

# Analysis III (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

13. November 2017

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie</b>	<b>1</b>
1.1 Messbare Funktionen . . . . .	11
1.2 Integration . . . . .	12
1.3 Produktmaße . . . . .	18

## 1 Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie

Motivation: Erweiterung des Riemannintegrals auf einen größeren Bereich von Funktionen

**Satz 1.1 (Kriterium für Riemann Integrierbarkeit)** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Dann ist  $f$  genau dann Riemann integrierbar, falls die Menge  $S$  der Unstetigkeiten von  $f$  eine Nullmenge ist, im Sinne, dass es für jedes  $\varepsilon > 0$  eine abzählbare Familie von Intervallen  $I_i$  gibt, mit

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon$$

**Bemerkung** Insbesondere ist die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nicht Riemann integrierbar.

Das Riemann-Integral der Funktion ist definiert über eine Zerlegung des Definitionsbereiches in kleine Intervalle. Beim Lebesgue Integral wird stattdessen der Bildbereich zerlegt! Für eine nichtnegative  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  betrachten wir die Mengen

$$E_k := f^{-1}((t_k, t_{k+1}]) \subset \mathbb{R}^n$$

wobei  $t_k = hk$  für ein vorgegebenes  $h > 0$ , und approximieren dann das Integral von  $f$  durch

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_k^{(h)} \mu(E_k) \leq \int f(x) dx \leq \sum_{i=1}^{\infty} t_{k+1}^{(h)} \mu(E_k) \quad (*)$$

wobei das **Maß**  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$  eine Abbildung ist, welche das Maß der Menge  $E = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  misst. Das Integral ergibt sich aus (\*) im Limes  $h \rightarrow 0$ . Für das Lebesgue-Integral müssen wir ein geeignetes Maß definieren  $\rightarrow$  Lebesguemaß  $\mathcal{L}^n$

$$\int_0^1 f(x) d\mathcal{L}^1(x) = \underbrace{\mathcal{L}^1(\mathbb{Q})}_0 \cdot 1 + \underbrace{\mathcal{L}^2(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}_1 \cdot 0 = 0$$

**Definition 1.2 (Maßproblem)** Wir suchen eine Abbildung  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$  mit den folgenden Eigenschaften

1.  $\mu(A) \subseteq \mu(B) \forall A \subset B$  (Monotonie)
2.  $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$  falls  $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$  ( $\sigma$ -Additivität)
3.  $\mu([0, 1]^n) = 1$  (Normierung)
4.  $\mu(QA + y) = \mu(A)$  falls  $Q \in O(n), y \in \mathbb{R}^n$  (Euklidische Invarianz)

Dieses Problem heißt Maßproblem. In einer etwas schwächeren Version kann man auch fordern

2.  $\mu\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k \mu(A_i)$
4.  $\mu(A + y) = \mu(A)$  für  $y \in \mathbb{R}^n$

**Satz 1.3 (Vitali: 1908)** Es gibt keine Abbildung  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$  welche die Forderungen des Maßproblems erfüllt.

**Beweis** Sei  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$  eine Abbildung die die Forderungen des Maßproblems erfüllt. Sei  $q_i, i \in \mathbb{N}$  eine Abzählung von  $[0, 1]^n \cap \mathbb{Q}^n$ . Wir definieren die Äquivalenzrelation  $x \sim y$  auf  $E := [0, 1]^n$  durch  $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ . Nach dem Auswahlaxiom gibt es eine Menge  $M_0 \subset [0, 1]^n$ , welche aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält, das heißt es gilt:

1.  $\forall y \in [0, 1]^n \exists x \in M_0 : x \sim y \in \mathbb{Q}$
2. Aus  $x, y \in M_0, x - y \in \mathbb{Q} \implies x = y$

Wir definieren  $M_i = M_0 + q_i$ . Aus der Definition von  $M_i$  folgt  $M_i \cap M_j = \emptyset \forall i \neq j$ . In der Tat falls  $x \in M_i \cap M_j$ , dann  $x - q_i \in M_0$  und  $x - q_j \in M_0 \xrightarrow{1.} q_i = q_j$ . Außerdem gilt  $[0, 1]^n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \subset [0, 2]^n$ . Die erste Einbettung folgt aus 1., die zweite Einbettung gilt, da  $y + q_j \in [0, 2]^n \forall y \in M_0$  und  $y \in [0, 1]^n$  schließlich gilt  $\mu(M_j) = \mu(M_0) \forall j \in \mathbb{N}$ . Dies folgt aus den Forderungen 1., 3., 4. (abgeschwächte Version reicht).

$$\implies 1 = \mu([0, 1]^n) \leq \mu\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} M_j\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(M_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(M_0) \implies \mu(M_i) = \mu(M_0) > 0$$

und

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i\right) = \infty$$

Aus 3. und 4. folgt andererseits

$$\begin{aligned} \mu([0, 2]^n) &= 2^n \mu([0, 1]^n) = 2^n \\ &\stackrel{(*)}{\implies} \mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i\right) \leq \mu([0, 2]^n) = 2^n < \infty \end{aligned}$$

□

**Bemerkung** Jedes Maß, welche die Eigenschaften des Maßproblems erfüllt, kann also nicht auf der ganzen  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  definiert sein, sondern auf einer Untermenge der  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ .

Frage: Welche ist die „größte“ (eine „gute“) Untermenge  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ , sodass es eine Lösung des Maßproblems gibt?

**Definition 1.4 (Algebra und  $\sigma$ -Algebra)** Eine Algebra  $\mathcal{A}$  ist die Familie von Teilmengen einer gegebenen Menge  $X$  mit

- $X \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \implies A^C := X \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$

Falls

$$(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \implies \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$$

so spricht man von einer  $\sigma$ -Algebra.

**Lemma 1.5** Sei  $X$  eine Menge,  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$  Algebra und  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ . Dann gehören  $\emptyset$ ,  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$  und  $A_1 \setminus A_2$  zu  $\mathcal{A}$ .

**Beweis** (Übung) □

**Definition 1.6 (Erzeugte und relative  $\sigma$ -Algebra)** Für  $S \subset \mathcal{P}(X)$  wird

$$\Sigma(S) = \Sigma(S \mid X) := \bigcap \{ \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra mit } S \subseteq \mathcal{A} \}$$

als die von  $S$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra bezeichnet.  $\forall Y \subset X$  definieren wir die relative  $\sigma$ -Algebra

$$\mathcal{A} \cap Y := \{ A \cap Y \mid A \in \mathcal{A} \}$$

**Lemma 1.7** Die erzeugte relative  $\sigma$ -Algebra sind wohldefiniert. Für alle Mengen  $S \subset \mathcal{P}(X)$ ,  $Y \subset X$  gilt

$$\Sigma(S \cap Y \mid Y) = \Sigma(S \mid X) \cap Y$$

**Beweis** (Übungen) □

**Definition 1.8 (Topologischer Raum)** Ein topologischer Raum ist ein Paar  $(X, \mathcal{O})$  bestehend aus Menge  $X$  und  $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$  mit

- $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
- $U, V \in \mathcal{O} \implies U \cap V \in \mathcal{O}$
- $(U_k)_{k \in I} \subset \mathcal{O} \implies \bigcup_{k \in I} U_k \in \mathcal{O}$  für eine beliebige Indexmenge  $I$ .

Die Elemente von  $\mathcal{O}$  werden als **offene Menge** bezeichnet.

**Bemerkung** Topologische Raum ist abgeschlossen unter endlichen Schnitten und abzählbaren Vereinigungen.

**Definition 1.9 (Borel- $\sigma$ -Algebra, Borel Menge)** Ist  $X$  ein topologischer Raum, so ist die Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(X)$  diejenige  $\sigma$ -Algebra, die von den offenen Mengen erzeugt wird. Ihre Elemente heißen Borel-Mengen.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^n &:= \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \\ \mathcal{B} &:= \mathcal{B}^1 \end{aligned}$$

**Bemerkung** Die  $\sigma$ -Algebra die von den abgeschlossenen Mengen erzeugt wird, ist ebenfalls identisch mit der Borel  $\sigma$ -Algebra.

**Definition 1.10 (Messraum, Maß, Maßraum)** Eine Menge  $X$  mit einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  heißt **Messraum**. Ein **Maß** ist eine Abbildung  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  mit

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)$  für disjunkte Mengen  $\sigma$ -Additivität

Die Elemente in  $\mathcal{A}$  heißen messbar, und  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  heißt **Maßraum**.

**Definition 1.11 ( $\sigma$ -Finitheit)** Ein Maß heißt  $\sigma$ -finit, falls es eine abzählbare Überdeckung  $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  von  $X$  gibt, also

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$$

sodass  $\mu(X_k) < \infty \forall k$ .

$\mu$  heißt endlich falls  $\mu(X) < \infty$ . Bei Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu(X) = 1$ .

**Beispiel 1.12** 1. Zählmaß: Für  $X$  und  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  setze für  $A \in \mathcal{A}$ :

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A & A \text{ endlich} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mu$  ist endlich falls  $X$  endlich und  $\sigma$ -finit wenn  $X$  abzählbar.

2. Dirac-Maß: Für einen fest gewählten  $x_0 \in X$  und  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$  setzen wir für  $A \subset X$

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & x_0 \notin A \\ 1 & x_0 \in A \end{cases}$$

3. Positive Linearkombination:  $\mu_1, \mu_2$  Maße auf  $(X, \mathcal{A})$ . Dann ist  $\mu := \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2$  für  $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$  wieder ein Maß

**Lemma 1.13** Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $Y \in \mathcal{A}$ . Dann ist  $\mu|_Y(A) := \mu(A \cap Y) \forall A \in \mathcal{A}$  wieder ein Maß auf  $(X, \mathcal{A})$ . Durch Einschränken der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  auf  $\mathcal{A}|_Y := \{A \in \mathcal{A} \mid A \subset Y\}$  wird  $(Y, \mathcal{A}|_Y, \mu|_Y)$  auch ein Maßraum. Falls  $(X, \mathcal{A}, \mu)$   $\sigma$ -finit, dann  $(Y, \mathcal{A}|_Y, \mu|_Y)$  auch.

**Notation:** Zu  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  schreiben wir

- $A_k \nearrow A (k \rightarrow \infty)$  falls  $A_k \subset A_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$  und  $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$
- $A_k \searrow A (k \rightarrow \infty)$  falls  $A_k \supset A_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$  und  $A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$

**Satz 1.14** Für jeden Maßraum  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  gilt

1.  $A_1 \subset A_2 \implies \mu(A_1) \leq \mu(A_2)$  (Monotonie)
2.  $\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)$  ( $\sigma$ -Subadditivität)
3.  $A_k \nearrow A \implies \mu(A_k) \nearrow \mu(A)$  für  $(k \rightarrow \infty)$  (Stetigkeit von Unten)
4.  $A_k \searrow A \implies \mu(A_k) \searrow \mu(A)$  für  $(k \rightarrow \infty)$  und  $\mu(A_1) < \infty$  (Stetigkeit von Oben)

**Beweis** 1.  $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \implies B = A \dot{\cup} (B \setminus A), B \setminus A \in \mathcal{A} \implies \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$

2. Wir definieren  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  durch

$$B_1 := A_1, B_{k+1} := A_{k+1} \setminus \bigcup_{j=1}^k A_j \implies \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

Nach Definition gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_k) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)$$

3. Definieren  $(C_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  durch

$$C_1 := A_1 \\ C_{k+1} := A_{k+1} \setminus A_k$$

Es gilt

$$\implies \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = A \\ \mu(A_k) = \sum_{j=1}^k \mu(C_j) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(C_k) = \mu(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)$$

4.  $D_k := A_1 \setminus A_k \forall k \in \mathbb{N}$ . Damit ist  $D_k \nearrow A_1 \setminus A$  und

$$\mu(A_1) - \mu(A_k) = \mu(A_1 \setminus A_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} [3.] \mu(A_1 \setminus A) = \mu(A_1) - \mu(A)$$

Subtraktion von  $\mu(A_1) < \infty$  liefert die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 1.15**  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, \infty], \mu(A) := \#A$ . Die Mengenfolge  $A_n := \{n, n+1, n+2, \dots\}$  ist fallend gegen die leere Menge, aber es ist

$$0 = \mu(\emptyset) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \infty$$

**Definition 1.16 (Borel-Maß)** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Ein Maß auf einer Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(X)$  heißt Borel-Maß, falls es auf Kompakta stets endlich Werte annimmt.

**Beispiel 1.17** Für  $X = \mathbb{R}$  ist das Dirac-Maß ein Borel-Maß, aber nicht das Zählmaß.

**Definition 1.18 (Regularität)** Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Das Maß  $\mu$  heißt **regulär von außen**, wenn für  $A \in \mathcal{A}$  gilt

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subset U, U \text{ offen}\}$$

$\mu$  heißt **regulär von innen**, wenn für  $A \in \mathcal{A}$  gilt

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A, K \text{ kompakt}\}$$

**Beispiel 1.19** Das Zählmaß mit  $X = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathcal{B}$ , ist regulär von innen, aber nicht von außen. Das Dirac-Maß ist regulär.

**Definition (Kompaktheit)** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A \subset X$ . Dann nennt man  $A$  kompakt, wenn jede offene Überdeckung von  $A$  eine **endliche** Teilüberdeckung besitzt. Das bedeutet:

$$\forall I \exists I' \subset I, |I'| < \infty : A \subset \bigcup_{i \in I} A_i \implies A \subset \bigcup_{i \in I'} A_i$$

**Bemerkung** In einem metrischen Raum sind die bisherigen Definitionen der Kompaktheit mit der neu eingeführten äquivalent.

### Konstruktion von Maßen

Strategie:

1. Starte mit einem Prämaß  $\lambda$  auf einer Algebra endlichen, disjunkten Vereinigungen von Intervallen,  $\lambda =$  Summe der Längen
2. Dieses Prämaß kann zu einem äußeren Maß auf  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  fortgesetzt werden (keine  $\sigma$ -Additivität)
3. Einschränkung auf Borel- $\sigma$ -Algebra liefert ein Maß.

**Definition 1.20 (Dynkin-System)** Eine Familie  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ ,  $X$  Menge, heißt Dynkin-System, falls gilt:

1.  $X \in \mathcal{D}$
2.  $A \in \mathcal{D} \implies A^C \in \mathcal{D}$
3.  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}, A_k \cap A_l = \emptyset \forall k, l \in \mathbb{N}, k \neq l \implies \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{D}$

**Bemerkung** 1. Ein Dynkin-System ist abgeschlossen bezüglich Mengensubtraktion:

$$A, B \in \mathcal{D}, B \subset A \implies A \setminus B = A \cap B^C = (A^C \cup B)^C \in \mathcal{D}$$

2. Ist  $S \subset \mathcal{P}(X)$ , so ist

$$\mathcal{D}(S) = \bigcap \{ \mathcal{D} \mid \mathcal{D} \text{ Dynkin-System, } S \subset \mathcal{D} \}$$

das von  $S$  erzeugte Dynkin-System

3. Das von  $S$  erzeugte Dynkin-System ist wohldefiniert, dass heißt, es ist eindeutig und tatsächlich ein Dynkin-System.

**Lemma 1.21** Ist  $\mathcal{D}$  ein Dynkin-System und abgeschlossen bezüglich endlicher Schnitte oder alternativ bezüglich beliebiger (also nicht disjunkter) endlicher Vereinigung, so ist  $\mathcal{D}$  eine  $\sigma$ -Algebra

**Beweis** Übungen □

**Lemma 1.22** Sei  $S$  eine (nicht leere) Familie von Teilmengen einer Menge  $X$ , die abgeschlossen ist unter endlichen Schnitten sind, dann folgt  $\mathcal{D}(S) = \Sigma(S)$

**Beweis** Nach Definition gilt  $\mathcal{D} \subset \Sigma(S)$ . Die andere Inklusion folgt sofort, wenn wir zeigen, dass  $\mathcal{D}(S)$   $\sigma$ -Algebra ist. Nach Lemma 1.21 genügt es zu zeigen, dass  $\mathcal{D}(S)$  abgeschlossen ist unter endlichen Schnitten. Definiere für ein beliebiges  $A \in \mathcal{D}(S)$

$$D(A) := \{ B \in \mathcal{D} \mid A \cap B \in \mathcal{D} \} \subset \mathcal{D}$$

wir müssen beweisen  $D(A) = \mathcal{D}$  für alle  $A \in \mathcal{D}$ . Es gilt

$$1. X \in \mathcal{D}, A \cap X = A \in \mathcal{D} \implies X \in D(A)$$

$$2. B \in D(A) \implies B \in \mathcal{D}, A \cap B \in \mathcal{D} \text{ woraus folgt}$$

$$A \cap B^C = A \setminus (B \cap A) \in \mathcal{D} \implies B^C \in D(A)$$

$$3. B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k, B_k \in D(A) \implies B_k \in \mathcal{D}, A \cap B_k \in \mathcal{D} \text{ woraus folgt, dass } B \in \mathcal{D} \text{ und}$$

$$B \cap A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (B_k \cap A) \in \mathcal{D} \implies B \in D(A)$$

Behauptung:  $A \in S \implies S \subset D(A)$ , denn:  $B \in S \implies A \cap B \in S \implies B \in D(A)$ . Da  $\mathcal{D} = D(S)$  das kleinste Dynkin-System ist, das  $S$  enthält folgt  $\mathcal{D} \subset D(A) \implies \mathcal{D} = D(A)$ . Für beliebiges  $U \in S, V \in \tilde{\mathcal{D}} = D(U)$  folgt nach Definition  $U \cap V \in \mathcal{D}$ . Dies impliziert  $U \in D(V)$ , also  $S \subset D(V) \forall V \in \mathcal{D}$ . Wie eben ist  $D(V) \subset \mathcal{D}$ , also  $D(V) = \mathcal{D} \forall V \in \mathcal{D}$ .  $\square$

**Bemerkung** Lemma 1.22 lässt sich wie folgt anwenden:

1. Verifiziere eine Eigenschaft  $\varepsilon$  auf einer Menge  $S \subset \mathcal{P}(X)$ , die abgeschlossen ist unter endlichen Schnitten ist.
2. Zeige, dass die Menge aller Mengen, die  $\varepsilon$  erfüllen ein Dynkin-System ist.
3. Schließe, dass  $\varepsilon$  auf  $\Sigma(S)$  gilt.

**Satz 1.23 (Eindeutigkeit von Maßen)** Sei  $(X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum und  $S \subset \mathcal{P}(X)$  Familie von Menge, die abgeschlossen unter endlichen Schnitten und  $\Sigma = \Sigma(S)$ . Weiter enthalte  $S$  eine Folge aufsteigender Mengen  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset S$  mit  $X_k \nearrow X$  und  $\mu(X_k) < \infty$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\mu$  auf  $\Sigma = \Sigma(S)$  durch die Werte auf  $S$  eindeutig bestimmt.

**Beweis** Sei  $\tilde{\mu}$  ein weiteres Maß mit  $\tilde{\mu} = \mu$  auf  $S$ . Dann gilt

$$\tilde{\mu}(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(X_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(X_k) = \mu(X)$$

zunächst  $\mu(X) < \infty$ . Idee:

$$\mathcal{D} = \{A \in \Sigma \mid \tilde{\mu}(A) = \mu(A)\}$$

ist ein Dynkin-System.

$X \in \mathcal{D}$  bereits gezeigt. Für  $A \in \mathcal{D}$  ist

$$\tilde{\mu}(A^C) = \tilde{\mu}(X) - \tilde{\mu}(A) = \mu(X) - \mu(A) = \mu(A^C)$$

$\implies A^C \in \mathcal{D}$ . Betrachte  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}, B_k \cap B_l = \emptyset \forall k, l \in \mathbb{N}, k \neq l$  und  $B_k \in \mathcal{D}$  sowie  $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$ . Dann gilt

$$\tilde{\mu}(B) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \tilde{\mu}(B_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_k) = \mu(B)$$

Nach Lemma 1.22 folgt also  $\Sigma = \Sigma(S) = \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D} \subset \Sigma \implies \mathcal{D} = \Sigma$ .

Im allgemeinen Fall erhalten wir für  $A \in \Sigma$ :

$$\tilde{\mu}(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mu}(A \cap X_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(X_k \cap A)$$

$\square$

**Definition 1.24 (Prämaß)** Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  eine Algebra. Ein **Prämaß** auf  $X$  ist eine  $\sigma$ -additive Abbildung  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  mit  $\mu(\emptyset) = 0$ .

**Bemerkung** Man braucht nur die  $\sigma$ -Additivität für solche (paarweise disjunkte) Folgen  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  gewährleisten, deren Vereinigung

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$$

Ein Prämaß auf einer  $\sigma$ -Algebra ist ein Maß.

**Korollar 1.25** Sei  $\mu$  ein  $\sigma$ -finites Prämaß auf einer Algebra  $\mathcal{A}$ , dann gibt es höchstens eine Fortsetzung auf  $\Sigma(\mathcal{A})$ .

**Beweis** Setze  $S = \mathcal{A}$  wie im Satz 1.23. Offenbar ist abgeschlossen unter endlichen Schnitten. Da  $X$   $\sigma$ -finit ist, gibt es eine Folge  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$  und  $\mu(X_k) < \infty \forall k \in \mathbb{N}$ . Für  $A_k := \bigcup_{j=1}^k X_j$  ist  $A_k \nearrow X$  und

$$\mu(A_k) \leq \sum_{j=1}^k \mu(X_j) < \infty$$

Nach dem Satz 1.23 ist das auf  $(X, \Sigma)$ , so es denn existiert, eindeutig.  $\square$

**Beispiel 1.26** Die Menge  $S$ , sei die Menge, die alle Intervalle  $[a, b)$ ,  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$  erzeugt dann unter endlichen Vereinigungen eine Algebra  $\mathcal{A}$ . Wir setzen

$$\begin{aligned} \mu(\emptyset) &= 0 \\ \mu([a, b)) &= \infty \end{aligned}$$

Dieses  $\mu$  ist Prämaß auf  $\mathcal{A}$ . Es gibt (mindestens) zwei Fortsetzungen:

1. Zählmaß ist eine Fortsetzung
2.  $\mu(A) = \infty \forall A \neq \emptyset$

**Definition 1.27 (äußeres Maß)** Eine Funktion  $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  ist ein äußeres Maß auf  $X$ , falls für alle  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$  die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1.  $\mu^*(\emptyset) = 0$
2.  $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$ , falls  $A_1 \subset A_2$  (Monotonie)
3.  $\mu^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(A_k)$  ( $\sigma$ -Subadditivität)

**Satz 1.28** Sei  $\mu^*$  ein äußeres Maß auf eine Menge  $X$ . Wir sagen, die Menge  $A \subset X$  erfüllt die Caratheodory-Bedingung (CB) falls

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^C) \forall E \subset X$$

Die Familie  $\Sigma$  aller Mengen, die die Caratheodory-Bedingung erfüllen bildet eine  $\sigma$ -Algebra und  $\mu^*|_{\Sigma}$  ist ein Maß.

**Beweis** Wir zeigen zunächst, dass  $\Sigma$  eine Algebra ist. Offenbar  $X \in \Sigma$ . Abgeschlossen unter Komplementbildung ist klar. Für endliche Vereinigungen wähle  $A, B \in \Sigma$ . Sei  $E \subset X$  beliebig.

$$\mu^*((A \cup B) \cap E) \leq \mu^*(A \cap B^C \cap E) + \mu^*(A^C \cap B \cap E) + \mu^*(A \cap B \cap E)$$



Nun wird die Caratheodory-Bedingung zweimal angewandt

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^C) \\ &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^C) + \mu^*(E \cap A^C \cap B) + \mu^*(E \cap A^C \cap B^C)\end{aligned}$$

Mit obiger Abschätzung erhalten wir

$$\mu^*(E) \geq \mu^*((A \cup B) \cap E) + \mu^*(E \cap A^C \cap B^C) = \mu^*((A \cup B) \cap E) + \mu^*((A \cup B)^C \cap E)$$

Die andere Richtung folgt aus der  $\sigma$ -Subadditivität

Sei nun also  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$ . Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die  $A_k$  paarweise disjunkt sind. Nun ist für jedes  $E \subset X$  und

$$\begin{aligned}B_k &= \bigcup_{j=1}^k A_j \in \Sigma, \quad B_k \nearrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \\ \mu^*(B_k \cup E) &= \mu^*(B_k \cap E \cap A_k) + \mu^*(B_k \cap E \cap A_k^C) \\ &= \sum_{j=1}^k \mu^*(E \cap A_j)\end{aligned}$$

Also haben wir

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_k) + \mu^*(E \cap B_k^C)$$

Mit  $k \rightarrow \infty$  erhält man

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\geq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \cap A^C) \geq \mu^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k \cap E) + \mu^*(E \cap A^C)\right) \\ &\geq \mu^*(E)\end{aligned}$$

Also gilt

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \Sigma$$

Damit  $\mu^*|_{\Sigma}$  ein Maß ist, betrachte Folge  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkt. Da  $\Sigma$  eine  $\sigma$ -Algebra ist wähle in der Caratheodory-Bedingung  $E = A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ .

$$\mu^*(E) = \mu^*(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(A \cap A_k) + \mu^*(A \cap A^C) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(A_k)$$

$\mu^*(\emptyset) = 0$  gilt nach Definition des äußeren Maßes. □

**Bemerkung** Das soeben konstruierte Maß  $\mu^*|_{\Sigma}$  ist vollständig, jede Teilmenge einer Nullmenge ist messbar.

**Beweis** Sei  $A \in \Sigma$ ,  $\mu^*(A) = 0$  und  $B \subset A$ . Es gilt für  $E = X$  in der Caratheodory-Bedingung

$$\mu^*(E \cap B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(E \cap B^C) \leq \mu^*(E)$$

Insofern ist  $B \in \Sigma$  □

**Fahrplan für das Lebesgue-Maß**

Für ein verallgemeinertes Intervall  $I$  der Form  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $[a, b]$  mit  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$  setzen wir  $\lambda(I) := b - a \in [0, \infty]$

**Lemma 1.31** Dies ergibt ein eindeutiges  $\sigma$ -finites Prämaß auf der Algebra  $\mathcal{A}$ , die aus endlichen Vereinigungen disjunkter Intervalle besteht

$$\lambda\left(\bigcup_{j=1}^k I_j\right) = \sum_{j=1}^k \lambda(I_j)$$

Wir erhalten zunächst eine Fortsetzung von  $\lambda$  zu einem äußeren Maß  $\lambda^*$ , also  $\lambda = \lambda^*$  auf  $\mathcal{A}$ , wobei jede Menge aus  $\mathcal{A}$  die Caratheodory-Bedingung erfüllt. Satz 1.27 liefert eine  $\sigma$ -Algebra  $\Lambda \supset \mathcal{A}$ , sodass  $\lambda := \lambda^*|_{\Lambda}$  ein Maß ist

**Definition 1.32** Die Elemente von  $\Lambda$  nennt man Lebesgue-messbare Mengen und  $\lambda$  das Lebesgue-Maß.

**Lemma 1.31** Sei  $\mu$  ein Prämaß auf einer Algebra  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ . Wir setzen für  $A \subset X$

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k) \mid (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right\}$$

Dies ist ein äußeres Maß mit  $\mu^* = \mu$  auf  $\mathcal{A}$  und jede Menge aus  $\mathcal{A}$  erfüllt die Caratheodory-Bedingung.

**Beweis (Caratheodory-Eigenschaft)** Sei  $E \subset X$  und  $A \subset \mathcal{A}$ . Zu zeigen:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A^C) + \mu^*(E \cap A)$$

„ $\leq$ “ folgt aus Subadditivität. Noch zu zeigen:  $\geq$ . Wir betrachten eine beliebige Überdeckung von  $E$  durch  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ ,  $B := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \supset E$ . Dann ist zunächst auch  $(B_k \cap A)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Überdeckung von  $E \cap A$  und entsprechend  $(B_k \cap A^C)_{k \in \mathbb{N}}$  von  $E \cap A^C$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_k) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_k \cap A) + \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(B_k \cap A^C) \\ &\geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^C) \end{aligned}$$

Infimum über  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \supset E$  liefert

$$\mu(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^C)$$

□

**Beweis (von Lemma 1.31)** •  $\mathcal{A}$  ist Algebra ( $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ , das Komplement einer endlichen Vereinigung disjunkter Intervalle besitzt wieder diese Form)

• Offenbar gilt  $\lambda(\emptyset) = 0$

zu zeigen (für  $\sigma$ -Algebra): für alle paarweise disjunkten Folgen  $(I_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$

$$\lambda\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(I_k)$$

Wir bekommen

$$\sum_{j=1}^k \lambda(I_j) = \lambda\left(\bigcup_{j=1}^k I_j\right) \overset{\text{Monotonie}}{\leq} \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right) = \lambda(I)$$

↓  
Additivität

„ $\geq$ “: wir wählen  $\forall k \in \mathbb{N}$  ein offenes  $J_k \supset I_k$  mit

$$\lambda(J_k) \leq \lambda(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \quad \text{für ein } \varepsilon > 0$$

Sei zunächst  $I$  kompakt. Dann können wir endlich viele  $J_k$  auswählen, sodass diese  $I$  überdecken. Wir nehmen an, dass dies die ersten  $K$  Elemente sind (Umnummerierung). Es gilt

$$\begin{array}{c} \text{Monotonie} \\ \uparrow \\ \lambda(I) = \lambda\left(\bigcup_{j=1}^k J_j\right) \leq \sum_{j=1}^k \lambda(J_j) \leq \sum_{j=1}^k \lambda(I) + \varepsilon \\ \downarrow \\ \text{Subadditivität} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{aus Konstruktion} \\ \uparrow \end{array}$$

Mit  $\varepsilon \searrow 0$  folgt  $\sigma$ -Additivität für kompakte  $I$ . Die Behauptung folgt auch für beschränkte  $I$  (weil mit Additivität und  $\lambda(\{x\}) = \lambda([x, x]) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$  können wir die Endpunkte an Intervalle hinzufügen oder entfernen). Sei  $I$  ein unbeschränktes Intervall  $\lambda(I) = \infty$ . Zu zeigen

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) = \infty$$

Sei  $\xi \in I$ ,  $I \cap [\xi - x, \xi + x]$  kompakt.  $\forall x \in \mathbb{R}$  und von den ersten  $K$  Elementen überdeckt.  $K = K(\xi)$ . Wir bekommen

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) &\geq \sum_{j=1}^k \lambda(I_j) \geq \sum_{j=1}^k \lambda(J_j) - \varepsilon \\ &\quad \downarrow \\ &\quad \text{Konstruktion} \\ &\geq \lambda(I \cap [\xi - x, \xi + x]) - \varepsilon \geq x - |\xi| - \varepsilon \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) &\geq x - |\xi| - \varepsilon \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \end{aligned} \quad \square$$

## 1.1 Messbare Funktionen

**Definition 1.32** Seien  $(X, \Sigma_X), (Y, \Sigma_Y), f : X \rightarrow Y$  heißt **messbar** ( $\Sigma_X - \Sigma_Y$  messbar) falls

$$\forall A \in \Sigma_Y f^{-1}(A) \in \Sigma_X$$

Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $\Sigma_X$  die entsprechende Borel- $\sigma$ -Algebra so nennen wir eine messbare Funktion die Borel-Funktion.

**Bemerkung** Es genügt, Messbarkeit für ein Messsystem  $S \subset \mathcal{P}(Y)$  mit  $\Sigma(S) = \Sigma_Y$  zu überprüfen. In der Tat ist  $f^{-1}(A) \in \Sigma_X \forall A \in S$  so folgt

$$f^{-1}(A^C) = f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A) = (f^{-1}(A))^C \in \Sigma_X$$

weiter ist

$$f^{-1}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_k) \in \Sigma_X$$

Wir werden häufig nutzen  $(Y, \Sigma) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$

**Lemma 1.33**  $f : (X, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$  ist genau dann messbar, wenn

$$f^{-1}(I) \in \Sigma \forall I = \bigtimes_{j=1}^n (a_j, \infty), a_j \in \mathbb{R}$$

insbesondere ist  $f$  genau dann messbar, wenn jede seiner Komponenten  $x \rightarrow \langle f(x), e_i \rangle, i = 1, \dots, n$  messbar ist und eine komplexwertige Funktion ist messbar genau dann wenn Real- und Imaginärteil messbar sind.

**Beweis** Die  $\sigma$ -Algebra die von den verallgemeinerten Quadern erzeugt wird enthält die Quader der Form

$$\bigtimes_{j=1}^n (a_j, b_j)$$

Diese bilden eine Basis für die Topologie  $\implies$  führen auf  $\mathcal{B}^n$ . □

**Lemma 1.34** Seien  $(X, \Sigma_X), (Y, \Sigma_Y), (Z, \Sigma_Z)$  Messräume. Sind  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  messbar, dann ist auch  $g \circ f : X \rightarrow Z$  messbar. Sind  $X, Y$  topologische Räume,  $\Sigma_X, \Sigma_Y$   $\mathcal{B}$ - $\sigma$ -Algebren so ist jede stetige Funktion  $f : X \rightarrow Y$  messbar.

**Beweis** Das Urbild offener Mengen (diese erzeugen  $\mathcal{B}$ - $\sigma$ -Algebra  $\Sigma_Y$ ) ist aufgrund der Stetigkeit offen, also messbar. Ist  $C \in \Sigma_Z$  messbar, so ist es auch  $B := g^{-1}(C) \in \Sigma_Y$  und  $A := f^{-1}(B) \in \Sigma_X$ . □

**Lemma 1.35 (1.36)** Sind  $f, g : (X, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  messbar, so auch  $f + g, f - g$ .

**Beweis** Aus Stetigkeit von Addition und Subtraktion auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  und Lemma 1.36. □

**Bemerkung** Für  $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  ist  $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  eine Borel-Funktion, wenn  $f^{-1}(\{-\infty; \infty\})$  beiden Borel-Mengen sind und  $f|_{X \setminus f^{-1}(\{\pm\infty\})}$  eine Borel-Funktion.

**Lemma 1.36 (1.40)** Sei  $(f_k)$  eine Folge messbarer Funktionen  $(X, \bar{\Sigma}) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$ . Dann sind auch

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k, \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k, \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k, \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$$

messbar.

## 1.2 Integration

**Definition 1.37** Eine messbare Funktion  $f : (X, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  heißt **einfach**, wenn ihr Bild endlich ist, das heißt  $\exists A_1, \dots, A_m \in \Sigma, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$  mit

$$f = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A_j}$$

wobei  $\chi_M$  die charakteristische Funktion ist.

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & x \in M \\ 0 & x \notin M \end{cases}$$

Wir können fordern, dass  $A_j$  paarweise disjunkt sind,  $\alpha_i \neq \alpha_j, i \neq j$  und  $\bigcup A_j = X$  gilt.

$$\implies f(x) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}, \quad f^{-1}(\{\alpha_j\}) = A_j \quad \forall j = 1, \dots, m$$

und diese Darstellung ist eindeutig.

Den Vektorraum einfacher Funktionen bezeichnen wir mit  $S(X, \mu)$

**Definition 1.38 (Integral auf  $S(X, \mu)$ )** Das Integral einer nicht negativen einfachen Funktion über die Menge  $A \in \Sigma$  wird durch

$$\int_A f d\mu := \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j \cap A)$$

erklärt, wobei wir  $0 \cdot \infty = 0$  vereinbaren.

**Lemma 1.39** Das Integral hat die folgenden Eigenschaften

1.  $\int_A f d\mu = \int_X \chi_A f d\mu$  für  $f \in S(X, \mu)$
2.  $\int_{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k} f d\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{B_k} f d\mu$   $B_k$  paarweise disjunkt,  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \Sigma$
3.  $\int_A \alpha f d\mu = \alpha \int_A f d\mu$  für  $\alpha \geq 0$
4.  $\int_A (f + g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu$  für  $f, g \in S(X, \mu)$
5.  $A \subset B, B \in \Sigma \implies \int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$
6.  $f \leq g \implies \int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu, g \in S(\Sigma, \mu), g \geq 0$

**Beweis** 1. aus Definition

$$2. \mu\left(A_j \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_j \cap B_k) \text{ (man darf die Reihe über nichtnegative Zahlen umsortieren)}$$

3. klar

4. Für

$$f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}$$

$$g = \sum_{k=1}^n \beta_k \chi_{B_k}$$

gilt mit  $C_{jk} = A_j \cap B_k$

$$\begin{aligned} \int_A (f + g) d\mu &= \sum_{j,k} \int_{C_{jk}} (f + g) d\mu = \sum_{j,k} (\alpha_j + \beta_k) \mu(C_{jk}) \\ &= \sum_{j,k} \alpha_j \mu(C_{jk}) + \sum_{j,k} \beta_k \mu(C_{jk}) = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu \end{aligned}$$

5. Aus Monotonie von  $\mu$

6. Wie in 4. mit

$$\int_A f d\mu = \sum_{j,k} \alpha_j \mu(C_{jk}) \leq \sum_{j,k} \beta_k \mu(C_{jk}) = \int_A g d\mu$$

□

**Definition 1.40 (Integral von nichtnegativen Funktionen)** Sei  $(X, \Sigma, \mu)$  Maßraum,  $A \in \Sigma$ ,  $f : (X, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  messbar und nichtnegativ. Dann ist

$$\int_A f d\mu := \sup \left\{ \int_A g d\mu \mid g \in S(X, \mu), g \leq f, g \geq 0 \right\}$$

**Bemerkung** Bis auf 2. und 4. übertragen sich die Eigenschaften des Integrals über einfache Funktionen.

**Satz 1.41 (Monotone Konvergenz / Beppo Levi)** Sei  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge messbarer nichtnegativer Funktionen

$$f_k : (X, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \quad \text{mit} \quad f_k \nearrow f$$

$(f_k \nearrow f \implies f_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$  punktweise und (implizit aus Nichtnegativität)  $\sum_{k=1}^n f_k$  monoton)  
Dann ist für  $A \in \Sigma$

$$\int_A f_k d\mu \rightarrow \int_A f d\mu$$

**Beweis**  $f$  messbar, damit erhält man die Monotonie von

$$\int_A f_k d\mu$$

und hieraus Konvergenz gegen  $\varphi \in [0, \infty]$ . Aus  $f_k \leq f$  und Monotonie den Integral:

$$\varphi \leq \int_A f d\mu$$

Für „ $\geq$ “ nehmen wir  $g \in S(X, \mu)$ ,  $g \geq 0$ ,  $g \leq f$  mit

$$A_k := \{x \in A \mid f_k(x) \geq \theta \cdot g(x)\}$$

für ein festes  $\theta \in (0, 1)$  und hieraus

$$\begin{aligned} \varphi &\xleftarrow{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu \geq \int_{A_k} f_k d\mu \geq \int_{A_k} \theta g d\mu \\ &\geq \theta \int_{A_k} g d\mu \rightarrow \theta \int_A g d\mu \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für  $\theta = 1$

$$\implies \varphi \geq \int_A g d\mu$$

$$\implies \varphi = \int_A f d\mu$$

□

**Bemerkung**  $\forall f \geq 0$ , mit einer monoton steigenden Folge nicht negativer einfacher Funktionen  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $g_k \nearrow f$  ist

$$\int_A g_k d\mu \nearrow \int_A f d\mu$$

Eine geeignete Funktion ist

$$g_k(x) := \sum_{j=0}^{k2^k} \frac{j}{2^k} \chi_{f^{-1}(A_j)}(x)$$

mit

$$A_j = \{[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}) \mid j = 0, \dots, k2^k - 1\}$$

Ist  $f$  gleichmäßig beschränkt  $\implies (g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert gleichmäßig (denn  $0 \leq f - g_k \leq \frac{1}{2^k}$  für  $k$  groß genug) Mit Satz von Beppo Levi erhält man somit

$$\begin{aligned} 2. \quad & \int_{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k} f d\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{B_k} f d\mu \quad B_k \text{ paarweise disjunkt, } (B_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \Sigma \\ 4. \quad & \int_A (f + g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu \quad \text{für } g \geq 0 \end{aligned}$$

**Lemma 1.42** Ist  $f \geq 0$  messbar, so wird durch

$$\nu(A) := \int f d\mu$$

ein Maß mit

$$\int d\nu = \int g f d\mu$$

für jedes messbare  $g \geq 0$  definiert (Bezeichnung:  $d\nu = f d\mu$ )

**Beweis**

$$\begin{aligned} \nu(\emptyset) &= \int_{\emptyset} f d\mu = \int \chi_{\emptyset} f d\mu = 0 \cdot \int f d\mu = 0 \\ \nu(A \cup B) &= \int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu = \nu(A) + \nu(B) \quad \text{für } A \cap B = \emptyset \end{aligned}$$

Für abzählbare Vereinigungen äquivalent

$$\nu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \nu(A_k)$$

Ist  $g$  einfach und  $\geq 0$

$$\implies g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{B_i}$$

für disjunkte  $B_i \in \Sigma, \bigcup B_i = X, \alpha_i \geq 0$

$$\begin{aligned} \int g d\nu &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \nu(B_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_{B_j} f d\mu = \sum_{j=1}^n \int \alpha_j f \chi_{B_j} d\mu \\ &= \int \sum_{j=1}^n \underbrace{(\alpha_j \chi_{B_j})}_{=g} f d\mu = \int g f d\mu \end{aligned}$$

Approximation liefert die Behauptung für beliebige  $g \geq 0$ . □

**Satz 1.43 (Fatou Lemma)** Sei  $(X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum. Ist  $f_k$  eine Folge nicht-negativer Funktionen  $(X, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  so gilt  $\forall A \in \Sigma$

$$\int_A \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu$$

**Beweis** Wir setzen  $g_k := \inf_{j \geq k} f_j$ , also

$$g_k \nearrow \liminf_{j \rightarrow \infty} f_j$$

Weiterhin  $g_k \leq f_k \forall k \in \mathbb{N}$

$$\implies \int_A g_k d\mu \leq \int_A f_k d\mu$$

Übergang zum  $\liminf$

$$\begin{aligned} \implies \liminf \int_A g_k d\mu &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_A g_k d\mu = \int_A \lim_{k \rightarrow \infty} g_k d\mu \\ &= \int_A \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu \end{aligned} \quad \square$$

**Bemerkung** Im Allgemeinen können wir keine Gleichheit erwarten. Zum Beispiel ist für  $f_k := \chi_{(k, k+1)}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  einerseits  $f_k(x) \rightarrow 0$  punktweise, andererseits

$$\int_{\mathbb{R}} f_k dx = 1, f_k = k \chi_{(0, \frac{1}{k})} \text{ und } f_k = \frac{1}{k} \chi_{(0, k)}$$

**Definition 1.44** Sei  $(X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum,  $A \in \Sigma$  und  $f : (X, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  messbar. Ist

$$\int_A f^\pm d\mu < \infty$$

so nennen wir  $f$  integrierbar über  $A$  und wir setzen

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu \in \mathbb{R}$$

Die Menge der über  $A$  integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit  $\mathcal{L}^1(A, \mu)$

**Lemma 1.45** Unter den Bedingungen der Definition ist das Integral linear und es erfüllt sämtliche Eigenschaften von Lemma 1.39. Eine Funktion ist genau dann integrierbar, wenn ihr Betrag integrierbar ist. Darüber hinaus gilt für integrierbare Funktionen  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| d\mu \quad \text{und} \quad \int_A |f + g| d\mu \leq \int_A |f| d\mu + \int_A |g| d\mu$$

**Beweis** Die Linearität und die Eigenschaften aus dem Lemma 1.39 wird dem geeigneten Leser überlassen. Setze  $\varphi := \int_A f d\mu$ , dann ist

$$|\varphi| = (\operatorname{sgn} \varphi) \varphi = \int_A (\operatorname{sgn} \varphi) f d\mu \leq \int_A |f| d\mu$$

Die Dreiecksungleichung folgt aus  $|f + g| \leq |f| + |g|$  und der Linearität des Integrals.  $\square$

**Lemma 1.46** Sei  $(X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  messbar.

$$1. \int_X |f| d\mu = 0 \iff f(x) = 0 \text{ für } \mu\text{-fast alle } x \in X$$



2. Ist  $f$  außerdem integrierbar oder nicht negativ und  $A \in \Sigma$  so gilt

$$\mu(A) = 0 \implies \int_A f d\mu = 0$$

**Beweis** Übungen. □

**Lemma 1.47** Sei  $(X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum,  $A \in \Sigma$ ,  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge aus messbaren Funktionen mit  $f_k : X \rightarrow \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{N}$  und  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, dann gilt

$$\begin{aligned} \int_A \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu &\leq \liminf_{k \in \mathbb{N}} \int_A f_k d\mu \quad \text{falls } g \leq f_k \forall k \in \mathbb{N} \\ \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu &\leq \int_A \limsup_{k \in \mathbb{N}} f_k d\mu \quad \text{falls } f_k \leq g \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

**Beweis** Man wende für die erste Ungleichung das Fatou-Lemma auf  $f_k - g$  an und subtrahiere  $\int_A g d\mu$  auf beiden Seiten. Die zweite Ungleichung folgt mit  $\liminf(-f_k) = -\limsup f_k$ . □

**Satz 1.48 (Satz von der dominierten Konvergenz)** Sei  $(X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum,  $A \in \Sigma$ ,  $(f_k)$  eine Folge messbarer Funktionen von  $X$  nach  $\mathbb{R}$ , die punktweise fast überall gegen ein  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiere. (Punktweise fast überall bedeutet:  $f_k(x) \rightarrow f(x)$  für  $\mu$ -fast alle von  $X$ ). Gibt es eine Majorante, d.h. heißt eine integrierbare Funktion  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\sup_{k \in \mathbb{N}} |f_k| \leq g$  so ist auch  $f$  integrierbar und wir erhalten

$$\int_A f_k d\mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_A f d\mu$$

**Beweis** Nach Voraussetzung ist  $-g \leq f_k \leq g$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und folglich erhalten wir mit dem erweiterten Fatou-Lemma

$$\int_A f = \int_A \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu \leq \int_A \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu = \int_A f d\mu \quad \square$$

**Bemerkung** Für stetige und Lebesgue-integrierbare Funktionen auf reellen Intervallen stimmen Riemann- und Lebesgue-Integrierbarkeit überein. Ist  $f$  stetig auf einem kompakten Intervall, so ist  $f$  beschränkt und messbar, also Lebesgue-Integrierbar.

Allgemeiner ist jede beschränkte, messbare Funktion auf einem kompakten Intervall genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge ihrer Unstetigkeiten eine Lebesgue-Nullmenge ist. In diesem Fall stimmen die beiden Integralbegriffe überein. Diese Aussage gilt nicht für verallgemeinerte Intervalle.

**Beispiel 1.49**

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$$

existiert als Riemann-Integral

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin(x)}{x} dx$$

andererseits

$$\int_0^\infty \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx = \infty$$

also keine Lebesgue-Integrierbarkeit.

### 1.3 Produktmaße

Notation: Für Messräume  $(X_1, \Sigma_1), (X_2, \Sigma_2)$  bezeichnen wir die  $\sigma$ -Algebra, die alle „Rechtecke“ der  $A_1 \times A_2$  mit  $A_1 \in \Sigma_1, A_2 \in \Sigma_2$  enthält mit  $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ .

**Lemma 1.50** Für Messräume  $(X_1, \Sigma_1), (X_1, \Sigma_2)$  und  $A \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$  liegen die Schnitte

$$A_1(x_2) := \{x_1 \in X_1 \mid (x_1, x_2) \in A\}$$

$$A_2(x_1) := \{x_2 \in X_2 \mid (x_1, x_2) \in A\}$$

in  $\Sigma_1$  beziehungsweise  $\Sigma_2$

**Beweis** Setze  $S := \{A \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \mid A_1(x_2) \in \Sigma_1\}$ . Natürlich gilt  $A_1 \times A_2 \in S$  für alle  $A_1 \in \Sigma_1, A_2 \in \Sigma_2$ . Isofern genügt es zu zeigen, dass  $S$  eine  $\sigma$ -Algebra bildet. In der Tat ist  $X_1 \times X_2 \in S$  und für  $A \in S$  ist

$$(A^C)_1(x_2) = \{x_1 \in X_1 \mid (x_1, x_2) \in A^C\} = \{x_1 \in X_1 \mid (x_1, x_2) \in A\}^C = (A_1(x_2))^C \in \Sigma_1$$

Für  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset S$  haben wir

$$\left( \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right)_1(x_2) = \{x_1 \in X_1 \mid (x_1, x_2) \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x_1 \in X_1 \mid (x_1, x_2) \in A_k\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k)_1(x_2) \in \Sigma_1$$

Für  $A_2(x_1)$  argumentiert man analog. □

**Korollar 1.51** Seien  $(X_1, \Sigma_1), (X_2, \Sigma_2)$  Messräume und sei  $f : (X_1 \times X_2, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  messbar. Dann ist auch  $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$  für jedes  $x_2 \in X_2$  auf  $X_1$  messbar und entsprechend  $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$  für jedes  $x_1 \in X_1$  auf  $X_2$

**Beweis** Für  $B \in \mathcal{B}$  und  $x_2 \in X_2$  ist  $f^{-1}(\cdot, x_2)(B) \in \Sigma_1$ , denn für  $A = f^{-1}(B), A \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$  ist

$$f^{-1}(\cdot, x_2)(B) = \{x_1 \in X_1 \mid f(x_1, x_2) \in B\} = \{x_1 \in X_1 \mid (x_1, x_2) \in A\} = A_1(x_2) \quad \square$$