1 Mengen und Zahlen

Quantoren, Mengen (operationen), Äquivalenzrelationen, Abbildungen
$f: X \to Y$ heißt
injektiv, wenn $\forall x_1, x_2 \in X: f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
surjektiv,w enn $f(X) = Y \iff \forall y \in Y \exists x \in x: f(x) = y$
bijektiv, wenn surjektiv und injektiv $\iff \exists! g: Y \to X, g\circ f = \mathrm{id}_x, f\circ g = \mathrm{id}_y$
$f: X\to Y, g: Y \to Z$ injektiv/surjektiv $\implies g\circ f$ injektiv/surjektiv.
$g \circ f$ injektiv $\implies f$ injektiv
Natürliche Zahlen:
Peano-Axiome
vollständige Induktion
Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$, Ordnungsrelationen
Abzählbarkeit: $n\in\mathbb{N}, A_n := \{m \in \mathbb{N} \mid m \le n\} = \{1,\dots,n\}$
Menge M heißt
endlich, wenn es ein $n\in\mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $f: M \to A_n$ gibt.
abzählbar uneindlich,w enn es eine bijektive Abbildung $f: M\to\mathbb{N}$ gibt.
($\mathbb{N}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, kartesisches Produkt abzählbarer Mengen, abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen)
überabzählbar, wenn sie weder endlich noch abzählbar ist.
($\mathbb{R}$, Menge der Folgen mit Werten in $\{0,1\}$) höchstens abzählbar, wenn sie abzählbar oder endlich ist
Schranken: M Menge, $A\subseteq M$, dann heißt $S\in M$
obere Schranke, wenn $\forall x \in A: x \le S$
untere Schranke, wenn $\forall x\in A: x \ge S$
Supremum von A, wenn für alle oberen Schranken S' von A gilt $S \le S'$
Infimum von A, wenn für alle untere Schranken S' von A gilt $S' \le S$
Axiome der reellen Zahlen: Körper, geordnet, Einbettung von $\mathbb{N}$
Vollständigkeit: Jede nach oben beschränkte Teilmenge hat ein Supremum.
Archimedisches Prinzip: $\forall x\in\mathbb{R}: \exists n \in \mathbb{N}: x \le n$
$M\subseteq \mathbb{R}$ beschränkt:
S (obere Schranke) ist Supremum $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M: S - \varepsilon \le x$
S (unter Schranke) ist Infimum $\iff \forall\varepsilon>0\exists x\in M: S+\varepsilon \le x$
$\emptyset \ne A, B \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, sodass $A\subseteq B$, dann $\sup A \le \sup B$
Monotonie:
$f: A\to B$ heißt (streng) monoton wachsend, wenn $x \le y \implies f(x) \le (<) f(y)$
$f: A \to B$ heißt (streng) monoton fallend, wenn $x\le y \implies f(x) \ge (>) f(y)$
Betrag: $|\cdot|: \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+, x \mapsto \begin{cases} x & x\ge 0 \\ -x & x<0\end{cases}$
Signum: $\mathrm{sgn}: \mathbb{R}\to\{-1,0,1\}, x\mapsto \begin{cases}\frac{x}{|x|} & x\ne0\\ 0 & x=0\end{cases}$
$|x\cdot y| = |x|\cdot|y|, |x+y| \le |x|+|y|, ||x|-|y|| \le |x-y|, |x-y| \le \varepsilon \iff x - e \le y \le x+\varepsilon$
Fakultät/Binominalkoeffizient: $k,n\in\mathbb{N}_0$
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{n-k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
Binominalsatz: $\forall n\in\mathbb{N}_0, x,y\in\mathbb{R}$ gilt:
$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$
Bernoulli-Ungleichung: Für $x\ge -1, n\in\mathbb{N}$ gilt $(1+x)^n \ge 1+xn$
Intervalle: $D\subseteq\mathbb{R}$ heißt Intervall, wenn es für $x,y\in D$ mit $x\le y$ für alle $z\in\mathbb{R}$ mit $x\le z\le y$ gilt $z\in D$
(beschränkt) offene Intervalle $(a,b), a,b\in\mathbb{R}$
(beschränkt) abgeschlossene Intervalle $[a,b], a,b\in\mathbb{R}$
Halbgeraden
$(a,\infty), (-\infty,b), [a,\infty), (-\infty,b], a,b\in\mathbb{R}$
reelle Gerade $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$
Komplexe Zahlen: definiere auf $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$
$+: (x_1,y_1),(x_2,y_2) \mapsto (x_1+x_2, y_1+y_2)$
$\cdot: (x_1,y_1),(x_2,y_2)\mapsto (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$
$\mathbb{C} := (\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist Körper mit Lösungen der Gleichung
$(x,y)\cdot(x,y) + (1,0) = (0,0)$ der Form $\pm i := (0,\pm1)$
Schreibweise: $z\in\mathbb{C}, z = x+iy$
$x =: \Re(z), y =: \Im(z), \mathbb{R}$ ist eingebetteter Unterkörper
$\mathbb{R} = \{z\in\mathbb{C} \mid \Im(z) = 0\}$
$|\cdot|: \mathbb{C}\to\mathbb{R}_+, z\mapsto\sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$
$\bar{\cdot}: \mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto \bar z := \Re(z) - i\Im(z)$
$|z|^2 = z\cdot\bar z$
Ex existiert keine Ordungsrelation auf $\mathbb{C}$, die die Körperstruktor respektiert. ($0 < i^2 < i^2 + 1 = 0$ ↯)
Fundamentalsatz der Algebra:
Jedes Polynom $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$

2 Folgen und Reihen

(reelle) Folge ist Abbildung $a: \mathbb{N}\to\mathbb{R}$
$a(n) =: a_n, a =: (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegenDen Grenzerwt $a\in\mathbb{R}$, wenn für alle $\varepsilon>0$ ein $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ existiert, sodass $|a_n - a < \varepsilon| \forall n \ge N_\varepsilon$
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn für alle $\varepsilon>0$ ein $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ existiert, sodass $|a_n - a_m| \le \varepsilon \forall m \ge n \ge N_\varepsilon$
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\iff (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge.
a heißt Häufungswert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für alle $\varepsilon>0$ unendlich viele Folgenglieder im Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ liegen.
jeder Grenzwert ist auch ein Häufungswert (aber nicht notwendig umgekehrt)
Grenzwerte sind eindeutig (Häufungswerte aber nicht notwendig).
$M\subseteq\mathbb{R}, a$ Häufungspunkt von M, wenn für alle $\varepsilon>0$ unendlich viele $x\in M$ im Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge, $M := \{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$, dann a Häufungswert der Folge $\impliedby a$ Häufungspunkt der Menge, **aber** nicht notwendig umgekehrt, ($a_n := 1 \forall n\in\mathbb{N}$)
Eigenschaften des Grenzwerts
Eindeutigkeit: sind a, a' Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann gilt $a = a'$
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte, monoton wachsende Folge $M := \{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$, dann $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \sup M$
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte, monoton fallende Folge $M := \{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$, dann $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \inf M$
Stabilität: Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit Grenzwert a,b, dann
$(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} a+b$
$(a_n\cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{n\to\infty} a\cdot b$
$|a_n| \xrightarrow{n\to\infty} |a|$
$b_n \ne 0 \forall n\in\mathbb{N}, b\ne 0: a_n/b_n \xrightarrow{n\to\infty} a/b$
Ist $a = b, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge mit $a_n \le c_n \le b_n \forall n\in\mathbb{N}$, dann
$c_n \xrightarrow{n\to\infty} a = b$
$\exists\gamma\in(0,1): |b_{n+1}| \le \gamma|b_n| \forall n\in\mathbb{N} \implies b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$
$1/n, 1/n^2, 1/n^3, \dots \xrightarrow{n\to\infty} 0$
geometrische Folge, $|q|<1$
$a_n = cq^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$
$$\sum_{k=0}^n cq^k = c\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-q}$$
$$\left(1+\frac1n\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e \qquad \left(1-\frac1n\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} \frac1e$$
$$|x|>1: \frac{x^n}{n!} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \frac{n!}{n^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$
Bolzano-Weierstraß: Sei $A\subseteq\mathbb{R}$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:
A ist beschränkt und abgeschlossen.
jede Folge in A hat einen Häufungswert in A.
jede Fogle in A hat eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert A.
Jede Folge hat eine monotone Teilfolge.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to$ Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$
Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$
Konvergenzkriterien:
Notwendig: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge
Cauchy: $\forall\varepsilon>0\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}: \forall n>m\ge N_\varepsilon$:
$$|\sum_{k=m+1}^n a_n| < \varepsilon$$
Leibnitz: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alternierend und $|a_n|$ ist monoton fallend und $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Außerdem $|\sum_{k=m}^\infty a_n| \le |a_m| \forall m\in\mathbb{N}$
Absolute Konvergenz: $\sum_{k=1}^\infty |a_n| \implies \sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergent
Majorante: Ist $\sum_{n=1}^\infty b_n$ (absolut) konvergent und gilt $|a_k| \le b_k$ für fast alle $k \implies \sum_{k=1}^\infty a_k$ absolut konvergent.
Minorante: Ist $\sum_{n=1}^\infty b_n$ divergent und gilt $b_k \le |a_k|$ für fast alle $k \implies \sum_{k=1}^\infty a_k$ divergent.
Wurzelkriterum: wenn es $q\in(0,1)$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} \le q < 1 \forall k \implies$ absolute Konvergenz $\sum a_k$
(alternativ: $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ Konvergenz, $\limsup\sqrt[k]{|a_k|} > 1 \implies$ Divergenz)
Quotientenkriterium: wenn es $g\in(0,1)$ gibt mit $|a_{n+1}/a_k| \le q < 1 \implies$ absolute Konvergenz $\sum a_k$
(alternativ: $\lim\sup|a_{k-1}/a_k| < 1$)
Cauchy'scher Verdichtungssatz: Reihe $\sum a_k, a_k \ge 0, a_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$, dann gilt
$\sum a_k \iff \sum 2^k a_{2^k}$
Teleskopreihe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge $\implies$
$$\sum_{k=1}^\infty (a_k - a_{k+1}) = a_1$$
oder auch
$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a_1 - S \iff \sum_{k=1}^\infty (a_k - a_{k-1}) = S$$
Umordnungsatz: Ist $\sum a_n$ absolut konvergent, dann gilt $\forall\tau:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ (bijektiv) ist auch $\sum a_{\tau(n)}$ absolut konvergent mit dem gleichen Grenzwert.
Potenzreihen: $\sum_{k=0}^\infty a_k(x-x_0)^k$ Koeffizienten $a_k\in\mathbb{C}$. Entwicklungspunkt x_0.
Potenzreiehn konvergieren absolut $\forall x\in\mathbb{C}$ mit
$$|x-x_0| < \rho := \frac{1}{\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}}$$
(mit der Konvention $1/\infty = 0, \frac10 = \infty$)
ρ heißt Konvergenzradius.

3 Stetige Funktionen

$f: D\to\mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0\in D$ wenn für alle Folgen in D mit $x_n \xrightarrow{x\to\infty} x_0$ gilt
$f(x_n)\xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$
f heißt stetig auf D, wenn f in allen Punkten von D stetig ist.
$f: D\to\mathbb{R}$ hat in $x_0\in\bar D$ einen Grenzwert, wenn für alle Folgen in D mit $x_n \xrightarrow{x\to\infty} x_0$ gilt
$f(x_n)\xrightarrow{n\to\infty} a$, schreibe $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$
einseitiger Grenzwert:
$\lim_{x\downarrow x_0^+} f(x) := \lim_{x\to x_0} f|_{\{x>x_0\}}(x)$
$\lim_{x\uparrow x_0^-} f(x) := \lim_{x\to x_0} f|_{\{x<x_0\}}(x)$
Asymptotik: $f: D\to\mathbb{R}, D$ unbeschränkt.
f hat Grenzwert a in ∞, wenn
$\forall\varepsilon>0\exists c\in\mathbb{R}: |f(x)-a| < \varepsilon\forall x > c$
$f(x) \xrightarrow{x\to x_0} \pm\infty$, wenn $\forall c\in\mathbb{R}_+\exists\delta>0: f(x) > c, < -c \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\cap(D\setminus\{x_0\})$
Stetigkeit ist stabil gegenüber punktweisen Summen, Produkt, Quotient ($\ne 0$) und Komposition, das heißt
f,g stetig $\implies f+g, f\cdot g, (f/g)(g\ne0), g\circ f$ stetig.
$(f+g)(x) = f(x)+g(x), (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$.
ε-δ-Kriterium: $f: D\to\mathbb{R}$ ist stetig in $x_0\in D$, $\iff \forall\varepsilon>0\exists\delta_{\varepsilon,x_0}>0: \forall x\in D$:

$|x-x_0|<\delta \implies |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$
gleichmäßige Stetigkeit: Eine stetige Funktion f heißt gleichmäßig stetig, wenn $\forall\varepsilon>0\exists\delta_\varepsilon>0: \forall x,y\in D:$
$|x-y|<\delta \implies |f(x)-f(y)|<\varepsilon$
Lipschitz-Stetigkeit: $f: D \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitzstetig, wenn es $L>0$, sodass $\forall x,y\in D$ gilt $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|$
Lipschitz-stetig $\implies$ gleichmäßig stetig $\implies$ stetig.
Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit:
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig $\implies$ f ist gleichmäßig stetig auf $[a,b]$ Abbildungseigenschaften stetiger Funktionen:
Satz vom Extremum: Sei $f: D\to\mathbb{R}$ stetig, D beschränkt und abgeschlossen. Dann existeren $x_{\min}, x_{\max}$, sodass
$\sup_{x\in D} f(x) = f(x_{\max})$ $\inf_{x\in D} f(x) = f(x_{\min})$
Zwischenwertsatz: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, dann gibt es zu $y\in[f(a),f(b)]$ ein $\xi\in(a,b)$, sodass $f(\xi)=y$ (stärker: $\forall y\in[\min f, \max f]$)
Monotonie: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ stetig ist genau dann injektiv, wenn sie streng monoton ist.
Funktionsfolgen: $n\in\mathbb{N}, f_n: D\to\mathbb{N}$
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise, wenn für alle $x\in D$ die Zahlenfolge $(f_n(x))_n\in\mathbb{N}$ konvergiert gegen Grenzfunktion $f: f_n(x)\xrightarrow{n\to\infty} f(x)$. (sprich: $\forall\varepsilon>0\exists N_{\varepsilon,x}\in\mathbb{N}: |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\forall n\ge N_{eps,x}$)
gleichmäßige Konvergenz: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt gleichmäßig konvergent auf D gegen die Grenzfunktion f, wenn $\forall\varepsilon>0$
$\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}: |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\forall n\ge N_\varepsilon\forall x\in D$
$f_n: D\to\mathbb{R}$ stetig und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f, dann ist auch f stetig.
Funktionenräume: $\mathcal{C}([a,b]) := \{f:[a,b]\to\mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$
$\mathbb{R}$-Vektorraum (in der Regel unendlich dimensional)
$\|\cdot\|_\infty: \mathcal{C}([a,b])\to\mathbb{R}_+, f\mapsto \max_{x\in[a,b]}|f(x)|$
Norm, normierer Raum $(\mathcal{C}([a,b]),\|\cdot\|_\infty)$
$\forall x,y\in V,\lambda\in\mathbb{R}$:
$\|x\|\ge 0, \|x\|=0 \iff x=0, \|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|, \|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$
Konvergenzbegriff in Norm: $f_n\to f$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty \iff \forall\varepsilon>0\exists N\in\mathbb{N}: \|f_n-f\|_\infty<\varepsilon\forall n\ge N$ Satz von Arzela-Ascoli: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{C}([a,b])$ Folge von gleichmäßig beschränkten (das heißt $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_\infty<\infty$) und gleichgradig stetig (das heißt $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\forall n\in\mathbb{N}: \sup_{|x-y|<\delta}|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon$) dann gibt es eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $\mathcal{C}([a,b])$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$

4 Differentialrechnung

$f: D\to\mathbb{R}, x_0\in D$, definiere
$$D_h f(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
f heißt differenzierbar in x_0, wenn für jede Nullfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Differenzenquotienten $(D_{h_n}f(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} D_{h_n}f(x_0)$ heißt Ableitung von f im Punkt $x_0, f'(x_0)$.
Alternativ: $\exists L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=f(x_0)+L(x-x_0)+r(x-x_0)$ mit $r(x-x_0)/(x-x_0)\xrightarrow{x\to x_0} 0, f'(x_0)=L$
f differenzierbar in $x_0 \implies f$ stetig in x_0.
f ist differenzierbar auf D, wenn f in jedem Punkt differenzierbar ist.
Fasse f' als Funktion $f': D\to\mathbb{R}, x\mapsto f'(x)$
f heißt stetig differenzierbar, wenn f' stetig ist.
n-te Ableitung: $f^{(n)}(x_0)=(f^{(n-1)})'(x_0), f^{(0)}=f$.
f heißt glatt, wenn $f^{(n)}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ existiert.
Stabilität: $f,g: D\to\mathbb{R}, x_0\in D$
Linearität: $(\alpha f+\beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0)+\beta g'(x_0)\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
Produktregel: $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$
hat g keine Nullstelle, so gilt:
Quotientenregel: $(f/g)'(x_0) = (f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0))/g^2(x_0)$
Kettenregel: $f: D\to D', g: D'\to\mathbb{R}$ beide differenzierbar in $x_0\in D, f(x_0)\in D'$. dann ist $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$ Satz von der inversen Funktion: $f: D\to\mathbb{R}$ stetig, injektiv, D abgeschlossen, f differenzierbar in $x_0\in D, f: D\to f(D)$ bijektiv $\implies \exists f^{-1}: f(D)\to D$ und es gilt $(f^{-1})'(f(x_0)) = 1/f'(x_0)$
Extremwertheorie: $f: D\to\mathbb{R}$ hat in $x_0\in D$ ein globales Extremum wenn gilt:
$f(x_0)\ge f(x)\forall x\in D$ (Maximum)
$f(x_0)\le f(x)\forall x\in D$ (Minimum)
f hat ein lokales Extremum, wenn obige Bedingungen auf einer δ-Umgebung von x_0 zutreffen.
Satz von Extremum: (notwendige Bedingung) $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ differenzierbar hat lokales Extremum in $x_0\in(a,b)$, dann gilt $f'(x_0)=0$
1. Mittelwertsatz: Ist $f: D\to\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a,b), dann gibt es $x\in(a,b)$, sodass
$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
Hinreichende Bedingung: Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)\neq 0$, dann folgt f hat in x_0 ein lokales Extremum. (Maximum für $<$, Minimum für $>$)
Taylorentwicklung: $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar
$$t_n(x_0,x) := \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$
n-te Taylorpolynom mit Entwicklungsstelle x_0.
f $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, dann gibt es zu jedem $x\in(a,b)$ ein ξ zwischen x_0 und x, sodass
$$f(x)-t_n(x_0,x) = R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$
f glatt $\implies$
$$t_\infty(x_0,x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$
f ist analytisch in x_0, wenn es in $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ eine Umgebung gibt, sodass $f(x)=t_\infty(x_0,x)$ Regel von L'Hospital: $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ sodass $g'(x)\neq 0$ und der Grenzwert $f'(x)/g'(x)\xrightarrow{x\to a} c\in\mathbb{R}$, dann gilt:
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)\in\{-\infty,0,\infty\} \implies \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = c$$
Differentation und Limes: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge stetig differenzierbarer Funktionen auf beschränkten Intervallen mit punktweisen Grenzwert $f_n(x)\xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ und gilt $f'_n\xrightarrow{n\to\infty} f^*$ gleichmäßig, dann gilt f ist differenzierbar mit $f'(x)=f^*(x)$

5 Integration

Zerlegung: $[a,b], Z := \{x_0,\dots,x_n\}, x_0=a, x_n=b, x_0<x_1<\dots<x_n$.
Feinheit: $h := \max_{k=1,\dots,n}|x_k-x_{k-1}|$
Zerlegung äquidistant $:\iff h$ konstant in k.
$f:[a,b]\to\mathbb{R}, Z$ Zerlegung, $I_k=[x_{k-1},x_k]$
$$\text{Obersumme: } \bar{S}_z f(x) := \sum_{k=1}^{\infty}\sup_{x\in I_k} f(x)(x_k-x_{k-1})$$
$$\text{Untersumme: } \underline{S}_z f(x) := \sum_{k=1}^{\infty}\inf_{x\in I_k} f(x)(x_k-x_{k-1})$$
$$\text{Oberintegral: } \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x := \inf_{Z\in\mathcal{Z}(a,b)}\bar{S}_Z f(x)$$
$$\text{Unterintegral: } \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x := \sup_{Z\in\mathcal{Z}(a,b)}\underline{S}_Z f(x)$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$$
f heißt Riemann-integrierbar, wenn
$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$$
$\iff \forall\varepsilon>0\exists Z\in\mathcal{Z}(a,b)|\bar{S}_z f(x)-\underline{S}_z|<\varepsilon$
Riemannsche Summe: $f:[a,b]\to\mathbb{R}, Z$ Zerlegung, $\xi_k\in I_k$
$$\mathrm{RS}_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$
Sei f beschränkt. f ist Riemann-integrierbar $\iff \forall(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{Z}(a,b)$ mit $h_n\to 0$ die zugehörigen Riemannschen Summen konvergieren und den gleichen Grenzwert haben.
stetige Funktionen sind integrierbar.
monotone Funktionen sind integrierbar.
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar, dann auch für jedes $[c,d]\subseteq[a,b]$ und es gilt für $c\in[a,b]$:
$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
Ferner ist das Integral linear, das heißt $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$:
$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$
Monoton: $g(x)\ge f(x)\forall x\in[a,b] \implies:$
$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \ge \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
Standardabschätzung: $m\le f(x)\le M\forall x\in[a,b] \implies:$
$$m(ba)\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le M(b-a)$$
Definitheit: $f(x)\ge 0\forall x\in[a,b], \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0 \implies f(x)=0$
Mittelwertsatz: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar ohne Vorraussetzungen, dann gibt es $\xi\in[a,b]$ mit
$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$
Stammfunktion: $F,f:[a,b]\to\mathbb{R}, F$ differenzierbar heißt Stammfunktion vin f, wenn gilt: $F'=f$.
Fundamentalsatz der Analysis: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig $\implies:$
$F(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ ist eine Stammfunktion von f.
Ist F Stammfunktion von f, dann gilt:
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$
Partielle Integration: $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt:
$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$
Substitution: $\varphi:[c,d]\to[a,b]$ stetig differenzierbar, dann gilt:
$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x$$