. Ψ ist wohldefiniert, denn für jedes $q \in \mathrm{Quad}(V)$ ist $\gamma_q = (1/2)\varepsilon_q \in \mathrm{SymBil}(V)$, da $\varepsilon_q \in \mathrm{SymBil}(V)$

3. $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathrm{Quad}(V)}$: Für $q \in \mathrm{Quad}(V), v \in V$ ist

$$(\Phi \circ \Psi)(q)(v) = \Phi(\gamma_q)(v) = \gamma_q(v, v) = \frac{1}{2}(q(v + v) - q(v) - q(v)) = q(v)$$

4. $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathrm{SymBil}(v)}$: Für $\gamma \in \mathrm{SymBil}(v), v, w \in V$ ist

$$(\Psi \circ \Phi)(\gamma)(v, w) = \Psi(q_\gamma)(v, w) = \frac{1}{2} \varepsilon_{q_\gamma}(v, w) = \gamma(v, w) \qquad \square$$

Anmerkung Philosophie dahinter: symmetrische Bilinearformen, quadratische Formen auf K sind für char $K \neq 2$ fast dasselbe. Für char $k = 2$ kann man die Abblidung Φ immer noch definieren, Φ ist im allgemeinen aber weder injekiv, noch surjektiv. Exemplarisch: Für $K = \mathbb{F}_2, V = \mathbb{F}_2^2$ liegt die quadratische Form $q : \mathbb{F}_2^2 \to \mathbb{F}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ liegt nicht im Bild vom Φ.

Für den Rest dieses Abschnittes sei K stets ein Körper mit char $K \neq 2$

Definition 21.4 (Quadratischer Raum) Ein **quadratischer Raum** ist ein Paar (V, γ), bestehend aus endlichdimensionalem K-VR V und einer symmetrischen Bilinearform γ auf V. $v, w \in V$ heißen **orthogonal** bezüglich $\gamma \iff \gamma(v, w) = 0$. $(v_i)_{i \in I}$ Familie von Vektoren aus V heißt orthogonal bezüglich $\gamma \iff \gamma(v_i, v_j) = 0 \forall i, j \in I, i \neq j$. Eine Familie $(v_1, \dots, v_n)$ von Vektoren aus V heißt eine **Orthogonalbasis** (OB) von $(V, \gamma) \iff (v_1, \dots, v_n)$ ist eine Basis von V und ist orthogonal bezüglich γ.

Anmerkung • Ist γ aus dem Kontext klar, wird es auch häufig weggelassen.

- Ist $\mathcal{B}$ eine Basis von V, dann gilt $\mathcal{B}$ OB von $(V,\gamma) \iff M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ ist eine Diagonalmatrix.

Definition 21.5 $(V,\gamma_v),(W,\gamma_w)$ quadratische Räume, $f : V \to W$ lineare Abbildung. f heißt **Homomophismus quadratischer Räume** $\iff$

$$\gamma_w(f(v_1),f(v_2)) = \gamma_v(v_1,v_2)\forall v_1,v_2 \in V$$

f heißt **Isomorphismus quadratischer Räume** $\iff$ f ist ein Isomorphismus von K-VR und ein Homomophismus quadratischer Räume. Notation: Wir schreiben häufig $f : (V,\gamma_v) \to (W,\gamma_w)$ für Abbildungen / Homomorphismen quadratischer Räume.

Anmerkung Ist $f : (V,\gamma_v) \to (W,\gamma_w)$ ein Isomorphismus quadratischer Räume, dann ist $f^{-1} : (W,\gamma_w) \to (V,\gamma_v)$ ebenfalls ein Isomorphismus quadratischer Räume, und es ist $\mathrm{Rang}(\gamma_v) = \mathrm{Rang}(\gamma_w)$ (nachrechnen…)

Ziel: Klassifiziere quadratische Räume bis auf Isomorphie quadratischer Räume.

Satz 21.6 (V,γ) quadratischer Raum. Dann besitzt (V,γ) eine OB.

Beweis per Induktion nach $n = \dim V$.
IA: $n = 0$: leere Familie ist OB.
IS: Sei $n \geq 1$

1. Fall: $\gamma(v,v) = 0\forall v \in V$

$$\implies \forall v,w \in V : 0 = \gamma(v+w,v+w) = \gamma(v,v)+\gamma(w,w)+2\gamma(v,w) = 2\gamma(v,w)$$

$\implies \gamma(v,w) = 0\forall v,w \in V \implies$ Jede Basis von V ist OB von (V,γ)

2. $\exists v_1 \in V : \gamma(v_1,v_1) \neq 0$. Sei $\Gamma : V \to V^*, v \mapsto \gamma(v,\cdot)$ die zu γ gemäß 20.10 gehörige lineare Abbildung. Setze $H = \ker(\Gamma(v_1)) = \{w \in W \mid \gamma(v_1,w) = 0\}$

$$\implies \dim H = \dim V - \underbrace{\dim \mathrm{im}(\Gamma(v_1))}_{\leq K \text{ beachte: } \Gamma(v_1)\in V^*} \in \{n, n-1\}$$

Es ist $v_1 \notin H$ wegen $\gamma(v_1,v_1) \neq 0 \implies \dim H = n-1 \implies V = \mathrm{Lin}((v_1)) \oplus H$. $(H,\gamma\mid_{H\times H})$ ist ein quadratischer Raum der Dimension $n-1$. Wegen IV existiert eine OB $(v_2,\dots,v_n)$ von $(H,\gamma\mid_{H\times H}) \implies (v_1,v_2,\dots,v_n)$ ist OB von (V,γ) □

Folgerung 21.7 $A \in M(n\times n,K)$ symmetrisch. Dann existiert $T \in \mathrm{GL}(n,K)$, sodass T^TAT eine Diagonalmatrix.

Beweis A definiert eine symmetrische Bilinearform $\Delta(A) = \Delta_A^{(e_1,\dots,e_n)}$ auf K^n (vergleiche 20.7, $\Delta(A)(v,w) = v^TAw$). Nach 21.6 existiert eine OB $\mathcal{B}$ von $(K^n,\Delta(A)) \implies M_{\mathcal{B}}(\Delta(A))$ ist Diagonalmatrix, und es ist

$$M_{\mathcal{B}}(\Delta(A)) = \underbrace{\left(T^{\mathcal{B}}_{(e_1,\dots,e_n)}\right)^T}_{=T^T} \underbrace{M_{(e_1,\dots,e_n)}(\Delta(A))}_{A} \underbrace{T^{\mathcal{B}}_{(e_1,\dots,e_n)}}_{=:T}$$

□

Folgerung 21.8 (V,γ) quadratischer Raum, $n = \dim V$, $r = \operatorname{Rang}(\gamma)$. Dann existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K \setminus \{0\}$ und ein Isomorphismus von quadratischen Räumen

$$\Phi : \left(K^n, \Delta\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}\right)\right) \to (V,\gamma)$$

Beweis Wegen 21.6 existiert eine OB $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von (V,γ). Nach Umordnung von $v_1, \ldots, v_n$ sei $\gamma(v_i, v_i) \neq 0$ für $i = 1, \ldots, s$ und $\gamma(v_i, v_i) = 0$ für $i = s+1, \ldots, n$

$$\implies M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_s & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in K\backslash\{0\}, r = \operatorname{Rang}(\gamma) = \operatorname{Rang} M_{\mathcal{B}}(\gamma) = s$$

Setze $\Phi := \Phi_{\mathcal{B}} : K^n \to V, e_i \mapsto v_i$ (Koordinatensystem zu $\mathcal{B}$, vegleiche 15.2). Φ ist Isomorphismus

$$\begin{aligned} \gamma(\Phi_{\mathcal{B}}(v), \Phi_{\mathcal{B}}(w)) &= \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(\Phi_{\mathcal{B}}(v))^T M_{\mathcal{B}}(\gamma) \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(\Phi_{\mathcal{B}}(w)) = v_t M_{\mathcal{B}}(\gamma) w \\ &= v^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} w = \Delta\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{pmatrix}\right)(v,w) \quad \square \end{aligned}$$

Anmerkung $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sind im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Frage: Kann man über speziellen Körpern mehr sagen? Wir werden $K = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ untersuchen.

Satz 21.9 (V,γ) quadratischer Raum über $\mathbb{C}$, $n = \dim V$, $r = \operatorname{Rang}\gamma$. Dass existiert eine Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ von (V,γ) mit

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Insbesondere existiert ein Isomorphismus quadratischer Räume $\Phi\left(\mathbb{C}^n, \Delta\left(\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right) \to (V,\gamma)$

Beweis Sei $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ eine Orthogonalbasis von (V, γ). Setze

$$v_i := \begin{cases} \tilde{v}_i & \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\tilde{v}_i, \tilde{v}_i}} \tilde{v}_i & \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) \neq 0 \end{cases}$$

Hierber ist $\sqrt{\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)}$ eine komplexe Zahl α mit $\alpha^2 = \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)$. Falls $\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) \neq 0$, dass ist

$$\gamma(v_i, v_i) = \gamma\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)}}, \frac{1}{\sqrt{\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)}}\right) = \frac{1}{\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)} \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) = 1$$

Außerdem: $\gamma(v_i, v_j) = 0 \forall i \neq j$, da $\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) = 0 \forall i \neq 0$. Setze $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_n)$. Nach eventueller Umnummerierung von $v_1, \dots, v_n$ ist

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei $r = \operatorname{Rang} M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \operatorname{Rang} \gamma$. □

Folgerung 21.10 $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ symmetrisch, $r = \operatorname{Rang} A$. Dass existiert ein $T \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{C})$, sodass

$$T^T A T = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Folgerung 21.11 (21.11) $(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$ quadratische Räume über $\mathbb{C}$. Dann sind äquivalent:

1. Es gibt einen Isomorphismus quadratischer Räume $(V, \gamma_V) \to (W, \gamma_W)$
2. $\dim V = \dim W$ und $\operatorname{Rang} \gamma_V = \operatorname{Rang} \gamma_W$

Beweis 1. $\implies$ 2. vergleiche Anmerkung nach 21.5

2. $\implies$ 1. Sei $n = \dim V = \dim W, r = \operatorname{Rang} \gamma_V = \operatorname{Rang} \gamma_W$. $\implies$ $(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$ sind als quadratische Räume isomorph zu $\left(\mathbb{C}^n, \Delta\left(\begin{pmatrix} E_r & \end{pmatrix}\right)\right)$, also au $(V, \gamma_V) \cong (W, \gamma_W)$ □

Definition 21.12 (V, γ) quadratischer Raum, $U_1, \dots, U_m \subseteq V$ UVR mit $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$. Die direkte Summe heißt **orthogonale direkte Summe**

$$\left(V = U_1 \hat{o} plus \dots \hat{\oplus} U_m\right) \overset{\text{Def}}{\iff} \gamma(u_i, u_j) = 0 \forall u_i \in U_i, u_j \in U_j, i \neq j$$

alternativ ⊥

Satz 21.13 (V, γ) quadratischer Raum über $\mathbb{R}$, $n = \dim V$. Dann existiert eine Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ von (V, γ), sowie $r_+, r_- \in \{0, \dots, \dim V\}$ mit

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Insbesondere existiert ein Isomorphismus quadratischer Räume

$$\left(\mathbb{R}^n, \Delta\left(\begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\right)\right) \to (V, \gamma)$$

Die Zahlen r_+, r_- sind unabhängig von der Wahl einer solchen Basis. Wir nennen $\mathrm{Signatur}(\gamma) := (r_+, r_-)$ heißt die **Signatur** von γ.

Beweis 1. Sei $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ eine Orthogonalbasis von (V, γ). Wir setzen

$$v_i := \begin{cases} \tilde{v}_i & \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)|}} & \gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) \neq 0 \end{cases}$$

Falls $\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) \neq 0$, dass ist

$$\begin{aligned} \gamma(v_i, v_i) &= \gamma\left(\frac{1}{\sqrt{|\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)|}}\tilde{v}_i, \frac{1}{\sqrt{|\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)|}}\tilde{v}_i\right) \\ &= \frac{1}{|\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i)|}\gamma(\tilde{v}_i, \tilde{v}_i) \in \{\pm 1\} \end{aligned}$$

$\gamma(v_i, v_j) = 0$ für $i \neq j$. Setze $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_n)$. Nach eventueller Umnummerierung von $v_1, \dots, v_n$ ist

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ 1 & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

mit geeigneten $r_+, r_- \in \{0, \dots, n\}$

2. r_+, r_- sind basisunabhängig: Es ist $r_+ + r_- = \operatorname{Rang}\gamma$, dies ist basisunabhängig. Es gilt zu zeigen: r_+ ist basisunabhängig. Setze $V_+ := \operatorname{Lin}\big((v_1, \dots, v_{r_+})\big), V_- = \operatorname{Lin}\big((v_{r_++1}, \dots, v_{r_++r_-})\big), V_0 := \operatorname{Lin}\big((v_{r_++r_-+1}, \dots, v_n)\big) \implies V = V_+ \hat{\oplus} V_- \hat{\oplus} V_0$. Setze

$$s := \max\{\dim W \mid W \subseteq V \text{ UVR mit } \gamma(w, w) > 0 \forall w \in W, w \neq 0\}$$

dies ist wohldefiniert. V_+ ist ein UVR von V mit $\gamma(w, w) > 0 \forall w \in V_+, w \neq 0$, denn für $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{r_+} v_{r_+}$ ist

$$\gamma(w, w) = \lambda_1^2 \underbrace{\gamma(v_1, v_1)}_{=1} + \dots + \lambda_{r_+}^2 \underbrace{v_{r_+}, v_{r_+}}_{=1} = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_{r_+}^2 > 0 \text{ falls } w \neq 0$$

$\implies s \geq \dim V_+ = r_+$ Annahme: Es existiert ein UVR $W \subseteq V$ mit $\gamma(w, w) > 0 \forall w \in W, w \neq 0$ und $\dim W > r_+$

$$\implies \underbrace{\dim W}_{>r_+} + \underbrace{\dim V_-}_{=r_-} + \underbrace{\dim V_0}_{n-(r_++r_-)} > n$$

$$\begin{aligned}
\implies \dim\big(W \cap \big(V_- \hat{\oplus} V_0\big)\big) &= \dim W + \dim\big(V_- \hat{\oplus} V_0\big) - \dim\big(W + \big(W_- \hat{\oplus} V_0\big)\big) \\
&= \underbrace{\dim W + \dim V_- + \dim V_0}_{>n} - \underbrace{\dim\big(W + \big(V_- \hat{\oplus} V_0\big)\big)}_{\leq n, \text{ da } W + \left(V_- \hat{\oplus} W_0\right) \text{ UVR von } V} \\
&=> 0
\end{aligned}$$

$\implies$ Es existiert $w \in W, w \neq 0$ mit $w \in W_- \hat{\oplus} V_0$.
$\implies$ Es existiert $w_- \in V_-, w_0 \in V_0$ mit $w = w_- + w_0$
$\implies \gamma(w, w) = \gamma(w_- + w_0, w_- + w_0) = \underbrace{\gamma(w_-, w_-)}_{<0} + \underbrace{\gamma(w_0, w_0)}_{=0} < 0$ Andererseits: $\gamma(w, w) > 0$ wegen $w \in W, w \neq 0$`. Somit: $r_+ = s$, insbesondere unabhängig von Basiswahl. ☐

Folgerung+Definition 21.14 (Sylvesterscher Trägheitssatz) $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Dann existieren $T \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{R}), r_+, r_- \in \{0, \dots, n\}$ mit

$$T^T A T = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Die Zahlen r_+, r_- sind unabhängig von der Wahl eines solchen T. $\operatorname{Signatur}(A) := (r_+, r_-)$ heißt **Signatur** von A.

Beweis folgt aus 21.13 (analog zum Beweis von 21.7). ☐

Anmerkung Ist $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, dann haben die Matrixen A und $S^T AS$ diesselbe Signatur, denn: Ist $\tilde{T} \in \mathrm{GL}(, \mathbb{R})$ mit

$$\tilde{T}^T \left(S^T AS\right) T = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

, dann ist

$$\left(S\tilde{T}\right)^T A \left(S\tilde{T}\right) = \begin{pmatrix} E_{r_+} & & 0 \\ & -E_{r_-} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Folgerung 21.15 $(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$ quadratische Räume über $\mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

1. Es gibt einen Isomorphismus quadratischer Räume $(V, \gamma_V) \to (W, \gamma_W)$
2. $\dim V = \dim W$ und $\mathrm{Signatur}(\gamma_V) = \mathrm{Signatur}(\gamma_W)$

Beweis 1. $\implies$ 2. Für $\mathrm{Signatur}(\gamma_V) = \mathrm{Signatur}(\gamma_W)$ verwende Charakterisierung von r_+ aus dem Beweis von 21.3.

2. $\implies$ 1. aus 21.13, analog zum Beweis von 21.11 □

Anmerkung Man kann Folgerung 21.11/21.15 verwenden, um quadratische Formen über $\mathbb{C}$ beziehungsweise $\mathbb{R}$ bis auf Äquivalenz zu klassifizieren (vergleiche Übungen)

22 Euklidische Räume

Definition 22.1 $V\mathbb{R}$ -VR, $\gamma : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform. γ heißt

- **positiv definit** $\overset{\text{Def}}{\iff} \gamma(v, v) > 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$
- **positiv semidefinit** $\overset{\text{Def}}{\iff} \gamma(v, v) \geq 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$
- **negativ definit** $\overset{\text{Def}}{\iff} \gamma(v, v) < 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$
- **negativ semidefinit** $\overset{\text{Def}}{\iff} \gamma(v, v) \leq 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$
- *indefinit $\overset{\text{Def}}{\iff}$ γ ist weder positiv noch negativ semidefinit.

Eine positiv definite symmetrische Bilinearform nennt man auch ein **Skalarprodukt**.

Beispiel 22.2

1. $V = \mathbb{R}^n, < \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, < \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} >:= x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ ist ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$. Positiv Definitheit:

$$< \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} >= x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0, \text{ falls } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$$

$< \cdot, \cdot >$ heißt das **Standardskalarprodukt** auf dem $\mathbb{R}^n$.

2. $V = \mathcal{C}[0,1]$

$$\gamma : \mathcal{C}[0,1] \times \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}, (f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

ist ein Skalarprodukt.

Anmerkung Um die Definitheit einer symmetrischen Bilinearform nachzuweisen, genügt es nich, das Verhalten auf den Basisvektoren zu untersuchen: Sei $\gamma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\gamma = \Delta\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

das heißt

$$M_{(e_1,e_2)}(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist $\gamma(e_1, e_1) = 1, \gamma(e_2, e_2) = 1$ aber

$$\gamma\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 < 0$$

das heißt γ ist indefinit.

Definition 22.3 Ein **Euklidischer Raum** ist ein Paar (V, γ), bestehend aus einem endlichdimensionalen $\mathbb{R}$ -VR V und einem Skalarprodukt γ auf V. Für den Rest dieses Abschsittes sei (V, γ) ein Euklidischer Raum.

Definition 22.4 $v \in V$

$$\|v\| := \sqrt{\gamma(v,v)}$$

heißt die **Norm** auf V.
$(v_i)_{i \in I}$ Familie von Vektoren aus V heißt **orthonormal** $\overset{\text{Def}}{\iff}$ $(v_i)_{i\in I}$ ist orthogonal und $\|v_i\| = 1 \forall i \in I$.
$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ heißt *Orthonormalbasis von $V((V,\gamma))$ (ONB) $\iff$ $\mathcal{B}$ ist Basis von V und $\mathcal{B}$ ist orthonormal.

Bemerkung 22.5 $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Orthonormalbasis von $(V, \gamma), v \in V$. Dann gilt: Ist $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, dann ist $\lambda_i = \gamma(v, v_i) \forall i = 1, \dots, n$

Beweis $\gamma(v, v_i) = \lambda_1 \gamma(v_1, v_i) + \dots + \lambda_n \gamma(v_n, v_i) = \lambda_i \underbrace{\gamma(v_i, v_i)}_{=1} = \lambda_i$ □

Bemerkung+Definition 22.6 $U \subseteq V$ Untervektorraum.

$$U^\perp := \{v \in V \mid \gamma(v,u) = 0 \forall u \in U\}$$

heißt das **orthogonale Komplement** zu U. $U^\perp$ ist ein Untervektorraum von V.

Beweis leicht nachzurechnen □

Satz+Definition 22.7 $U \subseteq V$ Untervektorraum. Dann gilt:

1. $V = U \oplus U^\perp$
2. $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$
3. $\left(U^\perp\right)^\perp = U$
4. Ist $(u_1, \ldots, u_m)$ eine Orthogonalbasis von $(U, \gamma\mid_{U\times U})$, und ist $v \in V$ mit $v = u + v', u \in U, v' \in U^\perp$, dass ist
$$u = \sum_{j=1}^{m} \gamma(v, u_j) u_j$$
Die lineare Abbildung
$$\pi_u : V \to U, v \mapsto \sum_{j=1}^{m} \gamma(v, u_j) u_j$$
hießt die **Orthogonalprojektion** von V auf U.

Beweis 1. $U + U^\perp = V$, denn:
Sei $(u_1, \ldots, u_m)$ eine Orthogonalbasis von $(U, \gamma\mid_{n\times n}), v \in V$. Setze
$$v' := V - \sum_{j=1}^{m} \gamma(v, u_j) u_j$$
$$\implies \gamma\big(v', u_i\big) = \gamma(v, u_i) - \sum_{j=1}^{m} \gamma(v, u_j)\gamma(u_j, u_i) = \gamma(v, u_i) - \gamma(v, u_i) = 0 \forall i = 1, \ldots, m$$
$$\implies v' \in U^\perp$$
$$\implies v = \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \gamma(v, u_j) u_j}_{\in U} + \underbrace{v'}_{\in U^\perp}$$
$$\implies V = U + U^\perp$$
$U \cap U^\perp = \{0\}$, denn: $u \in U \cap U^\perp \implies \gamma(u, u) = 0 \implies u = 0$ (da γ Skalarprodukt)

2. aus 1., 2.

3. Sei $u \in U \implies \gamma(u, w) = 0 \forall w = U^\perp \implies u \in \left(U^\perp\right)^\perp$, das heißt $U \subseteq U^{\perp\perp}$. Wegen $\dim\left(U^\perp\right)^\perp = \dim V - \dim U^\perp = \dim V - (\dim V - \dim U) = \dim U$ foglt $U = U^{\perp\perp}$
□

Anmerkung Insbesondere gilt für alle $v \in V : v - \pi_U(v) \in U^\perp$

Beispiel 22.8
$(V,\gamma) = (\mathbb{R}^2, <\cdot,\cdot>), U = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) \implies U^\perp = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$, denn $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \in U^\perp$ wegen $<\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}>= 0$, und es eist $\dim U^\perp = 2 - \dim U = 2 - 1 = 1$. Jedes Element aus V lässt sich eindeutig schreiben als

$$v = \lambda \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

das heißt

$$\pi_u : v = \underbrace{\lambda \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\mu \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}_{\in U^\perp} \mapsto \lambda \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \gamma\left(v, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) 1; \vec{1}$$

Frage: Wie bestimmt man explizit eine Orthogonalbasis eines Euklidischen Raumes?

Algorithmus 22.9 (Gram-Schmidt-Verfahren) Eingabe: $(v_1, \dots, v_n)$ Basis von V.
Ausgabe: Orthogonalbasis $(w_1, \dots, w_n)$ von (V, γ)
Durchführung:

1. Setze
$$w_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|}$$
2. Setze für $k = 2, \dots, n$
$$\tilde{w}_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \gamma(v_k, w_i) w_i, \quad w_k := \frac{\tilde{w}_k}{\|\tilde{w}_k\|}$$
3. $(w_1, \dots, w_n)$ ist eine Orthogonalbasis von (V, γ)

Beweis Sei $U_k := \operatorname{Lin}((v_1, \dots, v_k))$ für $k = 1, \dots, n$. Wir zeigen per Induktion nach k, dass $(w_1, \dots, w_k)$ eine Orthogonalbasis von $(U_k, \gamma \mid_{U_k \times U_k})$ ist (Behauptung folgt dann aus $k = n$).
Induktionsanfang: $k = 1$ klar
Induktionsschritt: Sei $\pi_{k-1} := \pi_{U_{k-1}} : V \to V_{k-1}$ die orthogonale Projektion.

$$\implies \tilde{w}_k = v_k - \pi_{k-1}(v_k)$$

da $(w_1, \dots, w_{k-1})$ Orthogonalbasis von U_{k-1} nach Induktionsvorraussetzung. $\implies \tilde{w}_k \in U_{k-1}^\perp$.
Außerdem $\tilde{w}_k \neq 0$, da sonst $v_k = \pi_{k-1}(v_k) \in U_{k-1}$` zu $(v_1, \dots, v_k)$ Basis von U_k

$$\implies w_k = \frac{\tilde{w}_k}{\|\tilde{w}_k\|} \in U_{k-1}^\perp$$

und es ist

$$\gamma(w_k, w_i) = \begin{cases} 0 & i = 1, \dots, k-1 \\ 1 & i = k \end{cases}$$

$\implies (w_1, \dots, w_k)$ Orthogonalbasis von U_k $\square$

Beispiel 22.10
Wir betrachten $\left(\mathbb{R}^3, <\cdot,\cdot>\right), U = \operatorname{Lin}((v_1, v_2))$ mit $v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Gesucht ist eine Orthogonalbasis von U bezüglich $<\cdot,\cdot>$. Setze

$$w := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_2 = v_2 - < v_2, w_1 > w_1 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - < \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} < \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \left(\tfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \text{ ist eine Orthogonalbasis von } U.$$

Definition 22.11 $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. A heißt **positiv definit** (Notation: $A > 0$) $\overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ Die symmetrische Bilinearform

$$\Delta(A) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^T A y$$

ist positiv definit.

Bemerkung 22.12 $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Dass sind äquivalent:

1. $A > 0$
2. $\exists T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : A = T^T T$

Beweis 1. $\Longrightarrow$ 2. Sei $A > 0 \Longrightarrow (\mathbb{R}^n, \Delta(A))$ Euklidischer Raum. Sei $\mathcal{B}$ Orthogonalbasis von $(\mathbb{R}^n, \Delta(A))$ $T := T_{\mathcal{B}}^{(e_1,\ldots,e_n)}$

$$\Longrightarrow E_n = M_{\mathcal{B}}(\Delta(A)) = \underbrace{\left(T^{\mathcal{B}}_{(e_1,\ldots,e_n)}\right)^T}_{=(T^{-1})^T} \underbrace{M_{(e_1,\ldots,e_n)}(\Delta(A))}_{=A} \underbrace{T^{\mathcal{B}}_{(e_1,\ldots,e_n)}}_{=T^{-1}}$$

$$\Longrightarrow A = T^T T$$

2. Sei $A = T^T T$ für ein $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Für $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ ist

$$\Delta(A)(x, x) = x^t A w = x^t T^t T x = (Tx)^T T x = < Tx, Tx >> 0$$

□

Anmerkung 1., 2. sind äquivatent zu

3. Es existiert eine obere Dreiecksmatrix P mit Diagonaleinträgen, sodass $A = P^T P$ (siehe Übungen). Obiges P ist sogar eindeutig bestimmt, eine solche Zerlegung heißt Cholesky-Zerlegung.

Satz 22.13 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) $v, w \in V$. Dann gil:

$$|\gamma(v, w)| \leq \|v\|\|w\|$$

Gleichheit gilt hierbar genau dann, wenn (v, w) linear abhängig.

Beweis 1. Beweis der Ungleichung: Falls $w = 0$, dass fertig. Im Folgenden sei $w \neq 0$. Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist

$$0 \leq \gamma(\lambda v + \mu w, \lambda v + \mu w) = \lambda^2 \gamma(v, v) + \mu^2 \gamma(w, w) + 2\lambda\mu\gamma(v, w)$$

Setze $\lambda := \gamma(w, w) > 0$, dividiere durch λ

$$0 \leq \gamma(v, v)\gamma(w, w) + \mu^2 + 2\mu\gamma(v, w)$$

Setze $\mu := -\gamma(v, w)$

$$0 \leq \gamma(v, v)\gamma(w, w) + \gamma(v, w)^2 - 2\gamma(v, w)^2$$
$$\gamma(v, w)^2 \leq \gamma(v, v)\gamma(w, w)$$
$$|\gamma(v, w)| \leq \|v\|\|w\|$$

2. Gleichheitsaussage: Für $w = 0$: (v, w) linear abhängig und „=“ gilt. Ab jetzt also $w \neq 0$.
” $\Longleftarrow$ “ Sei (v, w) linear abhängig $\Longrightarrow \exists \lambda \in K : v = \kappa w$

$$\Longrightarrow |\gamma(v, w)|^2 = |\gamma(\lambda w, w)|^2 = \left|\lambda^2\right||\gamma(w, w)|^2 = |\gamma(w, w)||\gamma(\lambda w, \lambda w)| = \|w\|^2\|\lambda w\|^2$$

$$\Longrightarrow |\gamma(v, w)| = \|w\|\|\lambda w\| = \|w\|\|v\|.$$

” $\Longrightarrow$ “ Es gelte, sei also $|\gamma(v, w)| = \|v\|\|w\|$. Führe die Rechnung wie in 1. rückwärts durch: Mit $\lambda := \gamma(w, w), \mu = -\gamma(v, w)$ folgt dass

$$\gamma(\lambda v + \mu w, \lambda v + \mu w) = 0 \Longrightarrow \lambda v + \mu w = 0 \Longrightarrow (v, w) \text{ linear abhängig} \qquad \square$$

Bemerkung 22.14 (Eigenscaften der Norm) $v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2. $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Beweis 1. klar, da γ positiv definit

2. $\|\lambda v\|^2 = \gamma(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2\gamma(v,v) = \lambda^2\|v\| \implies \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$

3.

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 &= \gamma(v+w, v+w) = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\gamma(v,w) \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2|\gamma(v,w)| \\ &\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2 \\ \implies \|v+w\| &\leq \|v\| + \|w\| \end{aligned}$$

□

Bemerkung 22.15 $v, w \in V$. Dann gilt:

1. $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \iff \gamma(v,w) = 0$ \ Satz\ des\ Pythagroas
2. $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$ \ Parallelogrammgleichung

Beweis 1. $\|v+w\|^2 = \gamma(v+w, v+w) = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\gamma(v,w) \implies$ Behauptung

2. $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = \gamma(v+w, v+w) + \gamma(v-w, v-w) = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$ □

Anmerkung $V\mathbb{R}$ Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit den Eigenschaften 1. bis 3. aus 22.16 heißt eine Norm auf V, $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Man kann zeigen: Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, in dem die Parallelogrammgleichung gilt, dann ist durch

$$\gamma(v,w) := \frac{1}{2}\Big(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\Big)$$

ein Skalarprodukt auf V mit $\|v\| = \sqrt{\gamma(v,v)}$, das heißt in diesen Fällen ist (V, γ) ein euklidischer Vektorraum, dessen Norm mit die gegebenen übereinstimmt.

23 Die orthogonale Gruppe

Definition 23.1 $(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$ Euklidische Räume, $\varphi : V \to W$ lineare Abbildung. φ heißt **orthogonal** $\overset{\text{Def}}{\iff}$ φ ist ein Homomorphismus quadratischer Räume, das heißt

$$\gamma_W(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = \gamma_V(v_1, v_2) \forall v_1, v_2 \in V$$

Bemerkung 23.2 $(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$ Euklidische Räume, $\varphi : V \to W$ orthogonale Abbildung. Dann gilt:

1. $\|\varphi(v)\|_W = \|v\|_V \forall v \in V$
2. $v_1 \perp v_2 \iff \varphi(v_1) \perp \varphi(v_2) \forall v_1, v_2 \in V$
3. φ ist injektiv

Beweis 1. $\|\varphi(v)\|_W^2 = \gamma_W(\varphi(v), \varphi(v)) = \gamma_V(v,v) = \|v\|_V^2$

2. $v_1 \perp v_2 \iff \gamma_V(v_1, v_2) = 0 \iff \gamma_W(\varphi(v_1), \varphi(v_2)) = 0 \iff \varphi(v_1) \perp \varphi(v_2)$

3. Sei $v \in V$ mit $\varphi(v) = 0 \implies \|\varphi(v)\|_W = 0 \implies \|v\|_V = 0 \implies v = 0$ $\square$

Bemerkung 23.3 (V, γ) Euklidischer Raum, $n = \dim V, \mathcal{B}$ Orthogonalbasis von (V, γ). Dann ist das Koordinatensystem $\Phi_\mathcal{B} : (\mathbb{R}^n, < \cdot, \cdot >) \to (V, \gamma)$ ein orthogonaler Isomorphismus.

Beweis $\Phi_\mathcal{B}$ Isomorphismus: klar. $\Phi_\mathcal{B}$ orthogonal, denn: Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ dann ist

$$\gamma(\Phi_\mathcal{B}(e_i), \Phi_\mathcal{B}(e_j)) = \gamma(v_1, v_j) = \delta_{ij} =< e_i, e_j >$$ $\square$

Bemerkung 23.4 (V, γ) Euklidischer Raum, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ orthogonal. Dann gilt:

1. φ ist Isomorphismus

2. φ^{-1} ist orthogonal

3. $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von $\gamma \implies |\lambda| = 1$, das heißt $\lambda \in \{\pm 1\}$

Beweis 1. aus 23.2.3 folgt: φ injektiv $\implies \varphi$ Isomorphismus

2. $v_1, v_2 \in V \implies \gamma\big(\varphi^{-1}(v_1), \varphi^{-1}(v_2)\big) = \gamma\big(\varphi\big(\varphi^{-1}(v_1)\big), \varphi\big(\varphi^{-1}(v_2)\big)\big) = \gamma(v_1, v_2)$ $\implies \varphi^{-1}$ orthogonal

3. Sei $v \in V$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \implies \|v\| = \|\varphi(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\| \implies$ $|\lambda| = 1$ $\square$

Bemerkung 23.5 (V, γ) Euklidischer Raum, $n = \dim V, \mathcal{B}$ Orthogonalbasis von $V, \varphi \in \mathrm{End}(V), A = M_\mathcal{B}(\varphi)$. Dann sind äquivalent:

1. φ ist orthogonal

2. $A^T A = E_n$

Beweis Wir erhalten kommutierendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(V, \gamma) \arrow[d, "\varphi"'] & (V, \gamma) \arrow[l, "\Phi_\mathcal{B}"'] \arrow[d, "\varphi"'] \\
(\mathbb{R}^n, < \cdot, \cdot >) & (\mathbb{R}^n, < \cdot, \cdot >) \arrow[l, "\Phi_\mathcal{B}"']
\end{tikzcd}$$

Da $\Phi_{\mathcal{B}}$ orthogonaler Isomorphismus nach 23.3 folgt:

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ orthogonal } &\iff \tilde{A} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} = \varphi \circ \Phi_{\mathcal{B}} \text{ orthogonal} \\
&\iff \forall x, y \in \mathbb{R}^n :< Ax, Ay >=< x, y > \\
&\iff \forall x, y \in \mathbb{R}^n : (Ax)^T Ay = x^T y \\
&\iff \forall x, y \in \mathbb{R}^n :< Ax, Ay >= x^T A^T Ay = x^T y \\
&\iff \Delta\big(A^T A\big) = \Delta(E_n) \\
&\iff A^T A = E_n
\end{aligned}$$ □

Bemerkung+Definition 23.6 A heißt **orthogonal** $\overset{\text{Def}}{\iff} A^T A = E_n$

$$O(n) := \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid A \text{ ist orthogonal } \}$$

$O(n)$ ist bezüglich die Matrixmultiplikation eine Gruppe, die **orthogonale Gruppe** vom Rang n

Beweis Wohldefiniertheit von „·" (das heißt Abgeschlossenheit bezüglich „·"): $A, B \in O(n) \implies (AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T B = E_n \implies AB \in O(n)$.
Existenz des neutralen Elements: $E_n \in O(n)$
Assoziativität: klar
Existenz von Inversen: Sei $A \in A(n) \implies A^T A = E_n \implies A^{-1} = A^t \implies \big(A^{-1}\big)^T A^{-1} = \big(A^T\big)^T A^T = AA^T = AA^{-1} = E_n$ □

Anmerkung $A \in O(n) \implies \det(A) \in \{\pm 1\}$, denn $1 = \det(E_n) = \det\big(A^T A\big) = \det\big(A^T\big) \det(A) = \det(A)^2$

Bemerkung 23.7 $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$. Dann sind äquivalent:

1. $A \in O(n)$
2. $AA^T = E_n$
3. $A^T A = E_n$
4. Die Transponierten der Zeilen von A bilden eine Orthogonalbasis von $(\mathbb{R}^n, < \cdot, \cdot >)$
5. Die Spalten von A bilden eine Orthogonalbasis von $(\mathbb{R}^n, < \cdot, \cdot >)$
6. Die Abbildung $\tilde{A} : (\mathbb{R}^n, < \cdot, \cdot >) \to (\mathbb{R}^n, < \cdot, \cdot >)$ ist orthogonal

Beweis 1. $\iff$ 2. $\iff$ 3. $\iff$ klar

2. $\iff$ 4., 3. $\iff$ 5.

1. $\iff$ 6. aus 23.5 (setze $V = (\mathbb{R}^n, < \cdot, \cdot >), \mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$) □

Satz 23.8 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (nicht notwendig linear) abstandstreu, das heißt

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y\| \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

wobie $\|\cdot\|$ die Norm auf $(\mathbb{R}^n, < \cdot, \cdot >)$ bezeichne. Dann existieren eindeutig bestimmte $A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n$, sodass

$$\varphi(x) = Ax + b$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$

Bemerkung+Definition 23.9 $SO(n) := \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$ ist eine Untergruppe von $O(n)$ (das heißt $SO(n) \subseteq O(n)$ und ist eine Gruppe bezüglich der eingeschränkten Verknüpfung), die **spezielle orthogonale Gruppe** vom Rang n.

Beweis Wohldefiniertheit von „·“ (= Abgeschlossenheit bezüglich „·“)

$$A, B \in SO(n) \implies AB \in O(n) \wedge \det(AB) = \det(A)\det(B) = 1 \cdot 1 = 1$$

neutrales Element: $E_n \in SO(n)$
Assoziativität: klar
Existenz von Inversem: $A \in SO(n) \implies A^{-1} \in O(n), \det\big(A^{-1}\big) = \det(A)^{-1} = 1 \implies A^{-1} \in SO(n)$ □

Beispiel 23.10
$n = 1 : O(1) = \{\pm 1\}, SO(1) = \{0\}$

Bemerkung 23.11 $A \in O(2)$. Dann gilt:

1. $A \in SO(2) \iff \exists! \alpha \in [0, 2\pi]$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

In diesem Fall beschreibt A eine Drehung mit Zentrum 0 um den Winkel α. Außer im Fall $\alpha \in \{0, \pi\}$ besitzt A keine Eigenwerte. Falls $\alpha = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

einziger Eigenwert: 1. Falls $\alpha = \pi$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

einziger Eigenwert: -1.

2. $A \in O(2) \setminus SO(2) \iff \exists! \alpha \in [0, 2\pi]$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

   In diesem Fall beschreibt A eine Spiegelung an der Geraden $\mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}\right)$. A besitzt die Eigenwerte ± 1, und es existiert eine Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ von $\left(\mathbb{R}^2, < \cdot, \cdot >\right)$ mit

$$M_{\mathcal{B}}\left(\tilde{A}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beweis Sei $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O(2)$

$$\begin{aligned} &\implies 1 = \|e_1\|^2 = \|Ae_1\|^2 = a^2 + b^2 \\ &\implies 1 = \|e_2\|^2 = \|Ae_2\|^2 = c^2 + d^2 \end{aligned}$$

Außerdem: $e_1 \perp e_2 \implies Ae_1 \perp Ae_2$

$$\implies < \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} >= 0$$

$$\implies \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathrm{Lin}\left(\left(\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\right)\right)$$

das heißt es Existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

□