Mathematischer Vorkurs

Robin Heinemann

June 7, 2017

Contents

1 Messwert und Maßeinheit

Zu jeder phys. Größe gehören Messwert und Maßeinheit, d.h. Zahlenwert · Einheit

1.1 Beispiel

Geschw. $v = \mathrm{km\,s^{-1}}$

1.2 Bezeichnungen

Abkürzung	Bedeutung
t	time
m	mass
v	velocity
a	acceleration
F	Force
E	Energy
T	Temperature
p	momentum
I	electric current
V	potential

Wenn das lateinische Alphabet nicht ausreicht: griechische Buchstaben

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \Delta, \Gamma, \epsilon, \zeta, \eta, \Theta, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \Xi, \pi, \rho, \sigma, \tau, \phi, \chi, \psi, \omega, \Omega$$

1.3 Maßeinheiten

Maßeinheiten werden über Maßstäbe definiert.

1.3.1 Beispiel:

$1\,\mathrm{m}$ = Strecke, die das Licht in $\frac{1}{299792458}\mathrm{s}$ zurücklegt.

1.3.2 SI-Einheiten

Internationaler Standard (außer die bösen Amerikaner :D)

Größe	Einheit	Symbol
Länge	Meter	m
Zeit	Sekunden	s
Masse	Kilogramm	kg
elektrischer Strom	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Lichtstärke	Candela	cd
ebener Winkel	Radiant	rad
Raumwinkel	Steradiant	sr
Stoffmenge	Mol	mol

Radiant Kreisumfang $U = 2\pi r$ Bogenmaß $b = \phi r$
Umrechnung in Winkelgrad

$$2\pi\,\mathrm{rad} \mathrel{\hat{=}} 360°$$

$$\frac{WinkelinRadiant}{2\pi} = \frac{WinkelinGrad}{360}$$

Steradiant

$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$

Abgeleitete Einheiten

Größe	Einheit	Symbol	Äquivalent
Frequenz	Hertz	Hz	$1/\mathrm{s}$
Kraft	Newton	N	$\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$
Energie	Joule	J	$\mathrm{N\,m}$
Leistung	Watt	W	$\mathrm{J\,s^{-1}}$
Druck	Pascal	Pa	$\mathrm{N\,m^{-2}}$
elektrischer Ladung	Coulomb	C	$\mathrm{A\,s}$
elektrisches Potenzial	Volt	V	$\mathrm{J\,C^{-1}}$
elektrischer Widerstand	Ohm	Ω	$\mathrm{V\,A^{-1}}$
Kapazität	Farad	F	$\mathrm{C\,N^{-1}}$
magn. Fluss	Weber	Wb	$\mathrm{V\,s^{-1}}$

Präfix / Größenordnungen

Präfix	log{10}	Abkürzung
Dezi	-1	d
Zenti	-2	c
Milli	-3	m
Mikro	-6	μ
Nano	-9	n
Piko	-12	p
Femto	-15	f
Atto	-18	a
Zepta	-21	z
Yokto	-24	y
Deka	1	D
Hekto	2	h
Kilo	3	k
Mega	6	M
Giga	9	G
Tera	12	T
Peta	15	P
Exa	18	E
Zetta	21	Z
Yotta	24	Y

1.4 Natürliches Einheitensystem der Teilchenphysik

1.4.1 Grundlage

$$2.9979 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 6.5822 \times 10^{-22}\,\mathrm{MeV\,s}$$

betrachte $\frac{\hbar c}{\mathrm{MeV\,m}} = 197.33 \times 10^{-15}$

1.4.2 natürliches Einheitensystem

$h = c = 1$ In diesem Fall ist $1/\mathrm{MeV} = 197.44\,\mathrm{fm}$ In diesem Einheitensystem ist die Einheit von $[Energie] = [Masse] = [Länge]^{-}1 = [Zeit]^{-}1$

1.5 Endliche Messgenauigkeit

z.B. Plancksches Wirkungsquantum

$$\hbar = 1.054\,571\,68(18) \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$$

Das bedeutet, dass der Wert von $\hbar$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 68 % zwischen den beiden Schranken liegt

$$1.054\,571\,50 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} \leq \hbar \leq 1.054\,571\,86 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$$

2 Zeichen und Zahlen

2.1 Symbole

Zeichen	Bedeutung
$+$	plus
$\cdot$	mal
$=$	gleich
$<$	ist kleiner als
$>$	ist größer als
$\angle$	Windel zwischen
$-$	minus
$/$	geteilt
$\neq$	ungleich
$\leq$	kleiner gleich
$\geq$	größer gleich
$\simeq$	ungefähr gleich
$\pm$	plus oder minus
$\perp$	steht senkrecht auf
$\equiv$	ist identisch gleich
$\ll$	ist klein gegen
$\gg$	ist groß gegen
∞	größer als jede Zahl
$\rightarrow \infty$	eine Größe wächst über alle Grenzen \ Limes
$\sum$	Summe
$\in$	Element von
$\subseteq$	ist Untermenge von oder gleich
$\cup$	Vereiningungsmenge
$\exists$	es existiert ein
$\implies$	daraus folgt, ist hinreichende Bedingung für
$\impliedby$	gilt wenn, ist notwendige Bedingung für
$\exists!$	es existiert genau ein
$\notin$	kein Element von
$:=$	ist definiert durch
$\emptyset$	Nullmenge
$\forall$	für alle

2.1.1 Summenzeichen

Beispiel

1.
$$\sum_{n=1}^{3} a_n = a_1 + a_2 + a_3$$

2. Summe der ersten m natürlichen Zahlen

$$\sum_{n=1}^{m} n = 1 + 2 + \ldots + (m-1) + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

1. Summe der ersten m Quadrate der natürlichen Zahlen

$$\sum_{n=1}^{m} n^2 = 1 + 4 + \ldots + (m-1)^2 + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

1. Summe der ersten m Potenzen einer Zahl ($q \neq 1$)

$$\sum_{n=0}^{m} q^n = 1 + q + \cdots + q^{m-1} + q^m = \frac{1 - q^{m+1}}{1-q}$$

sog. *geometrische Summe*

- Beweis

$$\begin{aligned} s_m &= 1 + \ldots + q^m \\ qs_m &= q + \ldots + q^{m+1} \\ s_m - qs_m = s_m(1-q) &= 1 - q^{m+1} \end{aligned}$$

Rechenregeln

1. $$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m}^{n} a_j$$

2. $$c \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} c a_k$$

3. $$\sum_{k=m}^{n} a_k \pm \sum_{j=m} n b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k \pm b_k)$$

4. $$\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{p} a_k = \sum_{k=m}^{p} a_k$$

5. $$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} = \sum_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p}$$

6. $$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) (\sum_{j=1}^{m} b_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_i b_j$$

   falls $n = m$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j$$

2.1.2 Produktzeichen

Beispiel

$$\prod_{n=1}^{3} a_n = a_1 a_2 a_3$$

2.1.3 Fakultätszeichen

$$m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (m-1) \cdot m = \prod_{n=1}^{m} n$$

$$0! = 1$$

2.2 Zahlen

Erinnerung natürliche Zahlen $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \ldots$ ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup 0 \cup -a \mid a \in \mathbb{N}$ rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \frac{b}{a} \mid a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} b \in \mathbb{Z}$ reelle Zahlen $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup$unendliche Dezimalbrüche Die reellen Zahlen lassen sich umkehrbar eindeutig auf die Zahlengerade abbilden, dh.h jedem Punkt entspricht genau eine reelle Zahl und umgekehrt

2.2.1 Rassengesetze für reelle Zahlen

Addition

- Assoziativität $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Kommutativität $a + b = b + a$
- neutrales Element $a + 0 = a$
- Existenz des Negatives $a + x = b$ hat immer genau eine Lösung: $x = b - a$ für $0 - a$ schreibe wir $-a$

Multiplikation:

- Assoziativität $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Kommutativität $a \cdot b = b \cdot a$
- neutrales Element $a \cdot 1 = a$
- Inverses $a \cdot x = b$ hat für jedes $a \neq a$ genau eine Lösung $x = \frac{b}{a}$für$\frac{1}{a}$ schreiben wir a^-1
- Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Ordnung der reellen Zahlen Die kleiner-Beziehung $a < b$, oder auch $b > a$ hat folgende Eigenschaften:

- Trichotomie: Es gilt immer genau eine Beziehung $a < b$, $a = b$ $a > b$
- Transitivität: Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$

Beispiele, Folgerungen

Rechenregeln für Potenzen $b^n := b \cdot b \cdot \ldots \cdot b$ $n \in \mathbb{N}$ Faktoren

$$b^0 := 1$$
$$b^-n = \frac{1}{b^n}$$
$$b^n \cdot b^m = b^{n+m}$$
$$(b^n)^m = b^{n \cdot m}$$
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Betrag einer reellen Zahl

$$|a| := \begin{cases} a & a \leq 0 \\ -a & a > 0 \end{cases}$$

Eigenschaften

$$|a| \geq 0 \, \forall \, a \in \mathbb{R}$$
$$|a| = 0$$

nur für $a = 0$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Dreiecksungleichung

2.2.2 Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

2.2.3 binomische Formeln:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Allgemein:

$$(a \pm b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} (\pm)^k$$

(Klammer) Binominial koeffizienten

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k}$$

2.2.4 Pascalsches Dreieck

$$
\begin{gathered}
n = 0 \; 1 \\
n = 1 \; 1 \; 1 \\
n = 2 \; 1 \; 2 \; 1 \\
n = 3 \; 1 \; 3 \; 3 \; 1 \\
n = 4 \; 1 \; 4 \; 6 \; 4 \; 1 \\
n = 5 \; 1 \; 5 \; 10 \; 10 \; 5 \; 1
\end{gathered}
$$

2.2.5 Beweisprinzip der Vollständigen Induktion

Beispiel Für alle $n \in \mathbb{N}$ soll die Summe der ersten n Quadratzahlen bewiesen werden

$$A(n) := \sum_{k=1}^{n} k^1 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

1. Induktionsanfang $A(1) = 1$ ✓
2. Induktionsschritt Falls $A(k)$ richtig ist, wird gezeigt, dass auch $A(k+1)$ richtig ist

$$A(k+1) = \underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + k^2}_{A(n)} + (k+1)^2 = \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$$

$$
\begin{gathered}
= \frac{1}{6}(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1)) \\
= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \\
= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)
\end{gathered}
$$

2.2.6 Quadratische Ergänzung

$$
\begin{gathered}
x^2 + ax + b = 0 \\
x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}
\end{gathered}
$$

3 Folgen und Reihen

3.1 Folge

3.1.1 Definition

Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuweist.

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

3.1.2 Beispiele

- die natürlichen Zahlen selbst

$$n_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 3, \ldots)$$

- alternierende Folge

$$((-1)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, \ldots)$$

- harmonische Folge

$$(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$$

- inverse Fakultäten

$$(\frac{1}{n!})_{n\in\mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots)$$

- Folge echter Brüche

$$(\frac{n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots)$$

- geometrische Folge

$$(q^n)_{n\in\mathbb{N}} = (q, q^2, q^3, \ldots)$$

  charakteristische Eigenschaft der geometrischen Folge $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ q heißt Quotient der Folge allgemeines Bildungsgesetz $a_n = a_1 q^{n-1}$

- Folge der Ungeraden Zahlen (arithmetische Folge)

$$(1 + (n-1) * 2)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 3, 5, 7, \ldots)$$

  $a_{n+1} - a_n = d$ d heißt Differenz der Folge allgemeines Bildungsgesetz $a_n = a_1 + (n-1)d$

- "zusammengesetzte Folgen" (hier Exponentialfolge)

$$((1 + \frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}} = (2, \frac{3}{2}^2, \frac{4}{3}^2, \ldots)$$

3.1.3 Frage

Kann man etwas über das Verhalten von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ aussagen, ohne tatsächlich "die Reise ins Unendliche" anzutreten"

3.1.4 Beschränktheit

Eine Folge heißt nach oben beschränkt, wenn es eine obere Schranke B für die Flieder der Folge gibt: $a_n \leq B$, d.h. $\exists B : a_n \leq B \,\forall\, n \in \mathbb{N}$ Nach unten beschränkt: $\exists A : A \geq a_n \,\forall\, n \in \mathbb{N}$

3.1.5 Monotonie

- Eine Folge heißt monoton steigend, wenn aufeinanderfolgende Glieder mit wachsender Nummer immer größer werden: $a_n \leq a_{n+1} \,\forall\, n \in \mathbb{N}$
- streng monoton steigend $a_n < a_{n+1} \,\forall\, n \in \mathbb{N}$
- monoton fallend $a_n \geq a_{n+1} \,\forall\, n \in \mathbb{N}$
- streng monoton fallend $a_n > a_{n+1} \,\forall\, n \in \mathbb{N}$

3.1.6 Konvergenz

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a oder hat den Grenzwert a, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a - a_n| < \epsilon \,\forall\, n > N(\epsilon)$ Wir schreiben $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Beispiel

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}) = 1$

Grenzwertfreie Konvergenzkriterien

- jede monoton wachsend, nach oben beschränkte Folge ist konvergent, entsprechend ist jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge konvergent
- Cauchy-Kriterium: Eine Folge $(\mathrm{a_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a_m| < \epsilon \,\forall\, n, m > N(\epsilon)$$

Für harmonische Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$

$$|a_n - a_m| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| = |\frac{m-n}{mn}| < |\frac{m}{mn}| = \frac{1}{n} < \epsilon \text{für} n > N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$$

3.2 Reihen (unendliche Reihen)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, Die Folge

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, n \in \mathbb{N}$$

der Partialsumme heißt (unendliche) Reihe und wird oft mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet Konvergiert die Folge $(\mathrm{s_n})_{\mathrm{n}\in\mathbb{N}}$, so wird ihr Grenzwert ebenfalls mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet

3.2.1 Bemerkung

Ergebnisse für Folgen gelten auch für Reihen

3.2.2 Rechenregeln für konvergente Reihen

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ zwei konvergente Reihen und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind auch die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + b_k, \sum_{k=1}^{\infty} a_k - b_k, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$$

konvergent und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Bemerkung: Für das Produkt zweier unendlicher Reihen gilt i.A. keine so einfache Formel

3.2.3 Beispiel

geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{m \to \infty} (\sum_{n=0}^{m} q^n) = \lim_{m \to \infty} \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \text{für} q < 1, q \neq 0$$

3.2.4 Absolute Konvergenz

Eine Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

heißt absolut konvergent, wenn die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert. Absolut konvergente Reihen können ohne Änderung der Grenzwertes umgeordnet werden, d.h. jede ihrer Umordnungen konvergiert wieder und zwar immer gegen den gleichen Grenzwert.

4 TODO what was done after this? (Funktionen? (only?))

5 Funktionen

5.1 Normal-Hyperbel

$$y = \frac{1}{x} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

5.1.1 Physik-Beispiel

- Boyle-Mariettsches Gesetz
- Druck p eines idealen Gases in einem Volumen V bei konstanter Temperatur und Gasmenge: $p = \frac{\text{cons}}{V}$

5.2 kubische Parabel

$$y = ax^3$$

5.2.1 Physik-Beispiel

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

5.2.2 Verallgemeinerung

$$y = ax^n \quad n \in \mathbb{N}$$

5.3 $y = ax^{-2}$

5.3.1 Physik-Beispiel

Coulomb Gesetz der Elektrostatik

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

5.4 Symmetrieeigenschaften der Potenzfunktionen

$$y = f(x) = x^n$$

- gerade n: f ist symmetrisch, d.h. $f(-x) = f(x)$
- ungerade n: f ist antisymmetrisch, d.h. $f(-x) = -f(x)$

5.5 Potenzfunktionen als "Bausteine" in zusammengesetzten Funktionen

Polynom m-ten Grades

$$y = P_m(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$$

5.6 Rationale Funktionen

$$y = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q_n(x) \neq 0\}$$

$P_m(x)$ Polynom m-ten Grades, $Q_n(x)$ n-ten Grades

5.6.1 Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

"Lorentz-Verteilung beschreibt die Linienbreite einer Spektrallinie"

5.7 Trigonometrische Funktionen

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \cot\beta = \frac{1}{\cot\alpha}$$
$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}$$
$$\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 = 1$$

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
0	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	$\to\infty$

5.7.1 TODO Table Formula?

5.7.2 TODO Veranschaulichung am Einheitskreis

$\sin\alpha = y$ Periodische Erweiterung auf $\alpha < 0,\ \alpha > \frac{\pi}{2}$
Periodische Funktion:

$$\sin x + 2\pi = \sin x \quad \text{Periode: } 2\pi$$
$$\cos x + 2\pi = \cos x \quad \text{Periode: } 2\pi$$

Beispiel

$$\sin x + \pi = -\sin x$$

$$\cos x + \pi = -\cos x$$

$$\cos x = \sin \frac{\pi}{2} - x$$

TODO Graphik

5.7.3 Tangens/Cotangens

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

TODO Graphik

5.7.4 Additionstheoreme

$$\sin \alpha \pm \beta = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha \pm \beta = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos \alpha^2 - \sin \alpha^2 = 1 - 2 \sin \alpha^2 = 2 \cos \alpha^2 - 1$$

5.8 Exponentialfunktionen

$$y = f(x) = b^x \quad b > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

5.8.1 Rechenregeln

$$b^x b^y = b^{x+y} \quad (b^x)^y = b^{xy}$$

natürliche Exponentialfunktion mit Zahl e als Basis

$$y = f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

5.8.2 Beispiel radioaktiver Zerfall

$$N(t) = N(0) e^{\frac{-t}{\tau}}$$

5.9 Kosinus hyperbolicus

$$y = \cosh x := \frac{1}{2} \left(e^x + e^{-x} \right)$$

5.10 Sinus hyperbolicus

$$y = \sinh x := \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

Es gilt:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

5.11 Tangens hyperbolicus

$$y = \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

5.12 Cotangens hyperbolicus

$$y = \coth x := \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

5.13 Wurzelfunktion

Umkehrfunktion der Potenzfunktionen

$$y = f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{Z}$$

Wurzelfunktion:

$$y = f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

n gerade: vor der Umkehrung ist die Einschränkung des Definitionsbereichs auf $x \geq 0$ notwendig

5.13.1 Beispiel

$$y = f(x) = x^2 + 1 \quad x \geq 0$$

Umkehrfunktion:

$$y = \sqrt{x - 1}$$

6 Funktionen mit Ecken und Sprüngen

6.1 Betragsfunktion

$$y = |x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

6.2 Heavyside-Stufenfunktion

$$y = \Theta(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

6.2.1 TODO Graphik

6.2.2 Beispiel

$$y = \Theta(x)\Theta(-x + a)$$

TODO Graphik

6.3 "symmetrischer Kasten" der Breite $2a$ und der Höhe $\frac{1}{2a}$ (Dirak Delta Funktion)

$$\Theta_a(x) := \frac{\Theta(x + a)\Theta(-x + a)}{2a}$$
$$\lim_{a \to 0} \Theta_a = \text{"(Dirak) }\delta\text{-Funktion"}$$

6.3.1 TODO Graphik

7 Verkettung von Funktionen

Seinen

$$f : D_f \to \mathbb{R}$$
$$g : D_g \to \mathbb{R}$$

mit $w_g \subseteq D_f$, dann ist die Funktion $f \circ g : D_g \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \quad \forall\, x \in D_g$$

7.1 Beispiel

$$z = g(x) = 1 + x^2 \quad W_g : z \geq 1$$
$$y = f(z) = \frac{1}{z} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

also $W_g \subset D_f$, sodass

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

7.2 Spiegelsymmetrie (Spiegelung an der y-Achse, d.h. $x \to -x$)

Eine Funktion $f(x)$ heißt

- gerade(symmetrisch) wenn $f(-x) = f(x)$
- ungerade (antisymmetrisch) wenn $f(-x) = -f(x)$

7.2.1 Beispiel

gerade Funktionen

- $f(x) = x^{2n} \quad n \in \mathbb{N}$
- $f(x) = \cos x$
- $f(x) = |x|$

ungerade Funktionen

- $f(x) = x^{2n+1}$
- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \sin(x)$

keins von beidem

- $f(x) = sx + c$

7.2.2 Zerlegung

Jede Funktion lässt sich in einen geraden und ungeraden Anteil zerlegen

- gerader Anteil:
$$f_+(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) = f_+(-x)$$
- ungerader Anteil:
$$f_-(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) = -f_-(-x)$$
- check:
$$f_+(x) + f_-(x) = f(x) \quad \checkmark$$

8 Eigenschaften von Funktionen

8.1 Beschränktheit

f heißt nach oben beschränkt im Intervall $[a, b]$, wenn es eine obere Schranke gibt, d.h.

$$\exists B \in \mathbb{R} : f(x) \leq B \, \forall \, x \in [a, b]$$

analog: nach unten beschränkt

$$\exists A \in \mathbb{R} : f(x) \geq A \, \forall \, x \in [a, b]$$

8.1.1 Beispiel

$f(x) = x^2$ durch $A = 0$ nach unten beschränkt
$f(x) = \Theta(x)$ $B = 1$, $A = 0$

8.2 Monotonie

Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ heißt monoton steigend im Intervall $[a, b] \subseteq D_f$, wenn aus $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$ stets folgt $f(x_1) \leq f(x_2)$ Gilt sogar $f(x_1) < f(x_2)$ so heißt f streng monoton steigend im Intervall $[a, b]$ Analog heißt f monoton (streng monoton) fallend, wenn stets folgt $f(x_1) \geq f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$

8.2.1 Beispiel

$f(x) = x^3 \quad$ streng monoton steigend

9 Umkehrfunktion

Sei $f : D_f \to W_f$ eineindeutig(bijektiv), dann kann man die Gleichung $y = f(x)$ eindeutig nach x auflösen

$$x = f^{-1}(y) := g(y) \qquad D_g = W_f, \quad W_g = D_f$$

$$f^{-1} = g : W_f \to D_f$$

Die ursprüngliche Abbildung $y = f(x)$ und die Umkehrabbildung $x = f^{-1}(y) = g(y)$ heben sich in ihrer Wirkung auf

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

9.1 Graph der Umkehrfunktion

1. Gegebenenfalls Einschränkung von D_f, sodass eine bijektive Funktion vorliegt
2. Auflösen der Gleichung $y = f(x) \implies x = f^-1(y)$
3. Umbenennung der Variablen: die unabhängige Variable y wird wieder x genannt, die abhängige wieder y: $y = f^{-1}(x)$

9.1.1 Beispiel $y = x^2$

1. Einschränkung D_f auf $x \geq 0$
2. $y = x^2, x \geq 0 \iff x = \sqrt{y}$
3. Umbenennung: $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

9.1.2 Graphisch

Spiegelung an $y = x$

10 what after this?

11 Integral und Differenzialrechnung

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Hauptsatz:

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$	f(x)	Bemerkungen
const	0	
x^r	rx^{r-1}	$r \in \mathbb{R}$
$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	x^r	$-1 \neq r \in \mathbb{R}$

11.1 Die Kunst des Integrierens

$$\int_1^e \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x \mid_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\mathrm{d}t = \sin t \mid_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x \mid_a^b$$

11.2 Ableiten über Umkehrfunktion

$$\frac{\mathrm{d}f^-1(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{f'(f^-1(x))}$$

11.3 Integrationsregeln

11.3.1 Lineare Zerlegung

$$\int_{a_1}^{a_2} cf(x) + bg(x)\mathrm{d}x = c\int_{a_1}^{a_2} f(x)\mathrm{d}x + b\int_{a_1}^{a_2} g(x)\mathrm{d}x$$

Beispiel

$$F = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}x - \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \mid_0^1 - \frac{1}{3}x^3 \mid_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^2\mathrm{d}x = \int_0^1 1 - 2x^2 + x^4\mathrm{d}x = \int_0^1 1\mathrm{d}x - 2\int_0^1 x^2\mathrm{d}x + \int_0^1 x^4\mathrm{d}x = \frac{8}{15}$$

11.3.2 Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\mathrm{d}y$$

merke: $\frac{\mathrm{g(x)}}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = g'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$

$$y = g(x), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g'(x), \quad \mathrm{d}y = g'(x)\mathrm{d}x$$

Beweis F sei die Stammfunktion zu f, $F' = f$

$$(F(g(t)))' = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t = F(g(t))\mid_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F(x)\mid_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\mathrm{d}y$$

Beispiel

- $$\int_1^5 \sqrt{2x+1}\mathrm{d}x = \int_1^9 \sqrt{y}\frac{1}{2}\mathrm{d}y = \frac{26}{3}$$
  $$y = 2x - 1 \quad y' = g'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g'(x) = 2 \implies \mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x \implies \frac{1}{2}\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$
- $$\int_0^b te^{-\alpha t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\alpha}\int_0^{-\alpha b^2} e^y\mathrm{d}y = -\frac{1}{2\alpha}(e^{-\alpha b^2} - 1)$$
  $$y = g(t) = -\alpha^2 \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2\alpha t \implies \mathrm{d}y = -2\alpha t\mathrm{d}t \implies \mathrm{d}t = -\frac{1}{2\alpha t}\mathrm{d}y$$
- $$\int_0^T \cos\omega t\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega T} \mathrm{d}y$$
- $$\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \ln|y|\mid_{g(a)}^{g(b)}$$
- $$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax \pm b} = \frac{1}{a}\ln|ax \pm b| + c$$
- $$\int_a^b g^n(x)g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} y^n\mathrm{d}y$$

11.3.3 Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)\mid_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

Beweis

$$F(x) = f(x)g(x) \implies F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

$$f(x)g(x) \mid_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

$$f(x)g(x) \mid_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

Beispiel

- $$\int_a^b x \ln x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) \mid_a^b - \int_a^b \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) \mid_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b x\mathrm{d}x$$

- $$\int 1 \ln x \mathrm{d}x = x \ln x - \int x\frac{1}{x}\mathrm{d}x = x \ln x - \int 1\mathrm{d}x = x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

- $$\int x \sin x \mathrm{d}x = -x \cos x + \int \cos x \mathrm{d}x = -x \cos x + \sin x$$

Kreisfläche

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t t d = \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} \cos t \cos t \mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\arcsin b + b\sqrt{1-b^2} - \arcsin a - a\sqrt{1$$

$$x = \sin t \implies t = \arcsin x, \quad \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{d}t} = \cos t, \quad \mathrm{d}x = \cos t \mathrm{d}t$$

$$\int \cos t \cos t = \sin t \cos t + \int \sin^2 t \mathrm{d}t = \sin t \cos t + \int 1 - \cos^2 t \mathrm{d}t = \frac{\sin t \cos t + t}{2}$$

In Polarkoordinaten

$$y = \sin t$$

$$x = \cos t$$

$$\mathrm{d}x = \sin t \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}A = y\mathrm{d}x = \sin^2 t \mathrm{d}t$$

$$A = \int_0^\pi \sin^2 t = \frac{\pi}{2}$$

Zerlegung

$$\mathrm{d}A = 2\pi r \mathrm{d}r$$

$$\int \mathrm{d}A = \int_0^R 2\pi r \mathrm{d}r = 2\pi \frac{1}{2} r^2 \mid_0^R = \pi R^2$$

11.3.4 Weitere Integrationstricks

Partialbruchzerlegung $\implies$ Integration rationaler Funktionen

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{1-x^2} \text{ mit } \{-1,1\} \notin [a,b]$$

$$1 - x^2 = (1-x)(1+x)$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x} = \frac{\alpha(1+x) + \beta 1 - x}{(1-x)(1+x)} = \frac{\alpha + \beta + x(\alpha - \beta)}{1-x^2} \implies \alpha = \beta \frac{1}{2}$$

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}(\int_a^b \frac{1}{1+x} + \int_a^b \frac{1}{1+x})$$

11.4 Uneigentliche Integrale

11.4.1 Unendliches Integralintervall

Definition Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Intervall $[a, R),\ a < R < \infty$ (Riemann-)integrierbar ist. Falls der Grenzwert $\lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\mathrm{d}x$ existiert setzt man

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\mathrm{d}x$$

Beispiel

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \begin{cases} \frac{1}{s-1} & s > 1 \\ \infty & s \leq 1 \end{cases}$$

11.5 Cauchy Hauptwert

$$P \int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x := \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^c f(x)\mathrm{d}x$$

P := "principal Value"

$$\int_{-\infty}^\infty x^{2n-1}\mathrm{d}x = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^c x^{2n-1}\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty} \int_c^b x^{2n-1}\mathrm{d}x = \infty$$

$$P \int_{-\infty}^\infty x^{2n-1}\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} \int_{-c}^c x^{2n-1}\mathrm{d}x = \lim_{c\to\infty} (\frac{1}{2\pi}(\underbrace{c^{2n} - (-c)^{2n}}_{=0})) = 0$$

11.5.1 Unbeschränkter Integrand

Situation: Integrand wird an einer Stelle $x_0 \in [a, b]$ unbeschränkt

Definition Sei $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[a + \eta, b],\ 0 < \eta < b - a$ (Riemann-)integrierbar ist. Falls der Grenzwert $\lim_{\eta\to 0} \int_{a+\eta}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ existiert, heißt das Integral $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ konvergent

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to 0} \int_{a+\eta}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

Beispiel

$$\int_0^b \frac{1}{x^{1-\epsilon}}\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to 0} \int_\eta^b \frac{1}{x^{1-\epsilon}}\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to 0} \frac{1}{\epsilon}(b^\epsilon - \eta^\epsilon) = \frac{1}{\eta} b^\epsilon$$

Principal value

$$P \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to 0} \int_a^{x_0-\eta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0+\eta}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

11.6 Integralfunktionen

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}x}{x}$$
$$\arctan x = \int_0^y \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2}$$
$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

Elliptisches Integral

11.7 Gamma-Funktion

11.7.1 Definition

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\mathrm{d}t$$

Satz: Es gilt $\Gamma(1) = 1,\ \Gamma(m + 1) = m!\,\forall\, n \in \mathbb{N},\ x\Gamma(x) = \Gamma(x + 1)$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}t = -e^{-t}\ |_0^\infty = 1$$

$$\Gamma(x + 1) = \int_\epsilon^R t^x e^{-t}\mathrm{d}t = \underbrace{t^x e^{-t}\ |_\epsilon^R}_{R\to\infty t} + x \int_\epsilon^R t^{x-1} e^{-t}\mathrm{d}t$$

$$f(t) = -e^{-t} \impliedby f'(t) = e^{-t}$$
$$g(t) = t^x \implies xt^{t-1} = g'(t)$$

12 Vektoren

12.1 $\mathbb{R}^3$

12.1.1 Orthonormal

Länge eins, senkrecht aufeinander und sie bilden eine Basis, also jeder Vektor hat genau eine Darstellung:

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} = \sum_{k=1}^{3} a_k\vec{e_k}a = \underbrace{a_k e_k}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

12.2 Skalarprodukt und Kronecker-Symbol

12.2.1 Motivation: mechanische Arbeit

12.2.2 Definition

$$< \vec{a}, \vec{b} >= \vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

12.2.3 Spezialfälle

$$\vec{a}||\vec{b} \implies \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$$

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ antiparallel:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \implies \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

12.2.4 Betrag:

$$< \vec{a}, \vec{b} >= |\vec{a}|^2 = a^2$$

12.2.5 Eigenschaften

- Kommutativgesetz
$$< \vec{a}, \vec{b} >=< \vec{b}, \vec{a} >$$
- Homogenität
$$< \lambda\vec{a}, \vec{b} >= \lambda < \vec{a}, \vec{b} >=< \vec{a}, \lambda\vec{b} >$$
- Distributivgesetz
$$< \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} >=< \vec{a}, \vec{c} > + < \vec{b}, \vec{c} >$$
$$< \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} >=< \vec{a}, \vec{b} > + < \vec{a}, \vec{c} >$$
- $$< \vec{a}, \vec{a} >\geq 0 \quad < \vec{a}, \vec{a} >= 0 \iff \vec{a} = 0$$

12.2.6 Orthonormalbasis der kartesischen Koordinatensystem

Basisvektoren $\vec{e_k}, k = 1, 2, 4$ Orthogonalität $< \vec{e_k}, \vec{e_l} >= 0 \quad l \neq k$ Für $k = l : \quad < \vec{e_k}, \vec{e_k} >= \cos(0) = 1$ Orthonormalität

12.2.7 Kronecker Symbol

$$\delta_{kl} := \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

Entspricht Komponenten der Einheitsmatrix Symmetrie gegen Vertauschung der Indizes \$$\delta_{\mathrm{kl}}$=$\delta${lk} Spur:

$$\delta_{kk} = \underbrace{\sum_{k=1}^{3} \delta_{kk}}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}} = 3$$

12.2.8 Komponentendarstellung des Skalarprodukts

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^{3} a_k \vec{e_k} = \underbrace{a_k \vec{e_k}}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

$$\vec{b} = \sum_{k=1}^{3} b_k \vec{e_k} = \underbrace{b_k \vec{e_k}}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

$$< \vec{a}, \vec{b} >= (\sum_{k=1}^{3} a_k \vec{e_k}) \cdot (\sum_{k=1}^{3} b_k \vec{e_k}) = \sum_{k,l=1}^{3} a_k b_k \underbrace{< \vec{e_k}, \vec{e_l} >}_{=\delta kl} = \sum_{k=1}^{3} a_k b_k$$

13 Matrizen

13.1 Determinante

$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \right)$ Summe über alle Permutationen von S_n, Vorzeichen der Permutation ist positiv, wenn eine gerade Anzahl an Vertauschungen notwendig ist, und entsprechend negativ bei einer ungeraden Anzahl.

13.2 Homogenes Gleichungssystem

$$A\vec{x} = 0 \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \underbrace{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix}}_{\vec{a_1}} + x_2 \underbrace{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{matrix}}_{\vec{a_2}} + x_3 \underbrace{\begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{matrix}}_{\vec{a_3}} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

sind $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ linear unabhängig, dann gibt es nur die Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ Nichttriviale Lösung nur wenn $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ linear abhängig $\implies \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sodass z.B. $\vec{a_1} = \lambda \vec{a_2} + \mu \vec{a_3}$ Wenn $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ linear unabhängig, dann $\det A = 0$.

13.3 Levi Civita Symbol

$$\varepsilon_{ijk\dots} = \begin{cases} +1, & \text{falls } (i,j,k,\dots) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3,\dots) \text{ ist,} \\ -1, & \text{falls } (i,j,k,\dots) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3,\dots) \text{ ist,} \\ 0, & \text{wenn mindestens zwei Indizes gleich sind.} \end{cases} \tag{1}$$

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \prod_{1 \le p < q \le n} \frac{i_p - i_q}{p - q} \tag{2}$$

$$\varepsilon_{k,l,m} = \delta_{k1}(\delta_{l2}\delta_{m3} - \delta_{l3}\delta_{m2}) + \delta_{k2}(\delta_{l3}\delta_{m1} - \delta_{l1}\delta_{m3}) + \delta_{k3}(\delta_{l1}\delta_{m2} - \delta_{l2}\delta_{m1}) \tag{3}$$

13.4 Vektorprodukt / Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$= \vec{e}_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{6}$$

$$= (a_2\, b_3 - a_3\, b_2)\, \vec{e}_1 + (a_3\, b_1 - a_1\, b_3)\, \vec{e}_2 + (a_1\, b_2 - a_2\, b_1)\, \vec{e}_3\,, \tag{7}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e_k} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e_k}$$

13.5 Spatprodukt

$$|(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}| = \text{Volumen eines Spats}$$

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a})\vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = -(\vec{b} \times \vec{a})\vec{c}$$

13.6 Geschachteltes Vektorprodukt

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{v}) = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$$

13.6.1 Beweis

$$\vec{a} = (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times (\varepsilon_{ijk} b_i c_j \vec{e_k}) = \varepsilon_{pqm} a_p \varepsilon_{ijk} b_i c_j \vec{e_m}$$

14 misc

- mathe für physiker vs. analysis
- klausuren gebündelt
- auslandssemester