

# Theoretische Physik I (Hebecker)

Robin Heinemann

24. Oktober 2017

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Semesterüberblick</b>	<b>3</b>
1.1 Mathe . . . . .	4
<b>2 Kinematik des Massenpunktes</b>	<b>4</b>
2.1 Kinematik der Massenpunktes in einer Dimension . . . . .	4
2.1.1 Graphik . . . . .	4
2.1.2 Üben dieser Logik an unserem Beispiel . . . . .	4
2.2 Grundbegriffe der Differenzial und Integralrechnung . . . . .	4
2.2.1 Funktion . . . . .	4
2.2.2 Differentiation oder Ableitung . . . . .	5
2.2.3 Integrieren . . . . .	6
2.3 Kinematik in mehreren Dimensionen . . . . .	7
2.3.1 Zweidimensionale Bewegung . . . . .	7
2.3.2 Dreidimensionale Bewegung . . . . .	7
2.4 Vektorräume . . . . .	7
2.4.1 Einfachstes Beispiel . . . . .	8
2.4.2 Unser Haupt-Beispiel . . . . .	8
2.5 Kinematik in $d > 1$ . . . . .	8
2.5.1 Beispiel für 3-dimensionale Trajektorie . . . . .	8
2.6 Skalarprodukt . . . . .	9
2.6.1 Symmetrische Bilinearform . . . . .	9
2.6.2 Norm (Länge) eines Vektors . . . . .	9
2.7 Abstand zwischen Raumpunkten . . . . .	9
2.7.1 Spezialfall . . . . .	10
2.7.2 Infinitesimaler Abstand . . . . .	10
2.8 Bogenlänge und begleitendes Dreibein . . . . .	10
2.8.1 Beispiel in $d=2$ . . . . .	11
2.9 Vektorprodukt . . . . .	11
2.10 Binormalenvektor . . . . .	12
2.10.1 Zur Information . . . . .	12
<b>3 Grundbegriffe der Newtonsche Mechanik</b>	<b>12</b>
3.1 Newtonsche Axiome . . . . .	12
3.2 Trajektorie . . . . .	12
3.3 Differentialgleichungen . . . . .	12

3.3.1	1. Ordnung . . . . .	12
3.3.2	Anfangswertproblem . . . . .	13
3.3.3	partielle Ableitung . . . . .	13
3.3.4	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	13
3.3.5	Beispiele . . . . .	14
3.3.6	Separation der Variablen . . . . .	14
3.3.7	System von Dgl. . . . .	14
3.3.8	Systeme von $n$ gewöhnlicher Dgl. $p$ -ter Ordnung . . . . .	15
3.3.9	Erste physikalische Beispiele . . . . .	15
3.4	Taylorentwicklung . . . . .	17
3.4.1	Interessantes „Gegenbeispiel“ . . . . .	17
3.5	Harmonischer Oszillator . . . . .	18
3.5.1	Eindimensionales System . . . . .	18
3.6	Lineare Differentialgleichungen . . . . .	18
3.6.1	Zusammenfassung / Verallgemeinerung auf $n > 1$ . . . . .	19
3.6.2	Finden der partikulären Lösung . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Erhaltungssätze in Newtonscher Mechanik</b> . . . . .	<b>20</b>
4.1	Impulserhaltung . . . . .	20
4.2	Drehimpulserhaltung . . . . .	20
4.3	Konservative Kräfte und Energieerhaltung . . . . .	22
4.3.1	Energieerhaltung . . . . .	22
4.3.2	Kriterium für Konservativität . . . . .	23
4.4	Kurvenintegrale . . . . .	25
4.5	Satz von Stokes . . . . .	25
4.6	Energieerhaltung für Systeme von Massenpunkten . . . . .	26
4.7	Eindimensionale Bewegung . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Harmonischer Oszillator in komplexen Zahlen</b> . . . . .	<b>27</b>
5.1	Komplexe Zahlen . . . . .	27
5.1.1	Ziel . . . . .	27
5.1.2	Naive Definition . . . . .	28
5.1.3	präzisere Definition . . . . .	28
5.1.4	Zusammenfassung: . . . . .	30
5.1.5	Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	30
5.1.6	Quaternionen . . . . .	30
5.2	Anwendung auf harmonischen Oszillator . . . . .	30
5.3	harmonischer Oszillator mit periodisch treibender Kraft . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Symmetrie der Raumzeit</b> . . . . .	<b>32</b>
6.1	Matrix, Determinante, Inverse Matrix . . . . .	32
6.2	Der Euklidische Raum . . . . .	34
6.3	Symmetriegruppe (M) . . . . .	36
6.4	Tensoren . . . . .	38
6.5	Galilei-Transformationen . . . . .	40
6.6	Affiner Raum . . . . .	40
6.7	Dynamik . . . . .	41
6.8	Zusammenfassung: . . . . .	41
<b>7</b>	<b>Wechsel der Koordinatensystems und Scheinkräfte</b> . . . . .	<b>42</b>

7.1	Wechsel des Koordinatensystems im euklidischen Raum . . . . .	42
7.2	Aktive und Passive Beschreibung von Symmetrien . . . . .	43
7.3	Beschleunigte, nichtrotierende Koordinatensysteme . . . . .	43
7.4	Kleine Drehungen . . . . .	44
7.5	Rotierendes Koordinatensystem . . . . .	45
7.6	Trägheitstensor . . . . .	46
<b>8</b>	<b>Zentralkraftproblem</b>	<b>46</b>
8.1	Motivation . . . . .	46
8.2	Zweikörperproblem . . . . .	47
8.3	Allgemeine Koordinatensysteme . . . . .	48
8.4	Zentralkraftproblem . . . . .	48
8.5	Qualitative Lösung des Zentralkraftproblems . . . . .	50
8.6	Kepler-Problem: Bahnform . . . . .	50
8.7	Kegelschnitte . . . . .	51
8.8	Die Trajektorie . . . . .	52
8.8.1	Ellipse . . . . .	53
8.9	Umlaufzeit . . . . .	53
<b>9</b>	<b>Zerfalls und Stoßprozesse</b>	<b>54</b>
9.1	Stoßparameter und Streuwinkel . . . . .	54
9.2	Wirkungsquerschnitt . . . . .	55
9.2.1	Differentieller Wirkungsquerschnitt . . . . .	55
9.3	Rutherford-Streuung . . . . .	56
9.4	Teilchenzerfall . . . . .	57
9.5	Schwerpunkts vs Laborsystem . . . . .	57
9.6	Elastischer Stoß . . . . .	58
9.7	Elastischer Stoß am ruhenden Target . . . . .	58
<b>10</b>	<b>Gravitation ausgedehnter Körper</b>	<b>59</b>
10.1	Potential einer Massenverteilung . . . . .	59
10.2	Gravitationspotential einer Kugelschale . . . . .	60
10.3	Divergenz und Gaußscher Satz . . . . .	61
10.4	Gaußscher Satz und Gravitation . . . . .	63

## 1 Semesterüberblick

1. Newtonsche Mechanik
2. Lagrange / Hamilton Mechanik / Statistik / Kontinua
3. Elektrodynamik / Spezielle Relativitätstheorie
4. Quantenmechanik
5. Thermodynamik / Quantenstatistik
6. Allgemeine Relativitätstheorie / Kosmologie
7. Quantenfeldtheorie I (ggf. 5.)
8. Quantenfeldtheorie II (ggf. 6.  $\Leftarrow$  Stringtheorie / Teilchenphysik / Supersymmetrie)

9. Masterarbeit

10. Masterarbeit

## 1.1 Mathe

wichtig:

- Gruppentheorie
- Differentialgeometrie

## 2 Kinematik des Massenpunktes

Massenpunkt / Punktmasse - (selbstevidente) Abstraktion Kinematik: Beschreibung der Bewegung (Ursachen der Bewegung  $\rightarrow$  Dynamik)

### 2.1 Kinematik der Massenpunktes in einer Dimension

#### 2.1.1 Graphik

- Ort:  $x$
- zu Zeit  $t$ :  $x(t)$
- Geschwindigkeit:  $v(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt} \equiv \dot{x}(t)$
- Beschleunigung:  $a(t) \equiv \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$
- Beispiel:  $x(t) \equiv x_0 + v_0 t + \frac{a_0}{2} t^2$ ,  $v(t) = v_0 + a_0 t$ ,  $a(t) = a_0$
- Umgekehrt: Integration, z.B. von Geschwindigkeit zu Trajektorie: Anfangsposition muss gegeben sein, z.B.  $x(t_0) \equiv x_0$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t') dt'$$

Man prüft leicht  $\dot{x}(t) = v(t)$

- Es gibt keine andere Funktion  $\tilde{x}(t)$  mit  $\dot{\tilde{x}}(t) = v(t)$  und  $\tilde{x}(t_0) = x_0$

Analog: Von Beschleunigung zur Geschwindigkeit, und dann weiter zur Trajektorie

#### 2.1.2 Üben dieser Logik an unserem Beispiel

Gegeben:  $a(t) = a_0$ ,  $t_0 = 0$ ,  $v_0, x_0$

$$\Rightarrow v(t) = v_0 + \int_0^t a_0 dt' = v_0 + a_0 t$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + a_0 t') dt' = x_0 + v_0 t + \frac{a_0}{2} t^2$$

### 2.2 Grundbegriffe der Differenzial und Integralrechnung

#### 2.2.1 Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$$

### 2.2.2 Differentiation oder Ableitung

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$df$  bezeichnet den in  $\Delta x$  linearen Anteil des Zuwachs  $\Delta f \equiv f(x + \Delta x) - f(x)$ .

- Aus  $\Delta f = f'(x)\Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2)$  folgt  $df = f'(x)\Delta x$
- Anwendung auf die Identitätsabbildung:  $x \mapsto x \implies dx = \Delta x$

$$\implies df = f'(x)dx \text{ oder } \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

Dies ist eigentlich nur eine Schreibweise für  $f'(x)$ , aber nützlich, weil bei kleinen  $\Delta x$   $df \simeq \Delta f$  (Schreibweise beinhaltet intuitiv die Grenzwert-Definition)

- $f'(x)$  wieder Funktion  $\implies$  analog:  $f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$
- Praxis

$$(f \cdot g)' = f'g + g'f \text{ (Produkt/Leibnizregel)}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \text{ (Kettenregel)}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \text{ (Ableitung der Inversen Funktion)}$$

- Begründung (nur zum letzten Punkt)

$$(f^{-1})'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d(f(y))} = \frac{dy}{f'(y)dy} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

- Schöne Beispiele

$$(x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$$

$$\arctan'(x) \equiv (\tan^{-1}(x))' = \frac{1}{\tan^{-1}(y)} \text{ wobei } y = \tan^{-1}(x)$$

Besser:

$$\tan^{-1}(y) = \left( \sin y \frac{1}{\cos y} \right)' = \cos y \frac{1}{\cos y} + \sin y \left( \frac{1}{\cos y} \right)' = 1 + \sin y \left( -\frac{1}{\cos^2 y} \right) (-\sin y) =$$

$$1 + \tan^2 y = 1 + x^2 \implies \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

- Verknüpfung

$$f \circ g : x \mapsto f(g(x))$$

- Inverse

$$f^{-1} : x = f(y) \mapsto y$$

- Grenzwerte:

- nützliche Regel: l'Hospital ( $\frac{0}{0}$ )

Falls  $\lim_{x \rightarrow x_0} f, g = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'}{g'}$  existiert, so gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'}{g'}$

- weitere nützliche Regel

$$\lim_{\substack{\text{Beschränkt} \\ \text{Unbeschränkt und monoton wachsend}}} = 0$$

- Beispiel:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{y}}{\frac{1}{y}}$$

- Kürzen unter lim

- Beispiel:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2}$$

### 2.2.3 Integrieren

#### Fundamentalsatz der Analysis

$$\int_a^y f(x) dx = F(y) \quad \& \quad F'(y) = f(y)$$

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

(→ saubere Definition über Riemannsches Integral)

#### Praxis

##### Partielle Integration

$$\int_a^y f(x) g'(x) dx = f(y) g(y) - \int_a^y f'(x) g(x) dx$$

**Substitution** Unter Annahme einer invertierbaren Funktion  $x : y \mapsto x(y)$

$$\int f(x) dx = \int f(x) \frac{dx}{dy} dy = \int f(x(y)) x'(y) dy$$

Andere Formulierung:

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy$$

Substitution  $y = g(x)$

##### Klassiker

$$\int \ln x dx = \int \ln x \cdot 1 dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} x dx = x(\ln x - 1)$$

$$\int x e^{x^2} dx = \int e^{x^2} \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{1}{2} \int e^y dy = \frac{1}{2} e^y = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

## 2.3 Kinematik in mehreren Dimensionen

### 2.3.1 Zweidimensionale Bewegung

Zweidimensional  $\rightarrow$  Bewegung in der Ebene. Trajektorie:  $x(t), y(t)$

**Beispiel**

$$x(t) = v_0 t \sin \omega t$$

$$y(t) = v_0 t \cos \omega t$$

**TODO Skizze der Trajektorie (Bahnkurve)**

**Raumkurve** Menge aller Punkte  $\{x, y\}$ , die das Teilchen durchläuft

**TODO Skizze Nichttriviale Darstellung nur im Raum (Raumkurve)**

### 2.3.2 Dreidimensionale Bewegung

Die Darstellung der Trajektorie ist erschwert, denn man bräuchte 4 Dimensionen: 3 für Raum und 1 für Zeit  
Formal kein Problem: Trajektorie ist

•

$$x(t), y(t), z(t)$$

•

$$x^1(t), x^2(t), x^3(t)$$

•

$$\{x^i(t)\}, i = 1, 2, 3$$

Dementsprechend:

$$v^i(t) = \dot{x}^i(t); a^i(t) = \ddot{x}^i(t); i = 1, 2, 3$$

## 2.4 Vektorräume

Eine Menge  $V$  heißt Vektorraum, wenn auf ihr zwei Abbildungen

- die Addition (+)
- die Multiplikation mit reellen Zahlen (\*)

definiert sind.

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$\text{Multiplikation} : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$$

$V \times V$  - Produktmenge  $\equiv$  Menge aller Paare so dass gilt:

$$v + (w + u) = (v + w) + u \quad u, v, w \in V \text{ Assoziativität}$$

$$v + w = w + v \text{ Kommutativität}$$

$$\exists 0 \in V : v + 0 = v \quad \forall v \in V \text{ Null}$$

$$\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w \text{ Distributivität}$$

$$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ Distributivität}$$

$$\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v \text{ Assoziativität der Multiplikation}$$

$$1v = v \text{ Multiplikation mit Eins}$$

### 2.4.1 Einfachstes Beispiel

$V \equiv \mathbb{R}$  (mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation und mit  $0 \in \mathbb{R}$  als Vektorraum Null)

### 2.4.2 Unser Haupt-Beispiel

Zahlentupel aus n-Zahlen:

$$V \equiv \mathbb{R}^n = \{(x^1, x^2, \dots, x^n), x^i \in \mathbb{R}\}$$

Notation:

$$\vec{x} = (x^1 \quad x^2 \quad \dots \quad x^n), \vec{y} = (y^1 \quad \dots \quad y^n)$$

Man definiert:

$$\vec{x} + \vec{y} \equiv (x^1 + y^1, x^2 + y^2, \dots, x^n + y^n)$$

$$\vec{0} \equiv (0, \dots, 0)$$

$$\alpha \vec{x} \equiv (\alpha x^1, \dots, \alpha x^n)$$

**TODO (Maybe) Skizze 3D Vektor** → übliche Darstellung durch „Pfeile“

## 2.5 Kinematik in $d > 1$

Trajektorie ist Abbildung:  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \rightarrow \vec{x}(t) = (x^1(t), x^2(t), x^3(t))$

$$\vec{v} = \dot{\vec{x}}(t), \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{x}}(t)$$

Setzt allgemeine Definition der Ableitung voraus:

$$\frac{d\vec{y}(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\vec{y}(x + \Delta x) - \vec{y}(x)}{\Delta x} \implies \vec{y}'(x) = (y^{1'}(x), \dots, y^{n'}(x))$$

### 2.5.1 Beispiel für 3-dimensionale Trajektorie

Schraubenbahn:

$$\vec{x}t = (R \cos \omega t, R \sin \omega t, v_0 t)$$

$$\vec{v} = (-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t, v_0)$$

$$\vec{a} = (-R\omega^2 \cos \omega t, -R\omega^2 \sin \omega t, 0)$$

**TODO Skizze (Raumkurve) Kommentar:**

$\vec{x}, \vec{v}, \vec{a}$  leben in verschiedenen Vektorräumen! allein schon wegen  $[x] = \text{m}, [v] = \text{m s}^{-1}$

Wir können wie in  $d = 1$  von  $\vec{a}$  zu  $\vec{v}$  zu  $\vec{x}$  gelangen!

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t dt' \vec{a}(t') = \left( v_0^1 + \int_{t_0}^t dt' a^1(t'), v_0^2 + \int_{t_0}^t dt' a^2(t'), v_0^3 + \int_{t_0}^t dt' a^3(t') \right)$$

**Üben:** Schraubenbahn;  $t_0 = 0, \vec{x}_0 = (R, 0, 0), v_0 = (0, R\omega, v_0)$  Es folgt:

$$\begin{aligned} & \vec{v}(t)(0, R\omega, v_0) + \int_0^t dt' (-R\omega^2) (\cos \omega t', \sin \omega t', 0) \\ &= (0, R\omega, v_0) + (-R\omega^2) \left( \frac{1}{\omega} \sin \omega t', -\frac{1}{\omega} \cos \omega t', 0 \right) \Big|_0^t \\ &= (0, R\omega, v_0) - R\omega (\sin \omega t, -\cos \omega t, 0) - (0, -1, 0) \\ &= (-R\omega \sin \omega t, R\omega + R\omega \cos \omega t - R\omega, v_0) \\ &= (-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t, v_0) \end{aligned}$$



**Bemerkung** Man kann Integrale über Vektoren auch durch Riemannsche Summen definieren:

$$\int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt' = \lim_{n \rightarrow \infty} (v(t_0)\Delta t + \vec{v}(t_0 + \Delta t)\Delta t + \dots + \vec{v}(t - \Delta t)\Delta t)$$

mit  $\Delta t = \frac{t-t_0}{N}$

## 2.6 Skalarprodukt

Führt von Vektoren wieder zu nicht-vektoriellen (Skalaren) Größen.

### 2.6.1 Symmetrische Bilinearform

$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$  „linear“ Abbildung von  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(v, w) \mapsto v \cdot w$  mit den Eigenschaften

- $v \cdot w = w \cdot v$
- $(\alpha u + \beta v) \cdot w = \alpha u \cdot w + \beta v \cdot w$

Sie heißt positiv-semidefinit, falls  $v \cdot v \geq 0$ ,

Sie heißt positiv-definit, falls  $v \cdot v = 0 \implies v = 0$  Hier : Skalarprodukt  $\equiv$  positiv definite symmetrische Bilinearform

### 2.6.2 Norm (Länge) eines Vektors

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v^2}$$

$\mathbb{R}^n$ : Wir definieren

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^1 y^1 + \dots + x^n y^n \equiv \sum_{i=1}^n x^i y^i \equiv \underbrace{x^i y^i}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}$$

Wichtig: oben euklidisches Skalarprodukt! Anderes Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^2$  :  $\vec{x} \cdot \vec{y} = 7x^1 y^2 + x^2 y^2$  anderes Beispiel:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \equiv x^1 y^1 - x^2 y^2$$

symmetrische Bilinearform, nicht positiv, semidefinit! Frage:

Beispiel für Bilinearform die positiv-semidefinit ist, aber nicht positiv definit

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^1 y^1$$

## 2.7 Abstand zwischen Raumpunkten

Der anschauliche Abstand zwischen Raumpunkten  $\vec{x}, \vec{y}$ :

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \vec{y}| &= \sqrt{(\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})} = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y})^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x^i - y^i)^2} = \sqrt{(x^i - y^i)(x^i - y^i)} \\ &= \sqrt{\vec{x}^2 + \vec{y}^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y}} = \sqrt{|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}| \cos \theta} \end{aligned}$$

Haben benutzt:  $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos \theta$

### 2.7.1 Spezialfall

$$\vec{x} = (x^1, 0, 0), \vec{y} = (y^1, y^2, 0)$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^1 \cdot y^1; \cos \theta = \frac{y^1}{|\vec{y}|}; |\vec{x}| = x^1$$

#### TODO Skizze

$$\implies \vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \theta$$

Dass dies für beliebige Vektoren gilt, wird später klar werden.

### 2.7.2 Infinitesimaler Abstand

Speziell wird der infinitesimale Abstand wichtig sein:

$$d\vec{x} = (dx^1, dx^2, dx^3)$$

$$d\vec{x} = \left( \frac{dx^1}{dt} dt, \frac{dx^2}{dt} dt, \frac{dx^3}{dt} dt \right) = (v^1 dt, v^2 dt, v^3 dt) = (v^1, v^2, v^3) dt = \vec{v} dt, \text{ oder: } \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

( $d\vec{x}$  analog zu  $df$  vorher);

$$d\vec{x}^2 = |d\vec{x}|^2 = |\vec{v}|^2 dt^2 \setminus |dx| = |\vec{v}| dt.$$

## 2.8 Bogenlänge und begleitendes Dreibein

$|d\vec{x}|$  entlang  $\vec{x}(t)$  aufaddieren  $\rightarrow$  Bogenlänge.

$$s(t) = \int_{t_0}^t |d\vec{x}| = \int_{t_0}^t dt' \left| \frac{d\vec{x}}{dt'} \right| = \int_{t_0}^t dt' \sqrt{\dot{\vec{x}}(t')^2} = \int_{t_0}^t \sqrt{\vec{v}(t')^2}$$

Infinitesimale Version:

$$\frac{ds(t)}{dt} = \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| = |\vec{v}|$$

Man kann (im Prinzip)  $s(t) = s$  nach  $t$  auflösen.

$$\implies t = t(s) \implies \underbrace{\vec{x}(s)}_{\text{Parametrisierung der Trajektorie durch die Weglänge } s} \equiv \vec{x}(t(s))$$

Nützlich, zum Beispiel für die Definition des Tangentenvektors:

$$\vec{T}(s) = \frac{d\vec{x}(s)}{ds}$$

Es gilt

$$\vec{T} \parallel \vec{v}; \left| \vec{T} \right| = \left| \frac{\vec{v} dt}{|\vec{v}| dt} \right| = 1 \implies \vec{T} \cdot \vec{T} = 1$$

Ableiten nach  $s$ :

$$0 = \frac{d}{ds}(1) = \frac{d\vec{T}}{ds} \left( \vec{T} \cdot \vec{T} \right) = \frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{T} + \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = 2\vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}$$

Nutze

$$\vec{T} \cdot \vec{T} = T^i T^i$$

$\Rightarrow$  Ableitung des Tangentenvektors ist orthogonal zum Tangentenvektor. Krümmungsradius der Bahn:

$$\rho \equiv \frac{1}{\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|}$$

Normalenvektor:

$$\vec{N} = \frac{\frac{d\vec{T}}{ds}}{\left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|} = \rho \frac{d\vec{T}}{ds}$$

### 2.8.1 Beispiel in d=2

$$\vec{x}(t) = R(\cos \omega t, \sin \omega t)$$

$$\vec{v}(t) = R\omega(-\sin(\omega t), \cos \omega t)$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(R\omega)^2(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} = R\omega$$

$$s(t) = \int_{t_0=0}^t dt' |\vec{v}| = R\omega t; \quad t(x) = \frac{s}{R\omega}$$

$$\Rightarrow \vec{x}(s) = R\left(\cos \frac{s}{R}, \sin \frac{s}{R}\right), \quad \vec{T} = \frac{d\vec{x}}{ds} = \left(-\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R}\right)$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = -\frac{1}{R}\left(\cos \frac{s}{R}, \sin \frac{s}{R}\right) \Rightarrow \rho = R; \quad \vec{N} = -\left(\cos \frac{s}{R}, \sin \frac{s}{R}\right)$$

**TODO Skizze**

## 2.9 Vektorprodukt

$$V \times V \mapsto V; \quad (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

mit

$$c^i = \left( \vec{a} \times \vec{b} \right)^i \equiv \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon^{ijk} a^j b^k = \varepsilon^{ijk} a^j b^k$$

dabei:

- $\varepsilon^{123} = \varepsilon^{231} = \varepsilon^{321} = 1$
- $\varepsilon^{213} = \varepsilon^{132} = \varepsilon^{321} = -1$
- sonst 0 ( $\varepsilon^{ijk} = 0$ , falls zwei Indizes gleich)

Alternativ:

•

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\sin \theta|$$

- Richtung von  $\vec{c}$  definiert durch  $\vec{c} \perp \vec{a} \wedge \vec{c} \perp \vec{b}$
- Vorzeichen von  $\vec{c}$  ist so, dass  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  ein „Rechtssystem“ bilden

**TODO Skizze****2.10 Binormalenvektor**

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$

$\vec{T}$ ,  $\vec{N}$ ,  $\vec{B}$  heißen „begleitendes Dreibein“ und bilden ein Rechtssystem. alle haben Länge 1  $\vec{T}$ ,  $\vec{N}$  spannen die „Schmiegeebene“ auf

**2.10.1 Zur Information**

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\rho} \vec{N}; \quad \frac{d\vec{B}}{ds} = -\frac{1}{\sigma} \vec{B}; \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{1}{\sigma} \vec{B} - \frac{1}{\rho} \vec{T}$$

$\sigma$  definiert die Torsion.

**3 Grundbegriffe der Newtonsche Mechanik****3.1 Newtonsche Axiome**

Dynamik: Ursachen der Bewegungsänderung  $\rightarrow$  Kräfte:  $\vec{F} = (F^1, F^2, F^3)$

1. Es existierten Inertialsysteme (Koordinatensysteme in denen eine Punktmasse an der keine Kraft wirkt) nicht oder sich geradlinig gleichförmig bewegt:  $\ddot{\vec{x}} = 0$
2. In solchen Systemen gilt:  $\vec{F} = m \ddot{\vec{x}}$
3. Für Kräfte zwischen zwei Massenpunkten gilt:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

4. definiert die **träge** Masse

Die entscheidende physikalische Aussage von 2. ist das Auftreten von  $\ddot{\vec{x}}$  (nicht etwa  $\dot{\vec{x}}$  oder  $\vec{x}$ ) Alternative Diskussionen der obigen Axiomatik:

- zum Beispiel Kapitel 1.2 von Jose/Saletan (mit 2 Definition der Kraft)

**3.2 Trajektorie**

Vorhersagen erfordern:  $\vec{F} \rightarrow$  Trajektorie. Genauer: Sei  $\vec{F}(\vec{x}, t)$  gegeben. Berechne  $\vec{x}(t)$  !

**3.3 Differentialgleichungen**

hier nur „gewöhnliche DGL“ (nur Ableitungen nach einer Variable) (im Gegensatz zu „partiellen“ (Ableitung nach verschiedenen Variablen))

**3.3.1 1. Ordnung**

Die allgemeine Form einer gewöhnlichen Dgl. 1. Ordnung ( $\implies$  nur 1. Ableitung):

$$y'(x) = f(x, y)$$

**Lösung** Funktion:  $y : x \mapsto y(x)$  mit  $y'(x) = f(x, y(x))$  (im Allgemeinen wird  $x$  aus einem gewissen Intervall kommen:  $x \in I \equiv (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ )

### 3.3.2 Anfangswertproblem

Gegeben durch:

1. Dgl.:  $y' = f(x, y)$
2. Anfangsbedingung  $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$

Gesucht: Funktion  $y(x)$  mit (für  $x \in I, x_0 \in I$ :

1.  $y'(x) = f(x, y(x))$
2.  $y(x_0) = y_0$

### 3.3.3 partielle Ableitung

Wir betrachten ab sofort auch Funktionen mehrerer Variablen:  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$  Partielle Ableitung:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \equiv \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Rechenregeln: Wie bei normalen Ableitung, nur mit  $x$  fest.

#### Beispiel

$$f(x, y, z) \equiv x^2 + yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y$$

### 3.3.4 Existenz und Eindeutigkeit

... viele Theoreme über Existenz und Eindeutigkeit (Peano und Picard / Lindelöf) Insbesondere sind Existenz und Eindeutigkeit gesichert falls:

$$f(x, y) \wedge \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

stetig sind.

„Begründung“ Zeichne an jedem Punkt  $(x, y)$  einen Vektor  $(1, f(x, y))$  ein.

$$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = f(x, y(x)) = \frac{(x, y(x))}{1}$$

**Weiteres Argument für die Existenz und Eindeutigkeit TODO(Skizze)** Steigung der gesuchten Funktion bei  $x_0$  ist bekannt als  $f(x_0, y_0) \implies$  kann Wert der Funktion bei  $x + \Delta x$  abschätzen:  $y_0 + \Delta x f(x_0, y_0)$  (für kleine  $\Delta x$ ) Kenne Steigung bei  $x_0 \Delta x : f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta x f(x_0, y_0)) \implies$  Schätze Wert der Funktion bei  $x_0 + 2\Delta x$  ab. ( $\implies$  perfekt für Numerik)

### 3.3.5 Beispiele

1.

$$y'(x) = f(x, y), f(x, y) = 3$$

$$y'(x) = 3 \implies y(x) = \int 3dx = 3x + c$$

Das ist schon die allgemeine Lösung der Dgl. Ein Anfangswertproblem, zum Beispiel mit  $(x_0, y_0) = (-1, 1)$  lässt sich durch Bestimmen der Konstanten lösen:

$$y(x) = 3x + c \implies 1 = 3(-1) + c \implies c = 4 \implies y(x) = 3x + 4$$

### 3.3.6 Separation der Variablen

Separation der Variablen funktioniert wenn  $f(x, y) = g(x)h(y)$

**Beispiel**

$$f(x, y) = \frac{x}{y} \implies y'(x) = \frac{x}{y(x)}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} \implies ydy = xdx$$

Variablen sind getrennt, kann einfach integrieren

$$\int ydy = \int xdx \implies \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \implies y = \pm\sqrt{x^2 + 2c}$$

**Lösen allgemeines Anfangswertproblem** allgemeines Anfangswertproblem mit Anfangsbedingung  $(x_0, y_0)$

$$y_0^2 = x_0^2 + 2c \implies 2c = y_0^2 - x_0^2 \implies y = \begin{cases} \sqrt{y_0^2 + x^2 - x_0^2} & y_0 \geq 0 \\ -\sqrt{y_0^2 + x^2 - x_0^2} & y_0 \leq 0 \end{cases}$$

1. **TODO** Skizze

### 3.3.7 System von Dgl.

(Fast) alles oben gesagte funktioniert auch für Systeme gewöhnlicher Dgl. 1. Ordnung:

$$\frac{dy^1(x)}{dx} = f^1(x, y^1, \dots, y^n)$$

$$\frac{dy^n(x)}{dx} = f^n(x, y^1, \dots, y^n)$$

Vektorschreibweise:

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y})$$

Wir haben hier eine vektorwertige Funktion von  $n + 1$  Variablen benutzt:

$$\vec{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Anfangsbedingungen:  $(x_0, \vec{y}_0) \rightarrow n + 1$  Parameter. Einer davon entspricht der Verschiebung entlang ein und derselben Lösung  $\implies$  allgemeine Lösung hat  $(n + 1) - 1 = n$  Parameter oder Integrationskonstanten.

### 3.3.8 Systeme von $n$ gewöhnlicher Dgl. $p$ -ter Ordnung

$$\vec{y}^{(p)}(x) = \vec{f}\left(x, \vec{y}, \vec{y}', \vec{y}'', \dots, \vec{y}^{(p-1)}\right)$$

Anfangsbedingungen:  $(x_0, \vec{y}_0, \vec{y}'_0, \dots, \vec{y}_0^{(p-1)})$ ,  $\vec{y}'_0 \stackrel{\wedge}{=} \vec{y}'(x)$  bei  $x = x_0$

**Tatsache** Systeme von Dgl. können auf größere Systeme niedrigerer Ordnung zurückgeführt werden. Wir illustrieren dies am Beispiel mit  $p = 2$

#### Beispiel

$$\vec{y}''(x) = \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{y}')$$

Dies ist äquivalent zu einem System von  $2n$  Dgl 1. Ordnung

$$\begin{cases} \vec{z}'(x) &= \vec{f}(x, \vec{y}, \vec{z}) \\ \vec{y}'(x) &= \vec{z} \end{cases} \quad (\equiv g(x, \vec{y}, \vec{z}))$$

Ursprüngliche Form folgt durch Einsetzen der 2. Gleichung in die Erste. Das verallgemeinert sich sofort auf die Ordnung  $p$ : Man gibt einfach der  $(p-1)$  niederen Ableitungen neue Namen und betrachtet sie als neue Variablen. Die zusätzlichen Dgl sind schlicht die Aussagen, dass es sich dabei immer noch um die ehemaligen Ableitungen handelt.

$\Rightarrow$  System von  $p$  Dgl 1. Ordnung; allgemeine Lösung hat  $p$  Parameter

### 3.3.9 Erste physikalische Beispiele

**Punktmasse** 3 Dgl 2. Ordnung:

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{1}{m} \vec{F}\left(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}\right)$$

$\Rightarrow$  6 Dgl 1. Ordnung:

$$\begin{cases} \dot{\vec{v}} &= \frac{1}{m} \vec{F}(t, \vec{x}, \vec{v}) \\ \dot{\vec{x}} &= \vec{v} \end{cases} \quad (1)$$

In vielen Fällen: (zeitunabhängiges) Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{x})$  („Vektorfeld“).

**Darstellung in  $d = 2$  (Skizze Vektorfeld).** wichtig: doppelte Markierung der Achsen

**Einfachster Fall ( $d = 1$ )** betrachte den Fall, dass  $F$  von  $v$ , aber nicht von  $t$  abhängt:

$$\begin{cases} \dot{v} &= \frac{F(x,v)}{m} \\ \dot{x} &= v \end{cases} \quad (2)$$

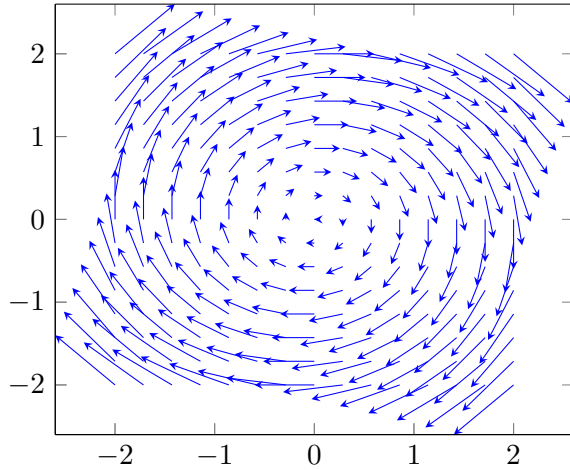
$$\begin{pmatrix} v \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F(x,v)}{m} \\ v \end{pmatrix}$$

1. **TODO** Darstellung im Phasenraum Analyse im Phasenraum passt perfekt zur früheren allgemeinen Analyse von Dgl 1. Ordnung Analog in  $d = 3$ : Vektorfeld:  $\left(\frac{\vec{F}}{m}, \vec{v}\right)$ , Phasenraum  $(\vec{x}, \vec{v})$  oder  $(\vec{x}, \vec{p})$  ist 6-dimensional

**Harmonischer Oszillator** ( $d = 1$ )  $F(x) = -kx$

$$\begin{cases} \dot{v} &= -x \\ \dot{x} &= v \end{cases} \quad (3)$$

Phasenraum des Harmonischen Oszillator



**Freier Fall mit Luftwiderstand** Aufgabe: Bestimme die zeitliche Entwicklung von  $v$  wenn Körper im Schwerfeld losgelassen wird.  $F_R = -cv^2$

Problem 1 – *dim*:  $x$  wachse nach unten, Start bei  $t = 0, x = 0, \dot{x} = 0$

$$F = m\ddot{x} \implies mg - cv^2 = m\ddot{x} \implies \begin{cases} mg - cv^2 &= m\dot{v} \\ v &= \dot{x} \end{cases}$$

Erste Gleichung enthält kein  $x$  und kann unabhängig gelöst werden:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= g - \frac{c}{m}v^2 \\ dt &= \frac{dv}{g - \frac{c}{m}v^2} \end{aligned}$$

Konstanten und Dimensionen

$$[g] = \text{m s}^{-2}; \left[\frac{c}{m}\right] = \text{N kg}^{-1} \text{m}^{-2} \text{s}^2$$

Kann leicht Konstanten der Dimension Zeit und Geschwindigkeit bilden:

$$\hat{t} = \sqrt{\frac{m}{gc}}, \hat{v} = \sqrt{\frac{gm}{c}}$$

Benutze jetzt die dimensionslosen Variablen  $t' = \frac{t}{\hat{t}}, v' = \frac{v}{\hat{v}}$

$$\implies dt' = \frac{dv'}{1 - v'^2} = \frac{dv'}{2} \left( \frac{1}{1 + v'} + \frac{1}{1 - v'} \right)$$

$$2t' = \ln 1 + v' - \ln 1 - v' + c$$

$v' = 0$  bei  $t' = 0 \implies c = 0$  Auflösen nach  $v'$ :

$$e^{2t'} = \frac{1 + v'}{1 - v'} \implies \dots$$



$$\Rightarrow v' = 1 - \frac{2}{e^{2t'} + 1} \Rightarrow v = \hat{v} \left( 1 - \frac{2}{e^{\frac{2t}{\hat{t}}}} + 1 \right)$$

$\Rightarrow \hat{v}$  ist Grenzgeschwindigkeit, wird exponentiell angenommen, wenn  $t \gg \hat{t}$

Zugabe: einfache physikalische Argumente für die Größe von  $c$ :

1.  $[c] = \text{kg m}^{-1}$ , Input:  $A$  (Querschnitt),  $\rho_L \Rightarrow c \sim \rho_L A$

2. Energiebilanz an verdrängter Luft:

$$F_R \cdot l \sim E_{\text{kin, Luft}} \sim \rho_L l A \frac{v^2}{2}$$

### 3.4 Taylorentwicklung

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $x_0 = 0$ . Untersuche Verhalten beliebiger glatter Funktionen  $f(x)$  nahe  $x = 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x dx' f'(x') \\ &= f(0) + f'(x')(x-x)|_0^x - \int_0^x dx' f''(x')(x' - x) \\ &= f(0) + f'(0)x - f''(x') \frac{(x' - x)}{2} \Big|_0^x + \int_0^x dx' f'''(x') \frac{(x' - x)^2}{2} \\ &= f(0) + f'(x)x + f''(0) \frac{x^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Allgemein:

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^m f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} + \overbrace{\int_0^x dx' f^{(m+1)}(x') \frac{(x' - x)^m}{m!}}^{\text{Restglied}}$$

Falls das Restglied für  $n \rightarrow \infty$  verschwindet:

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!}$$

Analog: Taylor-Reihe:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

1. Oft erste Terme = gute Näherung
2. Verallgemeinerung auf viele Variablen

#### 3.4.1 Interessantes „Gegenbeispiel“

$$f(x) \equiv \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Überzeugen sie sich, dass alle Ableitungen existieren, auch bei Null!

Sie Brauchen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

Die Ableitungen verschwinden sogar bei Null  $\Rightarrow$  Taylor-Reihe ist Null, keine gute Näherung

### 3.5 Harmonischer Oszillator

- eines der wichtigsten physikalischen Systeme
- beschreibt viele kompliziertere Systeme angenähert

#### 3.5.1 Eindimensionales System

$$d = 1, F = F(x)$$

$$F(x) = -\frac{d}{dx}v(x) = -v'(x)$$

Damit haben wir das **Potential** ( $\rightarrow$  beschreibt die potentielle Energie des Massenpunktes)  $v$  als Stammfunktion von  $-F$  definiert

- Skizze

Massenpunkt kann nur ruhen, wo  $F = 0$  beziehungsweise  $V' = 0$ . Genauer: Nur Minima (Maxima instabil).

**Ziel** Untersuchung der Bewegung in der Nähe von Minimal (also bei  $x \approx x_0$  wobei  $v'(x_0) = 0$  gelte)  
 $V(x)$  bei  $x_0$ ,  $V'(x_0) = 0$ ,  $|x - x_0|$  klein

$$\begin{aligned} \Rightarrow V(x) &\simeq V(x_0) + \frac{1}{2}v''(x_0)(x - x_0)^2 \\ \Rightarrow F(x) &\simeq -V''(x_0)(x - x_0) \\ x - x_0 \equiv y &\Rightarrow \underbrace{F(y) = -ky}_{\text{harmonischer Oszillator}}, k \equiv v''(0) \end{aligned}$$

Wir sehen: Harmonischer Oszillator ist eine Idealisierung von potentiell sehr großem Nutzen (viele Systeme)

**Lösung** Newton  $\Rightarrow m\ddot{y} = -ky$  beziehungsweise  $\ddot{y} = -\omega^2 y$ ,  $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$   
 $\Rightarrow \sin \omega t$  und  $\cos \omega t$  sind Lösungen  
 $\Rightarrow y(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$  ist auch Lösung (wegen Linearität)  
 (wegen der beiden frei wählbaren Konstanten ist dies schon die allgemeine Lösung)

#### Verallgemeinerungen

- Reibungsterm  $\sim \dot{y}$
- treibende Kraft  $\sim f(t)$

### 3.6 Lineare Differentialgleichungen

allgemeine Form einer linearen Dgl. n-ter Ordnung:

$$y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + f_0(x)y(x) = f(x)$$

Das Wort linear bezieht sich nur auf  $y$ , nicht  $x$

Die Dgl. heißt homogen falls  $f(x) \equiv 0$  Homogen von Grad  $p$ : Ersetzung  $y \rightarrow \alpha y$  führt zu Vorfaktor  $\alpha^p$ , hier  $p = 1$

- wir hatten oben dem Fall  $n = 2$  „mit konstanten Koeffizienten“

- noch einfacheres Beispiel:  $n = 1$ ,  $f \equiv 0$  (aber beliebige Koeffizienten)

$$y' + a(x)y = 0$$

Das ist separabel:

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -a(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int a(x)dx$$

$$\ln y = -A(x) + c_1$$

$$y = ce^{-A(x)}$$

$A(x)$  sei eine beliebige aber fest gewählte Stammfunktion von  $a$ . Wir können den inhomogenen Fall lösen, durch „Variation der Konstanten“

- Ansatz:  $y = C(x)e^{-A(x)}$ , Dgl.  $y' + ay = f$

$$(ce^{-A})' + ace^{-A} = f$$

$$c'e^{-A} - CA'e^{-A} + CAe^{-A} = f$$

Beachte  $A' = a$

$$\Rightarrow c'e^{-A} = fe^A, c(x) = \int dx f(x)e^{A(x)}$$

$$y(x) = \left[ \int^x dx' f(x')e^{A(x')} \right] e^{-A(x)}$$

$f(x')$  ist eine frei wählbare additive Konstante im  $x'$ -Int. ( $C(x) \rightarrow C(x) + \alpha$ ) entspricht der Addition der Lösung der homogenen Dgl.

### 3.6.1 Zusammenfassung / Verallgemeinerung auf $n > 1$

**Definition 3.1 (Linear Unabhängig)** Ein Satz von Funktionen  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  heißt linear unabhängig, falls jede Linearkombination bei der nicht alle Koeffizienten Null sind auch nicht Null ist:

$$\alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_n f_n(x) \equiv 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

(identisch zur linearen Unabhängigkeit von Vektoren)

**Fakt** Kennt man  $n$  linear unabhängige Lösungen einer homogenen linearen Dgl.  $n$ -ter Ordnung, so kennt man die allgemeine Lösung:

$$y_{hom}(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

Die allgemeine Lösung ist stets von dieser Form.

Wenn wir außerdem eine **partikuläre** Lösung der inhomogenen Gleichung haben, so haben wir auch schon deren allgemeinen Lösung

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x)$$

„Beweis“ durch Einsetzen in

$$y^{(n)} + f_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + f_0 y = f$$

### 3.6.2 Finden der partikulären Lösung

Auch bei  $n > 1$ : Variation der Konstanten (Funktioniert gut bei konstanten Koeffizienten) Mächtigere Methoden: Überführen von System von linearen Dgl. 1. Ordnung (braucht Matrixrechnung)

## 4 Erhaltungssätze in Newtonscher Mechanik

### 4.1 Impulserhaltung

Systeme mit mehreren Massenpunkten  $a, b \in \{1, \dots, n\}$

Trajektorien:  $\vec{x}_a(t)$ ,  $a = 1, \dots, n$

**Satz 4.1 (Impulserhaltung)** Bei verschwindenden externen Kräften ( $\vec{F}_{ext} = 0$ ) gilt:

$$\vec{p} \equiv \sum_a \vec{P}_a \equiv \sum_a m_a \dot{\vec{x}}_a = \text{const}$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} &= \sum_a m_a \ddot{\vec{x}}_a \\ &= \sum_a \vec{F}_a \\ &= \sum_a \left( \sum_{\substack{b \\ a \neq b}} \vec{F}_{ab} \right) \\ &= \sum_{\substack{a,b \\ a \neq b}} \vec{F}_{ab} && \text{(Summe über alle Paare von } a, b) \\ &= \sum_{a>b} \vec{F}_{ab} + \sum_{a<b} \vec{F}_{ab} \\ &= \sum_{a>b} (\vec{F}_{ab} + \vec{F}_{ba}) && \begin{array}{l} = 0 \\ \downarrow \\ \text{3. Newtonsches Axiom} \end{array} \end{aligned}$$

mit äußeren Kräften:

$$\dot{\vec{p}} = \sum_a \vec{F}_{a,ext.} \equiv \vec{F}_{ext}$$

Falls zum Beispiel die äußere Kraft nicht in  $x^1$ -Richtung wirkt ( $F_{1\_ext} = 0$ ), so gilt immer noch  $p^1 = \text{const}$  (eigentlich drei Erhaltungssätze für  $p^1, p^2, p^3$ , manchmal gelten nur einige davon)

### 4.2 Drehimpulserhaltung

Oft: Kräfte wirken parallel zur Verbindungslinie zweier Massenpunkte:

- Gravitationskraft
- Elektrostatische Kraft
- Modell der masselosen Stange ( $\rightarrow$  Modell für starre Körper!)

**Definition 4.2 (Drehimpuls)**

$$\vec{L}_a \equiv \vec{x}_a \times \vec{p}_a$$

$$\left(\vec{L}_a\right)^i = \varepsilon^{ijk} x_a^j p_a^k$$

Falls  $\vec{F}_{a,ext} = 0$  und alle interne Kräfte wirken parallel zur Verbindungslinie der jeweiligen Punkte, dann gilt **Drehimpulserhaltung**

**Satz 4.3 (Drehimpulserhaltung)**

$$\vec{L} \equiv \sum_a \vec{L}_a = \sum_a m_a \vec{x}_a \times \dot{\vec{x}}_a = \sum_a \vec{x}_a \times \vec{p}_a = \text{const}$$

**Beweis** Nachrechnen:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= \sum_a m_a \left( \dot{\vec{x}}_a \times \dot{\vec{x}}_a + \vec{x}_a \times \ddot{\vec{x}}_a \right) \\ &= \sum_a \vec{x}_a \times \vec{F}_a \\ &= \sum_{a \neq b} \vec{x}_a \times \vec{F}_{ab} && \text{(Summe über alle Paare von } a, b, a \neq b) \\ &= \sum_{a > b} \left( \vec{x}_a \times \vec{F}_{ab} + \vec{x}_b \times \vec{F}_{ba} \right) \\ &= \sum_{a > b} (\vec{x}_a - \vec{x}_b) \times \vec{F}_{ab} \end{aligned}$$

da  $\vec{F}_{ab} \parallel (\vec{x}_a - \vec{x}_b)$  per Annahme

$$= 0$$

□

Bei externen Kräften:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_a \vec{x}_a \times \vec{F}_{a,ext} \equiv \vec{M}_{ext}$$

$M_{ext}$  ist das durch äußere Kräfte auf Punkt  $a$  ausgeübte **Drehmoment**, allgemein (für einzelnen Punkt):

$$\vec{M} = \vec{x} \times \vec{F} = \dot{\vec{L}}$$

Wichtig: Drehimpulserhaltung gilt auch dann wenn alle äußeren Kräfte **Zentralkräfte** sind, Zentralkraft:

$$\vec{F}_a \parallel \vec{x}_a$$

Drehimpuls hängt vom Koordinatensystem ab.

**Bemerkung 4.4**  $\vec{L} \equiv \vec{x} \times \vec{p}$  (allgemeiner jedes Kreuzprodukt von Vektoren)

ist ein **Axial-** oder **Pseudovektor**, das heißt: Bei Drehungen wie Vektor, Bei Reflexion am Ursprung kein Vorzeichenänderung

**Beweis**

$$\vec{a} \rightarrow -\vec{a}, \vec{b} \rightarrow -\vec{b} \implies \vec{a} \times \vec{b} \rightarrow +\vec{a} \times \vec{b}$$

□

### 4.3 Konservative Kräfte und Energieerhaltung

**Definition 4.5 (Gradient)** Gradient von  $V$ :

$$\vec{\nabla} \equiv \left( \frac{\partial V}{\partial x^1}, \frac{\partial V}{\partial x^2}, \frac{\partial V}{\partial x^3} \right)$$

$\frac{\partial}{\partial x}$  ist ein "Differentialoperator", also:

$$\frac{\partial}{\partial x} : f(x, y) \mapsto \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

Dementsprechend  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  ist ein "Differentialoperator" zweiter Ordnung, also:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} : f(x, y) \mapsto \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$$

$\vec{\nabla} V$  ist gute Schreibweise, weil  $\vec{\nabla}$  ein vektorwertiger Differentialoperator ist:

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right)$$

**Definition 4.6 (konservatives Kraftfeld)** Ein zeitunabhängiges Kraftfeld  $\vec{F}(\vec{x})$  heißt **konservativ** falls es eine Funktion  $V(\vec{x})$  (Potential) gibt, sodass

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

#### 4.3.1 Energieerhaltung

Für einen Massenpunkt in einem konservativen Kraftfeld gilt:

$$E = \underset{\text{kinetisch}}{T} + \underset{\text{potentielle Energie}}{V} = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}(t)^2 + V(\vec{x}(t)) = \text{const}$$

**Begründung**

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{m}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}^i \dot{x}^i) = \frac{m}{2} 2 \dot{x}^i \ddot{x}^i = m \dot{\vec{x}} \cdot \ddot{\vec{x}} \\ \frac{dV}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) - V(x^1, x^2, x^3)}{\Delta t} \end{aligned}$$

mit  $\Delta x = \frac{d\vec{x}}{dt} \Delta t$

Umschreiben des Zählers

$$\begin{aligned} &V(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) - V(x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) \\ &+ V(x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) - V(x^1, x^2, x^3 + \Delta x^3) \\ &+ V(x^1, x^2, x^3 + \Delta x^3) - V(x^1, x^2, x^3) \\ &\cong \frac{\partial V}{\partial x^1}(x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) \Delta x^1 + \frac{\partial V}{\partial x^1}(x^1, x^2, x^3 + \Delta x^3) \Delta x^2 + \frac{\partial V}{\partial x^1}(\vec{x}) \Delta x^3 \end{aligned}$$

Teilen durch  $\Delta t$ , Grenzwertbildung

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x^i}(\vec{x}(t)) \frac{dx^i}{dt}$$

oder (allgemeine Rechenregel)

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x^i} dx^i$$

Allgemeine Formulierung der Rechenregel: Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \wedge \vec{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  Die Verknüpfung  $f \circ \vec{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Funktion. Für diese gilt:

$$\underbrace{df}_{\text{totales Differential}} = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = (\vec{\nabla} f) d\vec{x} \quad (4)$$

oder totale Ableitung:

(5)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} \quad (6)$$

Unsere Anwendung

(7)

$$\dot{E} = m \dot{\vec{x}} \ddot{\vec{x}} + \frac{\partial V}{\partial x^i} \dot{x}^i = \vec{F} \dot{\vec{x}} + (\vec{\nabla} V) \dot{\vec{x}} = 0 \quad (8)$$

$$V(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3) - V(x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3)$$

Vergleiche:

$$f(x + \Delta) - f(x) \cong f'(x) \Delta$$

#### 4.3.2 Kriterium für Konservativität

Für **einfach zusammenhängende Gebiete**<sup>1</sup> gilt:

$$\vec{F} \text{ ist konservativ} \iff \vec{\nabla} \vec{F} = 0$$

**Begründung**  $\implies \setminus$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \implies \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{F}}_{\equiv \text{Rotation von } F \text{ (rot } F)}} = 0$$

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{F})^i &= \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} F^k = \varepsilon^{ijk} \partial^j F^k \\ &= -\varepsilon^{ijk} \partial^j \partial^k V = -\frac{1}{2} (\varepsilon^{ijk} - \varepsilon^{ikj}) \partial^j \partial^k V \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \partial^j \partial^k V + \frac{1}{2} \varepsilon^{ikj} \underbrace{\partial^k \partial^j V}_{\text{habe benutzt } \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}} \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \partial^j \partial^k V + \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \partial^j \partial^k V = 0 \\ &\quad \downarrow \\ &\quad k \leftrightarrow j \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Jede geschlossene Kurve kann auf Länge Null zusammengezogen werden

←

Wähle beliebiges festes  $\vec{x}_0$  im Gebiet. Definiere Potential als minus Arbeit am Massenpunkt  $\rightarrow$  *Abbildung*

$$V(\vec{x}) \equiv - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{F}(x) d\vec{s} \quad (\text{Linienintegral})$$

Linienintegral kann immer definiert werden, wenn Kurve durch Gebiet mit Vektorfeld verläuft

$$d\vec{s} \equiv d\vec{x}(s) = \left( \frac{dx^1}{ds}, \frac{dx^2}{ds}, \frac{dx^3}{ds} \right) ds$$

Also gilt:

$$\vec{F} d\vec{s} = \underbrace{F^i \left( \frac{dx^i}{ds} \right) ds}_{\text{Integrand im normalen Riemann Integral}}$$

Wähle beliebigen kleinen Vektor  $\vec{l}$  und berechne:

$$\begin{aligned} \vec{l} \vec{F}(\vec{x}) &\cong - \left( - \int_{\vec{x}}^{\vec{x}+\vec{l}} d\vec{s} \vec{F} \right) \\ &= - \left( \left( - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}+\vec{l}} d\vec{s} \vec{F} \right) - \left( - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} d\vec{s} \vec{F} \right) \right) \\ &= - \left( V(\vec{x} + \vec{l}) - V(\vec{x}) \right) \\ &\cong - \frac{\partial V}{\partial x^i} l^i = - \vec{l} (\vec{\nabla} V) \\ &\implies \vec{l} (\vec{F} + \vec{\nabla} V) = 0 \\ &\implies \vec{F} + \vec{\nabla} V = 0 \checkmark \end{aligned}$$

Lücke: Wegunabhängigkeit der Definition von  $V$ :

Wähle zwei unterschiedliche Wege ( $L_1, L_2$ ):

$$\begin{aligned} \int_{L_1} d\vec{s} \vec{F} - \int_{L_2} d\vec{s} \vec{F} &= \oint d\vec{s} \vec{F} \\ &\downarrow \\ &\text{Rand von } \Sigma \end{aligned}$$

Satz von Stokes

$$\begin{aligned} &= \int_{\Sigma} d\vec{f} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \\ (\text{rot } \vec{F})^i &= (\vec{\nabla} \times \vec{F})^i = \varepsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} F^k \end{aligned}$$

zum Beispiel:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{F})^1 &= \frac{\partial F^3}{\partial x^2} - \frac{\partial F^2}{\partial x^3} \\ \int_{L_2} d\vec{s} \vec{F} - \int_{L_1} d\vec{s} \vec{F} &= \oint_{\partial \Sigma} d\vec{s} \vec{F} = \int_{\Sigma} d\vec{f} * (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\quad \downarrow \\ &\quad \text{„Stokes“} \end{aligned}$$



#### 4.4 Kurvenintegrale

Jedes Kurvenintegral kann durch Parametrisierung der Kurve berechnet werden. Kurve  $C \rightarrow \vec{x}(t)$

$$d\vec{x} \equiv d\vec{s}$$

$$\int_C d\vec{s} \vec{F}(\vec{x}) \equiv \int_C d\vec{x} \vec{F}(\vec{x}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \vec{F}(\vec{x}(t))$$

#### 4.5 Satz von Stokes

**Definition 4.7 (Satz von Stokes)**

$$\oint d\vec{s} \vec{F} = \int_{\Sigma} d\vec{f} (\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} \oint d\vec{s} \vec{F} &= \int_0^{\Delta x^1} ds F^1(x, 0) + \int_0^{\Delta x^2} ds F^2(\Delta x^1, s) - \int_0^{\Delta x^1} ds F^1(s, \Delta x^2) - \int_0^{\Delta x^2} ds F^2(0, s) \\ &= \int_0^{\Delta x^1} ds (F^1(s, 0) - F^1(s, \Delta x^2)) + \int_0^{\Delta x^2} ds (F^2(\Delta x^1, s) - F^2(0, s)) \\ &= \int_0^{\Delta x^1} ds \left( \frac{\partial F^1}{\partial x^2} \right) \Delta x^2 + \int_0^{\Delta x^2} ds \frac{\partial F^2}{\partial x^1} \Delta x^1 + \mathcal{O}(\Delta^3) \\ &= \Delta x^1 \Delta x^2 \left( \frac{\partial F^2}{\partial x^1} - \frac{\partial F^1}{\partial x^2} \right) + \mathcal{O}(\Delta^3) \\ &= \Delta x^1 \Delta x^2 (\vec{\nabla} \times \vec{F})^3 + \mathcal{O}(\Delta^3) \\ &= \underbrace{\Delta x^1 \Delta x^2 \hat{e}_3}_{\Delta \vec{f}} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \end{aligned}$$

$\Delta \vec{f}$  = Der dem kleinen Flächenelement zugeordnete Vektor

$$\approx \Delta \vec{f} (\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

Allgemein steht  $\Delta \vec{f}$  oder  $d\vec{f}$  für ein kleines oder infinitesimales Flächenelement, Länge  $\hat{=}$  Größe der Fläche. Die Richtung des Vektors definiert **Orientierung** der Fläche (Zum Beispiel Oben = da, wo der Pfeil hin zeigt). Randkurve: so definiert, dass man von oben gesehen linksherum (mathematisch positiver Drehsinn) läuft.

1. Spezielle Lage in unserer Rechnung unwichtig
2. Übergang zu größeren Flächen durch Aufaddieren

$$\text{Fläche} = N \Delta^2 \implies N \sim \frac{1}{\Delta^2}$$

$$\sum_{\text{Rechtecke}} \oint d\vec{s} \vec{F} = \sum_{\text{Rechtecke}} \int d\vec{f} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) + \underbrace{N \mathcal{O}(\Delta^3)}_{\text{Zahl der Rechtecke} = \mathcal{O}(\Delta)}$$

weil sich nicht "innere Ränder wegheben"

$$\oint d\vec{s} \vec{F} = \sum_{\text{Rechtecke}} \int d\vec{f} (\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

klar

$$\oint d\vec{s} \vec{F} = \int d\vec{f} (\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

Glätten des Randes: Zerlegung des Randes  $\Delta \vec{s}$  in kleine Rechtecke  $\Delta \vec{s}_1, \Delta \vec{s}_2$

$$\begin{aligned}\Delta \vec{s} &= \Delta \vec{s}_1 + \Delta \vec{s}_2 \\ \vec{F} \Delta \vec{s} &= \vec{F} \Delta \vec{s}_1 + \vec{F} \Delta \vec{s}_2 = \vec{F}_1 \Delta \vec{s}_1 + \vec{F}_2 \Delta \vec{s}_2 + \mathcal{O}(\Delta x^2)\end{aligned}$$

$\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$  jeweils am Mittelpunkt der Linienelemente Zahl derartiger Randelemente  $\sim \frac{1}{\Delta} \implies$  Fehler  $\mathcal{O}(\Delta)$   
 $\implies$  Auch nach Summation bleibt Fehler von  $\mathcal{O}(\Delta)$

Besser wäre Zerlegung in Simplices („Haben sie mal versucht eine Schildkröte zu fliesen?“)  $\square$

Für unsere Anwendung: wichtig, dass jede geschlossene Kurve in einem einfach zusammenhängenden Gebiet, **Rand** ist.

#### 4.6 Energieerhaltung für Systeme von Massenpunkten

Massenpunkte:  $\vec{x}_a, a = 1, \dots, n$

Kräfte: seien  $\parallel$  zu  $\vec{x}_a - \vec{x}_b$  („Zentralkräfte“)

Solche Kräfte kann man stets schreiben als:

$$\vec{F}_{ab} = -\vec{\nabla}_a V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)$$

mit:

$$V_{ab} = V_{ba}, \vec{\nabla}_a = \left( \frac{\partial}{\partial x_a^1}, \frac{\partial}{\partial x_a^2}, \frac{\partial}{\partial x_a^3} \right)$$

dazu:

$$-\vec{\nabla}_a V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|) = \left( -\vec{\nabla}_a |\vec{x}_a - \vec{x}_b| \right) V'_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)$$

Dies zeigt:

$$\begin{aligned}&= -\vec{\nabla}_a \sqrt{(\vec{x}_a - \vec{x}_b)^2} \\ &= \frac{\vec{x}_a - \vec{x}_b}{|\vec{x}_a - \vec{x}_b|}\end{aligned}$$

Wir können passendes  $V$  für jede Zentralkraft finden. Man berechnet einfach  $V'$  und sucht die Stammfunktion.  
 Prüfe Konsistenz mit 3. Axiom:

$$\underbrace{-\vec{\nabla}_a V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)}_{\vec{F}_{ab}} = +\vec{\nabla}_b V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|) = \underbrace{+\vec{\nabla}_b V_{ba}(|\vec{x}_b - \vec{x}_a|)}_{-\vec{F}_{ba}}$$

In diesem System gilt Energieerhaltung:

$$E = \sum_a T_a + \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} V_{ab} = \sum_a T_a + \sum_{a < b} V_{ab} = \text{const}$$

Begründung:

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \sum_a \dot{\vec{x}}_a \vec{F}_a + \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \left( \left( \vec{\nabla}_a V_{ab} \right) \dot{\vec{x}}_a + \left( \vec{\nabla}_b V_{ab} \right) \dot{\vec{x}}_b \right) \\ &= \sum_{a \neq b} \dot{\vec{x}}_a \vec{F}_{ab} + \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \left( -\vec{F}_{ab} \dot{\vec{x}}_a - \underbrace{\vec{F}_{ab} \dot{\vec{x}}_b}_{\text{Umbenennung } a \leftrightarrow b} \right) = 0 \\ &= W - \frac{1}{2}W - \frac{1}{2}W\end{aligned}$$

Bemerkung: Passend gewähltes  $V_{ab}$  gibt das Modell der starren Stangen

## 4.7 Eindimensionale Bewegung

$$F(x) = m\ddot{x}$$

- mit Einsatz allgemein lösbar!
- Startpunkt: Jedes 1-dim. zeitunabhängiges Kraftfeld ist konservativ

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \text{const}$$

(bis auf Vorzeichen)

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \implies dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

Integral lösen, Integrationskonstante und Energie so bestimmen, das Anfangswertproblem gelöst

$$t = t(x) \text{ auflösen} \implies x = x(t) \checkmark$$

viel einfacher als allgemeine Differentialgleichung 2. Ordnung

## 5 Harmonischer Oszillator in komplexen Zahlen

### Motivation

Harmonischer Oszillator mit Reibung:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - c\dot{x}$$

Exponentieller Ansatz:

$$x \sim e^{\alpha t} \implies \alpha^2 + \omega^2 + c\alpha = 0$$

gesucht:  $\alpha$ , Betrachte Grenzfälle:

1.  $\omega$  klein

$$\implies \alpha^2 + c\alpha = 0 \implies \alpha = -c \implies x \sim e^{-ct}$$

2.  $\omega$  groß (beziehungsweise  $c$  klein)

$$\alpha^2 + \omega^2 \simeq 0$$

nicht lösbar!

Aber: wir wissen schon  $\sin \omega t, \cos \omega t$  sind Lösungen.

Falls jede gesuchte Gleichung lösbar  $\implies$  Hoffnung auf elegante allgemeine Lösung

**Speziell:**  $\alpha^1 = -1$  (für  $\omega = 1, c = 0$ )

### 5.1 Komplexe Zahlen

#### 5.1.1 Ziel

reelle Zahlen so zu erweitern, dass  $x^2 = -1$  lösbar

### 5.1.2 Naive Definition

Definiere „Imaginäre Einheit“  $x^2 = -1$  lösbar „ $i$ “, so dass  $i^2 = -1$  Wollen addieren und Multiplizieren, deshalb erkläre komplexe Zahl  $\mathbb{C}$  als:

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$$

Wir definieren außerdem:

- $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \equiv (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \equiv x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + iy_1iy_2 \equiv (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$

### 5.1.3 präzisere Definition

**Definition 5.1 (Körper)** Körper („Field“) ist eine Menge  $K$  mit zwei binären Operationen („+“, „ $\cdot$ “), so dass:

- $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$  (Assoziativität)
- $\alpha + \beta = \beta + \alpha$  (Kommutativität)
- $\exists 0 \in K : \alpha + 0 = \alpha \forall \alpha$  (Null)
- $\forall \alpha \exists (-\alpha) \in K : \alpha + (-\alpha) = 0$  (Additives Inverses)
- $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$  (Assoziativität der Mult.)
- $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$  (Kommutativität der Mult.)
- $\exists 1 \in K : 1 \cdot \alpha = \alpha \forall \alpha$  (Eins)
- $\forall \alpha \neq 0 \exists \alpha^{-1} \in K : \alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$  (Inverses der Mult.)
- $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$  (Distributivität)

Wir kennen bereits:

- $K = \mathbb{Q}$  (rationale Zahlen)
- $K = \mathbb{R}$  (reelle Zahlen)

**Definition 5.2 (Komplexer Zahlenkörper)** Komplexe Zahlen sind die Menge  $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  mit den Operationen

- $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \equiv (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \equiv (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$

Das ist äquivalent zu unserer „naiven Definition“  $z = x + iy$

**Aufgabe:** Prüfen sie, dass die Axiome erfüllt sind!

Schwierigster Teil: Multiplikations-Inverses, Idee / Vorschlag:

$$z^{-1} = (x + iy)^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \implies$  Darstellung durch Vektoren in Ebene liegt nahe.

- Addition:  $\equiv$  Vektoraddition

- Multiplikation: Beträge der Vektoren werden multipliziert, Winkel „arg“ werden addiert.
- $\arg z = \phi$
- $\Re z = x$
- $\Im z = y$
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Übliche Funktionen (exp, ln, sin, cos) können mittels ihrer in  $\mathbb{R}$  bekannten Taylorreihe auf  $\mathbb{C}$  übertragen werden

**Besonders wichtig:**

$$e^z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Brauchen  $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$

Nachrechnen:

$$e^{z+w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k}$$

$\downarrow$   
 Binomialkoeffizient  
 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

englisch: n choose k

durch Umschreiben der Summen erhält man:

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{z^k w^{n-k}}{n!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^k w^l}{k! l!} = e^z e^w
 \end{aligned}$$

Insbesondere:

$$e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{\text{reelle Zahl}} \underbrace{e^{iy}}_{\text{komplexe Zahl e vom Betrag 1}}$$

In der Tat:

$$\begin{aligned}
 e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{iy^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
 &= \cos y + i \sin y
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Eulersche Formel

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

**5.1.4 Zusammenfassung:**

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$$

$$w = e^z = e^x e^{iy} = |w| e^{i \arg w}$$

$$\ln w = z = x + iy = \ln |w| + i \arg w$$

Problem:  $\arg w$  und deshalb  $\ln$  nicht eindeutig definiert

Lösung: Definiere  $\arg w \in (-\pi, \pi)$

**5.1.5 Fundamentalsatz der Algebra**

In  $\mathbb{C}$  hat jedes Polynom

$$P_n(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$$

eine Nullstelle  $z_0$

In der Tat hat es sogar  $n$  Nullstellen:

$$P_n(z) = (z - z_0) \cdot \underbrace{P_{n-1}(z)}_{\text{Hat wieder eine Nullstelle, usw.}}$$

(Man sagt: Körper  $\mathbb{C}$  ist algebraisch abgeschlossen)

- Es gibt auf  $\mathbb{C}$  wichtige Abbildung: „komplexe Konjugation“

$$z \rightarrow z^* \stackrel{\wedge}{=} z \rightarrow \bar{z}$$

Definiert durch:

$$(x + iy)^* = x - iy, \left(\rho e^{i\phi}\right)^* = \rho e^{-i\phi}$$

also auch

$$(z^*)^* = z$$

**5.1.6 Quaternionen**

$$1, i \rightarrow 1, i, j, k, i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k, ji = -k, jk = i, \dots$$

**5.2 Anwendung auf harmonischen Oszillator**

Erinnerung: physikalisches Problem:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

Fall  $\frac{c}{2} > \omega$  (Kriechfall)

$$x = e^{\alpha t}, \alpha^2 + c\alpha + \omega^2 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - \omega^2}$$

$\Rightarrow$  2 linear unabhängige Lösungen, also allgemeine Lösung durch lineare Superposition

$\Rightarrow$  exponentielles Abfallverhalten, ohne Oszillationen

Fall  $\frac{c}{2} < \omega$  (Schwingfall),  $\sqrt{-x} = i\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}\alpha_{1,2} &= -\frac{c}{2} \pm i\sqrt{\omega^2 - \frac{c^2}{4}} \equiv -\frac{c}{2} \pm i\tilde{\omega} \\ x_{1,2} &= e^{-\frac{c}{2}t} e^{\pm i\omega t} = e^{-\frac{c}{2}t} (\cos \pm \tilde{\omega}t + i \sin \pm \tilde{\omega}t) \\ x_{1,2} &= e^{-\frac{c}{2}t} (\cos \tilde{\omega}t \pm i \sin \tilde{\omega}t)\end{aligned}$$

Durch Linearkombination  $\rightarrow$  2 reelle Lösungen:

$$x_1 = e^{-\frac{c}{2}t} \cos \tilde{\omega}t; \quad x_2 = e^{-\frac{c}{2}t} \sin \tilde{\omega}t$$

$\Rightarrow$  allgemeine Lösung durch Linearkombination

$\Rightarrow$  gedämpfte Schwingung

Fall  $\frac{c}{2} = \omega$  (aperiodischer Grenzfall)

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

$\Rightarrow$  Nur eine linear unabhängige Lösung, brauche weitere Lösung um allgemeine Anfangsbedingungen zu erfüllen

Idee: Betrachte Schwingfall Lösungen für  $\tilde{\omega} \rightarrow 0$

Taylor:

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 + \mathcal{O}(x^2); \quad \sin x = x + \mathcal{O}(x^3) \\ \Rightarrow x_1 &= e^{-\frac{c}{2}t}; \quad x_2 = e^{-\frac{c}{2}t} \tilde{\omega}t\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Wieder asymptotische Annäherung an 0 ohne Oszillation

### 5.3 harmonischer Oszillator mit periodisch treibender Kraft

Inhomogene Dgl:

$$\ddot{x} + c\dot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F(t), F(t) = f e^{i\omega t}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned}x(t) &= A e^{i\omega t} \\ \Rightarrow \left( A(-\omega^2 + i c \omega + \omega^2) - \frac{f}{m} \right) e^{i\omega t} &= 0 \\ A &\equiv |A| e^{i\phi} = \frac{f}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \omega^2 + i c \omega}\end{aligned}$$

mit

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a-ib} \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2-b^2}$$

und elementarer Algebra findet man den Realteil der Lösung:

$$\Re x(t) = |A| \cos \omega t + \phi$$

$$|A| = \frac{\frac{f}{m}}{\sqrt{\omega^2 - \omega^2 + c^2 \omega^2}}, \tan \phi = \frac{c\omega}{\omega^2 - \omega^2}$$

Allgemeine Lösung ergibt sich, indem man zu dieser partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung addiert.

**Wichtig:** Langzeitverhalten ist durch die partikuläre Lösung bestimmt  $\implies$  Resonanzkatastrophe bei  $c \rightarrow 0$  &  $\omega \rightarrow \omega$

## 6 Symmetrie der Raumzeit

### 6.1 Matrix, Determinante, Inverse Matrix

**Definition 6.1 (Permutation)** Eine Permutation (Bez:  $\sigma$ ) von  $n$  Elementen ist eine umkehrbare Abbildung einer Menge von  $n$  Elementen auf sich selbst:

Menge:  $\{1, \dots, n\}$ , Abb:  $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}, i \mapsto \sigma i$

oft nützlich: Man denke an die elementweise Anwendung von  $\sigma$  auf  $\{1, \dots, n\} \mapsto \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$

Eine Permutation heißt **gerade** ( $\text{sgn}(\sigma) = 1$ ), falls sie sich aus geradzahlig vielen Vertauschungen von Nachbarn ergibt. Zum Beispiel ist  $123 \rightarrow 312$  das Produkt von  $123 \rightarrow 132$  und  $123 \rightarrow 213$ :

$$123 \rightarrow 132 \rightarrow 312$$

**Definition 6.2 (Levi-Civita-Tensor)**

$$\varepsilon^{\sigma(1)\dots\sigma(n)} \equiv \text{sgn}(\sigma)$$

Insbesondere:  $\varepsilon^{12\dots n} = 1$

- Eine  $(n \times m)$ -Matrix ist ein Schema  $A^{ij}$  von Zahlen, die jeweils Eintrag  $i$  in Zeile  $i$  und Spalte  $j$  bezeichnen.
- Man kann eine  $(n \times m)$ -Matrix mit einer  $(m \times p)$ -Matrix multiplizieren:

$$(AB)^{ij} = \sum_{k=1}^m A^{ik} B^{kj}$$

das Ergebnis ist eine  $(n \times p)$ -Matrix

**Definition 6.3 (Determinante)** Für quadratische  $((n \times n)$ -Matrizen) definieren wir die **Determinante**:

$$\det A = \frac{1}{n!} \varepsilon^{i_1 \dots i_n} A^{i_1 j_1} A^{i_2 j_2} \dots A^{i_n j_n} \varepsilon^{j_1 \dots j_n}$$

$\downarrow$   
n-dim. Levi-Civita-Symbol

Damit erhält man:

Determinante einer  $(1 \times 1)$ -Matrix: die Zahl selbst.



Erstes nicht triviales Beispiel:  $(2 \times 2)$ -Matrix

$$\begin{aligned}\det A &= \det \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2!} \varepsilon^{ij} A^{ik} A^{jl} \varepsilon^{kl} \\ &= \frac{1}{2!} (\varepsilon^{12} A^{11} A^{22} \varepsilon^{12} + \varepsilon^{12} A^{12} A^{21} \varepsilon^{21} + \varepsilon^{21} A^{21} A^{12} \varepsilon^{12} + \varepsilon^{21} A^{22} A^{11} \varepsilon^{21}) \\ &= \frac{1}{2} (A^{11} A^{22} + A^{12} A^{21} - A^{21} A^{12} + A^{22} A^{11}) = A^{11} A^{22} - A^{12} A^{21}\end{aligned}$$

Man überlegt sich leicht:

$$\det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \sigma A^{1\sigma(1)} A^{2\sigma(2)} \dots A^{n\sigma(n)}$$

Also:  $n!$  Summanden, Jeder ist Produkt von je einem Element aus jeder Zeile und Spalte der Matrix. Vorzeichen ist Vorzeichen der Permutation (siehe unten)

**Beispiel 6.4 ( $(3 \times 3)$ -Matrix)** Rechenschema:

$$A = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} & A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} & A^{21} & A^{22} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} & A^{31} & A^{32} \end{pmatrix}$$

$$\det A = A^{11} A^{22} A^{33} + A^{12} A^{23} A^{31} + \dots$$

Betrachte nun den Ausdruck:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} A^{i_1 j_1} A^{i_2 j_2} \dots A^{i_n j_n} &= \varepsilon^{i_1 i_2 \dots} A^{i_2 j_2} A^{i_1 j_2} \dots \\ &= \varepsilon^{i_2 i_1 \dots} A^{i_2 j_2} A^{i_2 j_1} \dots = -\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} A^{i_1 j_2} A^{i_2 j_1} \dots A^{i_n j_n}\end{aligned}$$

Vorzeichenwechsel durch Vertauschen zweier Indizes, obiger Ausdruck ist total antisymmetrisch"

Totale Antisymmetrie ist die definierende Eigenschaft von  $\varepsilon$ . Sie bestimmt jeden Ausdruck mit  $n$  Indizes bis auf Vorfaktor. Deshalb:

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_n} A^{i_1 j_1} \dots A^{i_n j_n} = c \varepsilon^{j_1 \dots j_n}$$

Multipliziere mit  $\varepsilon^{j_1 \dots j_n}$ :

$$n! \det A = c \varepsilon^{j_1 \dots j_n} \varepsilon^{j_1 \dots j_n} = c n!$$

$\Rightarrow$  alternative Formel für  $\det A$ :

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_n} A^{i_1 j_1} \dots A^{i_n j_n} = (\det A) \varepsilon^{j_1 \dots j_n}$$

Zentraler Fakt:  $A$  invertierbar  $\iff \det A \neq 0$

Inverse Matrix:

$$(A^{-1})^{ij} = \frac{1}{(n-1)! \det A} \varepsilon^{j i_2 \dots i_n} \varepsilon^{i j_2 \dots j_n} A^{i_2 j_2} \dots A^{i_n j_n}$$

Prüfen:

$$\begin{aligned}(A^{-1})^{ij} A^{jk} &= \frac{1}{(n-1)! \det A} \varepsilon^{ji_2 \dots i_n} \varepsilon^{ij_2 \dots j_n} A^{jk} A^{i_2 j_2} \dots A^{i_n j_n} \\ &= \frac{1}{(n-1)! \det A} (\det A) \underbrace{\varepsilon^{kj_2 \dots j_n} \varepsilon^{ij_2 \dots j_n}}_{(n-1)! \delta^{ik}} \\ &= \delta^{ik} \checkmark\end{aligned}$$

Kommentar:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n-1)!} \varepsilon^{ii_2 \dots i_n} \varepsilon^{jj_2 \dots j_n} A^{i_2 j_2} \dots A^{i_n j_n} \\ = (-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} M(i, j) \\ \downarrow \\ \text{Matrix der Cofaktoren} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Matrix der Cofaktoren ergibt sich aus  $A$  Streichen von Zeile  $i$  und Spalte  $j$

## 6.2 Der Euklidische Raum

physikalischer Raum:  $V = \mathbb{R}^3$  mit Skalarprodukt  $\vec{x}, \vec{y} \rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = x^i y^i$

Unser Ziel: Symmetrien, also Abbildungen  $R: V \rightarrow V$ ,  $\vec{x} \mapsto \vec{x}'$ , welche die Struktur des Raumes respektieren. Das heißt:

$$\begin{aligned}R(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) &= \alpha R(\vec{x}) + \beta R(\vec{y}) \\ R(\vec{x}, \vec{y}) &\equiv \vec{x} \cdot \vec{y} = R(x) R(y) \\ &\downarrow\end{aligned}$$

Sagt nur: Zahlen transformieren nicht

Zunächst nur Linearitätsbedingung (wird respektiert von allgemeinen linearen Transformationen)

$$x^i \mapsto x'^i = R^{ij} x^j$$

oder

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{11} & \dots & R^{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{n1} & \dots & R^{nn} \end{pmatrix}$$

Symmetrie: Lineare Transformation:  $\vec{x} \mapsto R(\vec{x})$

konkret:  $x^i \mapsto x'^i = R^{ij} x^j$

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x'^1 \\ \vdots \\ x'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{11} & \dots & R^{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ R^{n1} & \dots & R^{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Kurzschreibweise:

$$x \mapsto x' = Rx$$

- hier: Großbuchstaben = Matrizen

- Kleinbuchstaben = Vektoren

**Beispiel 6.5 (n = 2)**

$$\begin{aligned}x'^1 &= R^{11}x^1 + R^{12}x^2 \\x'^2 &= R^{21}x^1 + R^{22}x^2\end{aligned}$$

Ganz explizit

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformation der beiden Basisvektoren

Jeder andere Vektor  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  ist schreibbar als  $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Er transformiert demnach gemäß

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mapsto \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

Wichtig: Symmetrietransformationen müssen verknüpfbar sein:

Dazu: Betrachte zwei Transformationen:

$$R_1 : x \mapsto R_1 x; R_2 : x \mapsto R_2 x$$

zusammen:

$$R_1 \circ R_2 : x \mapsto R_2 R_1 x$$

Die Komponente  $i$  des entstehenden Vektors ist:

$$(R_2 R_1 x)^i = R_2^{ij} (R_1 x)^j = R_2^{ij} R_1^{jk} x^k$$

Man kann die Abbildung  $x \mapsto R_2 R_1 x$  auch „in einem Schritt“ als Transformation durch die Produktmatrix  $R_2 R_1$  realisieren:

$$(R_2 R_1 x)^i = \underbrace{\left( R_2^{ij} R_1^{jk} \right)}_{\text{Produktmatrix}} x^k$$

Die Produktmatrix ist  $(R_2 R_1)^{ij} = R_2^{ij} R_1^{jk} \equiv R_3^{ik}$  Hinweis zum expliziten Rechnen:

$$\begin{pmatrix} R_2^{11} & R_2^{12} & R_2^{13} \\ R_2^{21} & R_2^{22} & R_2^{23} \\ R_2^{31} & R_2^{32} & R_2^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1^{11} & R_1^{12} & R_1^{13} \\ R_1^{21} & R_1^{22} & R_1^{23} \\ R_1^{31} & R_1^{32} & R_1^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_3^{11} & R_3^{12} & R_3^{13} \\ R_3^{21} & R_3^{22} & R_3^{23} \\ R_3^{31} & R_3^{32} & R_3^{33} \end{pmatrix}$$

Für den Begriff der Symmetrie brauchen wir Invertierbarkeit. Wir nennen eine Transformation beziehungsweise die entsprechende Matrix  $R$  invertierbar, falls es eine zweite Matrix  $R^{-1}$  gibt, so dass

$$R^{-1} \circ R = \text{id} \quad (\text{Identitätsabbildung})$$

$$(R^{-1})^{ij} R^{jk} = \delta^{ik} \equiv \delta^{ik}$$

Wäre Linearität die einzige wichtige Eigenschaft: dann wären die Symmetriefunktionen alle

$$\begin{array}{c} R \in GL(n) \\ \downarrow \\ \text{Menge aller invertierbaren } n \times m \text{ Matrizen} \end{array}$$

Wir brauchen zusätzlich:

$$\vec{x}\vec{y} = R(\vec{x})R(\vec{y}), R(x)^i = R^{ij} \times j$$

Dazu wichtige Schreibweise

$$(M^T)^{ij} = M^{ji} \text{ (T für transponiert)}$$

auch:  $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, \vec{x} = (x^1 \dots x^n)$  Es gilt:  $\vec{x}\vec{y} = x^T y = x^i y^i$

es gilt weiterhin:

$$R(\vec{x})R(\vec{y}) = (Rx)^T(Ry) = (x^T R^T)(Ry) = x^T R^T R y$$

Nebenrechnung

$$\begin{aligned} ((AB)^T)^{ij} &= (AB)^{ji} = A^{jk} B^{ki} = B^{ki} A^{jk} = (B^T)^{ik} (A^T)^{kj} \\ &= (B^T A^T)^{ij} \\ \implies (AB)^T &= B^T A^T \end{aligned}$$

Ziel:  $x^T R^T R y = x^T y$  soll gelten für beliebige  $x, y$ . Dies gilt genau dann wenn  $R^T R = \mathbb{1}$

$$(R^T)^{ik} R^{kj} = \delta^{ij}$$

$$R^{ki} R^{kj} = \delta^{ij}$$

$$R^{ik} R^{jk} = \delta^{ij}$$

wenn  $AB = \mathbb{1}$ , so auch  $BA = \mathbb{1}$

Symmetrien des euklidischen Raums:  $x \rightarrow Rx$  mit  $R^T R = \mathbb{1} \quad R \in O(3) \subset U(3)$

### 6.3 Symmetriegruppe (M)

Symmetrien in Physik und Mathe  $\rightarrow$  Gruppen

Bisher:

- Matrixgruppen
  - $GL(n)$  - Symmetriegruppe des Vektorraums  $\mathbb{R}^n$
  - $O(n)$  - Symmetriegruppe des euklidischen Raumes

Allgemeiner: Eine Gruppe ist eine Menge  $G$  mit einer Binären Operation  $G \times G \rightarrow G$  für die gilt:

- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- $\exists e \in G : a \cdot e = e \cdot a = a \quad \forall a$  („Eins“)

$$\bullet \forall a \in G \exists a^{-1} \in G : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$$

Eine Gruppe heißt „abelsch“ falls  $a \cdot b = b \cdot a \forall a, b$  Beispiele dafür:

$$\bullet \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Falls sie statt „ $\cdot$ “ die Operation „ $+$ “ zur Gruppenoperation erklären, dann sind

$$\bullet \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}$$

Gruppen mit  $+$

**Definition 6.6 (Körper)**  $K$  mit Operationen  $+, \cdot$  ist ein Körper falls:

- $(K, +)$  ist abelsche Gruppe (Eins = 0)
- $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  ist auch abelsche Gruppe
- Distributivität

$GL(n)$  ist eine (nicht abelsche) Gruppe. Müssen prüfen:  $A, B$  invertierbar  $\implies A \cdot B$  invertierbar. Wir geben das Inverse zu  $A \cdot B$  einfach an:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(AA^{-1})B = B^{-1}B = \mathbb{I}$$

$GL^+(n)$  - orientierungserhaltende Untergruppe  $\equiv$  alle  $A$  in  $GL(n)$  mit  $\det A > 0$   
 $O(n)$  ist Untergruppe von  $GL(n)$ . Müssen prüfen dass  $A, B$  orthogonal  $\implies A \cdot B$  orthogonal. Dazu:

$$(A \cdot B)^T (A \cdot B) = B^T A^T A B = B^T B = \mathbb{I}$$

Wichtige Untergruppe: Spezielle Orthogonale Transformation  $SO(n)$

Diese Transformationen erfüllen:  $\det(R) = 1$

Dazu zwei Fakten:  $\det A^T = \det A$ ,  $\det(AB) = (\det A)(\det B)$  Damit folgt aus  $R^T R = \mathbb{I}$

$$\det(R^T R) = \det(R^T)(\det R) = (\det R)^2 = \det \mathbb{I} = 1, \det R = \pm 1$$

$\equiv$  Matrizen in  $O(n)$  mit  $\det = 1$

Speziell in  $n = 3$  (3d-Raum) wird die Reflexion bezüglich  $y, z$  Ebene beschrieben durch:

$$R_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \det R_x = -1$$

Fakt: Jedes Element von  $O(3)$  ist schreibbar als  $R$  oder  $R \cdot R_x$  mit  $R \in SO(3)$ ,  $SO(3)$  sind „echte“ Drehungen.

Überlegen Sie sich, dass  $R \in SO(2)$  allgemein schreibbar ist als

$$R = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Identifizieren sie  $SO(2)$  mit folgender Menge

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Die Gruppenoperation soll der komplexen Multiplikation entsprechen

## 6.4 Tensoren

Ein Tensor von Rang (oder Stufe)  $m$  im  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $V = \mathbb{R}^n$  ist eine multilineare Abbildung:

$$t : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{m\text{-mal}} \rightarrow \mathbb{R}$$

Praktisch:

$$t : (\vec{x}_{(1)}, \vec{x}_{(2)}, \dots, \vec{x}_{(n)}) \mapsto t_{i_1 \dots i_m} x_{(1)}^{i_1} \dots x_{(m)}^{i_m}$$

**Beispiel 6.7** • Euklidisches Skalarprodukt:  $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

$$\delta : (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \delta_{ij} x^i y^j \equiv \vec{x} \cdot \vec{y} \in \mathbb{R}$$

- Noch einfacher:

$$t : V \rightarrow \mathbb{R} : t_i \vec{x} \rightarrow t_i x^i \in \mathbb{R}$$

Die Menge solcher linearen Abbildungen bildet auch einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum, den sogenannten Dualraum  $V^*$  (zu  $V$ ) Notation:  $\underline{t} = \{t_1, \dots, t_n\} \in V^*$

Erinnerung:  $\vec{x} = \{x^1, \dots, x^n\} \in V$

Oben(Unten schreiben der Indizes macht die „natürliche Wirkung“) von  $\underline{t}$  auf  $\vec{x}$  besonders deutlich:  $t_i x^i \in \mathbb{R}$

- oben: kontravariant
- unten: kovariant ( $\rightarrow$  Co-Vektor  $\in V^*$ )

Für und: enorme Vereinfachung:

Wir haben immer euklidischen Raum und damit die besondere Rolle von  $\delta_{ij}$  und die inverse Matrix  $\delta^{ij}$

$$\delta_{ij} \delta^{jk} = \delta_i^k = \left( \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{smallmatrix} \right)_i^k$$

Dies erlaubt uns Indizes beliebig zu „heben“ und zu „senken“:

$$t^i \equiv \delta^{ij} t_j, x_i \equiv \delta_{ij} x^j$$

Damit können wir  $V$  und  $V^*$  identifizieren. Wir können auch alle Tensor Indizes beliebig oben oder unten schreiben. Wir werden zur Vereinfachung weiterhin schreiben

$$\vec{x} \vec{y} = x^i y^i \text{ (eigentlich } x^i y^j \delta_{ij} \text{)}$$

(Mehr zum Dualraum in Lineare Algebra)

Für uns: Tensor der Stufe 1: ist Vektor

$$t : \vec{x} \mapsto t^i x^i = \vec{t} \vec{x} \in \mathbb{R}$$

Wichtig für uns: Resultat von Anwendung eines Rang-1-Tensors auf Vektor ist invariant unter Drehungen:

$$x \mapsto Rx; t \mapsto Rt$$

$$x \mapsto x' = Rx, x^{ij} = R^{ij} x^j$$

Invarianz:

$$t^T x = t^T R^T R x$$

Betrachte einfaches, allgemeines Beispiel für Tensor der Stufe 2:

$$t \equiv U \otimes W \in V \otimes V$$

$$t : (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (u^i w^j) \cdot (x^i y^j) = (\vec{u} \cdot \vec{x}) \cdot (\vec{w} \cdot \vec{y})$$

mit  $t^{ij} \equiv u^i w^j$

$$= t^{ij} x^i y^j$$

Grob gesagt:  $V \otimes V$  ist die Menge aller Linearkombinationen von Elementen wie  $U \otimes W$   
Transformation von  $t^{ij} = u^i w^j$  unter Drehungen:

$$t^{ij} = u^i w^j \xrightarrow{R} R^{ik} u^k R^{jl} w^l = R^{ik} R^{jl} t^{kl}$$

Invarianz von  $t(\vec{x}, \vec{y})$ :

$$\begin{aligned} t(\vec{x}, \vec{y}) &\rightarrow (Rt)(Rx, Ry) = (R^{ik} R^{jl} t^{kl}) (R^{ip} x^p) (R^{jq} y^q) \\ &= (R^{ik} R^{ip}) (R^{jl} R^{jq}) t^{kl} x^p y^q \\ &= \delta^{kp} \delta^{lq} t^{kl} x^p y^q \\ &= t^{kl} x^k y^l \\ &= t(\vec{x}, \vec{y}) \end{aligned}$$

Allgemeine Transformation eines Tensors unter Drehungen:

$$t \rightarrow t' = Rt, t'^{i_1 \dots i_m} = R^{i_1 j_1} \dots R^{i_m j_m} t^{j_1 \dots j_m}$$

Invarianz von  $t(\vec{u}_{(1)}, \dots, \vec{u}_{(m)})$  folgt wie oben.

Fortgeschrittener Kommentar: Gruppe wirkt auf Vektoren aus  $K \equiv$  Darstellung

Für unser Beispiel der Wirkung von  $O(n)$  auf  $\mathbb{R}^k$  war das „offensichtlich“ mit Tensoren haben wir „nicht triviales Beispiel für Darstellung“

$$\underbrace{R \in O(n)}_{\text{Elemente } R^{ij}} \xrightarrow{\text{Darst.}} D(R) \in \underbrace{n^2 \times n^2\text{-Matrizen}}_{\text{Elemente } D(R)^{ij,kl} = R^{ik} R^{jl}}$$

Dieses  $D(R)$  wirkt wie oben beschrieben auf Tensoren:

$$t^{ij} \xrightarrow{D(R)} D(R)^{ij,kl} t^{kl}$$

$D(R)$  ist eine Darstellung von  $O(n)$ , die verschieden ist von der „definierenden“ Darstellung  
**Transformation von  $\delta^{ij}$**

$$\delta'^{ij} = R^{ik} R^{jl} \delta^{kl} = R^{ik} R^{jk} = \delta^{ij}$$

$\implies \delta^{ij}$  ist ein **invarianter Tensor**

weiteres Beispiel: (für  $m = n$ : Levi Civita-Tensor)

Wir schreiben nur  $m = n = 3$  Fall aus:

$$\varepsilon(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \varepsilon^{ijk} x^i y^j z^k = x^i \varepsilon^{ijk} y^j z^k = \vec{x}(\vec{y} \times \vec{z})$$

**Transformation:**

$$\varepsilon^{i_1 i_2 i_3} = R^{i_1 j_1} R^{i_2 j_2} R^{i_3 j_3} \varepsilon^{j_1 j_2 j_3} = \varepsilon^{i_1 i_2 i_3} \det(R) = \varepsilon^{i_1 i_2 i_3} \downarrow \\ R \in SO(3)$$

**Fakt:** Falls  $t_1, t_2$  Tensoren vom Rang  $m_1, m_2$  sind, so ist das folgende ein Tensor vom Rang  $m_1 + m_2 - 2l_i$ :

$$t_1^{i_1 \dots i_l i_{l+1} \dots i_m} t_2^{i_1 \dots i_l j_{l+1} \dots j_{m_2}} = t^{i_{l+1} \dots i_{m_1} j_{l+1} \dots j_{m_2}}$$

**Anwendungen:**  $\vec{a} \times \vec{b}$  ist ein Pseudovektor:

$$\left( \vec{a}' \times \vec{b}' \right)^i \equiv \varepsilon^{ijk} a'^j b'^k = \pm \varepsilon^{ijk} a'^j b'^k = \pm R^{il} \varepsilon^{ljk} a^j b^k = \pm R^{il} \left( \vec{a} \times \vec{b} \right)^l \\ \downarrow \\ \text{falls Spiegelung}$$

**6.5 Galilei-Transformationen**

**Bisher:**  $\mathbb{R}^3$  mit Symmetriegruppe  $O(3)$

**Jetzt:** Physikalische Raumzeit: Zusätzlich:  $t \in \mathbb{R}$

Punkt  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{neu}}$  Ereignisse  $(t, \vec{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$

Müssen abschaffen:  $\vec{0}$  im Vektorraum. In der Tat:  $|\vec{x}|, |\vec{y}|$  sind unphysikalisch, physikalisch ist nur  $|\vec{x} - \vec{y}|$ , ebenso ist nur  $t_1 - t_2$  physikalisch

$\Rightarrow$  Symmetrietransformationen:

1. Rotationen:  $(t, x) \mapsto (t, Rx), R \in O(3)$
2. Translationen:  $(t, x) \mapsto (t + s, x + y), s \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$  Abschaffung der  $0 \in \mathbb{R}$  und  $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$ ,
3. Boosts:  $(t, x) \mapsto (t, x + vt), v \in \mathbb{R}^3$  „zeitabhängige Verschiebung“

Die Galilei-Gruppe  $G$  ist die von 1., 2. und 3. „generierte“ Gruppe. Nicht trivialer Fakt: Jedes  $g \in G$  ist

$\begin{array}{ccc} \text{Boost} & & \text{Rot.} \\ \uparrow & & \uparrow \\ g & = & g_3 \circ g_2 \circ g_1 \end{array}$

Man muss dazu unter anderem zeigen, dass es zu einem  $g_2 \circ g_1 \circ g_3'' \in G$  ein

$\downarrow$   
Trans

$g_2'', g_1''$  gibt, sodass  $g_2 \circ g_1 \circ g_3'' = g_2'' \circ g_1''$

„Boost“ = Zunahme (der Geschwindigkeit). Boost einer Trajektorie:  $(t, \vec{x}(t)) \mapsto (t, \vec{x}(t) + \vec{v}_0 t)$

$\vec{v} = \dot{\vec{x}}(t) \mapsto \vec{v}' = \dot{\vec{x}}(t) + \vec{v}_0$

Boost zerstört das Konzept der Gleichörtlichkeit: Seien  $(t, x), (t', x)$  zwei Ereignisse am gleichen Ort. Boost  $\Rightarrow (t, x + vt), (t', x + vt')$ , **nicht** mehr am gleichen Ort

**6.6 Affiner Raum**

**Definition 6.8**  $O(3)$  Symmetriegruppe des euklidischen Raumes. „Elegant!“

Besser: Definition des **affinen Raumes**: Gegeben sein Menge  $A$ , ein Vektorraum  $V$  und eine Abbildung  $A \times A \rightarrow V, (P, Q) \mapsto \vec{PQ}$  sodass  $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$ . Außerdem: Zu jedem  $P \in A$ ,  $\vec{V}$  soll es eindeutig ein  $Q \in A$  geben, sodass  $\vec{PQ} = \vec{V}$ , das Paar  $(A, V)$  heißt affiner Raum

**Beispiel 6.9** Zu jedem Vektorraum gehört ein affiner Raum: Wähle  $A \equiv V, V \times V \rightarrow V, (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{y} - \vec{x}$

Sei  $(A^4, V^4)$  ein 4-dimensionaler affiner Raum. (Man denke zum Beispiel an den zu  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  gehörigen affinen Raum)

Physikalische Raumzeit:  $(A^{(4)}, V^{(4)})$  mit



1. Eine lineare Abbildung  $V^4 \rightarrow \mathbb{R}$  („Zeitfunktion“) (im konkreten Beispiel:  $((t, x), (t', x')) \mapsto t' - t$ )
2. Sei  $\tilde{V}^{(3)} \subset V^{(4)}$  der Raum von Pfeilen zwischen gleichzeitigen Ereignissen ( $v \in \tilde{V}^{(3)}$  heißt  $T(\tilde{v}) = 0$ )  
Dann hat  $\tilde{V}$  ein Skalarprodukt, „Abstandsfunktion“. Im konkreten Beispiel:  $(t, x), (t, x') \mapsto |x - x'|$

Zusammen bilden 1. und 2. eine Galileische Struktur. Die physikalische Raumzeit ist  $(A^{(4)}, V^{(4)})$  mit galileischer Struktur

$G$  sind die Transformationen des  $(A^{(4)}, V^{(4)})$ , welche seine Galileische Struktur respektieren.

## 6.7 Dynamik

Dynamik soll invariant sein! Betrachte Trajektorie, die die Bewegungsgleichung erfüllt:

$$(t, \vec{x}(t)), m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F}(t, \vec{x}(t))$$

Transformierte Trajektorie:

$$t', \vec{x}'(t') = (t + s, R\vec{x}(t) + \vec{y} + \vec{v}(t + s))$$

Dazu:

$$m \frac{d^2}{dt'^2} = m \frac{d^2}{dt^2} = m \frac{d^2}{dt^2} (R\vec{x}(t) + \vec{y} + \vec{v}(t + s)) = m R \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = R \vec{F}(t, \vec{x}(t))$$

$\Rightarrow$  Newtonsche Dynamik ist invariant falls Kräfte wie Vektoren transformieren. (hatten wir schon verlangt)  
Bei Systemen von Massenpunkten mit Zentralkräften ist die Kraft gleich dem Gradient, sie besitzt automatisch Vektor-Transformationseigenschaften

Wir fordern bei

$$m R \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = R \vec{F}(t, \vec{x}(t))$$

eigentlich

$$R \vec{F}(t, \vec{x}(t)) = \vec{F}'(t', \vec{x}'(t'))$$

Wichtig: Die Transformation von  $\vec{F}$  beinhaltet nicht nur Drehung, sondern auch Transformation über das Argument.  
Betrachte zur Vereinfachung  $R = \mathbb{K} \Rightarrow \vec{F}'(t', \vec{x}') = \vec{F}(t, \vec{x})$

Geschwindigkeitsabhängige Kräfte: zum Beispiel Reibung

$$\vec{F}_R = -\alpha \begin{pmatrix} \dot{\vec{x}} - \vec{u} \\ \downarrow \\ \text{Medium} \end{pmatrix}$$

## 6.8 Zusammenfassung:

All gemeingültiges Schema:

- Beschreibung der Bewegung festlegen (Spielfeld) (hier: affiner Raum und Galileische Struktur)
- Identifikation der Symmetriegruppe (hier Galilei Gruppe)
- Invarianz der Dynamik prüfen beziehungsweise fordern (Spielregeln) (Newtonsches Grundgesetz)

## 7 Wechsel der Koordinatensystems und Scheinkräfte

### 7.1 Wechsel des Koordinatensystems im euklidischen Raum

$$V = \mathbb{R}^n, n = 3$$

**Bisher:**

Immer feste Basis

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = x^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x^i \vec{e}^i$$

$\{\vec{e}^i\}$  - durch „i“ nummerierte Basisvektoren.

**Wichtig:**

- In Physik gibt es keine ausgezeichnete Basis.
- können Basis / Koordinatensystem wechseln

$$\vec{e}'^k = R^{ik} \vec{e}^k$$

(analog zu  $\vec{x} = x^i \vec{e}^i$ ) **Wichtig:**  $\{\vec{e}'^i\}$  wieder Basis  $\iff R \in GL(n)$

**Hier:** euklidischer Raum: Orthonormalbasen:  $\vec{e}^i \vec{e}^j = \delta^{ij}$

Wenn  $\{\vec{e}^i\}$  Orthonormalbasis, so wird  $\{\vec{e}'^i\}$  auch eine sein, falls  $R \in O(n)$

$$\vec{e}'^i \vec{e}'^j = \left( R^{ik} \vec{e}^k \right) \left( R^{jl} \vec{e}^l \right) = R^{ik} R^{jl} \delta^{kl} = \delta^{ij}$$

Wir können festen Vektor  $\vec{x}$  bezüglich neuer Basis zerlegen:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= x'^i \vec{e}'^i = x'^i R^{ij} \vec{e}^j = x^j \vec{e}^j \\ &\implies x^j = x'^i R^{ij} \\ &\xrightarrow{\cdot (R^T)^{jk}} x^j (R^T)^{jk} = x'^i R^{ij} (R^T)^{jk} \\ x'^k &= R^{kj} x^j \end{aligned} \quad (\text{gleiche Formel, wie bei Drehung um } R)$$

Dies ist nicht unerwartet, da  $\{\vec{e}'^i\}$  aus  $\{\vec{e}^i\}$  durch Drehung  $R^{-1}$  hervorgeht:

\*Dazu\*: Die Vektoren  $\{\vec{e}^i\}$  haben bezüglich der Basis  $\{\vec{e}'^i\}$  die Komponenten  $\delta^{ij}$ :

$$\begin{aligned} \vec{e}^i &= \delta^{ij} \vec{e}'^j, (\vec{e}^i)^j = \delta^{ij} \\ \vec{e}'^i &= R^{ij} \vec{e}^j, (\vec{e}'^i)^j = R^{ij} \end{aligned}$$

also gilt:

$$\begin{aligned} (\vec{e}'^i)^j &= R^{ij} = (R^{-1})^{ji} = (R^{-1})^{jk} \delta^{ki} = (R^{-1})^{jk} (\vec{e}^i)^k \\ (\vec{e}'^i)^j &= (R^{-1})^{jk} (\vec{e}^i)^k \end{aligned}$$

$\implies$  Behauptung ist gezeigt

## 7.2 Aktive und Passive Beschreibung von Symmetrien

- Aktiv: Transformieren physikalisches Objekt
- Passiv: Wechsle Koordinatensystem

### Beispiel 7.1 ()

- Aktiv:  $x \rightarrow x' = Rx$ . Symmetrieforderung:  $\vec{x}' \cdot \vec{y}' = \vec{x} \cdot \vec{y}$ , also: Skalarproduktinvarianz
- Passiv:  $\vec{x}$  fest. Komponenten (Es gilt:  $\vec{e}'^i = R^{ij} \vec{e}^j$ )
  - $x^i$  in Basis  $\{\vec{e}^i\}$
  - $x'^i = R^{ij} x^j$  in Basis  $\{\vec{e}'^i\}$

Symmetrieforderung: Mathematischer Ausdruck für Skalarprodukt soll in neuen Komponenten die **gleiche Form haben**. In der Tat:

- alt:  $\vec{x} \cdot \vec{y} = x^i y^i$
- neu:  $\vec{x}' \cdot \vec{y}' = x'^i y'^i = (R^{-1})^{ij} x^j (R^{-1})^{ik} y^k = x^i y^i \checkmark$

**Beispiel 7.2 (Galilei-Transformation)** • Aktiv:  $(t, x(t)) \rightarrow (t + s, Rx(t) + y + (t + s)v)$ . Symmetrieforderung: Neue Trajektorie ist auch physikalische Bewegung.

- Passiv: Sei  $\vec{x}_0 = \vec{a} + \vec{b}t$  der Vektor, der vom alten zum neuen Koordinatenursprung zeigt:

$$\vec{x}_n = \vec{x} - (\vec{a} + \vec{b}t)$$

Bezeichne Komponenten von  $\vec{x}_n$  bezüglich der neuen, gedrehten Basis mit  $x'^j$

$$x'(t) = A^{-1}(x - a - bt) = Rx + y + vt$$

mit  $R \equiv A^{-1}$ ,  $y \equiv -A^{-1}a$ ,  $v \equiv -A^{-1}b$  (könnte auch noch Uhren umstellen  $\rightarrow s$ )

- Transformation sieht formal so aus, wie im aktiven Fall  
Symmetrieforderung: „Newton“ soll gleiche Form haben: Prüfen dies:

$$\begin{aligned} \ddot{x}' &= R\ddot{x} = R \frac{F}{m} = \frac{F'}{m} \checkmark \\ &\downarrow \\ &\text{noch zeitunabhängig} \end{aligned}$$

## 7.3 Beschleunigte, nichtrotierende Koordinatensysteme

keine Symmetrietransformation! Nichtinertialsysteme!

$\vec{x}_0(t)$  beschreibe Bewegung des „neuen“ Ursprungs

$$\begin{aligned} \vec{x}_I &= \vec{x}_0 + \vec{x} \implies \ddot{\vec{x}} = \ddot{\vec{x}}_I - \ddot{\vec{x}}_0 & (\text{Inertial}) \\ m\ddot{\vec{x}} &= m\ddot{\vec{x}}_I - m\ddot{\vec{x}}_0 = \vec{F} + \vec{F}_s \\ &\downarrow \\ &\text{Scheinkraft} \\ F_s &\equiv -m\ddot{\vec{x}}_0 \end{aligned}$$

$\implies$  Im Nichtinertialsystem bewegt sich ein Punkt so, als gäbe es eine zusätzliche Kraft:  $m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} + \vec{F}_s$

## 7.4 Kleine Drehungen

### Definition 7.3 (Spur)

$$M_{ii} = \text{sp}(M) = \sum_i a_i$$

$\text{sp}(M)$  wird als Spur bezeichnet, und entspricht der Summe über die Diagonalelemente

rotierendes Bezugssystem (NIS)

Drehungen:  $R(t) \in SO(u)$ ,  $R^T R = \mathbb{1}$  für  $t \sim \epsilon$ ,  $R(0) = \mathbb{1}$

$$R(\epsilon) = \mathbb{1} + \epsilon M + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$\begin{aligned} R(\epsilon)R^T(\epsilon) &= (\mathbb{1} + \epsilon M)(\mathbb{1} + \epsilon M^T) \stackrel{!}{=} \\ &= \mathbb{1} + \epsilon \left( \underbrace{M + M^T}_0 \right) \stackrel{!}{=} \mathbb{1} \end{aligned}$$

$\implies M$  ist antisymmetrisch!,  $M_{ij} = -M_{ji}$ . Es gibt  $N_A = \frac{n(n-1)}{2}$  linear unabhängige Basismatrizen  $T_a$ .

**Beispiel 7.4 ( $n = 3$ )** Für  $n = 3$ :  $N_A = 3$ :

$$M = \epsilon_a t_a t_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} t_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} t_3$$

$$(T_i)_{j,k} = \varepsilon_{ijk}$$

$$\vec{\epsilon} = |\vec{\epsilon}| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} R(\vec{\epsilon}) &= \mathbb{1} + |\epsilon| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|\vec{\epsilon}|^2) = \begin{pmatrix} 1 & |\vec{\epsilon}| & 0 \\ -|\vec{\epsilon}| & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|\vec{\epsilon}|^2) \\ &= \begin{pmatrix} \cos |\vec{\epsilon}| & \sin |\vec{\epsilon}| & 0 \\ -\sin |\vec{\epsilon}| & \cos |\vec{\epsilon}| & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|\vec{\epsilon}|^2) \end{aligned}$$

Anwendung:

$$\begin{aligned} \vec{\Delta\phi} &= -\vec{\epsilon} \\ R(\vec{\Delta\phi}) &= \mathbb{1} - \vec{\Delta\phi} \vec{T} \\ R(\vec{\Delta\phi})_{ij} &= \delta_{ij} - \Delta\phi_k \varepsilon_{ijk} \\ R(\vec{\Delta\phi})_{ij} v_j &= v_i + \Delta\phi_k \varepsilon_{ikj} v_j \\ R(\vec{\Delta\phi}) \vec{v} &= \vec{v} + \vec{\Delta\phi} \times \vec{v} \end{aligned}$$

Trivia: Wenn jemand mit Deltas anfängt, dann hört er auch mit d's auf.

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= v \\ \vec{v}(t + \Delta t) &= R(\vec{\Delta\phi}) \vec{v} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} &= \frac{(R(\vec{\Delta\phi}) - \mathbb{I})}{\Delta t} \vec{v} = \underbrace{\frac{\vec{\Delta\phi}}{\Delta t}}_{\vec{\omega}} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \vec{\omega} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta\phi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} = \dot{\vec{\phi}}\end{aligned}$$

## 7.5 Rotierendes Koordinatensystem

In diesem Abschnitt sei  $r_x, \omega_x \in \mathbb{R}^3$

$r_I$ : Geschwindigkeit im Inertialsystem

Im Inertialsystem

$$\begin{aligned}r_I &= r_0(t) + r_N \\ &= r_0(t) + R(t)r\end{aligned}$$

Newton im Inertialsystem

$$\begin{aligned}m\ddot{r}_I &= F_I \\ \implies m\ddot{r}_0 + (R \cdot r)'' &= F_I = R \cdot F \\ \dot{R}(t) \cdot r &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t + \Delta t) - R(t)}{\Delta t} r\end{aligned}$$

wichtige Formel:  $\dot{R}(t) \cdot r = R(\omega \times r)$ , damit erhält man:

$$\begin{aligned}&= \frac{(R(\Delta t) - \mathbb{I})}{\Delta t} R(t)r = \omega_{IS} \times R(t) \cdot r = (R\omega) \times (Rr) = R(\omega \times r) \\ &\quad \downarrow \\ &\quad R\omega \\ (Rr)'' &= (\dot{R}r + R\dot{r})' = (R(\omega \times r) + R\dot{r})' = \dot{R}(\omega \times r) + R(\dot{\omega} \times r) + R(\omega \times \dot{r}) + \dot{R}\dot{r} + R\ddot{r} \\ &= R(\omega \times (\omega \times r) + \dot{\omega} \times r + 2(\omega \times \dot{r}) + \ddot{r}) \\ \implies m\ddot{r} &= F - m \left( (R^{-1})\ddot{r}_0 + \underbrace{\omega \times (\omega \times r)}_{F_{Zentrifugal}} + \underbrace{2\omega \times \dot{r}}_{F_{Coriolis}} + \underbrace{\dot{\omega} \times r}_{E_{Tangential}} \right)\end{aligned}$$

### Bemerkung 7.5 (Zentrifugalkraft)

$F_z$ :

$$\begin{aligned}(-\omega \times (\omega \times r))_k &= -\varepsilon_{ijk}\omega_i\varepsilon_{lmj}\omega_l r_m \\ &= -(\delta_{lk}\delta_{mi} - \delta_{mk}\delta_{li})\omega_l r_m \omega_i \\ &= -(\omega r)\omega_k + r_k(\omega^2)\end{aligned}$$

für  $\omega \perp r$ :

$$\vec{F}_z = m\omega^2 \vec{r}$$

**Bemerkung 7.6 (Corioliskraft)**

$F_c$  zum Beispiel:  $r \perp \omega$

$$\vec{F}_c = -2m|\vec{\omega}||\vec{v}|\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = 2m|\omega||\omega v|\vec{e}_2$$

**7.6 Trägheitstensor**

Massenpunkte bei  $\vec{r}_a$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_a}{\Delta t} &= \frac{\vec{\Delta \phi}}{\Delta t} \times \vec{r}_a = \frac{d\vec{r}_a}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}_a \\ E_{kin} &= \sum_a \frac{m_a}{2} (\dot{\vec{r}}_a^2) = \sum_a \frac{m_a}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_a)^2 \\ &= \sum_a \frac{m_a}{2} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} \omega_i (r_a)_j \omega_l (r_a)_m \\ &= \sum_a \frac{m_a}{2} (\delta_{jm} \delta_{ij} - \delta_{jl} \delta_{im}) \omega_i \omega_l (r_a)_j (r_a)_m \\ &= \sum_a \frac{1}{2} m_a \underbrace{(\Delta_{ij} r_a^2 - (r_a)_i (r_a)_j)}_{I_{ij}} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j \\ &= \frac{1}{2} \omega^T I \omega \\ I &= \int d^3r \rho(r) (\mathbb{K} \vec{r}^2 - \vec{r} \otimes \vec{r}^T) \\ &\quad \downarrow \\ &\quad \text{Massendichte} \end{aligned}$$

$$I_{ij} = \int d^3r \rho(r) (\vec{r}^2 \delta_{ij} - r_i r_j)$$

$$\varepsilon^{ijk} \varepsilon^{lmn} = N \left( \delta^{il} \delta^{jm} \delta^{kn} + \dots \right) \\ \delta^{ij} = i$$

**8 Zentralkraftproblem****8.1 Motivation**

für Kräfte zwischen Massenpunkten die parallel zur Verbindungslinie wirken: Potentialbeschreibung

$$\vec{F}_1 = -\vec{\nabla}_1 V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \\ \downarrow \\ \vec{x}_1$$

Besonders wichtig:

$$V(r) \sim \frac{1}{r}$$

**Beispiel 8.1 (Gravitation)**

$$\begin{aligned}
 V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) &= -\frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \\
 \vec{F}_1 &= -\frac{-\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} G_N m_1 m_2 \\
 &= -\frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2} \frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}
 \end{aligned}$$

Nichttriviale Aussage: „träge Masse = schwere Masse“

**Beispiel 8.2 (Elektrostatik)**

$$V = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$$

Vereinfachung:

1. Masse  $m_2$  bei  $\vec{0}$  fixiert
2.  $m_2 \gg m_1 \implies$  analog zu 1.

$$\implies V(\vec{x}) = -\frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{x}|} = V(r) = -\frac{G_N m_1 m_2}{r}$$

**8.2 Zweikörperproblem**

Lassen Bewegung beider Massen zu

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{\vec{x}}_1 &= -\vec{\nabla}_1 V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \\
 m_2 \ddot{\vec{x}}_2 &= -\vec{\nabla}_2 V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)
 \end{aligned}$$

Betrachte passende Linearkombination:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\vec{x}}_1 - \ddot{\vec{x}}_2 &= \frac{1}{m_1} \left( -\vec{\nabla} V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \right) - \frac{1}{m_2} \left( -\vec{\nabla} V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \right) \\
 &= \underbrace{\left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}_{\equiv \frac{1}{m}} \left( -\vec{\nabla} V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \right)
 \end{aligned}$$

Man erhält Gleichung für die Relativkoordinate  $\vec{x}_1 - \vec{x}_2$

$$(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)'' = \frac{1}{m} \left( -\vec{\nabla} V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|) \right) \frac{1}{m} \equiv \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{Reduzierte Masse})$$

Zusätzlich: Addition der beiden Gleichungen gibt:

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{\vec{x}}_1 + m_2 \ddot{\vec{x}}_2 &= 0 \\
 \implies \ddot{\vec{x}}_s &= 0
 \end{aligned}$$

Mit  $\vec{x}_s \equiv$  Schwerpunktskoordinate, bewegt sich frei

$$\vec{x}_s \equiv \frac{m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2}{m_1 + m_2}$$

$\implies$  Das zu lösende Problem ist also nur die Bewegung der Relativkoordinate

$$m \ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla} V(|\vec{x}|)$$

Das ist Zentralkraftproblem mit ursprünglichem Potential, aber mit der reduzierten Masse

### 8.3 Allgemeine Koordinatensysteme

Kenne bereits:  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

$$x^1 = \Re z$$

$$x^2 = \Im z$$

$\implies$

$$r = |z|$$

$$\phi = \arg z$$

„Polarkoordinaten“, sind einfaches Beispiel für mögliche allgemeine Parametrisierung.

#### Beispiel 8.3 (Zylinderkoordinaten)

$$x^1 = r \cos \phi$$

$$x^2 = r \sin \phi$$

$$x^3 = z$$

Wichtig: Eineindeutige Abbildung  $(x^1, x^2, x^3) \leftrightarrow (r, \phi, z)$  (und allgemein). Hier:

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$$

$$\phi = \arctan \frac{x^2}{x^1}$$

$$z = x^3$$

#### Beispiel 8.4 (Kugelkoordinaten)

$$x^1 = r \sin \theta \cos \phi$$

$$x^2 = r \sin \theta \sin \phi$$

$$x^3 = r \cos \theta$$

### 8.4 Zentralkraftproblem

(Nach allgemeines  $V(r)$ ). Wir wissen bereits:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{const}, \vec{p} = m\dot{\vec{r}}, \vec{r} = \text{Koordinaten des Teilchens}$$

Es gilt  $\vec{L} \perp \vec{r} \wedge \vec{L} = \text{const} \implies$  Bewegung in fester Ebene. Also ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist die Bewegung in der  $(1-2)$ -Ebene. Außerdem: Problem rotationssymmetrisch.

$\implies$  angemessene Beschreibung: Polarkoordinaten (Winkel und Rotation)

naiv:

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$$

$\downarrow$

durch  $r, \phi$  ausdrücken

eleganter: Weiter mit Drehimpulserhaltung (wieder:  $\vec{x} \rightarrow \vec{r}$ )

$$\vec{L} = \text{const}, \text{const} = \left| \vec{L} \right| = m \left| \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \right| = mr \cdot r\dot{\phi} = mr^2\dot{\phi}$$



Nachrechnen:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= (r \cos \phi, r \sin \phi) \cdot \\ &= \underbrace{\left( \dot{r} \cos \phi, \dot{r} \sin \phi \right)}_{\|\dot{\vec{r}}\| \Rightarrow \text{Radialgeschwindigkeit}} + \underbrace{(r(-\sin \phi), r \cos \phi) \dot{\phi}}_{\perp \vec{r} \Rightarrow \text{Tangentialgeschwindigkeit}}\end{aligned}$$

Insbesondere:

$$r\dot{\phi} \equiv \text{Betrag der Tangentengeschwindigkeit}$$

Konstanz von  $|\vec{L}|$  geometrische Interpretation:

Berechne die von „Leitstrahl“ in Zeit  $dt$  überstrichene Fläche: „Die Flächengeschwindigkeit ist konstant“ (2. Keplersches Gesetz)

$$\begin{aligned}df &= \frac{1}{2} r r d\phi \\ \frac{df}{dt} &= \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} = \text{const}\end{aligned}$$

Energieerhaltung:

$$E = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + V(r) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + V(r) = \text{const}$$

Kombinieren mit Drehimpulserhaltung gibt: ( $L \equiv |\vec{L}|$ )

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \frac{L}{mr^2} \\ E &= \frac{m}{2} r^2 \dot{\phi}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)\end{aligned}$$

Definiere:

$$U(r) \equiv \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

$\Rightarrow$  Energieerhaltung:

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + U(r)$$

Dies ist die Energieerhaltung für das „effektive 1-dimensionale Problem mit dem effektiven Potential“. Dieses ist allgemein lösbar mit

$$\int dt = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r))}}$$

Damit  $t = t(r)$

$$\Rightarrow r = r(t) \Rightarrow \dot{\phi}(t) \Rightarrow \phi(t) \text{ (Integrieren)}$$

Explizit lösbar:  $V \sim \frac{1}{r}, V \sim r^2$

### 8.5 Qualitative Lösung des Zentralkraftproblems

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{m}{2} \dot{r}^2 + U(r) \\
 U(r) &= \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \\
 &= \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \\
 \alpha &= g_N m_1 m_2
 \end{aligned}
 \tag{Kepler}$$

- Fall 1:  $E > 0 \implies$  minimales, aber kein maximales  $r$
- Fall 2:  $E < 0 \implies r$  zwischen zwei Extrema

$V \sim \frac{1}{r} \implies$  keine Periheldrehung.

allgemeiner: Periheldrehung trifft auf! (kein Schließen der Bahn)

### 8.6 Kepler-Problem: Bahnform

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \\
 \dot{E} &= 0 = m\dot{r}\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3}\dot{r} + \frac{\alpha}{r^2}\dot{r} \\
 m\ddot{r} &= \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2}
 \end{aligned}$$

Schreibe  $\frac{d}{dt}$  in  $\frac{d}{d\phi}$  um, da  $r(t)$  nicht lösbar:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\dots) &= \frac{d\phi}{dt} \frac{d}{d\phi}(\dots) \\
 &= \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\phi}(\dots)
 \end{aligned}$$

speziell:

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\phi}(r) = -\frac{L}{m} \frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{r}\right) \\
 m\ddot{r} &= m \frac{L^2}{mr^2} \frac{d}{d\phi}\left(-\frac{L}{m} \frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{r}\right)\right) \\
 &= -\frac{L^2}{mr^2} \frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right) \\
 -\frac{L^2}{mr^2} \frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right) &= \frac{L^2}{mr^3} - \frac{\alpha}{r^2} \\
 \frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right) &= -\frac{1}{r} + \frac{m\alpha}{L^2}
 \end{aligned}$$

Definiere  $u \equiv \frac{1}{r}$ ,  $\frac{d}{d\phi}(\dots) = (\dots)'$

$$u'' = -u + \frac{m\alpha}{L^2}$$

harmonischer Oszillator mit äußerer Kraft, weiter mit  $w \equiv u - \frac{m\alpha}{L^2}$

$$w'' = -w$$

Allgemeine Lösung:

$$w = A \cos \phi - \phi_0$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit:  $\phi_0 = 0$ , so dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{L^2} &= A \cos \phi \\ r &= \frac{1}{\frac{m\alpha}{L^2} + A \cos \phi} \\ r &= \frac{p}{1 + e \cos \phi} \\ p &= \frac{L^2}{m\alpha} \\ e &= \sqrt{2 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \end{aligned}$$

Herleitung der letzten Formel für  $e$ :

leite nach  $t$  ab:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi}$$

Diese verschwindet bei  $\phi = 0$ . Dort gilt dann:

$$\begin{aligned} E &= \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \\ r &= \frac{p}{1 + e} = \frac{\frac{L^2}{m\alpha}}{1 + e} \end{aligned}$$

Beides zusammen ergibt:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}}$$

## 8.7 Kegelschnitte

Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \phi}$$

- Kreis:  $e = 0$ ,  $r = \text{const}$ , physikalisch:  $E = U_{\min}$
- Ellipse:  $0 < e < 1 \implies r$  beschränkt

$$\phi = 0 \implies r = \frac{p}{1 + e}$$

$$\phi = \pi \implies r = \frac{p}{1 - e}$$

$$\phi = \pi \frac{\pi}{2} \implies r = p$$

$$\frac{p}{1 + e}$$

(Perihelabstand)

Außerdem

$$2a = p \left( \frac{1}{1+e} - \frac{1}{1-e} \right) = \frac{2p}{1-e^2}$$

$$a = \frac{p}{1-e^2}$$

Für die kleine Halbachse: Maximiere  $y \implies$  maximiere  $y^2$  (äquivalent)

$$0! \frac{dy^2}{dr}$$

$$y^2 = (r \sin \phi)^2 = r^2 (1 - \cos^2 \phi) = r^2 \left( 1 - \frac{1}{e^2} \left( \frac{p}{r} - 1 \right)^2 \right) = r^2 - \frac{1}{e^2} (p - r)^2$$

$$0 = 2 \left( r + \frac{1}{e^2} (p - r) \right)$$

$$r_0 = \frac{\frac{-p}{e}}{1 - \frac{1}{e^2}} = \frac{p}{1 - e^2}$$

Einsetzen in obige Formel für  $y$ :

$$y_{max} = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \equiv b$$

Andere Definition der Ellipse

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1$$

Vorsicht:  $x, y$  verschieden von  $\tilde{x}, \tilde{y}$ .

- Parabel:  $e = 1$ , physikalisch:  $E = 0$ , Körper „kommt im Unendlichen zur Ruhe“, weil

$$\frac{m}{2} v^2 = E - U(r) \wedge U(\infty) = 0$$

Skizze, etc.: DIY

- Hyperbel:  $e > 1, E > 0$ , Körper hat für  $r \rightarrow \infty$  nicht verschwindende Grenzggeschwindigkeit.

$$\phi = 0 \implies r = \frac{p}{1+e}$$

$$\phi = \pm \frac{\pi}{2} \implies r = p$$

$$r = \infty \implies 0 = 1 + e \cos \phi \iff \phi = \arccos -\frac{1}{e}$$

Wichtiger: Streuwinkel  $\theta$ :

$$\theta = \pi - 2(\pi - \phi) = 2\phi - \pi$$

## 8.8 Die Trajektorie

Wie bekannt:

$$t = \int \frac{r dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} r^2 + \frac{2\alpha}{m} r - \frac{L^2}{m^2}}}$$

Brauchen Fallunterscheidung für  $E$

### 8.8.1 Ellipse

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{2\alpha}{m}r - \frac{L^2}{m^2}}}$$

Ersetze:  $r \rightarrow s, r - a \equiv sae$

$$= \frac{ds(s + \frac{1}{e})}{\sqrt{1 - s^2}}$$

Ersetze  $s = -\cos \eta$

$$t = \sqrt{\frac{ma^2}{2|E|}} (\eta - e \sin \eta)$$

$$r = a(1 - e \cos \eta)$$

Dies ist die Parameterdarstellung.

### 8.9 Umlaufzeit

(Ellipsenbahn)

$$T = \int_{1 \text{ Umlauf}} dt =, L = mr^2 \dot{\phi} \frac{2m}{L} \int_{1 \text{ Umlauf}} df = \frac{2m}{L} F_{ell} = \frac{2m}{L} \pi ab$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi}$$

Begründung von  $F_{ell} = \pi ab$ : Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \xrightarrow{\text{Koordinatenwechsel}} x'^2 + y'^2 = 1$$

Also:

$$F_{ell} = \int_{\text{Ell}} dx dy = ab \int_{\text{Einh.kreis}} dx' dy' = \pi ab \checkmark$$

$$T = \frac{2\pi m}{L} ab = \frac{2\pi m}{L} \frac{p^2}{\sqrt{1 - e^2}^3} = \frac{2\pi m}{L} \frac{\left(\frac{L^2}{m\alpha}\right)^2}{\left(\frac{2|E|L^2}{m\alpha^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \pi\alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$$

Mit  $a = \frac{\alpha}{2|E|}$ :

$$= 2\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{m}{\alpha}}$$

**Satz 8.5 (Zweites Keplersches Gesetz)**  $T$  ist proportional zu  $a^{\frac{3}{2}}$ .

(Zur Vollständigkeit:)

**Satz 8.6 (Erstes Keplersches Gesetz)** Umlaufbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

**Bemerkung 8.7** Analoge Analyse für  $V = \frac{\pm\alpha}{r} \implies$  stets Hyperbelbahnen:

$$r = \frac{p}{-1 + e \cos \phi}$$

Es existiert eine **dritte** Erhaltungsgröße. Lenzscher Vektor:

$$\vec{v} \times \vec{L} - \frac{\alpha \vec{r}}{r} \implies \text{noch elegantere Analyse möglich}$$

Die Annahme  $m_2 \gg m_1$  stimmt für System Erde-Mond nicht sehr gut.  $\implies$  Gezeitenberge, Zentrifugalkraft, örtlich variierende Gravitationskraft.

## 9 Zerfalls und Stoßprozesse

Chemie, Kernphysik, Teilchenphysik (QM-Aspekte sehr wichtig → später), astrophysikalische Prozesse (zum Beispiel kollisionsfreie Begegnung zweier Himmelskörper)

### 9.1 Stoßparameter und Streuwinkel

Streuwinkel  $\theta$  folgt eindeutig aus  $b$  (bei mechanischem System)  $\implies$  Funktion  $\theta = \theta(b)$ . Bei perfekt reflektierender Kugel leicht zu berechnen:

$$\pi = 2\Delta\phi + \theta, b = R \sin(\Delta\phi)$$

Auflösen nach  $\theta$

$$\theta(b) = \pi - 2 \arcsin \frac{b}{R} = r \arccos\left(\frac{b}{R}\right)$$

Allgemeiner: Streuung an Zentralpotential  $V(r)$  (hier mit abstoßender Kraft) Obige starre Kugel entspricht dann dem Grenzfall

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r > R \\ \infty & r \leq R \end{cases}$$

Starte mit

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r))}}, L = mr^2 \frac{d\phi}{dt}$$

Hierbei:  $E = \frac{m}{2}v_\infty^2, L = mv_\infty b$

$$\phi = \int \frac{\frac{L^2}{r^2} dr}{\sqrt{2m(E - V(r)) - \frac{L^2}{r^2}}}$$

$$\Delta\phi = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{b dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2}}}$$

$r_{min}$  ist Lösung zu

$$1 - \frac{V(r)}{E} - \frac{b^2}{r^2} = 0$$

In der Tat: Bei  $r_{min}$  ist gerade  $dr = 0$  obgleich  $d\phi \neq 0$  ist. Dies geschieht exakt wenn  $\sqrt{\dots} = 0$

$$\implies \theta(b) = \pi - 2\Delta\phi \quad (\text{allgemein bekannt})$$

Für konkreten Fall  $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$  kennen wir Ergebnis:

$$\theta = 2\phi - \pi, \cos \phi = -\frac{1}{e}$$

Wir haben also:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = -\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2EL}{m\alpha^2}}}$$

Nutze:  $L = mr_\infty b, E = \frac{m}{2}v_\infty^2$

$$\theta(b) = 2 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2Eb}{\alpha}\right)^2}}\right)$$

## 9.2 Wirkungsquerschnitt

Teilchenstrahldichte:

$$n = \frac{\text{Teilchenzahl}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}}, [n] = \text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$$

$$\begin{array}{c} \text{N} \\ \uparrow \\ \Rightarrow \text{Zahl der gestreuten Teilchen pro Zeit} = n \cdot \sigma_{\text{tot}}, [N] = \text{s}^{-1} \\ \downarrow \\ \text{Querschnittsfläche des Targets} \end{array}$$

$\sigma_{\text{tot}}$  -totaler Wirkungsquerschnitt,  $\sigma_{\text{tot}} \equiv \frac{N}{n}$

### 9.2.1 Differentieller Wirkungsquerschnitt

$$dN = n \left( \frac{d\sigma}{d\theta}(\theta) \right)$$

Ring im Bild hat Fläche:

$$\begin{array}{c} 2\pi b \cdot db = d\sigma \\ d\Theta = \left| \frac{d\Theta(b)}{db} \right| |db| \end{array}$$

Damit können wir  $\frac{d\sigma}{d\theta}(\theta)$  bei bekannter Funktion  $\theta(b)$  berechnen:

$$\begin{aligned} dN &= n d\sigma = n 2\pi b db = n 2\pi b \left| \frac{d\theta}{db} \right|^{-1} d\theta \equiv n \left( \frac{d\sigma}{d\theta} \right) d\theta \\ \frac{d\sigma}{d\theta} &= 2\pi b \left| \frac{d\theta}{db} \right|^{-1} = 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| \end{aligned}$$

speziell:

$$\begin{aligned} b(\theta) &= R \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & (\text{Starre Kugel}) \\ \frac{d\sigma}{d\theta} &= \pi b R \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Es ist üblich  $d\theta$  in den differentiellen Raumwinkel umzurechnen:

$$\begin{aligned} \sigma^2 d\Omega &= 2\pi \sin \theta d\theta \\ b(\theta) &= R \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \frac{d\sigma}{d\theta} &= \pi b R \sin \frac{\theta}{2} \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{R^2}{4} \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{d\sigma}{2\pi \sim \theta d\theta} = \frac{\pi b R \sin \frac{\theta}{2}}{2\pi \sin \theta} = \frac{\pi R^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{2\pi \sin \theta} \checkmark \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  gleichberechtigte Streuung in alle Richtungen. Integration:

$$\sigma_{tot} = \int d\Omega \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left( \int d\Omega \right) \frac{R^2}{4} = \pi R^2 \checkmark$$

Analoge allgemeine Rechnung:

$$\sigma_{tot} = \int_0^\pi d\theta \left( \frac{d\sigma}{d\theta} \right) = \int_0^\pi d\theta 2\pi b \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \int_0^R db 2\pi b = \pi R^2$$

gilt nur, wenn  $\theta(b)$  bei endlichem  $b$  verschwindet

### 9.3 Rutherford-Streuung

$$V(r) = \frac{\alpha}{r}, \alpha = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$$

außerdem:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow x = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \\ \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} &= -\frac{\frac{1}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \Rightarrow \left| x \frac{dx}{d\theta} \right| = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^3 \frac{\theta}{2}} \\ \frac{d\sigma}{d\theta} &= \pi \left( \frac{\alpha}{mv^2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}}, d\Omega = d\theta 4\pi \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left( \frac{\alpha}{2mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \left( \frac{\theta}{2} \right)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Rutherford-Streuung:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\alpha}{2mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \sim \frac{1}{\theta^4}$$

$\Rightarrow \sigma_{tot} = \infty$  Begründung:

$$\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^\pi \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin \theta d\theta$$

Bei kleinem  $\theta$ :

$$\sim \int_0^\infty d\theta \theta \frac{1}{\theta^4} \sim \int_0^\infty \frac{d\theta}{\theta^3} \rightarrow -\infty$$

#### Beispiel 9.1

$$\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}} \Big|_1^\epsilon \sim \left( \frac{1}{\epsilon} \right)^{\alpha-1} \xrightarrow{\alpha>1} \infty$$



## 9.4 Teilchenzerfall

**Beispiel 9.2** • Mesonen-Zerfall:  $\rho \rightarrow \pi\pi$

- nicht-quanten-mechanisch: Explosionen
- Higgs-Zerfälle am LHC:  $H \rightarrow \gamma\gamma, H \rightarrow b\bar{b}$

Masse  $M$ , innere Energie  $U$ :

$$M, U \rightarrow m_1, U_1 + m_2, U_2$$

1. Massenerhaltung:  $M = m_1 + m_2$  (nicht in Spezielle Relativitätstheorie)
2. Energie:  $U + \frac{M}{2} \vec{v}^2 = (U_1 + \frac{m_1}{2} \vec{v}_1^2) + (U_2 + \frac{m_2}{2} \vec{v}_2^2)$
3. Impuls:  $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2, (\vec{p} = M \vec{v})$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ruhe  $M$  vor dem Zerfall (Schwerpunktsystem)  $\vec{p} = 0, \vec{v} = 0$  (immer durch Boost erreichbar)  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 &= 0, U - U_1 - U_2 \equiv (\Delta U) = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} \\ |\Delta U| &= \frac{p_1^2}{2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{p_1^2}{2} \frac{M}{m_1 m_2} \end{aligned}$$

mit  $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ :

$$|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = \sqrt{\frac{2(\Delta U)m_1 m_2}{M}}$$

Es gilt außerdem:

$$\frac{|v_1|}{|v_2|} = \frac{m_2}{m_1}$$

Diese Beschreibung durch Erhaltungssätze bleibt unvollständig! Richtungsinformation fehlt. (In QM-Beispielen wird die Richtungs-information oft im Spin/Drehimpuls von  $M$  liegen)

## 9.5 Schwerpunkts vs Laborsystem

Interessanter Fall:  $\theta \equiv \theta_s$  im Schwerpunktsystem sei bekannt. Frage: Winkel  $\theta_L$  im Laborsystem? Wir wissen bereits

$$\begin{aligned} |\vec{p}_{1,s}| &= \sqrt{\frac{2|\Delta U|m_1 m_2}{M}} \\ \vec{p}_{1,s} &= |\vec{p}_{1,s}| \begin{pmatrix} \cos \theta_s \\ \sin \theta_s \end{pmatrix}, \vec{v}_{1,s} = \frac{\vec{p}_{1,s}}{m_1} \end{aligned}$$

Boost um  $\vec{v}$  zum Laborsystem:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{1,L} &= \vec{v}_{1,s} + \vec{v} = |\vec{v}_{1,s}| \begin{pmatrix} \cos \theta_s \\ \sin \theta_s \end{pmatrix} + |\vec{v}| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{v}_{1,L} &= \begin{pmatrix} |\vec{v}_{1,s}| \cos \theta_s + |\vec{v}| \\ |\vec{v}_{1,s}| \sin \theta_s \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \tan \theta_L &= \frac{|\vec{v}_{1,s}| \sin \theta_s}{|\vec{v}_{1,s}| \cos \theta_s + |\vec{v}|} \end{aligned}$$

(Wenn gewünscht,  $|\vec{v}_{1,s}|$  durch Ursprünglich gegebene Größen ausdrücken.) Anschaulich klar:  $\theta_L \rightarrow 0$  für  $|\vec{v}| \rightarrow \infty$

**Bemerkung 9.3** Beim Zerfall  $M \rightarrow m_1, m_2, m_3$  reichen die Erhaltungssätze nicht einmal mehr für die Betragsbestimmung

**Beispiel 9.4 ( $\beta$ -Zerfall)**  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$

## 9.6 Elastischer Stoß

Allgemeiner: 2-Teilchen-Streuung („2  $\rightarrow$  2“ Streuung)

$$(m_1, U_1), (m_2, U_2) \rightarrow (m'_1, U'_1), (m'_2, U'_2)$$

(bei uns stets Massenerhaltung:  $m_1 + m_2 = m'_1 + m'_2$ )

- Einschränkung: kein Massenaustausch:  $m_1 = m'_1, m_2 = m'_2$
- weitere Einschränkungen:  $U = U'$  (mit  $U = U_1 + U_2, U' = U'_1 + U'_2$ )

$\Rightarrow$  elastischer Stoß. Es folgt:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

und

$$\frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\vec{p}'_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}'_2^2}{2m_2}$$

Ziel: Bestimmen von  $\vec{p}'_1, \vec{p}'_2$  mögliche Prozedur: Gehen zunächst ins Schwerpunktsystem:

$$\vec{p}_{1,s} + \vec{p}_{2,s} \equiv \vec{p}_s = 0$$

Man denke sich einen Zwischenzeitlich entstehenden instabilen Zustand (ruhendes, instabiles Teilchen) mit  $\vec{p}_s = 0$ . Dieses zerfällt mit Freisetzung des Energieüberschusses

$$|\Delta U| = \frac{\vec{p}_{1,s}^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_{2,s}^2}{2m_2}$$

Wie oben folgt:

$$\vec{p}'_{1,s} = -\vec{p}'_{2,s}$$

und (unter Ausnutzung von  $|\vec{p}'_{1,s}| = |\vec{p}'_{2,s}|$ )

$$|\vec{p}'_{1,s}| = |\vec{p}'_{2,s}| = \sqrt{\frac{2|\Delta U|m_1m_2}{M}} = \sqrt{\frac{m_2\vec{p}_{1,s}^2 + m_1\vec{p}_{2,s}^2}{m_1 + m_2}} = |\vec{p}_{1,s}| = |\vec{p}_{2,s}|$$

$\Rightarrow$  Der Übergang  $\vec{p}_{1,s}, \vec{p}_{2,s} \rightarrow \vec{p}'_{1,s}, \vec{p}'_{2,s}$  entspricht Drehung, ohne Betragsänderung!

## 9.7 Elastischer Stoß am ruhenden Target

In  $L$  soll Target ruhen. Projektil:  $m_1, \vec{p}_1 \neq 0$ , Target:  $m_2, \vec{p}_2 = 0$  (Kein Index für  $L$ , Index „s“ für Schwerpunktsystem)

Gegeben:  $\vec{p}_1, \Theta$  gesucht  $|\vec{p}'_1|$

1. Analyse durch Übergang zum Schwerpunktsystem. In S:

$$0 = \vec{p}_s = \vec{p}_{1,s} + \vec{p}_{2,s} = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 - m_1 \vec{v} \\ \downarrow \\ \text{Boost Geschwindigkeit } \vec{v} = \vec{v}_{Boost} \end{pmatrix} + (0 - m_2 \vec{v})$$

(Benutze  $\vec{v}_s = \vec{v}_L - \vec{v}_{Boost}$ )

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{p}_1}{M} i, M \equiv m_1 + m_2$$

$$\vec{p}_{1,s} = -\vec{p}_{2,s} = -(-m_s \vec{v}) = \frac{m_2}{M} \vec{p}_1$$

- Jetzt erhalten wir  $\vec{p}'_{1,s}, \vec{p}'_{2,s}$  durch Drehung um  $\Theta_s$ 
  - Dann trf. wir zurück zu  $L \implies |\vec{p}'_1, \Theta|$  also Funktion von  $\Theta_s$ . Eliminieren von  $\Theta_s$  ergibt  $|\vec{p}'_1|$  als Funktion von  $\Theta$

2. Analyse direkt in  $L$  (Notation:  $p_1 \equiv |\vec{p}_1|$ , etc.) Energie:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}$$

beziehungsweise:

$$p_2'^2 = \frac{m_2}{m_1} (p_1^2 - p_1'^2)$$

Impuls:

$$\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \implies p_{1,\parallel} = p'_{1,\parallel} + p'_{2,\parallel}, p'_{1,\perp} = -p'_{2,\perp}$$

$$\begin{aligned} \implies p_1 &= p_{i,\parallel} = p'_1 \cos \theta + \sqrt{(p'_2)^2 - (p'_{2,\perp})^2} = p'_1 \cos \theta + \sqrt{(p'_2)^2 - (p'_{1,\perp})^2} \\ &= p'_1 \cos \theta + \sqrt{\frac{m_2}{m_1} (p_1^2 - p_1'^2) - (p'_1)^2 \sin^2 \theta} = p_1 \end{aligned}$$

Forme um, so dass  $\sqrt{\dots}$  rechts allein steht, quadriere, löse auf nach  $p'_1$ :

$$p'_1 = p_1 \frac{m_1 \cos \theta \pm \sqrt{m_2^2 - m_1^2 \sin^2 \theta}}{M}$$

Im Allgemeinen (bei  $\theta \neq 0$ ) ist die Situation analog, Es gibt einen „starken“ und „schwachen“ Stoß, die zum gleichen  $\theta$  führen. (aber nur falls Argument von Wurzel positiv) Speziell:

$$m_1 = m_2 \equiv m \implies p'_1 = p_1 \frac{1}{2} \cos \theta (1 \pm 1)$$

Aber: bei  $m_1 > m_2$ , gibt es „echte“ starke und schwache Stöße. Falls das Argument der Wurzel positiv, tatsächlich zwei physikalische Lösungen. Zum Verständnis: Einfacher Fall:  $\theta = 0, m_1 > m_2 \implies$

$$\begin{aligned} p'_1 &= p_1 \frac{m_1 + \sqrt{m_2^2}}{M} = p_1 \frac{M}{M} = p_1 \\ p'_1 &= p_1 \frac{m_1 - m_2}{M} = p_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

## 10 Gravitation ausgedehnter Körper

Punktmassennäherung oft schlecht, Aber: leicht korrigierbar wegen Additivität der Kräfte (Genauer: Newtonsche Gravitation ist linearisierte Näherung der ART).

### 10.1 Potential einer Massenverteilung

potentielle Energie für Gravitation zwischen  $m_0$  und  $m_1$

$$V(|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|) = -\frac{m_0 m_1 G}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|}, \vec{F}_{01} = -\vec{\nabla}_0 V(|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|) \equiv -\left( \frac{\partial}{\partial(r_0)^1}, \frac{\partial}{\partial(r_0)^2}, \frac{\partial}{\partial(r_0)^3} \right)^T V(|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|)$$

Wir wollen hier nur sehr kleine „Testmassen“  $m_0$  betrachten  $\implies$  Bewegung von  $m_0$  im unveränderlichen Feld von  $m_1, m_2, m_3, \dots \implies$  Schreibe

$$V(\vec{r}_0) = -\frac{m_0 m_1 G}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|}, \vec{F} = -\vec{\nabla}_{(0)} V(\vec{r}_0)$$

Nützlich, ein von  $m_0$  unabhängiges Gravitationspotential  $\phi$  zu definieren:  $\phi \equiv \frac{V}{m_0} \implies$

$$\phi(\vec{r}_0) = -\frac{m_1 G}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_1|}, \vec{F} = -m_0 \vec{\nabla}_0 \phi(\vec{r}_0)$$

( $m_0$  verschwindet völlig in Bewegungsgleichung der Testmasse:  $\ddot{\vec{r}}_0 = -\vec{\nabla}_0 \phi(\vec{r}_0)$ )

Ziel: Gravitationspotential einer Ansammlung von Punktmassen:

$$\phi(\vec{r}_0) = \sum_{a=1}^N \frac{m_a G}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_a|}$$

Limes sehr vieler, sehr kleiner Elemente: Volumenintegral:

$$\phi(\vec{r}_0) = -G \int \frac{d^3 r \rho(\vec{r})}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|}$$

Idee: diskrete Summe von  $\vec{r}_a \rightarrow$  kontinuierliche Integral Variable  $\vec{r}$ . Erinnerung an Flächenintegral:

$$\int_A d^2 \vec{x} f(\vec{x}) \equiv \int_{x_{min}^1}^{x_{max}^1} dx^1 \int_{x_{min}^2}^{x_{max}^2} dx^2 f(x^1, x^2)$$

Volumenintegral:

$$\int_V d^3 \vec{x} f(\vec{x}) = \int_{x_{min}^2}^{x_{max}^2} dx^2 \int_A d^2 \vec{y} f(x^1, x^2, x^3), \vec{y} = (x^1, x^3)^T$$

Anstatt das Volumen stupide zu zerlegen ist es oft sinnvoller, Symmetrien auszunutzen ( $\implies$  Kugel, etc), Bei Rotationssymmetrie:

$$\int_{\text{Kreisfläche}} d^2 \vec{x} f(\vec{x}) = \int_0^R dr \underbrace{\int_0^{2\pi} r d\phi f(r, \phi)}_{\text{Kreis mit Radius } r} = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\phi f(r, \phi)$$

In 3D: (Volumenintegral)

$$\int_{\text{Kugel}} d^3 \vec{x} f(\vec{x}) = \int_0^R dr r^2 \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi f(r, \theta, \phi)}_{\text{Sphäre mit Radius } r}$$

## 10.2 Gravitationspotential einer Kugelschale

Kugelschale sei dünn  $\implies$  Flächendichte  $\rho_F, [\rho_F] = \text{kg m}^{-2}$  Brauche eigentlich nur Flächenintegral:

$$\int d^3 \vec{r} \rho(\vec{r}) \dots = \int d^2 \vec{r} \rho_F(\vec{r})$$

Genauer: Koordinaten  $r, \theta, \phi$ , Kugelschale:  $r \in (R, R + \Delta R)$

$$\int_R^{R+\Delta R} r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho(\vec{r}) \dots \cong R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho_F(\theta, \phi) \dots$$

$$A\rho_F = \Delta R\rho A = M$$

Kommentar:

$$\underbrace{\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \dots}_{\text{Integrieren über Raumwinkel}} = \int d\Omega$$

Noch direkter zum konkreten Problem:

$$\begin{aligned} d\phi &= -G \frac{dM}{r} = -G \frac{\rho_F dA}{r} = -\frac{G\rho_F}{r} \underbrace{(Rd\theta)}_{\text{Breite}} \underbrace{(2\pi R \sin(\theta))}_{\text{Länge}} \\ r &= \sqrt{(a - R \cos \theta)^2 + (R \sin \theta)^2} = \sqrt{\underbrace{a^2 + R^2}_A - \underbrace{2aR \cos \theta}_B} \\ \phi &= -G\rho_F 2\pi R^2 \int \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{A - B \cos \theta}} \end{aligned}$$

Substituiere:  $x = \cos \theta, dx = -\sin \theta d\theta, \theta = 0 \Rightarrow x = 1, \theta = \pi \Rightarrow x = -1$

$$\begin{aligned} \phi &= -G\rho_F 2\pi R^2 \int_1^{-1} \frac{-dx}{\sqrt{A - Bx}} \\ \phi &= -G\rho_F 2\pi R^2 \frac{2}{2aR} \left( \sqrt{a^2 + R^2 + 2aR} - \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR} \right) \\ \phi &= -G\rho_F 2\pi R^2 \frac{1}{aR} ((a + R) - (a - R)) = -G\rho_F \frac{4\pi R^2}{a} \\ \phi &= -\frac{GM}{a} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Potential so, als sei die Masse im Zentrum konzentriert. Analoge Rechnung zeigt: Keine Gravitationskraft (also Potential konstant) im Inneren. Pol. jedes sphärisch symmetrischen Körpers (auch inhomogen) ist so wie bei einer Punktmasse im Zentrum

### 10.3 Divergenz und Gaußscher Satz

Betrachte Integrale vom Typ

$$\begin{array}{c} \text{Flächenelement} \\ \uparrow \\ I = \int_O d\vec{f} \vec{F} \\ \downarrow \\ \text{Oberfläche eines Volumens} \end{array}$$

$\vec{F}$ : Vektorfeld. Betrachte Würfel:

$$\begin{aligned} I &= I_{12} + I_{23} + I_{31} \\ &\downarrow \\ \text{Betrag der zwei Flächen in der } x^3 - x^1 \text{ Ebene} \\ I_{12} &= \int_{12, \text{oben}} dx^1 dx^2 F^3(x^1, x^2, \Delta x^3) + \int_{12, \text{unten}} dx^1 dx^2 (-F^3(x^1, x^2, 0)) \end{aligned}$$

⇒ \*ein\* Integral, Integrand:

$$\underbrace{F^3(x^1, x^2, \Delta x^3 - F^3(x^1, x^2, 0))}_{\text{Taylor um } x^3 \equiv 0}$$

$$I_{12} = \int_{12} dx^1 dx^2 \Delta x^3 \frac{\partial F^3}{\partial x^3}(x^1, x^2, 0)$$

$$I_{12} = \Delta x^1 \Delta x^2, \Delta x^3 \left( \frac{\partial F^3}{\partial x^3} \right) (0, 0, 0) + \mathcal{O}(\Delta^4)$$

Zusammen mit analoger Rechnung für  $I_{23}, I_{31}$ :

$$I = \underbrace{V}_{\Delta x^1 \Delta x^2 \Delta x^3} \left( \frac{\partial F^1}{\partial x^1} + \frac{\partial F^2}{\partial x^2} + \frac{\partial F^3}{\partial x^3} \right) = V(\partial^i F^i) = V(\vec{\nabla} \vec{F}) = V(\text{div } \vec{F})$$

### Definition 10.1 (Divergenz)

$$\text{div } \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \vec{F} = \partial^i F^i$$

Jetzt: Großen Volumen zusammengesetzt aus kleinen Quadern. Addiere alle Gleichungen vom Typ (Einsteinsche Summenkonvention ⇒ Summe über  $a$ )

$$I_{(a)} = V_{(a)} \left( \begin{array}{c} \vec{\nabla} \vec{F} \\ \downarrow \\ \text{bei Pos. von "a"} \end{array} \right)$$

In der Summe der Oberflächenintegral fallen „innere Flächen“ weg. ⇒ Satz von Gauß:

$$\int_O d\vec{f} \vec{F} = \int_V d^3 \vec{r} (\vec{\nabla} \vec{F})$$

Wichtig:  $O = \partial V$  ist Oberfläche des Volumen  $V$  (keine „inneren“ Flächen). Vergleich mit Stokes:

$$\oint_{\partial A} d\vec{s} \vec{F} = \int_A d\vec{f} (\vec{\nabla} \times \vec{F})$$

Sehr ähnlich, aber „eine Dimension weniger“. Noch eine Dimension weniger als bei Stokes:

$$V(\vec{x}_b) - V(\vec{x}_a) = \int_C d\vec{l} (\vec{\nabla} V)$$

Allgemein: „Generalized Stokes Theorem“

Lücke schließen:

Ist „Abschneiden“ von Ecken in unserer Näherung akzeptabel?

1. Volumenänderung: Gesamt  $V$  :

$$N_{ges} \sim \frac{V}{\Delta^3} \sim \frac{1}{\Delta^3}$$

Zahl der Oberflächenquader:

$$N_O \sim \frac{O}{\Delta^2} \sim \frac{1}{\Delta^2}$$

Beitrag der Oberflächenquader zum Volumen ist

$$N_O \Delta^3 \sim \frac{1}{\Delta^2} \Delta^3 \sim \Delta \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} 0$$

2. Oberflächenänderung. Dazu wichtiger Fakt: Die Summe der Flächenvektoren eines Tetraeders ist Null. Herleitung: Seien  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  die Ortsvektoren dreier Punkte, sodass die Ortsvektoren, zusammen mit den Verbindungsvektoren der Punkte einen Tetraeder bilden. Die Fläche eines Dreiecks (mit Kanten  $\vec{a}, \vec{b}$ ) ist

$$\vec{A}_{ab} = \frac{1}{2} \vec{a} \times \vec{b}$$

Unsere Behauptung, hier angewandt, lautet:

$$-\frac{1}{2}(\vec{a} \times \vec{b}) - \frac{1}{2}(\vec{b} \times \vec{c}) - \frac{1}{2}(\vec{c} \times \vec{a}) + \frac{1}{2}((\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})) = 0$$

Tetraeder  $\rightarrow$  allgemeine Dreieckspyramide.

## 10.4 Gaußscher Satz und Gravitation

$O$ : Oberfläche deines Volumen

$$M = -\frac{1}{4\pi G} \int_O \frac{1}{m} \vec{F} d\vec{f}$$

Kraft durch  $M$  auf Probemasse

„Integrale Formulierung des Newtonschen Gravitationsgesetzes“ Zunächst Spezialfall: Zentrierte Kugel mit Radius  $R$ : „ $O_1$ “

$$I_1 \equiv \int_{O_1} \vec{F} d\vec{f} = \int_{O_1} \left( -\frac{GmM}{R^2} \vec{e}_r \right) |d\vec{f}| \vec{e}_r = -GmM 2\pi$$

stimmt! Beliebiges Volumen:  $O_2$

$$I_2 = \int_{O_2} \vec{F} d\vec{f}$$

$$I_2 - I_1 = \int_{O_2} \vec{F} d\vec{f} - \int_{O_1} \vec{F} d\vec{f}$$

mit  $\tilde{O}_1$ : Fläche der Kugel mit entgegengesetzter Orientierung

$$= \int_{O_2} \vec{F} d\vec{f} + \int_{\tilde{O}_1} \vec{F} d\vec{f}$$

mit " $O_2 - O_1$ " ist Oberfläche des "Zwischenvolumens  $Vol_2 - Vol_1$ "

$$= \int_{O_2 - O_1} \vec{F} d\vec{f}$$

mit Gaußschem Satz:

$$= \int_{Vol_2 - Vol_1} d^3\vec{r} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) = - \int_{Vol_2 - Vol_1} d^3\vec{r} (\vec{\nabla}^2 V) \quad (\vec{F} = -\vec{\nabla} V)$$

$\vec{\nabla}^2 = \Delta$  ist der Laplace-Operator

$$V(\vec{r}) = -\frac{GmM}{r}, r = |\vec{r}| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

Fokussiere auf  $\frac{1}{r}$ :

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^i &= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{\sqrt{\sum_j (x^j)^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{2x^i}{\sqrt{\sum_j (x^j)^2}^3} \\ \vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{r}\right) &= \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(-\frac{x^i}{\sqrt{\sum_j (x^j)^2}^3}\right) \\ &= -\left(\frac{3}{\sqrt{\sum_j (x^j)^2}^3} - \frac{3}{2} \frac{x^i 2x^i}{\sqrt{\sum_j (x^j)^2}^5}\right) \\ &= -\left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{2r^2}{r^5}\right) = 0\end{aligned}$$

1. beliebige Fläche: Ok

2. Translation  $\rightarrow$  beliebige Position der Masse: Ok

$$\begin{aligned}M_i &= -\frac{1}{4\pi m G} \int_O \vec{F}_i d\vec{f} \\ M &= \sum_i M_i = -\frac{1}{4\pi m G} \int_O \left(\sum_i \vec{F}_i\right) d\vec{f}\end{aligned}$$

Symmetriegründe: auf Sphäre mit Radius  $r$ :  $|\vec{F}| = \text{const}$

$$\begin{aligned}&= -\frac{1}{4\pi m G} \underbrace{\int_O \vec{F} d\vec{f}}_{|\vec{F}| 4\pi r^2} \\ |\vec{F}| &= \frac{mMG}{r^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{Vol} (\vec{\nabla} \vec{F}) dVol &= -4\pi m G \int_{Vol} \rho dVol \\ \Rightarrow \vec{\nabla} \vec{F} &= -4\pi G m \rho \\ \vec{F} &= -\vec{\nabla} V, \phi = \frac{V}{m} \\ \vec{\nabla}^2 \phi &= -4\pi G \rho\end{aligned}$$

**Definition 10.2 (Poisson-Gleichung)**

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 4\pi G \rho$$

Mit  $\rho = 0$ : Laplace-Gleichung

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 0$$



**Definition 10.3 (Laplace-Operator)** Allgemein:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(\vec{\nabla}f) &= \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right)^T \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3}\right) \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2}, \frac{\partial^2}{\partial (x^2)^2}, \frac{\partial^2}{\partial (x^3)^2}\right)}_{\Delta} f\end{aligned}$$