$\vartheta\infty\pi\in\beta\xi\gamma\chi\varphi\zeta\kappa\rho\iota\varepsilon\alpha o\delta\sigma\nu\tau\lambda\upsilon\subset\eta\psi\varkappa\mu\omega\phi\theta\vee\oint\Pi\mapsto\times\Xi\Gamma\mathbb{C}\Phi\mathbb{Z}\cap\mathbb{R}\Rightarrow\exists\forall\nabla\Delta\Sigma\mathbb{N}\Leftrightarrow\Lambda\Upsilon\mathbb{Q}\subseteq\wedge\Psi\subsetneq\int\Omega\cup\Theta\times$

1 Mengen und Zahlen

Quantoren, Mengen (operationen), Äquivalenzrelationen, Abbildungen

$f: X \to Y$ heißt

injektiv, wenn $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

surjektiv,w enn $f(X) = Y \iff \forall y \in Y \exists x \in x : f(x) = y$

bijektiv, wenn surjektiv und injektiv $\iff \exists! g : Y \to X, g \circ f = \mathrm{id}_x, f \circ g = \mathrm{id}_y$

$f : X \to Y, g : Y \to Z$ injektiv/surjektiv $\implies g \circ f$ injektiv/surjektiv.

$g \circ f$ injektiv $\implies f$ injektiv

Natürliche Zahlen:

Peano-Axiome

vollständige Induktion

Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$, Ordnungsrelationen

Abzählbarkeit: $n \in \mathbb{N}, A_n := m \in \mathbb{N} \mid m \leq n = 1, \dots, n$

Menge M heißt

endlich, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $f : M \to A_n$ gibt.

abzählbar uneindlich,w enn es eine bijektive Abbildung $f : M \to \mathbb{N}$ gibt.

($\mathbb{N}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, kartesiches Produkt abzählbarer Mengen, abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen)

überabzählbar, wenn sie weder endlich noch abzählbar ist.

($\mathbb{R}$, Menge der Folgen mit Werten in $0, 1$) höchstens abzählbar, wenn sie abzählbar oder endlich ist

Schranken: M Menge, $A \subseteq M$, dann heißt $S \in M$

obere Schranke, wenn $\forall x \in A : x \leq S$

untere Schranke, wenn $\forall x \in A : x \geq S$

Supremum von A, wenn für alle oberen Schranken S' von A gilt $S \leq S'$

Infimum von A, wenn für alle untere Schranken S' von A gilt $S' \leq S$

Axiome der reellen Zahlen: Körper, geordnet, Einbettung von $\mathbb{N}$

Vollständigkeit: Jede nach oben beschränkte Teilmenge hat ein Supremum.

Archimedisches Prinzip: $\forall x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : x \leq n$

$M \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt:

S (obere Schranke) ist Supremum $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : S - \varepsilon \leq x$

S (unter Schranke) ist Infimum $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : S + \varepsilon \leq x$

$\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, sodass $A \subseteq B$, dann $\sup A \leq \sup B$

Monotonie:

$f : A \to B$ heißt (streng) monoton wachsend, wenn $x \leq y \implies f(x) \leq (<) f(y)$

$f : A \to B$ heißt (streng) monoton fallend, wenn $x \leq y \implies f(x) \geq (>) f(y)$

Betrag: $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \begin{matrix} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{matrix}$

Signum: $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to -1, 0, 1, x \mapsto \begin{matrix} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{matrix}$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, |x + y| \leq |x| + |y|, ||x| - |y|| \leq |x - y|, |x - y| \leq \varepsilon \iff x - e \leq y \leq x + \varepsilon$

Fakultät/Binominalkoeffizient: $k, n \in \mathbb{N}_0$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Binominalsatz: $\forall n \in \mathbb{N}_0, x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

Bernoulli-Ungleichung: Für $x \geq -1, n \in \mathbb{N}$ gilt $(1 + x)^n \geq 1 + xn$

Intervalle: $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt Intervall, wenn es für $x, y \in D$ mit $x \leq y$ für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $x \leq z \leq y$ gilt $z \in D$

(beschränkt) offene Intervalle $(a, b), a, b \in \mathbb{R}$

(beschränkt) abgeschlossene Intervalle $[a, b], a, b \in \mathbb{R}$

Halbgeraden

$(a, \infty), (-\infty, b), [a, \infty), (-\infty, b], a, b \in \mathbb{R}$

reelle Gerade $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Komplexe Zahlen: definiere auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$+ : (x_1, y_1), (x_2, y_2) \mapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$\cdot : (x_1, y_1), (x_2, y_2) \mapsto (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$

$\mathbb{C} := (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ ist Körper mit Lösungen der Gleichung

$(x, y) \cdot (x, y) + (1, 0) = (0, 0)$ der Form $\pm i := (0, \pm 1)$

Schreibweise: $z \in \mathbb{C}, z = x + iy$

$x =: \Re(z), y =: \Im(z), \mathbb{R}$ ist eingebetteter Unterkörper

$\mathbb{R} = z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = 0$

$|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+, z \mapsto \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$

$\bar{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z} := \Re(z) - i\Im(z)$

$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Ex existiert keine Ordungsrelation auf $\mathbb{C}$, die die Körperstruktor respektiert. ($0 < i^2 < i^2 + 1 = 0 \lightning$)

Fundamentalsatz der Algebra:

Jedes Polynom $z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$

2 Folgen und Reihen

(reelle) Folge ist Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$a(n) =: a_n, a =: (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegenDen Grenzewrt $a \in \mathbb{R}$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|a_n - a < \varepsilon| \forall n \geq N_\varepsilon$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|a_n - a_m| \leq \varepsilon \forall m \geq n \geq N_\varepsilon$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\iff (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge.

a heißt Häufungswert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder im Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ liegen.

jeder Grenzwert ist auch ein Häufungswert (aber nicht notwendig umgekehrt)

Grenzwerte sind eindeutig (Häufungswerte aber nicht notwendig).

$M \subseteq \mathbb{R}, a$ Häufungspunkt von M, wenn für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele $x \in M$ im Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge, $M := a_n \mid n \in \mathbb{N}$, dann a Häufungswert der Folge $\Longleftarrow$ a Häufungspunkt der Menge, **aber** nicht notwendig umgekehrt, $(a_n := 1 \forall n \in \mathbb{N})$

Eigenschaften des Grenzwerts

Eindeutigkeit: sind a, a' Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dann gilt $a = a'$

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte, monoton wachsende Folge $M := a_n \mid n \in \mathbb{N}$, dann $a_n \to^{n \to \infty} \sup M$

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte, monoton fallende Folge $M := a_n \mid n \in \mathbb{N}$, dann $a_n \to^{n \to \infty} \inf M$

Stabilität: Sind $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit Grenzwert a, b, dann

$(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \to^{n \to \infty} a + b$

$(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}} \to^{n \to \infty} a \cdot b$

$|a_n| \to^{n \to \infty} |a|$

$b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}, b \neq 0 : a_n / b_n \to^{n \to \infty} a/b$

Ist $a = b, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit $a_n \leq c_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$, dann

$c_n \to^{n \to \infty} a = b$

$\exists \gamma \in (0, 1) : |b_{n+1}| \leq \gamma |b_n| \forall n \in \mathbb{N} \implies b_n \to^{n \to \infty} 0$

$1/n, 1/n^2, 1/n^3, \dots \to^{n \to \infty} 0$

geometrische Folge, $|q| < 1$

$a_n = cq^n \to^{n \to \infty} 0$

$\sum_{k=0}^{n} cq^k = c \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \to^{n \to \infty} \frac{1}{1 - q}$

$(1 + \frac{1}{n})^n \to^{n \to \infty} e \qquad (1 - \frac{1}{n})^n \to^{n \to \infty} \frac{1}{e}$

$|x| > 1 : \frac{x^n}{n!} \to^{n \to \infty} 0 \qquad \frac{n!}{n^n} \to^{n \to \infty} 0$

Bolzano-Weierstraß: Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

A ist beschränkt und abgeschlossen.

jede Folge in A hat einen Häufungswert in A.

jede Fogle in A hat eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert A.

Jede Folge hat eine monotone Teilfolge.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \to$ Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Konvergenzkriterien:

Notwendig: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge

Cauchy: $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > m \geq N_\varepsilon$:

$|\sum_{k=m+1}^{n} a_n| < \varepsilon$

Leibnitz: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alternierend und $|a_n|$ ist monoton fallend und $a_n \to^{n \to \infty} 0$. Außerdem $|\sum_{k=m}^{\infty} a_n| \leq |a_m| \forall m \in \mathbb{N}$

Absolute Konvergenz: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_n| \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

Majorante: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (absolut) konvergent und gilt $|a_k| \leq b_k$ für fast alle $k \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Minorante: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent und gilt $b_k \leq |a_k|$ für fast alle $k \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Wurzelkriterum: wenn es $q \in (0, 1)$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \forall k \implies$ absolute Konvergenz $\sum a_k$ (alternativ: $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ Konvergenz, $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \implies$ Divergenz)

Quotientenkriterium: wenn es $g \in (0, 1)$ gibt mit $|a_{n+1}/a_k| \leq q < 1 \implies$ absolute Konvergenz $\sum a_k$ (alternativ: $\limsup |a_{k-1}/a_k| < 1$)

Cauchy'scher Verdichtungssatz: Reihe $\sum a_k, a_k \geq 0, a_k \to^{k \to \infty} 0$, dann gilt

$\sum a_k \iff \sum 2^k a_{2^k}$

Teleskopreihe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge $\implies$

$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_1$

oder auch

$a_n \to^{n \to \infty} a_1 - S \iff \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k-1}) = S$

Umordnungsatz: Ist $\sum a_n$ absolut konvergent, dann gilt $\forall \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (bijektiv) ist auch $\sum a_{\tau(n)}$ absolut konvergent mit dem gleichen Grenzwert.

Potenzreihen: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$.

Entwicklungspunkt x_0.

Potenzreiehn konvergieren absolut $\forall x \in \mathbb{C}$ mit

$|x - x_0| < \rho := \frac{1}{\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$

(mit der Konvention $1/\infty = 0, \frac{1}{0} = \infty$)

ρ heißt Konvergenzradius.

3 Stetige Funktionen

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D$ wenn für alle Folgen in D mit $x_n \to^{x \to \infty} x_0$ gilt

$f(x_n) \to^{n \to \infty} f(x_0)$

f heißt stetig auf D, wenn f in allen Punkten von D stetig ist.

$f : D \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in \bar{D}$ einen Grenzwert, wenn für alle Folgen in D mit $x_n \to^{x\to\infty} x_0$ gilt $f(x_n) \to^{n\to\infty} a$, schreibe $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$

einseitiger Grenzwert:
$\lim_{x\downarrow x_0^+} f(x) := \lim_{x\to x_0} f\mid_{x>x_0} (x)$
$\lim_{x\uparrow x_0^-} f(x) := \lim_{x\to x_0} f\mid_{x<x_0} (x)$
Asymptotik: $f: D\to\mathbb{R}$, D unbeschränkt.
f hat Grenzwert a in ∞, wenn
$\forall\varepsilon>0\exists c\in\mathbb{R}: |f(x)-a|<\varepsilon\forall x>c$
$f(x) \to^{x\to x_0} \pm\infty$, wenn $\forall c\in\mathbb{R}_+\exists\delta>0: f(x)>c, <-c\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap(D\quad x_0)$
Stetigkeit ist stabil gegenüber punktweisen Summen, Produkt, Quotient ($\neq$ 0) und Komposition, das heißt
f,g stetig $\implies f+g, f\cdot g, (f/g)(g\neq 0), g\circ f$ stetig.
$(f+g)(x)=f(x)+g(x), (f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$.
ε-δ-Kriterium: $f: D\to\mathbb{R}$ ist stetig in $x_0\in D$, $\iff \forall\varepsilon>0\exists\delta_{\varepsilon,x_0}>0:\forall x\in D$:
$|x-x_0|<\delta \implies |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$
gleichmäßige Stetigkeit: Eine stetige Funktion f heißt gleichmäßig stetig, wenn $\forall\varepsilon>0\exists\delta_\varepsilon>0: \forall x,y\in D:$
$|x-y|<\delta \implies |f(x)-f(y)|<\varepsilon$
Lipschitz-Stetigkeit: $f: D\to\mathbb{R}$ heißt Lipschitzstetig, wenn es $L>0$, sodass $\forall x,y\in D$ gilt
$|f(x)-f(y)|\leq L|x-y|$
Lipschitz-stetig $\implies$ gleichmäßig stetig $\implies$ stetig.
Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit:
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig $\implies f$ ist gleichmäßig stetig auf $[a,b]$ Abbildungseigenschaften stetiger Funktionen:
Satz vom Extremum: Sei $f: D\to\mathbb{R}$ stetig, D beschränkt und abgeschlossen. Dann existeren $x_{\min}, x_{\max}$, sodass
$\sup_{x\in D} f(x) = f(x_{\max}) \quad \inf_{x\in D} f(x) = f(x_{\min})$
Zwischenwertsatz: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, dann gibt es zu $y\in[f(a),f(b)]$ ein $\xi\in(a,b)$, sodass $f(\xi)=y$ (stärker: $\forall y\in[\min f,\max f]$)
Monotonie: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ stetig ist genau dann injektiv, wenn sie streng monoton ist.
Funktionsfolgen: $n\in\mathbb{N}, f_n: D\to\mathbb{N}$
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise, wenn für alle $x\in D$ die Zahlenfolge $(f_n(x))_n\in\mathbb{N}$ konvergiert gegen Grenzfunktion $f: f_n(x)\to^{n\to\infty} f(x)$. (sprich: $\forall\varepsilon>0\exists N_{\varepsilon,x}\in\mathbb{N}: |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\forall n\geq N_{eps,x}$)
gleichmäßige Konvergenz: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt gleichmäßig konvergent auf D gegen die Grenzfunktion f, wenn $\forall\varepsilon>0$
$\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}: |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\forall n\geq N_\varepsilon\forall x\in D$
$f_n: D\to\mathbb{R}$ stetig und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f, dann ist auch f stetig.
Funktionenräume: $\mathcal{C}([a,b]) := f:[a,b]\to\mathbb{R} \mid f$ stetig
$\mathbb{R}$-Vektorraum (in der Regel unendlich dimensional)
$\|\cdot\|_\infty: \mathcal{C}([a,b])\to\mathbb{R}_+, f\mapsto\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$
Norm, normierer Raum $(\mathcal{C}([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$

$\forall x,y\in V,\lambda\in\mathbb{R}$:
$\|x\|\geq 0, \|x\|=0 \iff x=0, \|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|, \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$
Konvergenzbegriff in Norm: $f_n\to f$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty \iff \forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N}: \|f_n-f\|_\infty<\varepsilon\forall n\geq N$
Satz von Arzela-Ascoli: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{C}([a,b])$ Folge von gleichmäßig beschränkten (das heißt $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_\infty<\infty$) und gleichgradig stetig (das heißt $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\forall n\in\mathbb{N}: \sup_{|x-y|<\delta}|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$) dann gibt es eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $\mathcal{C}([a,b])$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$

4 Differentialrechnung

$f: D\to\mathbb{R}, x_0\in D$, definiere
$D_h f(x_0) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
f heißt differenzierbar in x_0, wenn für jede Nullfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Differenzenquotienten $(D_{h_n}f(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} D_{h_n}f(x_0)$ heißt Ableitung von f im Punkt $x_0, f'(x_0)$.
Alternativ: $\exists L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=f(x_0)+L(x-x_0)+r(x-x_0)$ mit $(r(x-x_0))/(x-x_0)\to^{x\to x_0} 0, f'(x_0)=L$
f differenzierbar in $x_0 \implies f$ stetig in x_0.
f ist differenzierbar auf D, wenn f in jedem Punkt differenzierbar ist.
Fasse f' als Funktion $f': D\to\mathbb{R}, x\mapsto f'(x)$
f heißt stetig differenzierbar, wenn f' stetig ist.
n-te Ableitung: $f^{(n)}(x_0)=(f^{(n-1)})'(x_0), f^{(0)}=f$.
f heißt glatt, wenn $f^{(n)}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ existiert.
Stabilität: $f,g: D\to\mathbb{R}, x_0\in D$
Linearität: $(\alpha f+\beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0)\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
Produktregel: $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$
hat g keine Nullstelle, so gilt:
Quotientenregel: $(f/g)'(x_0) = (f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0))/g^2(x_0)$
Kettenregel: $f: D\to D', g: D'\to\mathbb{R}$ beide differenzierbar in $x_0\in D, f(x_0)\in D'$. dann ist $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$ Satz von der inversen Funktion: $f: D\to\mathbb{R}$ stetig, injektiv, D abgeschlossen, f differenzierbar in $x_0\in D, f: D\to f(D)$ bijektiv $\implies \exists f^{-1}: f(D)\to D$ und es gilt $(f^{-1})'(f(x_0))=1/f'(x_0)$
Extremwertheorie: $f: D\to\mathbb{R}$ hat in $x_0\in D$ ein globales Extremum wenn gilt:
$f(x_0)\geq f(x)\forall x\in D$ (Maximum)
$f(x_0)\leq f(x)\forall x\in D$ (Minimum)
f hat ein lokales Extremum, wenn obige Bedingungen auf einer δ-Umgebung von x_0 zutreffen.
Satz von Extremum: (notwendige Bedingung) $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar hat lokales Extremum in $x_0\in(a,b)$, dann gilt $f'(x_0)=0$
1. Mittelwertsatz: Ist $f: D\to\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a,b), dann gibt es $x\in(a,b)$, sodass

$f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Hinreichende Bedingung: Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)\neq 0$, dann folgt f hat in x_0 ein lokales Extremum. (Maximum für $<$, Minimum für $>$)
Taylorentwicklung: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar
$t_n(x_0,x) := \sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$
n-te Taylorpolynom mit Entwicklungsstelle x_0.
f $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, dann gibt es zu jedem $x\in(a,b)$ ein ξ zwischen x_0 und x, sodass
$f(x)-t_n(x_0,x) = R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$
f glatt $\implies$
$t_\infty(x_0,x) = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$
f ist analytisch in x_0, wenn es in $(x_0-\rho,x_0+\rho)$ eine Umgebung gibt, sodass $f(x)=t_\infty(x_0,x)$ Regel von L'Hospital: $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ sodass $g'(x)\neq 0$ und der Grenzwert $f'(x)/g'(x)\to^{x\to a} c\in\mathbb{R}$, dann gilt:
$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) \in -\infty,0,\infty \implies \lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = c$
Differentation und Limes: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge stetig differenzierbarer Funktionen auf beschränkten Intervallen mit punktweisen Grenzwert $f_n(x)\to^{n\to\infty} f(x)$ und gilt $f_n' \to^{n\to\infty} f^*$ gleichmäßig, dann gilt f ist differenzierbar mit $f'(x)=f^*(x)$

5 Integration

Zerlegung: $[a,b], Z := x_0,\cdots,x_n, x_0=a, x_n=b, x_0<x_1<\cdots<x_n$.
Feinheit: $h := \max_{k=1,\cdots,n}|x_k-x_{k-1}|$
Zerlegung äquidistant $:\iff h$ konstant in k.
$f:[a,b]\to\mathbb{R}, Z$ Zerlegung, $I_k=[x_{k-1},x_k]$
Obersumme: $\bar{S}_z f(x) := \sum_{k=1}^{\infty}\sup_{x\in I_k} f(x)(x_k-x_{k-1})$
Untersumme: $\underline{S}_z f(x) := \sum_{k=1}^{\infty}\inf_{x\in I_k} f(x)(x_k-x_{k-1})$
Oberintegral: $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x := \inf_{Z\in\mathcal{Z}(a,b)}\bar{S}_Z f(x)$
Unterintegral: $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x := \sup_{Z\in\mathcal{Z}(a,b)}\underline{S}_Z f(x)$
$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$
f heißt Riemann-integrierbar, wenn
$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$
$\iff \forall\varepsilon>0\exists Z\in\mathcal{Z}(a,b)|\bar{S}_z f(x)-\underline{S}_z|<\varepsilon$
Riemannsche Summe: $f:[a,b]\to\mathbb{R}, Z$ Zerlegung, $\xi_k\in I_k$

$\mathrm{RS}_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$
Sei f beschränkt. f ist Riemann-integrierbar $\iff \forall(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{Z}(a,b)$ mit $h_n\to 0$ die zugehörigen Riemannschen Summen konvergieren und den gleichen Grenzwert haben.
stetige Funktionen sind integrierbar.
monotone Funktionen sind integrierbar.
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar, dann auch für jedes $[c,d]\subseteq[a,b]$ und es gilt für $c\in[a,b]$:
$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
Ferner ist das Integral linear, das heißt $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$:
$\int_a^b(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
Monoton: $g(x)\geq f(x)\forall x\in[a,b] \implies$:
$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
Standardabschätzung: $m\leq f(x)\leq M\forall x\in[a,b] \implies$:
$m(ba)\leq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq M(b-a)$
Definitheit: $f(x)\geq 0\forall x\in[a,b], \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0 \implies f(x)=0$
Mittelwertsatz: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar ohne Vorraussetzungen, dann gibt es $\xi\in[a,b]$ mit
$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ Stammfunktion: $F,f:[a,b]\to\mathbb{R}, F$ differenzierbar heißt Stammfunktion vin f, wenn gilt: $F'=f$.
Fundamentalsatz der Analysis: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig $\implies$:
$F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ ist eine Stammfunktion von f.
Ist F Stammfunktion von f, dann gilt:
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$
Partielle Integration: $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt:
$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$
Substitution: $\phi:[c,d]\to[a,b]$ stetig differenzierbar, dann gilt:
$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\mathrm{d}x$