Theoretische Physik II (Hebecker)

Robin Heinemann

20. April 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Lagrange - Formalismus

1.1 Grundidee (1788, Joseph-Louis Lagrange)

Vorteile gegenüber Newton:

- Flexibelität
- Zwangskräfte
- Zusammenhang zwischen Symmetrie und Erhaltungsgrößen

Zentrales Objekt: Wirkungsfunktional S.
Abbildung S : Trajektorie $\mapsto$ reelle Zahl
(S definiiert mittls Lagrange-Funktion L)
Zentrale physikalische Aussage des Formalimus: „Wirkungsprinzip“ („Hamilton-Prinzip“)
Letztes besagt: Eine physikalische Bewegung verläuft so, dass das Wirkungsfunktional minimal wird.
$\rightarrow$ DGL („Euler-Lagrange-Gleichung“), im einfachen Fall $\equiv$ Newton Gleichung

1.2 Variationsrechnung: Der Funktionalbegriff

Funktion (mehrerer Variablen) y;

$$y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, y : \vec{x} \mapsto y(\vec{x})$$

Funktional: analg, mit $\mathbb{R}^n$ ersetzt durch eine Menge von Funktionen (Vektorraum $\mathbb{V}$)

$$F : \mathbb{V} \to \mathbb{R}, F : y \mapsto F[y]$$

Beispiel 1.1 $\mathbb{V}$ seinen differenziebare Funktionen auf $[0,1]$ mit $y(0) = y(1) = 0$
Diskretisierung:

$$x_1, \dots, x_n \to \{y(x_1), \dots, y(x_n)\}$$
$$\downarrow$$
$$\text{Vektor} \equiv \text{Funktion}$$

$\Rightarrow$ im diskreten Fall ist unser Funktional schlicht eine Funktion mit Vektor-Argument. (Eigentlicher Funktionalbegriff folgt im Limes $n \to \infty$).
Beispielfunktionale zu obigem $\mathbb{V}$.

- $F_1[y] = y(0.5)$
- $F_2[y] = y'(0.3)$
- $F_3[y] = y(0.1) + y(0.5) + y'(0.9)$
- $F_4[y] = \int_0^1 \mathrm{d}x \big(x \cdot y(x)^2 + y'(x)^2\big)$
- $F_5[y] = \int_0^1 \mathrm{d}x f(y(x), y'(x), x)$

F_5 hängt von Funktion f (von 3 Variablen) ab. Falls wir $f(a,b,c) = ca^2 + b^2$ wählen, folgt F_4 wählen, folgt F_4. Noch konkreter: wähle Beispielfunktion (ignoriere zur Einfachheit Randbedingung $y(1) = 0$)

$$y_0 : x \mapsto x^2; y_0(x) = x^2; y_0'(x) = 2x;$$
$$\Rightarrow F_1[y_0] = 0.25; F_2[y_0] = 0.6, F_3[y_0] = 0.01 + 0.25 + 1.8 = 2.06$$
$$F_4[y_0] = \int_0^1 \mathrm{d}x(x^5 + 4x^2) = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} = \frac{3}{2}$$

1.3 Weglänge als Funktional

Weg von $\vec{y}_a$ nach $\vec{y}_b$: $\vec{y} : \tau \mapsto \vec{y}(\tau), \tau \in [0,1]; \vec{y}(0) = \vec{y}_a, \vec{y}(1) = \vec{y}_b$
Weglänge:

$$F[\vec{y}] = \int_{\vec{y}_a}^{\vec{y}_b} |\mathrm{d}\vec{y}| = \int_0^1 \mathrm{d}\tau \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\vec{y}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2}$$

(Eigentlich haben wir sogar ein Funktional einer vektorwertigen Funktion beziehungsweise ein Funktional mit 3 Argumenten: $F[y] = F[y^1, y^2, y^3]$)
Etwas interessater: Weglänge im Gebirge:
Sei $\vec{x}(\tau) = \{x^1(\tau), x^2(\tau)\}$ die Projektion des Weges auf Horizontale. Zu jedem solchen Weg

gehört die „echte" Weglänge im Gebirge. Beachte: Höhenfunktion $z : \vec{x} \mapsto z(\vec{x})$
$\Rightarrow$ 3-d Weg:

$$\begin{aligned}\vec{y}(\tau) &= \{y^1(\tau), y^2(\tau), y^3(\tau)\} \\ &\equiv \{x^1(\tau), x^2(\tau), z(\vec{x}(\tau))\}\end{aligned}$$

$$F_{Geb.}[x] = F[\vec{y}[\vec{x}]] = \int \mathrm{d}t \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x^1(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x^2(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z(x^1(\tau), x^2(\tau))}{\mathrm{d}\tau}\right)}$$

1.4 Variationsrechnung: Extremalisieung von Funktionalen

Funktionen: $y : x \mapsto y(x)$; wir wissen y hat Extremum bei $x_0 \Rightarrow y'(x_0) = 0$
Funktionale der Form: $F[y] = \int_0^1 \mathrm{d}x f(y, y', x); y : [0,1] \to \mathbb{R}; y(0) = y_a; y(1) = y_b$
Annahme: y_0 extremalisiert F. Sei weiterhin δy eine beliebige 2-fach differenziebare Funktion mit $\delta y(0) = \delta y(1) = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{y_\alpha \equiv y_0 + \alpha \cdot \delta y}_{\text{Ist eine Funktion aus unserem Wertevorrat von } F} \quad (\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon))$$

$\Rightarrow$ Betrachte Abbildung $(-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}, \alpha \mapsto F[y_\alpha]$. Per unserer Annahme hat diese Abbildung Extremum bei $\alpha = 0$. Also gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} F[y_\alpha] = 0\Big|_{\alpha=0}$$

Taylor.entwickle um $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned}F[y_\alpha] &= \int_0^1 \mathrm{d}x f(y_0 + \alpha\delta y, y_0' + \alpha\delta y', x) \\ &= F[y_0] + \int_0^1 \mathrm{d}x \left(\frac{\partial f}{\partial y}(y_0, y_0', x) \cdot \alpha\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}(y_0, y_0', x) \cdot \alpha\delta y'\right) + O(\alpha^2)\end{aligned}$$

Term linear in α muss verschwinden:

$$0 = \int_0^1 \mathrm{d}x \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y)\right)$$

$\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y = 0$ bei $0, 1$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right)\delta y = 0$$

für beliebige $\delta y \Rightarrow$ der Koeffizient von δy im Integral muss verschwinden

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial t}{\partial y'}\right) \qquad \text{(Eulersche Differentialgleichung)}$$

Falls y_0 das Funktional F extremalisiert, so gilt die obige Gleichung für $y_0 \forall x \in [0,1]$

Beispiel 1.2 $f(y, y', x) = y^2 + y'^2$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 2y' = 2y''$$
$$\Rightarrow y_0'' - y_0 = 0$$

Beachte: y und y' sind hier unabhängig, das heißt es spielt für die Herleitung der Eulerschen Differentialgleichung keine Rolle, dass y' die Ableitung von y ist.

1.5 Das Hamiltonsche Prinzip (Prinpip der kleinsten Wirkung)

Die Lage einer sehr großen Klasse von Systemen beschreben durch verallgemeinerte Koordinaten $(q_1, \ldots, q_s)$, s : Zahl der Freiheitsgrade.

Beispiel 1.3

- N Massenpunkte: $s = 3N, (q_1, \ldots, q_{3N}) = (x_1^1, x_1^2, x_1^3, \ldots, x_N^1, x_N^2, x_N^3)$
- 1 Massenpunkt in Kugelkoordinaten: $s = 3$, $(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \varphi)$
- eine dünne Stange: $s = 5$. Schwerpunktskoordinaten x_s^1, x_s^2, x_s^3. 2 Winkel zur Ausrichtung θ, φ
- Rad auf einer Welle: $s = 1, q_1 = \varphi$
- Perle auf einem Draht: $s = 1, q_1 = s$ (Bogenlänge)

Hamiltonsches Prinzip:
Für jedes (in einer sehr großen Klasse) mechanische System s Freiheitsgraden existiert die Lagrange-Funktion $L(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, t)$ (kurz $L(q, \dot{q}, t)$), für die gilt:
Die physikalische Beweging aus einer Lage $q(t_1) = q^{(1)}$ in eine Lage $q(t_2) = q^{(2)}$ verläuft so, dass das Wirkungsfunktional

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t L(q, \dot{q}, t)$$

extremal wird.

Anmerkung 1.4

- für kliene Bahnabschnitte: Minimalität
- DGL. aus Stationalität
- Wirkung: Dimensionsgründe $[S] =$ Zeit $\cdot$ Wirkung
- Bedeutung des Wirkungsprinzip kann man kaum überschätzen. [spezielle + allgemeine Relativitätstheorie, Feldtheorie (Elektro-Dynamik), Quantenfeldtheorie (Teilchenphysik, kondensierte Materie), Quantengravitation]

für $s = 1$ folgt aus dem Hamiltonschen Prinzip:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

(Euler-Lagrange-Gleichung, oder Lagrange-Gleichung der 2. Art)
für $s \geq 1$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = 1, \dots, s$$

1.6 Form der Lagrange-Funktion und erste Anwendungen

Fundamentaler Fakt:

$$L = T - V$$

- T: kinetische Energie
- V: potentielle Energie

Beispiel 1.5 (Massenpunkt im Potenzial)

$$\begin{aligned}
L\left(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t\right) &= \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial}{\partial x^i}L &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}^i) - \left(-\frac{\partial V}{\partial x_i}\right) &= 0 \\
m\ddot{x}^i - F^i &= 0 \\
m\ddot{\vec{x}} - \vec{F} &= 0
\end{aligned}$$

Beispiel 1.6 (System wechselwirkender Massenpunkte)

$$\begin{aligned}
T &= \sum_a T_a = \sum_a \frac{m_a}{2}\dot{\vec{x}}_a^{\,2} \\
V &= \sum_{\substack{a,b \\ a<b}} V_{ab}(|x_a - x_b|)
\end{aligned}$$

Lagrange Gleichung für x_a^i:

$$\begin{aligned}
m_a\ddot{x}_a^i - \frac{\partial}{\partial x_a^i}\left(\sum_b V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)\right) &= 0 \\
m_a\ddot{\vec{x}}_a - \vec{\nabla}_a \sum_b V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|) &= 0
\end{aligned}$$

Beispiel 1.7 (Perle auf Draht) Draht: beschrieben durch $\vec{x}(s)$ (s: Bogenlänge)

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}v^2 - V(\vec{x}(s)) \\ v &= \left|\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s}\right|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \\ L &= \frac{m}{2}\dot{s}^2 - V(\vec{x}(s)) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} &= 0 \\ m\ddot{s} - \sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x^i}}_{-\frac{\partial V}{\partial x^i}} \frac{\partial x^i}{\partial s} &= 0 \\ m\ddot{s} - \vec{F} \cdot \frac{\vec{x}}{s} &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel 1.8 (Mathematisches Pendel im Fahrstuhl) Beschleunigung des Fahrstuhls: $v_y = a \cdot t$

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}\vec{v}^2 - V \\ \vec{v} &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(l\sin\varphi), at - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(l\cos\varphi)\right) \\ &= (l\cos(\varphi)\dot{\varphi}, at + l\sin\varphi\dot{\varphi}) \\ V &= mg\left(\frac{a}{2}t^2 - l\cos\varphi\right) \\ 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{m}{2}(l^2\cos^2\varphi 2\dot{\varphi} + 2atl\sin\varphi + l^2\sin^2\varphi 2\dot{\varphi})\Big) - \\ \Big(\frac{m}{2}(l^2\dot{\varphi}^2 2\cos\varphi(-\sin\varphi) + 2atl\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2 2\sin\varphi\cos\varphi) - mgl\sin\varphi\Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = \big(2l^2\cos\varphi(-\sin\varphi)\dot{\varphi}^2 + l^2\cos^2\varphi\ddot{\varphi} + al\sin\varphi + atl\cos\varphi\dot{\varphi} + l^2 2\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + l^2\sin^2\varphi\ddot{\varphi}\big) \\ - tal\dot{\varphi}\cos\varphi + gl\sin\varphi \end{aligned}$$

$$0 = l^2\ddot{\varphi} + l\sin\varphi(a+g)$$