Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2016/17

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. D. Vogel
Dr. M. Witte

Blatt 8
Abgabetermin: Donnerstag, 15.12.2016, 9.30 Uhr

Aufgabe 1. *(Matrizenrechnung)*

(a) Berechnen Sie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^2$$

(b) Bestimmen Sie eine Zeilenstufenform der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die gegebenen Matrizen sollen dabei als Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ aufgefasst werden.

Im Folgenden sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2. *(Permutationsmatrizen)* Für eine Permutation $\sigma \in S_m$ sei $P_\sigma = (p_{k,\ell})$ die $m \times m$-Matrix mit den Einträgen

$$p_{k,\ell} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = \sigma(\ell), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $A = (a_{i,j})$ eine $m \times n$-Matrix mit Einträgen aus K, so gilt $P_\sigma A = (a_{\sigma^{-1}(i),j})$, d. h. P_σ permutiert die Zeilen von A.

(b) P_σ ist invertierbar und $f\colon S_m \to \mathrm{GL}(m, K)$, $\sigma \mapsto P_\sigma$ ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

(P_σ heißt *Permutationsmatrix* zu σ).

Tipp: Machen Sie sich zunächst an Beispielen klar, dass die Aussagen gelten.

Aufgabe 3. *(Elementarmatrizen)* Für $i, j \in \{1, \dots, m\}$ mit $i \neq j$ und $\lambda \in K$ sei $E_{i,j}(\lambda) = (e_{k,\ell})$ die $m \times m$-Matrix mit den Einträgen

$$e_{k,\ell} = \begin{cases} 1 & k = \ell \\ \lambda & k = i \text{ und } \ell = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $i \in \{1, \dots, m\}$ und $\mu \in K^\times$ sei $D_i(\mu) = (d_{k,\ell})$ die $m \times m$-Matrix mit den Einträgen

$$d_{k,\ell} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = \ell \neq i, \\ \mu & \text{falls } k = \ell = i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $i, j \in \{1, \dots, m\}$ mit $i \neq j$ sei $P_{i,j}$ die Permutationsmatrix zu der Permutation $\sigma \in S_m$, die i und j vertauscht und alle anderen Elemente von $\{1, \dots, m\}$ auf sich selbst abbildet.

(a) Beschreiben Sie die elementaren Zeilenumformungen (Definition 10.5 aus der Vorlesung) durch Linksmultiplikation einer $m \times n$-Matrix A mit den Matrizen $E_{i,j}(\lambda)$, $P_{i,j}$ und $D_i(\mu)$.

(b) Zeigen Sie: $E_{i,j}(\lambda)$ und $P_{i,j}$ lassen sich als Produkte von Matrizen der Form $E_{k,\ell}(1)$ und $D_k(\mu)$ für $\mu \in K^\times$ und $k, \ell \in \{1, \dots, m\}$ schreiben.

(Matrizen der Form $E_{i,j}(\mu)$, $P_{i,j}$ und $D_i(\mu)$ mit $i \neq j \in \{1, \dots, m\}$, $\mu \in K^\times$ heißen *Elementarmatrizen*.)

Aufgabe 4. *(Elementare Scherungs- und Streckungsmatrizen)* Wir behalten die Notation aus Aufgabe 3 bei. Zeigen Sie:

(a) $E_{i,j}(\lambda)$ ist invertierbar und $(K, +) \to \mathrm{GL}(m, K)$, $\lambda \mapsto E_{i,j}(\lambda)$ ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

(b) $D_i(\mu)$ ist invertierbar und $K^\times \to \mathrm{GL}(m, K)$, $\mu \mapsto D_i(\mu)$ ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

(Matrizen der Form $E_{i,j}(\lambda)$ werden manchmal als *elementare Scherungsmatrizen*, die Matrizen $D_i(\mu)$ als *elementare Streckungsmatrizen* bezeichnet.)

Zusatzaufgabe 5. *(Das Zorn'sche Lemma und das Auswahlaxiom)* Zeigen Sie, dass das Zorn'sche Lemma das Auswahlaxiom impliziert:

> Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von nichtleeren Mengen. Dann gibt es eine Abbildung
>
> $$\phi \colon I \to \bigcup_{i \in I} M_i$$
>
> mit $\phi(i) \in M_i$ für alle $i \in I$.

Betrachten Sie dazu die Menge P der Paare (J, ψ) mit $J \subseteq I$ und

$$\psi \colon J \to \bigcup_{i \in J} M_i$$

mit $\psi(i) \in M_i$ für alle $i \in J$ und definieren Sie eine geeignete Halbordnung auf P. (Umgekehrt impliziert das Auswahlaxiom das Lemma von Zorn. Diese Implikation ist aber schwieriger zu zeigen.)