Analysis III (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

26. Oktober 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie

Motivation: Erweiterung des Riemannintegrals auf einen größeren Bereich von Funktionen

Satz 1.1 (Kriterium für Riemann Integrierbarkeit) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f genau dann Riemann integrierbar, falls die Menge S der Unstetigkeiten von f eine Nullmenge ist, im Sinne, dass es für jedes für jedes $\varepsilon > 0$ eine abzählbare Familie von Intervallen I_i gibt, mit

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon$$

Bemerkung Insbesondere ist die Funktion

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nicht Riemann integrierbar.

Das Riemann-Integral der Funktion ist definiert über eine Zerlegnug des Definitionsbereiches in kleine Intervalle. Beim Lebesgue Integral wird stattdessen der Bildbereich zerlegt! Für eine nichtnegative $f : \Omega \to [0, \infty], \Omega \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Mengen

$$E_k := f^{-1}((t_k, t_{k+1}]) \subset \mathbb{R}^n$$

wobei $t_k = hk$ für ein vorgegebenens $h > 0$, und approximieren dann das Integral von f durch

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_k^{(h)} \mu(E_k) \leq \int f(x) \mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{\infty} t_{k+1}^{(h)} \mu(E_k) \tag{$*$}$$

wobei das **Maß** $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ eine Abbildung ist, welche das Maß der Menge $E = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ misst. Das Integral ergibt sich aus $(*)$ im Limes $h \to 0$. Für das Lebesgue-Integral müssen wir ein geeignetes Maß definieren $\to$ Lebesguemaß $\mathcal{L}^n$

$$\int_0^1 f(x) \mathrm{d}\mathcal{L}^1(x) = \underbrace{\mathcal{L}^1(\mathbb{Q})}_{0} \cdot 1 + \underbrace{\mathcal{L}^2(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}_{1} \cdot 0 = 0$$

Definition 1.2 (Maßproblem) Wir suchen eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ mit den folgenden Eigenschaft

1. $\mu(A) \subseteq \mu(B) \forall A \subset B$ (Monotonie)
2. $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ falls $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$ (σ-Additivität)
3. $\mu([0,1]^n) = 1$ (Normierung)
4. $\mu(QA + y) = \mu(A)$ falls $Q \in O(n), y \in \mathbb{R}^n$ (Euklidische Invarianz)

Dieses Problem heißt Maßproblem. In einer etwas schwächeren Version kann man auch fordern

2. $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)$
4. $\mu(A + y) = \mu(A)$ für $y \in \mathbb{R}^n$

Satz 1.3 (Vitali: 1908) Es gibt keine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ welche die Forderungen des Maßproblems erfüllt.

Beweis Sei $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ eine Abbildung die die Forderungen des Maßproblems erfüllt. Sei $q_i, i \in \mathbb{N}$ eine Abzählung von $[0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$. Wir definieren die Äquivalenzrelation $x \sim y$ auf $E := [0,1]^n$ durch $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Nach dem Auswahlaxiom gibt es eine Menge $M_0 \subset [0,1]^n$, welche aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält, das heißt es gilt:

1. $\forall y \in [0,1]^n \exists x \in M_0 : x \sim y \in \mathbb{Q}$
2. Aus $x, y \in M_0, x - y \in \mathbb{Q} \implies x = y$

Wir definieren $M_i = M_0 + q_i$. Aus der Definition von M_i folgt $M_i \cap M_j = \emptyset \forall i \neq j$. In der Tat falls $x \in M_i \cap M_j$, dann $x - q_i \in M_0$ und $x - q_j \in M_0 \overset{1.}{\Rightarrow} q_i = q_j$. Außerdem gilt $[0,1]^n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \subset [0,2]^n$. Die erste Einbettung folgt aus 1., die zweite Einbettung gilt, da $y + q_j \in [0,2]^n \forall y \in M_0$ und $y \in [0,1]^n$ schließlich gilt $\mu(M_j) = \mu(M_0) \forall j \in \mathbb{N}$. Dies folgt aus den Forderungen 1., 3., 4. (abgeschwächte Version reicht).

$$\implies 1 = \mu([0,1]^n) \leq \mu\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} M_j\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(M_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(M_0) \implies \mu(M_i) = \mu(M_0) > 0$$

und

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i\right) = \infty$$

Aus 3. und 4. folgt andererseits

$$\mu([0,2]^n) = 2^n \mu([0,1]^n) = 2^n$$
$$\overset{(*)}{\implies} \mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i\right) \leq \mu([0,2]^n) = 2^n < \infty` \qquad \square$$

Bemerkung Jedes Maß, welche die Eigenschaften des Maßproblems erfüllt, kann also nicht auf der ganzen $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ definiert sein, sondern auf einer Untermenge der $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Frage: Welche ist die „größte" (eine „gute") Untermenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, sodass es eine Lösung des Maßproblems gibt?

Definition 1.4 (Algebra und σ-Algebra) Eine Algebra $\mathcal{A}$ ist die Familie von Teilmengen einer gegebenen Menge X mit

- $x \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \implies A^C := X \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$

Falls

$$(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \implies \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A \in \mathcal{A}$$

so spricht man von einer σ-Algebra.

Lemma 1.5 Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ Algebra und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$. Dann gehören $\emptyset, \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ und $A_1 \setminus A_2$ zu $\mathcal{A}$.

Beweis (Übung) □

Definition 1.6 (Erzeugte und relative σ -Algebra) Für $S \subset \mathcal{P}(X)$ wird

$$\Sigma(S) = \Sigma(S \mid X) := \bigcap \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra mit } S \subseteq \mathcal{A}\}$$

als die von S erzeugte σ-Algebra bezeichnet. $\forall Y \subset X$ definieren wir die relative σ-Algebra

$$\mathcal{A} \cap Y := \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{A}\}$$

Lemma 1.7 Die erzeugte relative σ-Algebra sind wohldefiniert. Für alle Mengen $S \subset \mathcal{P}(X), Y \subset X$ gilt

$$\Sigma(S \cap Y \mid Y) = \Sigma(S \mid X) \cap Y$$

Beweis (Übungen) □

Definition 1.8 (Topologischer Raum) Ein topologischer Raum ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus Menge X und $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ mit

- $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
- $U, V \in \mathcal{O} \implies U \cap V \in \mathcal{O}$
- $(U_k)_{k\in I} \subset \mathcal{O} \implies \bigcup_{k\in I} U_k \in \mathcal{O}$ für eine beliebige Indexmenge I.

Die Elemente von $\mathcal{O}$ werden als **offene Menge** bezeichnet.

Bemerkung Topologische Raum ist abgeschlossen unter endlichen Schnitten und abzählbaren Vereinigungen.

Definition 1.9 (Borel-σ-Algebra, Borel Menge) Ist X ein topologischer Raum, so ist die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$ diejenige σ-Algebra, die von den offenen Mengen erzeugt wird. Ihre Elemente heißen Borel-Mengen.

$$\mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$
$$\mathcal{B} := \mathcal{B}^1$$

Bemerkung Die σ-Algebra die von den abgeschlossenen Wengen erzeugt wird, ist ebenfalls identisch mit der Borel σ-Algebra.

Definition 1.10 (Messraum, Maß, Maßraum) Eine Menge X mit einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt **Messraum**. Ein **Maß** ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$ für disjunkte Mengen σ-Additivität

Die Elemente in $\mathcal{A}$ heißen messbar, und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **Maßraum**.

Definition 1.11 (σ-Finitheit) Ein Mah heißt σ-finit, falls es eine abzählbare Überdeckung $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ von X gibt, also

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$$

sodass $\mu(X_k) < \infty \forall k$.
μ heißt endlich falls $\mu(X) < \infty$. Bei Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu(X) = 1$.

Beispiel 1.12

1. Zählmaß: Für X und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ setze für $A \in \mathcal{A}$:

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A & A \text{ endlich} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

μ ist endlich falls X endlich und σ-finit wenn X abzählbar.

2. Dirac-Maß: Für einen fest gewählten $x_0 \in X$ und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ setzen wir für $A \subset X$

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & x_0 \notin A \\ 1 & x_0 \in A \end{cases}$$

3. Positive Linearkombination: μ_1, μ_2 Maße auf $(X, \mathcal{A})$. Dann ist $\mu := \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$ für $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ wieder ein Maß

Lemma 1.13 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $Y \in \mathcal{A}$. Dann ist $\mu\mid_Y(A) := \mu(A \cap Y) \forall A \in \mathcal{A}$ wieder ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$. Durch Einschränken der σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{A}\mid_Y := \{A \in \mathcal{A} \mid A \subset Y\}$ wird $(Y, \mathcal{A}\mid_Y, \mu\mid_Y)$ auch ein Maßraum. Falls $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-finit, dann $(Y, \mathcal{A}\mid_Y, \mu\mid_Y)$ auch.

Notation: Zu $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ schreiben wir

- $A_k \nearrow A (k \to \infty)$ falls $A_k \subset A_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$ und $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$
- $A_k \searrow A (k \to \infty)$ falls $A_k \supset A_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$ und $A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$

Satz 1.14 Für jeden Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ gilt

1. $A_1 \subset A_2 \implies \mu(A_1) \leq \mu(A_2)$ (Monotonie)
2. $\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$ (σ-Subadditivität)
3. $A_k \nearrow A \implies \mu(A_k) \nearrow \mu(A)$ für $(k \to \infty)$ (Stetigkeit von Unten)
4. $A_k \searrow A \implies \mu(A_k) \searrow \mu(A)$ für $(k \to \infty)$ und $\mu(A_1) < \infty$ (Stetigkeit von Oben)

Beweis

1. $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \implies B = A \,\dot\cup\, (B \setminus A), B \setminus A \in \mathcal{A} \implies \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$

2. Wir definieren $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ durch

$$B_1 := A_1, B_{k+1} := A_{k+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{k} A_k \implies \dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} B_k \qquad = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$$

   Nach Definition gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$$

3. Definieren $(C_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ durch

$$\begin{aligned} C_1 &:= A_1 \\ C_{k+1} &:= A_{k+1} \setminus A_k \end{aligned}$$

   Es gilt

$$\implies \dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} C_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = A\mu(A_k) \qquad = \sum_{j=1}^{k} \mu(C_j) \xrightarrow{k\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(C_k) = \mu(A) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$$

4. $D_k := A_1 \setminus A_k \forall k \in \mathbb{N}$. Damit ist $D_k \nearrow A_1 \setminus A$ und

$$\mu(A_1) - \mu(A_k) = \mu(A_1 \setminus A_k) \xrightarrow{k\to\infty} [3.]\mu(A_1 \setminus A) = \mu(A_1) - \mu(A)$$

   Subtraktion von $\mu(A_1) < \infty$ liefert die Behaptung. □

Beispiel 1.15 $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty], \mu(A) := \#A$. Die Mengenfolge $A_n := \{n, n+1, n+2, \dots\}$ ist fallend gegen die leere Menge, aber es ist

$$0 = \mu(\emptyset) \neq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \infty$$

Definition 1.16 (Borel-Maß) Set X ein topologischer Raum. Ein Maß auf einer Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$ heißt Borel-Maß, falls es auf Kompakta stets endlich Werte annimmt.

Beispiel 1.17 Für $X = \mathbb{R}$ ist das Dirac-Maß ein Brel-Maß, aber nicht das Zählmaß.

Definition 1.18 (Regularität) Sei X ein topologischer Raum, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Das Maß μ heißt **regulär von außen**, wenn für $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subset U, U \text{ offen}\}$$

μ heißt **regulär von innen**, wenn für $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A, K\text{kompakt}\}$$

Beispiel 1.19 Das Zählmaß mit $X = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathcal{B}$, ist regulär von inne, aber nicht von außen. Das Dirac-Maß ist regulär.

Definition (Kompaktheit) Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann nennt man A kompakt, wenn *jede* offene Überdeckung von A eine *endliche* Teilüberdeckung besitzt. Das beutet:

$$\forall I \exists I' \subset I, |I'| < \infty : A \subset \bigcup_{i\in I} A_i \implies A \subset \bigcup_{i\in I'} A_i$$

Bemerkung In einem metrischen Raum isnd die bisherigen Definitionen der Kompaktheit mit der neu eingeführten äquivalent.

Konstruktion von Maßen
Strategie:

1. Starte mit einem Prämaß λ auf einer Algebra endlichen, disjunkten Vereinigungen von Intervallen, λ = Summe der Längen
2. Dieses Prämaß kann zu einem äußeren Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ fortgesetzt werden (keine σ-Additivität)
3. Einschränkung auf Borel-σ-Algebra liefert ein Maß.

Definition 1.20 (Dynkin-System) Eine Familie $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$, X Menge, heißt Dynkin-System, falls gilt:

1. $X \in \mathcal{D}$
2. $A \in \mathcal{D} \implies A^C \in \mathcal{D}$
3. $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}, A_k \cap A_l = \emptyset \forall k, l \in \mathbb{N}, k \neq l \implies \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N} A_k \in \mathcal{D}}$

Bemerkung 1. Ein Dynkin-System it abgeschlossen bezüglich Mengensubtraktion:

$$A, B \in \mathcal{D}, B \subset A \implies A \setminus B = A \cap B^C = \left(A^C \cup B\right)^C \in \mathcal{D}$$

2. Ist $S \subset \mathcal{P}(X)$, so ist

$$\mathcal{D}(S) = \bigcap \{\mathcal{D} \mid \mathcal{D} \text{ Dynkin-System}, S \subset \mathcal{D}\}$$

das von S erzeugte Dynkin-System

3. Das von S erzeugte Dynkin-System ist wohldefinieret, dass heiß, es ist eindeutig und tatsächlich ein Dynkin-System.

Lemma 1.21 Ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System und abgeschlossen bezüglich endlicher Schnitte oder alternativ bezüglich beliebiger (also nicht disjunkter) endlicher Vereinigung, so ist $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra

Beweis Übungen □

Lemma 1.22 Sei S eine (nicht leere) Familie von Teilmengen einer Menge X, die abgeschlossen ist unter endlichen Schnitten sind, dann folgt $\mathcal{D}(S) = \Sigma(S)$

Beweis Nach Definition gilt $\mathcal{D} \subset \Sigma(S)$. Die andere Inklusion folgt sofort, wenn wir zeigen, dass $\mathcal{D}(S)$ σ-Algebra ist. Nach Lemma 1.21 genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{D}(S)$ abgeschlossen ist unter endlichen Schnitten. Definiere für ein beliebiges $A \in \mathcal{D}(S)$

$$D(A) := \{B \in \mathcal{D} \mid A \cap B \in \mathcal{D}\} \subset \mathcal{D}$$

wir müssen beweisen $D(A) = \mathcal{D}$ für alle $A \in \mathcal{D}$. Es gilt

1. $X \in \mathcal{D}, A \cap X = A \in \mathcal{D} \implies X \in D(A)$
2. $B \in D(A) \implies B \in \mathcal{D}, A \cap B \in \mathcal{D}$ woraus folgt

$$A \cap B^C = A \setminus (B \cap A) \in \mathcal{D} \implies B^C \in D(A)$$

3. $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k, B_k \in D(A) \implies B_k \in \mathcal{D}, A \cap B_k \in \mathcal{D}$ woraus folgt, dass $B \in \mathcal{D}$ und
$$B \cap A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (B_k \cap A) \in \mathcal{D} \implies B \in D(A)$$

Behauptung: $A \in S \implies S \subset D(A)$, denn: $B \in S \implies A \cap B \in S \implies B \in D(A)$. Da $\mathcal{D} = D(S)$ das kleinste Dynkin-System ist, das S enthätlt folgt $\mathcal{D} \subset D(A) \implies \mathcal{D} = D(A)$. Für beliebiges $U \in S, V \in \tilde{\mathcal{D}} = D(U)$ folgt nach Definition $U \cap V \in \mathcal{D}$. Dies impliziert $U \in D(V)$, also $S \subset D(V) \forall V \in \mathcal{D}$. Wie eben ist $D(V) \subset \mathcal{D}$, also $D(V) = \mathcal{D} \forall V \in \mathcal{D}$. □

Bemerkung Lemma 1.22 lässt sich wie folgt anwenden:

1. Verifiziere eine Eigenschaft ε auf einer Menge $S \subset \mathcal{P}(X)$, die abgeschlossen ist unter endlichen Schnitten ist.
2. Zeige, dass die Menge aller Mengen, die ε erfüllen ein Dynkin-System ist.
3. Schließe, dass ε auf $\Sigma(S)$ gilt.

Satz 1.23 (Eindeutigkeit von Maßen) Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und $S \subset \mathcal{P}(X)$ Familie von Menge, die abgeschlossen unter endlichen Schnitten und $\Sigma = \Sigma(S)$. Weiter enthalte S eine Folge aufsteigender Mengen $(X_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset S$ mit $X_k \nearrow X$ und $\mu(X_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist μ auf $\Sigma = \Sigma(S)$ durch die Werte auf S eindeutig bestimmt.

Beweis Sei $\tilde{\mu}$ ein weiteres Maß mit $\tilde{\mu} = \mu$ auf S. Dann gilt
$$\tilde{\mu}(X) = \lim_{k \to \infty} \tilde{\mu}(X_k) = \lim_{k \to \infty} \mu(X_k) = \mu(X)$$
zunächst $\mu(X) < \infty$. Idee:
$$\mathcal{D} = \{A \in \Sigma \mid \tilde{\mu}(A) = \mu(A)\}$$
ist ein Dynkin-System.
$X \in \mathcal{D}$ bereits gezeigt. Für $A \in \mathcal{D}$ ist
$$\tilde{\mu}(A^C) = \tilde{\mu}(X) - \tilde{\mu}(A) = \mu(X) - \mu(A) = \mu(A^C)$$
$\implies A^C \in \mathcal{D}$. Betrachte $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}, B_k \cap B_l = \emptyset \forall k, l \in \mathbb{N}, k \neq l$ und $B_k \in \mathcal{D}$ sowie $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$. Dann gilt
$$\tilde{\mu}(B) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}(B_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_k) = \mu(B)$$
Nach Lemma 1.22 folgt also $\Sigma = \Sigma(S) = \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D} \subset \Sigma \implies \mathcal{D} = \Sigma$.
Im allgemeinen Fall erhalten wir für $A \in \Sigma$:
$$\tilde{\mu}(A) = \lim_{k \to \infty} \tilde{\mu}(A \cap X_k) = \lim_{k \to \infty} \mu(X_k \cap A)$$
□

Definition 1.24 (Prämaß) Sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Algebra. Ein **Prämaß** auf X ist eine σ-additive Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$.

Bemerkung Man braucht nur die σ-Additivität für solche (paarweise disjunkte) Folgen $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ gewährleisten, deren Vereinigung
$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$$
Ein Prämaß auf einer σ-Algebra ist ein Maß.