Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2016/17

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. D. Vogel
Dr. M. Witte

Blatt 11
Abgabetermin: Donnerstag, 19.01.2017, 9.30 Uhr

Aufgabe 1. *(Anwendung des Homomorphiesatzes)* Sei K ein Körper und $\alpha \in K$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\mathrm{ev}_\alpha \colon K[t] \to K$, $f \mapsto f(\alpha)$ ist K-linear und surjektiv.

(b) $I_\alpha = \{f \in K[t] \mid f(\alpha) = 0\}$ ist ein Untervektorraum von $K[t]$ und

$$\overline{\mathrm{ev}}_\alpha \colon K[t]/I_\alpha \to K, \qquad f + I_\alpha \mapsto f(\alpha)$$

ist ein wohldefinierter Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Aufgabe 2. *(Isomorphiesätze)* Sei K ein Körper, V ein Vektorraum und U_1, U_2 Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung

$$U_2/U_1 \cap U_2 \to (U_1 + U_2)/U_1, \qquad u_2 + U_1 \cap U_2 \mapsto u_2 + U_1$$

ist ein wohldefinierter Isomorphismus von K-Vektorräumen.

(b) Der Faktorraum $(U_1 + U_2)/U_1$ ist ein Untervektorraum von V/U_1 und die Abbildung

$$V/(U_1 + U_2) \to (V/U_1)/((U_1 + U_2)/U_1), \qquad v + (U_1 + U_2) \mapsto (v + U_1) + (U_1 + U_2)/U_1$$

ist ein wohldefinierter Isomorphismus von K-Vektorräumen. Dabei bezeichnet

$$(v + U_1) + (U_1 + U_2)/U_1$$

die Restklasse von $v + U_1 \in V/U_1$ modulo des Untervektorraums $(U_1 + U_2)/U_1$ von V/U_1.

Aufgabe 3. *(Strenge Zeilenstufenform)* Bestimmen Sie die strenge Zeilenstufenform der Matrix

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

mit Einträgen aus $\mathbb{F}_5$.

Aufgabe 4. *(Invertierbare Matrizen als Produkte von Elementarmatrizen)* Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass jede invertierbare $n \times n$-Matrix A mit Einträgen aus K sich als endliches Produkt von Elementarmatrizen der Form $E_{i,j}(1)$ und $D_k(\lambda)$ mit $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ und $\lambda \in K^\times$ (siehe Blatt 8, Aufgabe 3) schreiben lässt.

Zusatzaufgabe 5. *(Eindeutigkeit der strengen Zeilenstufenform)* Sei K ein Körper, k, n zwei natürliche Zahlen und A, B zwei $k \times n$-Matrizen mit Einträgen aus K. Seien $\mathrm{ZR}(A)$ und $\mathrm{ZR}(B)$ die Zeilenräume von A und B. Zeigen Sie:

(a) Seien A und B in strenger Zeilenstufenform. Dann gilt $\mathrm{ZR}(A) = \mathrm{ZR}(B)$ genau dann, wenn $A = B$. *Tipp:* Zeigen Sie im Fall $\mathrm{ZR}(A) = \mathrm{ZR}(B)$ zunächst, dass A und B dieselben Pivotspalten haben.

(b) Es gilt $\mathrm{ZR}(A) = \mathrm{ZR}(B)$ genau dann, wenn eine invertierbare Matrix $G \in \mathrm{GL}(k, K)$ mit $GA = B$ existiert.

(c) Die Menge $\mathrm{GL}(k, K)A = \{GA \mid G \in \mathrm{GL}(k, K)\}$ enthält genau eine Matrix in strenger Zeilenstufenform. Mit anderen Worten: Die strenge Zeilenstufenform von A ist eindeutig.

(d) Sei $k \leq n$ und $V \subseteq K^n$ ein Untervektorraum der Dimension k. Dann gibt es genau eine $k \times n$-Matrix X mit Einträgen aus K, so dass X strenge Zeilenstufenform hat und die Zeilen von X eine Basis von V bilden.