

# Analysis I (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

December 20, 2016

## Contents

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Mengen und Zahlen</b>	<b>3</b>
2.1	Logische Regeln und Zeichen . . . . .	3
2.1.1	Quantoren . . . . .	3
2.1.2	Hinreichend und Notwendig . . . . .	3
2.1.3	Beweistypen . . . . .	4
2.1.4	Summenzeichen und Produktzeichen . . . . .	4
2.2	Mengen . . . . .	5
2.2.1	Definition . . . . .	5
2.2.2	Mengenrelationen . . . . .	5
2.2.3	Potenzmenge . . . . .	6
2.2.4	Familien von Mengen . . . . .	6
2.2.5	Rechenregeln . . . . .	6
2.2.6	geordneter Tupel . . . . .	7
2.2.7	Kartesisches Produkt . . . . .	7
2.2.8	Äquivalenzrelation . . . . .	7
2.3	Relationen und Abbildungen . . . . .	8
2.3.1	Relationen . . . . .	8
2.3.2	Graph der Abbildung . . . . .	8
2.3.3	Umkehrabbildung . . . . .	8
2.3.4	Komposition . . . . .	9
2.3.5	Identitäts Abbildung . . . . .	9
2.3.6	Homomorphe Abbildungen . . . . .	9
2.4	Natürliche Zahlen . . . . .	9
2.4.1	Peanosche Axiomensystem der natürlichen Zahlen . . . . .	9
2.4.2	Vollständige Induktion . . . . .	10
2.4.3	Definition Körper . . . . .	11
2.5	Abzählbarkeit . . . . .	12
2.5.1	Abzählbarkeit von Mengen . . . . .	12

2.6	Ordnung . . . . .	13
2.6.1	Definition . . . . .	13
2.7	Maximum und Minimum einer Menge . . . . .	14
2.7.1	Definition . . . . .	14
2.7.2	Bemerkung . . . . .	14
2.8	Schranken . . . . .	15
2.8.1	Bemerkung . . . . .	15
2.8.2	Beispiel . . . . .	15
2.9	Reelle Zahlen . . . . .	15
2.9.1	Vollständigkeitsaxiom (Archimedes) . . . . .	15
2.9.2	Axiomatischer Standpunkt . . . . .	16
2.9.3	Bemerkung . . . . .	16
2.9.4	Konstruktiver Standpunkt . . . . .	16
2.9.5	Definition 1.37 . . . . .	17
2.9.6	Satz 1.38 . . . . .	17
2.9.7	Satz 1.39 . . . . .	17
2.9.8	Definition 1.40 . . . . .	18
2.9.9	Lemma 1.41 . . . . .	18
2.9.10	Definition 1.42 . . . . .	18
2.9.11	Lemma 1.44 . . . . .	19
2.9.12	Definition 1.45 Produktzeichen . . . . .	19
2.9.13	Satz 1.46 . . . . .	19
2.9.14	Definition 1.47 . . . . .	19
2.9.15	Lemma 1.48 . . . . .	19
2.9.16	Satz 1.49 . . . . .	20
2.9.17	Folgerung 1.50 . . . . .	20
2.9.18	Lemma 1.51 . . . . .	20
2.9.19	Lemma 1.52 . . . . .	21
2.9.20	Lemma 1.53 (Bernoullische Ungleichung) . . . . .	21
2.9.21	Folgerung 1.54 . . . . .	21
2.9.22	Satz 1.55 (Existenz der m-ten Wurzel) . . . . .	22
2.9.23	Lemma 1.56 . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Komplexe Zahlen</b>	<b>24</b>
3.1	Komplexer Zahlenkörper . . . . .	24
3.1.1	Beweis . . . . .	24
3.2	Notation . . . . .	25
3.3	<b>TODO</b> Graphische Darstellung . . . . .	25
3.4	Bemerkung . . . . .	25
3.5	Korollar 1.59 . . . . .	25
3.6	Fundamentalsatz der Algebra . . . . .	25
3.7	Betrag . . . . .	26
3.8	Konjugation . . . . .	26

<b>4 Folgen</b>	<b>26</b>
4.1 Definition 2.1 Konvergenz . . . . .	26
4.2 Folgerung 2.2 . . . . .	27
4.3 Definition 2.3 Cauchy Folgen . . . . .	27
4.4 Definition 2.4 Teilfolge . . . . .	27
4.5 Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen . . . . .	32
4.6 Geometrische Folge . . . . .	32
4.7 Umgebung . . . . .	34
<b>5 Reihen (Unendliche Summen)</b>	<b>37</b>
5.1 Konvergenzkriterien . . . . .	38
5.2 Potenzreihe . . . . .	43
5.3 Exponentialreihe . . . . .	44
<b>6 Stetige Abbildungen</b>	<b>45</b>
6.1 Grenzwert einer Funktion, Stetigkeit . . . . .	45
6.2 Eigenschaften stetiger Funktionen . . . . .	51
6.3 Konvergenz von Funktionen . . . . .	53
6.4 Reellwertige stetige Funktionen . . . . .	54
<b>7 Differentiation</b>	<b>57</b>

## 1 Einleitung

Webseite [www.biostruct.uni-heidelberg.de/Analysis1.php](http://www.biostruct.uni-heidelberg.de/Analysis1.php) Klausurzulassung: 50% Klausur  
18.2.2017 9-12Uhr

## 2 Mengen und Zahlen

### 2.1 Logische Regeln und Zeichen

#### 2.1.1 Quantoren

$\forall x$	für alle $x$
$\exists x$	es gibt (mindestens) ein $x$
$\exists!x$	es gibt genau ein $x$

#### 2.1.2 Hinreichend und Notwendig

- $A \implies B$ : wenn  $A$  gilt, gilt auch  $B$ ,  $A$  ist **hinreichend** für  $B$ , daraus folgt:  $B$  ist **notwendig** für  $A$ , Ungültigkeit von  $B$  impliziert die Ungültigkeit von  $A$  ( $\neg B \implies \neg A$ )
- $A \iff B$ :  $A$  gilt, genau dann, wenn  $B$  gilt

### 2.1.3 Beweistypen

**Direkter Schluss**  $A \implies B$

**Beispiel**  $m$  gerade Zahl  $\implies m^2$  gerade Zahl

1. Beweis  $m$  gerade  $\implies \exists n \in \mathbb{N}$  sodass  $m = 2n \implies m^2 = 4n^2 = 2k$ , wobei  $k = 2n^2 \in \mathbb{N}$   $\square$

**Beweis der Transponierten (der Kontraposition)** Zum Beweis  $A \implies B$  zeigt man  $\neg B \implies \neg A$  ( $A \implies B$ )  $\iff (\neg B) \implies (\neg A)$

**Beispiel** Sei  $m \in \mathbb{N}$ , dann gilt  $m^2$  gerade  $\implies m$  gerade

1. Beweis Wir zeigen:  $m$  ist ungerade  $\implies m^2$  ungerade

$$\exists n \in \mathbb{N} : m = 2n+1 \implies m^2 = (2n+1)^2 = 2k+1, k = 2n^2+2n \in \mathbb{N} \implies m^2 \text{ ungerade} \square$$

**Indirekter Schluss ( Beweis durch Widerspruch)** Man nimmt an, dass  $A \implies B$  nicht gilt, das heißt  $A \wedge \neg B$  und zeigt, dass dann für eine Aussage  $C$  gelten muss  $C \implies \neg C$ , also ein Widerspruch

**Beispiel**  $\nexists q \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$

1. Beweis Wir nehmen an, dass  $\exists a \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$  Dann folgt:  $\exists b, c \in \mathbb{Z}$  teilerfremd (ohne Einschränkung, denn sonst kürzen soweit wie möglich) mit  $a = \frac{b}{c}$  Falls

$$\begin{aligned} a^2 = 2 \implies \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 2 = \frac{b^2}{c^2} = 2 \implies b^2 = 2c^2 \implies b^2 \text{ gerade} \implies b \text{ ist gerade (schon gezeigt)} \\ \implies \exists d \in \mathbb{N} \text{ sodass } b = 2d \implies b^2 = 4d^2 \end{aligned}$$

Außerdem  $b^2 = 2c^2 \implies 2c^2 = 4d^2 \implies c^2 = 2d^2 \implies c$  ist auch gerade. Also müssen  $b$  und  $c$  beide gerade sein, also nicht teilerfremd, damit haben wir einen Widerspruch hergeleitet  $\square$

### 2.1.4 Summenzeichen und Produktzeichen

**Summenzeichen** Wir definieren für  $m > 0$

$$\sum_{k=m}^m a_k := a_m + \dots + a_n$$

falls  $n \geq m$

$$\sum_{k=m}^n a_k := 0$$

falls  $n < m$  (sogenannten leere Summe)

## Produktzeichen

$$\prod_{k=m}^n a_k := \begin{cases} a_m \cdot \dots \cdot a_n & \text{falls } n \geq m \\ 1 & \text{falls } n < m \text{ (sog. leeres Produkt)} \end{cases}$$

## 2.2 Mengen

### 2.2.1 Definition

(Georg Cantor 1885) Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung  $M$  von bestimmten wohl unterschiedenen Objekten (welche die Elemente von  $M$  genannt werden), zu einem Ganzen  $M$  dadurch ist charakterisiert, dass von jedem vorliegendem Objekt  $x$  feststeht, ob gilt

- $x \in M$  (x Element von M)
- $x \notin M$  (x kein Element von M)

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$M = \{x \mid A(x)\} \rightarrow \text{eine Menge } M \text{ f\"ur die } x \in M \iff A(x)$$

### 2.2.2 Mengenrelationen

- Mengeninklusion  $A \subseteq M$  ( $A$  ist eine Teilmenge von  $M$ )

$$\forall x : (x \in A \implies x \in M)$$

,zum Beispiel  $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

•

$$A = B \iff \forall x : (x \in A \iff x \in B)$$

•

$$A \subset M \text{ (strikte Teilmenge)} \iff A \subset M \wedge A \neq M$$

•

$$\emptyset : \text{leere Menge} \quad \nexists x : x \in \emptyset$$

. Wir setzen fest, dass  $\emptyset$  eine Teilmenge jeder Menge ist. Zum Beispiel

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$$

- Durchschnitt

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

- Vereinigung

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

- Differenz (auch Komplement von  $B$  in  $A$ )

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} := C_A B \text{ (auch } B^c)$$

### 2.2.3 Potenzmenge

Potenzmenge  $A$

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

Alle Teilmengen von  $A$

#### Beispiel

$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$$

### 2.2.4 Familien von Mengen

Sei  $I$  eine Indexmenge,  $I \subseteq \mathbb{N}$ ,  $(A_i)_{i \in I}$  eine Familie von Mengen  $A$

#### Durchschnitt von $A$

$$\cap_{i \in I} = \{x \mid \forall_{i \in I} x \in A_i\}$$

#### Vereinigung

$$\cup_{i \in I} = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$$

### 2.2.5 Rechenregeln

$A, B, C, D$  seien Mengen

- $\emptyset \subseteq A$
- $A \subseteq A$  Reflexivität
- $A \subseteq B, B \subseteq C \implies A \subseteq C$  Transitivität
- $A \cap B = B \cap A$   
 $A \cup B = B \cup A$  Kommutativität
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$   
 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$  Assoziativität
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$   
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Eigenschaften der Komplementbildung:  
Seien  $A, B \subseteq D$  ( $C_D A := D \setminus A$ ), dann gilt

$$C_D(C_D A) = A$$

$$C_D(A \cap B) = C_D A \cup C_D B$$

$$C_D(A \cup B) = C_D A \cap C_D B$$

– Beweis:

$$x \in C_D(A \cap B) \iff x \in D \wedge (x \notin (A \cap B)) \iff x \in D \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$$

$$\iff (x \in D \wedge x \notin A) \vee (x \in D \wedge x \notin B)$$

$$\iff (x \in D \setminus A) \vee (x \in D \setminus B) \iff x \in D \setminus (A \cap B) \quad \square$$

– Bemerkung: Komplement kann man auch mit  $A^c$  bezeichnen

### 2.2.6 geordneter Tupel

Sei  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (nicht notwendig verschiedene) Objekte. Ein geordneter n-Tupel

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \iff x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$$

Beachte:

$$\{x_1, \dots, x_n\} = \{y_1, \dots, y_n\} \not\iff x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$$

### 2.2.7 Kartesisches Produkt

Seien

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_j \in A_j, j \in \mathbb{N}, j \leq n\}$$

#### Beispiel

•

$$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

•  $R^n$  n-dimensionaler Raum von reellen Zahlen

### 2.2.8 Äquivalenzrelation

Eine Äquivalenzrelation auf eine Menge  $A$  ist eine Beziehung zwischen ihren Elementen (Bezeichnung:  $a \sim b$ ), sodass

• Für jede zwei  $a, b \in A$  gilt entweder  $a \sim b \vee a \not\sim b$

•  $a \sim a$

Reflexivität

•  $a \sim b \implies b \sim a$

Symmetrie

•  $a \sim b, b \sim c \implies a \sim c$

Transitivität

Mit Hilfe einer Äquivalenzrelation lassen sich die Elemente einer Menge in so genannte Äquivalenzklassen einordnen:  $[a] : \{b \in A \mid b \sim a\}$

## 2.3 Relationen und Abbildungen

### 2.3.1 Relationen

Unter einer **Relation** verstehen wir eine Teilmenge  $R \subseteq X \times Y$  wobei  $X, Y$  Mengen sind. Für  $x \in X$  definieren wir, das **Bild** von  $x$  unter  $R$

$$R(x) := \{y \in Y \mid (x, y) \in R\}$$

und \*Definitionsbereiche von  $R$  (bezüglich  $X$ )

$$D(R) := \{x \in X \mid R(x) \neq \emptyset\}$$

### 2.3.2 Graph der Abbildung

$R \subseteq X \times Y$  heißt Graph der Abbildung (Funktion)

$$f : X \rightarrow Y \iff D(R) = X, \forall x \in X : R(x) = \{f(x)\}$$

also enthält  $R(x)$  genau ein Element.

$X$  heißt Definitionsbereich von  $f$

$Y$  heißt Werte- oder Bildbereich von  $f$  (Bild)

$x \in X$  heißt Argument

$f(x) \in Y$  heißt Wert von  $f$  an der Stelle  $x$

**Beispiel**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$  dann ist der Graph von  $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x^2\}$

#### Bemerkung

$$M^*(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = \sqrt{x} \vee y = -\sqrt{x}\}$$

Ist kein Graph einer Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , denn  $M^*(x) = \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}, x \geq 0\}$   $f$  heißt

- surjektiv, wenn gilt  $f(X) = Y$
- injektiv,  $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
- bijektiv, wenn  $f$  surjektiv und injektiv ist

### 2.3.3 Umkehrabbildung

Sei die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  bijektiv. Dann definieren wir die Umkehrabbildung  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  durch  $y \mapsto x \in X$ , eindeutig bestimmt durch  $y = f(x)$

#### Bemerkung

$$(x, y) \in \text{Graph } f \iff (y, x) \in \text{Graph } f^{-1}$$



### 2.3.4 Komposition

Seien  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen. Die Komposition von  $g$  und  $f$

$g \circ f : X \rightarrow Z$  ist durch  $x \rightarrow g(f(x))$  definiert

### 2.3.5 Identitäts Abbildung

Für jede Menge  $X$  definieren wir die identische Abbildung

$$I_d(A) = I_A : A \rightarrow A, \text{ durch } x \rightarrow x$$

### Beispiel

•

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = S^1$$

$$S^{n-1} := \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$$

$(n-1)$  dimensionale sphere in  $\mathbb{R}^n$

- Seien  $X, Y$  Mengen,  $M \subseteq X \times Y, f : M \rightarrow X$   
 $f$  heißt Projektion,  $f$  surjektiv

$$f(M) = \{x \mid \exists y \in Y : (x, y) \in M\} = X$$

### 2.3.6 Homomorphe Abbildungen

Existieren auf Mengen  $X$  und  $Y$  mit gewissen Operationen  $\oplus_x$  bzw.  $\oplus_y$  (zum Beispiel Addition, Ordnungsrelation), so heißt die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  homomorph (struktur-erhaltend), wenn gilt  $\forall x_1, x_2 \in X f(x_1 \oplus_x x_2) = f(x_1) \oplus_y f(x_2)$ . Eine bijektive Homomorphie heißt Isomorphismus, beziehungsweise  $X \approx Y$  (äquivalent, isomorph)

## 2.4 Natürliche Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$$

### 2.4.1 Peanosche Axiomensystem der natürlichen Zahlen

1. Die Zahl 1 ist eine natürliche Zahl  $1 \in \mathbb{N}$
2. Zu jeder natürlichen Zahl  $n$ , gibt es genau einen "Nachfolger"  $n'$  ( $=: n + 1$ )
3. Die Zahl 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl
4.  $n' = m' \implies n = m$
5. Enthält eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{N}$  die Zahl 1 und von jedem  $n \in M$  auch den Nachfolger  $n'$  ist  $M = \mathbb{N}$

Bemerkung:

Mit Hilfe der Axiome lassen sich auf  $\mathbb{N}$  Addition (+), Multiplikation ( $\cdot$ ) und Ordnung ( $\leq$ ) einführen. Wir definieren:

$1' = 2, 2' = 3, \dots, n+1 := m' \quad n + m' := (n+m)'; \quad n \cdot m' := nm + n$  Man kann zeigen, dass jede Menge, welche die Peano Axiome erfüllt isomorph bezüglich Multiplikation und Addition zu  $\mathbb{N}$  ist. Wir definieren  $n < m \iff \exists x \in \mathbb{N} : x + m = n$

### 2.4.2 Vollständige Induktion

**Induktionsprinzip** Es seien die folgende Schritte vollzogen:

1. Induktionsverankerung (Induktionsanfang): Die Aussage  $A(1)$  gilt
2. Induktionsschluss: Ist für ein  $n \in \mathbb{N}$   $A(n)$  gültig, so folgt auch die Gültigkeit von  $A(n+1)$

Dann sind alle Aussagen  $A(n), n \in \mathbb{N}$  gültig.

**Beweis:** Wir definieren die Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{N}$ ,  $M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist gültig}\}$ . Die Induktionsverankerung besagt, dass  $1 \in M$  und die Induktionsannahme  $n \in M \implies n+1 \in M$ . Folglich ist nach dem 5. Axiom von Peano  $M = \mathbb{N}$ .  $\square$

**Beispiel 1** Zu Beweisen:

$$\forall n \in \mathbb{N} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**Beweis**

1. Induktionsverankerung:  $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$
2. Annahme:  $A(n)$  gültig für  $n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$   
Zu zeigen  $A(n+1) : 1^2 + \dots + (n+1)^2 = \frac{1}{6} (n+1)(n+2)(2n+3)$

$$\begin{aligned} 1^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{1}{2} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = (n+1) \left( \frac{1}{3} n^2 + \frac{1}{6} n + n + 1 \right) \\ &= \frac{1}{6} (n+1)(2n^2 + 7n + 6) = \frac{1}{6} (n+1)(2n+3)(n+2) \quad \square \end{aligned}$$

**Beispiel 2** Definition von Potenzen

$$x^0 := 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} x^n := x^{n-1} x$$

(iterative (rekursive) Definition)

Auf  $\mathbb{N}$  sind diese elementaren Operationen erklärt:

- Addition  $a + b$
- Multiplikation  $a \cdot b$
- (unter gewissen Voraussetzungen):
  - Subtraktion  $a - b$
  - Division  $\frac{a}{b}$

$\mathbb{N}$  ist bezüglich "–" oder "/" nicht vollständig, das heißt  $n + x = m$  ist nicht lösbar in  $\mathbb{N}$  Erweiterungen:

- Ganze Zahlen  $\mathbb{Z} := \{0; \pm, n \in \mathbb{N}\}$   
Negative Zahl  $(-n)$  ist definiert durch  $n + (-n) = 0$
- Rationale Zahlen  $\mathbb{Q}$  ( $bx = y$ )

Man sagt, dass  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  einen Körper bildet.

### 2.4.3 Definition Körper

$\mathbb{K}$  sei eine Menge auf der Addition und Multiplikation sei.  $\mathbb{K}$  heißt ein Körper, wenn die folgende Axiome erfüllt sind:

- Addition:  $(\mathbb{K}, +)$  ist eine kommutative Gruppe, das heißt  $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ :
  1.  $(a + b) + c = a + (b + c)$  Assoziativität
  2.  $a + b = b + a$  Kommutativität
  3.  $\exists! 0 \in \mathbb{K} : a + 0 = a$  Existenz des Nullelement
  4.  $\exists x \in \mathbb{K} : a + x = 0$  Existenz des Negativen
- Multiplikation:  $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$  ist eine kommutative Gruppe, das heißt  $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$ 
  1.  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  Assoziativität
  2.  $a \cdot b = b \cdot a$  Kommutativität
  3.  $\exists! 1 \in \mathbb{K} : a \cdot 1 = a$  Existenz des Einselement
  4. Für  $a \neq 0, \exists! y \in \mathbb{K} : a \cdot y = 1$  Inverse
- Verträglichkeit
  1.  $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$  Distributivität

**Satz**  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  ist ein Körper. Definieren auf  $\mathbb{Q}$  eine Ordnung " $\leq$ " durch

$$x \leq y \iff \exists m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N} : y - x = \frac{m}{n}$$

dann ist auch diese Ordnung mit der Addition und Multiplikation in  $\mathbb{Q}$  in folgendem Sinne verträglich (Axiom M0):

- $a \leq b \implies a + c \leq b + c$
- $0 \leq a \wedge 0 \leq b \implies 0 \leq a \cdot b$

### Bemerkung

$$\{a \in \mathbb{Q} : a = \frac{r}{s}, r \in \mathbb{N}_0, s \in \mathbb{N}\} =: \mathbb{Q}_+ (\mathbb{Q}_{\geq 0})$$

## 2.5 Abzählbarkeit

### 2.5.1 Abzählbarkeit von Mengen

Sei  $A$  eine Menge

- $A$  heißt endlich mit  $|A| = n$  Elementen ist äquivalent zu

$$|A| = \begin{cases} A = \emptyset & n = 0 \\ \exists f : A \rightarrow \{1, \dots, n\} & f \text{ bijektiv}, n < \infty \end{cases}$$

- $A$  heißt abzählbar unendlich genau dann wenn

$$\exists f : A \rightarrow \mathbb{N} \text{ bijektiv}$$

- $A$  heißt über abzählbar genau dann wenn:  $A$  ist weder endlich oder abzählbar unendlich

**Beispiel**  $\mathbb{Z}$  ist abzählbar unendlich

**Beweis** Die Abbildung  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$

$$z \mapsto \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ -2z - 1 & x < 0 \end{cases}$$

- Surjektivität: zu zeigen  $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$   
Offenbar  $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{N}$ . Wir zeigen  $\mathbb{N} \subseteq f(\mathbb{Z})$ . Sei  $n \in \mathbb{N}$ , finde  $z \in \mathbb{Z}$  mit  $f(z) = n$ .  
Man unterscheide:
  - $n$  gerade  $\rightarrow$  Wähle  $z = \frac{n}{2}$
  - $n$  ungerade  $\rightarrow z = -\frac{n+1}{2}$
- Injektivität: Sei  $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$  und  $f(z_1) = f(z_2)$   
ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $z_1 \leq z_2$ . Entweder  $z_1, z_2 \geq 0$  oder  $z_1, z_2 < 0$ ,  
denn sonst wäre  $f(z_1)$  ungerade und  $f(z_2)$  gerade **Widerspruch**. Falls
  - $z_1, z_2 \geq 0 \implies 2z_1 = f(z_1) = f(z_2) = 2z_2 \implies z_1 = z_2$
  - $z_1, z_2 < 0 \implies -2z_1 - 1 = f(z_1) = f(z_2) = -2z_2 - 1 \implies z_1 = z_2 \quad \square$

## Beispiel

- $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  abzählbar unendlich
- $\mathbb{Q}$  abzählbar unendlich
- $\mathbb{R}$  über abzählbar

## Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$(1, 1) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (1, 3) \rightarrow (2, 3) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (3, 1)$$

**Korollar 1.30**  $M_1, M_2, \dots, M_n$  abzählbar  $\implies M_1 \times \dots \times M_n$  abzählbar.

**Beweis** Durch vollständige Induktion  $M_1 \times (M_2 \times \dots \times M_n) \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$

**Satz** Die Menge aller Folgen  $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$  ist über abzählbar. (Zum Beispiel:  $1, 0, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0, \dots$ )

$\downarrow$   
k-te Stelle

**Beweis**  $M$  ist unendlich, denn die Folgen  $f_k : 0, \dots, 0, 1, 0, \dots$  sind paarweise verschieden. Angenommen  $M$  wäre abzählbar. Sei  $f_1, f_2, \dots$  eine Abzählung mit  $f_k = (z_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$ .

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 \dots \end{array}$$

$f : 0010$  Man setze  $f = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$z_n := \begin{cases} 1 & z_{nn} = 0 \\ 0 & z_{nn} = 1 \end{cases}$$

Dann  $f \in M$ , aber  $f \neq f_k \forall k \in \mathbb{N}$ . Also ist  $M$  nicht abzählbar. ("Cantorsches Diagonalverfahren").

## 2.6 Ordnung

### 2.6.1 Definition

Sei  $A$  eine Menge. Relation  $R \subseteq A \times A$  heißt Teilordnung (Halbordnung) auf  $A$ , wenn  $\forall y, x, z \in A$  gilt:

$$1. \ x \leq x \quad \text{(Reflexivität)}$$

$$2. \ x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y \quad \text{(Symmetrie)}$$

$$3. \quad x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z \quad (\text{Transitivität})$$

Wenn außerdem noch  $\forall x, y \in A$  gilt:

$$4. \quad x \leq y \vee y \leq x \quad (\text{Vergleichbarkeit je zweier Elemente})$$

so heißt  $R$  (totale) Ordnung auf  $A$ .  $(A, \leq)$  heißt teilweise beziehungsweise (total) geordnete Menge.

### Beispiel

1.  $(\mathbb{Q}, \leq)$  mit der üblichen Ordnung ist eine total geordnete Menge
2. Wir definieren auf der Potenzmenge  $\mathcal{P}(A)$  einer Menge  $A$  eine Teilordnung " $\leq$ ":

$$B \leq C \iff B \subseteq C \quad \forall B, C \in \mathcal{P}(A)$$

**Beweis:** 1. - 3. sind trivial, 4. geht nicht (keine Totalordnung). Wähle  $B, C \in \mathcal{P}(A)$ ,  $B, C \neq \emptyset$ ,  $B \cap C = \emptyset$ . Dann gilt weder  $B \subseteq C$  noch  $C \subseteq B$   $\square$

3. Sei  $F := \{f \mid f : A \rightarrow \mathbb{R}\}$  für eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Wir definieren  $f \leq g \iff \forall x \in A : f(x) \leq g(x)$
- (1.) - (3.) trivial, 4. gilt nicht. Falls  $A$  mehr als ein Element hat, gibt es eine Funktion, die nicht miteinander verglichen werden können.

## 2.7 Maximum und Minimum einer Menge

### 2.7.1 Definition

Sei  $(A, \leq)$  eine teilweise geordnete Menge,  $a \in A$

Maximum:

$$a = \max A \iff \forall x \in A : x \leq a$$

Minimum:

$$a = \min A \iff \forall x \in A : a \leq x$$

### 2.7.2 Bemerkung

Durch die Aussagen ist  $a$  eindeutig bestimmt, denn seien:

$$a_1, a_2 \in A : \forall x \in A \begin{cases} x \leq a_1 \\ x \leq a_2 \end{cases} \implies \begin{cases} a_2 \leq a_1 \\ a_1 \leq a_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Symmetrie}} a_1 = a_2$$

## 2.8 Schranken

Sei  $(A, \leq)$  eine (total geordnete) Menge,  $B \subseteq A$

1.  $S \in A$  heißt obere Schranke zu  $B \iff \forall x \in B : x \leq S$   
 $S \in A$  heißt untere Schranke zu  $B \iff \forall x \in B : S \leq x$
2.  $\bar{S}(B) := \{S \in A \mid S \text{ ist untere Schranke zu } B\}$   
 $\underline{S}(B) := \{S \in A \mid S \text{ ist obere Schranke zu } B\}$
3. Existiert  $g := \min \underline{S}(B)$  beziehungsweise  $g := \max \bar{S}$  so sagen wir:  
 $g = \sup B$  (kleinste obere Schranke, Supremum, obere "Grenze" von  $B$  in  $A$ )  
 $g = \inf B$  (größte obere Schranke, Infimum, untere "Grenze" von  $B$  in  $A$ )

### 2.8.1 Bemerkung

1. Existiert  $\max B = \bar{b}$ , so folgt  $\sup B = \bar{b}$ , denn  $\bar{b} \in \underline{S}(B)$  nach Definition.

$$s \in \underline{S}(B) \implies \bar{b} \leq s, \text{ da } \bar{b} \in B$$

Ebenso gilt:  $\exists \min B = \underline{b} \implies \inf B = \underline{b}$

### 2.8.2 Beispiel

1.  $B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}, A = \mathbb{R}, (1, \frac{1}{2}, \dots)$ 
  - Es gilt  $1 \in B, \forall n \in \mathbb{N}$  gilt  $\frac{1}{n} \leq 1$ , daher folgt  $\max B = \sup B = 1$
  - Sei  $s \leq 0$ , dann gilt  $\forall n \in \mathbb{N} : s \leq \frac{1}{n}$ , also  $s \in \bar{S}(B)$   
Sei  $s > 0 \implies s > \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{s}$ , also  $s \notin \bar{S}(B)$   
Es folgt  $\bar{S}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$  insbesondere  $0 \in \bar{S}(B)$   
Ferner gilt  $\forall s \in \bar{S}(B) : s \leq 0 \implies 0 = \max \bar{S}(B) = \inf B$
2.  $A = \mathbb{Q}, B = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \wedge x^2 \leq 2\}$ . Es gilt  $0 = \min B = \inf B$ , aber  $\sup B$  existiert nicht in  $\mathbb{Q}$

## 2.9 Reelle Zahlen

$x^2 = 2$  hat keine Lösungen in  $\mathbb{Q}$ . Allerdings können wir  $\sqrt{2}$  "beliebig gut" durch  $y \in \mathbb{Q}$  approximieren, das heißt  $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in \mathbb{Q} : 2 - \varepsilon \leq y^2 \leq 2 + \varepsilon$  Das motiviert die folgende Vorstellung:

1.  $\mathbb{Q}$  ist "unvollständig"
2.  $\mathbb{Q}$  ist "dicht" in  $\mathbb{R}$

### 2.9.1 Vollständigkeitsaxiom (Archimedes)

Jede nach oben (unten) beschränkte Teilmenge hat ein Supremum oder Infimum.

### 2.9.2 Axiomatischer Standpunkt

Es gibt eine Menge  $\mathbb{R}$  (genannt Menge der reellen Zahlen) mit Addition, Multiplikation, Ordnung, die die Definition eines Körper und das Vollständigkeitsaxiom erfüllt und  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  mit " $\leq$ " eine Ordnung bildet.

### 2.9.3 Bemerkung

1. Bis auf Isomorphie gibt es höchstens ein solches  $\mathbb{R}$ , das heißt  $\tilde{\mathbb{R}}$  ein weiteres System der reellen Zahlen ist, dann  $\exists$  bijektive Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  die bezüglich Addition, Multiplikation, Ordnung eine Homomorphie ist.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} :$$

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

2.  $\mathbb{N}$  (und damit auch  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ) lassen sich durch injektive Homomorphismus  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  einbetten

$$g(\tilde{0}_{\in \mathbb{N}}) = 0_{\in \mathbb{R}}$$

$$g(\tilde{n}_{\in \mathbb{N}} + 1) = g(n_{\in \mathbb{R}}) + 1$$

$$g(1_{\in \mathbb{N}}) = 1_{\in \mathbb{R}}$$

### 2.9.4 Konstruktiver Standpunkt

Wir können  $\mathbb{R}$  ausgehend von  $\mathbb{Q}$  konstruieren.

**Methode der Abschnitte** Jede reelle Zahl wird charakterisiert durch ein "rechts offenes, unbeschränktes Intervall", dessen "rechte Grenze" die Zahl erstellt.

$$\mathbb{R} := \{A \subseteq \mathbb{Q} \mid \begin{cases} A \neq \emptyset \\ x \in A, y \leq x \implies y \in A \\ \forall x \in A \exists y \in A, x < y \end{cases}\}$$

**Methode der Cauchy-Folgen** Jede reelle Zahl wird charakterisiert als "Grenzwert" eine Klasse äquivalenter "Cauchy Folgen" aus  $\mathbb{Q}$  (später)



### 2.9.5 Definition 1.37

•

$$x \in \mathbb{R} \text{ heißt } \begin{cases} \text{positiv} & 0 < x \\ \text{nicht negativ} & 0 \leq x \\ \text{negativ} & x < 0 \\ \text{nicht positiv} & x \geq 0 \end{cases}$$

- Die Betragsfunktion  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wird definiert durch  $|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

- Die Vorzeichen- oder Signumfunktion

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{sgn} x = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

### 2.9.6 Satz 1.38

1.  $|xy| = |x||y|$
2.  $|x + y| \leq |x| + |y|$

**Beweis:**

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2 \quad (1)$$

$$\leq |x|^2 + 2|xy| + |y|^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \quad (2)$$

$$= (|x| + |y|)^2 \implies |x + y| \leq |x| + |y| = |x| + |y| \quad \square$$

3.  $|x + y| = |x| + |y| \iff xy \geq 0$

### 2.9.7 Satz 1.39

1.  $||x| - |y|| \leq |x - y|$

**Beweis:**

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \implies |x| - |y| \leq |x - y| \quad (3)$$

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| \implies |y| - |x| \leq |x - y| \quad (4)$$

$$||x| - |y|| = \max\{|x| - |y|, |y| - |x|\} \leq |x - y| \quad \square$$

- 2.

$$|x - y| \leq \varepsilon \iff \begin{cases} x - \varepsilon \leq y \leq x + \varepsilon \\ y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon \end{cases}$$

**Beweis:**

$$|x - y| = \max\{x - y, y - x\} \leq \varepsilon \iff \begin{cases} x - y \leq \varepsilon \\ y - x \leq \varepsilon \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq y + \varepsilon \\ y - x \leq \varepsilon \end{cases} \iff y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon \quad (5)$$

Vertausche  $x$  und  $y \implies x - \varepsilon \leq x + \varepsilon \quad \square$

### 2.9.8 Definition 1.40

Sei  $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  abgeschlossenes Intervall
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  offenes Intervall
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  rechts-halboffenes Intervall
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  links-halboffenes Intervall
- $\varepsilon > 0, I_\varepsilon(x) := (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \varepsilon\} = B_\varepsilon(x)$  (Kugel)

### 2.9.9 Lemma 1.41

Es gilt  $y \in I_\varepsilon(x) \implies \exists \delta > 0 : I_\delta(y) \subseteq I_\varepsilon(x)$

**Beweis** Sei  $y \in I_\varepsilon(x) \implies |x - y| < \varepsilon \iff \varepsilon - |x - y| > 0$  Wähle  $0 < \delta < \varepsilon - |x - y|$ . Es ist nun zu zeigen  $I_\delta(y) \subseteq I_\varepsilon(x)$ , das heißt  $z \in I_\delta(y) \implies z \in I_\varepsilon(x)$ . Es gilt

$$z \in I_\delta(y) \implies |z - y| < \delta \quad (6)$$

$$\implies |z - x| = |z - y + y - x| \leq |z - y| + |y - x| \leq \delta + |x - y| < \varepsilon \quad (7)$$

$$\implies z \in I_\varepsilon(x) \quad \square$$

### 2.9.10 Definition 1.42

$A, B$  seien geordnete Mengen,  $f : A \rightarrow B$  heißt:

- monoton  $\begin{cases} \text{wachsend} & x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \\ \text{fallend} & x \leq y \implies f(x) \geq f(y) \end{cases}$
- streng monoton  $\begin{cases} \text{wachsend} & x < y \implies f(x) < f(y) \\ \text{fallend} & x < y \implies f(x) > f(y) \end{cases}$

**Beispiel 1.43**  $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, x \mapsto x^n$  ist streng monoton wachsend  $\forall n \in \mathbb{N}$

**Beweis** Induktion + Axiom M0

□

### 2.9.11 Lemma 1.44

Sei  $M, N \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : M \rightarrow N$  streng monoton und bijektiv. Dann ist  $f^{-1}$  streng monoton.

**Beweis** Wir betrachten den Fall  $f$  streng monoton wachsend. Seien  $y_1, y_2 \in N$ ,  $y_1 < y_2$ ,  $x_1 = f^{-1}(y_1)$ ,  $x_2 = f^{-1}(y_2)$ .

Behauptung  $x_1 < x_2$  (sonst wäre  $x_1 \geq x_2$ ).

Falls  $x_1 > x_2 \xrightarrow{\text{streng monoton}} f(x_1) > f(x_2)$  **Widerspruch** zu  $y_1 < y_2$

Falls  $x_1 = x_2 \implies y_1 = y_2$  **Widerspruch** zur Annahme  $y_1 < y_2$

□

### 2.9.12 Definition 1.45 Produktzeichen

Für  $a \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir  $a^n := \prod_{j=1}^n a$  und für  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$   $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ .

### 2.9.13 Satz 1.46

Es gilt  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  (beziehungsweise  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ),  $n, m \in \mathbb{N}_0$  (beziehungsweise  $\mathbb{Z}$ )

1.  $a^n a^m = a^{n+m}$
2.  $(a^n)^m = a^{nm}$
3.  $(ab)^m = a^m b^m$

**Beweis** Zunächst für  $n, m \in \mathbb{N}_0$  durch Induktion nach  $n$ , dann für  $n, m \in \mathbb{Z}$  (mit Hilfe der Definition von  $a^{-n}$ )

### 2.9.14 Definition 1.47

Sei  $n, k \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{n}{k} := \prod_{j=1}^k \frac{n-j+1}{j}$$

### 2.9.15 Lemma 1.48

Sei  $k, n \in \mathbb{N}_0$

1.  $\binom{n}{k} = 0$  für  $k > n$   
 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$  für  $k \leq n$
2.  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$  für  $1 \leq k \leq n$

### 2.9.16 Satz 1.49

$\forall n \in \mathbb{N}_0, \forall x, y \in \mathbb{R}$  gilt

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

**Beweis** Induktion:

- Induktionsanfang:  $n = 0, (x + y)^0 = 1, \binom{0}{j} x^0 y^0 = 1$  nach Definition
- Induktionsschritt  $n \rightarrow n + 1$ :

$$(x + y)^{n+1} = (x + y) (x + y)^n$$

mit der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} &= (x + y) \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^j \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j+1} y^j + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^{j+1} \\ &= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} x^{n+1-j} y^j + \underbrace{\sum_{i=1}^n \binom{n}{i-1} x^{n-i+1} y^i}_{\text{Substitution } i := j+1} + \binom{n}{n} y^{n+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{j=1}^n \underbrace{\left( \binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right)}_{\binom{n+1}{j} \text{ nach Lemma 1.48}} x^{n+1-j} y^j + y^{n+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} x^{n+1-j} y^j \quad \square \end{aligned}$$

### 2.9.17 Folgerung 1.50

1.  $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 2^n$
2.  $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$

**Beweis:** Setze in Binomische Formel  $x = 1, y = 1$  beziehungsweise  $y = -1$   $\square$

### 2.9.18 Lemma 1.51

Sei  $m \in R$  nach oben (beziehungsweise nach unten) beschränkt  
Dann gilt

1.  $s = \sup M \iff \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : s - \varepsilon < x (\leq s)$
2.  $l = \inf M \iff \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : (l \leq) x < l + \varepsilon$

**Beweis** Wir beweisen 1.

$s \neq \sup M \iff s$  ist nicht die kleinste obere Schranke von  $M \iff$  es gibt eine kleinere obere Schranke  $s' = s - \varepsilon$  von  $M \iff$  nicht  $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x > s - \varepsilon$   $\square$

### 2.9.19 Lemma 1.52

$\mathbb{N}$  ist unbeschränkt in  $\mathbb{R}$

**Beweis** sonst  $\exists x = \sup \mathbb{N}$  (nach Vollständigkeits Axiom),  $x$  kleinste obere Schranke  $\xrightarrow{[[\text{Lemma 1.51}]]} \varepsilon = \frac{1}{2} \exists m_0 \in \mathbb{N} : x - \frac{1}{2} < m_0 \implies m_0 + 1 \in \mathbb{N}, m_0 + 1 > x + \frac{1}{2} > x \implies x$  ist nicht die obere Schranke von  $\mathbb{N}$   $\square$

### 2.9.20 Lemma 1.53 (Bernoullische Ungleichung)

$$\forall x \in [-1, \infty), n \in \mathbb{N}_0 : (1+x)^n \geq 1+nx$$

**Beweis** Beweis durch Induktion:

- **IA:**  $n = 0$  klar
- **IS:**

$$n \rightarrow n+1 : (1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \quad (8)$$

$$\geq (1+nx)(1+x) = 1+nx^2 + (n+1)x \quad (9)$$

$$\geq 1+(n+1)x \text{ da } x^2 \geq 0 \quad \square$$

### 2.9.21 Folgerung 1.54

1. Sei  $y \in (1, \infty)$ . Dann gilt  $\forall c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 y^n \in (c, \infty)$  ("Konvergenz" von  $y^n$  gegen  $\infty$ )
2. Sei  $y \in (-1, 1)$ . Dann gilt  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : y^n \in I_\varepsilon(0)$  ("Konvergenz"  $y^n$  gegen 0)

**Beweis**

1. Für  $x = y - 1 > 0$  gilt dann nach 2.9.20

$$\underbrace{(1+x)^n}_y \geq 1+nx \implies y^n > nx$$

Nach 2.9.19 existiert für  $c > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $n_0 > \frac{c}{x} \implies$

$$\forall n \geq n_0 : y^n > nx \geq n_0 x \geq \frac{c}{x} x = c \implies \forall n \geq n_0 : y^n \in (c, \infty)$$

2. Für  $x = \frac{1}{|y|} > 1 \xrightarrow[\varepsilon]{\text{nach [1541] mit } c=\frac{1}{\varepsilon}}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\implies \frac{1}{|y^n|} > \frac{1}{\varepsilon} \implies |y^n| < \varepsilon \square$$

### 2.9.22 Satz 1.55 (Existenz der m-ten Wurzel)

$$\forall m \in \mathbb{N}, a \in [a, \infty) \text{ gilt } \exists! x \in [0, \infty) : x^m = a$$

**Beweis (Skizze 1, 2)** Wir geben ein Iterationsverfahren

$$p_3(x) = m$$

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, a_3 > 0$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $a > 0, m \geq 2$ ,  $x$  muss die Gleichung  $x^m - a = 0$  lösen, das heißt Nullstelle der Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^m - a$  suchen. Diese approximieren wir nach dem **Newton Verfahren**  $x_0$  sodass  $x_0^m - a \geq 0$

$$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \iff \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} = f'(x_n)$$

$$x_{n+1} := x_n - \underbrace{\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{F(x_n)} = x_n - \frac{x_n^m - a}{m x_n^{m-1}}$$

$$= x_n \left( 1 - \frac{1}{m} \left( 1 - \frac{a}{x_n^m} \right) \right)$$

Hoffnung:  $x_n \rightarrow x^*$

**Skizze 3**

Sei  $x_0^m > a$ . Wir zeigen

1.  $x_n > 0$
2.  $x_n^m \geq a$
3.  $x_{n+1} \leq x_n$

**Beweis:**

1. Induktion
2. Induktion

- $n = 0, x_0^m \geq a \implies x_0 > 0$ , da  $a > 0, x_0 \geq 0$

- $n \rightarrow n+1$

$$x_n > 0, x_n^m \geq a \implies x_{n+1} = x_n \left( 1 - \frac{1}{m} \left( 1 - \frac{a}{x_n^m} \right) \right) \geq 0$$

weil

$$x_{n+1}^m = \underbrace{x_n^m}_{\geq 0} \left( 1 - \frac{1}{m} \left( 1 - \frac{a}{x_n^m} \right) \right)^m \underset{\text{Bernoulli}}{\geq} x_n^m \left( 1 - \frac{1}{m} \left( 1 - \frac{a}{x_n^m} \right) \right) = 0$$

$$\implies x_{n+1} > 0, \text{ da } a > 0$$

3. Nach 2:

$$x_n^m \geq a \implies 0 \leq 1 - \frac{1}{m} \left( 1 - \frac{1}{x_n^m} \right) \leq 1$$

Nach 1:

$$x_m > 0 \implies x_{n+1} = x_n \left( 1 - \frac{1}{m} \left( 1 - \frac{a}{x_n^m} \right) \right) < x_n$$

Wegen 1 ist  $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}_0\}$  nach unten beschränkt  $\implies$

$$x := \inf M \text{ existiert}$$

Wir wollen zeigen, dass  $x^m = a$ . Es gilt

$$\begin{aligned} x &\leq x_{n+1} = \left( 1 - \frac{1}{m} \right) x_n + \frac{1}{m} \frac{a}{x_n^{m-1}} \\ &\leq \left( 1 - \frac{1}{m} \right) x_n + \frac{a}{m} \sup \left\{ \frac{1}{x_n^{m-1}} \mid x \in \mathbb{N}_0 \right\} \end{aligned}$$

4. Es gilt nach 2

$$a \leq \inf \{x_n^m \mid n \in \mathbb{N}_0\} = (\inf \{x_n \mid n \in \mathbb{N}_0\})^m = x^m$$

und damit  $x > 0$

Ferner gilt

$$y = \sup \left\{ \frac{1}{x_n^{m-1}} \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\} = \inf \{x_n^{m-1} \mid x \in \mathbb{N}_0\}^{-1}$$

mit 2.9.23

$$= \left( \frac{1}{\inf \{x_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}} \right)^{m-1} = \frac{1}{x^{m-1}} \implies ay \leq \frac{a}{x^{m-1}}$$

5. Von oben wissen wir, dass  $x \leq ay$

$$\implies x \leq ay \leq \frac{a}{x^{m-1}} \implies x^m \leq a$$

Aus 4 und 5 folgt  $x^m = a$

□

### 2.9.23 Lemma 1.56

1. Seien für  $n \in \mathbb{N}_0 : y_n > 0$  und  $\inf\{x_n \mid x \in \mathbb{N}_0\} > 0$   
Dann gilt

$$\sup\{\frac{1}{y_n} \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \frac{1}{\inf\{y_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}}$$

2. Seien für  $n \in \mathbb{N}_0, y_n > 0, k \in \mathbb{N}_0$ . Dann gilt:

$$\inf\{y_n^k \mid n \in \mathbb{N}_0\} = (\inf\{y_n \mid n \in \mathbb{N}_0\})^k$$

(ohne Beweis)

## 3 Komplexe Zahlen

**Motivation:**  $x^2 + 1 = 0$  nicht lösbar in  $\mathbb{R}$

Wir betrachten die Menge der Paare  $\{x, y\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  auf denen die Addition und Multiplikation wie folgt definiert ist:

- (KA)  $\{x_1, y_1\} + \{x_2, y_2\} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2\}$
- (KM)  $\{x_1, y_1\} \cdot \{x_2, y_2\} = \{x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1\}$

### 3.1 Komplexer Zahlenkörper

1. Die Menge der Paare  $z = \{x, y\} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  mit Addition 3 und Multiplikation 3 bildet den Körper  $\mathbb{C}$  der **komplexen Zahlen** mit den neutralen Elementen  $\{0, 0\}$  und  $\{1, 0\}$
2. Die Gleichung  $z^2 + \{1, 0\} = \{0, 0\}$  hat in  $\mathbb{C}$  zwei Lösungen, welche mit  $i := \{0, \pm 1\}$  bezeichnet werden
3. Der Körper  $\mathbb{R}$  ist mit der Abbildung  $x \in \mathbb{R} : x \mapsto \{x, 0\} \in \mathbb{C}$  isomorph zu einem Unterkörper von  $\mathbb{C}$

#### 3.1.1 Beweis

1. Die Gültigkeit des Kommutativitäts-, Assoziativs-, und Distributivitätsgesetzes verifiziert man durch Nachrechnen.

Neutrale Elemente: Wir lösen die Gleichung  $a + z = \{0, 0\}$  für beliebige gegebene  $a \in \mathbb{C}, a = \{a_1, a_2\}$

$$\implies z = \{-a_1, -a_2\}$$

$$a \cdot z = \{1, 0\}$$

$$z = \frac{1}{a} := \left\{ \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, -\frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right\}, \text{ weil } a \cdot \frac{1}{a}$$

$$\text{weil } a \frac{1}{a} = \left\{ a_1 \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} - \frac{a_2 a_1}{a_1^2 + a_2^2} \right\}$$



2.  $i := \{0, 1\}$  hat die Eigenschaft

$$1 + i^2 = \{1, 0\} + \{0^2 - 1^2, 0\} = \{0, 0\} \implies 1 + i^2 = 0$$

Ähnlich  $1 + (-i)^2 = 0$

3. Die Zuordnung  $x \in \mathbb{R} : x \mapsto \{x, 0\} \in \mathbb{C}$  bildet  $\mathbb{R}$  bijektiv auf eine Untermenge von  $\mathbb{C}$  ab, welche bezüglich der komplexen Addition und Multiplikation wieder ein Körper ist  $\square$

### 3.2 Notation

$z = \{x, y\} =: x + iy, x, y \in \mathbb{R}$

- $x$  ist Realteil  $x = \Re z$
- $y$  ist Imaginärteil  $x = \Im z$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = \underbrace{x_1 + x_2}_{\Re(z_1 + z_2)} + i \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\Im(z_1 + z_2)}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + iy_1 x_2 + iy_2 x_1 + (iy_1)(iy_2) = \underbrace{x_1 x_2 - y_1 y_2}_{\Re(z_1 z_2)} + i \underbrace{(x_1 y_2 + y_1 x_2)}_{\Im(z_1, z_2)}$$

### 3.3 TODO Graphische Darstellung

### 3.4 Bemerkung

Die reellen Zahlen sind durch  $\Im z = 0$  charakterisiert.

$$z_1 = z_2 \implies x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \iff x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

### 3.5 Korollar 1.59

Jede quadratische Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0, p, q \in \mathbb{R}$$

besitzt in  $\mathbb{C}$  genau zwei Lösungen

$$z_{1,2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{p^2 - 4q} & p^2 \geq 4q \\ -\frac{1}{2} \pm i \frac{1}{2} \sqrt{|p^2 - 4q|} & p^2 - 4q < 0 \end{cases}$$

### 3.6 Fundamentalsatz der Algebra

Jede algebraische Gleichung der Form

$$z^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i = 0$$

hat in  $\mathbb{C}$  mindestens eine Lösung. Beweis  $\rightarrow$  Funktionstheorie

### 3.7 Betrag

Für komplexe Zahlen lässt sich ein Absolutbetrag definieren

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Damit:

$$x = r \cos \alpha \quad y = r \sin \alpha \quad z = x + iy = r (\cos \alpha + i \sin \alpha) \quad (10)$$

### 3.8 Konjugation

Zu einem  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  definieren wir eine konjugierte komplexe Zahl

$$\bar{z} = x - iy \in \mathbb{C}$$

Dann gilt

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$$

Aus der Definition:

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

## 4 Folgen

Eine Folge von reellen Zahlen wird gegeben durch eine Abbildung

$$\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto x_n$$

Wir bezeichnen die Folge auch mit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$

Topologische Struktur auf Mengen.

- Abstände in  $\mathbb{R}^1$  Betrag  $|x - y| \xrightarrow{\text{Verallgemeinerung}} \text{Norm / Metrik}$
- Umgebung in  $\mathbb{R}^1$   $\varepsilon$ -Intervall  $\xrightarrow{\text{Verallgemeinerung}} \text{Kugel Umgebung}$

Wir betrachten Folgen  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a_n$  (oder  $\mathbb{C}$ )

#### 4.1 Definition 2.1 Konvergenz

Wir sagen, dass die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ) gegen den Grenzwert (oder Limes)  $a \in \mathbb{K}$  konvergiert

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \quad \left( a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)$$

wenn für beliebiges  $\varepsilon > 0$  von einem  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  an gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon, n \geq n_\varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon a_n \in I_\varepsilon(a)$$

## 4.2 Folgerung 2.2

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende beziehungsweise fallende Folge reeller Zahlen  $M = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  und sei nach oben beziehungsweise unten beschränkt. Dann gilt

$$a_n \rightarrow \sup M, a_n \rightarrow \inf M$$

Beweis  $\rightarrow$  Übungen

## 4.3 Definition 2.3 Cauchy Folgen

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt Cauchy-Folge wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

(Cauchy Kriterium)

## 4.4 Definition 2.4 Teilfolge

Eine Teilfolge einer gegebenen Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Auswahl  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , wobei  $a_{n_k}$  auch die Glieder von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sind

*Beispiel 1* Beispiel 2.5.

$$a_n = \frac{1}{n}$$

ist eine Cauchy-Folge. Für ein  $\varepsilon > 0$  wählen wir  $n_\varepsilon$  so dass  $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ . Für beliebiges  $n \geq m > N$

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| = \frac{n-m}{mn} \leq \frac{n}{mn} = \frac{1}{m} < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon \square$$

**Satz 1** Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.

*Beweis.* Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge. Angenommen, die Folge ist nicht beschränkt. Dann gibt es eine Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit

$$|a_{n_k}| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$$

Aus dieser Teilfolge kann man eine weitere Teilfolge

$$(a_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$$

extrahieren

$$|a_{n_{k_{i+1}}}| > 2|a_{n_{k_l}}| \quad l \in \mathbb{N}$$

Dann gilt

$$|a_{n_{k_{i+1}}} - a_{n_{k_l}}| \geq |a_{n_{k_{i+1}}}| - |a_{n_{k_l}}| > |a_{n_{k_l}}| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$$

im Widerspruch zur Cauchy-Folgen Eigenschaft.  $\square$

**Satz 2** Jede konvergente Folge ist Cauchy-Folge.

*Beweis.*

$$\begin{aligned} a_n \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a &\implies \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq n_\varepsilon : |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\implies \forall n, m \in n_\varepsilon : |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \square \end{aligned}$$

**Lemma 1.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ) welche gegen  $a \in \mathbb{K}$  und  $\tilde{a} \in \mathbb{K}$  konvergiert. Dann ist  $a = \tilde{a}$ .

*Beweis.* Beweis durch Widerspruch.

Falls  $|a - \tilde{a}| > 0$ , dann

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq n_\varepsilon : |a - \tilde{a}|, |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und ein  $m_\varepsilon$ , sodass

$$|a_n - \tilde{a}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq m_\varepsilon$$

Dann für  $n \geq \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$ :

$$|a - \tilde{a}| \leq |a - a_n| + |a_n - \tilde{a}| < \varepsilon$$

**Widerspruch**  $\implies a = \tilde{a}$   $\square$

*Bemerkung 1.* Die Mengen Abständen heißen \*vollständig\*, wenn jede Cauchy-Folge in  $M$  konvergiert

**Definition 1** Häufungswert, Häufungspunkt. Ein  $a \in \mathbb{K}$  heißt Häufungswert einer Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{K}$ , wenn es zu beliebigen  $\varepsilon > 0$  unendlich viele Folgelemente  $a_n$  gibt mit  $|a - a_n| < \varepsilon$

Ein  $a \in \mathbb{K}$  heißt Häufungspunkt einer Teilmenge  $M$  von  $\mathbb{K}$ , wenn  $\forall \varepsilon > 0$  existieren unendlich viele  $x \in M$ , sodass  $|a - x| < \varepsilon$

*Beispiel 2.*

1.  $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$

- divergente Folge
- besitzt 2 Häufungswerte  $a^{(1)} = 1, a^{(2)} = -1$

2. Wir nehmen  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a, b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} b$  und definieren eine neue Folge  $c_n$  sodass

$$\begin{aligned} c_{2n} &:= b_n, n \in \mathbb{N} \\ c_{2n+1} &:= a_n, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat 2 Häufungswerte  $a$  und  $b$

*Bemerkung 2.* Nach 1 hat die konvergente Folge 1 Häufungswert

**Lemma 2** 2.11. *Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{K}$  und  $a$  ein Häufungswert von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , dann konvergiert  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$*

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Wir wählen  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  sodass

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m > n_\varepsilon \text{ (aus Cauchy-Folge)}$$

und  $m_\varepsilon > n_\varepsilon$  mit

$$|a - a_{m_\varepsilon}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ (Häufungswert)}$$

Dann folgt

$$\forall n > m_\varepsilon : |a - a_n| \leq |a - a_{m_\varepsilon}| + |a_{m_\varepsilon} - a_n| < \varepsilon \implies a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \quad \square$$

**Satz 3.**  *$A$  abgeschlossen  $\iff (a \text{ Häufungspunkt von } A \implies a \in A)$   $A$  abgeschlossen in  $M \iff M \setminus A =: CA$  offen*

*Beweis.* ( $\Leftarrow$ ):

Sei jeder Häufungspunkt von  $A$  in  $A$   $x \in CA (= \mathbb{R} \setminus A) \implies x$  kein Häufungspunkt von  $A, x \notin A$

$$\implies \varepsilon : I_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset \implies \exists \varepsilon > 0 : I_\varepsilon \subseteq CA$$

$$\implies CA \text{ offen} \implies A \text{ abgeschlossen}$$

( $\Rightarrow$ ):

Sei  $A$  abgeschlossen, also  $CA$  offen, ist Häufungspunkt  $x \notin A$  das heißt  $x \in CA$ , so gilt

$$\exists \varepsilon > 0 : I_\varepsilon \subseteq CA \implies I_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset \text{lightning}$$

**Widerspruch** zur Definition von Häufungspunkt  $\implies$  jeder Häufungspunkt von  $A$  ist in  $A$   $\square$

**Lemma 3** 2.14. *Jede Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$  besitzt eine monotone Teilfolge*

*Beweis.* Sei  $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k \geq n, a_n \geq a_k\}$

- Fall 1:  $B$  unendlich. Wir zählen  $B \subseteq \mathbb{N}$  monoton wachsend

$$n_0 = \min B$$

$$n_{k+1} = \min\{n \in B, n > n_k\}$$

Dann ist die Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  monoton fallend

- Fall 2:  $B$  ist endlich oder leer

$$\implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : n \notin B$$

das heißt

$$\exists k \leq n : a_n < a_k$$

Damit können wir definieren

$$n_{k+1} = \min\{k \geq n_k : a_{n_k} < a_k\}$$

und die Folge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  ist monoton wachsend

□

*Beispiel 3.* 1.  $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$ ,  $B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$  monoton fallend

2.  $a_n = (-1)^n n$ ,  $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$  ist monotone Teilfolge

**Satz 4** Satz von Bolzano Weierstrass. Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$  ( gilt in  $\mathbb{R}^n$ !) Folgende Aussagen sind äquivalent:

1.  $A$  ist beschränkt abgeschlossen
2. Jede Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $A$  hat einen Häufungswert in  $A$
3. Jede Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $A$  besitzt eine in  $A$  konvergente Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$

*Beweis.* Wir zeigen  $3 \implies 2 \implies 1 \implies 3$

$3 \implies 2$ :

Sei  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  konvergente Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$   $a$  ist auch der Häufungswert der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$2 \implies 1$ :

1. Beschränktheit: Angenommen dies ist falsch. Dann

$$\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A : |a_n - a| \geq n \forall n \in \mathbb{N} \quad (a \in A)$$

Nach Voraussetzungen hat jede diese Folge einen Häufungspunkt  $x \in A$  und es gilt

$$|x - a| \geq |a_n - a| - |a_n - x| \geq n - |x - a_n|$$

Dabei gilt  $|x - a_n| < 1$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$  (aus Häufungswert)

$$\implies |x - a| \geq n - 1$$

Für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$  ¶

2. Abgeschlossenheit: Wir nutzen Satz 3 Zu zeigen: wenn  $a$  Häufungspunkt von  $A \implies a \in A$  Für

$$I_{\frac{1}{n}}(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \frac{1}{n}\}$$

gilt

$$I_{\frac{1}{n}}(a) \cap A \neq \emptyset \implies \exists a_n \in A : |a_n - a| < \frac{1}{n}$$

Die Folge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow a$ , da  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  Nach Voraussetzung hat  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  einen Häufungswert  $\tilde{a} \in A$ . Wir zeigen  $a = \tilde{a}$  Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig.

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad (\text{Aus } a_n \rightarrow a)$$

$$\exists m_\varepsilon \geq n_\varepsilon : |\tilde{a} - a_{m_\varepsilon}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{Aus Häufungswert})$$

$$\implies |a - \tilde{a}| \leq |a - a_{m_\varepsilon}| + |a_{m_\varepsilon} - \tilde{a}| < \varepsilon$$

$$\implies |a - \tilde{a}| = 0$$

$$\implies \tilde{a} = a \in A$$

1  $\implies$  3:

Sei nun  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $A$ ,  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine monotone Teilfolge (nach 3),  $(a_{n_k})$  ist beschränkt, da  $A$  beschränkt ist  $\implies (a_{n_k})$  ist konvergent (4.2)

Wir müssen zeigen, dass

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} \in A$$

Angenommen  $a \notin A \implies a \in CA, CA$  ist offen

$$\implies \exists I_\varepsilon(a) \subseteq CA \implies I_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$$

Nun ist aber mit geeigneten  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$

$$\forall n \geq n_\varepsilon : a_{n_k} \in I_\varepsilon(a) : a_{n_k} \in A \implies a_{n_k} \in I_\varepsilon(a) \cap A \quad \square$$

*Bemerkung 3.* • Erweiterung zu  $\mathbb{R}^n$  möglich

- Ein Raum heißt folgenkompakt, wenn jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge hat

– Nach B-W Satz ist  $\mathbb{R}(\mathbb{R}^n)$  folgenkompakt

- In  $\mathbb{R}$  alle Cauchy-Folgen konvergieren

– Cauchy Folge in  $\mathbb{R} \implies$  beschränkt und Wertemenge ist abgeschlossen  
 $\xrightarrow{\text{B-W Satz}} (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat einen Häufungswert in  $A \xrightarrow{2} \text{konvergiert gegen } a \in A$

## 4.5 Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen

**Satz 5.** Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergente Folgen in  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ )

$$b_0 \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$$

Dann gilt:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$

**Satz 6 2.15.** Seien  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergente Folgen in  $\mathbb{R}$ . Dann gilt

1.  $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
2.  $|a_n| \leq b_n \forall n \in \mathbb{N} \implies \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

*Beweis.* 1. Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben

$$\exists n_\varepsilon : \forall n \geq n_\varepsilon : b_n \leq \lim_{k \rightarrow \infty} b_n + \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \leq a_n + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \leq a_n + \frac{\varepsilon}{2} \leq b_n + \frac{\varepsilon}{2} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} b_k + \varepsilon \forall \varepsilon > 0$$

$$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} b_k$$

2. Wir wählen  $a_n = |a_n|$  und müssen noch zeigen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right| \quad (\text{Übung})$$

□

## 4.6 Geometrische Folge

Die geometrische Folge ist definiert durch

$$a_n = cq^n$$

**Lemma 4 2.16.**  $\forall q \in \mathbb{R}, |q| < 1$  konvergiert die geometrische Folge  $a_n = cq^n$  gegen Null.



*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Nach Annahme ist  $|q| < 1 \implies |q|^{-1} > 1$ , somit  $|q|^{-1} = 1+x$  für ein  $x > 0$ .

Zu zeigen:  $|cq^n - 0| < \varepsilon$  für genug große  $n$ , das heißt

$$c \left( \frac{1}{1+x} \right)^n < \varepsilon \iff \frac{c}{\varepsilon} < (1+x)^n$$

Das Archimedisches Axiom garantiert die Existenz von  $n_0 \in \mathbb{N}$ :

$$n_0 > \frac{c}{x\varepsilon} - \frac{1}{x} = \frac{c-\varepsilon}{x\varepsilon}$$

$$\forall n \geq n_0 : \frac{c}{\varepsilon} = \left( \frac{c}{x\varepsilon} - \frac{1}{x}x + 1 < n_0x + 1 \leq nx + 1 \right)$$

daraus folgt aus der Bernoulli Ungleichung

$$\frac{c}{\varepsilon} < (1+x)^n \implies cq^n \rightarrow 0 \quad \square$$

*Folgerung 1 2.17.* Die geometrische Reihe

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{i=0}^n q^i$$

konvergiert für  $|q| < 1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-q}$

*Beweis.*

zu Beweisen mit Induktion

$$(1-q)(1+q+q^2+\dots+q^n) = 1+q^{n+1}$$

$$\implies S_n - \frac{1}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}-1}{1-q} = -\frac{q^{n+1}}{1-q}$$

$$\left| S_n - \frac{1}{1-q} \right| = c|q|^n < \varepsilon \forall n \geq n_\varepsilon$$

$$c = \left| \frac{1}{1-q} \right|$$

$$s_n \rightarrow \frac{1}{1-q} \quad \square$$

*Beispiel 4 2.18.*

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n}{n!} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} cq^n \text{ mit } |q| < 1$$

2.  $a_n = \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n} \frac{n+1-1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} + \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$
3.  $a_n = \sqrt[n]{x}$ ,  $x$  gegeben,  $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  Übungen
4.  $a_n = \sqrt[n]{m} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$
5.  $a_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!}$
- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist monoton wachsend
  - beschränkt:  $a_n < 3 \forall n \in \mathbb{N}$
  - $\implies (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, Limes ist sogenannten Zahl  $e$
6.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  rekursiv definiert:  $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  Fibonacci Folge

## 4.7 Umgebung

**Definition 2 2.19.**  $A \subseteq \mathbb{K}$  heißt Umgebung von  $a \in \mathbb{K} \iff \exists \varepsilon > 0 I_\varepsilon(a) \subseteq A$

*Folgerung 2 2.20.* Aus der Definition folgt

1. Sei  $U_i, i \in I$  Umgebung von  $a$ , so ist  $\bigcup_{i \in I} U_i$  Umgebung von  $a$
2. Sind  $U_1, \dots, U_n$  Umgebung von  $a$ , so ist auch  $U_1 \cap \dots \cap U_n$  Umgebung von  $a$
3.  $\forall$  Umgebung von  $a : \exists$  Umgebung von  $a$ , sodass  $\forall y \in V, U$  Umgebung von  $y$  ist

*Beweis.* 1. Für irgendein

$$i_0 \in I \exists \varepsilon > 0 : I_\varepsilon(a) \subseteq U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

2. Es gilt nach Voraussetzung  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$  mit  $I_{\varepsilon_i}(a) \subseteq U_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . Folglich gilt für  $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} > 0$ ,  $I_\varepsilon(a) \subseteq U_i (\forall i = 1, \dots, n) \implies I_\varepsilon(a) \subseteq U_1 \cap \dots \cap U_n$
3. Nach Voraussetzung gibt es für eine Umgebung  $U$  von  $a$  ein  $\varepsilon > 0$  mit  $I_\varepsilon(a) \subseteq U$ .  $V := I_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \subseteq U$  ist ebenfalls Umgebung von  $a$  und  $\forall y \in V$  gilt

$$I_{\frac{\varepsilon}{2}} \subseteq I_\varepsilon(x) \subseteq U, \text{ denn } \underbrace{|y-z|}_{z \in I_{\frac{\varepsilon}{2}}} < \frac{\varepsilon}{2} \implies |x-z| \leq |x-y| + |x-z| < \varepsilon$$

□

**Definition 3 2.21.**

1.  $A \subseteq \mathbb{K}$  ist offen  $\iff \forall a \in A$  ist  $A$  die Umgebung von  $a$   
(in  $\mathbb{R} \forall a \in A \exists \varepsilon > 0 I_\varepsilon(a) \subseteq A$ ) Für Intervalle  $(a, b)$  haben wir schon gezeigt, dass sie offen sind

2.  $A \subseteq \mathbb{K}$  heißt abgeschlossen  $\iff C_{\mathbb{K}}A$  offen

3. Abschließung von  $A$ :

$$\bar{A} := \{a \in \mathbb{K} \mid a \in A \vee a \text{ Häufungspunkt von } A\}$$

4. Rand von  $A$ :

$$\partial A := \{a \in \mathbb{K} \mid \forall \text{ Umgebung } U \text{ von } a : A \cap U \neq \emptyset \wedge CA \cap U \neq \emptyset\}$$

*Beispiel 5 2.22.*

$$A = (a, b]$$

$$\bar{A} = [a, b]$$

$$\partial A = \{a, b\}$$

$$\forall \varepsilon > 0 I_{\varepsilon}(a) \cap (a, b] \neq \emptyset$$

$$I_{\varepsilon}(a) \cap \mathbb{R} \setminus (a, b] \neq \emptyset$$

Sei  $A = \mathbb{Q}$ , dann  $\bar{A} = \mathbb{R}$ ,  $\partial A = \mathbb{R}$  denn in jedem  $\varepsilon$ -Intervall um eine rationale Zahl gibt es sowohl rationale als auch irrationale Zahlen

*Bemerkung 4.*

- Die Grenzwerte und Häufungswerte kann man auch in ganz

$$\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\} =: \hat{\mathbb{R}}$$

mit einer neuen Definition von Abstand:

$$(x, y) := |\xi(x) - \xi(y)|$$

$$\xi(x) := \begin{cases} \frac{|x|}{1+|x|} & x \in \mathbb{R} \\ \pm 1 & x = \pm\infty \end{cases}$$

- $\hat{\mathbb{R}}$  ist folgenkompakt
- Algebraische Operationen in  $\hat{\mathbb{R}}$

$$x + \infty := \infty + x := \infty \quad \forall x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$x - \infty := -\infty + x := -\infty \quad \forall x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

$$x \cdot \infty := \infty \cdot x := \begin{cases} \infty & \forall x \in \hat{\mathbb{R}}, x > 0 \\ -\infty & \forall x \in \hat{\mathbb{R}}, x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\infty} = \frac{1}{-\infty} =: 0$$

Sinnlos wäre:

$$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0 \cdot (-\infty), \frac{\infty}{\infty}, \dots$$

- Damit könne wir die Rechenregeln auch für Folgen in  $\hat{\mathbb{R}}$  formulieren
- In  $\hat{\mathbb{R}}$  hat jede Folge einen Häufungswert

**Definition 4 2.23.** Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein Folge von reellen Zahlen,  $\emptyset \neq H \subseteq \hat{\mathbb{R}}$  die Menge der Häufungswerte von  $(a_n)$  in  $\hat{\mathbb{R}}$ .

Dann sei:

$$\overline{\lim} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n := \inf H \quad (\text{Limes inferior})$$

$$\underline{\lim} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n := \inf H \quad (\text{Limes superior})$$

*Bemerkung 5.*

1. Definition 4 kann man auch für  $\mathbb{R}$  formulieren
- 2.

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n \iff \forall \varepsilon \begin{cases} (1) \{n \mid |a - a_n| < \varepsilon\} \text{ ist unendlich (weil } a \text{ Häufungswert ist)} \\ (2) \{n \mid a_n < a - \varepsilon\} \text{ ist endlich (} a \text{ ist kleinste Häufungswert)} \end{cases}$$

*Beispiel 6 2.24.*

$$a_n = n + (-1)^n n$$

$$a_{2n+1} = 0 \forall n \implies 0 \text{ ist Häufungswert}$$

$$a_{2n} = 4n \rightarrow \infty \implies \infty \text{ ist Häufungswert}$$

also gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = \infty$$

*Bemerkung 6.*

- $a_n \rightarrow a$  in  $\hat{\mathbb{R}} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \inf b_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf (a_n + b_n)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \inf b_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf (a_n \cdot b_n)$  für  $a_n, b_n > 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \sup b_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$  (zum Beispiel betrachte  $a_n = n^2, b_n = \frac{1}{n}$ )

## 5 Reihen (Unendliche Summen)

**Definition 5.2.19.** Eine Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

(**unendliche Summe**) konvergiert, wenn die Folge ihrer **Partialsommen** konvergiert

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S_{\infty} < \infty$$

*Beispiel 7.*

1.  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$
2.  $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k = \begin{cases} -1 & n \text{ ungerade} \\ 0 & n \text{ gerade} \end{cases}$   $S_n (= -1, 0, -1, 0, \dots)$  konvergiert nicht
3.  $S_n = \sum_{j=0}^n z^j = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$  Für  $|z| < 1$  konvergiert  $S_n \rightarrow \frac{1}{1-z} \implies \sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1-z}$
4. Harmonische Reihe: Seien  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ , Behauptung  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ , also divergent

*Beweis von 4.*

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}} &= \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \underbrace{\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} \frac{1}{k}}_{2^j \text{ Summanden}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n 2^j \frac{1}{2^{j+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

□

**Satz 7.** Seien  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergente Reihen,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , dann sind auch die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k), \sum_{k=0}^{\infty} \alpha a_k$$

konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

*Beweis.* Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen

□

## 5.1 Konvergenzkriterien

Cauchy Kriterium für Partialsummen besagt, dass eine Reihe genau dann konvergent ist, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > m \geq n_\varepsilon : |s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon$$

**Lemma 5 2.28** Reihenkonvergenz. Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  kann nur dann konvergent sein, wenn ihre Partialsummen beschränkt sind und ihre Glieder eine Nullfolge bilden

*Beweis.* Sei  $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s_\infty - s_\infty = 0$$

Die Beschränktheit der Partialsummen folgt notwendig aus der Beschränktheit konvergenter Folgen.  $\square$

**Satz 8 2.29.** Sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge. Dann  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_1$

*Beweis.*

$$s_n = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=2}^{n+1} a_k = a_1 - a_{n+1} \implies |s_n - a_1| = |a_{n+1}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\square$

*Beispiel 8 2.30.*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \underbrace{\frac{1}{k}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{a_{k+1}} \right) = a_1 = \frac{1}{2}$$

**Definition 6 2.31.** Eine Reihe  $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  in  $\mathbb{R}$  heißt alternierend, wenn ihre Elemente alternierende Vorzeichen haben, das heißt  $a_n \cdot a_{n+1} \leq 0$

**Satz 9 2.32.** 1. Eine alternierende Reihe  $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist konvergent, wenn die Absolutbeträge ihrer Glieder eine monoton fallende Nullfolge bilden

2. Für die Reihenreste gilt dabei die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} a_k \right| \leq |a_m|$$

*Beweis.* 1. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $a_1 > 0$ . Dann ist  $a_{2n-1} + a_{2n} \geq 0, a_{2n} + a_{2n+1} \geq 0$  Und folglich

$$s_{2n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2n} + a_{2n+1} \leq s_{2n-1} \leq \dots \leq s_3 \leq s_1$$

$$s_{2n} = (a_1) + (a_2 + a_4) + \dots + \underbrace{(a_{2n-1} + a_{2n})}_{\geq 0} \geq s_{2n-2} \geq \dots \geq s_2$$

Ferner gilt

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \geq 0$$

und somit

$$s_2 \leq \dots \leq s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq \dots \leq s_1$$

$(s_{2n})$  monoton wachsend,  $s_{2n+1}$  monoton fallend, beide beschränkt

$$\implies s_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s_*, \implies s_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s^*$$

$$s_{sn} \leq s_* \leq s^* \leq s_{2n+1}$$

da  $(a_n)$  Nullfolge

$$|s_{2n+1} - s_{2n}| = |a_{2n+1}| \rightarrow 0$$

$$s_* = s^* = s_\infty$$

2. Aus 1. folgt  $m = 2n + 1$

$$0 \leq s_\infty - s_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{\infty} a_k = s_\infty - s_{2n+1} + a_{2n+1} \leq a_{2n+1}$$

und sonst

$$\left| \sum_{k=2n+1}^{\infty} a_k \right| \leq |a_{2n+1}|$$

Analog im Fall  $m = 2n$

□

*Beispiel 9 2.33.* 1.  $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$  konvergiert nach dem Leibniz

Kriterium

$$\left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \frac{1}{k} \rightarrow 0 \text{ monoton}$$

2. Die Leibniz Reihe  $s_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$  konvergiert nach Leibniz

Kriterium

*Bemerkung 7* Monotonie ist wichtig.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ mit } a_{2k} := -\frac{1}{2^k}, a_{2k-1} := \frac{1}{k}$$

ist divergent:

- $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$ , aber
- $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1$

**Definition 7** 2.34.  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heißt absolut konvergent, genau dann wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergent ist

**Satz 10** 2.35. Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergent in  $\mathbb{R}$ . Dann ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent

*Beweis.* Mit Cauchy Kriterium:

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| < \varepsilon$$

aus der absoluten Konvergenz

□

**Satz 11** 2.36 Umordnungssatz. Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine absolut konvergente Reihe in  $\mathbb{R}$ . Dann gilt für jede bijektive Abbildung  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

*Beweis.* Ranacher für spezifische Umordnung

□

*Beispiel 10* 2.37.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$  konvergent (aber nicht absolut)

Behauptung:  $\exists$  Umordnung  $\tau$ , sodass  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\tau(k)-1}}{\tau(k)}$  divergiert Beachte

$$\frac{1}{2^j+1} + \frac{1}{2^j+3} + \dots + \frac{2 \cdot 2^j - 1}{2^{j+1}} \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$  Die Umordnung

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) - \frac{1}{6} + \underbrace{\left( \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} \right)}_{\geq \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}} - \frac{1}{8} + \dots + \underbrace{\left( \frac{1}{2^j+1} + \frac{1}{2^j+3} + \dots + \frac{1}{2^{j+1}-1} \right)}_{> \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}} - \frac{1}{2^k+2}$$

konvergiert nicht



**Satz 12 2.38** Cauchyprodukt für Reihen. Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$  absolut konvergente Reihen (in  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ). Sei  $c_m = \sum_{k=1}^m a_k b_{m-k}$ . Dann konvergiert

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m = \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right)$$

(ohne Beweis)

**Satz 13 2.39** Vergleichskriterium. Gegeben seien zwei Reihen  $s_{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tilde{s}_{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k$

1. Gilt für fast alle  $k \in \mathbb{N}$  mit einer Konstante  $\alpha > 0$   $|a_k| \leq \alpha \tilde{a}_k$  (für fast alle  $n \in \mathbb{N} :=$  Für alle  $n \in \mathbb{N}$  außer endlich viele) so ist  $\tilde{s}_{\infty}$  eine **Majorante** von  $s_{\infty}$  und aus der absoluten Konvergenz von  $\tilde{s}_{\infty}$  folgt auch die von  $s_{\infty}$ , absolute Divergenz von  $s_{\infty}$  impliziert die absolute Divergenz von  $\tilde{s}_{\infty}$

*Beweis.* ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Voraussetzungen  $\forall k \in \mathbb{N}$  gelten

1. Ist  $\tilde{s}_{\infty}$  konvergent

$$\implies \sum_{k=1}^n |a_k| \leq \alpha \sum_{k=1}^n |\tilde{a}_k| \leq \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\implies S_n$  sind beschränkt,  $S_{\infty}$  absolut konvergent Umgekehrt folgt aus Divergenz von  $\tilde{S}_{\infty}$  auch  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \rightarrow \infty \implies \tilde{S}_{\infty}$  auch Divergent

2. Aus Voraussetzung

$$\left| \frac{a_{k+1}}{\tilde{a}_{k+1}} \right| \leq \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \left| \frac{a_k}{\tilde{a}_{k+1}} \right| \leq \left| \frac{\tilde{a}_{k+1}}{\tilde{a}_k} \right| \left| \frac{a_k}{\tilde{a}_{k+1}} \right| = \left| \frac{a_k}{\tilde{a}_k} \right| \leq \dots \leq \left| \frac{a_1}{\tilde{a}_1} \right| =: \alpha$$

$\implies |a_{k+1}| \leq \alpha |\tilde{a}_{k+1}|$ . Aus 1. folgt die Aussage

□

**Korollar 1 2.34** Wurzelkriterium. Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert absolut, wenn es ein

$g \in (0, 1)$  gibt, mit dem für f.a. (fast alle)  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\sqrt[k]{|a_k|} \leq g \leq 1$ , beziehungsweise  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$

Wenn für unendlich viele  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\sqrt[k]{|a_k|} > 1$ , beziehungsweise  $|a_k| > 1$ , so ist die Reihe absolut divergent.

*Beweis.* Nach Voraussetzung  $|a_k| \leq q^k$ , das heißt die konvergierende geometrische Reihe  $\tilde{s}_\infty$  mit  $q \in (0, 1)$  ist Majorante für  $s_\infty$   $\square$

*Korollar 2.2.41* Quotientenkriterium. Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergiert absolut, wenn es ein  $q \in (0, 1)$  gibt mit dem für f.a.  $k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q < 1, \text{ bzw. } \limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

Wenn für fast alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1$ , so ist die Reihe absolut divergent

*Beweis.* Vergleich mit

$$\tilde{s}_\infty \sum_{k=1}^{\infty} q^k$$

$\square$

*Beispiel 11.2.42.*

$$1. \quad s_\infty \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, z \in \mathbb{C}$$

Quotientenkriterium:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{z^k} \right| = \left| \frac{z}{k+1} \right|$$

Sei  $k \geq 2|z| \implies \left| \frac{z}{k+1} \right| \leq \frac{1}{2} \implies s_\infty$  absolut konvergent.

$$2. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$$

$$\left| \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \frac{k^k}{k!} \right| = \left| \frac{k}{k+1} \right|^k = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} = \frac{1}{2}$$

$\implies s_\infty$  absolut konvergent

*Bemerkung 8.* 1. Falls  $q = 1 \implies$  die Kriterien geben keine Entscheidung, zum Beispiel:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \vee \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ & \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{k}{k+1} \right| \rightarrow 1 \\ & \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

2. Für die Divergenz ist es wichtig, dass  $\exists n_0 \forall n \geq n_0 a_n > 0$ , Wir nehmen

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & n = 2^k \\ 2(2^{-k})^2 & n - 1 = 2^k \\ 0 & \end{cases}$$

$\sum a_n$  konvergiert, aber  $\lim_{a_n \neq 0} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$

**Lemma 6 2.43** Cauchy Verdichtungssatz. Eine Reihe  $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , mit  $a_k \in \mathbb{R}_+$ , die monoton fallende Nullfolge bilden hat dasselbe Konvergenzverhalten wie die verdichtete Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots$$

*Beweis.* Wir setzen  $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ ,  $\tilde{s}_n := \sum_{k=0}^n 2^k a_{2^k}$

Für  $n < 2^{k+1}$

$$S_n = a_1 + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{2^k} + \dots + a_{2^{k+1}-1}) \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^k a_{2^k} = \tilde{s}_n$$

$\implies$  Konvergenz von  $\tilde{s}_k$  impliziert Konvergenz von  $S_n$

Falls die verdichtete Reihe divergent ist, so folgt aus der für  $n \geq 2^{k+1}$  gültigen Beziehung

$$\begin{aligned} s_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \dots + a_8) + \dots + (a_{2^k+1} + \dots + a_{2^{k+1}}) \\ &\geq a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \dots + 2^k a_{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2} \tilde{s}_{k+1} \end{aligned}$$

auch die Divergenz von  $S_n$  □

## 5.2 Potenzreihe

$$S_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

mit den Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{K}$ , Zentrum  $x_0 \in \mathbb{K}$  und Argument  $x \in \mathbb{K}$

- Die geometrische Reihe ist ein Spezialfall der allgemeinen Potenzreihe
- Unendlicher Dezimalbruch

$$0, d_1, d_2, d_3, \dots = \sum_{k=1}^{\infty} d_k 10^{-k}, d_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

**Satz 14** 2.44 Potenzreihen. Eine Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$  konvergiert absolut  $\forall x \in \mathbb{K}$  mit der Eigenschaft

$$|x - x_0| < \rho := \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \sqrt[k]{|c_k|}}$$

Für  $|x - x_0| > \rho$  ist sie divergent

*Beweis.* Für  $x \neq x_0$  gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \sqrt[k]{|c_k| |x - x_0|^k} = |x - x_0| \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{|x - x_0|}{\rho} = \begin{cases} < 1 & |x - x_0| < \rho \\ > 1 & |x - x_0| > \rho \end{cases}$$

□

*Bemerkung 9.* Falls  $\rho = \infty$ , konvergiert die Reihe  $\forall x \in \mathbb{K}$

Falls  $\rho = 0$ , konvergiert die Reihe für kein  $x \neq x_0$

- Die Konvergenzgrenze  $\rho$  ist die größt mögliche und wird **Konvergenzradius** der Reihe bezeichnet
- Für  $\limsup \sqrt[k]{|c_k|} = \infty$  konvergiert die Reihe für kein  $x \neq x_0$  und wir setzen  $\rho = 0$
- Falls  $\limsup \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \implies \rho = \infty$

### 5.3 Exponentialreihe

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

ist eine Potenzreihe. Ihr Konvergenzradius

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

**Satz 15** 2.45. Der Wert der exp Reihe für  $x = 1$  ist die Eulersche Zahl  $e$

$$\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e$$

Diese ist irrational

*Beweis.* In Übung 6.2 gezeigt

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Angenommen  $e = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}, q > 1$ . Betrachte Abschätzung, für die Restgliederdarstellung von  $e$ :

$$\begin{aligned} s_{n+m} - s_n &= \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{(m+n)!}\right) - \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \dots + \frac{1}{(m+n)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{(n+1)^{m-1}}\right) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{(n+1)^k} \end{aligned}$$

für  $x = \frac{1}{(n+1)}$  erhält man

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1-x^m}{1-x} \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

Da dies für alle  $m \in \mathbb{N}$ , folgt

$$0 < e - s_n \leq \frac{1}{n!n} \implies 0 < en! - s_n n! \leq \frac{1}{n}$$

□

## 6 Stetige Abbildungen

### 6.1 Grenzwert einer Funktion, Stetigkeit

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$$

und wollen diese auf ganz  $\mathbb{R}$  fortsetzen, das heißt Wir suchen ein  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\tilde{f}|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = f$  und einen Wert  $\tilde{f}(0) \in \mathbb{R}$

Allgemeiner überprüft man für Funktionen  $f : D \subseteq \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  die Fortsetzbarkeit auf den Abschluss  $\bar{D} \subseteq \mathbb{K}$ , wobei

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \{x \in \mathbb{K} \mid x \in D \vee \text{ oder } x \text{ ist HP von } D\} \\ &= \{x \in \mathbb{K} \mid \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D \wedge x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n\} \end{aligned}$$

(analog zur Plenarübung)

**Definition 8 3.1.** Eine Funktion  $f : D \subseteq \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  hat im Punkt  $x_0 \in \bar{D}$  einen Grenzwert  $a \in \mathbb{K}$ , wenn alle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$  gilt:

$$x_n \rightarrow x_0 \ (n \rightarrow \infty) \implies f(x_n) \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty)$$

Wir schreiben kurz:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$

*Bemerkung 10.* • Falls der Grenzwert existiert, ist er eindeutig.

- Ist  $T \subseteq D \subseteq \mathbb{R}, T \neq \emptyset, f : D \rightarrow \mathbb{R}, x \in \bar{T}$ , dann verstehen wir unter

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in T}} f(x)$$

den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f|_T$ , falls er existiert.

- Spezialfälle:

$$T_{>} := \{x \in D \mid x > x_0\} : f(x_0^+) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in T_{>}}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad (\text{rechtsseitiger Grenzwert})$$

$$T_{<} := \{x \in D \mid x < x_0\} : f(x_0^-) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in T_{<}}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad (\text{linksseitiger Grenzwert})$$

- Existiert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x), x_0 \in \bar{T} \subseteq \bar{D}$ , dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \in T} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

- Es gelten die üblichen Rechenregeln für Grenzwerte  $(x, \cdot, :)$

*Beispiel 12 3.2.* 1.  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto \frac{x}{|x|}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \wedge \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

Also existiert  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  nicht

2.  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$

Es gilt  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ , denn für  $|x| \leq 1, x \neq 0$  gilt

$$|f(x) - 1| = \left| \frac{e^x - 1 - x}{x} \right| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} \right| \leq |x| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^{k-2}}{k!} \leq |x| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} = |x| \underbrace{(e - 2)}_{>0}$$

Für Nullfolgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [-1, 1] \setminus \{0\}$  folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$  Das heißt  $f$  besitzt eine Fortsetzung

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

**Definition 9 3.3** Asymptotisches Verhalten. Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$  nach oben (nach unten) unbeschränkt. Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  hat für  $x \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow -\infty$ ) einen Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$ , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists y \in \mathbb{R} : |f(x) - a| < \varepsilon \forall x \in D, x > y \text{ (} x < y \text{)}$$

Schreibweise:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ , oder  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$

Sei  $x_0 \in \bar{D}$ . Die Funktion  $f$  divergiert bestimmt gegen  $+\infty$  ( $-\infty$ ) :  $\iff \forall K \in \mathbb{R}_+ \exists \delta > 0 : f(x) > K$  ( $f(x) < -K$ )  $\forall x \in I_\delta(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$

Schreibweise:  $f(x) \rightarrow +\infty$  ( $f(x) \rightarrow -\infty$ ) für  $x \rightarrow x_0$

Beispiel 13 3.4. 1.  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\}, x \mapsto \frac{1}{x-1}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$$

wir schreiben kurz  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

2.  $\forall k \in \mathbb{N}$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k}{e^x} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k e^x, \text{ denn } e^x = \exp(x) \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}, x \geq 0$$

$$\implies \frac{x^k}{e^x} \leq \frac{(k+1)!}{x} \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty)$$

$$x^k e^x = \frac{(-1)^k |x|^k}{e^{|x|}}, x < 0$$

**Definition 10 3.5.** Eine Funktion  $f : D \subseteq \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  heißt stetig im Punkt  $x_0 \in D$ , wenn gilt: Für alle Folgen  $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty) \implies f(x_n) \rightarrow f(x_0) (n \rightarrow \infty)$  Andernfalls heißt sie unstetig in  $x_0 \in D$ .  $f$  heißt stetig (auf ganz  $D$ ), wenn sie in jedem  $x_0 \in D$  stetig ist. (insert Symbolbild hier)

**Lemma 7 3.5.** 1. Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$  stetig, dann ist auch  $f|_T$  stetig,  $T \subseteq D$

2. Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$  stetig, so auch  $\Re(f) : D \rightarrow \mathbb{R}, \Im(f) : D \rightarrow \mathbb{R}, |f| : D \rightarrow \mathbb{R}_+$  stetig (auf ganz  $D$ )

3. Sind  $f, g : D \rightarrow \mathbb{K}$  stetig, so auch  $f + g, f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{K}$

4. Ist  $f : D \rightarrow f(D) \subseteq \mathbb{K}, g : f(D) \rightarrow \mathbb{K}$  stetig in  $x_0$ , beziehungsweise in  $f(x_0) =: y_0$  so auch  $f \circ g : D \rightarrow \mathbb{K}$  stetig in  $x_0 \in D$ :

*Beweis.* 1. Siehe Bemerkung zu Grenzwerte

2. Für  $z = a + ib$  gilt  $||a| - |b|| \leq |a - b|$  sowie  $|z|^2 = a^2 + b^2 \geq a^2 \geq b^2$

3. Siehe Bemerkung zu Grenzwerte

4. Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , dann folgt aus Stetigkeit von  $f$  :  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$   
 $(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0) (n \rightarrow \infty)$

□

**Lemma 8 3.7  $\varepsilon/\delta$  Kriterium.** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$  ist in  $x_0 \in D$  genau dann stetig, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  gibt, sodass Für alle  $x \in D$  gilt:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

*Beweis.* ( $\Leftarrow$ ): Gilt das  $\varepsilon/\delta$  Kriterium, so ist  $f$  auch in  $x_0$  offensichtlich stetig  
 ( $\Rightarrow$ ): Sei also  $f$  stetig in  $x_0$ . Angenommen, dass  $\varepsilon/\delta$ -Kriterium gälte nicht, das heißt es gibt ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $\forall \delta > 0$  ein  $x \in D$  mit  $|x - x_0| < \delta$  und  $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$  gibt. Widerspruch zu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

□

**Korollar 3 3.8.** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$  stetig in  $x_0 \in D$  mit  $f(x_0) \neq 0$ . Dann gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $f(x) \neq 0$ . Dann gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $f(x) \neq 0 \forall x \in I_\sigma(x_0) \cap D$ . Insbesondere ist  $\frac{1}{f} : D \rightarrow \mathbb{K}$  stetig in  $x_0 \in D$

*Beweis.* Setze  $\varepsilon := |f(x_0)| > 0$ . Dann gibt es ein  $\delta > 0$ , sodass  $\forall x \in D$  mit  $|x - x_0| < \delta$  folgt  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  (aus Stetigkeit von  $f$ ), das heißt für  $x \in I_\sigma(x_0) \cap D$  gilt

$$|f(x)| \geq |f(x_0)| - |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon - \varepsilon = 0$$

Insbesondere sind Folgen  $x_n \rightarrow x_0$  wohldefiniert und die Aussage resultiert aus den Rechenregeln für Folgen □

*Beispiel 14 3.9.*

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$
2. Konstante Funktionen  $f(x) = c \forall x \in \mathbb{R}$  sind stetig auf  $\mathbb{R}$
3. Seien  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$ , Dann heißt

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

**Polynom** vom Grad  $n \in \mathbb{N}_0$  und ist stetig (wegen 1. und 2. und Lemma 3.6)

4. Seien  $p, q$  Polynome, dann heißt

$$f : \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

**rationale Funktion** und ist stetig nach 3. und Korollar 3.8

5.  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1 + 3x^2}$  ist stetig nach 3., Lemma 3.6 und Übung 5.1
6.  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto e^x$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$ , denn für  $x \neq x_0$  ist

$$e^x = e^{x_0} e^{x-x_0} = e^{x_0} \left( 1 + \underbrace{(x-x_0)}_{\rightarrow 0} \underbrace{\frac{e^{x-x_0} - 1}{(x-x_0)}}_1 \right)$$

(nach Beispiel 3.2)



$$7. f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

**Definition 11** 3.10 Gleichmäßige Stetigkeit. Eine Abbildung  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$  heißt **gleichmäßig stetig** auf  $D$ , wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) < 0 : \forall x, y \in D : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

*Bemerkung* 11. Gleichmäßige Stetigkeit heißt, dass die  $\delta$  gleichmäßig für alle Punkte  $x \in D$  gewählt werden kann.

*Beispiel* 15 3.11.

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$$

1.  $f$  ist gleichmäßig stetig auf  $A = \mathbb{R} \setminus (-a, a), a > 0$
2.  $f$  ist **nicht** gleichmäßig stetig auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

*Beweis.*

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{|xy|} |x - y|$$

$$\text{also } |f(x) - f(y)| < \varepsilon \iff |x - y| < |xy| \varepsilon$$

1. Für  $x, y \in \mathbb{R} \setminus (-a, a)$  gilt  $|xy| \geq a^2$ , also  $|x - y| < \varepsilon a^2 := \delta \implies |x - y| < \varepsilon |xy|$ .  
Daher  $\forall \varepsilon > 0 \forall x, y \in A : |x - y| < \delta := \varepsilon a^2 \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
2. Dagegen können wir  $\forall \delta > 0, x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  finden wir  $|x - y| < \delta$ , aber  $|f(x) - f(y)| \geq 1 \iff |x - y| \geq |xy|$   
Sei  $\delta > 0$ . Wähle  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $\frac{\delta}{n} < 1$ . Nun gilt für

$$\begin{aligned} |x - y| &= \frac{\delta}{2n} \\ |xy| &< (|x - y| + |x|) |x| \end{aligned}$$

$$\text{für } |x| < \frac{\delta}{2n}$$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{\delta}{2n} + |x| \right) |x| < \frac{\delta^2}{2n^2} \\ &= \frac{\delta}{n} |x - y| \leq |x - y|, \text{ da } \frac{\delta}{n} \leq 1 \end{aligned}$$

□

**Definition 12** 3.12 Lipschitz Stetigkeit. Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$  heißt Lipschitz stetig (kurz L-stetig) auf  $D$ , wenn  $\exists L > 0$  (so genannte Lipschitz Konstante), sodass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \forall x, y \in D$$

*Bemerkung 12.* Menge von stetigen Funktionen  $\supset$  Menge von gleichmäßig stetigen Funktionen  $\supset$  Menge von Lipschitz-stetigen Funktionen

**Definition 13** 3.13 Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit, Satz von Heine für folgenkompakte metrische Räume. Eine auf einer beschränkten, abgeschlossenen (das heißt kompakten) Teilmenge  $D \subseteq \mathbb{R}$  stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

*Beweis.* Angenommen  $f$  ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $\forall n \in \mathbb{N}$  Punkte  $x_n, y_n \in D$  existieren mit  $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ . Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt die beschränkte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Teilfolge  $x_{n_k} \rightarrow x \in D$ . Wegen  $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$  ist auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y = x$ . Aus der Stetigkeit von  $f$  folgt, dass

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \rightarrow |f(x) - f(y)| = 0$$

□

*Bemerkung 13.*

1. Wichtigkeit von Annahmen

- Abgeschlossenheit:  $f(x) = x^{-1}$  für  $x \in [-A, A] \setminus \{0\}$  Stetig, aber nicht gleichmäßig Stetig
- Beschränktheit:  $f(x) = x^2$  für  $x \in \mathbb{R}$  ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig auf  $\mathbb{R}$   
für  $x = m$  und  $y = x + \frac{1}{n}$  gilt

$$|x - y| \rightarrow 0, \text{ aber } |f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |(x - y)(x + y)| = 2 + \frac{1}{n} \rightarrow 2$$

2. Lipschitz-Stetigkeit von  $f(x) = x^2$

$$|f(x) - f(y)| = |(x - y)(x + y)| \leq L|xy|$$

wenn  $D$  beschränkt  $D = [-A, A] \implies |x + y| \leq 2A \implies L = 2A \implies$   
Lipschitz-Stetigkeit, aber wenn  $D = \mathbb{R} \implies$  gibt keine  $L < \infty$

3. Lipschitz-Stetigkeit impliziert gleichmäßige Stetigkeit, aber nicht umgekehrt. Zum Beispiel:  $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0, A]$  ist gleichmäßig stetig nach Satz 3.13, aber nicht Lipschitz-stetig in 0.

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L|x - y|$$

$$\left| \frac{y - x}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right| > n|x - y|$$

$$\implies \nexists L > 0$$

*Bemerkung 14.* Stetigkeit kann interpretiert werden als "lokale Approximation" durch Konstanten, das heißt Funktion  $f$  nach der Stelle  $x_0$  durch eine Konstante  $f(x_0)$  approximiert werden kann und die Fehler der Approximation  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

## 6.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

**Satz 16** 3.14 Satz von Beschränktheit. *Eine auf einer beschränkten, abgeschlossenen Teilmenge  $D \subset \mathbb{K}$  stetige Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$  ist beschränkt,  $\exists K > 0 : \sup_{x \in D} |f(x)| \leq K$*

*Beweis.* Angenommen das eine stetige  $f(x)$  nicht beschränkt auf  $D$  ist. Dann gibt zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $x_n \in D$  mit  $|f(x_n)| > n$

Die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt (da  $D$  beschränkt). Nach dem B.-W. Satz  $\exists x_{m_k} \rightarrow x \in D$  (weil  $D$  abgeschlossen ist). Aus der Stetigkeit von  $f$

$$|f(x_{m_k})| \xrightarrow{x \rightarrow \infty} |f(x)| < \infty$$

Widerspruch zur Annahme  $f(x_m) \rightarrow \infty$  □

**Satz 17** 3.15 Satz von Extremum. *Eine auf einer beschränkten, abgeschlossenen Teilmenge  $D \subseteq \mathbb{K}$  stetige reellwertigen Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{K}$  besitzt dort ein Maximum und ein Minimum, das heißt:*

$$\exists x_{\min}, x_{\max} \in D : \sup_{x \in D} f(x) = f(x_{\max}) \wedge \inf_{x \in D} f(x) = f(x_{\min})$$

*Beweis.*

$$\exists K < \infty : K = \sup_{x \in D} < \infty$$

$\exists$  eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D : f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K$ . Die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist beschränkt und in  $D$  abgeschlossen

$$\implies \exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \in D : x_{n_k} \rightarrow x \in D$$

$$\text{Aus } f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x) \implies f(x) = K$$

Analog für untere Grenze. □

**Definition 14** 3.16 Zwischenwertsatz. Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle stetige Funktion. Dann gibt es zu jeder  $y \in [f(a), f(b)]$  ein  $x \in [a, b]$  mit  $f(x) = y$

*Beweis.* Betrachte die (nicht leere, beschränkte) Menge

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq y\}$$

Entweder ist dann  $\sup A = b$  (und dann  $c = b$ ) oder es gibt per Definition ein  $x \in [a, b]$  mit  $x > c \implies x \notin A \implies f(x) > y$  In beiden Fällen folgt  $f(c) \leq y$

- Falls  $c = b \implies y = f(c) = f(b) \implies f(c) \geq y$
- Falls  $c < b \implies$  Aus Stetigkeit von  $f$ , eine monoton fallende Folge von Punkten aus  $A$  existiert, welche gegen  $\sup A$  konvergiert

Aus Stetigkeit und Definition von  $A$  folgt  $f(c) \leq y$ . Beide zusammen genommen ergibt  $f(c) = y$  □

*Bemerkung 15.* Die Eigenschaften von stetigen Funktionen lassen sich zusammen formulieren: Für eine auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall definierte stetige Funktion ist der Bildbereich wieder ein abgeschlossenes Intervall

**Lemma 9 3.17** Treppennäherung. Jede auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  definierte  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  lässt sich beliebig gut durch Treppenfunktion einschließen. das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \text{ Treppenfunktion } \bar{\phi}_\varepsilon, \phi_\varepsilon$$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit zu selben endlichen Zerlegung von  $[a, b]$  mit den Eigenschaften  $\forall x \in [a, b]$

- $\phi_\varepsilon \leq f(x) \leq \bar{\phi}_\varepsilon(x)$
- $|\phi_\varepsilon(x) - \bar{\phi}_\varepsilon(x)| < \varepsilon$

Zerlegung: ist mit Teilpunkten  $a \leq x_k \leq b, k = 0, \dots, N < \infty$  (endliche Zerlegung) ( $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N = b$ )

Treppenfunktion ist konstant auf Intervalle  $[x_k, x_{k+1}), 0 \leq k \leq N-1$

*Beweis.* Aus dem Satz von gleichmäßiger Stetigkeit ist  $f$  auf  $[a, b]$  gleichmäßig stetig

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in [a, b], |x - y| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sei  $n \in \mathbb{N}$  so groß, dass  $\frac{b-a}{n} < \delta_\varepsilon$ . Mit den Teilpunkten

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n}, k = 0, \dots, n$$

erhalten wir eine äquidistante Zerlegung von  $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, |x_k - x_{k-1}| < \delta_\varepsilon$$

Dann definieren wir

$$\bar{\phi}_\varepsilon(x) := \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x < x_k\}$$

$$\phi_\varepsilon(x) := \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x < x_k\}$$

Nach Konstruktion gemäß  $\phi_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \bar{\phi}_\varepsilon(x) \forall x \in [a, b]$

Nach dem Satz von Extremum  $\forall [x_1, \dots, x_k] \exists \xi_k, \bar{\xi}_k$  sodass

$$f(\bar{\xi}_k) = \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\} f(\xi_k) = \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

Nach Wahlfreiheit von  $\delta_\varepsilon$  gilt

$$|\phi_\varepsilon(x) - \bar{\phi}_\varepsilon(x)| = |f(\xi_k) - f(\bar{\xi}_k)| \leq |f(\xi_k) - f(x)| + |f(x) - f(\bar{\xi}_k)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

aus gleichmäßiger Stetigkeit

□

### 6.3 Konvergenz von Funktionen

**Definition 15** 3.18. Seien  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$  Funktionen mit einem gemeinsamen Definitionsbereich  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Wir nennen die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **punktweise** Konvergenz gegen eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn für jedes  $x \in D$  gilt  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$

*Beispiel* 16 3.19.

1.

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Hier ist  $f_n(x)$  stetig und  $f(x)$  stetig.

2.  $f_n(x) = 1 - x^n, x \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} f_n(x) & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} & f(x) := \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{stetig} & & \text{nicht stetig} \end{array}$$

**Definition 16** 3.19 Gleichmäßige Konvergenz. Eine Folge von Funktionen  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$  heißt **gleichmäßig konvergent** gegen eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq n_\varepsilon \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in D$$

**Satz 18** 3.20 Satz von der gleichmäßigen Konvergenz. Konvergiert eine Folge stetiger Funktionen  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$  gleichmäßig gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , so ist auch die Grenzfunktion  $f$  stetig.

*Beweis.* Seien  $x_0 \in D$  und  $\varepsilon > 0$  gegeben. Zu zeigen:

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in D |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$\exists n \in \mathbb{N} \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

Aus Stetigkeit von  $f_n$ :

$$\begin{aligned} & \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ For all } x \in D : |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{1}{3}\varepsilon \\ \implies & \forall x \in D |f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{< \frac{1}{3}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{< \frac{1}{3}} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{< \frac{1}{3}} < \varepsilon \end{aligned}$$

das heißt  $f$  ist stetig. □

## 6.4 Reellwertige stetige Funktionen

**Definition 17** 3.21.

$$C(\mathbb{K}) := \{f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig auf } \mathbb{K}\}$$

ist der Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf  $\mathbb{K}$

*Bemerkung 16.* Seien  $f, g \in C(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{R}$ . Dann ist auch  $f + g, f \cdot g, \lambda f$  wieder eine Funktion aus  $C(\mathbb{K})$ .  $C(\mathbb{K})$  bildet dann einen Ring.

**Definition 18** 3.22. Seien  $f, g : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\max_{x \in \mathbb{K}} (f, g)(x) := \max_{x \in \mathbb{K}} (f(x), g(x)) \quad \min_{x \in \mathbb{K}} (f, g)(x) := \min_{x \in \mathbb{K}} (f(x), g(x))$$

**Satz 19** 3.23.  $\max(f, g)$  und  $\min(f, g)$  sind in  $C(\mathbb{K})$  für  $f, g \in C(\mathbb{K})$

*Beweis.* Es genügt, dass mit  $f$  auch  $|f|$  (als Komposition stetige Abbildung) stetig ist, denn

$$\begin{aligned} \max(f, g) &= \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}|f - g| \\ \min(f, g) &= -\max(-f, -g) \end{aligned} \quad \square$$

Wir betrachten jetzt  $C\left(\underbrace{[a, b]}_{\mathbb{K}}\right)$  und definieren

$$\|f\|_{\infty} := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

**Definition 19** 3.24. Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper (mit dem Betrag  $|\cdot|$ ), Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K}$ .

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt eine **Norm** auch  $V \iff :$

- (N1)  $\forall x \in V : \|x\| \geq 0 \wedge (\|x\| = 0 \iff x = 0)$
- (N2)  $\forall x \in V : \alpha \in \mathbb{K} \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- (N3)  $\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$(V, \|\cdot\|)$  heißt normierter Vektorraum.

$C([a, b])$  ist ein Vektorraum. Die Normeigenschaften von  $\|\cdot\|_{\infty}$  als Abbildung von  $C([a, b])$  nach  $[0, \infty)$  folgt direkt aus den Eigenschaften des Absolutbetrags

$$\begin{aligned} \|f\|_{\infty} &\implies f(x) = 0 \forall x \in [a, b] && \text{(Definitheit)} \\ \|\alpha f\| &= |\alpha| \|f\|_{\infty}, \alpha \in \mathbb{R} && \text{(Homogenität)} \\ \|f + g\|_{\infty} &\leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty} && \text{(Dreiecksungleichung)} \end{aligned}$$

Wir definieren sogenannte Normkonvergenz

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ in Norm} \iff \|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Für  $\|\cdot\|_\infty$  Konvergenz in Norm ist die gleichmäßige Konvergenz.

**Lemma 10 3.25.** Für eine Funktionenfolge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C([a, b])$  ist die gleichmäßige Konvergenz gegen eine Grenzfunktion.  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gleichbedeutend mit  $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

*Beweis.* aus Definition. □

**Definition 20 3.26** Cauchy Folge von Funktionen. Eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C([a, b])$  heißt Cauchy-Folge, wenn

$$\forall \varepsilon \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : n, m \geq n_\varepsilon \implies \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

**Lemma 11 3.27.** Eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C([a, b])$  welche gegen eine Grenzfunktion  $f \in C([a, b])$  konvergiert ist Cauchy-Folge.

*Beweis.* analog wie Beweis für Zahlenfolgen □

**Satz 20 3.28** Satz von der Vollständigkeit.  $(C([a, b], \|\cdot\|_\infty))$  ist vollständig bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz, das heißt jede Cauchy-Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C([a, b])$  besitzt ein Limes  $f \in C([a, b])$

*Beweis.* Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C([a, b])$  eine Cauchy-Folge. Dann ist für jedes feste  $x \in [a, b]$   $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge von Zahlen und besitzt einen (eindeutig bestimmten) Limes  $f(x) \in \mathbb{R}$ .

Wir wollen zeigen, dass diese Konvergenz gleichmäßig ist. Angenommen  $f_n \rightarrow f$  nicht gleichmäßig

$\implies \exists \varepsilon > 0$  und  $\forall n \in \mathbb{N}$  einen Punkt  $x_n \in [a, b]$  sodass  $|f_n(x_n) - f(x_n)| > \varepsilon$ . Die Punktfolge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzt eine konvergente Teilfolge (nach Bolzano-Weierstrass Satz,  $[a, b]$  beschränkt und abgeschlossen). Wegen der Cauchy-Folgen Eigenschaft

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : m \geq n_\varepsilon \implies \|f_m - f_n\|_\infty < \frac{1}{2}\varepsilon$$

Wegen der Konvergenz  $f_m(x_{n_\varepsilon}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_{n_\varepsilon})$ :

$$\exists m_\varepsilon \geq n_\varepsilon : |f_{m_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon}) - f(x_{n_\varepsilon})| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\implies |f_{n_\varepsilon} - f(x_{n_\varepsilon})| \leq |f_{n_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon}) - f_{m_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon})| + |f_{m_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon}) - f(x_{n_\varepsilon})| < \varepsilon$$

$\implies f_n \rightarrow f$  gleichmäßig und im Widerspruch zur Annahme.  $\implies f \in C([a, b])$  (aus Satz 3.20) □

*Bemerkung 17.* Vollständige normierte Räume werden Banach Räume genannt.  $C([a, b])$  ist also ein Banach Raum.

**Satz 21 3.29** Satz von Arzela-Ascoli. Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Funktionen in  $C([a, b])$  welche **gleichmäßig beschränkt** und **gleichmäßig stetig** sind. das heißt

1.  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$
2.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} : \max_{\substack{x, y \in [a, b] \\ |x - y| \leq \delta_\varepsilon}} |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$

Dann existiert eine Teilfolge  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  welche gegen ein  $f \in C([a, b])$  konvergiert, das heißt

$$\|f_{n_k} - f\|_\infty \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Annahmen:  $f_n \in C([a, b])$ ,

- gleichmäßig beschränkt:  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$
- gleichmäßig stetig:

$$\forall \varepsilon \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \max_{\substack{x, y \in [a, b] \\ |x - y| \leq \delta_\varepsilon}} |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

Aussage:  $\exists$  eine Teilfolge  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , sodass  $f_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f \in C([a, b])$

Beweis. Sei  $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge der rationalen Punkte in  $[a, b]$ . Für jedes  $r_k$ , nach Voraussetzung  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(r_k)| < \infty$

$$\begin{array}{llll} f_{n_1^{(1)}}, & f_{n_2^{(1)}}, & \dots, & f_{n_k^{(1)}} & \text{konvergiert in } r_1 \\ f_{n_1^{(2)}}, & f_{n_2^{(2)}}, & \dots, & f_{n_k^{(2)}} & \text{konvergiert auch in } r_2 \\ f_{n_1^{(3)}}, & f_{n_2^{(3)}}, & \dots, & f_{n_k^{(3)}} & \text{konvergiert auch in } r_2 \\ f_{n_1^{(k)}}, & f_{n_2^{(k)}}, & \dots, & f_{n_k^{(k)}} & \text{konvergiert auch in } r_k \end{array}$$

{Diagonalfolge}

Nach sukzessiver Anwendung des Bolzano-Weierstrass Satz bekommen wir eine Folge von Teilfolgen. Die Folgen  $\left(f_{n_j^{(k)}}(r_k)\right)_{j \in \mathbb{N}}$  sind konvergent,  $\left(n_j^{(k+1)}\right)_{j \in \mathbb{N}}$  ist Teilfolge

von  $\left(n_j^{(k)}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ .  $\left(f_{n_j^{(k)}}(r_l)\right)_{j \in \mathbb{N}}$  ist konvergent für  $l = 1, \dots, k$ . Für die Diagonalfolge

$\left(f_{n_k^{(k)}}\right)_{k \in \mathbb{N}}$  ist dann  $\left(f_{n_k^{(k)}}(r_j)\right)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergent für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Noch zu zeigen: Gleichmäßige konvergenz von dieser Diagonalfolge in allen  $x \in [a, b]$ . Wir bezeichnen jetzt die Diagonalfolge mit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (erst für alle rationale  $r_k$ ).

Für jedes  $r_k \in [a, b]$  gibt es ein  $n_\varepsilon(r_k) \in \mathbb{N}$ , sodass

$$|f_n(r_k) - f_m(r_k)| < \frac{1}{3} \varepsilon \forall n, m \geq n_\varepsilon(r_k)$$



Die gleichmäßige Stetigkeit impliziert, dass

$$\exists \delta_\varepsilon : x, y \in [a, b], |x - y| < \delta_\varepsilon \implies \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Wir unterteilen  $[a, b]$  in  $I_k = [x_{k-1}, x_k], k = 1, \dots, n$  mit  $a < x_0 < \dots < x_n = b$

$$\max_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_{k-1}| \leq \delta$$

Aus jedem  $I_k$  wählen wir ein  $r_k \in \mathbb{Q}$ .  $\forall x \in I_k$  gilt dann für  $n, m \geq n_\varepsilon := \max\{n_\varepsilon(r_1), \dots, n_\varepsilon(r_n)\}$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \underbrace{|f_n(x) - f_n(r_k)|}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} + \underbrace{|f_n(r_k) - f_m(r_k)|}_{< \frac{1}{3}\varepsilon} + \underbrace{|f_m(r_k) - f_m(x)|}_{\frac{1}{3}\varepsilon} < \varepsilon$$

$\implies$  für  $n, m \geq n_\varepsilon$  gilt  $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \implies (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist Cauchy-Folge im Banachraum  $C([a, b]) \implies f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  für  $f \in C([a, b])$   $\square$

## 7 Differentiation

**Definition 21** 4.1 Differenzquotienten. Für eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ , definieren wir in einem Punkt  $x_0 \in D$  einen **Differenzquotienten** durch  $D_n f(x_0) := \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ , wobei  $x_0 + h \in D$

**Definition 22** 4.2 Ableitung.  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **differenzierbar** im Punkt  $x_0 \in D$  mit **Ableitung**  $f'(x_0)$ , wenn für jede Nullfolge  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_0 + h_n \in D$ , die Folge  $(D_{h_n} f(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert zu  $f'(x_0)$

*Bemerkung* 18.  $f'(x)$  ist eindeutig.

*Beweis.* Für zwei Nullfolge  $h_n, \tilde{h}_n$ , sodass:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_{h_n} f(x_0) = a, \lim_{n \rightarrow \infty} D_{\tilde{h}_n} f(x_0) = \tilde{a}$$

fassen wir eine Nullfolge  $\{h_1, \tilde{h}_1, h_2, \tilde{h}_2, \dots\}$  zusammen. Der zugehörige Differenzquotient konvergiert  $\implies a = \tilde{a}$   $\square$

Notation:

$$f'(x_0) =: \frac{f}{dx}(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \in D \\ x \rightarrow x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**Definition 23** 4.3. Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt differenzierbar auf  $D$ , wenn sie in jedem Punkt  $x_0 \in D$  differenzierbar ist. Sie heißt stetig differenzierbar, wenn die Ableitung  $f'$  auf  $D$  eine stetige Funktion ist.

**Bemerkung 19.** Im Falle eines Randpunktes behalten wir einseitige Stetigkeit.  $D = [a, b]$  :

- für  $x_0 = a, x \downarrow a : \iff x > a \wedge x \rightarrow a$
- für  $x_0 = b, x \uparrow b : \iff x < b \wedge x \rightarrow b$

**Satz 22 4.4.** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist in einem  $x_0 \in D$  genau dann differenzierbar mit Ableitung  $f'(x_0)$ , wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : x_0 + h \in D, |h| < \delta_\varepsilon \implies \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

*Beweis.* Beweis aus der Definition des Grenzwerts. □

**Satz 23 4.5.** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann in einem Punkt  $x_0 \in D$  differenzierbar, wenn es eine Konstante gibt,  $c \in \mathbb{R}$ , sodass

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \omega(x), x \in D$$

mit einer Funktion  $\omega : D \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass

$$\lim_{\substack{x \in D \\ x \rightarrow x_0}} \frac{\omega(x)}{x - x_0} = 0$$

Diese Konstante  $c = f'(x_0)$

*Beweis.* Sei  $f$  in  $x$  differenzierbar und  $\omega(x) := f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ . Dann aus Differenzierbarkeit von  $f$

$$\frac{\omega(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

Sei umgekehrt  $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \omega(x)$  mit  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\omega(x)}{x - x_0} = 0$  Dann gilt:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - c = \frac{\omega(x)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

das heißt  $f$  ist in  $x_0$  differenzierbar mit Ableitung  $f'(x_0)$  □

**Bemerkung 20.** Der Satz besagt, dass affin-lineare Funktion (Gerade)  $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  approximiert die differenzierbare Funktion in  $x_0 \in D$ . Der Graph von  $g$  ist die tangente an dem Graphen von  $f$  in  $(x_0, f(x_0))$

**Lemma 12 4.6.** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0 \in D$  differenzierbar ist dort stetig.

*Beweis.*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \omega(x) \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$$

□

*Bemerkung 21.* Man kann die  $n$ -te Ableitung rekursiv definieren.

$$\frac{nf}{x^n}(x) = f^{(n)}(x), n \geq 3$$

$$\frac{2f}{x^2}(x) = f^{(2)}(x) = f''(x)$$

*Beispiel 17 4.7.*  $f(x) = |x|$  ist nicht in  $x_0 = 0$  differenzierbar. Um dies zu sehen, betrachten wir eine Nullfolge

$$h_n = (-1)^n \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$$

und

$$\frac{f(h_n) - f(0)}{h_n} = \frac{|h_n|}{h_n} = (-1)^n$$

nicht konvergent. in  $x_0 \neq 0$  ist  $f(x) = |x|$  differenzierbar

**Lemma 13 4.8.** Für  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar gelten die folgenden Rechenregeln:

1. Linearkombination ist differenzierbar  $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g', \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2.  $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
3.  $g(x) \neq 0$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

*Beweis.* 1. Aus den Eigenschaften von konvergenten Zahlenfolgen

2. Aus Definition:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)(g(x) - g(x_0)) + (g(x) - f(x_0))g(x)}{x - x_0} \\ &= f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0) \end{aligned}$$

3. Erst  $f \equiv 1$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) \frac{1}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)} \frac{1}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'g - fg'}{g^2}(x_0)$$

□