Lineare Algebra II (Vogel)

Robin Heinemann

12. Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

18 Eigenwerte

In diesem Abschnitt sei $n \in \mathbb{N}$, V ein K-VR und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.
Frage: V endlichdim. Existiert eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V, sodass $M_\mathcal{B}(\varphi)$ eine Diagonalmatrix ist, das heißt

$$M_\mathcal{B}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$?
Für $i = 1, \dots, n$ wäre dann $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$

Definition 18.1 $\lambda \in K, v \in V$

- λ heißt Eigenwert von $\varphi \overset{\text{Def}}{\iff} \exists v \in V, v \neq 0 : \varphi(v) = \lambda v$
- v heißt Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \overset{\text{Def}}{\iff} v \neq 0 \wedge \varphi(v) = \lambda v$
- φ heißt diagonalisierbar $\overset{\text{Def}}{\iff} V$ besitzt eine Basis aus EV von φ

(Falls V endlichdimensional, ist die äquivalent zu: Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$M_\mathcal{B}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

)
Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit einer Matrix $A \in M(n \times n, K)$ sind über den Endomorphismus $\tilde{A} : K^n \to K^n$ definiert.

Bemerkung 18.2 $A \in M(n \times n, K)$. Dann sind äquivalent:

1. A ist diagonalisierbar.
2. Es gibt eine Basis von K^n aus Eigenvektoren von A
3. Es gibt ein $S \in \mathrm{GL}(n, K), \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$
4. A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix

In diesem Fall steht in den Spalten von S^{-1} eine Basis des K^n aus EU von A, und für jede Matrix $A \in M(n \times n, K)$ mit der Eigenschaft, dass die Spalten von S^{-1} eine Basis des K^n aus EV von A bilden, dann ist SAS^{-1} eine Diagonalmatrix (mit den EW auf der Diagonalen.)

Beweis Äquivalenz: $\setminus$ 1. $\iff$ 2. Definition, 2. $\iff$ 3. aus Basiswechselsatz (16.6), 3. $\iff$ 4. aus Definition Ähnlichkeit (16.12)

Zusatz: Sei $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies A(S^{-1}e_j) = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j.$
Wegen $S^{-1} \in \mathrm{GL}(n, K)$ ist $S^{-1}e_j \neq 0$, das heißt S^{-1} ist EV von A zum EW λ_j
Wegen $S^{-1} \in \mathrm{GL}(n, K)$ ist $\left(S^{-1}e_1, \dots, S^{-1}e_n\right)$ eine Basis des K^n aus EV von A.
Sei $S \in \mathrm{GL}(n, K)$, das heißt die Spalten von S^{-1} eine Basis des K^n aus EV von A bilden, das heißt für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ ist $AS^{-1}e_j = \lambda_j S^{-1}e_j$ für ein $\lambda_j \in K$.

$$\implies AS^{-1}e_j = S^{-1}\lambda_j e_j = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j \implies SAS^{-1}e_j = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j, j = 1, \dots, n$$

$$\implies SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ □

Beispiel 18.3
$K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$

1. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ Es ist $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, das heißt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV von φ zum EW 1.

$\varphi\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, also ist $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ EV von φ zum EW -1. Somit: $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus EV von φ, das heißt φ ist diagonalisierbar.

In Termen von Matrizen: $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \in M(2\times 2, \mathbb{R})$ ist diagonalisierbar, und mit $S = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$ ist dann ist $SAS^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ Achtung: Das φ diagonalisierbar ist, heißt nicht, dass jeder Vektor aus $V = \mathbb{R}^2$ ein EV von φ ist, zum Beispiel ist $\varphi\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x_2\\x_1\end{pmatrix}$ (= Drehung um $\frac{\pi}{2}$). hat keinen EW.
   Beweis dafür: später.

Ziel: Suche Kriterien für Diagonalisierbarkeit.

Bemerkung 18.4 $v_1, \dots, v_m$ EV von φ zu paarweise verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$. Dann ist $(v_1, \dots, v_m)$ linear unabhängig, insbesondere ist $m \leq \dim V$. Insbesondere gilt: ist V endlichdimensional, dann hat φ höchstens $\dim(v)$ Eigenwerte.

Beweis per Induktion nach m:
IA: $m = 1 : v_1 \neq 0$, da v_1 EV $\implies$ (v_1) linear unabhängig.
IS: sei $m \geq 2$, und die Aussage für $m-1$ bewiesen.
Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ mit $\alpha_1\lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m\lambda_m v_m = 0$. Außerdem: $\alpha_1\lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m\lambda_1 v_m = 0$

$$\begin{aligned}\implies \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \dots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1)v_m &= 0\\ \alpha_2\lambda_2 - \lambda_1 = \dots = \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1) &= 0\\ \implies \alpha_2 = \dots = \alpha_m &= 0\\ \implies \alpha_1 v_1 = 0 \implies \alpha_1 = 0 \implies (v_1, \dots, v_w) &\text{ linear unabhängig}\end{aligned}$$ □

Folgerung 18.5 V endlichdimensional, φ habe n paarweise verschiedene EW, wobei $n = \dim V$ Dann ist φ diagonalisierbar.

Beweis Für $i = 1, \dots, n$ sei v_i ein EV von φ zum EW λ_i $\implies$ $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig, wegen $n = \dim V$ ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V aus EV von φ □

Definition 18.6 $\lambda \in K$
$\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ heißt der Eigenraum von φ bezüglich λ.
$\mu_{geo}(\varphi, \lambda) := \dim \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda)$ heißt die geometrische Vielfachheit von λ.
Für $A \in M(n\times n, K)$ setzen wir $\mathrm{Eig}(A, \lambda) := \mathrm{Eig}\left(\tilde{A}, \lambda\right)$, $\mu_{geo}(A, \lambda) := \mu_{geo}\left(\tilde{A}, \lambda\right)$.

Bemerkung 18.7 $\lambda \in K$. Dann gilt:

1. $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda)$ ist ein UVR von V.
2. λ ist EW von $\varphi \iff \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\}$.
3. $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der zu λ gehörenden EV von φ.
4. $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda) = \ker(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi)$, insbesondere ist $\operatorname{Eig}(A, \lambda) = \ker(\lambda E_m - \varphi) = \text{Lös}(\lambda E_n - A, 0)$ für $A \in M(n \times n, K)$
5. Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in K mit \lambda_1 \neq \lambda_2$, dann $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1) \cap \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_2) = \{0\}$

Beweis 4. Es ist $v \in \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda) \iff \varphi(v) = \lambda v \iff \lambda v - \varphi(v) = 0 \iff (\lambda \operatorname{id}_V - \varphi)(v) = 0 \iff v \in \ker(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi)$ Es ist $\operatorname{Eig}(A, \lambda) = \ker\Big(\lambda \operatorname{id}_{K^n} - \tilde{A}\Big) = \ker\Big(\widetilde{\lambda E_n - A}\Big) = \ker(\lambda E_n - A) = \text{Lös}(\lambda E_n - A, 0)$

1. aus 4.
2. λ EW von $\varphi \iff \exists v \in V, v \neq 0$ mit $\varphi(v) = \lambda v \iff \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\}$.
3. klar.
5. Sei $\lambda_1 \neq \lambda_2, v \in \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1) \cap \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_2) \implies \lambda_1 v = \varphi(v) = \lambda_2 v \implies \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v = 0 \implies v = 0$ □

Bemerkung 18.8 V endlichdimensional, $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent:

1. λ ist EW von φ
2. $\det(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi) = 0$

Beweis 1. $\iff \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\} \implies \ker(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi) \neq \{0\} \implies \lambda \operatorname{id}_V - \varphi$ nicht injektiv $\implies \lambda \operatorname{id}_V - \varphi$ kein Isomorphismus $\implies \det(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi) = 0$. □

Definition 18.9 K Körper, $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$

$$\chi_A^{char} := \det(tE_n - A) = \det \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ -a_{n1} & \dots & & t - a_{nn} \end{pmatrix} \in K[t]$$

heißt das **charakteristische Polynom** von A.

Anmerkung Hierfür nötig: Determinanten von Matrizen mit Einträgen in einem kommutativen Ring.
In manchen Büchern $\chi_A^{char} = \det(A - tE_n)$ (schlecht)

Beispiel 18.10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$$
$$\implies A\chi_a^{char} = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ -3 & t-4 \end{pmatrix} = (t-1)(t-4) - 6 = t^2 - 5t - 2$$

Bemerkung 18.11 $A, B \in M(n \times n, K), A \approx B$.
Dann ist $\chi_A^{char} = \chi_B^{char}$.

Beweis $A \approx B \implies \exists S \in \mathrm{GL}(n, K) : B = SAS^{-1}$

$$\implies tE_n - B = tE_n - SAS^{-1} = SS^{-1}tE_n - SAS^{-1} = StE_nS_{-1} - SAS^-1 = S(tE_n - A)S^{-1}$$
$$\implies \chi_B^{char} = \det(tE_n - B) = \det\big(S(tE_n - A)S^{-1}\big) = \det(S)\det(tE_n - A)\det\big(S^{-1}\big) =$$
$$\underbrace{\det(S)\det(S)^{-1}}_{=1}\det(tE_n - A) = \chi_A^{char}$$
□

Definition 18.12 V endlichdim, $n = \dim V, \mathcal{B}$ Basis von $V, \varphi \in \mathrm{End}(V), A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$

$$\chi_\varphi^{char} := \chi_A^{char} = \det(tE_n - A) \in K[t]$$

heißt das **charakteristische Polynom** von φ.

Anmerkung χ_φ^{char} ist wohldefiniert, dann: Ist $\mathcal{B}'$ eine weitere Basis von $V, A' = M_{\mathcal{B}'}\varphi$, dann ist $A \approx A'$ und deshalb nach 18.11: $\chi_A^{char} = \chi_{A'}^{char}$.

Satz 18.13 V endlichdimensional, $n = \dim V$. Dann gilt:

1. χ_φ^{char} ist ein normiertes Polynom von Grad n:
$$\chi_\varphi^{char} = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_0$$
mit $c_0 = (-1)^n \det \varphi, c_{n-1} = -^{(\varphi)}$ (vgl. Übung zur Spur)
2. Die Nullstellen von χ_φ^{char} sind genau die EW von φ:
$$\lambda \in K \text{ ist EW von } \varphi \iff \chi_\varphi^{char}\lambda = 0$$

Beweis Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von $V, A := M_{\mathcal{B}}(\varphi) \in M(n \times n, K)$

1.
$$\chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \underbrace{(tE_n - A)}_{=:B=(B_{ij})} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) B_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot B_{n,\sigma(n)}$$
$$= (t - a_{11} \cdot \ldots \cdot (t - a_{nn})) + \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}} \mathrm{sgn}(\sigma) B_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot B_{n,\sigma(n)}}_{:=g}$$

Für $\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}$ treten in $B_{1,\sigma(1)}, \dots, B_{n,\sigma(n)}$ höchstens $n-2$ Diagonalelemente auf, also $\deg(g) \leq n-2$.

$$\Longrightarrow \chi_\varphi^{char} = t^n - (a_{11} + \dots + a_{nn})t^{n-1} + \text{ Terme kleineren Grades}$$

insbesondere:

$$c_{n-1} = -(a_{11} + \dots + a_{nn}) = -^{A} = -^{\varphi}$$

Es ist

$$c_0 = \chi_\varphi^{char}(0) = (\det(tE_n - A))(0) = \det(0E_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

2. Aus $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ folgt $\lambda E_n - A = M_{\mathcal{B}}(\lambda \,\mathrm{id}_V - \varphi)$. Also:

$$\chi_\varphi^{char}(\lambda) = 0 \iff (\det(tE_n - A))(\lambda) = 0 \Longrightarrow \det(\lambda E_n - A) = 0 \iff \det(M_{\mathcal{B}}(\lambda \,\mathrm{id}_V - \varphi)) = 0$$
$$\Longrightarrow \det(\lambda \,\mathrm{id}_V - \varphi) = 0 \iff \lambda \text{ ist EW von } \varphi \qquad \square$$

Definition 18.14 $\lambda \in K$

$$\mu_{alg}(\varphi, \lambda) := \mu\Big(\chi_\varphi^{char}, \lambda\Big)$$

heißt die **algebraische Vielfachheit**

Beispiel 18.15

1. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Es ist $\chi_\varphi^{char} = \chi_\varphi^{char} = \det \begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{pmatrix} =$ $t^2 - 1 = (t-1)(t+1) \in \mathbb{R}[t] \Longrightarrow$ EW von $\varphi : 1, -1$.
Es ist $\mu_{alg}(\varphi, 1) = 1, \mu_{alg}(\varphi, -1) = 1$

$$\mathrm{Eig}(\varphi, 1) = \mathrm{Eig}(A, 1) = \mathrm{Lös}(E_2 - A, 0) = \mathrm{Lös}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

also $\mu_{geo}(\varphi, 1) = \dim \mathrm{Eig}(\varphi, 1) = 1$

$$\mathrm{Eig}(\varphi, -1) = \mathrm{Eig}(A, -1) = \mathrm{Lös}((-1) \cdot E_2 - A, 0) = \mathrm{Lös}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, 0\right) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

also $\mu_{geo}(\varphi, -1) = 1$.

2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Es ist $\chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} =$ $t^2 + 1, \chi_\varphi^{char}$ hat keine NS in $\mathbb{R} \Longrightarrow \varphi$ hat keine EW.

3. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Es ist $\chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix} =$
   $(t-1)^2 \implies 1$ ist einziger EW von φ, es ist $\mu_{alg}(\varphi, 1) = 2$
   $$\mathrm{Eig}(\varphi, 1) = \mathrm{Eig}(A, 1) = \text{Lös}(1E_2 - A, 0)\, \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$
   $\implies \mu_{geo}(\varphi, 1) = 1. \implies \varphi$ ist nicht diagonalisierbar.

Satz 18.16 V endlichdimensional, $n = \dim V$

1. Ist φ diagonalisierbar, dann ist $\chi_\varphi^{char} = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, nicht notwendig verschieden, das heißt χ_φ^{char} zerfällt in Linearfaktoren.
2. Ist $\chi_\varphi^{char} = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n)$ mit paarweise verschiedene $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$, dann ist φ diagonalisierbar.

Beweis 1. Sei φ diagonalisierbar $\to V$ besitzt Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ aus EV zu EW $\lambda_i \in K$.

$$\implies M_\mathcal{B}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies \chi_\varphi^{char} = \det \begin{pmatrix} t-\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t-\lambda_n \end{pmatrix} = (t-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_n)$$

2. Aus $\chi_\varphi^{char} = (t-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_n)$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ paarweise verschieden $\implies \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind paarweise verschiedene EW von $\varphi \implies \varphi$ diagonalisierbar. □

Bemerkung 18.17 V endlichdimensional, $n = \dim V$, λ EW von φ. Dann gilt:

$$1 \leq \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \leq \mu_{alg}(\varphi, \lambda)$$

Beweis Sei $(v_1, \ldots, v_s)$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) \implies s = \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \geq 1$, da λ EW von φ. Nach Basiserweiterungssatz $\exists v_{s+1}, \ldots, v_n \in V$, sodass $\mathcal{B} := (v_1, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_n)$ eine Basis von V ist.

$$\implies A := A_\mathcal{B}(\varphi) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & A' \end{array}\right), A' \in M((n-s)\times(n-s), K)$$

$$\implies \chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \left(\begin{array}{ccc|c} t-\lambda & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & t-\lambda & \\ \hline & 0 & & tE_{n-s} - A' \end{array}\right) = (t-\lambda)^s \det\big(tE_{n-s} - A'\big) = (t-\lambda)^s \chi_{A'}^{char}$$

$$\implies \mu_{geo}(\varphi, \lambda) = s \leq \mu\Big(\chi_\varphi^{char}, \lambda\Big) = \mu_{alg}(\varphi, \lambda)$$ □

Bemerkung 18.18 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ paarweise verschiedene EW von φ. Dann gilt:

$$\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_j) = \{0\} \forall i \in \{1, \ldots, r\}$$

Beweis Sei $i \in \{1, \ldots, r\}$. Annahme: $\exists v_i \in \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_j) : v_i \neq 0$.

$$\implies \exists v_j \in \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_j), j = 1, \ldots, r, j \neq i : v_i = v_1 + \cdots + v_{i-1} + v_{i+1} + \cdots + v_r$$

Setze $J := \{j \in \{1, \ldots r\}, j \neq i \mid v_j \neq 0\} = \{j_1, \ldots, j_s\}$

$\implies v_i = v_{j_1} + \cdots + v_{j_s} \implies v_{j_1} + \cdots + v_{j_s} + (-1)v_i = 0 \implies (v_{j_1}, \ldots, v_{j_s}, v_i)$ linear abhängig ↯

□

Satz 18.19 V endlichdimensional. Dann sind äquivalent:

1. φ diagonalisierbar
2. χ_φ^{char} zerfällt in Linearfaktoren und $\mu_{alg}(\varphi, \lambda) = \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \forall$ EW von φ.
3. Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen EW von φ, dann ist

$$V = \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_k)$$

In diesem Fall erhält man eine Basis von V aus EV von φ, indem man Basen von $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_i), i = 1, \ldots, k$ zusammenfügt.

Beweis 1. $\implies$ 2. Sei φ diagonalisierbar. $\implies$ $\exists$ Basis $\mathcal{B}$ von V aus EV von φ. Wir ordnen die EV in $\mathcal{B}$ den verschiedenen EW von φ zu und gelangen so zu Familien $\mathcal{B}_i := \left(v_1^{(i)}, \ldots, v_{s_i}^{(i)}\right)$ von linear unabhängigen im $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda), i = 1, \ldots, k$

a) Behauptung: $\mathcal{B}_i$ ist eine Basis von $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_i)$, denn gezeigt: $\mathcal{B}_i$ ist ein ES von $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_i)$. Sei $v \in \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_i) \leq V$

$$\implies \exists \lambda^{(j)} \in K : v = \sum_{j=1}^{k} \left(\lambda_1^{(j)} v_1^{(j)} + \cdots + \lambda_{s_j}^{(j)} v_{s_j}^{(j)}\right)$$

$$\implies \underbrace{v - \left(\lambda_1^{(i)} v_1^{(i)} + \cdots + \lambda_{s_i}^{(i)} v_{s_i}^{(i)}\right)}_{\in \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_i)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \left(\lambda_1^{(j)} v_1^{(j)} + \cdots + \lambda_{s_j}^{(j)} v_{s_j}^{(j)}\right) \in \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_j)$$

$$\implies v = \lambda_1^{(i)} v_1^{(i)} + \cdots + \lambda_{s_i}^{(i)} v_{s_i}^{(i)}$$

a) Nach 1. ist

$$\mu_{geo}(\varphi, \lambda_1) + \cdots + \mu_{geo}(\varphi, \lambda_k) = s_1 + \cdots + s_k = \dim V$$

χ_φ^{char} zerfällt nach 18.16 in Linearfaktoren, somit

$$\mu_{alg}(\varphi, \lambda_1) + \cdots + \mu_{alg}(\varphi, \lambda_k) = \deg\left(\chi_\varphi^{char}\right) = \dim V$$

Wegen $\mu_{geo}(\varphi, \lambda_i) \leq \mu_{alg}(\varphi, \lambda_i)$ für $i = 1, \ldots, k$ folgt: $\mu_{geo}(\varphi, \lambda_i) = \mu_{alg}(\varphi, \lambda_i)$ für $i = 1, \ldots, k$.

2. $\implies$ 3. Es gelte 2. Es seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen EW von φ. Wir setzen $W := \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1) + \cdots + \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_k)$. Wegen 18.18 ist

$$W = \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_k)$$

$$\begin{aligned} \implies \dim W &= \dim \operatorname{Eig}(\chi, \lambda_1) + \cdots + \dim \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_k) \\ &= \mu_{geo}(\chi, \lambda_1) + \cdots + \mu_{geo}(\varphi, \lambda_k) \\ &= \mu_{alg}(\chi, \lambda_1) + \cdots + \mu_{alg}(\varphi, \lambda_k) = \deg\left(\chi_\varphi^{char}\right) \\ &= \dim V \end{aligned}$$

$\implies W = V$

3. $\implies$ 1. Es gelte 3. Sei $\mathcal{B} = \left(v_1^{(i)}, \ldots, v_{s_i}^{(i)}\right)$ eine Basis von $\operatorname{Eig} \varphi, \lambda_i \implies \mathcal{B} := \left(v_1^{(1)}, \ldots, v_{s_1}^{(1)}, \ldots, v_1^{(k)}, v_{s_r}^{(k)}\right)$ ist eine Basis von V aus EV von $\varphi \implies \varphi$ diagonalisierbar.
$\square$

Anmerkung In der Praxis ist es in der Regel schwierig festzustellen, ob χ_φ^{char} in Linearfaktoren zerfällt oder die NS von χ_φ^{char} zu bestimmen. Für Polynome von Grad ≥ 5 existiert keine Lösungsformel zur Bestimmung der NS. (Algebra 1 Vorlesung), die NS müssen numerisch bestimmt werden.

Beispiel 18.20

1. In 18.15.3 ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist $\chi_A^{char} = (t-1)^2, \mu_{geo}(A, 1) = 1 < \mu_{alg}(A, 1) = 2 \implies A$ nicht diagonalisierbar.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$

$$\chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t-2 & 1 & 1 \\ 6 & t-1 & -1 \\ -3 & 1 & t+2 \end{pmatrix} = t^3 - t^2 - 5t - 3 = (t+1)^2(t-3)$$

EW von $A: -1, 3, \mu_{alg} = (A, -1) = 2, \mu_a lg(A, 3) = 1$

$$\operatorname{Eig}(A, -1) = \text{Lös}(-E_n - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

$\mu_{geo}(A, -1) = 2 = \mu_{alg}(A, -1)$.

$$\operatorname{Eig}(A, 3) = \text{Lös}(3E_n - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$\mu_{geo}(A, 3) = 1 = \mu_{alg}(A, 3)$. Also ist A diagonalisierbar, $\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus EV von A,

$$M_{\mathcal{B}}\left(\tilde{A}\right) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$$

Mit

$$S := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, SAS^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$$

Anmerkung Ist $f = a_m t^m + \cdots + a_1 t + a_0 \in K[t]$, dann können wir in f:

- Endomorphismen $\varphi \in \operatorname{End}_K(V)$ einsetzen durch die Regel

$$f(\varphi) := a_m \varphi^m + \cdots + a_1 \varphi + a_0 \operatorname{id}_V \in \operatorname{End}_K(V)$$

  wobei $\varphi^k := \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{\text{k-mal}}$

- Matrizen $A \in M(n \times n, K)$ einsetzen durch die Regel

$$f(A) := a_m A^m + \cdots + a_1 A + a_0 E_n \in M(n \times n, K)$$

  Für $f, g \in K[t], \varphi \in \operatorname{End}_K(V)$ ist $f(\varphi) \circ g(\varphi) = (fg)(\varphi) = (gf)(\varphi) = g(\varphi) \circ f(\varphi)$, analog für Matrizen.

Satz 18.21 (Satz von Cayley-Hamilton) V endlichdimensional. Dann gilt: $\chi_\varphi^{char}(\varphi) = 0$. Insbesondere gilt für alle $A \in M(n \times n, K) : \chi_A^{char}(A) = 0$.

Beweis 1. Es genügt zu zeigen, dass $\chi_A^{char} = 0$ für alle $A \in M(n \times n, K)$, denn:
Ist $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$, $\mathcal{B}$ Basis von V, $A = A_\mathcal{B}$, $\chi_\varphi^{char} = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0 = \chi_A^{char} \in K[t]$

$$\begin{aligned}\implies 0 &= \chi_A^{char}(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0 E_n = M_\mathcal{B}\big(\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \dots + a_0 \,\mathrm{id}_V\big)\\ &= M_\mathcal{B}\Big(\chi_\varphi^{char}(\varphi)\Big)\end{aligned}$$

$$\implies \chi_\varphi^{char}(\varphi) = 0$$

2. Sei $A \in M(n \times n, K)$. Wir setzen $D := (tE_n - A)^\# \in M(n \times n, K[t])$

$$\implies D(tE_n - A) = \det(tE_n - A)E_n = \chi_A^{char} E_n$$

Sei $D = \sum_{i=0}^{n-1} D_i t^i$ mit $D_i \in M(n \times n, K)$, $\chi_A^{char} = \sum_{i=0}^n a_i t^i$ mit $a_i \in K$

$$\begin{aligned}\implies \sum_{i=0}^n a_i E_n t^i &= \left(\sum_{i=0}^n a_i t^i\right) E_n = \chi_A^{char} E_n = D(tE_n = A)\\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} D_i t^i\right)(tE_n - A) = \sum_{i=0}^{n-1} D_i t^{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} D_i A t^i\\ &= \sum_{i=0}^{n} (D_{i-1} - D_i A)t^i \qquad \text{(mit } D_{-1} := 0, D_n := 0)\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert: $a_i A_n = D_{i-1} - D_i A$ für $i = 0, \dots, n$

$$\begin{aligned}\chi_A^{char} &= \sum_{i=0}^n a_i A_i = \sum_{i=0}^n (a_i E_n) A^i = \sum_{i=0}^n (D_{i-1} - D_i A) A^i\\ &= (D_{-1} - D_0 A) + (D_0 - D_1 A)A + \dots + (D_{n-1} - D_n A)A^n\\ &= D_{-1} - D_n A^{n+1} = 0\end{aligned}$$

□

Anmerkung Der „Beweis"

$$\chi_A(A) = (\det(tE_n - A))(A) = \det(AE_n - A) = \det(A - A) = \det(0) = 0$$

funktioniert nicht, denn:

$$\underbrace{\underbrace{(\det(tE_n - A))}_{\in K[t]}(A)}_{\in M(n \times n, K)} \qquad \underbrace{\det\underbrace{(AE_n - A)}_{\in M(n \times n, K)}}_{\in K}$$

Satz+Definition 18.22 V endlichdimensional, $I := \{f \in K[t] \mid f(\varphi) = 0\}$. Dann gilt:

1. Es gibt ein eindeutig bestimmtes, normiertes Polynom $\chi_\varphi^{min} \in K[t]$, sodass

$$I = \chi_\varphi^{min} K[t] := \{\chi_\varphi^{min} q \mid q \in K[t]\}$$

χ_φ^{min} heißt das **Minimalpolynom** von φ. χ_φ^{min} ist das eindeutig bestimmte normierte Polynom kleinsten Grades mit $f(\varphi) = 0$.

2. $\chi_\varphi^{mit} \mid \chi_\varphi^{char}$, das heißt $\exists q \in K[t] : \chi_\varphi^{char} = q \cdot \chi_\varphi^{min}$

Analog konstruiert man für $A \in M(n \times n, K)$, das Minimalpolynom χ_A^{min}. Es ist $\chi_A^{min} = \chi_{\tilde{A}}^{min}$.

Beweis 1. Existenz: Wegen Satz von Cayley-Hamilton ist $\chi_\varphi^{char}(\varphi) = 0$. Somit ist $\chi_\varphi^{char} \in I$, insbesondere $I \neq \emptyset$.
$\deg(f) \mid f \in I, f \neq 0$ ist eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}_0$, hat somit ein minimales Element. $\implies \exists g \in I, g \neq 0 : \deg(g)$ minimal in $I \setminus \{0\}$ ist. Wir setzen

$$\chi_\varphi^{min} := \frac{1}{l(g)} g \implies \chi_\varphi^{min} \text{normiert}$$

und es ist

$$\chi_\varphi^{min}(\varphi) = \frac{1}{l(g)} g g(\varphi) = 0$$

das heißt $\chi_\varphi^{min} \in I$.
Behauptung: $I = \chi_\varphi^{min} K[t]$, denn:
„$\supseteq$“ Für $q \in K[t]$ ist $\big(\chi_\varphi^{min} q\big)(\varphi) = \underbrace{\chi_\varphi^{min}(\varphi)}_{=0} \cdot g(\varphi) = 0$, das heißt $\chi_\varphi^{min} q \in I$.
„$\subseteq$“ Sei $f \in I \implies \exists q, r \in K[t] : f = q\chi_\varphi^{min} + r, \deg(r) < \deg\big(\chi_\varphi^{min}\big)$

$$\implies 0 = f(\varphi) = \big(q\chi_\varphi^{min}\varphi + r\big)(\varphi) = q(\varphi) \cdot \chi_\varphi^{min}(\varphi) + r(\varphi) = r(\varphi) \implies r \in I$$

Wegen $\deg(r) < \deg\big(\chi_\varphi^{min}\big)$ und der Minimalität des Grades von χ_φ^{min} in $I \setminus \{0\}$ folgt $r = 0 \implies f = q\chi_\varphi^{min}$
Eindeutigkeit: Sei $\chi \in K[t]$ ein weiteres Polynom mit $I = \chi K[t] = \chi_\varphi^{min} K[t]$

$$\implies \chi = \chi \cdot 1 \in I = \chi_\varphi^{min} K[t] \implies \exists q \in K[t] : \chi = \chi_\varphi^{min} q$$

Analog $\exists p \in K[t] : \chi_\varphi^{min} = \chi p$

$$\implies \chi_\varphi^{min} = \chi p = \chi_\varphi^{min} qp \implies pq = 1 \implies p, q \in K^*$$

Wegen χ, χ_φ^{min} normiert folgt $p = q = 1$, also $\chi = \chi_\varphi^{min}$

2. Wegen $\chi_\varphi^{char}(\varphi) = 0$ nach Satz von Cayley-Hamilton folgt $\chi_\varphi^{char} \in I$.

$$\implies \exists q \in K[t] : \chi_\varphi^{char} = q\chi_\varphi^{min}$$

das heißt $\chi_\varphi^{min} \mid \chi_\varphi^{char}$ $\square$

Bemerkung 18.23 V endlichdimensional, $\lambda \in K$. Dann gilt:

$$\chi_\varphi^{char}(\lambda) = 0 \iff \chi_\varphi^{min}(\lambda) = 0$$

Insbesondere haben χ_φ^{char} und χ_φ^{min} dieselben NS.

Beweis „ $\Longleftarrow$ “ Sei $\chi_\varphi^{min}(\lambda) = 0$. Nach 18.22 $\exists q \in K[t]$ mit $\chi_\varphi^{char} = q\chi_\varphi^{min}$

$$\implies \chi_\varphi^{char}(\lambda) = q(\lambda)\underbrace{\chi_\varphi^{min}(\lambda)} = 0$$

„ $\implies$ “ Sei $\chi_\varphi^{char}(\lambda) = 0 \implies \lambda$ ist EW von φ, sei $v \in V$ EV zum EW λ. Sei $\chi_\varphi^{min} = t^r + a_{r-1}t^{r-1} + \cdots + a_1 t + a_0$

$$\begin{aligned} \implies 0 = \big(\chi_\varphi^{min}(\varphi)\big)(v) &= \big(\varphi^r + a_{r-1}\varphi^{r-1} + \cdots + a_1\varphi + a_0 \operatorname{id}_V\big)(v) \\ &= \lambda^r v + a_{r-1}\lambda^{r-1} v + \cdots + a_1\lambda v + a_0 v \\ &= \underbrace{\big(\lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\big)}_{=\chi_\varphi^{min}(\lambda)} v \end{aligned}$$

$\implies \chi_\varphi^{min}(\lambda) = 0.$ $\square$

Beispiel 18.24

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{Q})$, $\chi_A^{char} = (t-1)^2$ Wegen 18.22, 18.23 gilt: χ_A^{min} normiert, $\chi_A^{min} \mid \chi_A^{char}, \chi_A^{char}(1) = 0 \implies \chi_A^{min} \in \{t-1, (t-1)^2\}$ Wegen $A - E_2 = 0$ ist $\chi_A^{min} = t - 1$

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{Q}) \implies \chi_A^{char} = (t-1)(t+1) \implies \chi_A^{min} = (t-1)(t+1)$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$

$$\implies \chi_A^{char} = (t+1)^2(t-3) \implies \chi_A^{min} = \{(t+1)(t-3), (t+1)^2(t-3)\}$$

   Es ist $(A + E_n)(A - 3E_n) \neq 0$, also ist $\chi_A^{min} = (t+1)^2(t-3)$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) \implies \chi_A^{char} = (t+1)^2(t-3)$

$$\chi_A^{min} \in \{(t+1)(t-3), (t+1)^2(t-3)\}$$

   Es ist $(A + E_n)(A - 3E_n) = 0 \implies \chi_A^{min} = (t+1)(t-3)$

Satz 18.25 V endlichdimensional. Dann sind äquivalent:

1. φ diagonalisierbar

2. Das Minimalpolynom χ_φ^{min} zerfällt in Linearfaktoren und besitzt nur einfache NS, das heißt $\chi_\varphi^{min} = (t-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_r)$ mit paarweise verschiedenen $\lambda_1,\ldots,\lambda_r \in K$

Beweis 1. $\implies$ 2. Sei φ diagonalisierbar, seinen $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ die verschiedenen EW von φ. Sei $v \in V$. Da φ diagonalisierbar, ist $V = \oplus_{i=1}^r \operatorname{Eig}(\varphi,\lambda_i)$ nach 18.19, das heißt es existieren $v_i \in \operatorname{Eig}(\varphi,\lambda_i), i = 1,\ldots,r$ mit $v = v_1+\cdots+v_r$

$$\begin{aligned}\implies (\varphi - \lambda_r \operatorname{id}_V)(V) &= \varphi(v_1)+\cdots+\varphi(v_r) - \lambda_r v_1 - \cdots - \lambda_r v_r \\ &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r - \lambda_r v_1 - \cdots - \lambda_r v_r \\ &= (\lambda_1-\lambda_r)v_1 + \cdots + (\lambda_{r-1}-\lambda_r)v_{r-1} \\ &\in \operatorname{Eig}(\varphi,\lambda_1)\oplus\cdots\oplus\operatorname{Eig}(\varphi,\lambda_{r-1})\end{aligned}$$

analog:

$(\varphi-\lambda_{r-1}\operatorname{id}_V)\circ(\varphi-\lambda_r\operatorname{id}_V)(v) \in \operatorname{Eig}(\varphi,\lambda_1)\oplus\cdots\oplus\operatorname{Eig}(\varphi,\lambda_{r-2})$

Induktiv erhalten wir:

$$\begin{aligned} 0 &= (\varphi-\lambda_1\operatorname{id}_V)\circ(\varphi-\lambda_2\operatorname{id}_V)\circ\cdots\circ(\varphi-\lambda_r\operatorname{id}_V)(V) \\ \implies 0 &= (\varphi-\lambda_1\operatorname{id}_V)\circ\cdots\circ(\varphi-\lambda_r\operatorname{id}_V) \\ \implies 0 &= ((t-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_r))(\varphi)\end{aligned}$$

$\implies$ Es existiert $g \in K[t]$ mit $(t-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_r) = g\chi_\varphi^{min}$. Wegen $\chi_\varphi^{min}(\lambda_1) = \cdots = \chi_\varphi^{min}(\lambda_r) = 0$ nach 18.23 existiert $h \in K[t]$ mit

$$\chi_\varphi^{min} = (t-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_r)h = g\chi_\varphi^{min}h = gh\chi_\varphi^{min} \implies gh = 1$$

$\implies g,h \in K^*$, χ_φ^{min} normiert $\implies g = h = 1 \implies \chi_\varphi^{min} = (t-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_r)$

2. $\implies$ 1. Sei $\chi_\varphi^{min} = (t-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_1)$, wobei $\lambda_1,\ldots,\lambda_r \in K$ paarweise verschieden. Nach 18.23 sind $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ die EW von φ. Beweis der Behauptung per Induktion nach $n := \dim V$
IA: $n = 1$ klar
IS: Sei $n > 1$, die Behauptung sei für $1,\ldots,n-1$ gezeigt.

a) Behauptung: $V = \ker(\varphi-\lambda_1\operatorname{id}_V)\oplus\operatorname{im}(\varphi-\lambda_1\operatorname{id}_V)$, denn: Nach 7.6 $\exists v, s \in K[t]$ mit

$$(t-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_r) = q(t-\lambda_1)+s, \deg(s) < \deg(t-\lambda_1) = 1$$

das heißt s ist konstantes Polynom. Wegen

$$s(\lambda_1) = (\lambda_1-\lambda_2)\cdot\ldots\cdot(\lambda_1-\lambda_r) - q(\lambda_1)\underbrace{(\lambda_1-\lambda_1)}_{=0} \neq 0$$

das heißt $s \in K^*$. Einsetzen von φ liefert:

$$(\varphi - \lambda_2 \operatorname{id}_V) \circ \cdots \circ (\varphi - \lambda_r \operatorname{id}_V) = q(\varphi) \circ (\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) + s \operatorname{id}_V$$

$\Longrightarrow$ $\forall v \in V$ ist

$$\begin{aligned}
sv &= (\varphi - \lambda_2 \operatorname{id}_V) \circ \cdots \circ (\varphi - \lambda_r \operatorname{id}_V)(v) - q(\varphi) \circ (\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)(v) \\
\Longrightarrow \; v &= \frac{1}{s} \underbrace{(\varphi - \lambda_2 \operatorname{id}_V) \circ \cdots \circ (\varphi - \lambda_r \operatorname{id}_V)(v)}_{=:u} - \underbrace{q(\varphi) \circ (\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)(v)}_{=:w}
\end{aligned}$$

$$(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)(u) = \frac{1}{s}(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \circ \cdots \circ (\varphi - \lambda_r \operatorname{id}_V)(v) = \frac{1}{s} \underbrace{\chi_\varphi^{min}(\varphi)}_{=0}(v) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \; n \in \ker(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \\
w &= \frac{1}{s} q(\varphi) \circ (\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)(v) = \frac{1}{s}((\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \circ q(\varphi))(v) \in \operatorname{im}(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \\
\Longrightarrow \; V &= \ker(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) + \operatorname{im}(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)
\end{aligned}$$

Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen ist

$$\dim \ker(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) + \dim \operatorname{im}(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) = \dim V$$

$\Longrightarrow$ Summe ist direkt $\Longrightarrow$ Behauptung.

b) Wir setzen $W := \operatorname{im}(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)$, dann ist

$$V = \ker(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \oplus W = \underbrace{\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1)}_{\neq 0} \oplus W$$

$\Longrightarrow$ $\dim W < \dim V$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\varphi \circ (\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) = \varphi \circ \varphi - \lambda_1 \varphi = (\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \circ \varphi \\
&\qquad \Longrightarrow \; \varphi(W) = \varphi((\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)(V)) = (\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)(\varphi(V)) \leq (\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)(V) = W
\end{aligned}$$

Wir betrachten die Abbildung $\psi := \varphi\big|_W^W : W \to W$. Sei $\chi_\varphi^{min} = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$. $\Longrightarrow$ $\forall w \in W$ ist

$$\begin{aligned}
\chi_\varphi^{min}(\psi)(w) &= (\psi_n + a_{n-1}\psi_{n-1} + \cdots + a_0 \operatorname{id}_V)(w) \\
&= \psi^n(w) + a_{n-1}\psi^{n-1}(w) + \cdots + a_0 w \\
&= \varphi_n(w) + a_{n-1}\varphi^{n-1}(w) + \cdots + a_0 w \\
&= \big(\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \cdots + a_0 \operatorname{id}_V\big)(w) \\
&= \underbrace{\big(\chi_\varphi^{min}(\varphi)\big)}_{=0}(w) = 0
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \; \chi_\varphi^{min}\psi = 0 \;\Longrightarrow\; \chi_\psi^{min} \mid \chi_\varphi^{min} = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_r)$$

$\implies$ χ_ψ^{min} zerfällt in Linearfaktoren und besitzt nur einfache Nullstellen. $\implies$ ψ diagonalisierbar, das heißt es existiert eine Basis von W aus EV zu $\psi = \varphi|_W^W$. Wegen $V = \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus W$ existiert nach 11.8 eine Basis von V aus EV zu φ, das heißt φ ist diagonalisierbar. $\square$

Beispiel 18.26

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$. Es ist $\chi_A^{min} = (t+1)^2(t-3) \implies A$ ist nicht diagonalisierbar.
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$. Es ist $\chi_A^{min} = (t+1)(t-3) \implies A$ ist diagonalisierbar.

19 Dualraum

In diesem Abschnitt sei V ein K Vektorraum.

Definition 19.1 (Dualraum)

$$V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K) = \{\varphi : V \to K \mid \varphi \text{ linear}\}$$

heißt der **Dualraum** von V, die Elemente aus V^* heißen **Linearformen** auf V.

Beispiel 19.2

1. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n, \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1$ ist eine Linearform auf $\mathbb{R}^n$.
2. $K = \mathbb{R}, V = \mathcal{C}[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$

$$\varphi : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

ist eine Linearform auf $\mathcal{C}[0,1]$

Bemerkung+Definition 19.3 V endlichdimensional $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V. Wir definieren für $i = 1, \dots, n$ die linear Abbildung

$$v_i^* : V \to V, v_j \mapsto \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & 1 \neq j \end{cases}$$

Dann ist $\mathcal{B}^* := (v_1^*, \dots, v_n^*)$ ist eine Basis von V^*, die **duale Basis** zu $\mathcal{B}$.

Beweis

1. $\mathcal{B}^*$ ist linear unabhängig: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K, \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^* = 0. \implies$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ist

$$0 = \underbrace{\lambda_1 v_1^*(v_i)}_{=0} + \dots + \underbrace{\lambda_{i-1} v_{i-1}^*(v_i)}_{=0} + \underbrace{\lambda_i v_i^*(v_i)}_{=1} + \underbrace{\lambda_{i+1} v_{i+1}^*(v_i)}_{=0} + \dots + \underbrace{\lambda_n v_n^*}_{=0} = \lambda_i$$

2. $\mathcal{B}^*$ ist ES von V^*: Sei $\varphi \in V^*$. Setze $\lambda_i := \varphi(v_i)$ für $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow (\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*)(v_i) = \lambda_i = \varphi(v_i), i = 1, \dots, n \\ &\Longrightarrow \varphi = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^* \end{aligned}$$

□

Anmerkung Ist V unendlichdimensional mit Basis $(v_i)_{i\in I}$, dann ist $(v_i^*)_{i\in I}$ (analog definiert) linear unabhängig, aber kein ES von V.

Notation:
Elemente des K^n schreiben wir im Folgenden als Spaltenvektoren. Ist $\varphi \in (K^n)^* = \mathrm{Hom}_K(K^n, K)$, dann existiert nach LA1 ein eindeutig bestimmtes $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in M(1 \times n, K)$ mit

$$\varphi = \tilde{A} : K^n \to K, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Es ist $A = M_{(e_1)}^{(e_1,\dots,e_n)}(\varphi)$. Dementsprechende schreiben wir Elemente von $(K^n)^*$ als Zeilenvektoren.

Beispiel 19.4

1. $V = K^n, \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \Longrightarrow \mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ duale Basis zu $\mathcal{B}$ mit

$$e_i^* = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

Für die Abbildung aus 19.2.1 gilt $\varphi = e_1^* = (1, \dots, 0)$.

2. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (v_1, v_2), v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Es ist $e_1 = v_1, e_2 = v_2 - v_1$

$$\Longrightarrow v_1^*(e_1) = v_1^*(v_1) = 1, v_1^*(e_2) = v_1^*(v_2 - v_1) = \underbrace{v_1^*(v_2)}_{=0} - \underbrace{v_1^*(v_1)}_{=1} = -1$$

$$\Longrightarrow v_1^* = (1, -1)$$

$$\Longrightarrow v_2^*(e_1) = v_2^*(v_1) = 0, v_2^*(e_2) = v_2^*(v_2 - v_1) = \underbrace{v_2^*(v_2)}_{=1} - \underbrace{v_2^*(v_1)}_{=0} = 1$$

$$\Longrightarrow v_2^* = (0, 1)$$

Folgerung 19.5 V endlichdimensional, $v \in V, v \neq 0$. Dann existiert $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(v) \neq 0$

Beweis Ergänze die linear unbhängige Familie (v) zu einer Basis $(v, v_2, \dots, v_n)$ von V. Dann ist $(v^*, v_2^*, \dots, v_n^*)$ eine Basis von V^*, und es ist $v^* v = 1 \neq 0$. □

Anmerkung Die Aussage gilt auch ohne die Vorraussetzung „V endlichdimensional.“

Folgerung 19.6 V endlichdimensional, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von $V, \mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ duale Basis zu $\mathcal{B}$. DAnn gibt es einen Isomorpismus

$$\psi_{\mathcal{B}} : V \to V^*, v_i \mapsto, v_i \mapsto v_i^* \quad (i = 1, \dots, n)$$

Insbesondere ist $\dim V = \dim V^*$

Beweis folgt direkt aus 19.3 □

Bemerkung+Definition 19.7 $U \subseteq V$ UVR

$$U^0 := \{\varphi \in V^* \mid \varphi(u) = 0 \forall u \in U\} \subseteq V^*$$

heißt der Annulator von U. U^0 ist ein UVR von V^*.

Beweis leicht nachzurechnen. □

Satz 19.8 V endlichdimensional, $U \subseteq V$ UVR, $(u_1, \dots, u_k)$ von $U, \mathcal{B} = (u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r)$ Basis von V. Dann ist die Teilfamilie $(v_1^*, \dots, v_r^*)$ von $\mathcal{B}^*$ eine Basis von U^0. Insbesondere ist $\dim U^0 = \dim V - \dim U$.

Beweis

1. $(v_1^*, \dots, v_r^*)$ linear unhabhängig, da Teilfamilie der Basis $\mathcal{B}^*$ von V^*
2. $\operatorname{Lin}((v_1^*, \dots, v_r^*)) = U^0$
„$\subseteq$“ $\varphi \in \operatorname{Lin}((v_1^*, \dots, v_r^*)) \implies$ Es existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit $\varphi = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_r v_r^*$. $\implies$ Für $i = 1, \dots, k$ ist $\varphi(u_i) = \lambda_1 v_1^*(u_i) + \dots + \lambda_1 v_r^*(u_i) = 0 \implies \varphi(u) = 0 \forall u \in U$
„$\supseteq$“ Sei $\varphi \in U^0$. Es existieren $\mu_1, \dots, \mu_k, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit $\varphi = \mu_1 u_1^* + \dots + \mu_k^* + \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_r v_r^* \implies$ Für $i = 1, \dots, k$ ist $0 = \varphi(u_i) = \mu_i \implies \varphi \in \operatorname{Lin}((v_1^*, \dots, v_r^*))$
□

Bemerkung+Definition 19.9 V, W K-Vr, $f : V \to W$ lineare Abbildung. Wir definieren $f^* : W^* \to V^*, \psi \mapsto f^*(\psi) := \psi \circ f$ f^* heißt die zu f duale **Abbildung**. Es gilt: f^* ist linear.

Beweis

- f^* ist wohldefiniert, da $f^*(\psi) = \psi \circ f \in V^* \forall \psi \in W^*$.
- f^* ist linear, denn: Seien $\varphi, \psi \in W^*, \lambda \in K$

$$\implies f^*(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi) \circ f = \varphi \circ f + \psi \circ f = f^*(\varphi) + f^*(\psi)$$

$f^*(\lambda\varphi) = \lambda f^*(\varphi)$ analog. □

Bemerkung 19.10 V, W endlichdimensionaler K-VR. Dann ist die Abbildung

$$^* : \operatorname{Hom}_K(V, W) \to \operatorname{Hom}_K(W^*, V^*), f \mapsto f^*$$

ist ein Isomorphismus von K-VR.

Beweis 1. * ist linear: Seien $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W), \psi \in W^*$

$$\implies (f+g)^*(\psi) = \psi \circ (f+g) = \psi \circ f + \psi \circ g = f^*(\psi) + g^*(\psi) \implies (f+g)^* = f^* + g^*$$

Rest analog.

2. * ist injektiv: Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ wit $f^* = 0 \implies \psi \circ f = 0 \forall \psi \in W^*$. Annahme: $f \neq 0 \implies \exists v \in V : f(v) \neq 0 \implies \exists \varphi \in W^* : \varphi(f(v)) = 0 \implies \circ\varphi \circ f \neq 0$ `

3. * ist surjektiv: Es ist $\dim \mathrm{Hom}_K(V, W) = \dim(V)\dim(W) = \dim(V^*)\dim(W^*) = \dim \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*) \implies$ * surjektiv. □

Satz 19.11 (19.11) V, W endlichdimesionale K-VR, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Basen von V beziehungsweise W, $f : V \to W$ lineare Abbildung. Dann gilt:

$$M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(f^*) = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)\right)^T$$

Beweis Sei $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n), \mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m), M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ insbesondere

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$
$$\implies a_{ij} = w_i^*(f(v_j)) = (w_i^* \circ f)(v_j) = f^*(w_i^*)(v_j)$$

Sei $M_{\mathcal{A}^*}^{\mathcal{B}^*}(f^*) = (b_{ij})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}}$, dann ist

$$f^*(w_i^*) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} v_j^*$$
$$\implies b_{ji} = (f^*(w_i^*))(v_j) = a_{ij}$$ □

Satz 19.12 V, W endlichdimesionale K-VR, $f : V \to W$ lineare Abbildung. Dann gilt:

1. $\mathrm{im}(f^*) = \ker(f)^0$
2. $\ker(f^*) = \mathrm{im}(f)^0$

Beweis 1. „$\subseteq$" Sei $\varphi \in \mathrm{im}(f^*) \subseteq V^* \implies \exists \psi W^* : f^*(\psi) = \varphi$, das heißt $\psi \circ f = \varphi$. $\implies \Big|_{\ker f} = 0 \implies \varphi \in (\ker f)^0$ „$\supseteq$" Sei $\varphi \in (\ker f)^0 \subseteq V^*$, das heißt $\varphi\Big|_{\ker f} = 0$. Zu zeigen: Es existiert ein $\psi \in W^*$ mit $\varphi = f^*(\psi) = \psi \circ f$. Sei $(v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von $\ker f$, $(w_1, \ldots, w_r)$ eine Basis von $\mathrm{im}\, f$, $u_i \in f^{-1}(\{w_i\}), i = 1, \ldots, r \implies (v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_r)$ Basis von V. Wir ergänzen $(w_1, \ldots, w_r)$ zu einer Basis $w_1, \ldots, w_r, v_{r+1}, \ldots, w_m$ von W. $\implies$ Es existier genau eine lineare Abbildung $\psi : W \to K$ mit

$$\psi(w_i) = \begin{cases} \varphi(u_i) & 1 = 1, \ldots, r \\ 0 & i = r+1, \ldots, m \end{cases}$$

Für $i = 1, \ldots, r$ ist $\varphi(u_i) = \psi(w_i) = \psi(f(u_i)) = (\psi \circ f)(u_i)$, und für $i = 1, \ldots, k$ ist $\varphi(v_i) = 0 = \psi(f(v_i))$ Also: $\varphi = \psi \circ f = f^*(\psi)$, das heißt $\varphi \in \mathrm{im}\, f^*$

2. $\varphi \in \ker(f^*) \iff f^*(\varphi) = 0 \iff \varphi \circ f = 0 \iff \varphi(f(v)) = 0 \forall v \in V \iff \varphi\Big|_{imf} = 0 \iff \varphi \in (\operatorname{im} f)^0$ □

Folgerung 19.13 V, W endlichdimensionale K-VR, $f : V \to W$ lineare Abbildung. Dann gilt:

$$\operatorname{Rang}(f^*) = \operatorname{Rang}(f)$$

Beweis $\operatorname{Rang} f^* = \dim \operatorname{im} f^* = \dim(\ker f)^0 = \dim V - \dim \ker f = \dim \operatorname{im} f = \operatorname{Rang}(f)$□

Folgerung 19.14 $A \in M(m \times n, K)$. Dann gilt:

$$\operatorname{Zeilenrang}(A) = \operatorname{Spaltenrang}(A)$$

Beweis Es ist $A = M^{e_1,\dots,e_n}_{(e_1,\dots,e_m)}\left(\tilde{A}\right), A^T = M^{e_1^*,\dots,e_m^*}_{e_1^*,\dots,e_n^*}$

$\operatorname{Spaltenrang}(A) = \dim \operatorname{im} \tilde{A} = \operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang}\left(\tilde{A}^*\right) = \operatorname{Spaltenrang}\left(A^t\right) = \operatorname{Zeilenrang}(A)$

□

Definition 19.15 $V^{**} := (V^*)^* = \operatorname{Hom}_K(V^*, K)$ heißt der Bidualraum von V.

Satz 19.16 V endlichdimensional. Dann gibt es einen kanonischen (das heißt basisunabhängigen) Isomorphismus

$$i : V \to V^{**}, v \mapsto i_v, i_v : V^* \to K, \varphi \mapsto \varphi(v)$$

Beweis
1. i wohldefinier und linear: leicht nachzurechnen.
2. i injektiv: Sei $v \in \ker i \implies i_v = 0 \implies \forall \varphi \in V^* = \operatorname{Hom}_K(V, K) : \varphi(v) = 0 \implies v = 0$
3. $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$. Somit nach 12.15: i Isomorphismus □

Anmerkung
- Im Gegensatz zu $\psi_{\mathcal{B}} : V \to V^*$ ist der Isomorphismus $i : V \to V^{**}$ unabhängig von der Wahl einer Basis, das heißt V und V^* sind unkanonisch isomorph, V nud V^{**} sind kanonisch isomorph (für V endlichdimensional).
- Ist V unendlichdimesionsal, dann liefert i zumindest nach eine kanonische Inklusion von V nach V^{**}. Diese ist jedoch die surjektiv.

20 Bilinearformen

In diesem Abschnitt sei V stets ein K-VR.

Definition 20.1 $\gamma : V \times V \to K$ heißt eine Bilinearform auf V, genau dann wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (B1) $\gamma(v_1 + v_2, w) = \gamma(v_1, w) + \gamma(v_2, w), \gamma(\lambda v, w) = \lambda\gamma(v, w)$
- (B2) $\gamma(v, w_1 + w_2) = \gamma(v, w_1) + \gamma(v, w_2), \gamma(v, \lambda w) = \lambda\gamma(v, w)$

$\forall v, w, v_1, v_2, w_1, w_2 \in V, \lambda \in K.$

Beispiel 20.2

1. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n, \gamma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \gamma\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_2$ ist eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$.
2. $K = \mathbb{R}, V = l[0,1], \gamma : l[0,1] \times l[0,1] \mapsto \mathbb{R}, \gamma(f, g) := \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ ist eine Bilinearform auf $l[0,1]$.
3. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, \gamma : \mathbb{R}^2 \times R^2 \to \mathbb{R}, \gamma\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2$ ist eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$.

Definition 20.3 V endlichdimensional, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V, γ Bilinearform auf V

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = (\gamma(v_i, v_j))_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \in M(n \times n, K)$$

heihßb die **Darstellungsmatrix** (**Fundamentalmatrix**) von γ bezüglich $\mathcal{B}$.

Beispiel 20.4

1. In 20.2a ist für $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) : M_{\mathcal{B}}(\gamma) = E_n$
2. In 20.2p ist für $\mathcal{B} = (e_1, e_2) : M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Bemerkung 20.5 V endlichdimensional, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V, γ Bilinearform auf V, $A = M_{\mathcal{B}}(\gamma)$, $\Phi_{\mathcal{B}} : K^n \to V$ Koordinatensystem zu $\mathcal{B}, v, w \in V, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)$, das heißt $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$,

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)$$

das heißt $w = q_1v_1 + \cdots + y_nv_n$. Dann gilt:

$$\gamma(v, w) = \Phi_{\mathcal{B}^{-1}}^{T} A \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) = x^t Ay = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Beweis Es ist

$$y(v,w) = \gamma(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n, y_1v_1 + \cdots + y_nv_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_iy_j\gamma(v_i,v_j)$$
$$= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n \gamma(v_i,y_j)y_j = x^TAy \qquad \square$$

Bemerkung 20.6 V endlichdimensional, $\mathcal{B} = (v_1,\dots,v_n)$ Basis von $V, A \in M(n\times n, K)$. Dann gilt: Durch

$$\Delta_A^{\mathcal{B}} : V\times V \to K, (v,w) \mapsto \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T A \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)$$

ist eine Bilinearform auf V gegeben.

Beweis Nachrechnen. $\square$

Beispiel 20.7 (wichtiger Spezialfall von 20.6)
$V = K^n, \mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n), A \in M(n\times n,K) \implies \Phi_{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{K^n}$. Durch

$$\Delta_A^{(e_1,\dots,e_n)} : K^n \times K^n \to K, (v,w) \mapsto v^tAw$$

ist eine Bilinearform auf K^n gegeben. Wir setzen kurz $\Delta(A) := \Delta_A := \Delta_A^{(e_1,\dots,e_n)}$

Bemerkung+Definition 20.8 $\mathrm{Bil}(V) := \{\gamma : V\times V \to K \mid \gamma \text{ ist Bilinearform }\}$ ist ein K-VR, ist ein UVR vom K-VR $\mathrm{Abb}(V\times V, K)$

Bemerkung 20.9 V endlichdimensional, $\mathcal{B} = (v_1,\dots,v_n)$ Basis von V. Dann gilt: Die Abbildung

$$M_{\mathcal{B}} : \mathrm{Bil}(V) \to M(n\times n, K)$$

ist ein Isomorphismus von K-VR mit Umkehrabbildung

$$\Delta^{\mathcal{B}} : M(n\times n,K) \to \mathrm{Bil}(V), A \mapsto \Delta_A^{\mathcal{B}}$$

Beweis 1. $M_{\mathcal{B}}$ linear: nachrechnen.

2. $\Delta^{\mathcal{B}} \circ M_{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Bil}(V)}$, denn: Sei $\gamma \in \mathrm{Bil}(V)$

$$\implies \big(\Delta^{\mathcal{B}} \circ M_{\mathcal{B}}\big)(\gamma)(v_i,v_j) = \Delta^{\mathcal{B}}_{M_{\mathcal{B}}(\gamma)}(v_i,v_j) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-v}(v_1)^t M_{\mathcal{B}}(\gamma)\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_j)$$
$$= e_i^T M_{\mathcal{B}}(\gamma) e_j = \gamma(v_i,v_j)$$

3. $M_{\mathcal{B}} \circ \Delta^{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_{M(n\times n,K)}$, denn: Sei $A = (a_{ij}) \in M(n\times n,K), B = (b_{ij}) = \big(M_{\mathcal{B}} \circ \Delta^{\mathcal{B}}\big)(A) = M_{\mathcal{B}} \circ \Delta_A^{\mathcal{B}}$

$$b_{ij} = \Delta_A^{\mathcal{B}}(v_i,v_j) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_i)^T A \Phi_{\mathcal{B}}(v_j) = e_i^T A e_j = a_{ij}$$

$\implies B = A$ $\square$

Satz 20.10 V endlichdimensional, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Basen von V, γ Bilinearform auf V. Dann gilt:

$$M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$$

Beweis Für $v, w \in V$ ist

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{B}}(w) = \gamma(v, w) = \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) \Phi_{\mathcal{A}}^{-1}(w)$$

16.2.2: $\tilde{T}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{A}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}}$

$$\begin{aligned} &= \left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)\right)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) \\ &= \left(\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}\right)^T \left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) \\ \implies \Delta^{\mathcal{B}}(M_{\mathcal{B}}(\gamma))(v, w) &= \Delta^{\mathcal{B}}\Big(\left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\Big)(v, w) \\ \implies \Delta^{\mathcal{B}}(M_{\mathcal{B}}(\gamma)) &= \Delta^{\mathcal{B}}\Big(\left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\Big) \end{aligned}$$

$\Delta^{\mathcal{B}}$ Isomorphismus

$$\implies M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \left(T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}\right)^T M_{\mathcal{A}}(\gamma) T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} \qquad \square$$

Definition 20.11 V endlichdimensional, γ Bilinearform auf V. Wir setzen $\operatorname{Rang}(\gamma) := \operatorname{Rang} M_{\mathcal{B}}(\gamma)$, wobei $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist.

Anmerkung Dies ist wohldefiniert. (folgt aus 20.10, da die Matrizen $T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ invertierbar sind)

Bemerkung+Definition 20.12 Es gilt:

1. Ist $\gamma : V \times V \to K$ eine Bilinearform, dann induziert γ die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \Gamma_l : V \to V^*, w \mapsto \gamma(\cdot, w) \qquad & \gamma(\cdot, w) : V \to K, v \mapsto \gamma(v, w) \\ \Gamma_r : V \to V^*, v \mapsto \gamma(v, \cdot) \qquad & \gamma(v, \cdot) : V \to K, v \mapsto \gamma(v, w) \end{aligned}$$

2. Jede lineare Abbildung $\Gamma : V \to V^*$ induziert Bilinearformen

$$\begin{aligned} \gamma_l : V \times V \to K, \gamma_l(v, w) := \Gamma(w)(v) \\ \gamma_r : V \times V \to K, \gamma_r(v, w) := \Gamma(v)(w) \end{aligned}$$

Die Zuordnungen aus 1., 2. induzieren den Isomorphismus $\operatorname{Bil}(V) \cong \operatorname{Hom}_K(V, V^*)$

Beweis Nachrechnen. $\square$

Definition 20.13 γ Bilinearform auf V. γ heißt **nicht-ausgeartet** $\iff$ Γ_l und Γ_r sind injektiv.

$$\iff \gamma(v,w) = 0 \forall v \in V \implies w = 0$$

(Injektivität von Γ_l), und

$$\iff \gamma(v,w) = 0 \forall w \in V \implies v = 0$$

(Injektivität von Γ_r).
γ heißt **perfekt** $\iff$ Γ_l und Γ_r sind Isomorphismen.

Bemerkung 20.14 V endlichdimensional, γ Bilinearform auf V, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V, $\mathcal{B}^*$ duale Basis zu $\mathcal{B}$. Dann gilt:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\Gamma_l) = M_{\mathcal{B}}(\gamma) = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\Gamma_r)\right)^T$$

Beweis Behauptung: Es ist $\Gamma_l(v_i) = \gamma(v_1, v_i)v_1^* + \cdots + \gamma(v_n, v_i)v_n^*$, denn $\Gamma_l(v_i)(v_j) = \gamma(v_j, v_i)$ nach Definition

$$(\gamma(v_1, v_i)v_1^* + \cdots + \gamma(v_n, v_i)v_n^*)(v_j) = \gamma(v_j = v_i)$$

Somit: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\Gamma_l) = M_{\mathcal{B}}(\gamma)$.
Analog: $\Gamma_r(v_i) = \gamma(v_i, v_1)v_1^* + \cdots + \gamma(v_i, v_n)v_n^* \implies M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\Gamma_r) = (M_{\mathcal{B}}(\gamma))^T$ □

Folgerung 20.15 V endlichdimensional, γ Bilinearform auf V, $\mathcal{B}$ Basis von V. Dann sind äquivalent:

1. γ ist nich-ausgeartet
2. γ ist perfekt
3. $M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ invertierbar
4. Γ_l injektiv
5. Γ_r injektiv

Beweis 1. $\iff$ 2. wegen $\dim V = \dim V^*$ und 12.12
γ perfekt $\iff$ Γ_l, Γ_r Isomorphismen $\iff$ $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\Gamma_l), M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\Gamma_r)$ invertierbar $\iff$ $M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ invertierbar. $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\Gamma_l), M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\Gamma_r)$ $\iff$ Γ_l Isomorphismus $\iff$ $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}$ invertierbar. □

Definition 20.16 γ Bilinearform auf V.
γ heißt **symmetrisch** $\iff$ $\gamma(v,w) = \gamma(w,v) \forall v,w \in V$
γ heißt **antisymmetrisch** $\iff$ $\gamma(v,w) = -\gamma(w,v) \forall v,w \in V$
γ heißt **alterniernd** $\iff$ $\gamma(v,v) = 0 \forall v \in V$.

Anmerkung
- γ symmetrisch $\implies$ $\Gamma_l = \Gamma_r$
- Für $\mathrm{char}(K) \neq 2$ gilt: γ alterniernd $\iff$ γ antisymmetrisch

- Für $\operatorname{char}(K) = 2$ gilt immer noch γ alternierend $\implies$ γ (anti)symmetrisch Die Umkehrung ist falsch: $\gamma : \mathbb{F}_2^3 \times \mathbb{F}_2^3 \to \mathbb{F}, \gamma(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ ist (anti)symmetrisch, aber nicht alternierend:
$$\gamma\left(\begin{pmatrix}\bar{1}\\\bar{0}\\\bar{0}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\bar{1}\\\bar{0}\\\bar{0}\end{pmatrix}\right) = \bar{1} \neq \bar{0}$$

Bemerkung 20.17 V endlichdimensional, $\mathcal{B}$ Basis von V, γ Bilinearform auf V. Dann gilt:

1. γ symmetrisch $\iff$ $M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ ist symmetrisch, das heißt $M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T = M_{\mathcal{B}}(\gamma)$
2. γ antisymmetrisch $\iff$ $M_{\mathcal{B}}(\gamma)$ ist antisymmetrisch, das heißt $M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T = -M_{\mathcal{B}}(\gamma)$

Beweis 1. „$\implies$" klar
„$\impliedby$" Sei $M_{\mathcal{B}}(\gamma) = M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T \implies$ Für v, w ist
$$\begin{aligned}\gamma(v,w) &= \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma)\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma)^T \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)^T \\ &= \underbrace{\left(\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma)\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}\right)^T}_{\in K} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w)^T M_{\mathcal{B}}(\gamma)\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v) = \gamma(w,v).\end{aligned}$$

2. analog. □