

Lineare Algebra II (Vogel)

Robin Heinemann

19. April 2017

Inhaltsverzeichnis

18 Eigenwerte

1

18 Eigenwerte

In diesem Abschnitt sei $n \in \mathbb{N}$, V ein K -VR und $\varphi \in \text{End}_K(V)$.

Frage: V endlichdim. Existiert eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V , sodass $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ eine Diagonalmatrix ist, das heißt

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$?

Für $i = 1, \dots, n$ wäre dann $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$

Definition 18.1 $\lambda \in K, v \in V$

- λ heißt Eigenwert von $\varphi \stackrel{\text{Def}}{\iff} \exists v \in V, v \neq 0 : \varphi(v) = \lambda v$
- v heißt Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \stackrel{\text{Def}}{\iff} v \neq 0 \wedge \varphi(v) = \lambda v$
- φ heißt diagonalisierbar $\stackrel{\text{Def}}{\iff} V$ besitzt eine Basis aus EV von φ

(Falls V endlichdimensional, ist die äquivalent zu: Es gibt eine Basis \mathcal{B} von V und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

) Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit einer Matrix $A \in M(n \times n, K)$ sind über den Endomorphismus $\tilde{A} : K^n \rightarrow K^n$ definiert.

Bemerkung 18.2 $A \in M(n \times n, K)$. Dann sind äquivalent:

1. A ist diagonalisierbar.
2. Es gibt eine Basis von K^n aus Eigenvektoren von A
3. Es gibt ein $S \in \text{GL}(n, K)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$
4. A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix

In diesem Fall steht in den Spalten von S^{-1} eine Basis des K^n aus EV von A , und für jede Matrix $A \in M(n \times n, K)$ mit der Eigenschaft, dass die Spalten von S^{-1} eine Basis des K^n aus EV von A bilden, dann ist SAS^{-1} eine Diagonalmatrix (mit den EW auf der Diagonalen.)

Beweis Äquivalenz: \ 1. \iff 2. Definition, 2. \iff 3. aus Basiswechselsatz (16.6), 3. \iff 4. aus Definition Ähnlichkeit (16.12)

Zusatz: Sei $S \in \text{GL}(n, K)$ mit $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies A(S^{-1}e_j) = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j.$

Wegen $S^{-1} \in \text{GL}(n, K)$ ist $S^{-1}e_j \neq 0$, das heißt S^{-1} ist EV von A zum EW λ_j

Wegen $S^{-1} \in \text{GL}(n, K)$ ist $(S^{-1}e_1, \dots, S^{-1}e_n)$ eine Basis des K^n aus EV von A .

Sei $S \in \text{GL}(n, K)$, das heißt die Spalten von S^{-1} eine Basis des K^n aus EV von A bilden, das heißt für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ ist $AS^{-1}e_j = \lambda_j S^{-1}e_j$ für ein $\lambda_j \in K$.

$$\implies AS^{-1}e_j = S^{-1}\lambda_j e_j = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j \implies SAS^{-1}e_j = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j, j = 1, \dots, n$$

$$\implies SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \square$$

Beispiel 18.3 $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$

$$1. \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ Es ist } \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

das heißt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV von φ zum EW 1.

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ also ist } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ EV von } \varphi \text{ zum EW } -1. \text{ Somit:}$$

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ ist eine Basis des \mathbb{R}^2 aus EV von φ , das heißt φ ist diagonalisierbar.

In Termen von Matrizen: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist diagonalisierbar, und mit $S =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ ist dann ist } SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ Achtung: Das } \varphi \text{ diagonalisierbar ist, heißt nicht,}$$

dass jeder Vektor aus $V = \mathbb{R}^2$ ein EV von φ ist, zum Beispiel ist $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ (= Drehung um $\frac{\pi}{2}$). hat keinen EW.
Beweis dafür: später.

Ziel: Suche Kriterien für Diagonalisierbarkeit.

Bemerkung 18.4 v_1, \dots, v_m EV von φ zu paarweise verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$. Dann ist (v_1, \dots, v_m) linear unabhängig, insbesondere ist $m \leq \dim V$. Insbesondere gilt: ist V endlichdimensional, dann hat φ höchstens $\dim(V)$ Eigenwerte.

Beweis per Induktion nach m :

IA: $m = 1 : v_1 \neq 0$, da v_1 EV $\Rightarrow (v_1)$ linear unabhängig.

IS: sei $m \geq 2$, und die Aussage für $m - 1$ bewiesen.

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ mit $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m = 0$ Außerdem: $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_1 v_m = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \dots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1)v_m &= 0 \\ \alpha_2\lambda_2 - \lambda_1 &= \dots = \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1) = 0 \\ \Rightarrow \alpha_2 &= \dots = \alpha_m = 0 \\ \Rightarrow \alpha_1 v_1 &= 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow (v_1, \dots, v_m) \text{ linear unabhängig} \quad \square \end{aligned}$$

Folgerung 18.5 V endlichdimensional, φ habe n paarweise verschiedene EW, wobei $n = \dim V$. Dann ist φ diagonalisierbar.

Beweis Für $i = 1, \dots, n$ sei v_i ein EV von φ zum EW $\lambda_i \Rightarrow (v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig, wegen $n = \dim V$ ist (v_1, \dots, v_n) eine Basis von V aus EV von φ \square

Definition 18.6 $\lambda \in K$

$\text{Eig}(\varphi, \lambda) := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ heißt der Eigenraum von φ bezüglich λ .

$\mu_{geo}(\varphi, \lambda) := \dim \text{Eig}(\varphi, \lambda)$ heißt die geometrische Vielfachheit von λ .

Für $A \in M(n \times n, K)$ setzen wir $\text{Eig}(A, \lambda) := \text{Eig}(\tilde{A}, \lambda), \mu_{geo}(A, \lambda) := \mu_{geo}(\tilde{A}, \lambda)$.

Bemerkung 18.7 $\lambda \in K$. Dann gilt:

1. $\text{Eig}(\varphi, \lambda)$ ist ein UVR von V .
2. λ ist EW von $\varphi \iff \text{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\}$.
3. $\text{Eig}(\varphi, \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der zu λ gehörenden EV von φ .

4. $\text{Eig}(\varphi, \lambda) = \ker(\lambda \text{id}_V - \varphi)$, insbesondere ist $\text{Eig}(A, \lambda) = \ker(\lambda E_m - \varphi) = \text{Lös}(\lambda E_n - A, 0)$ für $A \in M(n \times n, K)$

5. Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$, dann $\text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \cap \text{Eig}(\varphi, \lambda_2) = \{0\}$

Beweis 4. Es ist $v \in \text{Eig}(\varphi, \lambda) \iff \varphi(v) = \lambda v \iff \lambda v - \varphi(v) = 0 \iff (\lambda \text{id}_V - \varphi)(v) = 0 \iff v \in \ker(\lambda \text{id}_V - \varphi)$ Es ist $\text{Eig}(A, \lambda) = \ker(\lambda \text{id}_{K^n} - \tilde{A}) = \ker(\underbrace{\lambda E_n - A}_{=0}) = \ker(\lambda E_n - A) = \text{Lös}(\lambda E_n - A, 0)$

1. aus 4.

2. λ EW von $\varphi \iff \exists v \in V, v \neq 0$ mit $\varphi(v) = \lambda v \iff \text{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\}$.

3. klar.

5. Sei $\lambda_1 \neq \lambda_2, v \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \cap \text{Eig}(\varphi, \lambda_2) \Rightarrow \lambda_1 v = \varphi(v) = \lambda_2 v \Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v = 0 \Rightarrow v = 0 \quad \square$

Bemerkung 18.8 V endlichdimensional, $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent:

1. λ ist EW von φ

2. $\det(\lambda \text{id}_V - \varphi) = 0$

Beweis 1. $\iff \text{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\} \Rightarrow \ker(\lambda \text{id}_V - \varphi) \neq \{0\} \Rightarrow \lambda \text{id}_V - \varphi$ nicht injektiv $\Rightarrow \lambda \text{id}_V - \varphi$ kein Isomorphismus $\Rightarrow \det(\lambda \text{id}_V - \varphi) = 0. \quad \square$