

# Analysis II (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

20. April 2017

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Metrische und normierte Räume</b>	<b>1</b>
1.1	Metrische Räume . . . . .	1
1.2	Normierte Räume . . . . .	2

## 1 Metrische und normierte Räume

### 1.1 Metrische Räume

**Definition 1.1** Sei  $M$  eine Menge,  $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$  heißt **Metrik** auf  $M$  genau dann wenn  $\forall x, y, z \in M$

- (D1)  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$  (Definitheit)
- (D2)  $d(x, y) = d(y, x)$  (Symmetrie)
- (D3)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$  (Dreiecksungleichung)

**Beispiel 1.2** 1. Charakterische (diskrete) Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Sei  $X = \mathbb{K}^n$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ) mit Metrik

$$d(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{n}{2}}$$

(euklidische Metrik)

3. Sei  $X = \mathbb{R}^n$ . Für  $1 \leq \phi \leq \infty$ . Sei

$$d_\phi(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^\phi \right)^{\frac{1}{\phi}}$$

Ist  $\phi = \infty$ , so definieren wir

$$d_\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$$

4.  $X = \mathbb{R}$  mit Metrik

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

5. Der Raum der Folgen  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  (beziehungsweise  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ) kann mit der Metrik

$$d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

**Definition 1.3** Sei  $M$  eine Menge mit Metrik  $d$ . Wir definieren für  $x \in M, \varepsilon > 0$ , die offene  $\varepsilon$ -Kugel um  $x$  durch

$$K_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

$A \subset M$  heißt **Umgebung** von  $x \in M \Leftrightarrow \exists \varepsilon : K_\varepsilon(x) \subset A$

### Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen

**Definition 1.4** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem metrischen Raum  $(X, d)$  ist konvergent gegen einem  $x \in X$  genau dann wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 d(x_n, x) < \varepsilon$

**Satz 1.5** 1. Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann ist  $A \subseteq X$  abgeschlossen genau dann wenn  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge in  $A$  mit  $x_n \rightarrow x \Rightarrow x \in A$

2. Seien  $(X, d_1), (Y, d_2)$  zwei metrische Räume. Dann ist die Funktion stetig in  $x \in X$  genau dann wenn  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge in  $X$  mit  $x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

**Definition 1.6 ((Cauchy Folgen und Vollständigkeit))** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt Cauchy-Folge falls  $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$  für  $n, m \rightarrow \infty$ . Der metrische Raum heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge konvergent ist.

## 1.2 Normierte Räume

**Definition 1.7** Ein normierter Raum  $(X, \|\cdot\|)$  ist ein Paar bestehend aus einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $X$  und einer Abbildung  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$  mit

1.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in X$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in X$

**Bemerkung 1.8** 1. Die Norm  $\|\cdot\|$  induziert auf  $X$  eine Metrik  $d(x, y) = \|x - y\|$

2. Eine Metrik  $d$  auf einem Vektorraum definiert die Norm  $\|d(x, 0)\|$  nur dann, wenn

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x, y, z \in X : d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y) \quad (\text{Homogenität})$$

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad (\text{Translationsinvarianz})$$

**Definition 1.9 (1.8 Banachraum)** Ein normierter Raum  $(X, \|\cdot\|)$  heißt vollständig, falls  $X$  als metrischer Raum mit der Metrik  $d(x, y) = \|x - y\|$  vollständig ist. Ein solcher vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**

**Beispiel 1.10 (1.9)** 1.  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ , wobei

$$\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

2. Sei  $K$  eine kompakte Menge:

$$C_{\mathbb{K}} := \{f : K \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\}$$

$$\|\cdot\|_{\infty} = \max_{x \in K} |f(x)|$$

$(C_{\mathbb{K}(K)}, \|\cdot\|_{\infty})$  ist ein Banachraum.

**Bemerkung 1.11** 1. Jede Cauchy-Folge in  $\mathbb{K}^n$  konvergiert, das heißt  $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$  ist vollständig

2. Jede beschränkte Folge in  $\mathbb{K}^n$  besitzt eine konvergente Teilfolge. (Bolzano-Weierstraß Satz gilt in  $\mathbb{R}^n$ ) (Beweis für  $\mathbb{R}^n$  zum Beispiel in RR Ana2 Satz 1.1)

**Satz 1.12 (1.10 Äquivalenz von Normen)** Auf dem endlich dimesionalen Vektorraum  $\mathbb{K}^n$  sind alle Normen **äquivalent** zur Maximumnorm, das heißt zu jeder Norm  $\|\cdot\|$  gibt es positive Konstanten  $w, M$  mit denen gilt

$$m\|x\|_{\infty} \leq \|x\| \leq M\|x\|_{\infty}, x \in \mathbb{K}^n$$

**Beweis** Sei  $\|\cdot\|$  irgendeine Norm  $\forall x \in \mathbb{K}^n$  gilt

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \|e^{(k)}\| \leq M\|x\|_{\infty}$$

mit

$$M := \sum_{k=1}^n \|e^{(k)}\|$$

Wir setzen

$$S_1 := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}, m := \inf\{\|x\|, x \in S_1\} \geq 0$$

Zu zeigen  $m > 0$  (dann ergibt sich für  $x \neq 0$  wegen  $\|x\|_\infty^{-1}x \in S_1$  auch  $m \leq \|x\|_\infty^{-1}\|x\| \Rightarrow 0 < m\|x\|_\infty \leq \|x\| \quad x \in \mathbb{K}^n$ ) Sei also angenommen, dass  $m = 0$

Dann gibt eine Folge  $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \in S_1$  mit  $\|x^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ . Da die Folge bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  beschränkt ist, gibt es nach dem B.-W. Satz eine Teilfolge auch von  $(x^{(k)})$ , die bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  gegen ein  $x \in \mathbb{K}^n$  konvergiert.

$$|1 - \|x\|_\infty| = \left| \|x^{(k)}\|_\infty - \|x\|_\infty \right| \leq \|x^{(k)} - x\|_\infty \rightarrow 0 \Rightarrow \|x\|_\infty = 1 \Rightarrow x \in S_1$$

Andererseits gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} : \|x\| \leq \|x - x^{(k)}\| + \|x^{(k)}\| \leq M\|x - x^{(k)}\|_\infty + \|x^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Rightarrow \|x\| = 0$$

↳ zu  $x \in S_1$

□