$\vartheta\infty\pi \in \beta\xi\gamma\chi\varphi\zeta\kappa\rho\iota\varepsilon\alpha o\delta\sigma\nu\tau\lambda\upsilon \subset \eta\psi\varkappa\mu\omega\phi\theta \vee \oint \Pi \mapsto \times\Xi\Gamma\mathbb{C}\Phi\mathbb{Z} \cap \mathbb{R} \Rightarrow \exists\forall\nabla\Delta\Sigma\mathbb{N} \Leftrightarrow \Lambda\Upsilon\mathbb{Q} \subseteq \wedge\Psi \subsetneq \int \Omega \cup \Theta\times$

1 Mengen und Zahlen

Quantoren, Mengen (operationen), Äquivalenzrelationen, Abbildungen
$f : X \to Y$ heißt
injektiv, wenn $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
surjektiv,w enn $f(X) = Y \iff \forall y \in Y \exists x \in x : f(x) = y$
bijektiv, wenn surjektiv und injektiv $\iff \exists! g : Y \to X, g \circ f = \mathrm{id}_x, f \circ g = \mathrm{id}_y$
$f : X \to Y, g : Y \to Z$ injektiv/surjektiv $\implies g \circ f$ injektiv/surjektiv.
$g \circ f$ injektiv $\implies f$ injektiv
Natürliche Zahlen:
Peano-Axiome
vollständige Induktion
Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$, Ordnungsrelationen
Abzählbarkeit: $n \in \mathbb{N}, A_n := m \in \mathbb{N} \mid m \leq n = 1, \dots, n$
Menge M heißt
endlich, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $f : M \to A_n$ gibt.
abzählbar uneindlich,w enn es eine bijektive Abbildung $f : M \to \mathbb{N}$ gibt.
($\mathbb{N}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, kartesiches Produkt abzählbarer Mengen, abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen)
überabzählbar, wenn sie weder endlich noch abzählbar ist.
($\mathbb{R}$, Menge der Folgen mit Werten in $0, 1$) höchstens abzählbar, wenn sie abzählbar oder endlich ist
Schranken: M Menge, $A \subseteq M$, dann heißt $S \in M$
obere Schranke, wenn $\forall x \in A : x \leq S$
untere Schranke, wenn $\forall x \in A : x \geq S$
Supremum von A, wenn für alle oberen Schranken S' von A gilt $S \leq S'$
Infimum von A, wenn für alle untere Schranken S' von A gilt $S' \leq S$
Axiome der reellen Zahlen: Körper, geordnet, Einbettung von $\mathbb{N}$
Vollständigkeit: Jede nach oben beschränkte Teilmenge hat ein Supremum.
Archimedisches Prinzip: $\forall x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : x \leq n$
$M \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt:
S (obere Schranke) ist Supremum $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : S - \varepsilon \leq x$
S (unter Schranke) ist Infimum $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : S + \varepsilon \leq x$
$\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, sodass $A \subseteq B$, dann $\sup A \leq \sup B$
Monotonie:
$f : A \to B$ heißt (streng) monoton wachsend, wenn $x \leq y \implies f(x) \leq (<) f(y)$
$f : A \to B$ heißt (streng) monoton fallend, wenn $x \leq y \implies f(x) \geq (>) f(y)$

Betrag: $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \begin{matrix} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{matrix}$

Signum: $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to -1, 0, 1 , x \mapsto \begin{matrix} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{matrix}$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, |x + y| \leq |x| + |y|, ||x| - |y|| \leq |x - y|, |x - y| \leq \varepsilon \iff x - e \leq y \leq x + \varepsilon$
Fakultät/Binominalkoeffizient: $k, n \in \mathbb{N}_0$
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k} = {}^{n-1}_{k-1} + {}^{n-1}_{k}$
Binominalsatz: $\forall n \in \mathbb{N}_0, x, y \in \mathbb{R}$ gilt:
$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$
Bernoulli-Ungleichung: Für $x \geq -1, n \in \mathbb{N}$ gilt $(1 + x)^n \geq 1 + xn$
Intervalle: $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt Intervall, wenn es für $x, y \in D$ mit $x \leq y$ für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $x \leq z \leq y$ gilt $z \in D$
(beschränkt) offene Intervalle $(a, b), a, b \in \mathbb{R}$
(beschränkt) abgeschlossene Intervalle $[a, b], a, b \in \mathbb{R}$
Halbgeraden
$(a, \infty), (-\infty, b), [a, \infty), (-\infty, b], a, b \in \mathbb{R}$
reelle Gerade $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$
Komplexe Zahlen: definiere auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$+ : (x_1, y_1), (x_2, y_2) \mapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$\cdot : (x_1, y_1), (x_2, y_2) \mapsto (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$
$\mathbb{C} := (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ ist Körper mit Lösungen der Gleichung
$(x, y) \cdot (x, y) + (1, 0) = (0, 0)$ der Form $\pm i := (0, \pm 1)$
Schreibweise: $z \in \mathbb{C}, z = x + iy$
$x =: \mathfrak{R}(z), y =: \mathfrak{I}(z), \mathbb{R}$ ist eingebetteter Unterkörper
$\mathbb{R} = z \in \mathbb{C} \mid \mathfrak{I}(z) = 0$
$|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+, z \mapsto \sqrt{\mathfrak{R}(z)^2 + \mathfrak{I}(z)^2}$
$\bar{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z} := \mathfrak{R}(z) - i\mathfrak{I}(z)$
$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
Ex existiert keine Ordungsrelation auf $\mathbb{C}$, die die Körperstruktor respektiert. ($0 < i^2 < i^2 + 1 = 0 \lightning$)
Fundamentalsatz der Algebra:
Jedes Polynom $z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$

2 Folgen und Reihen

(reelle) Folge ist Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$a(n) =: a_n, a =: (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$
$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegenDen Grenzewrt $a \in \mathbb{R}$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass
$|a_n - a < \varepsilon| \forall n \geq N_\varepsilon$
$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass
$|a_n - a_m| \leq \varepsilon \forall m \geq n \geq N_\varepsilon$
$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\iff (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge.
a heißt Häufungswert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder im Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ liegen.

jeder Grenzwert ist auch ein Häufungswert (aber nicht notwendig umgekehrt)
Grenzwerte sind eindeutig (Häufungswerte aber nicht notwendig).
$M \subseteq \mathbb{R}, a$ Häufungspunkt von M, wenn für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele $x \in M$ im Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.
$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge, $M := a_n \mid n \in \mathbb{N}$, dann a Häufungswert der Folge $\Longleftarrow$ a Häufungspunkt der Menge, **aber** nicht notwendig umgekehrt, $(a_n := 1 \forall n \in \mathbb{N})$
Eigenschaften des Grenzwerts
Eindeutigkeit: sind a, a' Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dann gilt $a = a'$
Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte, monoton wachsende Folge $M := a_n \mid n \in \mathbb{N}$, dann $a_n \to^{n \to \infty} \sup M$
Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte, monoton fallende Folge $M := a_n \mid n \in \mathbb{N}$, dann $a_n \to^{n \to \infty} \inf M$
Stabilität: Sind $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit Grenzwert a, b, dann
$(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \to^{n \to \infty} a + b$
$(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}} \to^{n \to \infty} a \cdot b$
$|a_n| \to^{n \to \infty} |a|$
$b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}, b \neq 0 : a_n / b_n \to^{n \to \infty} a/b$
Ist $a = b, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit $a_n \leq c_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$, dann
$c_n \to^{n \to \infty} a = b$
$\exists \gamma \in (0, 1) : |b_{n+1}| \leq \gamma |b_n| \forall n \in \mathbb{N} \implies b_n \to^{n \to \infty} 0$
$1/n, 1/n^2, 1/n^3, \dots \to^{n \to \infty} 0$
geometrische Folge, $|q| < 1$
$a_n = cq^n \to^{n \to \infty} 0$
$\sum_{k=0}^{n} cq^k = c \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \to^{n \to \infty} \frac{1}{1 - q}$
$(1 + \frac{1}{n})^n \to^{n \to \infty} e \quad (1 - \frac{1}{n})^n \to^{n \to \infty} \frac{1}{e}$
$|x| > 1 : \frac{x^n}{n!} \to^{n \to \infty} 0 \quad \frac{n!}{n^n} \to^{n \to \infty} 0$
Bolzano-Weierstraß: Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:
A ist beschränkt und abgeschlosen.
jede Folge in A hat einen Häufungswert in A.
jede Fogle in A hat eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert A.
Jede Folge hat eine monotone Teilfolge.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \to$ Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Konvergenzkriterien:
Notwendig: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge
Cauchy: $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > m \geq N_\varepsilon$:
$| \sum_{k=m+1}^{n} a_n| < \varepsilon$
Leibnitz: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alternierend und $|a_n|$ ist monoton fallend und $a_n \to^{n \to \infty} 0$. Außerdem $| \sum_{k=m}^{\infty} a_n| \leq |a_m| \forall m \in \mathbb{N}$
Absolute Konvergenz: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_n| \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent
Majorante: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (absolut) konvergent und gilt $|a_k| \leq b_k$ für fast alle $k \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.
Minorante: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent und gilt $b_k \leq |a_k|$ für fast alle $k \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.
Wurzelkriterum: wenn es $q \in (0, 1)$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \forall k \implies$ absolute Konvergenz $\sum a_k$ (alternativ: $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ Konvergenz, $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \implies$ Divergenz)
Quotientenkriterium: wenn es $g \in (0, 1)$ gibt mit $|a_{n+1}/a_k| \leq q < 1 \implies$ absolute Konvergenz $\sum a_k$ (alternativ: $\limsup |a_{k-1}/a_k| < 1$)
Cauchy'scher Verdichtungssatz: Reihe $\sum a_k, a_k \geq 0, a_k \to^{k \to \infty} 0$, dann gilt
$\sum a_k \iff \sum 2^k a_{2^k}$
Teleskopreihe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge $\implies$
$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_1$
oder auch
$a_n \to^{n \to \infty} a_1 - S \iff \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k-1}) = S$
Umordnungsatz: Ist $\sum a_n$ absolut konvergent, dann gilt $\forall \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (bijektiv) ist auch $\sum a_{\tau(n)}$ absolut konvergent mit dem gleichen Grenzwert.
Potenzreihen: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$.
Entwicklungspunkt x_0.
Potenzreiehn konvergieren absolut $\forall x \in \mathbb{C}$ mit
$|x - x_0| < \rho := \frac{1}{\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$
(mit der Konvention $1/\infty = 0, \frac{1}{0} = \infty$)
ρ heißt Konvergenzradius.

3 Stetige Funktionen

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D$ wenn für alle Folgen in D mit $x_n \to^{x \to \infty} x_0$ gilt
$f(x_n) \to^{n \to \infty} f(x_0)$
f heißt stetig auf D, wenn f in allen Punkten von D stetig ist.
$f : D \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in \bar{D}$ einen Grenzwert, wenn

für alle Folgen in D mit $x_n \to^{x\to\infty} x_0$ gilt $f(x_n) \to^{n\to\infty} a$, schreibe $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$

einseitiger Grenzwert:
$\lim_{x\downarrow x_0^+} f(x) := \lim_{x\to x_0} f\mid_{x>x_0} \ (x)$
$\lim_{x\uparrow x_0^-} f(x) := \lim_{x\to x_0} f\mid_{x<x_0} \ (x)$
Asymptotik: $f : D \to \mathbb{R}$, D unbeschränkt.
f hat Grenzwert a in ∞, wenn
$\forall \varepsilon > 0 \exists c \in \mathbb{R} : |f(x) - a| < \varepsilon \forall x > c$
$f(x) \to^{x\to x_0} \pm\infty$, wenn $\forall c \in \mathbb{R}_+ \exists \delta > 0 : f(x) > c, < -c \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (D \quad x_0\ )$
Stetigkeit ist stabil gegenüber punktweisen Summen, Produkt, Quotient ($\neq$ 0) und Komposition, das heißt
f, g stetig $\implies f + g, f \cdot g, (f/g)(g \neq 0), g \circ f$ stetig.
$(f + g)(x) = f(x) + g(x), (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
ε-δ-Kriterium: $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in D$, $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{\varepsilon,x_0} > 0 : \forall x \in D$:
$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
gleichmäßige Stetigkeit: Eine stetige Funktion f heißt gleichmäßig stetig, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x, y \in D :$
$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
Lipschitz-Stetigkeit: $f : D \to \mathbb{R}$ heißt Lipschitzstetig, wenn es $L > 0$, sodass $\forall x, y \in D$ gilt
$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$
Lipschitz-stetig $\implies$ gleichmäßig stetig $\implies$ stetig.
Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit:
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig $\implies f$ ist gleichmäßig stetig auf $[a, b]$ Abbildungseigenschaften stetiger Funktionen:
Satz vom Extremum: Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, D beschränkt und abgeschlossen. Dann existeren $x_{\min}, x_{\max}$, sodass
$\sup_{x\in D} f(x) = f(x_{\max}) \qquad \inf_{x\in D} f(x) = f(x_{\min})$
Zwischenwertsatz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es zu $y \in [f(a), f(b)]$ ein $\xi \in (a, b)$, sodass $f(\xi) = y$ (stärker: $\forall y \in [\min f, \max f]$)
Monotonie: $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig ist genau dann injektiv, wenn sie streng monoton ist.
Funktionsfolgen: $n \in \mathbb{N}, f_n : D \to \mathbb{N}$
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise, wenn für alle $x \in D$ die Zahlenfolge $(f_n(x))_n \in \mathbb{N}$ konvergiert gegen Grenzfunktion $f : f_n(x) \to^{n\to\infty} f(x)$. (sprich: $\forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq N_{eps,x}$)
gleichmäßige Konvergenz: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt gleichmäßig konvergent auf D gegen die Grenzfunktion f, wenn $\forall \varepsilon > 0$
$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq N_\varepsilon \forall x \in D$
$f_n : D \to \mathbb{R}$ stetig und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f, dann ist auch f stetig.
Funktionenräume: $\mathcal{C}([a, b]) := f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f$ stetig
$\mathbb{R}$-Vektorraum (in der Regel unendlich dimensional)
$\|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}([a, b]) \to \mathbb{R}_+, f \mapsto \max_{x\in[a,b]}|f(x)|$
Norm, normierer Raum $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$
$\forall x, y \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:
$\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
Konvergenzbegriff in Norm: $f_n \to f$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \forall n \geq N$
Satz von Arzela-Ascoli: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}([a, b])$ Folge von gleichmäßig beschränkten (das heißt $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_\infty < \infty$) und gleichgradig stetig (das heißt $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall n \in \mathbb{N} : \sup_{|x-y|<\delta}|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$) dann gibt es eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $\mathcal{C}([a, b])$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$

4 Differentialrechnung

$f : D \to \mathbb{R}, x_0 \in D$, definiere
$D_h f(x_0) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
f heißt differenzierbar in x_0, wenn für jede Nullfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Differenzenquotienten $(D_{h_n} f(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} D_{h_n} f(x_0)$ heißt Ableitung von f im Punkt $x_0, f'(x_0)$.
Alternativ: $\exists L : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + r(x - x_0)$ mit $(r(x - x_0))/(x - x_0) \to^{x\to x_0} 0, f'(x_0) = L$
f differenzierbar in $x_0 \implies f$ stetig in x_0.
f ist differenzierbar auf D, wenn f in jedem Punkt differenzierbar ist.
Fasse f' als Funktion $f' : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$
f heißt stetig differenzierbar, wenn f' stetig ist.
n-te Ableitung: $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0), f^{(0)} = f$.
f heißt glatt, wenn $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert.
Stabilität: $f, g : D \to \mathbb{R}, x_0 \in D$
Linearität: $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Produktregel: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
hat g keine Nullstelle, so gilt:
Quotientenregel: $(f/g)'(x_0) = (f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0))/g^2(x_0)$
Kettenregel: $f : D \to D', g : D' \to \mathbb{R}$ beide differenzierbar in $x_0 \in D, f(x_0) \in D'$. dann ist $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$ Satz von der inversen Funktion: $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, injektiv, D abgeschlossen, f differenzierbar in $x_0 \in D, f : D \to f(D)$ bijektiv $\implies \exists f^{-1} : f(D) \to D$ und es gilt $(f^{-1})'(f(x_0)) = 1/f'(x_0)$
Extremwertheorie: $f : D \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein globales Extremum wenn gilt:
$f(x_0) \geq f(x) \forall x \in D$ (Maximum)
$f(x_0) \leq f(x) \forall x \in D$ (Minimum)
f hat ein lokales Extremum, wenn obige Bedingungen auf einer δ-Umgebung von x_0 zutreffen.
Satz von Extremum: (notwendige Bedingung) $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar hat lokales Extremum in $x_0 \in (a, b)$, dann gilt $f'(x_0) = 0$
1. Mittelwertsatz: Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a, b), dann gibt es $x \in (a, b)$, sodass
$f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$
Hinreichende Bedingung: Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$, dann folgt f hat in x_0 ein lokales Extremum. (Maximum für $<$, Minimum für $>$)
Taylorentwicklung: $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar
$t_n(x_0, x) := \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$
n-te Taylorpolynom mit Entwicklungsstelle x_0.
f $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, dann gibt es zu jedem $x \in (a, b)$ ein ξ zwischen x_0 und x, sodass
$f(x) - t_n(x_0, x) = R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$
f glatt $\implies$
$t_\infty(x_0, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$
f ist analytisch in x_0, wenn es in $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ eine Umgebung gibt, sodass $f(x) = t_\infty(x_0, x)$ Regel von L'Hospital: $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ sodass $g'(x) \neq 0$ und der Grenzwert $f'(x)/g'(x) \to^{x\to a} c \in \mathbb{R}$, dann gilt:
$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) \in -\infty, 0, \infty \implies \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c$
Differentation und Limes: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge stetig differenzierbarer Funktionen auf beschränkten Intervallen mit punktweisen Grenzwert $f_n(x) \to^{n\to\infty} f(x)$ und gilt $f_n' \to^{n\to\infty} f^*$ gleichmäßig, dann gilt f ist differenzierbar mit $f'(x) = f^*(x)$

5 Integration

Zerlegung: $[a, b], Z := x_0, \cdots, x_n, x_0 = a, x_n = b, x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.
Feinheit: $h := \max_{k=1,\cdots,n}|x_k - x_{k-1}|$
Zerlegung äquidistant $:\iff h$ konstant in k.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}, Z$ Zerlegung, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$
Obersumme: $\bar{S}_z f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{x\in I_k} f(x)(x_k - x_{k-1})$
Untersumme: $\underline{S}_z f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{x\in I_k} f(x)(x_k - x_{k-1})$
Oberintegral: $\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x := \inf_{Z\in\mathcal{Z}(a,b)} \bar{S}_Z f(x)$
Unterintegral: $\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x := \sup_{Z\in\mathcal{Z}(a,b)} \underline{S}_Z f(x)$
$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$
f heißt Riemann-integrierbar, wenn
$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$
$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists Z \in \mathcal{Z}(a, b)|\bar{S}_z f(x) - \underline{S}_z| < \varepsilon$
Riemannsche Summe: $f : [a, b] \to \mathbb{R}, Z$ Zerlegung, $\xi_k \in I_k$
$\mathrm{RS}_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$
Sei f beschränkt. f ist Riemann-integrierbar $\iff \forall (Z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit $h_n \to 0$ die zugehörigen Riemannschen Summen konvergieren und den gleichen Grenzwert haben.
stetige Funktionen sind integrierbar.
monotone Funktionen sind integrierbar.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann auch für jedes $[c, d] \subseteq [a, b]$ und es gilt für $c \in [a, b]$:
$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
Ferner ist das Integral linear, das heißt $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
Monoton: $g(x) \geq f(x) \forall x \in [a, b] \implies$:
$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
Standardabschätzung: $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b] \implies$:
$m(ba) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b - a)$
Definitheit: $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b], \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0 \implies f(x) = 0$
Mittelwertsatz: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar ohne Vorraussetzungen, dann gibt es $\xi \in [a, b]$ mit
$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ Stammfunktion: $F, f : [a, b] \to \mathbb{R}, F$ differenzierbar heißt Stammfunktion vin f, wenn gilt: $F' = f$.
Fundamentalsatz der Analysis: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig $\implies$:
$F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ ist eine Stammfunktion von f.
Ist F Stammfunktion von f, dann gilt:
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
Partielle Integration: $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt:
$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$
Substitution: $\phi : [c, d] \to [a, b]$ stetig differenzierbar, dann gilt:
$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\mathrm{d}x = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\mathrm{d}x$