

# Theoretische Physik II (Hebecker)

Robin Heinemann

5. Mai 2017

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Lagrange - Formalismus</b>	<b>2</b>
1.1	Grundidee (1788, Joseph-Louis Lagrange) . . . . .	2
1.2	Variationsrechnung: Der Funktionalbegriff . . . . .	2
1.3	Weglänge als Funktional . . . . .	3
1.4	Variationsrechnung: Extremalisierung von Funktionalen . . . . .	3
1.5	Das Hamiltonsche Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung) . . . . .	4
1.6	Form der Lagrange-Funktion und erste Anwendungen . . . . .	5
1.7	Vereinfachte Herleitung der Lagrange-Gleichungen . . . . .	7
1.8	Kommentare . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Symmetrien und Erhaltungssätze</b>	<b>8</b>
2.1	Symmetriemotivation der Wirkung . . . . .	8
2.1.1	Freier Massenpunkt . . . . .	8
2.1.2	Mehrere Massenpunkte . . . . .	9
2.2	Homogene Funktionen und Satz von Euler . . . . .	9
2.3	Energieerhaltung . . . . .	10
2.4	Erhaltung von verallgemeinerten Impulsen . . . . .	11
2.5	Noether-Theorem . . . . .	12
2.6	Mechanische Ähnlichkeit . . . . .	14
2.7	Virialsatz . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Trägheitstensor</b>	<b>15</b>
3.1	Trägheitsmoment und Satz von Steiner . . . . .	15
3.2	Trägheitstensor . . . . .	17
3.3	Hauptträgheitsachsen . . . . .	18
3.4	Trägheitsellipsoid . . . . .	19

# 1 Lagrange - Formalismus

## 1.1 Grundidee (1788, Joseph-Louis Lagrange)

Vorteile gegenüber Newton:

- Flexibilität
- Zwangskräfte
- Zusammenhang zwischen Symmetrie und Erhaltungsgrößen

Zentrales Objekt: Wirkungsfunktional  $S$ .

Abbildung  $S : \text{Trajektorie} \mapsto \text{reelle Zahl}$

( $S$  definiert mittels Lagrange-Funktion  $L$ )

Zentrale physikalische Aussage des Formalismus: „Wirkungsprinzip“ („Hamilton-Prinzip“)

Letztes besagt: Eine physikalische Bewegung verläuft so, dass das Wirkungsfunktional minimal wird.

→ DGL („Euler-Lagrange-Gleichung“), im einfachen Fall  $\equiv$  Newton Gleichung

## 1.2 Variationsrechnung: Der Funktionalbegriff

Funktion (mehrerer Variablen)  $y$ ;

$$y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, y : \vec{x} \mapsto y(\vec{x})$$

Funktional: analog, mit  $\mathbb{R}^n$  ersetzt durch eine Menge von Funktionen (Vektorraum  $\mathbb{V}$ )

$$F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}, F : y \mapsto F[y]$$

**Beispiel 1.1**  $\mathbb{V}$  seinen differenzierbare Funktionen auf  $[0, 1]$  mit  $y(0) = y(1) = 0$

Diskretisierung:

$$\begin{aligned} x_1, \dots, x_n &\rightarrow \{y(x_1), \dots, y(x_n)\} \\ &\downarrow \\ &\text{Vektor} \equiv \text{Funktion} \end{aligned}$$

$\implies$  im diskreten Fall ist unser Funktional schlicht eine Funktion mit Vektor-Argument. (Eigentlicher Funktionalbegriff folgt im Limes  $n \rightarrow \infty$ ).

Beispielfunktionale zu obigem  $\mathbb{V}$ .

- $F_1[y] = y(0.5)$
- $F_2[y] = y'(0.3)$
- $F_3[y] = y(0.1) + y(0.5) + y'(0.9)$
- $F_4[y] = \int_0^1 dx \left( x \cdot y(x)^2 + y'(x)^2 \right)$

$$\bullet F_5[y] = \int_0^1 dx f(y(x), y'(x), x)$$

$F_5$  hängt von Funktion  $f$  (von 3 Variablen) ab. Falls wir  $f(a, b, c) = ca^2 + b^2$  wählen, folgt  $F_4$  wählen. Noch konkreter: wähle Beispielfunktion (ignoreiere zur Einfachheit Randbedingung  $y(1) = 0$ )

$$\begin{aligned} y_0 : x &\mapsto x^2; y_0(x) = x^2; y'_0(x) = 2x; \\ \implies F_1[y_0] &= 0.25; F_2[y_0] = 0.6, F_3[y_0] = 0.01 + 0.25 + 1.8 = 2.06 \\ F_4[y_0] &= \int_0^1 dx (x^5 + 4x^2) = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

### 1.3 Weglänge als Funktional

Weg von  $\vec{y}_a$  nach  $\vec{y}_b$ :  $\vec{y} : \tau \mapsto \vec{y}(\tau), \tau \in [0, 1]; \vec{y}(0) = \vec{y}_a, \vec{y}(1) = \vec{y}_b$   
Weglänge:

$$F[\vec{y}] = \int_{\vec{y}_a}^{\vec{y}_b} |d\vec{y}| = \int_0^1 d\tau \sqrt{\left(\frac{d\vec{y}(\tau)}{d\tau}\right)^2}$$

(Eigentlich haben wir sogar ein Funktional einer vektorwertigen Funktion beziehungsweise ein Funktional mit 3 Argumenten:  $F[y] = F[y^1, y^2, y^3]$ )

Etwas interessanter: Weglänge im Gebirge:

Sei  $\vec{x}(\tau) = \{x^1(\tau), x^2(\tau)\}$  die Projektion des Weges auf Horizontale. Zu jedem solchen Weg gehört die „echte“ Weglänge im Gebirge. Beachte: Höhenfunktion  $z : \vec{x} \mapsto z(\vec{x})$

$\implies$  3-d Weg:

$$\begin{aligned} \vec{y}(\tau) &= \{y^1(\tau), y^2(\tau), y^3(\tau)\} \\ &\equiv \{x^1(\tau), x^2(\tau), z(\vec{x}(\tau))\} \\ F_{Geb.}[x] &= F[\vec{y}[\vec{x}]] = \int dt \sqrt{\left(\frac{dx^1(\tau)}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx^2(\tau)}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz(x^1(\tau), x^2(\tau))}{d\tau}\right)^2} \end{aligned}$$

### 1.4 Variationsrechnung: Extremalisierung von Funktionalen

Funktionen:  $y : x \mapsto y(x)$ ; wir wissen  $y$  hat Extremum bei  $x_0 \implies y'(x_0) = 0$

Funktionale der Form:  $F[y] = \int_0^1 dx f(y, y', x); y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; y(0) = y_a; y(1) = y_b$

Annahme:  $y_0$  extremalisiert  $F$ . Sei weiterhin  $\delta y$  eine beliebige 2-fach differenzierbare Funktion mit  $\delta y(0) = \delta y(1) = 0$

$$\implies \underbrace{y_\alpha \equiv y_0 + \alpha \cdot \delta y}_{\text{Ist eine Funktion aus unserem Wertevorrat von } F} \quad (\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon))$$

$\implies$  Betrachte Abbildung  $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \alpha \mapsto F[y_\alpha]$ . Per unserer Annahme hat diese Abbildung Extremum bei  $\alpha = 0$ . Also gilt

$$\frac{d}{d\alpha} F[y_\alpha] = 0 \Big|_{\alpha=0}$$

Taylor. entwickle um  $\alpha = 0$ :

$$\begin{aligned} F[y_\alpha] &= \int_0^1 dx f(y_0 + \alpha \delta y, y'_0 + \alpha \delta y', x) \\ &= F[y_0] + \int_0^1 dx \left( \frac{\partial f}{\partial y}(y_0, y'_0, x) \cdot \alpha \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}(y_0, y'_0, x) \cdot \alpha \delta y' \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned}$$

Term linear in  $\alpha$  muss verschwinden:

$$0 = \int_0^1 dx \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx}(\delta y) \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y = 0 \text{ bei } 0, 1$$

$$= \int_0^1 dx \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) \delta y = 0$$

für beliebige  $\delta y \implies$  der Koeffizient von  $\delta y$  im Integral muss verschwinden

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \quad (\text{Eulersche Differentialgleichung})$$

Falls  $y_0$  das Funktional  $F$  extremalisiert, so gilt die obige Gleichung für  $y_0 \forall x \in [0, 1]$

**Beispiel 1.2**  $f(y, y', x) = y^2 + y'^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \right) &= \frac{d}{dx} 2y' = 2y'' \\ \implies y'' - y &= 0 \end{aligned}$$

Beachte:  $y$  und  $y'$  sind hier unabhängig, das heißt es spielt für die Herleitung der Eulerschen Differentialgleichung keine Rolle, dass  $y'$  die Ableitung von  $y$  ist.

## 1.5 Das Hamiltonsche Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung)

Die Lage einer sehr großen Klasse von Systemen beschreiben durch verallgemeinerte Koordinaten  $(q_1, \dots, q_s)$ ,  $s$ : Zahl der Freiheitsgrade.

**Beispiel 1.3** •  $N$  Massenpunkte:  $s = 3N$ ,  $(q_1, \dots, q_{3N}) = (x_1^1, x_1^2, x_1^3, \dots, x_N^1, x_N^2, x_N^3)$

- 1 Massenpunkt in Kugelkoordinaten:  $s = 3$ ,  $(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \varphi)$
- eine dünne Stange:  $s = 5$ . Schwerpunktskoordinaten  $x_s^1, x_s^2, x_s^3$ . 2 Winkel zur Ausrichtung  $\theta, \varphi$
- Rad auf einer Welle:  $s = 1$ ,  $q_1 = \varphi$

- Perle auf einem Draht:  $s = 1$ ,  $q_1 = s$  (Bogenlänge)

### Hamiltonsches Prinzip:

Für jedes (in einer sehr großen Klasse) mechanische System  $s$  Freiheitsgraden existiert die Lagrange-Funktion  $L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$  (kurz  $L(q, \dot{q}, t)$ ), für die gilt:

Die physikalische Bewegung aus einer Lage  $q(t_1) = q^{(1)}$  in eine Lage  $q(t_2) = q^{(2)}$  verläuft so, dass das Wirkungsfunktional

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t)$$

extremal wird.

### Anmerkung 1.4 • für kleine Bahnabschnitte: Minimalität

- DGL. aus Stationalität
- Wirkung: Dimensionsgründe  $[S] = \text{Zeit} \cdot \text{Wirkung}$
- Bedeutung des Wirkungsprinzip kann man kaum überschätzen. [spezielle + allgemeine Relativitätstheorie, Feldtheorie (Elektro-Dynamik), Quantenfeldtheorie (Teilchenphysik, kondensierte Materie), Quantengravitation]

für  $s = 1$  folgt aus dem Hamiltonschen Prinzip:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

(Euler-Lagrange-Gleichung, oder Lagrange-Gleichung der 2. Art)

für  $s \geq 1$ :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = 1, \dots, s$$

## 1.6 Form der Lagrange-Funktion und erste Anwendungen

Fundamentaler Fakt:

$$L = T - V$$

- $T$ : kinetische Energie
- $V$ : potentielle Energie

### Beispiel 1.5 (Massenpunkt im Potenzial)

$$\begin{aligned} L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) &= \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} &= 0 \\ \frac{d}{dt} (m \dot{x}^i) - \left( -\frac{\partial V}{\partial x^i} \right) &= 0 \\ m \ddot{x}^i - F^i &= 0 \\ m \ddot{\vec{x}} - \vec{F} &= 0 \end{aligned}$$

**Beispiel 1.6 (System wechselwirkender Massenpunkte)**

$$T = \sum_a T_a = \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\vec{x}}_a^2$$

$$V = \sum_{\substack{a,b \\ a < b}} V_{ab}(|x_a - x_b|)$$

Lagrange Gleichung für  $x_a^i$ :

$$m_a \ddot{x}_a^i - \frac{\partial}{\partial x_a^i} \left( \sum_b V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|) \right) = 0$$

$$m_a \ddot{\vec{x}}_a - \vec{\nabla}_a \sum_b V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|) = 0$$

**Beispiel 1.7 (Perle auf Draht)** Draht: beschrieben durch  $\vec{x}(s)$  ( $s$ : Bogenlänge)

$$L = \frac{m}{2} v^2 - V(\vec{x}(s))$$

$$v = \left| \frac{d\vec{x}}{ds} \right| \frac{ds}{dt}$$

$$L = \frac{m}{2} \dot{s}^2 - V(\vec{x}(s))$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} = 0$$

$$m\ddot{s} - \sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x^i}}_{-\frac{\partial V}{\partial x^i}} \frac{\partial x^i}{\partial s} = 0$$

$$m\ddot{s} - \vec{F} \cdot \frac{\vec{x}}{s} = 0$$

**Beispiel 1.8 (Mathematisches Pendel im Fahrstuhl)** Beschleunigung des Fahrstuhls:  $v_y = a \cdot t$ 

$$L = \frac{m}{2} \vec{v}^2 - V$$

$$\vec{v} = \left( \frac{d}{dt}(l \sin \varphi), at - \frac{d}{dt}(l \cos \varphi) \right)$$

$$= (l \cos(\varphi) \dot{\varphi}, at + l \sin \varphi \dot{\varphi})$$

$$V = mg \left( \frac{a}{2} t^2 - l \cos \varphi \right)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} (l^2 \cos^2 \varphi 2\dot{\varphi} + 2atl \sin \varphi + l^2 \sin^2 \varphi 2\dot{\varphi}) \right) -$$

$$\left( \frac{m}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 2 \cos \varphi (-\sin \varphi) + 2atl \dot{\varphi} \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 2 \sin \varphi \cos \varphi) - mgl \sin \varphi \right)$$

$$0 = (2l^2 \cos \varphi (-\sin \varphi) \dot{\varphi}^2 + l^2 \cos^2 \varphi \ddot{\varphi} + al \sin \varphi + atl \cos \varphi \dot{\varphi} + l^2 2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + l^2 \sin^2 \varphi \ddot{\varphi})$$

$$- tal \dot{\varphi} \cos \varphi + gl \sin \varphi$$

$$0 = l^2 \ddot{\varphi} + l \sin \varphi (a + g)$$

## 1.7 Vereinfachte Herleitung der Lagrange-Gleichungen

$q(t)$  Trajektorie, Variation der Trajektorie:  $\delta q(t)$

- neue Trajektorie:  $q(t) + \delta q(t)$ .
- neue Wirkung  $S + \delta S$  Anders gesagt:  $\delta S \equiv S[q + \delta q] - S[q]$ .

Extremalität:

$$0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L(q, \dot{q}, t)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\delta q) \right]$$

Partielle Integration, nutze  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right)$$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q$$

$\delta q$  beliebig  $\implies$  Term muss verschwinden

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \checkmark$$

## 1.8 Kommentare

**Argumente von  $L$ :**  $\ddot{q}$ ,  $\ddot{\ddot{q}}$ , etc. dürfen nicht in  $L$  vorkommen, weil sonst  $\ddot{\ddot{q}}$ ,  $\ddot{\ddot{\ddot{q}}}$ , etc. in den Bewegungsgleichungen vorkommen würden. Dann reichen  $\vec{x}(t_0) \wedge \vec{v}(t_0)$  nicht mehr zur Lösung des Anfangswertproblems.

**Totale Zeitableitungen:**

Seien  $L, L'$  zwei Lagrangefunktionen mit

$$\begin{aligned} L' &= L + \frac{d}{dt}f(q, t) \\ \implies S' &= S + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt}f(q, t) = S + \underbrace{(f(q(t_2), t_2) - f(q(t_1), t_1))}_{\text{variiert nicht}} \\ \implies \delta S' &= \delta S \end{aligned}$$

$\implies L'$  physikalisch äquivalent zu  $L$  ( $L$  ist nur bis auf totale Zeitableitungen definiert.)

**Bedeutung von  $S$  in der QM:**

In der Quantenmechanik ist die Wahrscheinlichkeit  $w$  für den Übergang von  $(q^{(1)}, t_1)$  zu  $(q^{(2)}, t_2)$  gegeben durch

$$w \sim |A|^2$$

,  $A \in \mathbb{C}$  ist „Amplitude“, mit

$$A \sim \int Dq e^{\frac{iS[q]}{\hbar}}$$

$\int Dq$  - Summe über alle mögliche Trajektorien („Wege“, „Pfade“).

Im Limes  $\hbar \rightarrow 0$  dominiert klassischer Weg. Grund:  $S$  ist an dieser Stelle stationär. Beiträge von „ganz anderen“ Wegen heben sich wegen schneller Oszillation von  $\exp[iS/\hbar]$  weg.

## 2 Symmetrien und Erhaltungssätze

Zentrales Ziel: **Noether Theorem** (Emmy Noether - 1918)

„Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems gehört eine Erhaltungsgröße.“

Idealfall: Symmetrien  $\implies$  Form der Wirkung. Wirkung hat Symmetrie  $\implies$  Erhaltungsgrößen.

### 2.1 Symmetriemotivation der Wirkung

#### 2.1.1 Freier Massenpunkt

Homogenität von Raum und Zeit  $\implies L(\vec{x}, \vec{v}, t) = L(\vec{v})$ .

Isotropie des Raumes  $\implies L = L(\vec{v}^2)$ .

Betrachte (kleine) Galilei-Boosts:  $\vec{v} \rightarrow \vec{v}' = \vec{v} + \vec{\varepsilon}$ .

$$L(\vec{v}^2) \rightarrow L(\vec{v}'^2) = L(\vec{v}^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon}^2)$$

Taylorentwicklung:

$$= L(\vec{v}^2) + \frac{\partial L(\vec{v}^2)}{\partial(\vec{v}^2)}(2\vec{v} \cdot \vec{\varepsilon}) + \mathcal{O}(\vec{\varepsilon}^2)$$

Falls nun  $(\partial L / \partial \vec{v}^2) = \text{const.}$ , so gilt

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2}(2\vec{v} \cdot \vec{\varepsilon}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2}(2\vec{x} \cdot \vec{\varepsilon}) \right)$$

$\implies$  wir fordern, dass  $\partial L / \partial \vec{v}^2$  eine Konstante ist und nennen diese  $m/2$ .  $\implies L = \frac{m}{2} \vec{v}^2$



### 2.1.2 Mehrere Massenpunkte

Für unabhängige Systeme können wir die Lagrangefunktionen schlicht addieren:

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) = L_1(q_1, \dot{q}_1, t) + L_2(q_2, \dot{q}_2, t)$$

Dazu rechnen wir nach, dass die Anwendung der Differentialoperatoren

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2)$$

auf  $L$  und Nullsetzen äquivalent ist zur Anwendung des Operators „1“ auf  $L_1$  und „2“ auf  $L_2$ . Dies gibt aber gerade die Lagrangefunktionen und es ist somit egal ob ich  $L_1 + L_2$  oder  $L_1$  und  $L_2$  getrennt als Lagrange-Funktionen betrachte

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial}{\partial q_1} \right) L = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial}{\partial q_1} \right) L_1 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L_1}{\partial q_1} \stackrel{!}{=} 0$$

Also Mehrere Massenpunkte:

$$L = \sum_a \frac{m_a}{2} \vec{v}_a^2$$

$\Rightarrow L = T$  mit  $T$  = kinetische Energie. Hinzunahme von Wechselwirkungen der Form

$$V = \sum_{a < b}^{V_{ab}} (|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)$$

respektiert Galilei-Invarianz. Also Vorschlag:  $L = T - V$  wie oben eingeführt. Aber:  $T, V$  sind im Moment nur Namen.

## 2.2 Homogene Funktionen und Satz von Euler

Eine Funktion  $f$  von  $n$  Variablen heißt homogen von Grad  $k$  falls  $f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, \dots, x_n)$ .

**Beispiel 2.1**  $f(x) = x^p$  ist homogen von Grad  $p$ .

**Beispiel 2.2**  $f(x, y, z) = \frac{x}{yf} + \frac{1}{z} \cos\left(\frac{x}{z}\right)$  ist homogen von Grad  $-1$ .

**Beispiel 2.3** ("Unser Beispiel")

$$T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2} f_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \text{ Summe!}$$

homogen **in den**  $\dot{q}_i$  vom Grad 2.

**Satz 2.4 (Satz von Euler)**  $f(x_1, \dots, x_n)$  homogen von Grad  $k$

$$\Rightarrow \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = k f$$

Begründung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \alpha^k f(x_1, \dots, x_n) \right) \\ \Rightarrow \sum_i \frac{\partial f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)}{\partial (\alpha x_i)} \frac{\partial \alpha x_i}{\partial \alpha} &= k \alpha^{k-1} f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Setze  $\alpha = 1$

$$\Rightarrow \sum_i \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} x_i = k f(x_1, \dots, x_n)$$

### 2.3 Energieerhaltung

Homogenität von  $t$  „  $\Rightarrow L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q})$

Wir betrachten:

$$\frac{d}{dt} L = \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \quad (\text{Kettenregel})$$

Euler-Lagrange-Gleichung ( $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ )

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \dot{q}_i$$

Produktregel

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i \right) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right)}_{=: E} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} E &= 0 \end{aligned}$$

#### Beispiel 2.5

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L &= m \dot{x} - \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V \right) \\ &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V \end{aligned}$$

Um dies allgemeiner zu zeigen: Satz von Euler. Wir nehmen an, dass  $L$  folgende Form hat:

$$L = T - V = \frac{1}{2} f_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q)$$

Begründung: Diese Form ergibt sich typischerweise, wenn man

$$\sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\vec{x}}_a^2 - V(\vec{x})$$

in verallgemeinerte Koordinaten umschreibt.

Mit dieser Annahme folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \frac{1}{2} f_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \right) \dot{q}_i \\ &= \frac{1}{2} f_{jk} \delta_{ij} \dot{q}_k \dot{q}_i + \frac{1}{2} f_{jk} \dot{q}_j \delta_{ik} \dot{q}_i \\ &= f_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = 2T \end{aligned}$$

Leichter mit Satz von Euler

$$E \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - (T - V) = T + V \quad \checkmark$$

## 2.4 Erhaltung von verallgemeinerten Impulsen

In einem durch  $q_1, \dots, q_s$  parametrisierten System heißen

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

„verallgemeinerte Impulse“

Bekannter Fall:

$$L = \sum_{i=1}^3 \frac{m}{2} \dot{x}_i^2$$

mit

$$p_i = m \dot{x}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$$

Eine Koordinate heißt „zyklisch“, falls die **nicht** explizit in  $L$  vorkommt (Ableitung darf vorkommen).

### Beispiel 2.6

$$L = L(q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$$

In dieser Situation ist die Transformation  $q_1 \rightarrow q'_1 = q_1 + \varepsilon$  eine Symmetrie.

Sei  $q_1$  zyklisch. Es gilt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \quad (\text{Euler-Lagrange-Gleichung})$$

$\partial L / \partial q_1 = 0$  per Annahme

$$\begin{aligned} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(p_1) &= 0 \end{aligned}$$

$\implies$  „Die verallgemeinerten Impulse zyklischer Koordinaten sind erhalten.“

**Beispiel 2.7** Massenpunkt in Potential, dass nicht von  $x_1$  abhängt. Noch konkreter: schräger Wurf:

$$V(x_1, x_2, x_3) = mgx_3$$

$\implies x_1, x_2$  zyklisch.

**Beispiel 2.8 (Massenpunkt in Ebene mit Zentralpotential)**

$$L = \frac{m}{2}(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2) - V(q)$$

$\varphi$  zyklisch

$\implies \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$ : Betrag des Drehimpulses. (Dieses Beispiel erklärt den Namen „zyklisch“ im Sinne von periodisch)

## 2.5 Noether-Theorem

**Definition 2.9 (kontinuierliche Transformation)**

$$\begin{aligned} q(t) \rightarrow q'(t) &= q(t) + \delta q(t) \\ &= q(t) + \varepsilon \chi(t) \end{aligned}$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}$ , sodass  $\varepsilon \rightarrow 0$  möglich ist.

**Definition 2.10 (kontinuierliche Transformation)** Damit diese Transformation eine Symmetrie ist, fordern wir **Invarianz der Bewegungsgleichungen**, also

$$\delta L \equiv L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}; t) - L(q, \dot{q}, t) = \varepsilon \frac{d}{dt} f$$

Wir betrachten

$$\varepsilon \frac{d}{dt} f = \delta L = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$$

mit Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\delta) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) \\
 \implies 0 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q - \varepsilon f \right) \\
 &= \varepsilon \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \chi - f \right)}_{\text{Erhaltungsgröße}} \quad (\text{Erhaltungsgröße})
 \end{aligned}$$

**Satz 2.11 (Noether-Theorem) Noether-Theorem** (nach analoger Rechnung mit  $q_1, \dots, q_n$ ):  
Falls  $\delta q_i = \varepsilon \chi_i$  Symmetrie (also  $\delta L = \varepsilon \frac{d}{dt} f$ ) gilt

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \chi_i - f \right) = 0$$

**Beispiel 2.12 (Zeittranslation)**  $q(t) \rightarrow q'(t) = q(t + \varepsilon) = q(t) + \dot{q}(t)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$   
 $\delta q = \dot{q}\varepsilon = \varepsilon \chi \implies \chi = \dot{q}$  Berechne  $\delta L$ :

$$\begin{aligned}
 \delta L &= \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = \varepsilon \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \varepsilon \ddot{q} \\
 &= \varepsilon \left( \frac{\partial L}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\dot{q}}{dt} \right) = \varepsilon \frac{d}{dt} L \\
 \implies \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \chi - f &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = E \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

**Beispiel 2.13 (Verschiebung zyklischer Koordinate)**

$$q' = q + \varepsilon \implies \chi = 1, \delta L = 0 \implies f = 0$$

Erhaltungsgröße:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \chi - f = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p \quad (\text{verallgemeinerter Impuls})$$

Zusammenstellung zu Galilei Transformationen

Symmetrie	Erhaltungsgröße
Zeittranslation	Energie
Translation	Impuls
Rotation	Drehimpuls
Boosts	$\vec{x}_s - \vec{v}_s \cdot t$

zum Boost:

$\vec{x}_s - \vec{v}_s \cdot t = \text{const.}$  Schwerpunkt bewegt sich geradlinig und gleichförmig.

## 2.6 Mechanische Ähnlichkeit

Lagrangefunktion:

$$L = \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\vec{x}}_a^2 - V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$$

Sei  $V$  homogen in den  $x_a^i$  von Grad  $k$ .

Sei  $\{\vec{x}_a(t)\}$  beziehungsweise  $[t \mapsto \{\vec{x}_a(t)\}]$  eine physikalische Bewegung. Kurz:  $t \mapsto x(t)$ .

Betrachte Transformation:  $x \rightarrow \alpha x, t \rightarrow \beta t \forall t, x$ .

Alte Bewegung:  $\{t \rightarrow x(t)\}$ , Neue Bewegung  $\{\beta t \mapsto \alpha x(t)\}$ .

Variablenwechsel:  $t' = \beta t$  und anschließend  $t' \rightarrow t$ . Neue Bewegung:  $\{t \mapsto \alpha x(t/\beta)\}$

Betrachte nun Transformationen von  $T, V$

$$T, V \rightarrow ((\alpha/\beta)^2 T, \alpha^k V)$$

Fordere nun  $\alpha^k = (\alpha/\beta)^2 \implies L \rightarrow \alpha^k L$

Beachte:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

ist homogen in  $L, x, t$  jeweils vom Grad  $\{1, -1, 0\}$

$\implies$  Falls alte Bewegung Lösung  $\implies$  neue Bewegung auch Lösung (entscheidend:  $L \rightarrow \alpha^k L$ )

$\implies$  „**Mechanische Ähnlichkeit**“.

**Definition 2.14 (Mechanische Ähnlichkeit)**  $\beta = \beta(\alpha)$  so wählbar, dass  $x \rightarrow \alpha x, t \rightarrow \beta t \implies L \rightarrow \alpha^k L$ .

Anwendung:

Sei  $X$  typische Länge einer Bewegung (Bahnradius, Entfernung von Umkehrpunkten, etc.). Sei  $T$  typische Zeit (Periode, Zeit zwischen Umkehrpunkten, etc.). Seien  $X' = \alpha X, T' = \beta T$  die entsprechenden Größen ähnlicher Bewegungen. Dann gilt:

$$\frac{T'}{T} = \beta = \alpha^{1-k/2} = \left( \frac{X'}{X} \right)^{1-k/2}$$

### Beispiel 2.15 (Harmonischer Oszillator)

$$V \sim x^2 \implies k = 2 \implies \frac{T'}{T} = 1$$

### Beispiel 2.16 (Freier Fall)

$$V \sim x \implies k = 1 \implies \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{X'}{X}}$$

### Beispiel 2.17 (Gravitation)

$$V \sim \frac{1}{x} \implies k = -1 \implies \frac{T'}{T} = \frac{X'^{3/2}}{X}$$

## 2.7 Virialsatz

Betrachte Zeitmittel:  $\langle A \rangle := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t dt' A t'$  (besonders leicht zu berechnen für totale Zeitableitungen).

Ziel:  $\langle T \rangle$  (kinetische Energie)

Also: Versuche  $T$  als totale Zeitableitung zu schreiben. (zur Vereinfachung in 1D, ein Teilchen)

$$\begin{aligned}
 2T &= mv^2 = p\dot{x} = \frac{d}{dt}(px) - \dot{p}x \\
 &= \frac{d}{dt}(px) + x \frac{\partial V}{\partial x} \\
 \implies 2T - x \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{d}{dt}(px) \\
 \implies \langle 2T - x \frac{\partial V}{\partial x} \rangle &= \langle \frac{d}{dt}(px) \rangle \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (px|_t - px|_0) = 0 \quad (\text{falls } p, x \text{ beschränkt})
 \end{aligned}$$

**Definition 2.18 (Virialsatz)** Für Bewegungen in beschränkten Gebieten mit beschränkter Geschwindigkeiten gilt:

$$2 \langle T \rangle = \left\langle \sum_a \vec{x}_a \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_a} \right\rangle = \left\langle \sum_a \sum_{i=1}^3 x_a^i \frac{\partial V}{\partial x_a^i} \right\rangle$$

**Beispiel 2.19 (homogenes Potential)** Falls  $V$  homogen von Grad  $k$ :  $2 \langle T \rangle = k \langle V \rangle$

**Beispiel 2.20 (harmonischer Oszillator)**  $\langle T \rangle = \langle V \rangle$

**Beispiel 2.21 (Gravitation)**  $k = -1$ ,  $2 \langle T \rangle = - \langle V \rangle$

## 3 Trägheitstensor

### 3.1 Trägheitsmoment und Satz von Steiner

Rotation von Körper um feste Achse  $A$ . Körper besteht aus Elementen  $m_a$  mit Radius  $r_{a,\perp}$ . Kontinuierlich:  $m_a = \rho \Delta V$ . Einzige erlaubte Bewegung sei Drehung um Achse  $A$ :

$$\begin{aligned}
 T &\simeq \sum_a \frac{m_a}{2} v_a^2 = \sum_a \frac{m_a}{2} \omega^2 r_{a,\perp}^2 \\
 &= \frac{1}{2} I_A \omega^2 \\
 \implies I_A &\equiv \sum_a m_a r_{a,\perp}^2
 \end{aligned}$$

Trägheitsmoment im Kontinuum:

$$I_A = \int d^2 \vec{r} \rho(\vec{r}) r_{\perp}^2$$

Einzigster Freiheitsgrad: Drehwinkel  $\varphi$  (wobei  $\omega = \dot{\varphi}$ )

$$\begin{aligned} L(\varphi, \dots \varphi) &= \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \\ \implies I_A \ddot{\varphi} &= -\frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Annahme:  $V$  ergibt sich als Summe der Potentiale aller Teilmassen:

$$V(\varphi) = \sum_a V_a(\vec{r}_a(\varphi))$$

Betrachte

$$\begin{aligned} V(\varphi + \delta\varphi) &= \sum_a V_a(\vec{r}_a(\varphi) + \delta\vec{v}_a) \\ &= \sum_a V_a(\vec{r}_a(\varphi) + \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_a(\varphi)) \\ &= \sum_a V_a + \sum_a (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_a) \cdot \vec{\nabla} V_a(\vec{r}_a(\varphi)) \\ V(\varphi + \delta\varphi) - V(\varphi) &= \sum_a (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_a) \cdot \vec{\nabla} V_a(\vec{r}_a(\varphi)) \end{aligned}$$

Limes  $\delta\varphi \rightarrow 0$ ,  $\delta\vec{\varphi} = \vec{e}_A \delta\varphi$ ,  $\vec{e}_A$  Einheitsvektor der Achse

$$\begin{aligned} -\frac{dV(\varphi)}{d\varphi} &= -\sum_a \frac{\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_a}{\delta\varphi} \cdot \vec{\nabla} V \\ &= \sum_a \varepsilon_{ijk} (\vec{e}_A)_j (\vec{r}_a)_k \cdot (F_a)_i \\ &= \sum_a (\vec{e}_A)_j \left( \vec{r}_a \times \vec{F}_a \right)_j = \sum_a \vec{e}_A \cdot \vec{M}_a \end{aligned}$$

$\vec{M}_a$ : Drehmoment auf Punkt „a“.

Zuletzt:  $I_A \ddot{\varphi} = -\frac{dV}{d\varphi}$

$$\implies \frac{d}{dt}(I_A \dot{\varphi}) = \vec{e}_A \vec{M}$$

$\vec{M}$ : Gesamtdrehmoment.

Erinnerung: Drehimpuls für Punktmasse:  $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$

$$\begin{aligned} \implies \vec{e}_A \cdot \vec{L} &= m \vec{e}_A \cdot (\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}) \times \vec{r} \\ |\vec{r}_{\perp} \times \vec{v}| &= |\vec{r}_{\perp}| |\vec{v}| = |\vec{r}_{\perp}| |\dot{\varphi}| \\ \implies \vec{e}_A \cdot \vec{L} &= m r_{\perp}^2 \dot{\varphi} \implies \vec{e}_A \cdot \vec{L} = I_A \dot{\varphi} \\ \implies \vec{e}_A \cdot \dot{\vec{L}} &= \vec{e}_A \cdot \vec{M} \end{aligned}$$



Bemerkung:  $I_A$  ist besonders einfach zu berechnen falls  $A \parallel S$  (Schwerpunktsachse) und  $I_S$  bekannt,  $\vec{R}_\perp$  ist der (senkrechte) Abstand der beiden Achsen.

$$I_A = \sum_a m_a v_{0,\perp}^2 = \sum_a m_a \left( \vec{R}_\perp + \vec{r}'_{\perp,a} \right)^2$$

Summe der Mischterme fällt weg

$$I_A = \sum_a m_a \left( \vec{R}_\perp^2 + \vec{r}_{a,\perp}^{\prime 2} \right)$$

Satz von Steiner:

$$\Rightarrow I_A = M \vec{R}_\perp^2 + I_s$$

### 3.2 Trägheitstesor

Berechne kinetische Energie einen Körpers der sich mit  $\vec{v}$  und mit  $\vec{\omega}$  um Achse durch Schwerpunkt dreht.

$$\begin{aligned} T &= \sum_a \frac{m_a}{2} \vec{v}_a^2 = \sum_a \frac{m_a}{2} (\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}_a)^2 \\ &= \sum_a \frac{m_a}{2} \left( \vec{v}^2 + 2\vec{v}(\vec{\omega} \times \vec{r}_a) + (\vec{\omega} \times \vec{r}_a)^2 \right) \end{aligned}$$

Mischterm fällt weg, da  $\sum_a m_a \vec{r}_a = 0$ , wegen Schwerpunktbedingung

$$\begin{aligned} &= \frac{M}{2} \vec{v}^2 + \sum_a \frac{m_a}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_a)^2 \\ &= \frac{M}{2} \vec{v}^2 + \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j \\ I_{ij} &\equiv \sum_a m_a \left( \delta_{ij} \vec{r}_a^2 - (\vec{r}_a)_i (\vec{r}_a)_j \right) \end{aligned}$$

Integralform:

$$I_{ij} = \int d^3 \vec{r} \rho(\vec{r}) (\delta_{ij} \vec{r}^2 - r_i r_j)$$

Speziell für  $\vec{r} = (x, y, z)$  findet man:

$$I = \int dx dy dz \rho(\vec{r}) \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

**Beispiel 3.1 (homogener Würfel)**  $\int dx \rightarrow \int_{-a/2}^{a/2} dx$

$$\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy y^2 \int_{-a/2}^{a/2} dz = a \cdot \frac{a^3}{12} \cdot a$$

Insgesamt:

$$I = a^2 \rho \begin{pmatrix} \frac{1}{6}a^3 & & \\ & \frac{1}{6}a^3 & \\ & & \frac{1}{6}a^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} M a^2 \mathbb{I}$$

### 3.3 Hauptträgheitsachsen

Tensor ist (wie) Vektor ein geometrisches Objekt. Er beschreibt Dichte/ Form des Körpers. Bei Drehungen des Körpers: Dreht sich mit:  $I'_{ij} = R_{ik} R_{jl} I_{kl} \iff I' = R I R^T = R I R^{-1}$  (aktive Sicht).

Passive Sicht: Für die Komponenten von  $I$  im gedrehten Koordinatensystem gilt:

$$I'_{ij} = R_{ik} R_{jl} I_{kl}$$

Zentraler Satz: Jede symmetrische, reelle Matrix kann durch eine orthogonale Transformation auf Diagonalform gebracht werden.  $\implies$  Wir können als stets den Körper so drehen beziehungsweise das Koordinatensystem so wählen, dass

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

$I_1, I_2, I_3$  heißen Hauptträgheitsmomente. Die Koordinaten  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  des Systems in dem  $I$  diagonal ist heißen Hauptträgheitsachsen. (im Allgemeinen sind dies die Symmetrieachsen des Körpers, soweit vorhanden).

Sei  $\vec{v} = 0$ , sei  $\vec{\omega} = \omega \hat{e}$  ( $\hat{e}$  beliebiger Einheitsvektor).

$$\implies T = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} I_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j \omega^2 \equiv \frac{1}{2} I_e \omega^2$$

(Daher ist  $I_e \equiv I_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j$ ) das Trägheitsmoment bezüglich  $\hat{e}$ .

Sei speziell  $I$  diagonal und  $\hat{e} = \hat{e}_1 = (1, 0, 0)$ . Es folgt  $I_e = I_{11} = I_1$ , sprich: Die Hauptträgheitsmomente sind also gerade die Trägheitsmomente bezüglich die Hauptträgheitsachsen.

Außerdem gilt:

$$I_{ij}(\hat{e}_1)_j = I_{ij} \delta_{j1} = I_{i1} = I_1 \delta_{i1} = I_1 (\hat{e}_1)_i$$

Matrixschreibweise:

$$I \hat{e}_1 = I_1 \hat{e}_1$$

Demnach ist  $\hat{e}_1$  ein **Eigenvektor** von  $I$  mit **Eigenwert**  $I_1$ . Die Existenz eines gewissen Eigenvektors und dessen Eigenwert sind **koordinatenunabhängig!** In der Tat:

$$\begin{aligned} R \cdot I \hat{e}_1 &= I_1 R \hat{e}_1 \\ (R I R^{-1}) R &= I_1 R \hat{e}_1 \\ I' \hat{e}'_1 &= I_1 \hat{e}'_1 \quad \hat{e}'_1 = R \hat{e}_1 \end{aligned}$$

Wir sehen: Die Matrix  $I$  hat 3 Eigenvektoren  $\hat{e}_{(a)}$ . Diese Eigenvektoren definieren die Hauptträgheitsachsen. Die Eigenwerte  $I_a$  sind die entsprechenden Hauptträgheitsmomente.

### 3.4 Trägheitsellipsoid

Bisher:  $I_{\text{würfel}} = \frac{1}{6} M a^2 \mathbb{K}$

Nächstes Beispiel: Kugel, ohne Rechnung:  $I \sim \mathbb{K}$ , Warum?

Es muss gelten:  $I = R I R^{-1} \forall R \in SO(3)$ . Fakt:  $\delta_{ij}$  ist der einzige invariante Tensor von  $SO(3)$  mit zwei Indizes.