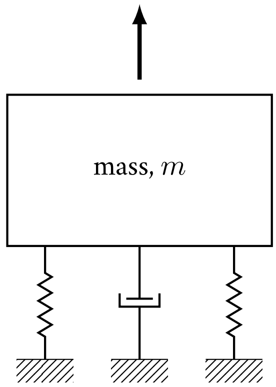
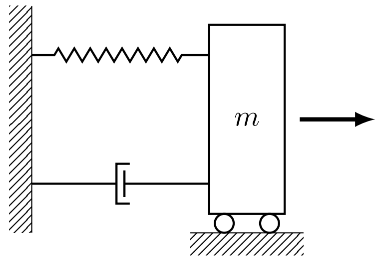
Experimentalphysik (H.-C. Schulz-Coulon)

Robin Heinemann

17. Januar 2017

Inhaltsverzeichnis





1 Einleitung

1.1 Eigenschaften der Physik

Physik ist <u>nicht</u> axiomatisch!

- Nicht alle Gesetze der Natur sind bekannt.
- Die bekannten Naturgesetze sind <u>nicht</u> unumstößlich
- unfertig
- empirisch
- quantitativ
- experimentell
- überprüfbar
- braucht Mathematik
- Gefühl für Größenordnungen und rationale Zusammenhänge

1.1.1 Beispiel

Fermi-Probleme:

- Anzahl der Klavierstimmer in Chicago?
- Anzahl der Autos in einem 10km Stau?
- Anzahl von Fischen im Ozean

1.2 Maßeinheiten

Internationales Einheitensystem (SI)

1.2.1 Basisgrößen

Größe	Einheit	Symbol
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunden	s

Meter Strecke, die das Licht im Vakuum während der Dauer von $\frac{1}{299792458}\mathrm{s}$ durchläuft.

Sekunde Das $9 192 631 770$-fache der Periodendauer der am Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nukulids Cs_{133} entsprechenden Strahlung.

Kilogramm Das Kilogramm ist die Einheit der Masse, es ist gleich der Masse des internationalen Kilogrammprototyps (ist scheiße).

Avogadroprojekt

$$N_A = \frac{MVn}{m}$$

N_A: Avogardokonstante ($N_A = 6.022\,141\,5 \times 10^{23}$)

1.2.2 Weitere Größen

Größe	Einheit	Symbol
Strom	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Lichtstärke	Candla	cd

2 Mechanik

Kinematik: Beschreibung der Bewegung Dynamik: Ursache der Bewegung

2.1 Kinematik des Massenpunktes

2.1.1 Eindimensionale Bewegung

TODO Skizze 1 $x_1, t_1 \longrightarrow x_2, t_2$ Geschwindigkeit

$$v = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad [v] = \mathrm{m\,s^{-1}} \text{ abgeleitete Größe}$$

Momentangeschwindigkeit

$$v := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$$

Beschleunigung

$$a := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x} \quad [a] = \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Freier Fall $a =$ const. (Behauptung)

$$a = \ddot{x} = \text{const} = \dot{v}$$

$\rightarrow$ Integration:

$$v(t) = \int_0^t a\mathrm{d}t + v_0 = at + v_0$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)\mathrm{d}t = x_0 + \int_0^t (at + v_0)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

Bei unserem Fallturm

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 \rightarrow a = \frac{2x}{t^2}$$

x[m]	t[ms]	$\frac{2x}{t^2}$[$\mathrm{m\,s^{-2}}$]
0.45	304.1	9.7321696
0.9	429.4	9.7622163
1.35	525.5	9.7772861
1.80	606.8	9.7771293

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2,\ g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

Die Erdbeschleunigung g ist für alle Körper gleich (Naturgesetz).

2.1.2 Bewegung im Raum

TODO Skizze 2 Ortsvektor:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{pmatrix}^\mathsf{T}$$

Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\frac{\Delta \vec{r}_{12}}{\Delta t} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{\Delta t} = \vec{v_D}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}^\mathsf{T}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix}^\mathsf{T}$$

$\rightarrow$ Superpositionsprinzip:
Kinematik kann für jede einzelne (Orts)komponente einzeln betrachtet werden.

$$\vec{a_0} = \text{const}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_0}(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t^2 - t_0^2) = \begin{pmatrix} x_0 + v_{x,0}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_{x,0}(t^2 - t_0^2) \\ y_0 + v_{y,0}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_{y,0}(t^2 - t_0^2) \\ z_0 + v_{z,0}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_{z,0}(t^2 - t_0^2) \end{pmatrix}$$

Horizontaler Wurf

TODO Skizze 3

$$t_0 = 0$$

$$\vec{a_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -g \end{pmatrix}^\mathsf{T}$$

$$\vec{v_0} = \begin{pmatrix} v_{x,0} & 0 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$$

$$\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{x,0}t & 0 & \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$$

Schiefer Wurf

$$\vec{a_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$\vec{v_0} = \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ 0 \\ v_{z,0} \end{pmatrix}$$

$$\vec{r_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$r(t) = \begin{pmatrix} v_{x,0}t \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z,0}t + z_0 \end{pmatrix}$$

$$z(x) = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_{x,0}^2}x^2 + \frac{v_{z,0}}{v_{x,0}}x + z_0$$

Nachtrag

$$a = \dot{v}$$

$$\int_0^t \dot{v}\mathrm{d}t' = \int_0^t a\mathrm{d}t'$$

$$v \mid_0^t = at' \mid_0^t$$

$$v(t) - \underbrace{v(0)}_{v_0} = at$$

$$v(t) = at + v_0$$

analog:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

TODO Skizze Wurfparabel

$$\tan\varphi = \frac{v_{z,0}}{v_{x,0}}$$

$$v_0^2 = v_{x,0}^2 + v_{z,0}^2$$

Scheitel:

$$Z'(x_s) = 0$$

$$x_s = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\varphi$$

Wurfweite:

$$Z(x_w) = 0$$

$$x_w = \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\varphi(1 + \sqrt{1 + \frac{2gz_0}{v_0^2\sin^2\varphi}})$$

Optimaler Winkel: φ_{opt}, x_w max.

$$z_0 = 0 \implies \sin 2\varphi = 1 \to \varphi = 45°$$

$$z_0 \neq 0 \implies \sin\varphi_{opt} = (2 + \frac{2gz_0}{v_0^2})^{-\frac{1}{2}}$$

Gleichförmige Kreisbewegung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \end{pmatrix}$$

mit $\varphi = \varphi(t)$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\dot{\varphi}\sin\varphi \\ R\dot{\varphi}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Gleichförmige Kreisbewegung: $\dot{\varphi} = \text{const}$ Definition Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi} \quad [w] = \mathrm{rad\,s^{-1}} = 1/\mathrm{s}$$

Für $\omega = \text{const.}$:

$$\vec{r} = R\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \to |\vec{r}(t)| = r = \text{const}$$

$$\vec{v} = R\omega\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \to |\vec{r}(t)| = r = \text{const}$$

$$\vec{v} \perp \vec{r} \iff \vec{v}\cdot\vec{r} = 0$$

TODO Skizze Kreisbewegung

Mitbewegtes Koordinatensystem

$$\vec{r}(t) = R\vec{e_R} \quad \vec{e_R} = \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = R\omega\vec{e_t} \quad \vec{e_t} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} \neq \text{ const das heißt } \vec{a}(t) \neq 0$$

Kreisbeschleunigung

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\omega^2\cos\varphi \\ -R\omega^2\sin\varphi \end{pmatrix} = -R\omega^2\vec{e_R} \implies \vec{a} \parallel \vec{r}$$

$$|\vec{a}(t)| = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \neq 0$$

Zentripetalbeschleunigung Zeigt in Richtung des Ursprungs.

$$\vec{a}_{zp} = -R\omega^2\vec{e_R}$$

Allgemein

$$\vec{\omega}$$

Räumliche Lage der Bewegungsebene

$$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r} \quad v = \omega r$$

$$\vec{a} = \vec{w} \times \vec{v}$$

1. **TODO** Skizze omega

Allgemeine Krummlinige Bewegung

$$\vec{v} = v\vec{e_t}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}(v\vec{e_t})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e_t} + v\frac{\mathrm{d}ve_t}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{e_t} = \cos\rho\vec{e_x} + \sin\rho\vec{e_y}$$

$$\vec{e_n} = -\sin\rho\vec{e_x} + \cos\rho\vec{e_y}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e_t}}{\mathrm{d}t} = \dot{\rho} - \sin\rho\vec{e_x} + \cos\rho\vec{e_y} = \dot{\rho}\vec{e_n}$$

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{e_t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{e_n}$$

TODO Skizze

Relativbewegung

- \$S\$-Laborsystem
- \$S'\$-Bewegtes System
- $\vec{u} = (u, 0, 0) =$ const Geschwindigkeit von S' im System S
- Punkt $P = (x, y, z)$ in S
- Punkt $P' = (x', y', z')$ in S'
- Zeitpunkt $t = 0: \quad S = S', P = P'$

TODO Skizze Bewegtes Bezugssystem

Galilei-Transformation

1. Eindimensional
$$x' = x - ut$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$v' = v - u$$
$$t' = t$$
2. Dreidimensional
$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t$$
$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$$
$$\vec{a}' = \vec{a}$$

2.2 Newtonsche Dynamik

Warum bewegen sich Körper?
Newton 1686: Ursache von Bewegungsänderungen sind Kräfte. Newtonsche Gesetze (Axiome)

1. Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, sofern er nicht durch Kräfte gezwungen wird diesen Bewegungszustand zu verlassen
2. Die Änderung einer Bewegung wird durch Einwirken einer Kraft verursacht. Sie geschieht in Richtung der Kraft und ist proportional zu Größe der Kraft
3. Übt ein Körper 1 auf einen Körper 2 die Kraft F_{12}, so reagiert Körper 2 auf den Körper 1 mit der Gegenkraft F_{21} und es gilt $F_{21} = -F_{12}$ (actio = reactio)

2.2.1 Kraft und Impuls

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

Superpositions von Kräften (Zusatz zu den Newtonschen Gesetzen (Korollar)):

$$\vec{F}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

TODO Skizze Addition von Kräften

Grundkräfte der Natur

- Elektromagnetische Kraft
- Starke Kraft
- Schwache Kraft
- Gravitation

Impuls

$$\vec{P} = m\vec{v} \quad [\vec{P}] = \mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$$

Kraft

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{P}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v})$$

$m = \text{const.}$:

$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{x}} = m\vec{a}$$

Grundgesetz der Dynamik

$$\vec{F} = \dot{\vec{P}} \text{beziehungsweise } \vec{F} = m\vec{a}$$

Trägheitsprinzip (Impulserhaltung)

$$\vec{P} = m\vec{v} = \text{const}, \ \dot{\vec{P}} = 0 \text{ für } \vec{F} = 0$$

Experiment

$$\vec{F}_G = \underbrace{m\vec{g}}_{Kraft} = \underbrace{(m+M)}_{Trgheit}\vec{a} = m_{\text{ges}}\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{m}{m+M}\vec{g} \overset{d=1}{\iff} a = \frac{m}{m+M}g = \frac{m}{m_{\text{ges}}}g$$

Erwartung: $a \sim \frac{m}{m_{\text{ges}}}$, $a = \frac{2\Delta s}{\Delta s}$, weil $\Delta s = \frac{1}{2}a\Delta t^2$

Messung:

m[g]	M[g]	m_{ges}[g]	$\frac{m_{\text{ges}}}{m}$	Δs[mm]	Δt[s]	a[m s^{-1}]
10	470	480	48	800	2.75	0.21157025
40	440	480	12	800	1.40	0.81632653
10	1910	1920	192	800	5.55	0.051943836
40	1880	1920	48	800	2.79	0.20554721

TODO Skizze

Trägheitsprinzip - „revisited“ **Definition**: Ein Bezugssystem in dem das Trägheitsprinzip gilt nennt man ein Inertialsystem.

In einem beschleunigten Bezugssystem gilt das Trägheitsprinzip nicht. Beschleunigte Systeme $\neq$ Inertialsysteme. Das Trägheitsprinzip ist Galilei-invariant.

TODO Skizze whatever

Trägheitsprinzip: [moderne Formulierung]: Es gibt Inertialsysteme, das heißt Koordinatensysteme in denen ein kräftefreier Körper im Zustand der Ruhe oder der gradlinig gleichförmigen Bewegung verbleibt.

Actio gleich Reactio

$$\underbrace{\vec{F_{12}}}_{\text{Kraft}} = \underbrace{-\vec{F_{21}}}_{\text{Gegenkraft}}$$

TODO Skizze von Körpern

TODO (Skizze) Experiment

1. Erwartung:

$$v_1 = v_2 \rightarrow a_1 = a_2 \rightarrow F_1 = F_2 \checkmark$$

   Nicht trivialer Fall:
   Kraftstoß:
   Magnetische Kraft: $F_{\text{mag}} \sim \frac{1}{r^2}$

$$v_{1,2} = \int_0^{t_{1,2}} a(t)\mathrm{d}t = a_{\text{eff}}T$$

$$\rightarrow F_1(t) = F_2(t) \rightarrow v_1 = v_2$$

Experiment 2

$$m_1 = 241.8\,\mathrm{g} \wedge 2 = 341.8\,\mathrm{g} \implies \frac{m_2}{m_1} \approx 1.5$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \to \frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{71}{48} \approx 1.5$$

$$a \sim v, F = ma \to \frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{F_1}{F_2}$$

$$1 = \frac{F_1}{F_2} \implies F_1 = F_2$$

Beispiele

- Kraft und Gegenkraft (TODO Skizze)
- Flaschenzug, Seilkräfte (TODO Skizze)

3 Verschiedene Kräfte und Kraftgesetze

3.1 Gravitation (TODO Skizze)

Experimenteller Nachweis im Labor mit Torsionsdrehungen (erstmals Cavendish)

3.1.1 Anziehungskraft zweier Massen

m_1, m_2 Massen, Newtonsches Gravitationsgesetz:

$$\vec{F_G} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{e_r}$$

mit $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}$

3.1.2 Erdbeschleunigung

$$F_G = G\frac{mM_E}{(r_E + h)^2} \approx G\frac{mM_E}{r^2} = mg \implies g \approx 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

(mittleres g)

Abweichungen

- komplizierte Massenverteilung, Strukturen
- Abflachung der Erde

Messung von g

- Gravimeter (Federgravimeter, Pendelgravimeter), relative Messung
- Absolutgravimeter (freier Fall, supraleitende Gravimeter)

Träge und schwere Masse

$$F = m_T a \rightarrow \text{ träge Masse}$$

$$F = m_S G \frac{M_E}{r_E^2} \rightarrow \text{ schwere Masse}$$

Äquivalenzprinzip $m_S \sim T$ beziehungsweise $m_S = m_T$

3.2 Federkraft

Hook'sches Gesetz

$$F_x = F_x(\Delta x) = -k_F \Delta x$$

Beliebige Auslenkungsfunktion ($F_x(\Delta x = x - x_0)$)

$$F_x(x) = F_x(x_0) + \frac{\mathrm{d}F_x(x)}{dx}(x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f_x(x)}{\mathrm{d}x^2}(x - x_0) + \dots$$

$\rightarrow$ unabhängig von konkreter Zusammenhang $f_x(x)$ gilt kleine Änderungen

3.3 Maxwell'sches Rad

3.3.1 Ruhezustand

Waage misst Gesamtmasse M austarierter

3.3.2 Frage

Was passiert, wenn sich das Rad bewegt??

3.3.3 Messung:

1. Rad fixiert $\rightarrow m = 0$
2. Rad läuft $\rightarrow \Delta m = -0.7g < 0$

3.3.4 Auswertung

Anwendung 3. Newtonsches Gesetz: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\vec{a}$ beziehungsweise $F_2 = -F_1 + m\vec{a}$

1. $\vec{a} = 0 : \left|\vec{F}_2\right| = \left|\vec{F}_1\right| \rightarrow \left|\vec{F}_2\right| = 0, 0m = 0$ (Waage)
2. $\vec{a} > 0 : \left|\vec{F}_2\right| < \left|\vec{F}_1\right| \rightarrow$ Waage mit $\left|\vec{F}_2\right| < mg \; \Delta m < 0$

3.4 Rotierende Kette

Winkelelement $\Delta\alpha$. Radialkraft $\vec{F_r}$ ist resultierende Kraft der vom abgeschnittenen Teil der Kette wirkende Kräfte $\vec{F_1} + \vec{F_2}$
($\vec{F_G}$ vernachlässigbar klein bei hoher Umdrehung und somit großen $|F_1|, |F_2|$)
Es gilt:

$$\vec{a}_z p = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r \quad \vec{v} = R\omega\vec{e}_t$$

$$\vec{F_r} = \Delta m \vec{a}_z p = -\Delta m \frac{v^2}{R}\vec{e}_r$$

$$\vec{F_r} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

$$F_r \approx \Delta\alpha F = F\frac{\Delta L}{R}$$

$$F = F_r \frac{R}{\Delta L} = \Delta m \frac{v^2}{R}\frac{R}{\Delta L} = \frac{m}{2\pi R}v^2$$

Die Kraft $F = \frac{m}{2\pi R}v^2$ spannt die Kette.

3.5 Normalkraft

1. (Skizze) Normalkraft $\vec{F_N}$ = Kraft senkrecht zur Kontaktfläche. Wird kompensiert durch $\vec{F}'_N$ = Kraft mit der die Unterlage auf Körper wirkt (Źwangskräfte)

3.6 Schiefe Ebene

- Gewichtskraft: $\vec{F_G} = m\vec{g}$
- Normalkraft: $\vec{F_N} = mg\cos\alpha\vec{e}_y$
- Hangabtriebskraft: $\vec{F_H} = mg\sin\alpha\vec{e}_x$

Bewegungsgleichung

$$F_H = m\ddot{x} \rightarrow x_x = g\sin\alpha = \text{const.}$$

3.7 Reibungskräfte

- im täglichen Leben über all präsent
- spielt eine wichtige Rolle Technik

$\rightarrow$ Tribologie = Reibungslehre

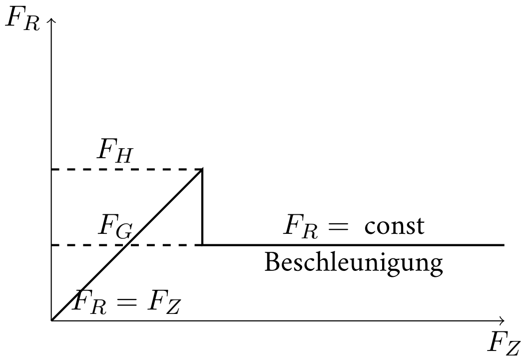
- Reibung hängt stark von der Oberfläche ab

3.7.1 Experiment: Bewegung einer Masse

- Gewicht ruhte: $\vec{F}_Z = -\vec{F}_R \rightarrow a = 0, v = 0$
- Gewicht setzt sich in Bewegung: $\left|\vec{F}_Z\right| > \left|\vec{F}_R\right| \rightarrow a > 0, v$ steigt an
- Gewicht gleitet: $\vec{F}_Z = -\vec{R}_R \rightarrow a = 0, v = \text{ const. } \neq 0$ mit $\vec{v} = \text{ const}$

Reibungskraft nimmt ab, sobald das Gewicht bewegt wird.

- Haftreibung F_H
  Schwellenwert für Zugkraft um Körper zu bewegen
- Gleitreibung F_G
  Reibungskraft bei bewegtem Körper



3.7.2 Experiment: Tribologische Messung

Messung der Zugkraft bei der sich der Holzblock nach kleiner Störung in Richtung Rolle bewegt: $F_R = F_Z$

Beobachtung

- F_R hängt nicht von der Oberfläche ab.
- F_R hängt von dem Gewicht des Blocks ab
- F_R ist Materialabhängig

3.8 Tribologische Reibungslehre

$$F_G = \mu_G F_N \qquad (\mu_G = \text{Gleitreibungskraft})$$

$$F_H = \mu_H F_H \qquad (\mu_H = \text{Haftreibungskraft})$$

$$\mu_H > \mu_G$$

3.9 Mikroskopisches Modell

Verantwortlich sind elektrische Kräfte zwischen Atomen und Molekülen der beieinander liegenden Oberflächen: Van-der-Waals-Kräfte

- Stärke ergibt sich aus effektivem Kontakt.

Relative mikroskopische Reibungsfläche: $\sum \frac{a_i}{A} \sim \frac{F_N}{A} \leftarrow$ Druck

- a_1 = effektive Kontaktfläche eines Einzelatoms

Also:

$$F_R \sim \sum \frac{a_i}{A} \sim F_N$$

- Haftreibung: Verzahnung der Oberflächen mit minimalen Abstand
- Gleitreibung: Minimaler Abstand wird auf Grund der Bewegung nicht erreicht

3.10 Schiefe Ebene: Messung der Reibungskraft (Skizze)

Kräftegleichgewicht: $F_H = F_R$

$$F_H = mg\sin\alpha, F_N = mg\cos\alpha$$

Grenzwinkel: $F_R = mg\sin\alpha = \mu_R mg\cos\alpha \implies \mu_R = \tan\alpha$

$$\alpha = 15° \rightarrow \tan\alpha = 0.27, \mu_G = 0.27$$

3.11 Zentripetalkraft

$$\vec{a}_{Zp} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad \vec{F}_{Zp} = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$a_{Zp} = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} \quad F_{Zp} = m\omega^2 r = m\frac{v^2}{r}$$

3.11.1 Beispiel 1 Rotierendes Pendel

$$\vec{F}_{Zp} := \vec{F}_G + \vec{F}_Z$$

$$F_G = mg = F_Z\cos\theta$$

$$F_{Zp} = F_Z\sin\theta$$

$$F_{Zp} = mg\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = mg\tan\theta, \quad a_{Zp} = g\tan\theta$$

$$a_{Zp} = \omega^2 r \implies \omega = \sqrt{\frac{g}{\tan\theta}}$$

- θ steigt mit ω an
- $\theta(\omega)$ ist unabhängig von Masse

3.11.2 Beispiel 2 Geostationärer Satellit

Zentripetal = Gravitationskraft

$$m\omega^2 R = G\frac{mM_E}{R^2}$$

Geostationär: $\omega = \frac{2\pi}{24\,\mathrm{h}} = \frac{2\pi}{24\cdot 3600\,\mathrm{s}} = 7.27 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$

$$R^3 = \frac{GM_E}{\omega^2} \rightarrow R = 42\,312\,\mathrm{km}$$

Abstand von der Erd-Oberfläche:

$$\tilde{R} = R - R_E = 35\,930\,\mathrm{km}$$

- $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^2$
- $M_E = 6 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
- $R_E = 6373\,\mathrm{km}$

4 Arbeit, Energie, Leistung

4.1 Arbeit

$$\begin{aligned}\Delta W &= \vec{F}\vec{x} = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z \\ \mathrm{d}W &= \lim_{\Delta r\to 0}\Delta W = \lim_{\Delta r\to 0}\vec{F}\Delta\vec{r} = \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} \\ &= F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z\end{aligned}$$

Gesamtarbeit für Verschiebung von $\vec{r_1}$ nach $\vec{r_2}$

$$W = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$$

$$[W] = \mathrm{N\,m} = \mathrm{kg\,m\,s^{-2}} = \mathrm{J}$$

$$\int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F_x\mathrm{d}x + \int_{r_1}^{r_2} F_y\mathrm{d}y + \int_{r_1}^{r_2} F_z\mathrm{d}z = \int_{s_1=0}^{s_2} \vec{F}(s)\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{ds}\mathrm{d}s$$

$\vec{r}(s)$ parametrisiere Geschwindigkeit.

4.1.1 Beispiel

$$\vec{r_1} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{r_2} = \begin{pmatrix}\Delta x\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{F} = \begin{pmatrix}mg\\0\\0\end{pmatrix}, \mathrm{d}\vec{r} = \begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\\mathrm{d}y\\\mathrm{d}z\end{pmatrix}$$

$$W = \int_{(0)}^{(1)} mg\mathrm{d}x + \int 0\mathrm{d}y + \int 0\mathrm{d}z = mg\Delta x$$

4.1.2 Beispiel Kreisbahn ($\Longrightarrow$ Gravitation)

$$W = \int_A^B \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = 0$$

4.2 kinetische Energie

$$k = \frac{1}{2}gt^2$$
$$v = gt$$
$$v^2 = g^2t^2$$
$$v^2 = gh$$
$$W = \int_0^h F_G \mathrm{d}x = F_G \int_0^h \mathrm{d}x = F_G h = mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

- Kinetische Energie: E_{kin}

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 \quad [E_{kin} = \mathrm{kg\,m\,s^{-2}} = \mathrm{J}]$$

- Die Zunahme (beziehungsweise Abnahme) der kinetischen Energie eines Körpers ist gleich der ihm zugeführten (beziehungsweise der von ihm gelieferten) Arbeit (keine Reibung)

$$W = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{dt}\mathrm{d}\vec{r} = \int_{\vec{v_1}}^{\vec{v_2}} m\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{dt}\mathrm{d}\vec{v} \tag{1}$$
$$= \int_{\vec{v_1}}^{\vec{v_2}} m\vec{v}\mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \tag{2}$$

4.3 Potentielle Energie

$$W = \int_h^0 F_g \mathrm{d}x = \int_h^0 -gm\mathrm{d}x = mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

4.3.1 Ball als Feder am Auftreffpunkt

$$F = k\xi$$
$$W = \int_0^\xi k\xi'\mathrm{d}\xi' = \frac{1}{2}k\xi^2$$

4.4 Bemerkung

Arbeit $W = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F}\mathrm{d}\vec{F}$ gilt immer, Symbol für Linienintegral meist weggelassen.

- kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$
- potentielle Energie
  - $E_{pot} = \frac{1}{2}mx^2$ (Verformen)
  - $E_{pot} = mgh$ (Lage)

4.5 Umwandlung von Energie

$$\mathrm{d}E_{kin} = F\mathrm{d}x = -\mathrm{d}E_{pot}$$

Gilt nur für konservative Kräfte!

$$W = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int_{E_1}^{E_2} \mathrm{d}E_{kin} = E_{kin}(\vec{r_2}) - E_{kin}(\vec{r_1}) \tag{3}$$

$$W = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = -\int_{E_1}^{E_2} \mathrm{d}E_{kin} = E_{pot}(\vec{r_1}) - E_{pot}(\vec{r_2}) \tag{4}$$

1. Für
   - $W > 0$: E_{kin} nimmt zu (Arbeit von System am Objekt verrichtet)
   - $W < 0$: E_{kin} nimmt ab
2. Für
   - $W > 0$: E_{pot} nimmt ab
   - $W < 0$: E_{pot} nimmt zu

4.6 Energie

$$\begin{aligned} W &= \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} && (5)\\ &= E_{kin}(\vec{r_2}) - E_{kin}(\vec{r_1}) && (6)\\ &= E_{pot}(\vec{r_2}) - E_{pot}(\vec{r_1}) && (7) \end{aligned}$$

Die unteren beiden Gleichungen gelten nur für konservative Kräfte

4.7 Leistung

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \underset{\vec{F} = \text{ const}}{\vec{F}}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\vec{c}$$

$$[P] = \mathrm{N\,m\,s^{-1}} = \mathrm{J\,s^{-1}} = \mathrm{W} = \text{ Watt}$$

4.8 Konservative Kräfte

$$W_1 = \int_{1\text{ Weg1}}^{2} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = E_{pot}(1) - E_{pot}(2) \tag{8}$$

$$W_2 = \int_{1\text{ Weg2}}^{2} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = E_{pot}(1) - E_{pot}(2) \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

Geschlossener Weg: $1 \to 2 \to 1$

$$W = \oint_c \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} = W_1 - W_2 = 0$$

4.8.1 Definition

Kräfte, für die die Arbeit unabhängig vom Weg ist nennt man konservativ. Für konservative Kräfte gilt:

$$W = \oint \vec{F} \mathrm{d}\vec{s} = 0$$

4.9 Kraftfelder und Potential

$$W = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{F} \mathrm{d}\vec{r}$$

4.9.1 Definition Kraftfeld

Eindeutige Zuordnung einer Kraft zu jedem Punkt im Raum:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x,y,z) = (F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z))$$

4.9.2 Beispiel

Gravitationskraft:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{mM}{r^2}\vec{e}_r \tag{11}$$

$$= f(r)\vec{e}_r \tag{12}$$

Kugelsymmetrisch, Zentralfeld

TODO Skizze Vektorfeld

TODO Skizze Feldlinien

4.9.3 Feldlinien:

- Feldlinien sind immer tangential zur Kraftrichtung
- Feldliniendichte ist proportional zum Betrag der Kraft
- Feldlinien schneiden sich nie

4.9.4 konservative Kraftfelder

Kraftfelder, die konservative Kräfte beschreiben nennt man konservative Kraftfelder Für konservative Kraftfelder gilt

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} = E_{pot}(1) - E_{pot}(2)$$

- jedem Ort im Raum kann ein Skalar, die potentielle Energie zugeordnet werden $\implies E_{pot} = E_{pot}(x, y, z)$ Skalar!
- wird bei der Verschiebung eines Körpers von Ort 1 nach Ort 2 Arbeit gegen eine konservative Kraft geleistet, so erhöht sich die potentielle Energie, das heißt $E_{pot}(2) > E_{pot}(1)$.
- Der Nullpunkt $E_{pot}(\vec{r}) = 0$ der potentiellen Energie ist frei wählbar, da allein die Differenz der potentiellen Energie an zwei Punkten relevant ist.

homogenes Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{R}) = (0, 0, F_z)$$

- Weg 1:

$$W_1 = \int_{\text{Weg1}} \vec{F} \mathrm{d}\vec{R} = \int_{z_1}^{z} F_z \mathrm{d}z = F_z(z_2 - z_1)$$

- Weg 2:

$$W_2 = \int_{\text{Weg2}} \vec{F} \mathrm{d}\vec{R} = \int_{z_1}^{z} F_z \mathrm{d}z = F_z(z_2 - z_1)$$

TODO Skizze

Zentralkraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r$$

$$W = \oint \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} \tag{13}$$

$$= \int_1^2 f(r)\mathrm{d}r + \int_2^3 \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} + \int_3^4 f(r)\mathrm{d}r + \int_4^1 \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} \tag{14}$$

$$= 0 \tag{15}$$

Gravitationsfeld

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_A^B \vec{F} \mathrm{d}\vec{R} & (16) \\ &= \int_A^B -G\frac{mM}{r^2}\vec{e}_r \mathrm{d}\vec{r} & (17) \\ &= \int_A^B -G\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r & (18) \\ &= \left[G\frac{mM}{r+\xi}\right]_{r_A}^{r_B} \qquad = E_{pot}(A) - E_{pot}(B) & (19) \end{aligned}$$

$$\implies E_{pot}(A) = -G\frac{mM}{r_A} + \xi$$

$$\implies E_{pot}(B) = -G\frac{mM}{r_B} + \xi = E_{pot}(C)$$

Potentielle Energie des Gravitationsfelder:

$$E_{pot}^{grav} = -G\frac{mM}{r}$$

d = 1 Zusammenhang zwischen konservativen Kraftfeld und potentieller Energie:

$$E_{pot} = -\int F \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}E_{pot} = -F\mathrm{d}x$$

$$-\frac{\mathrm{d}E_{pot}}{\mathrm{d}x} = F$$

d = 3 Zusammenhang zwischen konservativen Kraftfeld und potentieller Energie:

$$E_{pot} = -\int \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} \rightarrow \vec{F} = -\frac{\mathrm{d}E_{pot}}{\mathrm{d}\vec{r}}$$

Gesucht: Ableitung eines Vektors nach einem Skalar. Betrachte:

$$\Delta E_{pot} = -\vec{F}\Delta\vec{r} = -(F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z)$$

$$\Delta E_{pot} = \frac{\partial E_{pot}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial E_{pot}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial E_{pot}}{\partial z}\Delta z$$

$$\begin{aligned} Vergleich: \vec{F}(x,y,z) &= -(\frac{\partial E_{pot}}{\partial x}\Delta x, \frac{\partial E_{pot}}{\partial y}\Delta y, \frac{\partial E_{pot}}{\partial z}\Delta z) & (20) \\ &= -\operatorname{grad} E_{pot} & (21) \end{aligned}$$

Gilt nur für konservative Kräfte

Gradient Der Gradient eines Skalarfeldes ist ein Vektorfeld, dass in jedem Punkt in die Richtung des steilsten Anstiegs der skalaren Größe zeigt.

Notation:

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} E_{pot}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_{pot}, \vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})$$

4.9.5 Potential und Gravitationsfeld

- Gravitationskraft:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{mM}{r^2}\vec{e}_r$$

- Potentielle Energie:

$$\vec{E}_{pot}(\vec{r}) = -G\frac{mM}{r}$$

Potential:

$$\Phi(\vec{r}) = \lim_{m\to 0} \frac{E_{pot}(\vec{r})}{m}$$

- Gravitationspotential:

$$\Phi = -G\frac{M}{r}$$

- Gravitationsfeld:

$$\vec{G} = -G\frac{M}{r^2}\vec{e}_r$$

- $$\vec{G} = -\operatorname{grad} \Phi$$

- $$E_{pot} = m\Phi$$

5 Erhaltungssätze

5.1 Energieerhaltung

Für konservative Kräfte gilt:

$$\Delta E_{kin} = -\Delta E_{pot} = \int_1^2 \vec{F} \mathrm{d}\vec{r}$$

das heißt: die kinetische Energie ergibt sich allein aus der Potentialdifferenz und ist unabhängig vom durchlaufenen Weg.

$$E_{kin}(2) - E_{kin}(1) = E_{pot}(1) - E_{pot}(2)$$

$$E_{kin}(1) + E_{pot}(1) = E_{kin}(2) + E_{pot}(2) = \ldots = \text{const}$$

5.1.1 Doppelbahn

$$E_{pot}(1) = m \cdot g \cdot h$$
$$E_{pot}(1) = E_{pot(2')} = 0$$
$$\rightarrow$$
$$E_{kin}(2) = E_{kin}(2') = \frac{1}{2}mv^2$$

Bemerkung: Berechnung von v mit Newtonschen Gesetzen deutlich komplexer

5.1.2 Energieerhaltungssatz der Newtonschen Mechanik

$$E_{pot} + E_{kin} = E_{ges} = \text{ const}$$

E_{ges} = mechanische Gesamtenergie
das heißt: In einem konservativen Kraftfeld ist die Summe aus potentieller und kinetischer Energie eines Massenpunktes zu jeder Zeit konstant

Wichtig: gilt nur für konservative Kraftfelder (Beim Auftreten nicht-konservativer, dissipativer Kräfte wird mechanische Energie in Wärme umgewandelt)

5.1.3 Energiediagramme

Häufig: Potentielle Energie abhängig von Ort x oder Abstand r
Hilfreich: Diskussion mittels Energiediagramme

Kugelbahn

- Abhängig von E_{ges} kann sich die Kugel nur in bestimmten Bereichen aufhalten
- Gleichgewichtslage: Kugel ruht, es wirken keine Kräfte, das heißt

$$F = -\frac{\mathrm{d}E_{pot}}{dx} = 0, \text{ bzw } \vec{F} = -\operatorname{grad} E_{pot} = 0$$

Drei Fälle:

1. Stabiles bzw. Metastabiles Gleichgewicht: Potentialkurve hat ein Minimum
2. labiles Gleichgewicht: Potentialkurve hat ein Maximum
3. Indifferentes Gleichgewicht: Flacher Verlauf der Potentialkurve

Lennard-Jones-Potential Potential zur Beschreibung von molekularen Bindungen

$$E_{pot} = V_0(\frac{r}{r_0})^{-12} - 2(\frac{r}{r_0})^{-6}$$

(Dipol-Dipol-Wechselwirkung, Van-der-Waals Kräfte)

Mechanischer Verstärker

$$E'_{pot} = mgh = \overset{\substack{\text{Volumen}\\ \uparrow}}{\underset{\substack{\downarrow\\ \text{Dichte}}}{\rho}(abc)}gh$$

mit $h = \frac{1}{2}c$
Fallender Dominostein: $E_{pot} \rightarrow E_{kin}$
Startposition: (Meta)stabiles Gleichgewicht
das heißt: Dominosteine müssen über einen Potentialberg angehoben werden. Danach ist die kinetische Energie ausreichend, um den nächsten Stein über Potentialschwelle zu heben. Verstärkungsfaktor:
Skalierung zwischen den Steinen: Alle Längen $\times\sqrt{2}$
Potentielle Energie für Stein m:

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \rho(a^{(n)}b^{(n)}c^{(n)})h^{(n)}g = (\sqrt{2})^4 E_{pot}^{(n-1)} \\ E_{pot}^{(1)} &= mgh \\ \implies E_pot^{(13)} &= 4^{12}E_{pot}^{(1)} \end{aligned}$$

$\implies$ Verstärkungsfaktor $\approx 1.7 \times 10^7$

6 Systeme von Massenpunkten

Bisher: Bewegung einzelner Massenpunkte.
Jetzt: Betrachte Systeme von Massenpunkten.
Man unterscheidet:

- Innere Kräfte: Kräfte, die zwischen den Massenpunkten eines Systems wirken.
- Äußere Kräfte: Kräfte, die von außen auf das System einwirken

6.1 Beschreibung eines Systems von Massenpunkten

$\vec{r}_1$: Ortsvektor zum Massenpunkt i
m_i: Masse des Massenpunktes i
$[i = 1, \ldots, n]$
Gesamtmasse:

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Definition 1 Schwerpunkt.

$$\vec{r}_s = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \int_v \vec{r} \mathrm{d}m = \frac{1}{M} \int_v \vec{r} \rho(\vec{r}) \mathrm{d}V$$

Beispiel 1 System zweier Massenpunkte.

$$\vec{r}_s = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad s_1, s_2 = ?$$
$$\vec{r}_s = \vec{r}_1 + \lambda_s (\vec{r}_1 - \vec{r}_1)$$
$$= (1 - \lambda_s) \vec{r}_1 + \lambda_s \vec{r}_2$$
$$= \underbrace{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}_{=1-\lambda_s} \vec{r}_1 + \underbrace{\frac{m_2}{m_1 + m_2}}_{=\lambda_s} \vec{r}_2$$

$$\implies S_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, S_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \wedge \frac{S_1}{S_2} = \frac{m_2}{m_2}$$

Das heißt: Das Verhältnis $\frac{S_1}{S_2}$ ist umgekehrt proportional zum Massenverhältnis $\frac{m_1}{m_2}$.

Beispiel 2 Schwerpunkt Erde-Sonne.

$$M_E = 6 \times 10^{21} \,\mathrm{kg}, M_S = 2 \times 10^{30} \,\mathrm{kg}$$
$$X_S = \frac{M_E X_E + M_S 0}{M_E + M_S} = 4.5 \times 10^5 \,\mathrm{m}$$

Vergleich mit Sonnenradius 7×10^8 m Schwerpunkt praktisch im Sonnenmittelpunkt

6.1.1 Bewegung des Schwerpunktes

Geschwindigkeit:

$$\vec{v}_s = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_s}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_1 \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

$\vec{p}_i$: Impuls des einzelnen Massenpunktes

Definition 2 Schwerpunktimpuls.

$$\vec{p}_s = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_s$$

das heißt: Schwerpunktimpuls ergibt sich aus der Summe der Einzelimpulse

Frage: Wie bewegt sich ein System von Massepunkten unter Einfluss von Kräften?
Es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{d =} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{äußere Kraft}}}{\vec{F}_i} + \overset{\substack{\text{innere Kraft} \\ \uparrow}}{\sum_{i\neq j} \vec{F}_{ij}}, \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

$\Longrightarrow$: Änderung des Schwerpunktimpulses $\vec{p}_s$:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_s}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{p}_i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \underbrace{\sum_i \sum_{i\neq j} \vec{F}_{ij}}_{=0} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

das heißt: die Impulsänderung des Schwerpunktes ergibt sich aus der Summe der äußeren Kräfte:

1. Newtonsches Gesetz für Systeme von Massenpunkten.

$$\dot{\vec{p}_s} = M\vec{a}_s = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Hierbei: $\vec{a}_s = \dot{\vec{v}_s} = \frac{1}{M} \sum m_i \ddot{\vec{r}_i} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{a}_i$

Definition 3 Allgemeiner Impulssatz**.** Das Schwerpunkt eines beliebiges Systems von Massenpunkten I bewegt sich so, als sei er ein Körper mit der Gesamtmasse $M = \sum m_i$

Definition 4 Abgeschlossenes System**.** Ein abgeschlossenes System ist ein System auf das keine äußeren Kräfte einwirken, das heißt:

$$\sum F_i = 0$$

Der Massenschwerpunkt eines abgeschlossenen Systems hat einen zeitlich konstanten Impuls, das heißt

$$\vec{p}_s = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \text{ const}$$

($\Longrightarrow$ Impulserhaltung!!)

6.1.2 Raketenantrieb

das heißt: die Bewegung von Objekten mit veränderlicher Masse
Beobachtung: Abstoßen einer Masse kann zum Antrieb verwendet werden (Beispiele: Rakete, Medizinball und Schlittschuhläufer)

Betrachte Rakete: Impulssatz:

$$p(t) = p(t + \Delta t)$$

Zeitpunkt t

$$p(t) = (m + \Delta m)v$$

Zeitpunkt $t + \Delta t$

$$\begin{aligned} p(t+\Delta t) 0 m(v+\Delta v) + \Delta m(v - v_B) \\ \implies mv + \Delta v = mv + m\Delta v + \Delta mv - \Delta mv_B \\ m\Delta v - \Delta mv_B = 0 \end{aligned}$$

Änderung Blickwinkel:

$$m\Delta v + \Delta mv_b = 0$$

Wichtig: Masse m und Massenänderung $\mathrm{d}m$ müssen sich auf gleiche Referenz beziehen. Damit folgt:

$$\mathrm{d}v = -v_b \frac{\mathrm{d}m}{m}$$

Integration:

$$\begin{aligned} \int_{v_1}^{v_2} \mathrm{d}v = -v_B \int_{m_1}^{m_2} \frac{1}{m} \mathrm{d}m, m_1 > m_2, v_B = \text{ const} \\ v_2 - v_1 = -v_B \cdot \left[\ln m \right]_{m_1}^{m_2} = v_B(\ln m_1 - \ln m_2) = v_B \ln \frac{m_1}{m_2} > 0 \end{aligned}$$

Wähle Anfangsbedingungen:

$$v_1 = 0, m_1 = 0, m_0 = m(t=0), m_2 = m(t)$$

$\implies$ Raketengleichung für kräftefreie Rakete

$$v(t) = v_B \ln \frac{m_0}{m(t)}$$

das heißt: Die Endgeschwindkigkeit einer Rakete wird durch die Ausstoßgeschwindigkeit und die Brennstoffmenge bestimmt

Für die nicht kräftefreie Rakete gilt:

$$m(t)\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{dt} = -\frac{\mathrm{d}m(t)}{dt}\vec{v}_B + \vec{F}$$

Allgemeine Raketengleichung (ohne Herleitung)

Bemerkung 1. Vorsicht bei der Anwendung des zweiten Newtonschen Gesetzen $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ Naiver Ansatz für kräftefreie Rakete:

$$\frac{\mathrm{d}mv}{dt} = \frac{\mathrm{d}m}{dt}v + m\frac{\mathrm{d}v}{dt} = 0$$

Funktioniert nicht! Grund: Impuls des ausströmenden Gases wird bei diesem Ansatz nicht in der Impulsbilanz berücksichtigt

Korrekter Ansatz:

$$\frac{\mathrm{d}mv}{dt} - (v - v_B)\frac{\mathrm{d}m}{dt} = 0 \implies m\frac{\mathrm{d}v}{dt} + v_B\frac{\mathrm{d}m}{dt} = 0$$

das heißt: der naive Ansatz funktioniert nur, wenn $v - v_B = 0$, also die Ausströmungsgeschwindigkeit verschwindet.

7 Stöße

Für ein abgeschlossenes System gilt: (keine äußere Kräfte)
Impulserhaltung:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i'$$

Energieerhaltung:

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} E_i'$$

7.1 Kollinearer elastischer Stoß

Es gilt:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$
$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$\Longrightarrow$ Lösung (ohne Herleitung)

$$v_1' = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$
$$v_2' = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Geschwindigkeit nach Kollinearer elastisch Stoß Tipp zur Herleitung: Betrachte Bewegung relativ zur Schwerpunktsbewegung (siehe z.B. Demtröders)

Hier Betrachtung von Spezialfällen.

Betrachtung von Spezialfällen ist immer wichtig! Hilft beim Verständnis physikalischer Zusammenhänge

1. $m_1 = m_2 = m, r_1 > 0, v_2 = 0$

$$v_1' = \frac{2mv_2}{2m} = v_2 = 0, v_2' = \frac{2mr_1}{2m} = v_1$$

2. $m_1 = m, m_2 = 2m, v_1 > 0, v_2 > 0$

$$v_1' = \frac{v_1(-m)}{3m} = -\frac{1}{3} v_1$$
$$v_2' = \frac{2mv_1}{3m} = \frac{2}{3} v_1$$

3. $m_1 = m, m_2 = 3m, v_1 = v > 0, v_2 = -v$

$$v_1' = \frac{v(m - 2m) - 2(3m)v}{4m} = \frac{v(-2m - 6m)}{4m} = -2v$$
$$v_2' = \frac{-v(2m - m) + 2mv}{2m} = \frac{v(-2m + 2m)}{3m} = 0$$

4. $m_1 = m, m_2 \to \infty, v_1 = v, v_2 = 0$

$$v_1' = \frac{v(-m_2)}{m_2} = -v \qquad \text{(da } m_1 \text{ vernachlässigbar)}$$
$$v_2' = \frac{2m_1 v}{m_2} = 0 \qquad \text{(da } m_1 \ll m_2\text{)}$$

5. $m_1 = m, m_2$ sehr groß!, $v_1 = 0, v_2 = v$

$$v_1' = \frac{2m_2 v}{m_2} = 2v, \quad v_2' = \frac{vm_2}{m_2} = v$$

7.2 Betrachtung im Schwerpunktsystem

Es gilt:

$$v_s = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Geschwindigkeiten im Schwerpunktsystem:

$$v_1^* = v_1 - v_s = \frac{m_2 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$
$$v_2^* = v_2 - v_s = \frac{m_1 v_2 - m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

daraus folgt:

$$p_1^* = m_1 v_1^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)$$
$$p_2^* = m_2 v_2^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_2 - v_1)$$

Das heißt vor dem Stoß gilt:

$$p_1^* = -p_2^* E_{kin,1}^* = \frac{1}{2}m(v_1^*)^2 = \frac{(p_1^*)^2}{2m_1} E_{kin,2}^* = \frac{(p_2^*)^2}{2m_2}$$

nach dem Stoß:

Impulserhaltung:

$$p_s^* = p_1^* + p_2^* = p_1^{*\prime} + p_2^{*\prime} = 0 \to p_1^{*\prime} = -p_2^{*\prime}$$

Energieerhaltung:

$$E_{ges}^* = E_{kin,1}^* + E_{kin,2}^* = E_{kin,1}^{*\prime} + E_{kin,2}^{*\prime}$$

Außerdem:

$$p_1^{*\prime} = \frac{p_1^*(m_1 - m_2) + 2m_1 p_2^*}{m_1 + m_2} = -p_1^*, p_2^{*\prime} = -p_2^*$$

daraus folgt:

$$E^{*\prime}_{kin,1} = E^*_{kin,1}$$
$$E^{*\prime}_{kin,2} = E^*_{kin,2}$$

Im Schwerpunktsystem findet bei elastischen Stößen keine Energieübertragung statt. Aber: Impulse werden ausgetauscht

7.2.1 Nicht-zentraler, elastischer Stoß im Schwerpunktsystem

$$\vec{p}^*_s = 0, \vec{p}^*_1 = -\vec{p}^*_2$$
$$\vec{p}^{*\prime}_s = -\vec{p}^{*\prime}_2, |\vec{p}^*_1 = |\vec{p}^{*\prime}_1||$$

Im Schwerpunktsystem sind für ein abgeschlossenes System zweier Massenpunkte ein- und auslaufende kollinear und vom Betrag her gleich

7.3 Inelastische Stöße

Betrachte 2 Kugeln

- Massen: m_1, m_2
- Geschwindigkeit: $v_1 = v, v_2 = 0$
- Impulserhaltung:

$$m_1 v = (m_1 + m_2)v'$$
$$v' = \frac{m}{m_1 + m_2} v$$

- Energiebilanz:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 v^2, E'_{kin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\frac{m_1}{m_1 + m_2})^2 v^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v^2 < E_{kin}$$

  Beim inelastischen Stoß geht mechanische Energie verloren, sie wird beim Stoß in andere Energieformen (zum Beispiel Wärme) umgewandelt. (siehe Thermodynamik)

Interessant: Betrachtung im Schwerpunktsystem.

$$m_1 v^*_1 - m_2 v^*_2 = (m_1 + m_2)v^{*\prime}$$

da $p^*_1 = -p^*_2$

$$(m_1 + m_2)v^{*\prime} = 0$$
$$E^{*\prime}_{kin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(v^{*\prime})^2 = 0$$

Im Schwerpunktsystem findet beim inelastischen Stoß eine vollständige Umwandlung der kinetischen Energie statt.
Allgemein:

falls $\vec{F}_{auen} = 0$

$$\begin{aligned} E_{kin,1} + E_{kin,2} = E'_{kin,1} + E'_{kin,2} + Q \sum \vec{p}_i &= \sum \vec{p}'_i = \text{const} \\ \sum E_{kin,i} &= \sum E'_{kin,i} + Q \\ Q &= 0 && \text{elastisch} \\ Q &> 0 && \text{inelastisch} \\ Q &< 0 && \text{superelastisch} \end{aligned}$$

8 Mechanik des starren Körper

Definition 5 Starrer Körper**.** System von Massenpunkten mit festen, nicht veränderlichen Abständen.
Idealisierung!

Es gilt:

Volumen:

$$V = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum \Delta V_i = \int \mathrm{d}v$$

Masse:

$$M = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum \Delta m_i = \int \mathrm{d}m = \int \rho(\vec{r}) \mathrm{d}V$$

Schwerpunkt:

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \int \vec{r} \mathrm{d}m = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho(\vec{r}) \mathrm{d}V M = \int \rho \mathrm{d}V = \int \rho \mathrm{d}^3 r$$

Beispiel 3 Quader.

$$\begin{aligned} \vec{r}_s &= \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho(\vec{r}) \mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{M} \int_0^a \int_0^b \int_0^c \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rho \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \end{aligned}$$

Integration für jede einzelne Ortskomponente:

$$x_s = \frac{1}{m}\int_0^a\int_0^b\int_0^c x\rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{M}\rho bc\int_0^b x\mathrm{d}x = \frac{1}{M}\rho abc\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a$$

$$y_s = \ldots = \frac{1}{2}b$$

$$z_s = \ldots = \frac{1}{2}c$$

$$\vec{r}_s = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ v \end{pmatrix}$$

8.1 Bewegung des starren Körpers

Es gilt:

$$\vec{r}_{si} = \vec{r}_i - \vec{r}_s \rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{si}}{dt} = \vec{v}_{si} = \vec{v}_i - \vec{v}_s$$

Mit $|\vec{r}_{si}| = \text{const}$ beziehungsweise $\vec{r}_{si}^{\,2} = \text{const}$ (starrer Körper)

$$\frac{\mathrm{d}}{dt}(\vec{r}_{si}^{\,2}) = 2\vec{r}_{si}\vec{v}_{si} = 0 \rightarrow \vec{v}_{si} \perp \vec{r}_{si}$$

da $\vec{v}_{si} \perp \vec{r}_{si}$ gilt: Betrachte Bewegung in der von $\vec{v}_{si}, \vec{r}_{si}$ aufgespannten Ebene $\rightarrow$ Kreisbewegung!, Das heißt:

$$\vec{v}_{si} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{si}$$

wobei im Allgemeinen $\vec{\omega}$ zeitabhängig sein kann.

Mit $\vec{v}_{si} = \vec{v}_i - \vec{v}_s$ folgt:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_s + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{si})$$

Achtung: $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ muss nicht raumfest sein.

Die Bewegung eines starren Körpers lässt sich in eine Translationsbewegung und eine Rotation um den Schwerpunkt zerlegen

- 3 Translationsfreiheitsgrade
- 3 Rotationsfreiheitsgrade

8.2 Drehmoment und Kräftepaare

Frage: Wie versetzt man einen Körper in Rotation?

Beispiel 4 Balkenwaage. Beobachtung: Kraft mit Angriffspunkt im Abstand l, bewirkt Drehbewegung
Es gilt das Hebelgesetz:

$$F_1 l_1 = F_2 l_2$$

Hebelarm: Abstand zwischen Drehachse und Angriffspunkt der Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2$

Beobachtung:
Kraft $\vec{F}_{||}$ parallel zum Hebelarm bewirkt keine Drehung, nur Kraft $\vec{F}_\perp$ senkrecht zur Verbindungslinie zwischen Angriffspunkt und Drehachse führt zur Rotation.
Richtung von $\vec{F}_\perp$ bestimmt Drehsinn

Definition 6 Drehmoment**.**

$$\vec{M} := \vec{r} \times \vec{F}$$

Gibt Drehsinn und Stärke der Kraftwirkung an.

$$M = rF \sin(\angle(\vec{r}, \vec{F}))$$

8.2.1 Drehmoment und Schwerpunkt

Betrachte starren Körper aus zwei Massenpunkten plus masselose Verbindung

$$\begin{aligned}
\vec{M}_1 &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \\
\vec{M}_2 &= \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \\
\vec{M}_1 &= r_1 m_1 g \sin \alpha_1 \vec{l}_z \\
\vec{M}_2 &= -r_2 m_2 g \sin \alpha_2 \vec{l}_z \\
&= -r_2 m_2 g \sin \alpha_1 \vec{l}_z \\
\vec{M}_{tot} &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = (r_1 m_1 - r_2 m_2) g \sin \alpha_1 \vec{l}_z
\end{aligned}$$

vektoriell:

$$\vec{M}_{tot} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times m_2 \vec{g} + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{g} = (\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2) \times \vec{g}$$

Beliebiger Körper:

$$\vec{M}_{tot} = \sum \vec{M}_i = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{g}$$

$(\sum m_i \vec{r}_i) \times \vec{g} = m_{ges} \vec{r}_s \times \vec{g} = \vec{r}_s \times \vec{F}$

Das Gewicht eines starren Körpers greift immer im Schwerpunkt an. Bei Aufhängung eines Körpers im Schwerpunkt ist das resultierende Drehmoment auf Grund der Schwerkraft Null. Grund: Im Schwerpunkt gilt: $\vec{r}_s = 0, \vec{M}_{tot} = \vec{r}_s \times \vec{F}_s = 0$

8.2.2 Kräftepaare

Frage: Wirkung einer Kraft $\vec{F}_1$ auf einen starren Körper.
Lösungsansatz:
Einführung der sich gegenseitig aufgebenden Kräfte $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_3$ im Schwerpunkt S. Ändert nichts!
Zerlegung der Bewegung:
Translation durch Kraft $\vec{F}_2$ mit Angriffspunkt S.
Rotation durch Kräftepaar $(\vec{F}_1, \vec{F}_3)$ mit $F_1 = F_3, \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_1$

Die Wirkung aller Kräfte auf einen starren Körper lässt sich durch

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i \qquad \text{(Gesamtkraft (Gesamtkraft))}$$

$$\vec{M} = \sum F_{si} \times \vec{F}_i = \sum M_i \qquad \text{(Gesamtdrehmoment (Rotation))}$$

beschreiben. Dabei greift $\vec{F}$ im Schwerpunkt an

Wirkung von Kräftepaaren: Reine Rotation. Es gilt:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F} - \vec{r}_2 \times \vec{F} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{r}_{12} \times \vec{F}$$

Merke: Das Drehmoment eines Kräftepaares ist unabhängig vom Bezugspunkt 0
Zwei Kräftepaare sind äquivalent, wenn sie das gleiche Drehmoment besitzen. Äquivalente Kräftepaare können einander ersetzen.

8.3 Statisches Gleichgewicht

Statik:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = 0, \vec{M} = \sum \vec{M}_i = 0$$

das heißt keine Translation, keine Rotation

Beispiel 5.

1. Gleichgewicht eines starren Körpers in Schwerefeld
   Frage: Wo muss $\vec{F}$ angreifen um für statisches Gleichgewicht zu sorgen?
   Kräfte:

   $$\sum \vec{F}_i + \vec{F} = 0$$
   $$\vec{F} = -\sum m_i \vec{g} = -m_{ges}\vec{g}$$

   Drehmomente:

   $$\begin{aligned} \sum \vec{M}_i + \vec{R} \times \vec{F} &= 0 \\ \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{R} \times \vec{F} &= \sum m_i(\vec{r}_i \times \vec{g}) + \vec{R} \times \vec{F} \\ &= (\sum m_i \vec{r}_i) \times \vec{g} - m_{ges}\vec{R} \times \vec{G} \\ &= m_{ges}(\vec{R} \times \vec{g}) = m_{ges}(\vec{r}_s \times \vec{g}) \end{aligned}$$

Lösung A: $\vec{R} = \vec{r}_s$, das heißt Unterstützung im Schwerpunkt mit $\vec{F} = -mges\vec{g}$
Lösung B: $(\vec{R} - \vec{f}_s) \times \vec{g} = 0$, das heißt $(\vec{R} - \vec{r}_s) \parallel \vec{g}$, also Unterstützung oberhalb oder unterhalb des Schwerpunkt 3 Möglichkeiten:

- $\vec{R}$ über Schwerpunkt: stabiles Gleichgewicht
- $\vec{R}$ unter SP: labiles Gleichgewicht
- $\vec{R}$ in PS: indifferentes Gleichgewicht

2. Schiefer Turm
   Drehmoment:
$$F_g r = F_z r \rightarrow F_g = F_z$$
   Kräftegleichgewicht:
$$F_g + F_z + F_s = 0 \rightarrow F_s = -2F_g$$

3. Stehende Leiter
   Kräftegleichgewicht:
$$\vec{F}_N = -\vec{F}_G, \vec{F}'_N = -\vec{F}_R$$
   Drehmomente:
   Bezugspunkt = unteres Leiter-Ende (günstige Wahl!)
$$F_W h = F_g(\frac{1}{2}a)$$
   (vergleiche Übungsaufgabe)

8.4 Rotation und Trägheitsmoment

Bewegungsenergie eines starren Körpers setzt sich zusammen aus:

- kinetischer Energie der Schwerpunktsbewegung
- kinetische Energie aufgrund von Rotation

Experiment: Rollende Objekte $\rightarrow FormdesKrperswichtig$!
Mathematisch:

$$E_{kin} = \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \qquad (\text{mit } \vec{v}_i = \vec{v}_s + \vec{v}_{si})$$
$$E_{kin} = \frac{1}{2} \sum m_i(\vec{v}_s^2 + 2\vec{v}_s\vec{v}_{si} + \vec{v}_{si} + \vec{v}_{si}^2)$$
$$= \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_s^2 + \vec{v}_s \sum m_i \vec{v}_{si} + \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_{si}^2$$

Die kinetische Energie zerlegt sich in die kinetische Energie des Schwerpunktes und Rotationsenergie, aus der kinetischen Energie der Bewegung relativ zum Schwerpunkt

Jetzt: Betrachte Rotation um raumfeste Achse: (Spezialfall: Achse durch Schwerpunkt)
Kinetische Energie des Massenstücks $\mathrm{d}m$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}E_{kin} &= \frac{1}{2}\mathrm{d}m\vec{v}_i^2 = \frac{1}{2}\mathrm{d}m(\omega r_\perp)^2 \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{d}m\omega^2 r_\perp^2 \\
E_{rot} &= \int \mathrm{d}E_{kin} = \frac{1}{2}\int \omega^2 r_\perp^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{\int r_\perp^2 \mathrm{d}m}_{\text{Trägheitsmoment}}
\end{aligned}$$

Definition 7 Trägheitsmoment**.** Trägheitsmoment bezüglich einer raumfesten Achse

$$I = \int r_\perp^2 \mathrm{d}m = \Theta^2 \mathrm{d}m = \Theta$$

Diskret:

$$\Theta = \sum r_{\perp,i}^2 m_i$$

Dabei ist $r_\perp$ der Abstand zwischen dem Massenstück $\mathrm{d}m$ und der Drehachse.

Definition 8 Rotationsenergie**.** Rotationsenergie eines starren Rotators (Rotation um raumfeste Achse)

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

8.5 Berechnung von Trägheitsmoment

Volumenintegral:

$$I = \int r_\perp^2 \mathrm{d}m = \int r_\perp^2 \rho(\vec{r})\mathrm{d}V$$

Beispiel 6. 1. Stab (dünn)

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \rho A \mathrm{d}x = \rho A \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\rho A((\frac{L}{2})^3 - (-\frac{L}{2})^3) \\
&= \frac{1}{3}\rho A\frac{L^3}{4} = \frac{1}{12}\rho A L L^2 \\
&= \frac{1}{12}mL^2
\end{aligned}$$

2. Scheibe, Zylinder

Zylinderkoordinaten:

$$x = r\cos\phi, y = r\sin\phi, z = z$$
$$\mathrm{d}V = r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r\mathrm{d}z$$
$$I = \int_V \vec{r}_\perp^2 \mathrm{d}m = \int_v r_\perp^2 \rho \mathrm{d}V$$

Zylinderkoordinaten, also $r_\perp = r$

$$= \rho \int_v r^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$$
$$= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h r^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$$
$$= 2\pi\rho h \int_0^R r^3 \mathrm{d}r = 2\pi\rho h \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2}(\pi R^2 h)\rho R^2 = \frac{1}{2} m R^2$$

3. Dünner Hohlzylinder

$$I = \rho \int_R^{R+d} \int_0^{2\pi} \int_0^h r^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$$
$$= 2\pi\rho h \int_R^{R+d} r^3 \mathrm{d}r = 2\pi\rho h \frac{1}{4}\left[r^4\right]_R^{R+d}$$
$$= 2\pi\rho h \frac{1}{4}((R+d)^4 - R^4)$$
$$= 2\pi\rho h \frac{1}{4}(R^4 + 4R^3 d + \ldots - R^4)$$
$$\approx 2\pi\rho h R^3 d = (2\pi R d h \rho) R^2 = m R^2$$

4. Kugel

$$I = \int r_\perp^2 \mathrm{d}m = \frac{2}{5} m R^2$$

(ohne Beweis, zur Übung…)

8.6 Steinersche Satz

Nochmal Stab:

$$I = \int_0^L x^2 \rho A \mathrm{d}x$$
$$= \rho A \int_0^L x^2 \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{3} \rho A L^2$$

mit $m = \rho A L$

$$= \frac{1}{3} m L^3$$

Allgemein:

$$\begin{aligned} I &= \int r_\perp^2 \mathrm{d}m \\ &= \int (r_{s,\perp} + R_\perp)^2 \mathrm{d}m \\ &= \int \vec{r}_{s,\perp}^2 \mathrm{d}m + \int \vec{R}_{perp}^2 \mathrm{d}m + 2 \int r_{s,\perp} R_{perp} \mathrm{d}m \quad = \underbrace{\vec{r}_{s,\perp}^2 \int \mathrm{d}m}_{=r_{s,\perp}^2 m} + I_s + 2 r_{s,\perp} \underbrace{\int R_{perp} \mathrm{d}m}_{=0} \end{aligned}$$

Definition 9 Steinersche Satz.

$$I = I_s + r_{\perp,s}^2 m$$

Beispiel 7 Dünner Stab.

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{1}{12} m L^2 \\ I_B &= \frac{1}{3} m L^2 \\ I_B &= I_A + (\frac{L}{2})^2 m = \frac{1}{3} m L^2 \end{aligned}$$

Trägheitsmomente sind additiv

$$I = \int_v r_\perp^2 \mathrm{d}m = \int_{v_1} r_\perp^2 \mathrm{d}m + \int_{v_2} r_\perp^2 \mathrm{d}m$$

Translation	Rotation
$\vec{r}$	$\vec{\phi}$
$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\phi}}$
$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$	$\vec{\alpha} = \ddot{\vec{\phi}} = \dot{\vec{\omega}}$
$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$	$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$
$F = m\vec{a}$	$\vec{M} = I\vec{\alpha}$

Bei nicht ortsfester Rotationsachse:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \Theta \vec{\omega}$$

$$\vec{M} = \Theta \vec{\alpha}$$

$\vec{\Theta}$ ist ein Tensor

$$
\begin{aligned}
\vec{v}_i &= \vec{\omega} \times \vec{r}_{\perp,i}, \vec{v}_i = \omega r_{\perp,i} \\
\vec{M} &= \vec{r}_{\perp,i} \times \vec{F}_i \\
M_i &= r_{\perp,i} F_{\perp,i} = r_{\perp,i} m_i \frac{\mathrm{d} r_i}{dt} \\
&= r_{\perp,i}^2 m_i \frac{\mathrm{d}\omega}{dt} \\
M_{tot} &= \sum M_i \\
M_{tot} &= \underbrace{\frac{\mathrm{d}\omega}{dt}}_{\alpha} \underbrace{\sum r_{\perp,i}^2 mi}_{I}
\end{aligned}
$$

Bewegungsgleichung für die Rotation um eine Raumfeste Achse

$$M = I\dot{\omega} = I\alpha$$

Beispiel 8.

$$
\begin{aligned}
M &= I\alpha \\
\vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F}_G \\
I &= 2mR^2 \\
\alpha &= \frac{M}{I} = \dot{\omega} \\
\omega &= \alpha t + \omega_0 = \alpha t \\
\phi &= \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \phi 0 = \frac{1}{2}\alpha t^2 \\
2\pi &= \frac{1}{2}\alpha T^2 \\
T^2 &= \frac{4\phi}{\alpha} = 4\pi \frac{I}{M}
\end{aligned}
$$

wir wollen berechnen

$$
\begin{aligned}
T_0^2 &= 4\pi \frac{I_0}{M} = (1\,72)^2 \mathrm{s}^2 \\
T_1^2 &= 4\pi \frac{I_0 + 2mR^2}{M} = (5\,9)^2 \mathrm{s}^2 \\
T_2^2 &= 4\pi \frac{I_0 + 2m\frac{R^2}{4}}{M} = (3\,3)^2 \mathrm{s}^2 \\
T_1^2 - T_0^2 &= 32\,\mathrm{s}^2 \\
T_2^2 - T_0^2 &= 8\,\mathrm{s}^2
\end{aligned}
$$

8.7 Drehimpuls

- Translation: $\vec{F} = m\vec{a}, \vec{F} = \dot{\vec{p}}$
- Rotation: $\vec{M} = I\vec{\alpha}, \vec{M} = \dot{\vec{L}} \rightarrow$ Drehimpuls
- Impuls: $p = mv$
- Drehimpuls: (Guess) $L = I\omega = mr^2\frac{v}{r} = rmv = rp$

Definition 10 Drehimpuls**.**

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Wichtig: Allen bewegten Massenpunkten kann man bezüglich eines Referenzpunkts 0 einen Drehimpuls zuordnen; der hängt vom Bezugspunkt ab.

$$\dot{\vec{L}} = \frac{\mathrm{d}}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}_{0} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

Grundgleichung der Dynamik für Rotationsbewegungen:

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}}$$

Drehimpulserhaltung:

$$\vec{M} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{ const}$$

Drehimpuls für System von Massenpunkten

$$\vec{p}_s = \sum \vec{p}_i, \dot{\vec{p}_s} = \sum \vec{F}_i$$
$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$$
$$\vec{L} = \int \mathrm{d}\vec{L} = \int (\vec{r} \times \vec{r})\mathrm{d}m \dot{\vec{L}} = \frac{\mathrm{d}}{dt} \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \underbrace{\sum \dot{\vec{r}_i} \times \vec{p}_i}_{0} + \sum \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}_i} = \sum \vec{M}_i = \vec{M}$$

Für System von Massenpunkten:

$$\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \dot{\vec{L}}$$
$$\vec{L} = 0 \text{ für } \vec{M} = 0$$

Allgemeiner Zusammenhang:

mit $\hat{I}$ als Tensor:

$$\vec{L} = \hat{I}\vec{\omega}$$
$$\vec{L} = \int \mathrm{d}\vec{L}$$
$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{L} &= \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{p} = \vec{r} \times \vec{v}\mathrm{d}m \\ &= \mathrm{d}m(\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned}$$

mit $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$

$$= \mathrm{d}m(r^2\vec{\omega} - \vec{r}(\vec{\omega}\vec{r}))$$

$$\int \mathrm{d}\vec{L} = \vec{\omega} \int r^2 \mathrm{d}m - \int \vec{r}(\vec{\omega}\vec{r})\mathrm{d}m$$

Beispiel 9 Schief gestellte Hantel. Drehimpuls:

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$$

Drehimpulsvektor steht senkrecht auf Verbindungslinie zu m_1 und m_2. Aber: Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ zeigt in Richtung der Drehachse.

Beispiel 10 Rotierende Scheibe mit Unwucht. Für Rad mit Masse M gilt: (ohne Unwucht)

$$\vec{L}_1 = \int \mathrm{d}\vec{L} \text{ parallel zu } \vec{\omega}$$

aus Symmetriegründen, $\vec{L} = I\vec{\omega}$ Für das Rad plus Unwucht gilt:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2, \vec{L}_2 = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Drehimpuls der Unwucht}}}{\vec{r} \times \vec{p}}$$

das heißt: $\vec{L}$ nicht parallel zu $\vec{\omega}$, daraus folgt: Drehimpuls hat Komponente senkrecht zur Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, diese rotiert mit $\vec{\omega}$

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}}$$

das heißt auf Achse wirkt Drehmoment.

8.8 Trägheitstensor, freie Rotation und Kreisel

Drehimpuls eines starren Körpers:

$$\vec{L} = \vec{\omega} \int r^2 \mathrm{d}m - \int \vec{r}(\vec{\omega}\vec{r})\mathrm{d}m$$

(Bezugspunkt wichtig!)

$$\begin{aligned}
L_x &= \omega_x \int r^2 \mathrm{d}m - \int x(\omega_x + \omega_y y + \omega_z z)\mathrm{d}m \\
&= \omega_x \int (r^2 - x^2)\mathrm{d}m - \omega_y \int xy\mathrm{d}m - \omega_z \int xz\mathrm{d}m \\
&= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\
L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\
L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \\
\vec{L} &= \underbrace{\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}}_{\text{Trägheitstensor}} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Definition 11 Trägheitstensor**.**

$$\vec{L} = \underbrace{\hat{I}}_{}\vec{o}mega, \hat{I} = I_{ij}$$

$$\overset{\text{Matrix}}{\uparrow}$$

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int (r^2 - x^2)\mathrm{d}m \quad I_{xy} = I_{yx} = -\int xy\mathrm{d}m \\
I_{yy} &= \int (r^2 - y^2)\mathrm{d}m \quad I_{yz} = I_{zy} = -\int yz\mathrm{d}m \\
I_{zz} &= \int (r^2 - z^2)\mathrm{d}m \quad I_{xz} = I_{zx} = -\int xz\mathrm{d}m
\end{aligned}$$

Rotationsenergie:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T\hat{I}\vec{\omega}$$

Trägheitstensor $\hat{I}$ hängt von der Wahl des Koordinatensystems ab!
Geeignete Koordinatentransformation $\rightarrow$ Diagonalisieren von $\hat{I}$. (Hauptachsentransformation)
Nach Hauptachsentransformation:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{pmatrix}$$

mit $I_a > I_b > I_c$.
Es folgt: Bei Rotation eines Körpers um eine der drei Hauptachsen sind Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit parallel.

8.8.1 Kreisel

Ein Kreisel ist ein rotierender starrer Körper, der höchstens an einem Punkt aufgehängt ist. (Kompass, Satellit, Geschoss)
Beschreibung der Kreiselbewegung mit 3 Achsen:

- Figurenachse
- Momentane Drehachse, Richtung von $\vec{\omega}$
- Drehimpulsachse

9 Mechanik deformierbarer Körper

Starrer Körper: $\vec{r}_i - \vec{r}_j =$ const, das heißt Abstand zwischen Massenpunkten konstant.
Wirklichkeit: Verformung bei Anwendung äußerer Kräfte.

9.1 Atomares Modell

Experiment: Alle Körper sind aus Atomen oder Molekülen aufgebaut. Beschreibung von Kräften zwischen Atomen und Molekülen durch Lennard-Jones-Potential. (Dipol-Dipol-Wechselwirkung, Van-der-Waals Kräfte)
Gleichgewichtsabstand: r_0 (E_{pot} = minimal) Für kleine Auslenkung gilt:

$$E_{pot} = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$$
$$F = -\frac{\mathrm{d}E_{pot}}{dr} = -k(r - r_0) = -kAr$$

Federkraft! $\implies$

- Modell eines Festkörper: Federmodell.
  Temperatur unterhalb des Schmelzpunktes. Mittlere kinetische Energie klein gegen $E_{pot}(r_0)$. Atome können Gitterplätze nicht verlassen. Fernordung!

- Modell einer Flüssigkeit: Kugelmodell:
  Auch hier mittlerer Abstand $= r_0$, das heißt Dichte ähnlich die des Festkörpers. Aber: Temperatur zu hoch für feste Zuordnung auf Kristallgitterplätzen $\implies$ flüssiger Zustand. Nahordung!

- Modell eines Gases: frei bewegliche Teilchen.
  Mittlere kinetische Energie ist grob gegen Bindungsenergie, hohe Temperatur!

9.2 Feste Körper.

- Elastischer fester Körper $\rightarrow$ Formelastizität, Volumenelastizität aufgrund rücktreibender Kräfte (Hookscher Bereich)

- Plastisch feste Körper $\rightarrow$ Formänderungen verbleiben

Hier: Elastische Körper! Experimentell findet man:

$$\Delta f \sim F$$
$$\Delta L \sim L, \Delta L \sim A^{-1}$$
$$\Delta L \sim L\frac{F}{A} = Lr \qquad (r\text{: Zugspannung})$$

Definition 12 Hooksches Gesetz:**.**

$$\sigma = E\frac{\Delta L}{L} = E\varepsilon$$

- E : Elastizitätsmodul, E-Modul

- ε : Elongation, relative Längenänderung

- σ : Zugspannung, $\sigma = \frac{F}{A}$

Auswertung Hooksches Gesetz: Material-Stahl, $D = 0.3\,\text{mm}, L = 6\,\text{m}, A = 0.07\,\text{m}^2$

$$F = 1.2\,\text{kPa} = 11.8\,\text{N}, \Delta L = 5\,\text{mm}, \varepsilon = 8 \times 10^{-4} \to \sigma = 168.6\,\text{N}\,\text{mm}^{-2}$$
$$F = 2.4\,\text{kPa} = 13.5\,\text{N}, \Delta L = 10\,\text{mm}, \varepsilon = 1.7 \times 10^{-3} \to \sigma = 337.2\,\text{N}\,\text{mm}^{-2} \implies E \quad = \frac{\sigma}{\varepsilon} 2 \times 10^5\,\text{N}\,\text{mm}^{-2} =$$

Einfaches Atomares Modell: Lineare Kette. Es gilt:

$$L = na, \Delta a \sim F, \Delta L \sim m\Delta a \sim nF$$

Außerdem wegen

$$L \sim m : \Delta L \sim LF \to F \sim \frac{\Delta L}{L}$$

Für eine lineare Kette ist $\varepsilon\frac{\Delta L}{L}$ tatsächlich proportional zur Kraft F.
Für $\varepsilon \sim A^{-1}$ braucht man mehrere lineare Ketten parallel aneinander.

Aber: Auch Wechselwirkung in transversaler Richtung!

Definition 13 Querkontraktion. $\frac{\Delta D}{D} \sim \frac{\Delta L}{L}$

$$\frac{\Delta D}{D} = -\mu \frac{\Delta L}{L}$$

μ: Poissonsche Zahl ≈ 0.3

Volumenänderung (kleine Änderung)

$$\begin{aligned}
V &= (\frac{\pi}{4}) D^2 L \\
\Delta\xi &= \frac{\Delta V}{V} = ? \\
\xi &= \ln V \\
&= 2\ln D + \ln L + \text{ const} \\
\Delta\xi &\approx \frac{1}{V}\Delta V \approx 2\frac{1}{D}\Delta D + \frac{1}{L}\Delta L = \frac{\mathrm{d}\xi}{dV}\Delta V = \frac{\mathrm{d}\xi}{dD}\Delta D + \frac{\mathrm{d}\xi}{dL}\delta L \\
\frac{V}{V} &= -2\mu\frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta L}{L}(1 - 2\mu) \\
\frac{\Delta V}{V} &= \frac{\sigma}{E}(1 - 2\mu) && \text{(Volumenänderung)}
\end{aligned}$$

Kompression (von Flüssigkeiten)

$$\frac{\Delta V}{V} = -\chi \Delta p$$
$$\chi = 3\frac{1}{E}(1 - 2\mu)$$

χ: Kompressibilität

9.3 Scherung und Torsion

Normalspannung oder Zugspannung

$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

Tangentialspannung oder Scherspannung

$$\tau = \frac{F_T}{A}$$

F+r kleine Scherwinkel

$$\tau = G\alpha \qquad (G\text{: Schubmodul, Torsionsmodul})$$

Torsion eines Drahtes (Vollzylinder)

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{\mathrm{d}F}{dA} \\
R\phi &= L\alpha \\
\mathrm{d}M &= \mathrm{d}FR \\
\mathrm{d}A &= 2\pi R\mathrm{d}R \\
\tau &= \frac{\mathrm{d}F}{dA} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}M}{R}}_{\mathrm{d}F} \frac{1}{2\pi R\mathrm{d}R} = G\alpha = G\frac{R\phi}{L} \\
\mathrm{d}M &= \frac{2\pi G\phi}{L}\bar{R}^3\mathrm{d}\bar{R} \\
M &= \underbrace{\frac{2\pi GR^4}{2L}}_{\text{const}}\phi = k_0\phi
\end{aligned}$$

Empfindlichkeit:

$$\begin{aligned}
\frac{\phi}{M} &\sim \frac{1}{R^4} \\
M &= I\ddot{\phi} = -k_D\phi, k_D = \frac{\pi GR^4}{2L} \\
\phi(t) &= \phi_{max}\sin(\omega_0 t + \phi_0) \\
\omega_0 &= \sqrt{\frac{k_K}{I}} \\
T &= \frac{2\pi}{\omega_0} \sim \sqrt{\frac{I}{k_D}}\frac{1}{R^2}
\end{aligned}$$

Ein bisschen was für Ingenieure

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{L}{\rho} = \frac{L+\Delta L}{\rho+\eta} \\
\varepsilon &= \frac{\Delta L}{L} = \frac{\eta}{\rho} \\
\mathrm{d}M &= \eta \mathrm{d}F \\
\mathrm{d}M &= \eta \mathrm{d}F = \eta\sigma\mathrm{d}A = \eta\varepsilon E\mathrm{d}A = \eta^2\frac{1}{\rho}E\mathrm{d}A && \text{(wegen } \varepsilon = \tfrac{\eta}{\rho}\text{)} \\
M &= \frac{E}{\rho}\int \eta^2 \mathrm{d}A
\end{aligned}$$

Definition 14 Flächenträgheitsmoment**.**

$$J = \int \eta^2 \mathrm{d}A$$

- Integral über Querschnittsfläche
- η : senkrechter Abstand der Punkte der Querschnittsfläche von neutraler Ebene

Beispiel 11 Quader.

$$\begin{aligned}
J &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^2 v \mathrm{d}\eta \\
&= \frac{1}{12} b h^3
\end{aligned}$$

Bautechnik: Krümmung κ:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}$$

9.4 Ruhende Flüssigkeiten-Hydrostatik

keine Formelastizität, $G = 0$!
aber: Hohe Volumenelastizität
Das heißt: Alle Kräfte senkrecht zur Oberfläche.

Definition 15 Druck**.** Hydrostatischer Druck

$$p = \frac{F}{A}$$

Also die auf die Fläche wirkende Normalkraft pro Fläche.

$$\begin{aligned}
[p] &= \mathrm{N\,m^{-2}} = \mathrm{Pa} \\
1\,\mathrm{bar} &= 1 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \\
1\,\mathrm{torr} &= 133.322\,\mathrm{Pa} \\
1\,\mathrm{atm} &= 1.013\,\mathrm{bar}
\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \kappa \Delta p = \frac{1}{K} \Delta p$$

Wasser:

$$\kappa = 5 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{N}^{-1}$$

Aluminium:

$$\kappa = 1.4 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{N}^{-1}$$

Im Folgende: $\kappa = 0, V =$ const, das heißt Wasser „inkompresible“

Satz 1 Pascalsches Prinzip. *Wird auf eine in einem Gefäß eingeschlossene Flüssigkeit ein Druch ausgeübt, dann verteilt sich dieser ungehindert auf jeden Punkt in der Flüssigkeit und die Wände.*

Zur Veranschaulichung: betrachte frei schwebendes Flüssigkeitsprisma in ruhender Flüssigkeit, frei wählbar… (hier noch: ohne Schwerkraft)

$$\begin{aligned} F_x &= F_{xc} - F_{xb} = F_c \sin\alpha - F_b \\ &= P_c hc \sin\alpha - p_b hb \overset{!}{=} 0 \\ F_y &= F_{ya} - F_{yc} = F_a - F_c \cos\alpha \\ &= p_a ah - p_c hc \cos\alpha \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Mit $\sin\alpha = \frac{b}{a}, \cos\alpha = \frac{a}{c}$ folgt:

$$\begin{aligned} p_c hc \frac{b}{c} - p_b bh = 0 &\implies p_c = p_b \\ p_a ah - p_c hc \frac{a}{c} = 0 &\implies p_a = p_c \end{aligned}$$

Bemerkung 2. In z-Richtung sind Kräfte aus Symmetriegründen ebenfalls Null! da Flüssigkeitsprisma frei gewählt, das heißt beliebig orientiert werden kann folgt Pascalsches Prinzip

Anwendung: Hydraulische Presse. Druck überall gleich! $\implies$

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

Arbeit:

$$W_1 = F_1 a_1 = p A_1 a_1 = pV$$

$$W_2 = F_2 a_2 = p A_2 a_2 = pV$$

Bisher: Vernachlässigung der Schwerkraft.
Jetzt: Druch im Schwerefeld.

Eigengewicht einer Flüssigkeit verursacht einen von der Tiefe abhängenden Druck. Kraftwirkung auch Fläche A:

$$F = mg = \rho V g = \rho A h g$$

mit Tiefe h

$$p = \frac{F}{A} = \rho g h$$

Definition 16 Hydrostatischer Druck**.** Der Druck in einer ruhenden, inkompressiblen Flüssigkeit nimmt unter Einfluss der Schwerkraft linear mit der Tiefe h zu:

$$p = p_0 + \rho g h$$

Der Hydrostatische Druck ist unabhängig von Form und Volumen des einschließenden Behältnisses

Anwendung: Quecksilberbarometer

$$\begin{gathered} p_{Luft} + \rho g x = \rho g h + \rho g x \\ p_{Luft} = \rho g h \end{gathered}$$

Druckeinheit: 1 mm Hg $= 133.322\,\mathrm{Pa}$

9.4.1 Auftrieb

Erfahrung: Ein in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper erfährt Autrieb.
Grund: Auf Körper einwirkende Druckkräfte.

Satz 2 Prinzip des Archimedes**.** *Ein Körper, der in eine Flüssigkeit eingetauch ist erfähft eine Auftriebskraft, deren Betrag gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit ist.*

$$p_1 = \rho g x_1 + p_0$$

$$\begin{aligned} p_2 &= \rho g x_2 + p_0 \\ E_1 &= \rho g x_1 A + p_0 A \\ E_2 &= \rho g x_2 A + p_0 A \\ F_2 - F_1 &= \rho g A \Delta x = mg = F_g \end{aligned}$$

Es folgt: Ein Körper schwimmt, wenn seine Dichte kleiner ist als die Flüssigkeit, in die er eingetaucht ist.

9.4.2 Oberflächenspannung

Beobachtung: Flüssigkeiten bilden Oberflächen.
Grund: Potentielle Energie an Oberfläche größer.
Im Inneren: Kräftegleichgewicht
An Oberfläche: Kraftwirkung nach Inneren
Minimierung der potentiellen Energie $\implies$ Minimierung der Oberfläche.

Definition 17 Oberflächenspannung**.**

$$\sigma = \frac{\text{Zunahme der Oberflächenenergie}}{\text{Zunahme der Oberfläche}}$$

Achtung: Anders als Zugspannung. Hier: Kraft pro Länge

9.5 Gase

Wesentlicher Unterschie zu Gestkörpern und Flüssigkeiten: Hohe Kompressibilität.

Definition 18 Gesetz von Boyle-Mariette**.**

$$pV = \text{ const}$$

falls Temperatur $T = $ const, siehe später

9.5.1 Barometrische Höhenformel:

Flüssigkeiten: $p = \rho g h + p_0$, das heißt Druck steigt linear mit der Tiefe. (Ausnahme: Inkompressibilität, also \$$\rho$ =~{const, das heißt Druck steigt linear mit der Tiefe. (Ausnahme: Inkompressibilität, also $\rho =$ const)}\$)
Gase: Hohe Kompressibilität! Das heißt Dichteänderungen müssen berücksichtigt werden.
Frage: $p(h) =?$, $\rho(h) =?$
Es gilt:

$$\begin{aligned} pV &= \text{ const} \\ pV &= p\frac{M}{\rho} = p_0 V_0 = p_0 \frac{M}{\rho_0} \end{aligned}$$

für konstante Masse M:

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \frac{p_0}{\rho_0} \mathrm{d}p & &= -\rho g \mathrm{d}h - p\frac{\rho_0}{p_0} g \mathrm{d}h \\ \frac{\mathrm{d}p}{p} &= -\frac{\rho_0 g}{p_0} \mathrm{d}h \\ \ln p - \ln p_0 &= -\frac{\rho_0 g}{p_0} h \\ p &= p_0 \exp{(-\frac{\rho_0 g h}{p_0})} \end{aligned}$$

Barometrische Höhenformel:

$$p(h) = p_0 \exp(-\frac{\rho_0 g}{p_0} h)$$

das heißt: in Atmosühäre mit kompressiblem gas nimmt der Druck mit der Höhe exponentiell ab.

9.6 Strömende Flüssigkeiten und Gase

Experiment: Flüssigkeitsströmung durch Rohr
Beobachtung: Druckabfall entlang des Rohres

$$\begin{aligned}
F_p &= A(p(x) - p(x + \Delta x)) \\
&= -\frac{\mathrm{d}p}{dx}\Delta A \\
&= -\frac{\mathrm{d}p}{dx}\Delta V \\
&= -\frac{\Delta p}{\Delta x}\Delta V \\
F_p &= -F_{visc} \\
F\Delta x &= -\Delta p \Delta V \\
F &= -\operatorname{grad} p \Delta v
\end{aligned}$$

- $\vec{F}_p$: Kraft aufgrund des Druckgradienten
- $\vec{F}_{visc}$: Kraft aufgrund innerer Reibung

Also: Bei der Strömung von Flüssigkeiten muss Arbeit gegen die innere Reibung aufgebracht werden
Es gilt

$$F\Delta x = -\Delta p \Delta V, F\mathrm{d}x = -\mathrm{d}p\Delta V$$

Eigentlich ist das ganze deutlich komplizierter:

$$\begin{aligned}
&\vec{u}(x, y, z, t) && \text{(Geschwindigkeitsfeld)} \\
&p(x, y, z, t) && \text{(Druckfeld)} \\
&\rho(x, y, z, t) && \text{(Dichtefeld)} \\
\mathrm{d}m\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{dt} &= \vec{F}_p + \vec{F}_{visc} + \vec{F}_{ext}
\end{aligned}$$

Navier-Stokes-Gleichung

$$\rho(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\, vv)\vec{u} = \underset{\substack{\downarrow \\ "F_p"}}{-\operatorname{grad} p} + \underset{\substack{\downarrow \\ "F_{ext}"}}{\rho\vec{g}} + \underset{\substack{\downarrow \\ "F_{visc}"}}{\eta\Delta\vec{n}}$$

9.6.1 Kontinuitätsgleichung:

$$\phi = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \text{ const}$$
$$\phi = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho A_i \Delta x}{\Delta t}$$
$$= \rho A_i v_i$$
$$\rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2$$
$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$
$$W = F\Delta x = -\Delta p \Delta V = \frac{1}{2}\Delta m(v_2^2 - v_1^2) + \Delta m g(h_2 - h_1)$$
$$-\Delta p = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_2 - \rho g h_1$$
$$p_1 - p_2 = \dots$$
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

Definition 19 Bernoullische Gleichung**.**

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{ const}$$

9.6.2 Reibung in Flüssigkeiten

Merke für Flüssigkeiten keine statischen Scherkräfte, aber es gibt dynamische Scherkräfte.
Experiment: Notwendige Schubspannung

$$\tau = \frac{F}{A} \sim \frac{\mathrm{d}v_x}{dy}$$

Schubspannung ist proportional zum Geschwindigkeitsgradienten.

Definition 20 Newtonsches Reibungsgesetz:**.**

$$\tau = \frac{F_R}{A} = \eta \frac{\mathrm{d}v_x}{dy}$$

$$F_R = \eta A \frac{\mathrm{d}v_x}{dy}$$

eta nennt man dynamische Scherviskosität.

9.6.3 Strömung durch ein Rohr mit kreisförmigen Querschnitt (Hagen-Poiseuille)

$$
\begin{aligned}
\Delta p &= p_2 - p_1 \\
F &= \Delta\pi r^2 \\
A &= 2\pi r L \\
\tau &= \frac{F}{A} = \frac{\Delta p \pi r^2}{2\pi r L} = -\eta \frac{\mathrm{d}v}{dr} && \text{(Newton!)} \\
v(r) &= \int_{v(r)}^{v(R)=0} -\mathrm{d}v = \int_r^R \frac{\Delta p r}{2\eta L}\mathrm{d}r = \frac{\Delta p}{4\eta L}(R^2 - r^2)a \\
\mathrm{d}V &= 2\pi r \mathrm{d}r v(r)\Delta t \\
\Delta V &= \int_0^R 2\pi r \mathrm{d}r v(r)\Delta t \\
&= \frac{2\pi\Delta p}{2\eta L}\Delta t \int_0^R (R^2 r - r^3)\mathrm{d}r \\
&= \frac{2\pi\Delta p}{2\eta L}(\frac{1}{4}R^4 - \frac{1}{4}R^4)\Delta t \\
\dot{V} &= \frac{\mathrm{d}v}{dt} = \frac{\pi\Delta p}{8\eta L}R^4 \sim R^4 \bar{v} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{A\Delta x}{A\Delta t} = \frac{\mathrm{d}V}{dt}\frac{1}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8\eta L}\Delta p \\
& && \text{(Hagen-Posieuilles-Gesetz)}
\end{aligned}
$$

$\bar{v} \sim \Delta p$ typisch für laminare Strömung

Turbulenz: $\Delta p \sim \bar{v}^2$
Vergleich:

Stationare laminare Strömung	Turbulente Strömung
$\dot{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{dt} = 0$	$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$
Stromflächen	keine Vorhersage der Teilchenbahnen
$F_R \sim \vec{v}$	$F_W \sim \vec{v}^2$

Reynold-Kriterium:

$$
\begin{aligned}
R_e &< R_{e_{krit}} && \text{(laminar)} \\
R_e &> R_{e_{krit}} && \text{(turbulent)}
\end{aligned}
$$

Beispiel 12. Für ein rundes Rohr mit Radis R gilt:

$$R_e = \frac{2\rho\bar{v}R}{\eta}, R_{e_{krit}} = 2000 - 2300$$

9.6.4 Strömungswiderstand von glatten Körper

Frage: Welche Kraft wird auf einem Körper ausgeübt, der sich mit Geschwindigkeit v durch eine Flüssigkeit bewegt?

1. Laminare Strömung: $F_N \sim v$
   Definition 21 Gesetz von Stokes. Strömungswiederstand einer Kugel
   $$F_W = F_R = 6\pi\eta r v$$
   Gesetz von Stokes wichtig für die gesmate Naturwissenschaft! (Sedimentation, Staubteilchen, Milikanversuch…)

2. Turbulente Strömung: $F_N \sim v^2$ Qualitativer Beweis: Teilchen, die mit der Strömungsgeschwindigketi $\vec{v}_K$ auf den Körper mit Konturfläche A auftreffen, werde im Staupunkt gebremst. Dadurch steigt der Druck p_0 um Δp. Hinter dem Körper werden die Teilchen in eine turbulente Strömung überführt. Deren Geschwindigketi entspricht ungefähr der Strömungsgeschwindigkeit v_k, weshalb der Druck hinter dem Körper wieder auf dem altn Druck p_0 absinkt. Die Druckdifferenz zwischen Vorder- und Rückseite des Körpers gibt den Druckwiderstand. Es gilt dann:
   - Strömung ungestört: $p_0 + \frac{1}{2}\rho\vec{v}_k^2$
   - Druck vor dem Körper: $p_0 + \Delta p$
   - Druck hinter dem Körper: $p_0 + \frac{1}{2}\rho\overline{\vec{v}^2}$
   - $\implies F_W \approx A\Delta p = A\frac{1}{2}\rho\vec{v}_K^2 = A\frac{1}{2}\rho\overline{\vec{v}^2}$

Strömungswiderstand = Staudruck $\times$ Konturfläche!!
Aber: Der Strömungswiderstand hängt auch von der Form des Körpers ab. $\implies$ Einführung des „c_W -Wertes“ für quantitative Beschreibung:

$$F_W = v_W \frac{1}{2}\rho v^2 A$$

10 Wärmelehre

Energierhaltung: Wichtiges Konzept der Mechanik. Es gilt:

$$E_{pot} + E_{kin} = \text{ const}, \Delta E = 0$$

Aber: Obiges Gesetz gilt nur für konservative Kräfte. Beim Auftreten dissipativer Kräfte, zum Beispiel Reibung, geht mechanische Energie verloren. $\implies$ Umwandlung von Energei in Wärme, Beobachtung: Temperaturerhöhung. Idee zur Rettung des Energiesatzes: Einführung der sogenannten „inneren Energie“ $\implies Thermodynamik, Temperaturbegriff$

Definition 22 Wärme. Wärme ist ein makroskopisches Maß für den statischen Mittelwert der kinetischen Energie mikroskopischer Objekte. Ist mit deren Relativbewegung auch eine potentielle Energie verknüpft, so tritt sie zur Wärmeenergie hinzu.

Der Wärmebegriff ist damit nur sinnvoll für makroskopische Systeme, das heißt Systeme mit vielen mikroskopischen Objekten (Atome, Moleküle, . . .). Wärmeenergie = innere Energie eines Körpers. (Lange- und Bewegungsenergie des Schwerpunktes werden nicht berücksichtigt).

- Thermodynamik: phänomenologische Beschreibung. Das heißt makroskopische, phänomenologische Beschreibung thermodynamischer Vorgänge. Neue Größen: Temperatur T, Wärme Q, Entropie $S, \ldots$. Formulierung über Zustandsgleichungenund 3 Hauptsätze

- Statistische Mechanik: statischtische Beschreibung. Das heißt mikroskopische, statistische Beschreibung thermodynamischer Vorgänge. Basis: Gesetzmäßigkeiten der Mechanik und statistische Beobachtungen. Zustandsgrößen: statistische Mittelwerte des Teilchenkollektivs.

10.1 Temperaturbegriff und Wärmeausdehung

Temperaturbegriff erscheit aufgrund unserer Erfahung vertraut. (Wahrnehmung von warm und kalt). Aber: Qualitatives Temperaturempfinden kann trügen. Also: Physikalische Beschreibung erfordert ein genaueres Maß! Nutze Erfahrung: Bringt man zwei Körper unterschiedlicher Temperatur für längere Zeit zusammen so heben sie schließlich die gleiche Temperatur. Beide Körper sind dann im thermischen Gleichgewicht. Das heißt: Temperatur beschreibt den Zustand eines Körpers.

Definition 23 Nullter Hauptsatz der Wärmelehre**.** Befinden sich zwei Körper im thermischen Gleichgewicht mit einem dritten, so stehen sie auch untereinander im thermischen Gleichgewicht.

Der nullte Hauptsatz erlaubt die Definition einer Temperaturskala über Temperaturfixpunkte, zum Beispiel Gefrier- und Siedepunkt von Wasser. Konstruktion von Thermometern über die Ausnutzung von temperaturabhänggER Materialeigenschaften: zum Beispiel Volumenausdehung mit steigender Temperatur, Temperaturabhängige Längenänderung, Änderung des elektrischen Widerstands

10.1.1 Volumenausdehung von Gasen

Experimentelle Beobachtung: Gasvolumina vergrößern sich bei Ernährung. Zur Temperaturdefinition. Annahme: $\Delta V \sim \Delta T$. Das heißt lineare Abhängigkeit wird in die Definition reingesteckt!

Celsius-Skala:

- Fixpunkt 1: $T = 0\,°\mathrm{C}$

- Fixpunkt 2: $T = 100\,°\mathrm{C}$

Quantitativ:

Definition 24 Gesetz von Gay-Lussac**.**

$$V(T) = V_0(1 + \gamma T)$$

- $p =$ const

- T: Temperatur

- V_0: Gasvolumen bei $T = 0\,°\mathrm{C}$

Experimentelle Beobachtungen:

$$\gamma = \frac{1}{273.15\,°\mathrm{C}}$$

für alle Gase, falls T groß und p klein. Damit folgt: $V(T) = 0$ für $T = -273.15\,°\mathrm{C}$ wenn man Gaseigenschaften bis $V = 0$ extrapoliert. Dieser Sachverhalt legt die Definition einer neuen von Wasser unabhängigen Temperaturskala nahe.

Definition 25 Absolute Temperaturskala**.**

- Fixpunkt 1: $T = 0\,\mathrm{K} = -273.15\,°\mathrm{C}$ (absoluter Nullpunkt)
- Fixpunkt 2: $T = 273.16\,\mathrm{K}$ (Tripelpunkt des Wassers)

Unterteilung in Gradschritten bleibt erhalten. Das heißt $\Delta T = 1\,°\mathrm{C} \mathrel{\hat{=}} \Delta T = 1\,\mathrm{K}$ Einheit: Kelvin, Basisgröße der Physik, SI-Einheit.

10.1.2 Volumen und Längenausdehung fester und flüssiger Stoffe

Experiment: Bei Erwärmung dehnen sich Körper im Allgemeinen aus. Man findet:

$$\Delta L = \alpha L \Delta T$$

α: Längenausdehungskoeffizient.
Für kleine $\alpha\Delta T$ folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}L}{L} &= \alpha \mathrm{d}T \\ \ln L - \ln L_0 &= \alpha \Delta T \\ L &= L_0 e^{\alpha\Delta T} \approx L_0(1 + \alpha\Delta T) \end{aligned}$$

mit L_0: Länge bei $T = T_0$ Volumenausdehung:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \gamma V_0 \Delta T \\ V &= V_0(1 + \gamma\Delta T) \end{aligned}$$

mit V_0: Volumen bei $T = T_0$.
Es gilt: $\gamma \approx 3\alpha$ Bemerkung:

$$\begin{aligned} V &= l_1 l_2 l_3 \\ \frac{\mathrm{d}V}{dT} &= l_1 l_2 \frac{\mathrm{d}l_3}{dT} + l_1 l_3 \frac{\mathrm{d}l_2}{dT} + l_2 l_3 \frac{\mathrm{d}l_1}{dT} \\ \gamma &= \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{dT} = \frac{1}{l_3}\frac{\mathrm{d}l_3}{dT} + \frac{1}{l_2}\frac{\mathrm{d}l_2}{dT} + \frac{1}{l_1}\frac{\mathrm{d}l_1}{dT} \end{aligned}$$

für kleine ΔT

10.1.3 Anomalie des Wassers

Wasser: Keine Ausdehung bei Erwärmung zwischen $0\,°\mathrm{C}$ und $4\,°\mathrm{C}$. Stattdessen: Volumen nimmt mit steigender Temperatur ab. Wichtige Eigenschaft! Garantiert Leben im Wasser aufgrund von Eisbildung an Oberfläche.

10.2 Zustandsgleichung idealer Gase

Wir wissen:

$$pV = \text{ const} \qquad \text{(für } T = \text{ const}(Boyle - Mariotte))$$
$$V = V_0(1 + \gamma T)\text{für } p = \text{ const (Guy-Lussac)}$$

Wähle absolute Temperaturskala. Dann folgt für Gay-Lussac:

$$V = V_0 \gamma T$$

$V_0 = V(273.15\,\mathrm{K}), \gamma = \frac{1}{273.15\,\mathrm{K}}$

$$Also:$$

Boyle Mariotte

$$pV = \text{ const}$$

Gay-Lussac

$$V = V_0 \gamma T$$
$$pV = pV(p,T) = p_0 V(p_0, T) = p_0 V(p_0, T_0)\gamma T = p_0 V_0 \gamma T \sim T$$

Satz 3 Boyle-Mariotte-Gay-Lussac**.** *Für idelae Gase gilt das Boyle-Mariotte-Gay-Lussac Gesetz*

$$pV \sim T, \wedge \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \textit{ const}$$

$p \sim T$ *für* $V = $ *const*

Frage: Was bedeutet „const" in dieser Gleichung?
Erwartung: Hängt von Stoffmenge ab. Hierzu: Gedankenexperiment: Fasse zwei identische Kisten gefüllt mit idealem Gas zu einer Kiste zusammen:

1 Kist

$$p_0 V_0 = \xi T_o$$

2 zusammengefasste Kisten

$$p_0 2V_0 \sim T_0$$

Also: Verdopplung von ξ!. Ansatz: $\xi \sim$ Gasmenge

$$\implies pV = k_B NT$$
$$k_B = 1.381 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}} \qquad \text{(Boltzmankonstante)}$$

Definition 26 Mol**.** Das Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das us ebensoviel Einzelteilchen besteht, wie Atome im 12 Gramm des Kohlenstoffnuklids C enthalten sind. Bei Benutzung des Mol müssen die Einzelteilchen spezifiziert sein und können Atome, Moleküle, Ionen, Elektronen sowie andere Teilchen oder Gruppen solcher Teilchen genau angegebener Zusammensetzung sein.

$$1\,\mathrm{mol} \mathrel{\hat{=}} 6.022 \times 10^{23}\ \text{Teilchen}$$

Avogadro-Zahl:

$$N_A = 6.022 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$$

Satz 4 Zustandsgleichung idealer Gase**.**

$$pV = n \underbrace{N_a k_B}_{R} T$$
$$pV = nRT$$

mit R (universelle Gaskonstante):

$$R = 8.314\,51\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol}$$

Für Normalbedingungen:

$$p_0 = 1013\,\mathrm{m\,bar}$$
$$T_0 = 273.15\,\mathrm{K}$$
$$n = 1$$
$$V_0 = 22.4 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3} = 22.4\,\mathrm{L}$$

10.3 kinetische Gastheorie

Bisher: Beschreibung mit Hilfe makroskopische Zustandsgrößen.
Jetzt: Ableitung makroskopischer-Zustandsgrößen aus mikroskopischen Eigenschaften.

Grundidee: Temperatur $\hat{=}$ innere Energie $\hat{=}$ Bewegungsenergie der Teilchen.
Zustandsgrößen $\hat{=}$ Mittelwert mikroskopischer Größe.

Model des idealen Gases:

- N Punktteilchen (Atome, Moleküle) der Masse m mit statistisch verteilten Geschwindigkeiten $(N \gg 1)$
- Gasteilchen sind starre Kugeln, mittlerer Abstand r zwischen den Gasteilchen sind groß gegen Kugelradius r_0. (Das heißt Eigenvolumina sind vernachlässigbar)
- Einzige Wechselwirkung: elastische Stoße, das heißt es gelten sowohl Impuls- als auch Energeierhaltung. (Keine innere Anregung der Gasteilchen)
- Stöße mit den Wänden des einschließenden Behälters sind ebenfalls perfekt elastisch.

Druck: Impulsübertrag der Gasteilchen auf Behälterwand. Das heißt

$$\text{Druck} = \frac{F}{A}, F = \dot{p}$$

Betrachte Gesamtkraft auf Fläche A:

$$\begin{aligned} F = \dot{p} &= \frac{\Delta p}{\Delta t} \\ &= \frac{\text{Impulsübertrag}}{\text{Stoß}} \cdot \frac{\text{Stöße}}{\text{Zeit}} \\ &= 2mv_x \cdot \frac{\text{Stöße}}{\text{Zeit}} \end{aligned}$$

Aber v_x ist nicht für alle Gasteilchen gleich, sondern statistisch verteilt. Erwartung: Verteilungsfunktoin der v_x -Werte muss symmetrisch um $v_x = 0$ sein, da Gas ruht! Es gilt:

$$\begin{aligned} N &= \int_{-\infty}^{\infty} n(v_x)\mathrm{d}v_x \\ \bar{v}_x &= \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} v_x n(v_x)\mathrm{d}v_x = 0 \end{aligned}$$

$$\bar{(}v_x^2) = \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 n(v_x)\mathrm{d}v_x \neq 0$$

Damit folgt für Gesamtkraft F

$$F = \dot{p} = \frac{\mathrm{d}}{dt}\sum_{i=1}^{\tilde{N}} p_i = \frac{\mathrm{d}}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} 2mv_x\tilde{N}(v_x)\mathrm{d}v_x$$

$\tilde{N}(v_x)$: Anzahl Gasteilchen, die mit Geschwindigkeit v_x im Zeitintervall dt auf Behälterwand treffen, Bedingung: $v_x > 0$

Betrachte Gasvolumen mit Querschnittsfläche A:

$$\tilde{N}(v_x) = \Theta(v_x) n(v_x) v_x \mathrm{d}t A \qquad (\Theta\text{: Heavyside Funktion})$$

$$\begin{aligned}
F &= \frac{\mathrm{d}}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} 2mv_x \tilde{N}(v_x) \mathrm{d}v_x \\
&= \frac{\mathrm{d}}{dt} \int_{0}^{\infty} 2mv_x n(v_x) v_x \mathrm{d}t A \mathrm{d}v_x \\
&= \frac{1}{2} mA \int_{-\infty}^{\infty} 2v_x^2 n(v_x) \mathrm{d}v_x \\
&= mAN\bar(v_x^2) ng\bar(v_x^2) \\
&= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 n(v_x) \mathrm{d}v_x
\end{aligned}$$

Damit folgt für den Gesmatdruck auf Behälterwand mit Querschnittsfläche A:

$$p = \frac{F}{A} = mN\overline{v_x^2}$$

Dabei ist N die Teilchenanzahl pro Volumen.
Bisher: Betrachtung nur in einer Dimension.
Jetzt: Erweiterung auf drei Dimensionen.
Es gilt:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}, \overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \to \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{\rho}\overline{v^2}$$

(Geschwindigketien der Gasteilchen sind isotrop verteilt! Gas ruht!) $\Longrightarrow$

$$p = \frac{1}{3} Nm\overline{v^2} = \frac{2}{3} N\overline{E_{kin}}$$

- $\overline{E_{kin}} = \frac{1}{2}m\overline{v^2}$
- p: Druck
- N: Gesmatzahl Gasteilchen pro Volumen!
- E_{kin}: mittlere kinetische Energie

Vergleich mit Zustandsgleichung idealer Gase

$$\begin{aligned}
pV &= nRT = k_B n N_A T = k_B(NV)T \\
p &= k_B NT \\
\bar{E}_{kin} &= \frac{3}{2} k_B T
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Zustandsgleichung idealer Gase aus der Bewegungsenergie der Gasteilchen, das heißt man findet

- Äquivalenz zwischen phänomenologischer und mikroskopischer Beschreibung
- Konsistente Definition eines idealen Gases

Zum Ursprung des Faktors $\frac{3}{2}$ in $\bar{E}_{kin} = \frac{3}{2}k_B T$:
Es gilt: $p = mN\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}mN\overline{v^2}$, das heißt Faktor 3 ergibt sich aus der Zahl möglicher Raumrichtungen beziehungsweise „Translationsfreiheitsgrade“. Legt nahe: Mittlere Energie eines Gasteilchens Pro Freiheitsgrad $= \frac{1}{2}k_B T$. Tatsächlich können bei realen Molekülen zusätzliche Rotations- und Schwingungsfreiheitsgrade auftreten, so dass die Zahl der Freiheitsgrade f insgesamt zunimmt. Die Energie der einzelnen Moleküle berteilt sich dann gleichförmig auf alle vorhandenen Freiheitsgrade. Es gilt: Gleichverteilungssatz oder Äquipartitionsprinzip:

$$\overline{E_{kin}} = f\frac{1}{2}k_B T$$

$$U = nN_A\frac{1}{2}fk_B T$$

nennt man **innere Energie**. Gesamtenergie, die aus der Wärmebewegung von Molekülen etc. resultiert. U_n fasst sowohl kintische als auch (innere) potentielle Energie

10.4 Wärme, Wärmekapazität und latente Wärme

Beobachtung: Beim Erwärmen oder Abkühlen eines Körpers wird Wärme mit der Umgebung ausgetauscht.

Definition 27 Wärme**.** Wäme ist die zwischen zwei Systemen aufgrund eines Temperaturunterschieds ausgetauschte Energie

das heißt: Erwärmen findet durch Energieübergratung via Wärmefluß statt.

Termisches Gleichgewicht: Wärmefluß zwischen zwei Systemen beziehungsweise Systenm und Umgebung in beide Richtung gleich oder Nullpunkt Temperatur gleich!

Experiment: Temperaturausgleich System A und B.

$$(T_A - T)m_A \sim (T - T_B)m_B$$

das heißt größere Masse hat eine größen Einfluß! Proportionalität hängt von der Art der Materialien ab. Einführung zweier Materialkonstanten!

$$C_A(T_A - T)m_A = C_B(T - T_B)m_B$$
$$Q_A = Q_B$$

- C_A, C_B: materialspezifische Konstanten
- Q_A: Von System A abgegebene Wärme
- Q_B: Von System B aufgenommene Wärme

Definition 28 Wärmemenge**.**

$$Q = cm\Delta T$$

c: spezifische Wärmekapazität

Kalorie: 1 Kalorie ist die Wärme, mit der man 1 g Wasser um 1 °C erwärmen kann.
Begiffe:

- $c = $ spezifische Wärmekapazität, spezifische Wärme
- $C = cm = $ Wärmekapazität einer Masse m
- $c_m = c_{mol} = c m_{mol} = $ molare Wärmekapazität, spezielle Molwärme

$$Q = c_m n \Delta T$$

Jetzt: Latente Wärme. Beobachtung: Temperatur eines Körpers ändert sich linear mit der zugeführten Wärmeenergie. Aber! Experiment: Poleischmelzen.

1. Aufzeizen $Q = cm\Delta T$ ✓
2. Phasenübergang $Q = \lambda m$
   Zuführen von Wärme ohne Temperaturerhöhung. Quantitative Beobachtung: Wärmemenge Q proportional zur Masse m.

Phasenübergänge:

1. Energie wird zum Aufbrechen der Teilchenbindungen gebraucht $\implies$ Wärmezufuhr
   - Schmelzen: fest $\to$ flüssig
   - Verdampfen: flüssig $\to$ fest
   - Sublimieren: fest $\to$ gasförmig
2. Bindugsenergie wird frei $\to$ Wärmeabgabe
   - Gefrieren / Erstarren: flüssig $\to$ fest
   - Kondensieren: gasförmig $\to$ flüssig
   - Kondensieren: gasförmig $\to$ fest

Die Wärmeenergie, die ein Körper bei einem Phasenübergang aufnimmt beziehungsweise abgibt, ohne das damit eine Temperaturänderung einhergeht, nennt man **latente Wärme**, es gilt:

$$Q = \lambda m$$

mit Q: aufgenommene/abgegebene Wärme, m: Masse. Dabei ist λ die (latente) Schmelzwärme oder (latente) Verdampfungswärme.

$$U = nN_a\frac{1}{2}fk_BT = n\frac{1}{2}fRT, R = k_bN_a, Q = c_m\Delta T, Q = \lambda m$$

10.5 Arbeit und Wärme

Machanische Arbiet $\xrightarrow{\text{Reibung}}$ Wärme

$$\begin{aligned} W &= Fs \\ &= mg(\pi d)n \\ Q &= c_m \Delta T \\ c_m &= 65\,\mathrm{cal}\,\mathrm{K}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} \Delta T \approx 3\,\mathrm{K} \to Q \sim 200\,\mathrm{cal} \\ 1\,\mathrm{cal} \approx 4.3\,\mathrm{J} \to W \sim 870\,\mathrm{J} \end{gathered}$$

Genau:

$$1\,\mathrm{cal} \approx 4.186\,\mathrm{J}$$

10.6 erster Hauptsatz der Wärmelehre

$$\begin{aligned} \Delta U &= \Delta Q + \Delta W U & &= n N_a \overline{E_{kin}} \\ &= \frac{1}{2} nRT \end{aligned}$$

- ΔQ: Wärmezufuhr
- ΔW: aus System geleitete Arbeit
- $\Delta Q > 0$: Wärmezufuhr, $\Delta W > 0$, Arbeit wird **aus** System verrichtet
- $\Delta Q < 0$: Wärmezufuhr, $\Delta W < 0$, Arbeit wird **von** System verrichtet

Bei uns: Anders als in klassischer Mechanik

10.7 Volumenarbeit und PV-Diagramme idealer Gase

Thermodynamische Prozesse, Kreisprozesse: ideale Gase! Zustandsgrößen: n, p, V, T (Q ist **keine** Zustandsgröße)

$$pV = nRT$$

Verscheiben des Kolbens:

- Gegen Gasdruck nach **unten**: $\Delta W > 0$
- Gegen Außendruck nach **oben**: $\Delta W y 0$

$$\mathrm{d}W = F\mathrm{d}s = -pA\mathrm{d}l = -p\mathrm{d}V$$
$$\mathrm{d}W < 0 \text{ für } \mathrm{d}V > 0 \mathrm{d}W \qquad > 0 \text{ für } \mathrm{d}V < 0 \implies W = -\int_{v_1}^{v_2} p\mathrm{d}V$$

pV-Diagramm:
$pV = nRT$

- Isotherme Zustandsänderung: $T = \text{ const}$
  - $T = \text{ const}$
  - $pV = nRT \to p \sim \frac{1}{V}$
  - $\Delta U_{12} = 0 = \Delta Q_{12} + \Delta W_{12}$
  - $\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q - p\mathrm{d}V = 0$
  - $\int_1^2 \mathrm{d}Q = \int_1^2 p\mathrm{d}V \to \Delta Q_{12} = \int_1^2 \frac{nRT}{V}\mathrm{d}V = nRT\ln(\frac{V_2}{V_1})$
  - $\Delta W_{12} = -\Delta Q_{12} = -nRT\ln(\frac{V_2}{V_1})$
- Isobare Zustandsänderung: $P = \text{ const}$
  - $\Delta W_{12} = -p(V_2 - V_1) = -nR(T_2 - T_1)$
  - $\Delta Q_{12} = nc_p(T_2 - T_1)$
  - $\Delta U_{12} = \Delta W_{12} + \Delta_{12} = n\underbrace{(c_p - R)}_{\frac{f}{2}R}(T_2 - T_1)$
- Isochore Zustandsänderung $V = \text{ const}$
  - $\Delta W_{12} = 0$
  - $\Delta Q_{12} = nc_v(T_2 t_1)$
  - $\Delta U_{12} = \Delta Q_{12} = nc_v(T_2 - T_1)$
- Adiabatische Zustandsänderung $Q = \text{ const}, \Delta Q = 0$

– $\Delta Q_{12} = 0, \Delta U_{12} = \Delta W_{12}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}U &= \mathrm{d}W \\
\mathrm{d}U &= \frac{1}{2} f n R \mathrm{d}T = n c_v \mathrm{d}T \mathrm{d}W && = -p\mathrm{d}V \\
\mathrm{d}U &= \mathrm{d}W \implies n c_v \mathrm{d}T = -p\mathrm{d}V = -\frac{nRT}{V}\mathrm{d}V \\
c_v \frac{\mathrm{d}T}{T} &= -R\frac{\mathrm{d}V}{V} \\
c_v \ln T &= -R \ln V + \text{ const} \\
c_v \ln T + R \ln V &= \text{ const} \\
\ln T^{c_v} + \ln V^R &= \text{ const} \\
e^{lnT^{c_v} V^R} &= e^{\text{const}} \\
T^{c_v} V^R &= \text{ const} \\
T^{c_v} V^{c_p c_v} &= \text{ const} \\
T V^{\frac{c_p - c_v}{c_v}} &= \text{ const} \\
\gamma - 1 &:= \frac{c_p - c_v}{c_v} \\
\gamma &= \frac{f+2}{f}
\end{aligned}
$$

Isotropenindex:

$$
\begin{aligned}
TV^{\gamma-1} &= \text{ const}(pv)V^{\gamma-1} && = pV^\gamma = \text{ const} \\
T^\gamma p^{1-\gamma} &= \text{ const}
\end{aligned}
$$

Definition 29 Adiabatengleichungen:.

$$
\begin{aligned}
pV^\gamma &= \text{ const}, p \sim V^{-\gamma} \\
TV^{\gamma-1} &= \text{ const}, T \sim V^{1-\gamma} \\
T^\gamma p^{1-\gamma} &= \text{ const}, T^\gamma \sim p^{\gamma-1}
\end{aligned}
$$

Temperaturerhöhung ist bei konstantem Volumen effektiver als bei konstantem Druck

- Isobar: $\Delta Q = \Delta h - \Delta w$
- Isochor: $\Delta Q = \Delta u$

$$
C_v = \frac{f}{2}R, c_p = \frac{f+2}{2}R = \underbrace{\frac{f}{2}R}_{c-V} + R
$$