Lineare Algebra II (Vogel)

Robin Heinemann

24. April 2017

Inhaltsverzeichnis

18 Eigenwerte

In diesem Abschnitt sei $n \in \mathbb{N}$, V ein K-VR und $\varphi \in \operatorname{End}_K(V)$.
Frage: V endlichdim. Existiet eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V, sodass $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ eine Diagonalmatrix ist, das heißt

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$?
Für $i = 1, \dots, n$ wäre dann $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$

Definition 18.1 $\lambda \in K, v \in V$

- λ heißt Eigenwert von $\varphi \overset{\text{Def}}{\iff} \exists v \in V, v \neq 0 : \varphi(v) = \lambda v$
- v heißt Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \overset{\text{Def}}{\iff} v \neq 0 \land \varphi(v) = \lambda v$
- φ heißt diagonalisierbar $\overset{\text{Def}}{\iff}$ V besitzt eine Basis aus EV von φ

(Falls V endlichdimensional, ist die äquivalent zu: Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

)
Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisiebarkeit einer Matrix $A \in M(n \times n, K)$ sind über den Endomorphismus $\tilde{A} : K^n \to K^n$ definiet.

Bemerkung 18.2 $A \in M(n \times n, K)$. Dann sind äquivalent:

1. A ist diagonalisiebar.
2. Es gibt eine Basis von K^n aus Eigenvektoren von A
3. Es gibt ein $S \in \mathrm{GL}(n, K), \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$
4. A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix

In diesem Fall steht in den Spalten von S^{-1} eine Basis des K^n aus EU von A, und für jede Matrix $A \in M(n \times n, K)$ mit der Eigenschaft, dass die Spalten von S^{-1} eine Basis des K^n aus EV von A bilden, dann ist SAS^{-1} eine Diagonalmatrix (mit den EW auf der Diagonalen.)

Beweis Äquivalenz: \ 1. $\iff$ 2. Definition, 2. $\iff$ 3. aus Basiswechselsatz (16.6), 3. $\iff$ 4. aus Definition Ähnlichkeit (16.12)

Zusatz: Sei $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies A(S^{-1}e_j) = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j$.

Wegen $S^{-1} \in \mathrm{GL}(n, K)$ ist $S^{-1}e_j \neq 0$, das heißt S^{-1} ist EV von A zum EW λ_j
Wegen $S^{-1} \in \mathrm{GL}(n, K)$ ist $(S^{-1}e_1, \dots, S^{-1}e_n)$ eine Basis des K^n aus EV von A.
Sei $S \in \mathrm{GL}(n, K)$, das heißt die Spalten von S^{-1} eine Basis des K^n aus EV von A bilden, das heißt für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ ist $AS^{-1}e_j = \lambda_j S^{-1}e_j$ für ein $\lambda_j \in K$.

$$\implies AS^{-1}e_j = S^{-1}\lambda_j e_j = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j \implies SAS^{-1}e_j = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j, j = 1, \dots, n$$

$$\implies SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ □

Beispiel 18.3 $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$

1. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ Es ist $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, das heißt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV von φ zum EW 1.
   $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, also ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ EV von φ zum EW -1. Somit: $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus EV von φ, das heißt φ ist diagonalisierbar.
   In Termen von Matrizen: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist diagonalisiebar, und mit $S =$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ist dann ist $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Achtung: Das φ diagonalisiebar ist, heißt nicht, dass jeder Vektor aus $V = \mathbb{R}^2$ ein EV von φ ist, zum Beispiel ist $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ (= Drehung um $\frac{\pi}{2}$). hat keinen EW.
   Beweig dafür: später.

Ziel: Suche Kriterien für Diagonalisiebarkeit.

Bemerkung 18.4 $v_1, \ldots, v_m$ EV von φ zu paarweise verschiedenen EW $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$. Dann ist $(v_1, \ldots, v_m)$ linear unabhängig, insbesondere ist $m \leq \dim V$. Insbesondere gilt: ist V endlichdimesional, dann hat φ höchstens $\dim(v)$ Eigenwerte.

Beweis per Induktion nach m:
IA: $m = 1 : v_1 \neq 0$, da v_1 EV $\implies$ (v_1) linear unabhängig.
IS: sei $m \geq 2$, und die Aussage für $m - 1$ bewiesen.
Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K$ mit $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_m \lambda_m v_m = 0$ Außerdem: $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_m \lambda_1 v_m = 0$

$$\begin{aligned} \implies \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \cdots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1)v_m = 0 \\ \alpha_2\lambda_2 - \lambda_1 = \cdots = \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1) = 0 \\ \implies \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0 \\ \implies \alpha_1 v_1 = 0 \implies \alpha_1 = 0 \implies (v_1, \ldots, v_w) \text{ linear unabhängig} \end{aligned}$$ □

Folgerung 18.5 V endlichdemensional, φ hage n paarweise verschiedene EW, wobei $n = \dim V$ Dann ist φ diagonalisiebar.

Beweis Für $i = 1, \ldots, n$ sei v_i ein EV von φ zum EW $\lambda_i \implies (v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig, wegen $n = \dim V$ ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V aus EV von φ □

Definition 18.6 $\lambda \in K$
$\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ heißt der Eigenraum von φ bezüglich λ.
$\mu_{geo}(\varphi, \lambda) := \dim \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda)$ heißt die geometrische Vielfachheit von λ.
Für $A \in M(n \times n, K)$ setzen vir $\mathrm{Eig}(A, \lambda) := \mathrm{Eig}\left(\tilde{A}, \lambda\right), \mu_{geo}(A, \lambda) := \mu_{geo}\left(\tilde{A}, \lambda\right)$.

Bemerkung 18.7 $\lambda \in K$. Dann gilt:

1. $\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda)$ ist ein UVR von V.
2. λ ist EW von $\varphi \iff \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\}$.
3. $\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) \quad \{0\}$ ist die Menge der zu λ gehörenden EV von φ.

4. $\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) = \ker(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi)$, insbesondere ist $\mathrm{Eig}(A, \lambda) = \ker(\lambda E_m - \varphi) = \text{Lös}(\lambda E_n - A, 0)$ für $A \in M(n \times n, K)$

5. Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in K mit \lambda_1 \neq \lambda_2$, dann $\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_1) \cap \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_2) = \{0\}$

Beweis 4. Es ist $v \in \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) \iff \varphi(v) = \lambda v \iff \lambda v - \varphi(v) = 0 \iff (\lambda \operatorname{id}_V - \varphi)(v) = 0 \iff v \in \ker(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi)$ Es ist $\mathrm{Eig}(A, \lambda) = \ker\left(\lambda \operatorname{id}_{K^n} - \tilde{A}\right) = \ker\left(\widetilde{\lambda E_n - A}\right) = \ker(\lambda E_n - A) = \text{Lös}(\lambda E_n - A, 0)$

1. aus 4.

2. λ EW von $\varphi \Leftrightarrow \exists v \in V, v \neq 0$ mit $\varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\}$.

3. klar.

5. Sei $\lambda_1 \neq \lambda_2, v \in \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_1) \cap \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_2) \Rightarrow \lambda_1 v = \varphi(v) = \lambda_2 v \Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v = 0 \Rightarrow v = 0$ □

Bemerkung 18.8 V endlichdimesional, $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent:

1. λ ist EW von φ

2. $\det(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi) = 0$

Beweis 1. $\Leftrightarrow \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\} \Rightarrow \ker(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi) \neq \{0\} \Rightarrow \lambda \operatorname{id}_V - \varphi$ nicht injektiv $\Rightarrow$ $\lambda \operatorname{id}_V - \varphi$ kein Isomorphismus $\Rightarrow \det(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi) = 0$. □

Definition 18.9 K Körper, $A = \left(a_{ij}\right) \in M(n \times n, K)$

$$\chi_A^{char} := \det(tE_n - A) = \det \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ -a_{n1} & \dots & & t - a_{nn} \end{pmatrix} \in K[t]$$

heißt das *charakteristische Polynom von A.

Anmerkung Hiefür nötig: Determinanten von Matrizen mit Einträgen in einem kommutativen Ring.
In manchen Büchern $\chi_A^{char} = \det(A - tE_n)$ (schlecht) □

Beispiel 18.10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$$
$$\Rightarrow A\chi_a^{char} = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ -3 & t-4 \end{pmatrix} = (t-1)(t-4) - 6 = t^2 - 5t - 2$$

Bemerkung 18.11 $A, B \in M(n \times n, K), A \approx B$.
Dann ist $\chi_A^{char} = \chi_B^{char}$.

Beweis $A \approx B \Rightarrow \exists S \in \mathrm{GL}(n, K) : B = SAS^{-1}$

$$\Rightarrow tE_n - B = tE_n - SAS^{-1} = SS^{-1}tE_n - SAS^{-1} = StE_nS_{-1} - SAS^{-}1 = S(tE_n - A)S^{-1}$$
$$\Rightarrow \chi_B^{char} = \det(tE_n - B) = \det(S(tE_n - A)S^{-1}) = \det(S)\det(tE_n - A)\det(S^{-1}) =$$
$$\underbrace{\det(S)\det(S)^{-1}}_{=1}\det(tE_n - A) = \chi_A^{char}$$ □

Definition 18.12 V endlichdim, $n = \dim V$, $\mathcal{B}$ Basis von V, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$

$$\chi_\varphi^{char} := \chi_A^{char} = \det(tE_n - A) \in K[t]$$

heißt das charakteristische Polynom von φ.

Anmerkung χ_φ^{char} ist wohldefiniert, dann: Ist $\mathcal{B}'$ eine weitere Basis von V, $A' = M_{\mathcal{B}'}\varphi$, dann ist $A \approx A'$ und deshalb nach 18.11: $\chi_A^{char} = \chi_{A'}^{char}$. □

Satz 18.13 V endlichdimensional, $n = \dim V$. Dann gilt:

1. χ_φ^{char} ist ein normiertes Polynom von Grad n:

$$\chi_\varphi^{char} = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_0$$

mit $c_0 = (-1)^n \det \varphi$, $c_{n-1} = -^{(\varphi)}$ (vgl. Übung zur Spur)

2. Die Nullstellet von χ_φ^{char} sind genau die EW von φ:

$$\lambda \in K \text{ ist EW von } \varphi \Leftrightarrow \chi_\varphi^{char}\lambda = 0$$

Beweis Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V, $A := M_{\mathcal{B}}(\varphi) \in M(n \times n, K)$

1.

$$\chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \underbrace{(tE_n - A)}_{=:B=(B_{ij})} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) B_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot B_{n,\sigma(n)}$$
$$= (t - a_{11} \cdot \dots \cdot (t - a_{nn})) + \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n\ \{\mathrm{id}\}} \mathrm{sgn}(\sigma) B_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot B_{n,\sigma(n)}}_{:=g}$$

Für $\sigma \in S_n \quad \{\mathrm{id}\}$ treten in $B_{1,\sigma(1)}, \dots, B_{n,\sigma(n)}$ höchstens $n-2$ Diagonalelemente auf, also $\deg(g) \leq n-2$.

$$\Rightarrow \chi_\varphi^{char} = t^n - (a_{11} + \dots + a_{nn})t^{n-1} + \text{ Terme kleineren Grades}$$

insbesondere:

$$c_{n-1} = -(a_{11} + \dots + a_{nn}) = -^A = -^\varphi$$

Es ist

$$c_0 = \chi_\varphi^{char}(0) = (\det(tE_n - A))(0) = \det(0E_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

2. Aus $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ folgt $\lambda E_n - A = M_{\mathcal{B}}(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi)$. Also:

$$\chi_\varphi^{char}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\det(tE_n - A))(\lambda) = 0 \Rightarrow \det(\lambda E_n - A) = 0 \Leftrightarrow \det(M_{\mathcal{B}}(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi)) = 0$$
$$\Rightarrow \det(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi) = 0 \Leftrightarrow \lambda \text{ ist EW von } \varphi \qquad \square$$

Definition 18.14 $\lambda \in K$

$$\mu_{alg}(\varphi, \lambda) := \mu(\chi_\varphi^{char}, \lambda)$$

heißt die **algebraische Vielfachheit**

Beispiel 18.15 1. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Es ist $\chi_\varphi^{char} = \chi_\varphi^{char} =$

$\det \begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{pmatrix} = t^2 - 1 = (t-1)(t+1) \in \mathbb{R}[t]$ ▫ EW von $\varphi : 1, -1$.
Es ist $\mu_{alg}(\varphi, 1) = 1, \mu_{alg}(\varphi, -1) = 1$

$$\operatorname{Eig}(\varphi, 1) = \operatorname{Eig}(A, 1) = \text{Lös}(E_2 - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

also $\mu_{geo}(\varphi, 1) = \dim \operatorname{Eig}(\varphi, 1) = 1$

$$\operatorname{Eig}(\varphi, -1) = \operatorname{Eig}(A, -1) = \text{Lös}((-1) \cdot E_2 - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, 0\right) = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

also $\mu_{geo}(\varphi, -1) = 1$.

2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Es ist $\chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} =$

$t^2 + 1, \chi_\varphi^{char}$ hat keine NS in $\mathbb{R} \Rightarrow \varphi$ hat keine EW.

3. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Es ist $\chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix} =$

$(t-1)^2 \Rightarrow 1$ ist einziger EW von φ, es ist $\mu_{alg}(\varphi, 1) = 2$

$$\operatorname{Eig}(\varphi, 1) = \operatorname{Eig}(A, 1) = \text{Lös}(1E_2 - A, 0)\ \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$\Rightarrow \mu_{geo}(\varphi, 1) = 1. \Rightarrow \varphi$ ist nicht diagonalisierbar.

Satz 18.16 V endlichdimensional, $n = \dim V$

1. Ist φ diagonalisierbar, dann ist $\chi_\varphi^{char} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, nicht notwendig verschieden, das heißt χ_φ^{char} zerfällt in Linearfaktoren.

2. Ist $\chi_\varphi^{char} = (t-\lambda_1)\cdot \dots \cdot (t-\lambda_n)$ mit paarweise verschiedene $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, dann ist φ diagonalisierbar.

Beweis 1. Sei φ diagonalisierbar $\to$ V besitzt Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ aus EV zu EW $\lambda_i \in K$.

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_\varphi^{char} = \det \begin{pmatrix} t-\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t-\lambda_n \end{pmatrix} = (t-\lambda_1)\cdot\dots\cdot(t-\lambda_n)$$

2. Aus $\chi_\varphi^{char} = (t-\lambda_1)\cdot \dots \cdot (t-\lambda_n)$ wit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ paarweise verschieden $\Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind paarweise verschiedene EW von $\varphi \Rightarrow \varphi$ diagonalisierbar. $\square$

Bemerkung 18.17 V endlichdimensional, $n = \dim V$, λ EW von φ. Dann gilt:

$$1 \le \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \le \mu_{alg}(\varphi, \lambda)$$

Beweis Sei $(v_1, \dots, v_s)$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) \Rightarrow s = \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \ge 1$, da λ EW von φ. Nach Basiserweiterungssatz $\exists v_{s+1}, \dots, v_n \in V$, sodass $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n)$ eine Basis von V ist.

$$\Rightarrow A := A_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & A' \end{array}\right), A' \in M((n-s)\times(n-s), K)$$

$$\Rightarrow \chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \left(\begin{array}{ccc|c} t-\lambda & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & t-\lambda & \\ \hline & 0 & & tE_{n-s} - A' \end{array}\right) = (t-\lambda)^s \det(tE_{n-s} - A') = (t-\lambda)^s \chi_{A'}^{char}$$

$$\Rightarrow \mu_{geo}(\varphi, \lambda) = s \le \mu(\chi_\varphi^{char}, \lambda) = \mu_{alg}(\varphi, \lambda)$$ $\square$

Bemerkung 18.18 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ paarweise verschiedene EW von φ. Dann gilt:

$$\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{r} \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_j) = \{0\} \forall i \in \{1, \dots, r\}$$

Beweis Sei $i \in \{1, \dots, r\}$. Annahme: $\exists v_i \in \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{r} \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_j) : v_i \ne 0$.

$$\Rightarrow \exists v_j \in \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_j), j = 1, \dots, r, j \ne i : v_i = v_1 + \dots + v_{i-1} + v_{i+1} + \dots + v_r$$

Setze $J := \{j \in \{1, \dots r\}, j \ne i \mid v_j \ne 0\} = \{j_1, \dots, j_s\}$

$\Rightarrow v_i = v_{j_1} + \dots + v_{j_s} \Rightarrow v_{j_1} + \dots + v_{j_s} + (-1)v_i = 0 \Rightarrow (v_{j_1}, \dots, v_{j_s}, v_i)$ linear abhängig ↯

$\square$

Satz 18.19 V endlichdimensional. Dann sind äquivalent:

1. φ diagonalisierbar
2. χ_φ^{char} zerfällt in Linearfaktoren und $\mu_{alg}(\varphi, \lambda) = \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \forall$ EW von φ.
3. Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen EW von φ, dann ist

$$V = \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_k)$$

In diesem Fall erhält man eine Basis von V aus EV von φ, indem man Basen von $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_i), i = 1, \dots, k$ zusammenfügt.

Beweis 1. $\Rightarrow$ 2. Sei φ diagonalisierbar. $\Rightarrow \exists$ Basis $\mathcal{B}$ von V aus EV von φ. Wir ordnen die EV in $\mathcal{B}$ den verschiedenen EW von φ zu und gelangen so zu Familien $\mathcal{B}_i := \left(v_1^{(i)}, \dots, v_{s_i}^{(i)}\right)$ von linear unabhängigen im $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda), i = 1, \dots, k$

a) Behauptung: $\mathcal{B}_i$ ist eine Basis von $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_i)$, denn gezeigt: $\mathcal{B}_i$ ist ein ES von $\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_i)$. Sei $v \in \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_i) \leq V$

$$\Rightarrow \exists \lambda^{(j)} \in K : v = \sum_{j=1}^{k} \left(\lambda_1^{(j)} v_1^{(j)} + \dots + \lambda_{s_j}^{(j)} v_{s_j}^{(j)}\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{v - \left(\lambda_1^{(i)} v_1^{(i)} + \dots + \lambda_{s_i}^{(i)} v_{s_i}^{(i)}\right)}_{\in \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_i)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \left(\lambda_1^{(j)} v_1^{(j)} + \dots + \lambda_{s_j}^{(j)} v_{s_j}^{(j)}\right) \in \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_j)$$

$$\Rightarrow v = \lambda_1^{(i)} v_1^{(i)} + \dots + \lambda_{s_i}^{(i)} v_{s_i}^{(i)}$$

□