Theoretische Physik III (Schäfer)

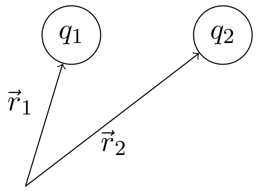
Robin Heinemann

19. Oktober 2017

Inhaltsverzeichnis

Teil A.
Phänomenologie der Maxwell-Gleichungen

A.1. elektrisches Feld



$$
\begin{aligned}
F &= k\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \\
k &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \\
\varepsilon_0 &= 8654 \times 10^{-12}\,\mathrm{A\,s\,V^{-1}\,m} \simeq \frac{1}{4\pi 9 \times 10^9}\mathrm{A\,s\,V^{-1}\,m}
\end{aligned}
$$

im SI-System.

$$
q \rightarrow \frac{q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} \rightarrow k = 1, F = \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}
$$

q wird gemessen in $\sqrt{\mathrm{erg\,cm}} = 1\,\mathrm{esu}$ „elektrostatic unit“.

A.2. elektrische Feldstärke

$$
\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}
$$

Achtung

viele Bücher verlangen:

$$
\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta q}
$$

dies ist nicht notwending $\rightarrow$ Linearität der Elektrodynamik

analog: Lorentz-Kraft auf bewegte Ladungen $\rightarrow$ magnetische Felder

A.3. Maxwell-Gleichungen

$\rightarrow$ axiomatisch für die Elektrodynamik. Verbindung zwischen Ladungsdichte ρ, elektrischen Stromdichte $\vec{j}$ und den Feldern $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$ und $\vec{B}$. In einem Inertialsystem nehmen die Maxwell-Gleichungen diese Form an:

1. div $\vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ Gesetz von Grauß.
   elektrische Ladungen sind Quellen des elektrischen Feldes

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \, \mathrm{div}\, \vec{E} \overset{\overset{\text{Satz von Gauß}}{\uparrow}}{=} \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{S}\,\vec{E} = \underset{\underset{\text{el. Fluss}}{\downarrow}}{\psi} = \int_v \mathrm{d}^3 r 4\pi\rho = 4\pi \overset{\overset{\text{eingschl. Ladung}}{\uparrow}}{q}$$

2. div $\vec{B} = \nabla \vec{B} = 0$

$$\int_v \mathrm{d}^3 r \, \mathrm{div}\, \vec{B} = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{S}\,\vec{B} = \phi = 0$$

3. rot $\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \underset{\underset{\text{Lenz.-Regel.}}{\downarrow}}{-}\partial_{ct} \vec{B}$ Faraday-Induktionsgesetz.

$$\partial_{ct} = \frac{\partial}{\partial(ct)} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{E} = \underbrace{\int_{\partial S} \mathrm{d}\vec{r}\,\vec{E}}_{U} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(ct)} \underbrace{\int_s \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{B}}_{\phi}$$

4. rot $\vec{B} = \nabla \times \vec{B} = \partial_{ct} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$

$$\int_s \mathrm{d}\vec{S}\, \mathrm{rot}\, \vec{B} = \int_{\partial S} \mathrm{d}\vec{r}\,\vec{B} = \frac{d}{(ct)} \underbrace{\int_S \mathrm{d}\vec{S}\,\vec{E}}_{\psi} + \frac{4\pi}{c} \underbrace{\int_S \mathrm{d}\vec{S}\,\vec{j}}_{I}$$

A.4. Eigenschaften der Maxwell-Gleichungen

- zwei skalare und zwei vektoriell Gleichungen
- lineare, partielle Differenzialgleichungen erster Ordnung
- für vorgegebene ρ und $\vec{j}$ lassen sich $\vec{E}$ und $\vec{B}$ berechnen
- **oder** aus einer Feldkonfiguration $\vec{E}$ und $\vec{B}$ lassen sich Ladungen ρ und $\vec{j}$ finden
- Maxwell-Gleichungen gelten in einem Inertialsystem: erst die Definitonen aus Bezugssystem bestimmt, was ρ und $\vec{j}$ ist, und damit $\vec{E}$ und $\vec{B}$
  darüber hinaus ist mit Wahl des Systems klar, was xvolt ist, und damit ∂_{ct} und ∇.
- nur eine Skala enthalten: $c \sim$ Lichtgeschwindigkeit

- im Vakuum: $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$: $\varepsilon = 1 = \mu \rightarrow \vec{D} = \vec{E}$, $\vec{H} = \vec{B}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\
\operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\
\operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial_{ct} \vec{B} \\
\operatorname{rot} \vec{B} &= -\partial_{ct} \vec{E}
\end{aligned}$$

  Wenn man $\vec{E} \rightarrow \vec{B}, \vec{B} \rightarrow -\vec{E}$ vertauscht, dann ändern sich die Gleichungen nicht $\rightarrow$ **elektromagnetische Dualität**.

- seltsame Asymmetrie, es gibt kein ρ_{mag} oder $\vec{j}_{\text{mag}}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{B} &= 4\pi\rho_{\text{mag}} = 0 \\
\operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial_{ct} \vec{B} + \underbrace{\frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{mag}}}_{=0}
\end{aligned}$$

A.5. Erhaltung der elektrischen Ladung

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{B} &= \partial_{ct} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\
\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} &= \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j B_k = 0 = \partial_{ct} \underbrace{\operatorname{div} \vec{E}}_{=4\pi\rho} + \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \vec{j} \\
&= \frac{4\pi}{c} \left(\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} \right) \\
\implies \partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} &= 0 \qquad \text{(Kontinuitätsgleichung)}
\end{aligned}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt die Ladungserhaltung

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \rho = \frac{}{t} \underbrace{\int_V \mathrm{d}^3 r \rho}_{q} = - \int_V \mathrm{d}^3 r \operatorname{div} \vec{j} = - \int_{\partial V} \mathrm{d} \vec{S} \vec{j}$$

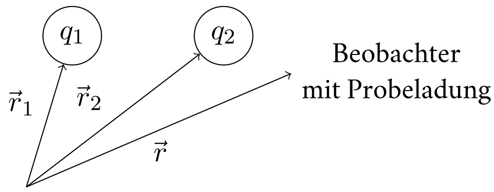
A.6. Elektrodynamik in Materie

$$\begin{aligned}
\varepsilon &: \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\
\mu &: \vec{B} = \mu \vec{H}
\end{aligned}$$

Im Vakuum: $\varepsilon = 1, \mu = 1$, in Materie: $\varepsilon \neq 1, \mu \neq 1$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho & \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi\rho \\
\operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\
\operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial_{pt} \vec{B} & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial_{pt} \vec{B} \\
\operatorname{rot} \vec{B} &= \partial_{ct} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} & \operatorname{rot} \vec{H} &= \partial_{ct} \vec{D} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}
\end{aligned}$$

A.7. elektrisches Potenzial → Elektrostatik



$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= q_1 \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \\
\vec{E}(\vec{r}) &= \sum_i q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}
\end{aligned}$$

Superposition wegen der Linearität der Maxwell-Gleichnug.
→ Kontinuumslimit: ersetze $q \to \rho$

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= \int_V \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\int_V \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}) \nabla \frac{1}{|r - r'|} \\
&= -\nabla \underbrace{\int_V \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{=\phi(\vec{r})} \\
\to & \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \phi(\vec{r})} \\
\phi(\vec{r}) &= \int_V \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{q}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}
\end{aligned}$$

rot $\vec{E} = 0$ falls $\partial_{ct} \vec{B} = 0$. Auf der anderen Seite rot $\vec{E} = \operatorname{rot} \nabla \phi = 0$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \\
\to & \boxed{\triangle \phi = -4\pi\rho} \qquad \text{(Poisson-Gleichung)}
\end{aligned}$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{|r - r'|}$$

Für Quelle mit $q = 1$ an der Stelle $\vec{r}' = \vec{0}$:

$$\triangle\phi = \triangle\frac{1}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\frac{1}{r}\right) = 0$$

klar, bei $\vec{r}$ ist die Ladung nicht, sondern bei $\vec{0}$

$$\int_V \mathrm{d}^3r\,\triangle\phi = \int_V \mathrm{d}^3r\nabla(\nabla\phi) \underset{\substack{\downarrow\\ \text{Satz von Gauß}}}{=} \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{S}\nabla\phi$$

$$= \int r^2\mathrm{d}\Omega\,\underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\phi}_{=-\frac{1}{r^2}} = -\int \mathrm{d}\Omega = -4\pi$$

$$\triangle\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\delta_D\big(\vec{r}-\vec{r}'\big)$$

$$q\delta_D\big(\vec{r}-\vec{r}'\big) = \rho(\vec{r})$$

$$j\mathrm{d}^n x\delta_D(\vec{x}) = 1$$

$$\triangle\phi(\vec{r}) = \triangle\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int \mathrm{d}^3r'\rho(\vec{r})\,\triangle\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int \mathrm{d}^3r'\rho\big(\vec{r}'\big)(-4\pi)\delta_D\big(\vec{r}-\vec{r}'\big)$$

$$= -4\pi\rho(\vec{r}) \qquad \text{(Poisson-Gleichung)}$$