

Theoretische Physik II (Hebecker)

Robin Heinemann

23. Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Lagrange - Formalismus	2
1.1	Grundidee (1788, Joseph-Louis Lagrange)	2
1.2	Variationsrechnung: Der Funktionalbegriff	2
1.3	Weglänge als Funktional	3
1.4	Variationsrechnung: Extremalisierung von Funktionalen	4
1.5	Das Hamiltonsche Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung)	5
1.6	Form der Lagrange-Funktion und erste Anwendungen	6
1.7	Vereinfachte Herleitung der Lagrange-Gleichungen	7
1.8	Kommentare	8
2	Symmetrien und Erhaltungssätze	9
2.1	Symmetriemotivation der Wirkung	9
2.1.1	Freier Massenpunkt	9
2.1.2	Mehrere Massenpunkte	9
2.2	Homogene Funktionen und Satz von Euler	10
2.3	Energieerhaltung	10
2.4	Erhaltung von verallgemeinerten Impulsen	12
2.5	Noether-Theorem	13
2.6	Mechanische Ähnlichkeit	14
2.7	Virialsatz	15
3	Trägheitstensor	16
3.1	Trägheitsmoment und Satz von Steiner	16
3.2	Trägheitstensor	17
3.3	Hauptträgheitsachsen	18
3.4	Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit	19
3.5	Trägheitsellipsoid	20
3.6	Trägheitstensor und Drehimpuls (mehr zur Geometrie)	21
4	Kreisel	21
4.1	Euler-Gleichungen	21

4.2	Freier Kreisel	22
4.3	Freier Kreisel analytisch	23
4.4	Schwerer Kreisel (vereinfacht)	24
4.5	Eulersche Winkel	24
4.6	Schwerer Kreisel (exakt)	24
5	D'Alembertsches Prinzip und Lagrange Gleichungen 1. und 2. Art	25
5.1	Arten von Zwangsbedingungen	25
5.2	Prinzip der virtuellen Arbeit und „D'Alembert“	26
5.3	D'Alembertsches Prinzip mit verallgemeinerten Koordinaten und Kräften.	27
5.4	Lagrange-Gleichungen 1. Art	28
5.5	Lagrange-Multiplikatoren und Zwangskräfte	29
5.6	Lagrange-Gleichungen 2. Art	30
5.7	Lagrange-Multiplikatoren - allgemeine Sicht	30

1 Lagrange - Formalismus

1.1 Grundidee (1788, Joseph-Louis Lagrange)

Vorteile gegenüber Newton:

- Flexibilität
- Zwangskräfte
- Zusammenhang zwischen Symmetrie und Erhaltungsgrößen

Zentrales Objekt: Wirkungsfunktional S .

Abbildung $S : \text{Trajektorie} \mapsto \text{reelle Zahl}$

(S definiert mittels Lagrange-Funktion L)

Zentrale physikalische Aussage des Formalismus: „Wirkungsprinzip“ („Hamilton-Prinzip“)

Letztes besagt: Eine physikalische Bewegung verläuft so, dass das Wirkungsfunktional minimal wird.

→ DGL („Euler-Lagrange-Gleichung“), im einfachen Fall \equiv Newton Gleichung

1.2 Variationsrechnung: Der Funktionalbegriff

Funktion (mehrerer Variablen) y ;

$$y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, y : \vec{x} \mapsto y(\vec{x})$$

Funktional: analog, mit \mathbb{R}^n ersetzt durch eine Menge von Funktionen (Vektorraum \mathbb{V})

$$F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}, F : y \mapsto F[y]$$

Beispiel 1.1 \mathbb{V} seinen differenzierbare Funktionen auf $[0, 1]$ mit $y(0) = y(1) = 0$

Diskretisierung:

$$\begin{aligned} x_1, \dots, x_n &\rightarrow \{y(x_1), \dots, y(x_n)\} \\ &\downarrow \\ &\text{Vektor} \equiv \text{Funktion} \end{aligned}$$

\Rightarrow im diskreten Fall ist unser Funktional schlicht eine Funktion mit Vektor-Argument. (Eigentlicher Funktionalbegriff folgt im Limes $n \rightarrow \infty$).

Beispielfunktionale zu obigem \mathbb{V} .

- $F_1[y] = y(0.5)$
- $F_2[y] = y'(0.3)$
- $F_3[y] = y(0.1) + y(0.5) + y'(0.9)$
- $F_4[y] = \int_0^1 dx (x \cdot y(x)^2 + y'(x)^2)$
- $F_5[y] = \int_0^1 dx f(y(x), y'(x), x)$

F_5 hängt von Funktion f (von 3 Variablen) ab. Falls wir $f(a, b, c) = ca^2 + b^2$ wählen, folgt F_4 wählen. Noch konkreter: wähle Beispielfunktion (ignoriere zur Einfachheit Randbedingung $y(1) = 0$)

$$\begin{aligned} y_0 : x &\mapsto x^2; y_0(x) = x^2; y'_0(x) = 2x; \\ \Rightarrow F_1[y_0] &= 0.25; F_2[y_0] = 0.6, F_3[y_0] = 0.01 + 0.25 + 1.8 = 2.06 \\ F_4[y_0] &= \int_0^1 dx (x^5 + 4x^2) = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

1.3 Weglänge als Funktional

Weg von \vec{y}_a nach \vec{y}_b : $\vec{y} : \tau \mapsto \vec{y}(\tau), \tau \in [0, 1]; \vec{y}(0) = \vec{y}_a, \vec{y}(1) = \vec{y}_b$

Weglänge:

$$F[\vec{y}] = \int_{\vec{y}_a}^{\vec{y}_b} |d\vec{y}| = \int_0^1 d\tau \sqrt{\left(\frac{d\vec{y}(\tau)}{d\tau}\right)^2}$$

(Eigentlich haben wir sogar ein Funktional einer vektorwertigen Funktion beziehungsweise ein Funktional mit 3 Argumenten: $F[y] = F[y^1, y^2, y^3]$)

Etwas interessanter: Weglänge im Gebirge:

Sei $\vec{x}(\tau) = \{x^1(\tau), x^2(\tau)\}$ die Projektion des Weges auf Horizontale. Zu jedem solchen Weg gehört die „echte“ Weglänge im Gebirge. Beachte: Höhenfunktion $z : \vec{x} \mapsto z(\vec{x})$

\Rightarrow 3-d Weg:

$$\begin{aligned} \vec{y}(\tau) &= \{y^1(\tau), y^2(\tau), y^3(\tau)\} \\ &\equiv \{x^1(\tau), x^2(\tau), z(\vec{x}(\tau))\} \end{aligned}$$

$$F_{Geb.}[x] = F[\vec{y}[\vec{x}]] = \int dt \sqrt{\left(\frac{dx^1(\tau)}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx^2(\tau)}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz(x^1(\tau), x^2(\tau))}{d\tau}\right)^2}$$

1.4 Variationsrechnung: Extremalisierung von Funktionalen

Funktionen: $y : x \mapsto y(x)$; wir wissen y hat Extremum bei $x_0 \implies y'(x_0) = 0$

Funktionale der Form: $F[y] = \int_0^1 dx f(y, y', x)$; $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$; $y(0) = y_a$; $y(1) = y_b$

Annahme: y_0 extremalisiert F . Sei weiterhin δy eine beliebige 2-fach differenzierbare Funktion mit $\delta y(0) = \delta y(1) = 0$

$$\implies \underbrace{y_\alpha \equiv y_0 + \alpha \cdot \delta y}_{\text{Ist eine Funktion aus unserem Wertevorrat von } F} \quad (\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon))$$

Ist eine Funktion aus unserem Wertevorrat von F

\implies Betrachte Abbildung $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \alpha \mapsto F[y_\alpha]$. Per unserer Annahme hat diese Abbildung Extremum bei $\alpha = 0$. Also gilt

$$\left. \frac{d}{d\alpha} F[y_\alpha] \right|_{\alpha=0} = 0$$

Taylor-Entwicklung um $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} F[y_\alpha] &= \int_0^1 dx f(y_0 + \alpha \delta y, y'_0 + \alpha \delta y', x) \\ &= F[y_0] + \int_0^1 dx \left(\frac{\partial f}{\partial y}(y_0, y'_0, x) \cdot \alpha \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}(y_0, y'_0, x) \cdot \alpha \delta y' \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned}$$

Term linear in α muss verschwinden:

$$0 = \int_0^1 dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx}(\delta y) \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y = 0 \text{ bei } 0, 1$$

$$= \int_0^1 dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) \delta y = 0$$

für beliebige $\delta y \implies$ der Koeffizient von δy im Integral muss verschwinden

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \quad (\text{Eulersche Differentialgleichung})$$

Falls y_0 das Funktional F extremalisiert, so gilt die obige Gleichung für $y_0 \forall x \in [0, 1]$

Beispiel 1.2 $f(y, y', x) = y^2 + y'^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) &= \frac{d}{dx} 2y' = 2y'' \\ \implies y'' - y &= 0 \end{aligned}$$

Beachte: y und y' sind hier unabhängig, das heißt es spielt für die Herleitung der Eulerschen Differentialgleichung keine Rolle, dass y' die Ableitung von y ist.

1.5 Das Hamiltonsche Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung)

Die Lage einer sehr großen Klasse von Systemen beschreiben durch verallgemeinerte Koordinaten (q_1, \dots, q_s) , s : Zahl der Freiheitsgrade.

- Beispiel 1.3**
- N Massenpunkte: $s = 3N$, $(q_1, \dots, q_{3N}) = (x_1^1, x_1^2, x_1^3, \dots, x_N^1, x_N^2, x_N^3)$
 - 1 Massenpunkt in Kugelkoordinaten: $s = 3$, $(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \varphi)$
 - eine dünne Stange: $s = 5$. Schwerpunktskoordinaten x_s^1, x_s^2, x_s^3 . 2 Winkel zur Ausrichtung θ, φ
 - Rad auf einer Welle: $s = 1$, $q_1 = \varphi$
 - Perle auf einem Draht: $s = 1$, $q_1 = s$ (Bogenlänge)

Hamiltonsches Prinzip:

Für jedes (in einer sehr großen Klasse) mechanische System s Freiheitsgraden existiert die Lagrange-Funktion $L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$ (kurz $L(q, \dot{q}, t)$), für die gilt:

Die physikalische Bewegung aus einer Lage $q(t_1) = q^{(1)}$ in eine Lage $q(t_2) = q^{(2)}$ verläuft so, dass das Wirkungsfunktional

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t)$$

extremal wird.

Anmerkung 1.4

- für kleine Bahnabschnitte: Minimalität
- DGL. aus Stationalität
- Wirkung: Dimensionsgründe $[S] = \text{Zeit} \cdot \text{Wirkung}$
- Bedeutung des Wirkungsprinzip kann man kaum überschätzen. [spezielle + allgemeine Relativitätstheorie, Feldtheorie (Elektro-Dynamik), Quantenfeldtheorie (Teilchenphysik, kondensierte Materie), Quantengravitation]

für $s = 1$ folgt aus dem Hamiltonschen Prinzip:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

(Euler-Lagrange-Gleichung, oder Lagrange-Gleichung der 2. Art)

für $s \geq 1$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = 1, \dots, s$$

1.6 Form der Lagrange-Funktion und erste Anwendungen

Fundamentaler Fakt:

$$L = T - V$$

- T : kinetische Energie
- V : potentielle Energie

Beispiel 1.5 (Massenpunkt im Potenzial)

$$\begin{aligned} L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) &= \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} &= 0 \\ \frac{d}{dt} (m \dot{x}^i) - \left(-\frac{\partial V}{\partial x^i} \right) &= 0 \\ m \ddot{x}^i - F^i &= 0 \\ m \ddot{\vec{x}} - \vec{F} &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel 1.6 (System wechselwirkender Massenpunkte)

$$\begin{aligned} T &= \sum_a T_a = \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\vec{x}}_a^2 \\ V &= \sum_{\substack{a,b \\ a < b}} V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|) \end{aligned}$$

Lagrange Gleichung für x_a^i :

$$\begin{aligned} m_a \ddot{x}_a^i - \frac{\partial}{\partial x_a^i} \left(\sum_b V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|) \right) &= 0 \\ m_a \ddot{\vec{x}}_a - \vec{\nabla}_a \sum_b V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|) &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel 1.7 (Perle auf Draht) Draht: beschrieben durch $\vec{x}(s)$ (s : Bogenlänge)

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{m}{2} v^2 - V(\vec{x}(s)) \\
 v &= \left| \frac{d\vec{x}}{ds} \right| \frac{ds}{dt} \\
 L &= \frac{m}{2} \dot{s}^2 - V(\vec{x}(s)) \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} &= 0 \\
 m\ddot{s} - \sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x^i}}_{-\frac{\partial V}{\partial x^i}} \frac{\partial x^i}{\partial s} &= 0 \\
 m\ddot{s} - \vec{F} \cdot \frac{\vec{x}}{s} &= 0
 \end{aligned}$$

Beispiel 1.8 (Mathematisches Pendel im Fahrstuhl) Beschleunigung des Fahrstuhls: $v_y = a \cdot t$

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{m}{2} \vec{v}^2 - V \\
 \vec{v} &= \left(\frac{d}{dt}(l \sin \varphi), at - \frac{d}{dt}(l \cos \varphi) \right) \\
 &= (l \cos(\varphi) \dot{\varphi}, at + l \sin \varphi \dot{\varphi}) \\
 V &= mg \left(\frac{a}{2} t^2 - l \cos \varphi \right) \\
 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} (l^2 \cos^2 \varphi 2 \dot{\varphi} + 2atl \sin \varphi + l^2 \sin^2 \varphi 2 \dot{\varphi}) \right) - \\
 &\quad \left(\frac{m}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 2 \cos \varphi (-\sin \varphi) + 2atl \dot{\varphi} \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 2 \sin \varphi \cos \varphi) - mgl \sin \varphi \right) \\
 0 &= (2l^2 \cos \varphi (-\sin \varphi) \dot{\varphi}^2 + l^2 \cos^2 \varphi \ddot{\varphi} + al \sin \varphi + atl \cos \varphi \dot{\varphi} + l^2 2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + l^2 \sin^2 \varphi \ddot{\varphi}) \\
 &\quad - tal \dot{\varphi} \cos \varphi + gl \sin \varphi \\
 0 &= l^2 \ddot{\varphi} + l \sin \varphi (a + g)
 \end{aligned}$$

1.7 Vereinfachte Herleitung der Lagrange-Gleichungen

$q(t)$ Trajektorie, Variation der Trajektorie: $\delta q(t)$

- neue Trajektorie: $q(t) + \delta q(t)$.

- neue Wirkung $S + \delta S$ Anders gesagt: $\delta S \equiv S[q + \delta q] - S[q]$.

Extremalität:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L(q, \dot{q}, t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\delta q) \right] \end{aligned}$$

Partielle Integration, nutze $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right) \\ 0 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \end{aligned}$$

δq beliebig \implies Term muss verschwinden

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \checkmark$$

1.8 Kommentare

Argumente von L : \ddot{q} , $\ddot{\ddot{q}}$, etc. dürfen nicht in L vorkommen, weil sonst $\ddot{\ddot{q}}$, $\ddot{\ddot{\ddot{q}}}$, etc. in den Bewegungsgleichungen vorkommen würden. Dann reichen $\vec{x}(t_0) \wedge \vec{v}(t_0)$ nicht mehr zur Lösung des Anfangswertproblems.

Totale Zeitableitungen:

Seien L, L' zwei Lagrangefunktionen mit

$$\begin{aligned} L' &= L + \frac{d}{dt} f(q, t) \\ \implies S' &= S + \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} f(q, t) = S + \underbrace{(f(q(t_2), t_2) - f(q(t_1), t_1))}_{\text{variiert nicht}} \\ \implies \delta S' &= \delta S \end{aligned}$$

$\implies L'$ physikalisch äquivalent zu L (L ist nur bis auf totale Zeitableitungen definiert.)

Bedeutung von S in der QM:

In der Quantenmechanik ist die Wahrscheinlichkeit w für den Übergang von $(q^{(1)}, t_1)$ zu $(q^{(2)}, t_2)$ gegeben durch

$$w \sim |A|^2$$

, $A \in \mathbb{C}$ ist „Amplitude“, mit

$$A \sim \int Dq e^{\frac{iS[q]}{\hbar}}$$

$\int Dq$ - Summe über alle mögliche Trajektorien („Wege“), („Pfade“).

Im Limes $\hbar \rightarrow 0$ dominiert klassischer Weg. Grund: S ist an dieser Stelle stationär. Beiträge von „ganz anderen“ Wegen heben sich wegen schneller Oszillation von $\exp[iS/\hbar]$ weg.

2 Symmetrien und Erhaltungssätze

Zentrales Ziel: **Noether Theorem** (Emmy Noether - 1918)

„Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems gehört eine Erhaltungsgröße.“

Idealfall: Symmetrien \implies Form der Wirkung. Wirkung hat Symmetrie \implies Erhaltungsgrößen.

2.1 Symmetriemotivation der Wirkung

2.1.1 Freier Massenpunkt

Homogenität von Raum und Zeit $\implies L(\vec{x}, \vec{v}, t) = L(\vec{v})$.

Isotropie des Raumes $\implies L = L(\vec{v}^2)$.

Betrachte (kleine) Galilei-Boosts: $\vec{v} \rightarrow \vec{v}' = \vec{v} + \vec{\varepsilon}$.

$$L(\vec{v}^2) \rightarrow L(\vec{v}'^2) = L(\vec{v}^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon}^2)$$

Taylorentwicklung:

$$= L(\vec{v}^2) + \frac{\partial L(\vec{v}^2)}{\partial(\vec{v}^2)}(2\vec{v} \cdot \vec{\varepsilon}) + \mathcal{O}(\vec{\varepsilon}^2)$$

Falls nun $(\partial L / \partial \vec{v}^2) = \text{const.}$, so gilt

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2}(2\vec{v} \cdot \vec{\varepsilon}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}^2}(2\vec{x} \cdot \vec{\varepsilon}) \right)$$

\implies wir fordern, dass $\partial L / \partial \vec{v}^2$ eine Konstante ist und nennen diese $m/2$. $\implies L = \frac{m}{2} \vec{v}^2$

2.1.2 Mehrere Massenpunkte

Für unabhängige Systeme können wir die Lagrangefunktionen schlicht addieren:

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) = L_1(q_1, \dot{q}_1, t) + L_2(q_2, \dot{q}_2, t)$$

Dazu rechnen wir nach, dass die Anwendung der Differentialoperatoren

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2)$$

auf L und Nullsetzen äquivalent ist zur Anwendung des Operators „1“ auf L_1 und „2“ auf L_2 . Dies gibt aber gerade die Lagrangefunktionen und es ist somit egal ob ich $L_1 + L_2$ oder L_1 und L_2 getrennt als Lagrange-Funktionen betrachte

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial}{\partial q_1} \right) L = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial}{\partial q_1} \right) L_1 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L_1}{\partial q_1} \stackrel{!}{=} 0$$

Also Mehrere Massenpunkte:

$$L = \sum_a \frac{m_a}{2} \vec{v}_a^2$$

$\Rightarrow L = T$ mit T = kinetische Energie. Hinzunahme von Wechselwirkungen der Form

$$V = \sum_{a < b}^{V_{ab}} (|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)$$

respektiert Galilei-Invarianz. Also Vorschlag: $L = T - V$ wie oben eingeführt. Aber: T, V sind im Moment nur Namen.

2.2 Homogene Funktionen und Satz von Euler

Eine Funktion f von n Variablen heißt homogen von Grad k falls $f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, \dots, x_n)$.

Beispiel 2.1 $f(x) = x^p$ ist homogen von Grad p .

Beispiel 2.2 $f(x, y, z) = \frac{x}{yf} + \frac{1}{z} \cos\left(\frac{x}{z}\right)$ ist homogen von Grad -1 .

Beispiel 2.3 ("Unser Beispiel")

$$T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2} f_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \text{ Summe!}$$

homogen **in den** \dot{q}_i vom Grad 2.

Satz 2.4 (Satz von Euler) $f(x_1, \dots, x_n)$ homogen von Grad k

$$\Rightarrow \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = k f$$

Begründung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha^k f(x_1, \dots, x_n)) \\ \Rightarrow \sum_i \frac{\partial f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)}{\partial (\alpha x_i)} \frac{\partial \alpha x_i}{\partial \alpha} &= k \alpha^{k-1} f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Setze $\alpha = 1$

$$\Rightarrow \sum_i \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} x_i = k f(x_1, \dots, x_n)$$

2.3 Energieerhaltung

Homogenität von t „ $\Rightarrow L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q})$

Wir betrachten:

$$\frac{d}{dt} L = \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \quad (\text{Kettenregel})$$

Euler-Lagrange-Gleichung ($\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$)

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \dot{q}_i$$

Produktregel

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i \right) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L}_{=: E} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} E &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel 2.5

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L &= m\dot{x} - \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V \right) \\ &= \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V \end{aligned}$$

Um dies allgemeiner zu zeigen: Satz von Euler. Wir nehmen an, dass L folgende Form hat:

$$L = T - V = \frac{1}{2} f_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q)$$

Begründung: Diese Form ergibt sich typischerweise, wenn man

$$\sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\vec{x}}_a^2 - V(\vec{x})$$

in verallgemeinerte Koordinaten umschreibt.

Mit dieser Annahme folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{1}{2} f_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \right) \dot{q}_i \\ &= \frac{1}{2} f_{jk} \delta_{ij} \dot{q}_k \dot{q}_i + \frac{1}{2} f_{jk} \dot{q}_j \delta_{ik} \dot{q}_i \\ &= f_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = 2T \end{aligned}$$

Leichter mit Satz von Euler

$$E \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - (T - V) = T + V \quad \checkmark$$

2.4 Erhaltung von verallgemeinerten Impulsen

In einen durch q_1, \dots, q_s parametrisierten System heißen

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

„verallgemeinerte Impulse“

Bekannter Fall:

$$L = \sum_{i=1}^3 \frac{m}{2} \dot{x}_i^2$$

mit

$$p_i = m\dot{x}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$$

Eine Koordinate heißt „zyklisch“, falls die **nicht** explizit in L vorkommt (Ableitung darf vorkommen).

Beispiel 2.6

$$L = L(q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$$

In dieser Situation ist die Transformation $q_1 \rightarrow q'_1 = q_1 + \varepsilon$ eine Symmetrie.

Sei q_1 zyklisch. Es gilt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \quad (\text{Euler-Lagrange-Gleichung})$$

$\partial L / \partial q_1 = 0$ per Annahme

$$\begin{aligned} \implies \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(p_1) &= 0 \end{aligned}$$

\implies „Die verallgemeinerten Impulse zyklischer Koordinaten sind erhalten.“

Beispiel 2.7 Massenpunkt in Potential, dass nicht von x_1 abhängt. Noch konkreter: schräger Wurf:

$$V(x_1, x_2, x_3) = mgx_3$$

$\implies x_1, x_2$ zyklisch.

Beispiel 2.8 (Massenpunkt in Ebene mit Zentralpotential)

$$L = \frac{m}{2} (r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2) - V(r)$$

φ zyklisch

$\implies \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi}$: Betrag des Drehimpulses. (Dieses Beispiel erklärt den Namen „zyklisch“ im Sinne von periodisch)

2.5 Noether-Theorem

Definition 2.9 (kontinuierliche Transformation)

$$\begin{aligned} q(t) &\rightarrow q'(t) = q(t) + \delta q(t) \\ &= q(t) + \varepsilon \chi(t) \end{aligned}$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}$, sodass $\varepsilon \rightarrow 0$ möglich ist.

Definition 2.10 (kontinuierliche Transformation) Damit diese Transformation eine Symmetrie ist, fordern wir **Invarianz der Bewegungsgleichungen**, also

$$\delta L \equiv L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}; t) - L(q, \dot{q}, t) = \varepsilon \frac{d}{dt} f$$

Wir betrachten

$$\varepsilon \frac{d}{dt} f = \delta L = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}$$

mit Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} (\delta q) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) \\ \implies 0 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q - \varepsilon f \right) \\ &= \varepsilon \frac{d}{dt} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \chi - f \right)}_{\text{Erhaltungsgröße}} \quad (\text{Erhaltungsgröße}) \end{aligned}$$

Satz 2.11 (Noether-Theorem) Noether-Theorem (nach analoger Rechnung mit q_1, \dots, q_n):

Falls $\delta q_i = \varepsilon \chi_i$ Symmetrie (also $\delta L = \varepsilon \frac{d}{dt} f$) gilt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \chi_i - f \right) = 0$$

Beispiel 2.12 (Zeittranslation) $q(t) \rightarrow q'(t) = q(t + \varepsilon) = q(t) + \dot{q}(t)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$

$\delta q = \dot{q}\varepsilon = \varepsilon \chi \implies \chi = \dot{q}$ Berechne δL :

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = \varepsilon \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \varepsilon \ddot{q} \\ &= \varepsilon \left(\frac{\partial L}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\dot{q}}{dt} \right) = \varepsilon \frac{d}{dt} L \\ \implies \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \chi - f &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L = E \quad \checkmark \end{aligned}$$

Beispiel 2.13 (Verschiebung zyklischer Koordinate)

$$q' = q + \varepsilon \implies \chi = 1, \delta L = 0 \implies f = 0$$

Erhaltungsgröße:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \chi - f = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p \quad (\text{verallgemeinerter Impuls})$$

Zusammenstellung zu Galilei Transformationen

Symmetrie	Erhaltungsgröße
Zeittranslation	Energie
Translation	Impuls
Rotation	Drehimpuls
Boosts	$\vec{x}_s - \vec{v}_s \cdot t$

zum Boost:

$\vec{x}_s - \vec{v}_s \cdot t = \text{const.}$ Schwerpunkt bewegt sich geradlinig und gleichförmig.

2.6 Mechanische Ähnlichkeit

Lagrangefunktion:

$$L = \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\vec{x}}_a^2 - V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$$

Sei V homogen in den x_a^i von Grad k .

Sei $\{\vec{x}_a(t)\}$ beziehungsweise $[t \mapsto \{\vec{x}_a(t)\}]$ eine physikalische Bewegung. Kurz: $t \mapsto x(t)$.

Betrachte Transformation: $x \rightarrow \alpha x, t \rightarrow \beta t \forall t, x$.

Alte Bewegung: $\{t \rightarrow x(t)\}$, Neue Bewegung $\{\beta t \mapsto \alpha x(t)\}$.

Variablenwechsel: $t' = \beta t$ und anschließend $t' \rightarrow t$. Neue Bewegung: $\{t \mapsto \alpha x(t/\beta)\}$

Betrachte nun Transformationen von T, V

$$T, V \rightarrow \left((\alpha/\beta)^2 T, \alpha^k V \right)$$

Fordere nun $\alpha^k = (\alpha/\beta)^2 \implies L \rightarrow \alpha^k L$

Beachte:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

ist homogen in L, x, t jeweils vom Grad $\{1, -1, 0\}$

\implies Falls alte Bewegung Lösung \implies neue Bewegung auch Lösung. (entscheidend: $L \rightarrow \alpha^k L$)

\implies „**Mechanische Ähnlichkeit**“.

Definition 2.14 (Mechanische Ähnlichkeit) $\beta = \beta(\alpha)$ so wählbar, dass $x \rightarrow \alpha x, t \rightarrow \beta t \implies L \rightarrow \alpha^k L$.

Anwendung:

Sei X typische Länge einer Bewegung (Bahnradius, Entfernung von Umkehrpunkten, etc.). Sei T typische Zeit (Periode, Zeit zwischen Umkehrpunkten, etc.). Seien $X' = \alpha X$, $T' = \beta T$ die entsprechenden Größen ähnlicher Bewegungen. Dann gilt:

$$\frac{T'}{T} = \beta = \alpha^{1-k/2} = \left(\frac{X'}{X}\right)^{1-k/2}$$

Beispiel 2.15 (Harmonischer Oszillator)

$$V \sim x^2 \implies k = 2 \implies \frac{T'}{T} = 1$$

Beispiel 2.16 (Freier Fall)

$$V \sim x \implies k = 1 \implies \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{X'}{X}}$$

Beispiel 2.17 (Gravitation)

$$V \sim \frac{1}{x} \implies k = -1 \implies \frac{T'}{T} = \frac{X'^{3/2}}{X}$$

2.7 Virialsatz

Betrachte Zeitmittel: $\langle A \rangle := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t dt' A t'$ (besonders leicht zu berechnen für totale Zeitableitungen).

Ziel: $\langle T \rangle$ (kinetische Energie)

Also: Versuche T als totale Zeitableitung zu schreiben. (zur Vereinfachung in 1D, ein Teilchen)

$$\begin{aligned} 2T &= mv^2 = p\dot{x} = \frac{d}{dt}(px) - \dot{p}x \\ &= \frac{d}{dt}(px) + x \frac{\partial V}{\partial x} \\ \implies 2T - x \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{d}{dt}(px) \\ \implies \langle 2T - x \frac{\partial V}{\partial x} \rangle &= \langle \frac{d}{dt}(px) \rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (px|_t - px|_0) = 0 \quad (\text{falls } p, x \text{ beschränkt}) \end{aligned}$$

Definition 2.18 (Virialsatz) Für Bewegungen in beschränkten Gebieten mit beschränkter Geschwindigkeiten gilt:

$$2 \langle T \rangle = \langle \sum_a \vec{x}_a \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_a} \rangle = \langle \sum_a \sum_{i=1}^3 x_a^i \frac{\partial V}{\partial x_a^i} \rangle$$

Beispiel 2.19 (homogenes Potential) Falls V homogen von Grad k : $2 \langle T \rangle = k \langle V \rangle$

Beispiel 2.20 (harmonischer Oszillator) $\langle T \rangle = \langle V \rangle$

Beispiel 2.21 (Gravitation) $k = -1$, $2 \langle T \rangle = - \langle V \rangle$

3 Trägheitstensor

3.1 Trägheitsmoment und Satz von Steiner

Rotation von Körper um feste Achse A . Körper besteht aus Elementen m_a mit Radius $r_{a,\perp}$. Kontinuierlich: $m_a = \rho \Delta V$. Einzige erlaubte Bewegung sei Drehung um Achse A :

$$\begin{aligned} T &\simeq \sum_a \frac{m_a}{2} v_a^2 = \sum_a \frac{m_a}{2} \omega^2 r_{a,\perp}^2 \\ &= \frac{1}{2} I_A \omega^2 \\ \Rightarrow I_A &\equiv \sum_a m_a r_{a,\perp}^2 \end{aligned}$$

Trägheitsmoment im Kontinuum:

$$I_A = \int d^2 \vec{r} \rho(\vec{r}) r_{\perp}^2$$

Einziger Freiheitsgrad: Drehwinkel φ (wobei $\omega = \dot{\varphi}$)

$$\begin{aligned} L(\varphi, \dots \varphi) &= \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \\ \Rightarrow I_A \ddot{\varphi} &= - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Annahme: V ergibt sich als Summe der Potentiale aller Teilmassen:

$$V(\varphi) = \sum_a V_a(\vec{r}_a(\varphi))$$

Betrachte

$$\begin{aligned} V(\varphi + \delta\varphi) &= \sum_a V_a(\vec{r}_a(\varphi) + \delta \vec{v}_a) \\ &= \sum_a V_a(\vec{r}_a(\varphi) + \delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_a(\varphi)) \\ &= \sum_a V_a + \sum_a (\delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_a) \cdot \vec{\nabla} V_a(\vec{r}_a(\varphi)) \\ V(\varphi + \delta\varphi) - V(\varphi) &= \sum_a (\delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_a) \cdot \vec{\nabla} V_a(\vec{r}_a(\varphi)) \end{aligned}$$

Limes $\delta\varphi \rightarrow 0$, $\delta \vec{\varphi} = \vec{e}_A \delta\varphi$, \vec{e}_A Einheitsvektor der Achse

$$\begin{aligned} - \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} &= - \sum_a \frac{\delta \vec{\varphi} \times \vec{r}_a}{\delta\varphi} \cdot \vec{\nabla} V \\ &= \sum_a \varepsilon_{ijk} (\vec{e}_A)_j (\vec{r}_a)_k \cdot (F_a)_i \\ &= \sum_a (\vec{e}_A)_j \left(\vec{r}_a \times \vec{F}_a \right)_j = \sum_a \vec{e}_A \cdot \vec{M}_a \end{aligned}$$

\vec{M}_a : Drehmoment auf Punkt „a“.

Zuletzt: $I_A \ddot{\varphi} = -\frac{dV}{d\varphi}$

$$\implies \frac{d}{dt}(I_A \dot{\varphi}) = \vec{e}_A \vec{M}$$

\vec{M} : Gesamtdrehmoment.

Erinnerung: Drehimpuls für Punktmasse: $\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}$

$$\implies \vec{e}_A \cdot \vec{L} = m \vec{e}_A [(\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}) \times \vec{r}]$$

$$|\vec{r}_{\perp} \times \vec{v}| = |\vec{r}_{\perp}| |\vec{v}| = |\vec{r}_{\perp}| |\vec{r}_{\perp}| \dot{\varphi}$$

$$\implies \vec{e}_A \vec{L} = m r_{\perp}^2 \dot{\varphi} \implies \vec{e}_A \vec{L} = I_A \dot{\varphi}$$

$$\implies \vec{e}_A \cdot \dot{\vec{L}} = \vec{e}_A \vec{M}$$

Bemerkung: I_A ist besonders einfach zu berechnen falls $A \parallel S$ (Schwerpunktsachse) und I_S bekannt, \vec{R}_{\perp} ist der (senkrechte) Abstand der beiden Achsen.

$$I_A = \sum_a m_a v_{0,\perp}^2 = \sum_a m_a (\vec{R}_{\perp} + \vec{r}'_{\perp,a})^2$$

Summe der Mischterme fällt weg

$$I_A = \sum_a m_a (\vec{R}_{\perp}^2 + \vec{r}_{a,\perp}'^2)$$

Satz von Steiner:

$$\implies I_A = M \vec{R}_{\perp}^2 + I_s$$

3.2 Trägheitstensor

Berechne kinetische Energie eines Körpers der sich mit \vec{v} und mit $\vec{\omega}$ um Achse durch Schwerpunkt dreht.

$$\begin{aligned} T &= \sum_a \frac{m_a}{2} \vec{v}_a^2 = \sum_a \frac{m_a}{2} (\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}_a)^2 \\ &= \sum_a \frac{m_a}{2} (\vec{v}^2 + 2\vec{v}(\vec{\omega} \times \vec{r}_a) + (\vec{\omega} \times \vec{r}_a)^2) \end{aligned}$$

Mischterm fällt weg, da $\sum_a m_a \vec{r}_a = 0$, wegen Schwerpunktbedingung

$$\begin{aligned} &= \frac{M}{2} \vec{v}^2 + \sum_a \frac{m_a}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_a)^2 \\ &= \frac{M}{2} \vec{v}^2 + \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j \\ I_{ij} &\equiv \sum_a m_a (\delta_{ij} \vec{r}_a^2 - (\vec{r}_a)_i (\vec{r}_a)_j) \end{aligned}$$

Integralform:

$$I_{ij} = \int d^3\vec{r} \rho(\vec{r}) (\delta_{ij} \vec{r}^2 - r_i r_j)$$

Speziell für $\vec{r} = (x, y, z)$ findet man:

$$I = \int dx dy dz \rho(\vec{r}) \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.1 (homogener Würfel) $\int dx \rightarrow \int_{-a/2}^{a/2} dx$

$$\int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-a/2}^{a/2} dy y^2 \int_{-a/2}^{a/2} dz = a \cdot \frac{a^3}{12} \cdot a$$

Insgesamt:

$$I = a^2 \rho \begin{pmatrix} \frac{1}{6}a^3 & & \\ & \frac{1}{6}a^3 & \\ & & \frac{1}{6}a^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} M a^2 \mathbb{K}$$

3.3 Hauptträgheitsachsen

Tensor ist (wie) Vektor ein geometrisches Objekt. Er beschreibt Dichte/ Form des Körpers. Bei Drehungen des Körpers: Dreht sich mit: $I'_{ij} = R_{ik} R_{jl} I_{kl} \iff I' = R I R^T = R I R^{-1}$ (aktive Sicht).

Passive Sicht: Für die Komponenten von I im gedrehten Koordinatensystem gilt:

$$I'_{ij} = R_{ik} R_{jl} I_{kl}$$

Zentraler Satz: Jede symmetrische, reelle Matrix kann durch eine orthogonale Transformation auf Diagonalform gebracht werden. \implies Wir können als stets den Körper so drehen beziehungsweise das Koordinatensystem so wählen, dass

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

I_1, I_2, I_3 heißen Hauptträgheitsmomente. Die Koordinaten $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ des Systems in dem I diagonal ist heißen Hauptträgheitsachsen. (im Allgemeinen sind dies die Symmetrieachsen des Körpers, soweit vorhanden).

Sei $\vec{v} = 0$, sei $\vec{\omega} = \omega \hat{e}$ (\hat{e} beliebiger Einheitsvektor).

$$\implies T = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} I_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j \omega^2 \equiv \frac{1}{2} I_e \omega^2$$

(Daher ist $I_e \equiv I_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j$) das Trägheitsmoment bezüglich \hat{e} .

Sei speziell I diagonal und $\hat{e} = \hat{e}_1 = (1, 0, 0)$. Es folgt $I_e = I_{11} = I_1$, sprich: Die Hauptträgheitsmomente

sind also gerade die Trägheitsmomente bezüglich die Hauptträgheitsachsen.
Außerdem gilt:

$$I_{ij}(\hat{e}_1)_j = I_{ij}\delta_{j1} = I_{i1} = I_1\delta_{i1} = I_1(\hat{e}_1)_i$$

Matrixschreibweise:

$$I\hat{e}_1 = I_1\hat{e}_1$$

Demnach ist \hat{e}_1 ein **Eigenvektor** von I mit **Eigenwert** I_1 . Die Existenz eines gewissen Eigenvektors und dessen Eigenwert sind **koordinatenunabhängig!** In der Tat:

$$\begin{aligned} R \cdot I\hat{e}_1 &= I_1 R\hat{e}_1 \\ (RIR^{-1})R &= I_1 R\hat{e}_1 \\ I'\hat{e}'_1 &= I_1\hat{e}'_1 \quad \hat{e}'_1 = R\hat{e}_1 \end{aligned}$$

Wir sehen: Die Matrix I hat 3 Eigenvektoren $\hat{e}_{(a)}$. Diese Eigenvektoren definieren die Hauptträgheitsachsen. Die Eigenwerte I_a sind die entsprechenden Hauptträgheitsmomente.

3.4 Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit

Sei $\mathbb{V} = \mathbb{C}^n$ ein Vektorraum über \mathbb{C} . Definiere das Skalarprodukt ($\forall x, y \in \mathbb{V}$)

$$x, y \mapsto \langle x, y \rangle \equiv x^\dagger y \in \mathbb{C}$$

Notation: $M^\dagger \equiv \bar{M}^T$ für alle komplexen Matrizen. Sei H eine hermitesche Matrix ($n \times n$), das heißt $H^\dagger = H$. Wir können H wie folgt diagonalisieren:

- Löse $\det(H - \lambda \mathbb{K}) = 0$. (Fundamentalsatz der Algebra) Nenne diese Lösung λ_1 . Da nun $\det(H - \lambda_1 \mathbb{K}) = 0$ hat die Gleichung $(H - \lambda_1 \mathbb{K}) \cdot x = 0$ eine nichttriviale Lösung $x_1 \in \mathbb{V}$. (Wegen Nicht-Invertierbarkeit $(H - \lambda_1 \mathbb{K})$). Notation: x_1 heißt Eigenvektor von H zum Eigenwert λ_1 . Es gilt $Hx_1 = \lambda_1 x_1$
- Behauptung: H bildet $\{x_1\}_\perp$ auf $\{x_1\}_\perp$ ab.
- Begründung: Sei $\langle y, x_1 \rangle = 0$. Dann gilt

$$\langle Hy, x_1 \rangle = (Hy)^\dagger x_1 = y^\dagger H^\dagger x_1 = y^\dagger Hx_1 = \lambda_1 y^\dagger x_1 = \lambda_1 \langle y, x_1 \rangle = 0 \quad \checkmark$$

Betrachte jetzt die $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix H_1 welche die Wirkung von H auf $\{x_1\}_\perp$ beschreibt. Wiederhole obiges Argument. Finde λ_2, x_2 und so weiter.

- Wähle normierte Basis $e_1, \dots, e_n \sim x_1, \dots, x_n$. Diese Basis ist nach obigem auch orthogonal.
- Wir nennen Matrizen welche eine Orthonormalbasis in eine Orthonormalbasis überführen unitär. Ohne Beweis: Für solche Matrizen gilt $U^\dagger = U^{-1}$
- Damit haben wir Diagonalisierbarkeit von hermiteschen Matrizen durch unitäre Transformationen!
- Behauptung: λ_i sind reell.

- Begründung: $\langle Hx_1, x_1 \rangle = \langle \lambda x_1, x_1 \rangle = \bar{\lambda} \langle x_1, x_1 \rangle = \langle x_1, Hx_1 \rangle = \lambda \langle x_1, x_1 \rangle \checkmark$

Korollar: Reelle, symmetrische Matrizen ($H = H^\dagger, H_{ij} \in \mathbb{R}$) können durch orthogonale Transformationen diagonalisiert werden.

Dazu: Finde wie oben $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. Wir wissen aber, dass auch $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Dann existiert ein reelles x_1 mit $(H - \lambda_1 \mathbb{1})x_1 = 0$. Fortsetzung wie oben, nur „unitär“ \rightarrow „orthogonal“.

3.5 Trägheitsellipsoid

Bisher: $I_{\text{würfel}} = \frac{1}{6}Ma^2$

Nächstes Beispiel: homogene Kugel, ohne Rechnung: $I \sim \mathbb{1}$, Warum?

Es muss gelten: $I = RIR^{-1} \forall R \in SO(3)$. Fakt: δ_{ij} ist der einzige invariante Tensor von $SO(3)$ mit zwei Indizes (vom Rang 2).

Betrachte nun ein weniger symmetrisches Beispiel:

Beispiel 3.2 (Hantel) Hantel mit masseloser Stange, $m_1 = m_2 = m$

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \sum_m m \cdot (\delta_{ij} \vec{r}^2 - r_i r_j) \\ &= 2m(\delta_{ij} \vec{r}^2 - r_i r_j) \quad \vec{r} = (0, 0, a) \\ &= 2ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \end{aligned}$$

realistische Hantel (keine Punktmassen)

$$= 2ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}_{ij}$$

Vermutung: „einfache“ Beziehung zwischen Form des Körpers und Trägheitstensors.

So wie ein Vektor einen Pfeil in \mathbb{R}^3 entspricht, so entspricht ein symmetrischer Tensor vom Rang 2 einer **Fläche 2. Grades**:

$$t_{ij}x_i x_j = 1$$

Wir setzen nun $t \equiv I$ und gehen ins Hauptträgheitsachsensystem.

$$I_{ij}x_i x_j = 1 \implies I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2 = 1$$

Dies beschreibt einen Ellipsoid. Betrachte beliebige Achse \hat{e} ($\hat{e}^2 = 1$). Diese schneide Ellipsoid bei \vec{x}_e .

$$\begin{aligned} \vec{x}_e &= \hat{e} \cdot |\vec{x}_e| \\ 1 &= I_{ij}(x_e)_i (x_e)_j \\ 1 &= |\vec{x}_e|^2 I_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j = I_e |\vec{x}_e|^2 \\ \implies |\vec{x}_e| &= \frac{1}{\sqrt{I_e}} \end{aligned}$$

$|\vec{x}_e|$ groß $\iff I_e$ klein \iff Körper hat in den „anderen“ Richtungen eine kleine Ausdehnung.
 \implies Trägheitsellipsoid folgt ungefähr Form des Körpers:

Körper	Würfel / Kugel	Hantel / Quader	gekreuzte Hantel / „Buch“
Ellipsoid	Sphäre	vertikal gestreckte Sphäre	vertikal gestauchte („abgeflachte“) Sphäre

3.6 Trägheitstensor und Drehimpuls (mehr zur Geometrie)

Erinnerung: Tensor t vom Rang 2 ist bilineare Abbildung

$$t : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto t_{ij}x_iy_j$$

Unser Fall:

$$I : (\vec{\omega}, \vec{\omega}) \mapsto I_{ij}\omega_i\omega_j = 2T$$

\implies Die formale mathematische Definition vom I hat unmittelbare physikalische Bedeutung. Sie ordnet $\vec{\omega}$ die kinetische Energie zu. Im euklidischen Raum definiert ein Tensor außerdem eine Abbildung

$$t : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}, \{x_i\} \mapsto \{t_{ij}x_j\} \text{ beziehungsweise } x \rightarrow tx$$

Auch dies hat bei uns physikalische Bedeutung:

$$I : \{\omega_i\} \mapsto \{I_{ij}\omega_j\} = \{L_i\} \text{ also } \vec{\omega} \mapsto \vec{L}$$

Wir behaupten hier, dass $L_i = I_{ij}\omega_j$ gilt. Das ist leicht zu prüfen: Betrachte Massenpunkt bei der Position \vec{r} . Drehe jetzt um Achse $\vec{\omega}$ mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ L_i &= m\varepsilon_{ijk}r_j(\varepsilon_{klm}\omega_l r_m) = \dots \\ &= m(\delta_{ij}\vec{r}^2 - r_1r_j)\omega_j \end{aligned}$$

Nach Summation über viele Massenpunkte:

$$L_i = \sum_a m_a (\delta_{ij}\vec{r}_a^2 - (r_a)_i(r_a)_j) \omega_j = I_{ij}\omega_j, L = I\omega$$

4 Kreisel

4.1 Euler-Gleichungen

Körperfestes System vs. Raumfestes System. Drehmatrix $R(t) \in SO(3)$

$$L' = RL, v' = Rv$$

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{L}' &= \vec{M}' & \frac{d}{dt}(R \cdot L) &= RM \\ \dot{R}L + R &\rightarrow L &= RM \end{aligned}$$

Erinnerung: $\dot{R}r = R(\omega \times r)$

$$\begin{aligned} R(\omega \times L) + R\dot{L} &= RM \\ \dot{R} &= M + L \times \omega \\ L &= I\omega \\ I\dot{\omega} &= M + (I\omega) \times \omega \end{aligned}$$

Wähle als körperfestes System speziell das Hauptachsensystem $\Rightarrow I = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

Euler-Gleichungen

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 &= M_1 + \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) \\ I_2\dot{\omega}_2 &= M_2 + \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) \\ I_3\dot{\omega}_3 &= M_3 + \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) \end{aligned}$$

4.2 Freier Kreisel

Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} E = T &= \frac{1}{2}\omega^T I \omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i^2 \\ L_i &= I_i \omega_i \Rightarrow E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{L_i^2}{I_i} \end{aligned}$$

oder

$$\frac{L_1^2}{2EI_1} + \frac{L_2^2}{2EI_2} + \frac{L_3^2}{2EI_3} = 1$$

$\Rightarrow L$ ist auf ein Ellipsoid („Binet-Ellipsoid“ (Ellipsoid im „L-Raum“)) eingeschränkt.

Drehimpulserhaltung:

$$L' = \text{const.}, L' = RL, R \in SO(3) \Rightarrow |L| = \text{const.}$$

$\Rightarrow L$ bewegt sich im körperfesten System auf Schnittkurven von Binet-Ellipsoid und Sphäre mit Radius $|\vec{L}| = |\vec{L}'|$ Ohne Beschränkung der Allgemeinheit: $I_1 > I_2 > I_3$

Fall 1: $|\vec{L}| < \sqrt{2EI_3} \Rightarrow$ Sphäre und Ellipsoid haben keine gemeinsamen Punkte \Rightarrow physikalische unmöglich

Fall 2: $|\vec{L}| = \sqrt{2EE_3}$ („einbeschriebene Kugel“) $\Rightarrow L = \pm(0, 0, \sqrt{2EI_3})^T, \omega_2 \parallel e_3$ fest.

Fall 3: $\sqrt{2EI_3} < |\vec{L}| < \sqrt{2EI_2} \Rightarrow$ Sphäre stößt aus Ellipsoid heraus $\Rightarrow L$ bewegt sich im körperfesten System auf einer geschlossenen Kurve \Rightarrow kräftefreie Präzession des Kreisels im Laborsystem.

Fall 4: $|\vec{L}| = \sqrt{2EI_2}$ Zwei kreuzende Kurven L sitzt am Kreuzungspunkt (instabil) oder

bewegt sich entlang Kurve

Fall 5: $\sqrt{2EI_2} < |\vec{L}| < \sqrt{2EI_1}$ „Gurke“, nur Enden sind abgeschnitten $\implies L$ bewegt sich im körperfesten System auf einer geschlossenen Kurve \implies kräftefreie Präzessions des Kreisels im Laborsystem

Fall 6: $|\vec{L}| = \sqrt{2EI_1}$ („einbeschriebene Kugel“), wie Fall 2

Fall 7: $\sqrt{2EI_1} < |\vec{L}|$ unmöglich

Auch möglich: Geometrische Diskussion im raumfesten System \implies Poinsot-Konstruktion: Ellipse rollt rutschfrei auf Ebene ab.

4.3 Freier Kreisel analytisch

Euler-Gleichungen

$$I_1 \dot{\omega}_1 = \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 = \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2)$$

\implies Falls 2 der 3 Komponenten von $\vec{\omega}$ Null sind $\implies \vec{\omega} = \text{const.}$ Jetzt zur Vereinfachung sei $I_1 = I_2 < I_3$. Definiere $I_0 \equiv I_1 = I_2$ (Beispiel: abgeflachte Kugel, wie etwa Erde).

$$I_0 \dot{\omega}_1 = \omega_2 \omega_3 (I_0 - I_3)$$

$$I_0 \dot{\omega}_2 = -\omega_3 \omega_1 (I_0 - I_3)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0$$

$\omega_3 = \text{const.}$ Definiere $\alpha \equiv -\omega_3 \left(1 - \frac{I_3}{I_0}\right) = \text{const.}$ Man erhält:

$$\dot{\omega}_1 = -\alpha \omega_2$$

$$\dot{\omega}_2 = -\alpha \omega_1$$

$$\implies \ddot{\omega}_1 = -\alpha^2 \omega_1$$

$$\implies \omega_1 = A \cos(\alpha t + \varphi)$$

(ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varphi = 0$). \implies freie Präzession:

$$\omega_1 = A \cos \alpha t$$

$$\omega_2 = A \sin \alpha t$$

$$\omega_3 = \text{const.}$$

$\vec{\omega}$ bewegt sich auf Kreis in der $\omega_3 = \text{const.}$ Ebene.

Konkreter Fall: Erde

$$-\left(1 - \frac{I_3}{I_0}\right) \approx 0.003 \equiv \varepsilon$$

$$\implies \alpha = \omega_3 \cdot \varepsilon \implies T_{\text{Präz}} = \frac{T_{\text{Erde}}}{\varepsilon} \sim 300 \text{Tage}$$

\implies Realität ist leider komplizierter, „Chandler-Wobble“

4.4 Schwerer Kreisel (vereinfacht)

Raumfestes System!

- \vec{S}' : Schwerpunktsachse des Kreisels
- φ : Winkel der Schräglage des Kreisels

entscheidende Näherung: $\vec{L}' \parallel \vec{S}'$

$$\vec{M}' = \vec{r}' \times \vec{F}' \sim \vec{S}' \times \vec{F}'$$

Also in unserer Näherung: $\vec{L}' \perp \vec{M}'$. Betrachte:

$$\left(\vec{L}'^2\right)' = 2\vec{L}' \cdot \dot{\vec{L}}' \quad \dot{\vec{L}}' = \vec{M}'$$

$\implies \left(\vec{L}'^2\right)' = 0$ beziehungsweise $|\vec{L}'| = \text{const.}$ Weiterhin: $\vec{F}' \parallel \hat{e}_z \implies \vec{M}'$ liegt in x-y-Ebene.

\implies Spitze von \vec{L}' bewegt sich auf Kreis in horizontaler Ebene.

Kreisradius = $|\vec{L}'| \sin \varphi$, Geschwindigkeit = $|\vec{M}'|$. Periodendauer:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi |\vec{L}'| \sin \varphi}{|\vec{M}'|} = \frac{2\pi |\vec{L}'|}{mgl}$$

Anwendung auf Erde: kein fester Punkt, stattdessen Drehmoment durch Sonne/Mond und Abflachung der Erde. \implies Präzession der Äquinoktialpunkte (precession of the equinoxes). $T \sim 26\,000$ a

4.5 Eulersche Winkel

Ziel: exakte Analyse der symmetrischen schweren Kreiseln.

Brauchen: Parametrisierung der relativen Lage zweier Koordinatensysteme.

\implies Drehe um $\hat{e}_3' = \hat{e}_3$ um φ , dann Drehe um \hat{e}_1 um θ und dann drehe um \hat{e}_3 um ψ **Wichtig:** kleine Winkel (als Vektoren) sind bezüglich Drehungen additiv. (folgt aus $\mathbb{R} = \mathcal{K} + \mathcal{I}(\delta\vec{\varphi})$). \implies Winkelgeschwindigkeiten addieren sich vektoriell.

$$\implies \vec{\omega}' = \dot{\varphi}\hat{e}_3' + \dot{\psi}\hat{e}_3 + \dot{\theta}\hat{e}_N$$

4.6 Schwerer Kreisel (exakt)

Ungestrichenes System - fest verbunden mit Kreisel. ($I_1 = I_2 \equiv I_0$)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[I_0(\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3\omega_3^2] - mgl \cos \theta$$

Wegen Rotationssymmetrie von Schwerfeld und Kreisel sind φ, ψ zyklisch \implies können die Umschreibung von $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \rightarrow \{\varphi, \psi, \theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}\}$ bei $\varphi = \psi = 0$ durchführen: Wir haben

(bei $\varphi = \psi = 0$):

$$\begin{aligned}\hat{e}_N &= \hat{e}_1, \hat{e}_3 = \hat{e}_3 \cos \theta + \hat{e}_2 \sin \theta \\ \vec{\omega}' &= \dot{\varphi}(\hat{e}_3 \cos \theta + \hat{e}_2 \sin \theta) + \dot{\psi}\hat{e}_3 + \dot{\theta}\hat{e}_1 \\ &= \hat{e}_1 \underbrace{\dot{\theta}}_{\omega_1} + \hat{e}_2 \underbrace{(\dot{\varphi} \sin \theta)}_{\omega_2} + \hat{e}_3 \underbrace{(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)}_{\omega_3} \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left(I_0 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 \right) - mgl \cos \theta\end{aligned}$$

Energie: $E = T + V = \text{const.}_1$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = L'_3 = \text{const.}_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = L_3 = \text{const.}_3$$

Auflösen nach $\dot{\varphi}, \dot{\psi}$ und einsetzen in $T + V = E$ gibt:

$$E = \frac{1}{2} I_0 \frac{\dot{U}^2}{1 - U^2} + V_{eff}(u), \quad u \equiv \cos \theta$$

$$V_{eff}(u) = mgl u + \frac{L_3^2}{2I_3^2} + \frac{(L'_3 - L_3 u)^2}{2I_0(1 - u^2)}$$

$$-\dot{U}^2 = \frac{2}{I_0} \left\{ \left(mgl u + \frac{L_3^2}{2I_3} - E \right) (1 - U^2) + \frac{(L'_3 - L_3 U)^2}{2I_0} \right\}$$

\implies Kurvendiskussion $\implies u$ oszilliert zwischen u_{min}, u_{max} $\implies \theta$ oszilliert zwischen $\theta_{min}, \theta_{max}$. Währenddessen schreitet φ unregelmäßig voran:

$$\dot{\varphi} = \frac{L'_3 - L_3 \cos \theta}{I_0 \sin^2 \theta}$$

5 D'Alembertsches Prinzip und Lagrange Gleichungen 1. und 2. Art

Unter anderem „Herleitung“ (historisch) der Euler-Lagrange-Gleichungen, immer noch Anwendungsrelevant:
Lagrange-Gleichungen 1. Art / nichtholonome Zwänge

5.1 Arten von Zwangsbedingungen

1. Gasmoleküle in einem Kasten
2. a) Perle auf Draht, Draht unbewegt
 b) Perle auf Draht, Draht bewegt
3. Senkrecht stehendes Rad, ohne Rutschen
4. Durch massenlose Stangen verbundene Punktmassen

Zwänge heißen **holonom** falls sie durch nicht-differentielle Gleichungen ausdrückbar sind, zum Beispiel

$$\phi_\alpha(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) = 0, \alpha \in \{0, \dots, d\}$$

Genauer:

t kommt vor: „rheonom“

t kommt nicht vor: „skleronom“

Besonders interessant: Zwänge in differentieller, nicht-integrierbarer Form (**nicht-holonom**). (Fall 3). Im Moment nicht klassifiziert 1. Also betrachte Fall 3.: 4 Parameter: $(\vec{x}, \theta, \varphi)$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Zwänge: $dx^1 = R d\varphi \cos \theta$, $dx^2 = R d\varphi \sin \theta$. Hoffnung: (wenigstens eine) dieser Bedingungen **ausdrückbar** als

$$\phi(x^1, x^2, \varphi, \theta) = 0$$

Das heißt Differenzieren dieser Gleichung gibt eine der obigen Zwänge:

$$0 = d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \phi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta$$

Falls dies für beide differentiellen Zwänge ginge, wäre unser System doch **holonom**. (beziehungsweise „integrierbar“). Aber im konkreten Fall geht das **nicht**.

Beweis per Widerspruch: Wenn es ginge, könnten wir nach φ auflösen $\Rightarrow \varphi = \varphi(x^1, x^2, \theta)$. Dies ist unmöglich, weil man durch „Rollen im Kreis“ beliebiges φ zu vorgegebenen x^1, x^2, θ erreichen kann. \square

5.2 Prinzip der virtuellen Arbeit und „D'Alembert“

Betrachte eine masselose starre Stange, die zwei Massen m_1, m_2 verbindet. Auf m_1, m_2 wirken die Zwangskräfte $\vec{F}_{12}^c, \vec{F}_{21}^c$ „constrait“. Wir wissen schon: Energie erhalten \Rightarrow Zwangskräfte verrichten keine Arbeit. $\Rightarrow \delta A = \vec{F}_{12}^c d\vec{x}_1 + \vec{F}_{21}^c d\vec{x}_2 = 0$. Ebenso für Perle auf Draht (Draht fest): $\vec{F}_c \perp \text{Draht} \parallel d\vec{x}$

$$\Rightarrow \delta A = \vec{F}^c d\vec{x} = 0$$

Wir wollen die Aussage „Zwangskräfte verrichten keine Arbeit“ allgemein formulieren.

Problem: bei bewegtem Draht $d\vec{x} \parallel \text{Draht}$ nicht mehr $\Rightarrow \delta A = 0$ im Allgemeinen nicht mehr.

Lösung: Definiere **virtuelle Verrückung** δx bei $t = \text{const.}$. Dies ist eine **gedachte** Verschiebung des Systems in eine andere Lage - keine echte Bewegung. Fakt: in einfachen Beispielen (bewegter Draht, etc.) gilt jetzt wieder $\delta A = 0$. \Rightarrow Formulieren: „**Prinzip der virtuellen Arbeit**“

$$\sum_a \vec{F}_a^c \delta \vec{x}_a = 0$$

für jede virtuelle Verrückung $\{\delta \vec{x}_a, a = 1, \dots, N\} \Rightarrow$ Definition eines „glatt geführten Systems“. Für jede der Punktmassen gilt: $\vec{F}_a^{\text{tot}} = \vec{F}_A + \vec{F}_a^c$

$$\Rightarrow \sum_a \left(\vec{F}_a - \vec{F}_a^{\text{tot}} \right) \delta \vec{x}_a = 0$$

$$\Rightarrow \sum_a \left(\vec{F}_a - m_a \ddot{\vec{x}}_a \right) \delta \vec{x}_a = 0 \quad (\text{d'Alembertsches Prinzip})$$

Das D'Alembertsche Prinzip ist äquivalent zum Prinzip der virtuellen Arbeit. Vorteil: ohne Zwangkräfte. Nützliches Korollar: Im Gleichgewicht gilt:

$$\sum_a \vec{F}_a \delta \vec{x}_a = 0$$

Elementare Anwendung: Wippe: m_1, m_2 im Abstand l_1, l_2 von dem Auflagepunkt. Offensichtlich gilt:

$$\delta x_2 = -\frac{l_2}{l_1} \delta x_1$$

(für jede virtuelle Verrückung $\{\delta x_1, \delta x_2\}$). Wir setzen in d'Alembert (im Gleichgewicht) ein: $F_1 \delta x_1 + F_2 \delta x_2 = 0$

$$\Rightarrow F_1 \delta x_1 + F_2 \left(-\frac{l_2}{l_1}\right) \delta x_1 = 0 \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{l_2}{l_1}$$

(Hebelgesetz).

5.3 D'Alembertsches Prinzip mit verallgemeinerten Koordinaten und Kräften.

Betrachte N Massenpunkte, d holonome Zwänge.

$$\phi_\alpha(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N, t) = 0, \alpha = 1, \dots, d$$

mit verallgemeinerten Koordinaten q_m , sodass

$$\vec{x}_a = \vec{x}_a(q_1, \dots, q_{3N-d}, t)$$

Laut D'Alembert:

$$\sum_a \left(\vec{F}_a - m_a \ddot{\vec{x}}_a \right) \delta \vec{x}_a = 0$$

für alle virtuellen Verrückungen $\delta \vec{x}_a$. In verallgemeinerten Koordinaten kann man schreiben

$$\delta \vec{x}_a = \sum_m \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m} \delta q_m$$

Für den ersten Term findet man

$$\sum_a \vec{F}_a \delta \vec{x}_a = \sum_m Q_m \delta q_m$$

mit den verallgemeinerten Kräften.

$$Q_m := \sum_a \vec{F}_a \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m}$$

Für den zweiten Term erhält man:

$$\sum_a \ddot{\vec{x}}_a \delta \vec{x}_a = \sum_m \ddot{\vec{x}}_a \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m} \delta q_m = \sum_m \left(\frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{x}}_a \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m} \right) - \dot{\vec{x}}_a \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m} \right) \right) \delta q_m$$

Nebenrechnung: Gegeben $x = x(q, t)$. Totale Zeitableitung:

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} := \dot{x}(q, \dot{q}, t)$$

Offensichtlich gilt:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial x}{\partial q}$$

Wir berechnen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right) = \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t} \quad (\text{A})$$

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial q} = \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} \dot{q} + \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial t} \quad (\text{B})$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial q}$$

Weiterführung vom zweitem Term:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_a \delta \vec{x}_a &= \sum_m \left(\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_a \frac{\partial \dot{x}_a}{\partial \dot{q}_m} \right) - \dot{x}_a \frac{\partial \dot{x}_a}{\partial q_m} \right) \delta q_m \\ \Rightarrow \sum_a m_a \ddot{x}_a \delta \vec{x}_a &= \sum_{m,a} m_a \left(\frac{d}{dt} \left(\dot{x}_a \frac{\partial \dot{x}_a}{\partial \dot{q}_m} \right) - \dot{x}_a \frac{\partial \dot{x}_a}{\partial q_m} \right) \delta q_m \\ &= \sum_{m,a} m_a \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} \left(\frac{1}{2} \dot{x}_a^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_m} \left(\frac{1}{2} \dot{x}_a^2 \right) \right) \delta q_m \\ &= \sum_m \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T \delta q_m, \quad T = \sum_a \frac{1}{2} m_a \dot{x}_a^2 \end{aligned}$$

Zusammen mit 1. Term folgt:

$$0 = \sum_m \left(Q_m - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T \right) \delta q_m$$

δq_m unabhängig! \Rightarrow jeder der Klammer-Ausdrücke verschwindet getrennt. $\Rightarrow 3d - d$ Differentialgleichungen 2. Ordnung \Rightarrow Problem prinzipiell gelöst.

5.4 Lagrange-Gleichungen 1. Art

Jetzt **zusätzlich** p nichtholomome (differentielle) Zwänge.

$$\alpha = 1, \dots, p : \sum_m f_m^\alpha dq_m + f_t^\alpha dt = 0$$

f_m^α sind Funktionen der q_m, t . Wir wollen mit Vektoren in \mathbb{R}^{3N-d} arbeiten:

$$\delta \vec{q} := \{\delta q_m\}, \vec{f}^\alpha := \{f_m^\alpha\}, \vec{p} := \left\{ Q_M - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T \right\}$$

Bedingung für virtuelle Verrückung:

$$\sum_m f_m^\alpha \delta q_m = 0 \iff \vec{f}^\alpha \delta \vec{q} = 0$$

Sei $\text{span}\{\vec{f}^\alpha\}$ der von dem \vec{f}^α aufgespannte lineare Unterraum von \mathbb{R}^{3N-d} . Sei $\text{span}\{\vec{f}^\alpha\}_\perp$ das orthogonale Komplement. \implies Zwänge $\delta \vec{q} \in \text{span}\{\vec{f}^\alpha\}_\perp$. D'Alembert besagt nun: $\vec{p} \delta \vec{q} = 0$. Äquivalent: $\vec{p} \in \{\delta \vec{q}\}_\perp$

$$\implies \vec{p} \{\text{span}\{\vec{f}^\alpha\}_\perp\}_\perp = \text{span}\{\vec{f}^\alpha\}$$

$\implies \exists \lambda^\alpha(t)$, sodass

$$Q_m - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T + \sum_\alpha \lambda^\alpha f_m^\alpha = 0$$

$$\sum_m f_m^\alpha \dot{q}_m + f_t^\alpha = 0$$

Sie haben: $(3N-d) + p$ Differentialgleichungen für die $(3N-d) + p$ Funktionen q_m und λ^α
 \implies Problem prinzipiell gelöst.

5.5 Lagrange-Multiplikatoren und Zwangskräfte

Aus unserer Herleitung von D'Alembert folgt als technisches Zwischenergebnis:

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T = \sum_a m_a \ddot{x}_a \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m}$$

Ersetze: $m_a \ddot{x}_a = \vec{F}_a^{\text{tot}} = \vec{F}_a + \vec{F}_a^c$. Definiere

$$Q_m := \sum_a \vec{F}_a \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m}, Q_m^c := \sum_a \vec{F}_a^c \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m}$$

Schreibe rechte Seite von der Gleichung in Q 's um. Setze in „Lagrange-1“ ein. Finde:

$$Q_m^C = \sum_\alpha \lambda^\alpha f_m^\alpha$$

\implies Lagrange-Multiplikatoren bestimmen Zwangskräfte.

Schlusskommentar: Einfacherer Spezialfall: keine holonomen Zwänge. \implies Lagrange-1 direkt in kartesischen Koordinaten formulierbar.

$$F_m - m_m \ddot{x}_m + \sum_\alpha \lambda^\alpha f_m^\alpha = 0$$

$$\sum_{m=1}^{3N} f_m^\alpha \dot{x}_m + f_t^\alpha = 0$$

$m = 1, \dots, 3N, m_1 = m_2 = m_3, \text{etc}$

5.6 Lagrange-Gleichungen 2. Art

Betrachte System wie in 5.4 mit verallgemeinerten Koordinaten q_m und **ohne** nichtholonome Zwänge.

Seien die äußeren Kräfte konservativ: $\vec{F}_a = -\vec{\nabla}_a V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$ $\vec{\nabla}_a$: Gradient bezüglich \vec{x}_a

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q_m &= \sum_a \vec{F}_a \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m} = - \sum_a \left(\vec{\nabla}_a V \right) \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial q_m} = - \frac{\partial V}{\partial q_m} \\ &= \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) V \end{aligned}$$

D'Alembert sagt:

$$\begin{aligned} Q_m - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) V - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) T &= 0 \\ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) (V - T) &= 0 \\ \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_m} - \frac{\partial}{\partial q_m} \right) (L) &= 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow „Herleitung“ von „Lagrange-2“ aus Newton, „glatt geführte Systeme“, konservative Kräfte.

5.7 Lagrange-Multiplikatoren - allgemeine Sicht

Höhenfunktion $f(x, y)$ im Gebirge. Gipfel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Andere Frage: Höchster Punkt auf einem Weg. Weg: gegeben durch $g(x, y) = 0$. Können (im Allgemeinen) nicht Gipfel und Weg Bedingung gleichzeitig lösen! Allgemeine Methode:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (f + \lambda g) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} (f + \lambda g) &= 0 \\ g &= 0 \end{aligned}$$