Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2016/17

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. D. Vogel
Dr. M. Witte

Blatt 6
Abgabetermin: Donnerstag, 01.12.2016, 9.30 Uhr

Aufgabe 1. *(Abbildungen in Vektorräume)* Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und M eine Menge. Betrachten Sie auf der Menge $W = \mathrm{Abb}(M, V)$ der Abbildungen von M nach V die Verknüpfungen

$$\begin{aligned} +\colon W \times W &\to W, \qquad (f,g) \mapsto f+g, \\ \cdot\colon K \times W &\to W, \qquad (\lambda, f) \mapsto \lambda f, \end{aligned}$$

wobei für $f, g \in W$, $\lambda \in K$ die Abbildungen $f+g$ und λf durch

$$\begin{aligned} f+g\colon M &\to V, \qquad m \mapsto f(m)+g(m), \\ \lambda f\colon M &\to V, \qquad m \mapsto \lambda \cdot f(m) \end{aligned}$$

gegeben sind. Zeigen Sie, dass W mit diesen Verknüpfungen ein K-Vektorraum ist. (Dies verallgemeinert Beispiel 8.2.(d) aus der Vorlesung.)

Aufgabe 2. *(Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$)* Entscheiden Sie (jeweils mit Begründung), ob folgende Teilmengen Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ sind:

(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$,

(b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$,

(c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_2 x_3 = 0\}$,

(d) $\{(x_1 + x_2, 5x_1 - x_2 + 3x_3, 2x_1 - 7x_2 + x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 3. *(Untervektorräume von $\mathrm{Abb}(M, K)$)* Es seien K ein Körper und M eine Menge. Wir betrachten den K-Vektorraum $V = \mathrm{Abb}(M, K)$ der Abbildungen von M nach K. Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen Untervektorräume von V sind:

(a) für eine Teilmenge $N \subset M$ die Teilmenge

$$\{f \in \mathrm{Abb}(M, K) \mid \ f(m) = 0 \text{ für alle } m \in M \setminus N\},$$

(b) für eine endliche Teilmenge $N \subset M$ und eine Abbildung $g\colon N \to K$ die Teilmenge

$$\{f \in \mathrm{Abb}(M, K) \mid \sum_{n \in N} g(n) f(n) = 0.\}$$

(c) die Teilmenge

$$\{f \in \mathrm{Abb}(M, K) \mid \ f(m) = 0 \text{ für fast alle } m \in M\},$$

Aufgabe 4. *(Lineare Hülle)* Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, I eine Menge, $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren in V und $\phi\colon J \to I$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Lin}((v_{\phi(j)})_{j\in J}) \subseteq \operatorname{Lin}((v_i)_{i\in I}),$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $v_i \in \operatorname{Lin}((v_{\phi(j)})_{j\in J})$ für jedes $i \in I \setminus \phi(J)$. Folgern Sie daraus:

(a) Für jede Teilmenge $J \subseteq I$ gilt $\operatorname{Lin}((v_j)_{j\in J}) \subseteq \operatorname{Lin}((v_i)_{i\in I})$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jede Permutation $\sigma \in S_n$ und jede Familie $(v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren in V gilt $\operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_n) = \operatorname{Lin}(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$.

(c) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$. Für jede Familie von Vektoren $(v_1, \ldots, v_n)$ in V und jede Familie von Vektoren $(v_{n+1}, \ldots, v_m)$ in $\operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_n)$ gilt $\operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_n) = \operatorname{Lin}(v_1, \ldots, v_m)$.

(Diese Folgerungen lassen sich auch schnell direkt beweisen. Sie sollen aber erkennen, dass es sich um Spezialfälle der obigen allgemeinen Aussage handelt.)

Zusatzaufgabe 5. *(Verkleben von Vektorraumstrukturen)* Zeigen Sie: Sei K ein Körper. Sei ferner I eine Menge mit einer Halbordnung $\leq$, V eine Menge und $(V_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von V, so dass Folgendes gilt:

(a) $V = \bigcup_{i\in I} V_i$.

(b) Für alle $i, j \in I$ gibt es ein $k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$.

(c) Für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$ gilt $V_i \subseteq V_j$.

(d) Für jedes $i \in I$ ist auf V_i eine Addition und eine Skalarmultiplikation definiert, mit der V_i zu einem K-Vektorraum wird, so dass für $i, j \in I$ mit $i \leq j$ der Vektorraum V_i ein Untervektorraum von V_j ist.

Dann existiert auf der Menge V genau eine K-Vektorraum-Struktur, so dass für jedes $i \in I$ der K-Vektorraum V_i ein Untervektorraum von V ist.