

Experimentalphysik I (H.-C. Schulz-Coulon)

Robin Heinemann

28. Juni 2017

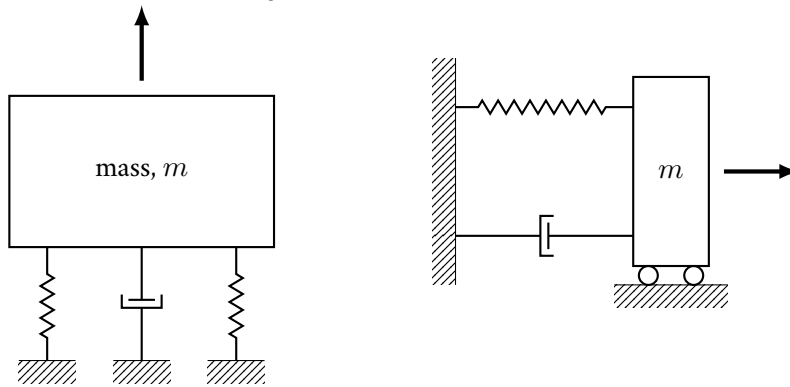
Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
1.1	Eigenschaften der Physik	4
1.1.1	Beispiel	5
1.2	Maßeinheiten	5
1.2.1	Basisgrößen	5
1.2.2	Weitere Größen	5
2	Mechanik	6
2.1	Kinematik des Massenpunktes	6
2.1.1	Eindimensionale Bewegung	6
2.1.2	Bewegung im Raum	7
2.2	Newtonsche Dynamik	11
2.2.1	Kraft und Impuls	11
3	Verschiedene Kräfte und Kraftgesetze	14
3.1	Gravitation (TODO Skizze)	14
3.1.1	Anziehungskraft zweier Massen	14
3.1.2	Erdbeschleunigung	14
3.2	Federkraft	15
3.3	Maxwell'sches Rad	15
3.3.1	Ruhezustand	15
3.3.2	Frage	15
3.3.3	Messung:	15
3.3.4	Auswertung	15
3.4	Rotierende Kette	15
3.5	Normalkraft	16
3.6	Schiefe Ebene	16
3.7	Reibungskräfte	16
3.7.1	Experiment: Bewegung einer Masse	16
3.7.2	Experiment: Tribologische Messung	17

3.8	Tribologische Reibungslehre	17
3.9	Mikroskopisches Modell	17
3.10	Schiefe Ebene: Messung der Reibungskraft (Skizze)	18
3.11	Zentripetalkraft	18
3.11.1	Beispiel 1 Rotierendes Pendel	18
3.11.2	Beispiel 2 Geostationärer Satellit	19
4	Arbeit, Energie, Leistung	19
4.1	Arbeit	19
4.1.1	Beispiel	19
4.1.2	Beispiel Kreisbahn (\Rightarrow Gravitation)	20
4.2	kinetische Energie	20
4.3	Potentielle Energie	20
4.3.1	Ball als Feder am Auftreffpunkt	20
4.4	Bemerkung	21
4.5	Umwandlung von Energie	21
4.6	Energie	21
4.7	Leistung	21
4.8	Konservative Kräfte	22
4.8.1	Definition	22
4.9	Kraftfelder und Potential	22
4.9.1	Definition Kraftfeld	22
4.9.2	Beispiel	22
4.9.3	Feldlinien:	23
4.9.4	konservative Kraftfelder	23
4.9.5	Potential und Gravitationsfeld	25
5	Erhaltungssätze	25
5.1	Energieerhaltung	25
5.1.1	Doppelbahn	26
5.1.2	Energieerhaltungssatz der Newtonschen Mechanik	26
5.1.3	Energiediagramme	26
6	Systeme von Massenpunkten	27
6.1	Beschreibung eines Systems von Massenpunkten	27
6.1.1	Bewegung des Schwerpunktes	28
6.1.2	Raketenantrieb	29
7	Stöße	31
7.1	Kollinearer elastischer Stoß	31
7.2	Betrachtung im Schwerpunktsystem	32
7.2.1	Nicht-zentraler, elastischer Stoß im Schwerpunktsystem	33
7.3	Inelastische Stöße	33

8	Mechanik des starren Körper	34
8.1	Bewegung des starren Körpers	35
8.2	Drehmoment und Kräftepaare	35
8.2.1	Drehmoment und Schwerpunkt	36
8.2.2	Kräftepaare	37
8.3	Statisches Gleichgewicht	37
8.4	Rotation und Trägheitsmoment	38
8.5	Berechnung von Trägheitsmoment	39
8.6	Steinersche Satz	40
8.7	Drehimpuls	43
8.8	Trägheitstensor, freie Rotation und Kreisel	44
8.8.1	Kreisel	45
9	Mechanik deformierbarer Körper	45
9.1	Atomares Modell	46
9.2	Feste Körper.	46
9.3	Scherung und Torsion	48
9.4	Ruhende Flüssigkeiten-Hydrostatik	49
9.4.1	Auftrieb	51
9.4.2	Oberflächenspannung	52
9.5	Gase	52
9.5.1	Barometrische Höhenformel:	52
9.6	Strömende Flüssigkeiten und Gase	53
9.6.1	Kontinuitätsgleichung:	54
9.6.2	Reibung in Flüssigkeiten	54
9.6.3	Strömung durch ein Rohr mit kreisförmigen Querschnitt (Hagen-Poiseuille)	55
9.6.4	Strömungswiderstand von glatten Körper	56
10	Wärmelehre	56
10.1	Temperaturbegriff und Wärmeausdehnung	57
10.1.1	Volumenausdehnung von Gasen	57
10.1.2	Volumen und Längenausdehnung fester und flüssiger Stoffe	58
10.1.3	Anomalie des Wassers	59
10.2	Zustandsgleichung idealer Gase	59
10.3	kinetische Gastheorie	61
10.4	Wärme, Wärmekapazität und latente Wärme	63
10.5	Arbeit und Wärme	65
10.6	erster Hauptsatz der Wärmelehre	65
10.7	Volumenarbeit und PV-Diagramme idealer Gase	65
10.8	Zusammenfassung: Spezielle Zustandsänderung idealer Gase	68
10.9	Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre	69
10.9.1	Kreisprozesse:	69
10.9.2	Carnot-Prozess	70
10.9.3	Ottomotor	71

10.9.4 Stirling-Motor	72
10.9.5 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik	72
10.10 Entropie	73
10.11 Thermodynamische Temperaturskala	76
10.11.1 Temperaturskala (via Carnot-Wirkungsgrad)	76
10.11.2 Dritter Hauptsatz	77
10.12 Zusammenfassung thermodynamische Gesetze	77
10.13 Thermodynamik realer Gase und Flüssigkeiten.	77
10.13.1 Ausdehnung	77
10.13.2 Wechselwirkung	78
11 Transportprozesse	78
11.1 Wärmetransport	79
11.2 Diffusion	80
11.3 Wärmestrahlung	81



1 Einleitung

1.1 Eigenschaften der Physik

Physik ist nicht axiomatisch!

- Nicht alle Gesetze der Natur sind bekannt.
- Die bekannten Naturgesetze sind nicht unumstößlich
- unfertig
- empirisch
- quantitativ
- experimentell
- überprüfbar

- braucht Mathematik
- Gefühl für Größenordnungen und rationale Zusammenhänge

1.1.1 Beispiel

Fermi-Probleme:

- Anzahl der Klavierstimmer in Chicago?
- Anzahl der Autos in einem 10km Stau?
- Anzahl von Fischen im Ozean

1.2 Maßeinheiten

Internationales Einheitensystem (SI)

1.2.1 Basisgrößen

Größe	Einheit	Symbol
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunden	s

Meter Strecke, die das Licht im Vakuum während der Dauer von $\frac{1}{299792458}$ s durchläuft.

Sekunde Das 9 192 631 770 -fache der Periodendauer der am Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung.

Kilogramm Das Kilogramm ist die Einheit der Masse, es ist gleich der Masse des internationalen Kilogrammprototyps (ist scheiße).

Avogadroprojekt

$$N_A = \frac{MVn}{m}$$

N_A : Avogardokonstante ($N_A = 6.022\,141\,5 \times 10^{23}$)

1.2.2 Weitere Größen

Größe	Einheit	Symbol
Strom	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Lichtstärke	Candla	cd

2 Mechanik

Kinematik: Beschreibung der Bewegung Dynamik: Ursache der Bewegung

2.1 Kinematik des Massenpunktes

2.1.1 Eindimensionale Bewegung

TODO Skizze 1 $x_1, t_1 \longrightarrow x_2, t_2$ Geschwindigkeit

$$v = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad [v] = \text{m s}^{-1} \text{ abgeleitete GröÙe}$$

Momentangeschwindigkeit

$$v := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

Beschleunigung

$$a := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x} \quad [a] = \text{m s}^{-2}$$

Freier Fall $a = \text{const.}$ (Behauptung)

$$a = \ddot{x} = \text{const} = \dot{v}$$

→ Integration:

$$v(t) = \int_0^t a dt + v_0 = at + v_0$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t) dt = x_0 + \int_0^t (at + v_0) dt = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0$$

Bei unserem Fallturm

$$x(t) = \frac{1}{2} at^2 \rightarrow a = \frac{2x}{t^2}$$

$x[\text{m}]$	$t[\text{ms}]$	$\frac{2x}{t^2} [\text{m s}^{-2}]$
0.45	304.1	9.7321696
0.9	429.4	9.7622163
1.35	525.5	9.7772861
1.80	606.8	9.7771293

$$x(t) = \frac{1}{2} gt^2, \quad g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$$

Die Erdbeschleunigung g ist für alle Körper gleich (Naturgesetz).

2.1.2 Bewegung im Raum

TODO Skizze 2 Ortsvektor:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = (x(t) \quad y(t) \quad z(t))^T$$

Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\frac{\Delta \vec{r}_{12}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t} = \vec{v}_D$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t) \quad \dot{y}(t) \quad \dot{z}(t))^T = (v_x \quad v_y \quad v_z)^T$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{x} \quad \ddot{y} \quad \ddot{z})^T = (a_x \quad a_y \quad a_z)^T$$

→ Superpositionsprinzip:

Kinematik kann für jede einzelne (Orts)Komponente einzeln betrachtet werden.

$$\vec{a}_0 = \text{const}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t^2 - t_0^2) = \begin{pmatrix} x_0 + v_{x,0}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_{x,0}(t^2 - t_0^2) \\ y_0 + v_{y,0}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_{y,0}(t^2 - t_0^2) \\ z_0 + v_{z,0}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_{z,0}(t^2 - t_0^2) \end{pmatrix}$$

Horizontaler Wurf

TODO Skizze 3

$$t_0 = 0$$

$$\vec{a}_0 = (0 \quad 0 \quad -g)^T$$

$$\vec{v}_0 = (v_{x,0} \quad 0 \quad 0)^T$$

$$\vec{x}_0 = (0 \quad 0 \quad 0)^T$$

$$\vec{r}(t) = (v_{x,0}t \quad 0 \quad \frac{1}{2}gt^2)^T$$

Schiefer Wurf

$$\vec{a}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{x,0} \\ 0 \\ v_{z,0} \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{x,0}t \\ 0 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z,0}t + z_0 \end{pmatrix}$$

$$z(x) = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_{x,0}^2} x^2 + \frac{v_{z,0}}{v_{x,0}} x + z_0$$

Nachtrag

$$a = \dot{v}$$

$$\int_0^t \dot{v} dt' = \int_0^t a dt'$$

$$v \Big|_0^t = at' \Big|_0^t$$

$$v(t) - \underbrace{v(0)}_{v_0} = at$$

$$v(t) = at + v_0$$

analog:

$$x(t) = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0$$

TODO Skizze Wurfparabel

$$\tan \varphi = \frac{v_{z,0}}{v_{x,0}}$$

$$v_0^2 = v_{x,0}^2 + v_{z,0}^2$$

Scheitel:

$$Z'(x_s) = 0$$

$$x_s = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\varphi$$

Wurfweite:

$$Z(x_w) = 0$$

$$x_w = \frac{v_0^2}{2g} \sin 2\varphi \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gz_0}{v_0^2 \sin^2 \varphi}} \right)$$

Optimaler Winkel: φ_{opt}, x_w max.

$$z_0 = 0 \implies \sin 2\varphi = 1 \rightarrow \varphi = 45^\circ$$

$$z_0 \neq 0 \implies \sin \varphi_{opt} = \left(2 + \frac{2gz_0}{v_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Gleichförmige Kreisbewegung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

mit $\varphi = \varphi(t)$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\dot{\varphi} \sin \varphi \\ R\dot{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Gleichförmige Kreisbewegung: $\dot{\varphi} = \text{const}$ Definition Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad [w] = \text{rad s}^{-1} = 1/\text{s}$$

Für $\omega = \text{const.}$:

$$\vec{r} = R \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{r}(t)| = r = \text{const}$$

$$\vec{v} = R\omega \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{v}(t)| = v = \text{const}$$

$$\vec{v} \perp \vec{r} \iff \vec{v} \cdot \vec{r} = 0$$

TODO Skizze Kreisbewegung**Mitbewegtes Koordinatensystem**

$$\vec{r}(t) = R\vec{e}_R \quad \vec{e}_R = \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = R\omega\vec{e}_t \quad \vec{e}_t = \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{t} \neq \text{const} \text{ das heißt } \vec{a}(t) \neq 0$$

Kreisbeschleunigung

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \cos \varphi \\ -R\omega^2 \sin \varphi \end{pmatrix} = -R\omega^2 \vec{e}_R \implies \vec{a} \parallel \vec{r}$$

$$|\vec{a}(t)| = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \neq 0$$

Zentripetalbeschleunigung Zeigt in Richtung des Ursprungs.

$$\vec{a}_{zp} = -R\omega^2 \vec{e}_R$$

Allgemein

$$\vec{\omega}$$

Räumliche Lage der Bewegungsebene

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad v = \omega r$$

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

1. TODO Skizze omega**Allgemeine krummlinige Bewegung**

$$\vec{v} = v \vec{e}_t$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d(v \vec{e}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{e}_t + v \frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

$$\vec{e}_t = \cos \rho \vec{e}_x + \sin \rho \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_n = -\sin \rho \vec{e}_x + \cos \rho \vec{e}_y$$

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \dot{\rho} - \sin \rho \vec{e}_x + \cos \rho \vec{e}_y = \dot{\rho} \vec{e}_n$$

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n$$

TODO Skizze**Relativbewegung**

- S -Laborsystem
- S' -Bewegtes System
- $\vec{u} = (u, 0, 0) = \text{const}$ Geschwindigkeit von S' im System S
- Punkt $P = (x, y, z)$ in S
- Punkt $P' = (x', y', z')$ in S'
- Zeitpunkt $t = 0$: $S = S', P = P'$

TODO Skizze Bewegtes Bezugssystem

Galilei-Transformation

1. Eindimensional

$$x' = x - ut$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$v' = v - u$$

$$t' = t$$

2. Dreidimensional

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$$

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

2.2 Newtonsche Dynamik

Warum bewegen sich Körper?

Newton 1686: Ursache von Bewegungsänderungen sind Kräfte. Newtonsche Gesetze (Axiome)

1. Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, sofern er nicht durch Kräfte gezwungen wird diesen Bewegungszustand zu verlassen
2. Die Änderung einer Bewegung wird durch Einwirken einer Kraft verursacht. Sie geschieht in Richtung der Kraft und ist proportional zu Größe der Kraft
3. Übt ein Körper 1 auf einen Körper 2 die Kraft F_{12} , so reagiert Körper 2 auf den Körper 1 mit der Gegenkraft F_{21} und es gilt $F_{21} = -F_{12}$ (actio = reactio)

2.2.1 Kraft und Impuls

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

Superposition von Kräften (Zusatz zu den Newtonschen Gesetzen (Korollar)):

$$\vec{F}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

TODO Skizze Addition von Kräften

Grundkräfte der Natur

- Elektromagnetische Kraft
- Starke Kraft
- Schwache Kraft
- Gravitation

Impuls

$$\vec{P} = m \vec{v} \quad [\vec{P}] = \text{kg m s}^{-1}$$

Kraft

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \dot{\vec{P}} = \frac{d}{dt}(m \vec{v})$$

$m = \text{const.}$:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \dot{\vec{v}} = m \ddot{\vec{x}} = m \vec{a}$$

Grundgesetz der Dynamik

$$\vec{F} = \dot{\vec{P}} \text{ beziehungsweise } \vec{F} = m \vec{a}$$

Trägheitsprinzip (Impulserhaltung)

$$\vec{P} = m \vec{v} = \text{const}, \quad \dot{\vec{P}} = 0 \text{ für } \vec{F} = 0$$

Experiment

$$\vec{F}_G = \underbrace{m \vec{g}}_{\text{Kraft}} = \underbrace{(m + M)}_{\text{Trgheit}} \vec{a} = m_{\text{ges}} \vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{m}{m + M} \vec{g} \xLeftrightarrow{d=1} a = \frac{m}{m + M} g = \frac{m}{m_{\text{ges}}} g$$

Erwartung: $a \sim \frac{m}{m_{\text{ges}}}$, $a = \frac{2\Delta s}{\Delta t^2}$, weil $\Delta s = \frac{1}{2} a \Delta t^2$

Messung:

$m[\text{g}]$	$M[\text{g}]$	$m_{\text{ges}}[\text{g}]$	$\frac{m_{\text{ges}}}{m}$	$\Delta s[\text{mm}]$	$\Delta t[\text{s}]$	$a[\text{m s}^{-1}]$
10	470	480	48	800	2.75	0.21157025
40	440	480	12	800	1.40	0.81632653
10	1910	1920	192	800	5.55	0.051943836
40	1880	1920	48	800	2.79	0.20554721

TODO Skizze

Trägheitsprinzip - „revisited“ **Definition:** Ein Bezugssystem in dem das Trägheitsprinzip gilt nennt man ein Inertialsystem.

In einem beschleunigten Bezugssystem gilt das Trägheitsprinzip nicht. Beschleunigte Systeme \neq Inertialsysteme. Das Trägheitsprinzip ist Galilei-invariant.

TODO Skizze whatever

Trägheitsprinzip: [moderne Formulierung]: Es gibt Inertialsysteme, das heißt Koordinatensysteme in denen ein kräftefreier Körper im Zustand der Ruhe oder der geradlinig gleichförmigen Bewegung verbleibt.

Actio gleich Reactio

$$\underbrace{\vec{F}_{12}}_{\text{Kraft}} = - \underbrace{\vec{F}_{21}}_{\text{Gegenkraft}}$$

TODO Skizze von Körpern**TODO (Skizze) Experiment**

1. Erwartung:

$$v_1 = v_2 \rightarrow a_1 = a_2 \rightarrow F_1 = F_2 \checkmark$$

Nicht trivialer Fall:

Kraftstoß:

Magnetische Kraft: $F_{\text{mag}} \sim \frac{1}{r^2}$

$$v_{1,2} = \int_0^{t_{1,2}} a(t) dt = a_{\text{eff}} T$$

$$\rightarrow F_1(t) = F_2(t) \rightarrow v_1 = v_2$$

Experiment 2

$$m_1 = 241.8 \text{ g} \wedge m_2 = 341.8 \text{ g} \implies \frac{m_2}{m_1} \approx 1.5$$

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{t_2}{t_1} = \frac{71}{48} \approx 1.5$$

$$a \sim v, F = ma \rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{F_1}{F_2}$$

$$1 = \frac{F_1}{F_2} \implies F_1 = F_2$$

Beispiele

- Kraft und Gegenkraft (TODO Skizze)
- Flaschenzug, Seilkräfte (TODO Skizze)

3 Verschiedene Kräfte und Kraftgesetze**3.1 Gravitation (TODO Skizze)**

Experimenteller Nachweis im Labor mit Torsionsdrehungen (erstmal Cavendish)

3.1.1 Anziehungskraft zweier Massen

m_1, m_2 Massen, Newtonsches Gravitationsgesetz:

$$\vec{F}_G = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$$

mit $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

3.1.2 Erdbeschleunigung

$$F_G = G \frac{m M_E}{(r_E + h)^2} \approx G \frac{m M_E}{r^2} = mg \implies g \approx 9.81 \text{ m s}^{-2}$$

(mittleres g)

Abweichungen

- komplizierte Massenverteilung, Strukturen
- Abflachung der Erde

Messung von g

- Gravimeter (Federgravimeter, Pendelgravimeter), relative Messung
- Absolutgravimeter (freier Fall, supraleitende Gravimeter)

Träge und schwere Masse

$$F = m_T a \rightarrow \text{träge Masse}$$

$$F = m_S G \frac{M_E}{r_E^2} \rightarrow \text{schwere Masse}$$

Äquivalenzprinzip $m_S \sim m_T$ beziehungsweise $m_S = m_T$

3.2 Federkraft

Hook'sches Gesetz

$$F_x = F_x(\Delta x) = -k_F \Delta x$$

Beliebige Auslenkungsfunktion ($F_x(\Delta x = x - x_0)$)

$$F_x(x) = F_x(x_0) + \frac{dF_x(x)}{dx}(x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f_x(x)}{dx^2}(x - x_0) + \dots$$

→ unabhängig von konkreter Zusammenhang $f_x(x)$ gilt kleine Änderungen

3.3 Maxwell'sches Rad

3.3.1 Ruhezustand

Waage misst Gesamtmasse M austarierter

3.3.2 Frage

Was passiert, wenn sich das Rad bewegt??

3.3.3 Messung:

1. Rad fixiert $\rightarrow m = 0$
2. Rad läuft $\rightarrow \Delta m = -0.7g < 0$

3.3.4 Auswertung

Anwendung 3. Newtonsches Gesetz: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m \vec{a}$ beziehungsweise $F_2 = -F_1 + m \vec{a}$

1. $\vec{a} = 0$: $|\vec{F}_2| = |\vec{F}_1| \rightarrow |\vec{F}_2| = 0, 0m = 0$ (Waage)
2. $\vec{a} > 0$: $|\vec{F}_2| < |\vec{F}_1| \rightarrow$ Waage mit $|\vec{F}_2| < mg$ $\Delta m < 0$

3.4 Rotierende Kette

Winkelelement $\Delta\alpha$. Radialkraft \vec{F}_r ist resultierende Kraft der vom abgeschnittenen Teil der Kette wirkende Kräfte $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$

(\vec{F}_G vernachlässigbar klein bei hoher Umdrehung und somit großen $|F_1|, |F_2|$)

Es gilt:

$$\vec{a}_{zp} = -\frac{v^2}{R} \vec{e}_r \quad \vec{v} = R\omega \vec{e}_t$$

$$\vec{F}_r = \Delta m \vec{a}_{zp} = -\Delta m \frac{v^2}{R} \vec{e}_r$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_r &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ F_r &\approx \Delta\alpha F = F \frac{\Delta L}{R} \\ F &= F_r \frac{R}{\Delta L} = \Delta m \frac{v^2}{R} \frac{R}{\Delta L} = \frac{m}{2\pi R} v^2\end{aligned}$$

Die Kraft $F = \frac{m}{2\pi R} v^2$ spannt die Kette.

3.5 Normalkraft

- (Skizze) Normalkraft \vec{F}_N = Kraft senkrecht zur Kontaktfläche. Wird kompensiert durch \vec{F}'_N
= Kraft mit der die Unterlage auf Körper wirkt (Zwangskräfte)

3.6 Schiefe Ebene

- Gewichtskraft: $\vec{F}_G = m\vec{g}$
- Normalkraft: $\vec{F}_N = mg \cos \alpha \vec{e}_y$
- Hangabtriebskraft: $\vec{F}_H = mg \sin \alpha \vec{e}_x$

Bewegungsgleichung

$$F_H = m\ddot{x} \rightarrow x_x = g \sin \alpha = \text{const.}$$

3.7 Reibungskräfte

- im täglichen Leben über all präsent
- spielt eine wichtige Rolle Technik

→ Tribologie = Reibungslehre

- Reibung hängt stark von der Oberfläche ab

3.7.1 Experiment: Bewegung einer Masse

- Gewicht ruhte: $\vec{F}_Z = -\vec{F}_R \rightarrow a = 0, v = 0$
- Gewicht setzt sich in Bewegung: $|\vec{F}_Z| > |\vec{F}_R| \rightarrow a > 0, v$ steigt an
- Gewicht gleitet: $\vec{F}_Z = -\vec{F}_R \rightarrow a = 0, v = \text{const.} \neq 0$ mit $\vec{v} = \text{const}$

Reibungskraft nimmt ab, sobald das Gewicht bewegt wird.

- Haftreibung F_H
Schwellenwert für Zugkraft um Körper zu bewegen

- Gleitreibung F_G
Reibungskraft bei bewegtem Körper



3.7.2 Experiment: Tribologische Messung

Messung der Zugkraft bei der sich der Holzblock nach kleiner Störung in Richtung Rolle bewegt:
 $F_R = F_Z$

Beobachtung

- F_R hängt nicht von der Oberfläche ab.
- F_R hängt von dem Gewicht des Blocks ab
- F_R ist materialabhängig

3.8 Tribologische Reibungslehre

$$F_G = \mu_G F_N \quad (\mu_G = \text{Gleitreibungskraft})$$

$$F_H = \mu_H F_N \quad (\mu_H = \text{Haftreibungskraft})$$

$$\mu_H > \mu_G$$

3.9 Mikroskopisches Modell

Verantwortlich sind elektrische Kräfte zwischen Atomen und Molekülen der beieinander liegenden Oberflächen: Van-der-Waals-Kräfte

- Stärke ergibt sich aus effektivem Kontakt.

Relative mikroskopische Reibungsfläche: $\sum \frac{a_i}{A} \sim \frac{F_N}{A} \leftarrow \text{Druck}$

- a_1 = effektive Kontaktfläche eines Einzelatoms

Also:

$$F_R \sim \sum \frac{a_i}{A} \sim F_N$$

- Haftreibung: Verzahnung der Oberflächen mit minimalen Abstand
- Gleitreibung: Minimaler Abstand wird auf Grund der Bewegung nicht erreicht

3.10 Schiefe Ebene: Messung der Reibungskraft (Skizze)

Kräftegleichgewicht: $F_H = F_R$

$$F_H = mg \sin \alpha, F_N = mg \cos \alpha$$

Grenzwinkel: $F_R = mg \sin \alpha = \mu_R mg \cos \alpha \implies \mu_R = \tan \alpha$

$$\alpha = 15^\circ \rightarrow \tan \alpha = 0.27, \mu_G = 0.27$$

3.11 Zentripetalkraft

$$\vec{a}_{Zp} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad \vec{F}_{Zp} = m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$a_{Zp} = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} \quad F_{Zp} = m \omega^2 r = m \frac{v^2}{r}$$

3.11.1 Beispiel 1 Rotierendes Pendel

$$\vec{F}_{Zp} := \vec{F}_G + \vec{F}_Z$$

$$F_G = mg = F_Z \cos \theta$$

$$F_{Zp} = F_Z \sin \theta$$

$$F_{Zp} = mg \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = mg \tan \theta, \quad a_{Zp} = g \tan \theta$$

$$a_{Zp} = \omega^2 r \implies \omega = \sqrt{\frac{g}{\tan \theta}}$$

- θ steigt mit ω an
- $\theta(\omega)$ ist unabhängig von Masse

3.11.2 Beispiel 2 Geostationärer Satellit

Zentripetal = Gravitationskraft

$$m\omega^2 R = G \frac{mM_E}{R^2}$$

Geostationär: $\omega = \frac{2\pi}{24\text{h}} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600\text{s}} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$

$$R^3 = \frac{GM_E}{\omega^2} \rightarrow R = 42\,312 \text{ km}$$

Abstand von der Erd-Oberfläche:

$$\tilde{R} = R - R_E = 35\,930 \text{ km}$$

- $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^2$
- $M_E = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$
- $R_E = 6373 \text{ km}$

4 Arbeit, Energie, Leistung

4.1 Arbeit

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \vec{x} = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$$

$$\begin{aligned} dW &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \Delta W = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \vec{F} \Delta \vec{r} = \vec{F} d\vec{r} \\ &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \end{aligned}$$

Gesamtarbeit für Verschiebung von \vec{r}_1 nach \vec{r}_2

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}$$

$$[W] = \text{N m} = \text{kg m s}^{-2} = \text{J}$$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F_x dx + \int_{r_1}^{r_2} F_y dy + \int_{r_1}^{r_2} F_z dz = \int_{s_1=0}^{s_2} \vec{F}(s) \frac{d\vec{r}}{ds} ds$$

$\vec{r}(s)$ parametrisiere Geschwindigkeit.

4.1.1 Beispiel

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} \Delta x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{F} = \begin{pmatrix} mg \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$W = \int_{(0)}^{(1)} mg dx + \int 0 dy + \int 0 dz = mg \Delta x$$

4.1.2 Beispiel Kreisbahn (\Rightarrow Gravitation)

$$W = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = 0$$

4.2 kinetische Energie

$$k = \frac{1}{2}gt^2$$

$$v = gt$$

$$v^2 = g^2t^2$$

$$v^2 = gh$$

$$W = \int_0^h F_G dx = F_G \int_0^h dx = F_G h = mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

- Kinetische Energie: E_{kin}

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 \quad [E_{kin} = \text{kg m s}^{-2} = \text{J}]$$

- Die Zunahme (beziehungsweise Abnahme) der kinetischen Energie eines Körpers ist gleich der ihm zugeführten (beziehungsweise der von ihm gelieferten) Arbeit (keine Reibung)

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m \frac{d\vec{r}}{dt} d\vec{v} \quad (1)$$

$$= \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m \vec{v} d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (2)$$

4.3 Potentielle Energie

$$W = \int_h^0 F_g dx = \int_h^0 -gmdx = mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

4.3.1 Ball als Feder am Auftreffpunkt

$$F = k\xi$$

$$W = \int_0^\xi k\xi' d\xi' = \frac{1}{2}k\xi^2$$

4.4 Bemerkung

Arbeit $W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}$ gilt immer, Symbol für Linienintegral meist weggelassen.

- kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$
- potentielle Energie
 - $E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2$ (Verformen)
 - $E_{pot} = mgh$ (Lage)

4.5 Umwandlung von Energie

$$dE_{kin} = F dx = -dE_{pot}$$

Gilt nur für konservative Kräfte!

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{E_1}^{E_2} dE_{kin} = E_{kin}(\vec{r}_2) - E_{kin}(\vec{r}_1) \quad (3)$$

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = - \int_{E_1}^{E_2} dE_{pot} = E_{pot}(\vec{r}_1) - E_{pot}(\vec{r}_2) \quad (4)$$

1. Für

- $W > 0$: E_{kin} nimmt zu (Arbeit von System am Objekt verrichtet)
- $W < 0$: E_{kin} nimmt ab

2. Für

- $W > 0$: E_{pot} nimmt ab
- $W < 0$: E_{pot} nimmt zu

4.6 Energie

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} \quad (5)$$

$$= E_{kin}(\vec{r}_2) - E_{kin}(\vec{r}_1) \quad (6)$$

$$= E_{pot}(\vec{r}_2) - E_{pot}(\vec{r}_1) \quad (7)$$

Die unteren beiden Gleichungen gelten nur für konservative Kräfte

4.7 Leistung

$$\vec{F} = \text{const}$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{c}$$

$$[P] = \text{N m s}^{-1} = \text{J s}^{-1} = \text{W} = \text{Watt}$$

4.8 Konservative Kräfte

$$W_1 = \int_{1 \text{ Weg1}}^2 \vec{F} d\vec{r} = E_{pot}(1) - E_{pot}(2) \quad (8)$$

$$W_2 = \int_{1 \text{ Weg2}}^2 \vec{F} d\vec{r} = E_{pot}(1) - E_{pot}(2) \quad (9)$$

$$(10)$$

Geschlossener Weg: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

$$W = \oint_c \vec{F} d\vec{r} = W_1 - W_2 = 0$$

4.8.1 Definition

Kräfte, für die die Arbeit unabhängig vom Weg ist nennt man konservativ. Für konservative Kräfte gilt:

$$W = \oint \vec{F} d\vec{s} = 0$$

4.9 Kraftfelder und Potential

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}$$

4.9.1 Definition Kraftfeld

Eindeutige Zuordnung einer Kraft zu jedem Punkt im Raum:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z))$$

4.9.2 Beispiel

Gravitationskraft:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r \quad (11)$$

$$= f(r) \vec{e}_r \quad (12)$$

Kugelsymmetrisch, Zentralfeld

TODO Skizze Vektorfeld

TODO Skizze Feldlinien

4.9.3 Feldlinien:

- Feldlinien sind immer tangential zur Krafrichtung
- Feldliniendichte ist proportional zum Betrag der Kraft
- Feldlinien schneiden sich nie

4.9.4 konservative Kraftfelder

Kraftfelder, die konservative Kräfte beschreiben nennt man konservative Kraftfelder Für konservative Kraftfelder gilt

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = E_{pot}(1) - E_{pot}(2)$$

- jedem Ort im Raum kann ein Skalar, die potentielle Energie zugeordnet werden $\implies E_{pot} = E_{pot}(x, y, z)$ Skalar!
- wird bei der Verschiebung eines Körpers von Ort 1 nach Ort 2 Arbeit gegen eine konservative Kraft geleistet, so erhöht sich die potentielle Energie, das heißt $E_{pot}(2) > E_{pot}(1)$.
- Der Nullpunkt $E_{pot}(\vec{r}) = 0$ der potentiellen Energie ist frei wählbar, da allein die Differenz der potentiellen Energie an zwei Punkten relevant ist.

homogenes Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{R}) = (0, 0, F_z)$$

- Weg 1:

$$W_1 = \int_{\text{Weg1}} \vec{F} d\vec{R} = \int_{z_1}^z F_z dz = F_z(z_2 - z_1)$$

- Weg 2:

$$W_2 = \int_{\text{Weg2}} \vec{F} d\vec{R} = \int_{z_1}^z F_z dz = F_z(z_2 - z_1)$$

TODO Skizze

Zentralkraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \vec{e}_r$$

$$W = \oint \vec{F} d\vec{r} \tag{13}$$

$$= \int_1^2 f(r) dr + \int_2^3 \vec{F} d\vec{r} + \int_3^4 f(r) dr + \int_4^1 \vec{F} d\vec{r} \tag{14}$$

$$= 0 \tag{15}$$

Gravitationsfeld

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{R} \quad (16)$$

$$= \int_A^B -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r d\vec{r} \quad (17)$$

$$= \int_A^B -G \frac{mM}{r^2} dr \quad (18)$$

$$= \left[G \frac{mM}{r + \xi} \right]_{r_A}^{r_B} = E_{pot}(A) - E_{pot}(B) \quad (19)$$

$$\Rightarrow E_{pot}(A) = -G \frac{mM}{r_A} + \xi$$

$$\Rightarrow E_{pot}(B) = -G \frac{mM}{r_B} + \xi = E_{pot}(C)$$

Potentielle Energie des Gravitationsfeld:

$$E_{pot}^{grav} = -G \frac{mM}{r}$$

d = 1 Zusammenhang zwischen konservativen Kraftfeld und potentieller Energie:

$$E_{pot} = - \int F dx$$

$$dE_{pot} = -F dx$$

$$-\frac{dE_{pot}}{dx} = F$$

d = 3 Zusammenhang zwischen konservativen Kraftfeld und potentieller Energie:

$$E_{pot} = - \int \vec{F} d\vec{r} \rightarrow \vec{F} = - \frac{dE_{pot}}{d\vec{r}}$$

Gesucht: Ableitung eines Vektors nach einem Skalar. Betrachte:

$$\Delta E_{pot} = -\vec{F} \Delta \vec{r} = -(F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z)$$

$$\Delta E_{pot} = \frac{\partial E_{pot}}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial E_{pot}}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial E_{pot}}{\partial z} \Delta z$$

$$\text{Vergleich : } \vec{F}(x, y, z) = -\left(\frac{\partial E_{pot}}{\partial x} \Delta x, \frac{\partial E_{pot}}{\partial y} \Delta y, \frac{\partial E_{pot}}{\partial z} \Delta z\right) \quad (20)$$

$$= -\text{grad } E_{pot} \quad (21)$$

Gilt nur für konservative Kräfte

Gradient Der Gradient eines Skalarfeldes ist ein Vektorfeld, dass in jedem Punkt in die Richtung des steilsten Anstiegs der skalaren Größe zeigt.

Notation:

$$\vec{F} = -\text{grad } E_{pot}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_{pot}, \quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

4.9.5 Potential und Gravitationsfeld

- Gravitationskraft:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r$$

- Potentielle Energie:

$$\vec{E}_{pot}(\vec{r}) = -G \frac{mM}{r}$$

Potential:

$$\Phi(\vec{r}) = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{E_{pot}(\vec{r})}{m}$$

- Gravitationspotential:

$$\Phi = -G \frac{M}{r}$$

- Gravitationsfeld:

$$\vec{G} = -G \frac{M}{r^2} \vec{e}_r$$

•

$$\vec{G} = -\text{grad } \Phi$$

•

$$E_{pot} = m\Phi$$

5 Erhaltungssätze

5.1 Energieerhaltung

Für konservative Kräfte gilt:

$$\Delta E_{kin} = -\Delta E_{pot} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}$$

das heißt: die kinetische Energie ergibt sich allein aus der Potentialdifferenz und ist unabhängig vom durchlaufenen Weg.

$$E_{kin}(2) - E_{kin}(1) = E_{pot}(1) - E_{pot}(2)$$

$$E_{kin}(1) + E_{pot}(1) = E_{kin}(2) + E_{pot}(2) = \dots = \text{const}$$

5.1.1 Doppelbahn

$$\begin{aligned}
 E_{pot}(1) &= m \cdot g \cdot h \\
 E_{pot}(1) &= E_{pot}(2') = 0 \\
 &\rightarrow \\
 E_{kin}(2) &= E_{kin}(2') = \frac{1}{2}mv^2
 \end{aligned}$$

Bemerkung: Berechnung von v mit Newtonschen Gesetzen deutlich komplexer

5.1.2 Energieerhaltungssatz der Newtonschen Mechanik

$$E_{pot} + E_{kin} = E_{ges} = \text{const}$$

E_{ges} = mechanische Gesamtenergie

das heißt: In einem konservativen Kraftfeld ist die Summe aus potentieller und kinetischer Energie eines Massenpunktes zu jeder Zeit konstant

Wichtig: gilt nur für konservative Kraftfelder (Beim Auftreten nicht-konservativer, dissipativer Kräfte wird mechanische Energie in Wärme umgewandelt)

5.1.3 Energiediagramme

Häufig: Potentielle Energie abhängig von Ort x oder Abstand r

Hilfreich: Diskussion mittels Energiediagramme

Kugelbahn

- Abhängig von E_{ges} kann sich die Kugel nur in bestimmten Bereichen aufhalten
- Gleichgewichtslage: Kugel ruht, es wirken keine Kräfte, das heißt

$$F = -\frac{dE_{pot}}{dx} = 0, \text{ bzw. } \vec{F} = -\text{grad } E_{pot} = 0$$

Drei Fälle:

1. Stabiles bzw. Metastabiles Gleichgewicht: Potentialkurve hat ein Minimum
2. labiles Gleichgewicht: Potentialkurve hat ein Maximum
3. Indifferentes Gleichgewicht: Flacher Verlauf der Potentialkurve

Lennard-Jones-Potential Potential zur Beschreibung von molekularen Bindungen

$$E_{pot} = V_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-12} - 2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-6}$$

(Dipol-Dipol-Wechselwirkung, Van-der-Waals Kräfte)

Mechanischer Verstärker

$$\begin{array}{c}
 \text{Volumen} \\
 \uparrow \\
 E'_{pot} = mgh = \rho(abc)gh \\
 \downarrow \\
 \text{Dichte}
 \end{array}$$

mit $h = \frac{1}{2}c$

Fallender Dominostein: $E_{pot} \rightarrow E_{kin}$

Startposition: (Meta)stabiles Gleichgewicht

das heißt: Dominosteine müssen über einen Potentialberg angehoben werden. Danach ist die kinetische Energie ausreichend, um den nächsten Stein über Potentialschwelle zu heben. Verstärkungsfaktor:

Skalierung zwischen den Steinen: Alle Längen $\times \sqrt{2}$

Potentielle Energie für Stein m :

$$\begin{aligned}
 E_{pot} &= \rho(a^{(n)}b^{(n)}c^{(n)})h^{(n)}g = (\sqrt{2})^4 E_{pot}^{(n-1)} \\
 E_{pot}^{(1)} &= mgh \\
 \implies E_{pot}^{(13)} &= 4^{12} E_{pot}^{(1)}
 \end{aligned}$$

$$\implies \text{Verstärkungsfaktor} \approx 1.7 \times 10^7$$

6 Systeme von Massenpunkten

Bisher: Bewegung einzelner Massenpunkte.

Jetzt: Betrachte Systeme von Massenpunkten.

Man unterscheidet:

- Innere Kräfte: Kräfte, die zwischen den Massenpunkten eines Systems wirken.
- Äußere Kräfte: Kräfte, die von außen auf das System einwirken

6.1 Beschreibung eines Systems von Massenpunkten

\vec{r}_i : Ortsvektor zum Massenpunkt i

m_i : Masse des Massenpunktes i

$[i = 1, \dots, n]$

Gesamtmasse:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$

Definition 6.1 (Schwerpunkt)

$$\vec{r}_s = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \int_v \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int_v \vec{r} \rho(\vec{r}) dV$$

Beispiel 6.2 (System zweier Massenpunkte)

$$\begin{aligned} \vec{r}_s &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad s_1, s_2 = ? \\ \vec{r}_s &= \vec{r}_1 + \lambda_s (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\ &= (1 - \lambda_s) \vec{r}_1 + \lambda_s \vec{r}_2 \\ &= \underbrace{\frac{m_1}{m_1 + m_2}}_{=1-\lambda_s} \vec{r}_1 + \underbrace{\frac{m_2}{m_1 + m_2}}_{=\lambda_s} \vec{r}_2 \\ \Rightarrow S_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}, S_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \wedge \frac{S_1}{S_2} = \frac{m_2}{m_1} \end{aligned}$$

Das heißt: Das Verhältnis $\frac{S_1}{S_2}$ ist umgekehrt proportional zum Massenverhältnis $\frac{m_1}{m_2}$.

Beispiel 6.3 (Schwerpunkt Erde-Sonne)

$$M_E = 6 \times 10^{21} \text{ kg}, M_S = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$X_S = \frac{M_E X_E + M_S 0}{M_E + M_S} = 4.5 \times 10^5 \text{ m}$$

Vergleich mit Sonnenradius $7 \times 10^8 \text{ m}$ Schwerpunkt praktisch im Sonnenmittelpunkt

6.1.1 Bewegung des Schwerpunktes

Geschwindigkeit:

$$\vec{v}_s = \frac{d\vec{r}_s}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$$

\vec{p}_i : Impuls des einzelnen Massenpunktes

Definition 6.4 (Schwerpunktimpuls)

$$\vec{p}_s = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_s$$

das heißt: Schwerpunktimpuls ergibt sich aus der Summe der Einzelimpulse

Frage: Wie bewegt sich ein System von Massenpunkten unter Einfluss von Kräften?

Es gilt:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \underbrace{\vec{F}_i}_{\substack{\text{äußere Kraft} \\ \downarrow}} + \underbrace{\sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}}_{\substack{\text{innere Kraft} \\ \uparrow}}, \quad \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

\Rightarrow : Änderung des Schwerpunktimpulses \vec{p}_s :

$$\frac{d\vec{p}_s}{dt} = \sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \underbrace{\sum_i \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}}_{=0} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

das heißt: die Impulsänderung des Schwerpunktes ergibt sich aus der Summe der äußeren Kräfte:

1. Newtonsches Gesetz für Systeme von Massenpunkten.

$$\dot{\vec{p}}_s = M \vec{a}_s = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Hierbei: $\vec{a}_s = \dot{\vec{v}}_s = \frac{1}{M} \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{a}_i$

Definition 6.5 (Allgemeiner Impulssatz) Das Schwerpunkt eines beliebigen Systems von Massenpunkten I bewegt sich so, als sei er ein Körper mit der Gesamtmasse $M = \sum m_i$

Definition 6.6 (Abgeschlossenes System) Ein abgeschlossenes System ist ein System auf das keine äußeren Kräfte einwirken, das heißt:

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

Der Massenschwerpunkt eines abgeschlossenen Systems hat einen zeitlich konstanten Impuls, das heißt

$$\vec{p}_s = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \text{const}$$

(\Rightarrow Impulserhaltung!!)

6.1.2 Raketenantrieb

das heißt: die Bewegung von Objekten mit veränderlicher Masse

Beobachtung: Abstoßen einer Masse kann zum Antrieb verwendet werden (Beispiele: Rakete, Medizinball und Schlittschuhläufer)

Betrachte Rakete: Impulssatz:

$$p(t) = p(t + \Delta t)$$

Zeitpunkt t

$$p(t) = (m + \Delta m)v$$

Zeitpunkt $t + \Delta t$

$$\begin{aligned} p(t + \Delta t) &= 0m(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_B) \\ \implies mv + \Delta v &= mv + m\Delta v + \Delta mv - \Delta mv_B \\ m\Delta v - \Delta mv_B &= 0 \end{aligned}$$

Änderung Blickwinkel:

$$m\Delta v + \Delta mv_B = 0$$

Wichtig: Masse m und Massenänderung dm müssen sich auf gleiche Referenz beziehen. Damit folgt:

$$dv = -v_B \frac{dm}{m}$$

Integration:

$$\begin{aligned} \int_{v_1}^{v_2} dv &= -v_B \int_{m_1}^{m_2} \frac{1}{m} dm, m_1 > m_2, v_B = \text{const} \\ v_2 - v_1 &= -v_B \cdot [\ln m]_{m_1}^{m_2} = v_B (\ln m_1 - \ln m_2) = v_B \ln \frac{m_1}{m_2} > 0 \end{aligned}$$

Wähle Anfangsbedingungen:

$$v_1 = 0, m_1 = 0, m_0 = m(t = 0), m_2 = m(t)$$

\implies Raketengleichung für kräftefreie Rakete

$$v(t) = v_B \ln \frac{m_0}{m(t)}$$

das heißt: Die Endgeschwindigkeit einer Rakete wird durch die Ausstoßgeschwindigkeit und die Brennstoffmenge bestimmt

Für die nicht kräftefreie Rakete gilt:

$$m(t) \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -\frac{dm(t)}{dt} \vec{v}_B + \vec{F}$$

Allgemeine Raketengleichung (ohne Herleitung)

Bemerkung 6.7 Vorsicht bei der Anwendung des zweiten Newtonschen Gesetzen $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$. Naiver Ansatz für kräftefreie Rakete:

$$\frac{dmv}{dt} = \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt} = 0$$

Funktioniert nicht! Grund: Impuls des ausströmenden Gases wird bei diesem Ansatz nicht in der Impulsbilanz berücksichtigt

Korrekter Ansatz:

$$\frac{dmv}{dt} - (v - v_B) \frac{dm}{dt} = 0 \implies m \frac{dv}{dt} + v_B \frac{dm}{dt} = 0$$

das heißt: der naive Ansatz funktioniert nur, wenn $v - v_B = 0$, also die Ausströmungsgeschwindigkeit verschwindet.

7 Stöße

Für ein abgeschlossenes System gilt: (keine äußere Kräfte)

Impulserhaltung:

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \vec{p}'_i$$

Energieerhaltung:

$$\sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n E'_i$$

7.1 Kollinearer elastischer Stoß

Es gilt:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \end{aligned}$$

⇒ Lösung (ohne Herleitung)

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ v'_2 &= \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Geschwindigkeit nach Kollinearer elastisch Stoß Tipp zur Herleitung: Betrachte Bewegung relativ zur Schwerpunktsbewegung (siehe z.B. Demtröders)

Hier Betrachtung von Spezialfällen.

Betrachtung von Spezialfällen ist immer wichtig! Hilft beim Verständnis physikalischer Zusammenhänge

1. $m_1 = m_2 = m, v_1 > 0, v_2 = 0$

$$v'_1 = \frac{2mv_2}{2m} = v_2 = 0, v'_2 = \frac{2mv_1}{2m} = v_1$$

2. $m_1 = m, m_2 = 2m, v_1 > 0, v_2 > 0$

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{v_1(-m)}{3m} = -\frac{1}{3}v_1 \\ v'_2 &= \frac{2mv_1}{3m} = \frac{2}{3}v_1 \end{aligned}$$

3. $m_1 = m, m_2 = 3m, v_1 = v > 0, v_2 = -v$

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{v(m - 2m) - 2(3m)v}{4m} = \frac{v(-2m - 6m)}{4m} = -2v \\ v'_2 &= \frac{-v(2m - m) + 2mv}{2m} = \frac{v(-2m + 2m)}{3m} = 0 \end{aligned}$$

4. $m_1 = m, m_2 \rightarrow \infty, v_1 = v, v_2 = 0$

$$v'_1 = \frac{v(-m_2)}{m_2} = -v \quad (\text{da } m_1 \text{ vernachlässigbar})$$

$$v'_2 = \frac{2m_1 v}{m_2} = 0 \quad (\text{da } m_1 \ll m_2)$$

5. $m_1 = m, m_2 \text{ sehr groß!}, v_1 = 0, v_2 = v$

$$v'_1 = \frac{2m_2 v}{m_2} = 2v, \quad v'_2 = \frac{vm_2}{m_2} = v$$

7.2 Betrachtung im Schwerpunktsystem

Es gilt:

$$v_s = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Geschwindigkeiten im Schwerpunktsystem:

$$v_1^* = v_1 - v_s = \frac{m_2 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2^* = v_2 - v_s = \frac{m_1 v_2 - m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

daraus folgt:

$$p_1^* = m_1 v_1^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$$

$$p_2^* = m_2 v_2^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1)$$

Das heißt vor dem Stoß gilt:

$$p_1^* = -p_2^* E_{kin,1}^* = \frac{1}{2} m (v_1^*)^2 = \frac{(p_1^*)^2}{2m_1} E_{kin,2}^* = \frac{(p_2^*)^2}{2m_2}$$

nach dem Stoß:

Impulserhaltung:

$$p_s^* = p_1^* + p_2^* = p_1^{*'} + p_2^{*'} = 0 \rightarrow p_1^{*'} = -p_2^{*'}$$

Energieerhaltung:

$$E_{ges}^* = E_{kin,1}^* + E_{kin,2}^* = E_{kin,1}^{*'} + E_{kin,2}^{*'}$$

Außerdem:

$$p_1^{*'} = \frac{p_1^* (m_1 - m_2) + 2m_1 p_2^*}{m_1 + m_2} = -p_1^*, p_2^{*'} = -p_2^*$$

daraus folgt:

$$\begin{aligned} E_{kin,1}^{*'} &= E_{kin,1}^* \\ E_{kin,2}^{*'} &= E_{kin,2}^* \end{aligned}$$

Im Schwerpunktsystem findet bei elastischen Stößen keine Energieübertragung statt. Aber: Impulse werden ausgetauscht

7.2.1 Nicht-zentraler, elastischer Stoß im Schwerpunktsystem

$$\begin{aligned} \vec{p}_s^* &= 0, \vec{p}_1^* = -\vec{p}_2^* \\ \vec{p}_s^{*'} &= -\vec{p}_2^{*'}, |\vec{p}_1^*| = |\vec{p}_1^{*'}| \end{aligned}$$

Im Schwerpunktsystem sind für ein abgeschlossenes System zweier Massenpunkte ein- und auslaufende kollinear und vom Betrag her gleich

7.3 Inelastische Stöße

Betrachte 2 Kugeln

- Massen: m_1, m_2
- Geschwindigkeit: $v_1 = v, v_2 = 0$
- Impulserhaltung:

$$\begin{aligned} m_1 v &= (m_1 + m_2) v' \\ v' &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} v \end{aligned}$$

- Energiebilanz:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_1 v^2, E_{kin}' = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 v^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v^2 < E_{kin}$$

Beim inelastischen Stoß geht mechanische Energie verloren, sie wird beim Stoß in andere Energieformen (zum Beispiel Wärme) umgewandelt. (siehe Thermodynamik)

Interessant: Betrachtung im Schwerpunktsystem.

$$m_1 v_1^* - m_2 v_2^* = (m_1 + m_2) v^{*'} = 0$$

da $p_1^* = -p_2^*$

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) v^{*'} &= 0 \\ E_{kin}^{*'} &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (v^{*'})^2 = 0 \end{aligned}$$

Im Schwerpunktsystem findet beim inelastischen Stoß eine vollständige Umwandlung der kinetischen Energie statt.

Allgemein:

falls $\vec{F}_{aussen} = 0$

$$E_{kin,1} + E_{kin,2} = E'_{kin,1} + E'_{kin,2} + Q \sum \vec{p}_i = \sum \vec{p}'_i = \text{const}$$

$$\sum E_{kin,i} = \sum E'_{kin,i} + Q$$

$Q = 0$	elastisch
$Q > 0$	inelastisch
$Q < 0$	superelastisch

8 Mechanik des starren Körper

Definition 8.1 (Starrer Körper) System von Massenpunkten mit festen, nicht veränderlichen Abständen. Idealisierung!

Es gilt:

Volumen:

$$V = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum \Delta V_i = \int dv$$

Masse:

$$M = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum \Delta m_i = \int dm = \int \rho(\vec{r}) dV$$

Schwerpunkt:

$$\vec{r}_s = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV \quad M = \int \rho dV = \int \rho d^3r$$

Beispiel 8.2 (Quader)

$$\begin{aligned} \vec{r}_s &= \frac{1}{M} \int \vec{r} \rho(\vec{r}) dV \\ &= \frac{1}{M} \int_0^a \int_0^b \int_0^c \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rho dx dy dz \end{aligned}$$

Integration für jede einzelne Ortskomponente:

$$x_s = \frac{1}{m} \int_0^a \int_0^b \int_0^c x \rho dx dy dz = \frac{1}{M} \rho bc \int_0^a x dx = \frac{1}{M} \rho abc \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} a$$

$$y_s = \dots = \frac{1}{2} b$$

$$z_s = \dots = \frac{1}{2} c$$

$$\vec{r}_s = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

8.1 Bewegung des starren Körpers

Es gilt:

$$\vec{r}_{si} = \vec{r}_i - \vec{r}_s \rightarrow \frac{d\vec{r}_{si}}{dt} = \vec{v}_{si} = \vec{v}_i - \vec{v}_s$$

Mit $|\vec{r}_{si}| = \text{const}$ beziehungsweise $\vec{r}_{si}^2 = \text{const}$ (starrer Körper)

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{si}^2) = 2\vec{r}_{si} \vec{v}_{si} = 0 \rightarrow \vec{v}_{si} \perp \vec{r}_{si}$$

da $\vec{v}_{si} \perp \vec{r}_{si}$ gilt: Betrachte Bewegung in der von $\vec{v}_{si}, \vec{r}_{si}$ aufgespannten Ebene \rightarrow Kreisbewegung!,
Das heißt:

$$\vec{v}_{si} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{si}$$

wobei im Allgemeinen $\vec{\omega}$ zeitabhängig sein kann.

Mit $\vec{v}_{si} = \vec{v}_i - \vec{v}_s$ folgt:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_s + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{si})$$

Achtung: $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ muss nicht raumfest sein.

Die Bewegung eines starren Körpers lässt sich in eine Translationsbewegung und eine Rotation um den Schwerpunkt zerlegen

- 3 Translationsfreiheitsgrade
- 3 Rotationsfreiheitsgrade

8.2 Drehmoment und Kräftepaare

Frage: Wie versetzt man einen Körper in Rotation?

Beispiel 8.3 (Balkenwaage) Beobachtung: Kraft mit Angriffspunkt im Abstand l , bewirkt Drehbewegung
Es gilt das Hebelgesetz:

$$F_1 l_1 = F_2 l_2$$

Hebelarm: Abstand zwischen Drehachse und Angriffspunkt der Kräfte \vec{F}_1, \vec{F}_2

Beobachtung:

Kraft \vec{F}_{\parallel} parallel zum Hebelarm bewirkt keine Drehung, nur Kraft \vec{F}_{\perp} senkrecht zur Verbindungslinie zwischen Angriffspunkt und Drehachse führt zur Rotation.

Richtung von \vec{F}_{\perp} bestimmt Drehsinn

Definition 8.4 (Drehmoment)

$$\vec{M} := \vec{r} \times \vec{F}$$

Gibt Drehsinn und Stärke der Kraftwirkung an.

$$M = r F \sin(\angle(\vec{r}, \vec{F}))$$

8.2.1 Drehmoment und Schwerpunkt

Betrachte starren Körper aus zwei Massenpunkten plus masselose Verbindung

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$\vec{M}_1 = r_1 m_1 g \sin \alpha_1 \vec{l}_z$$

$$\vec{M}_2 = -r_2 m_2 g \sin \alpha_2 \vec{l}_z$$

$$= -r_2 m_2 g \sin \alpha_1 \vec{l}_z$$

$$\vec{M}_{tot} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = (r_1 m_1 - r_2 m_2) g \sin \alpha_1 \vec{l}_z$$

vektoriell:

$$\vec{M}_{tot} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times m_2 \vec{g} + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{g} = (\vec{r}_1 m_1 + \vec{r}_2 m_2) \times \vec{g}$$

Beliebiger Körper:

$$\vec{M}_{tot} = \sum \vec{M}_i = \sum m_i \vec{r}_i \times \vec{g}$$

$$\left(\sum m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{g} = m_{ges} \vec{r}_s \times \vec{g} = \vec{r}_s \times \vec{F}$$

Das Gewicht eines starren Körpers greift immer im Schwerpunkt an. Bei Aufhängung eines Körpers im Schwerpunkt ist das resultierende Drehmoment auf Grund der Schwerkraft Null. Grund: Im Schwerpunkt gilt: $\vec{r}_s = 0$, $\vec{M}_{tot} = \vec{r}_s \times \vec{F}_s = 0$

8.2.2 Kräftepaare

Frage: Wirkung einer Kraft \vec{F}_1 auf einen starren Körper.

Lösungsansatz:

Einführung der sich gegenseitig aufhebenden Kräfte \vec{F}_2 und \vec{F}_3 im Schwerpunkt S . Ändert nichts!

Zerlegung der Bewegung:

Translation durch Kraft \vec{F}_2 mit Angriffspunkt S .

Rotation durch Kräftepaar (\vec{F}_1, \vec{F}_3) mit $F_1 = F_3$, $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_1$

Die Wirkung aller Kräfte auf einen starren Körper lässt sich durch

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i \quad (\text{Gesamtkraft (Gesamtkraft)})$$

$$\vec{M} = \sum \vec{r}_{si} \times \vec{F}_i = \sum \vec{M}_i \quad (\text{Gesamtdrehmoment (Rotation)})$$

beschreiben. Dabei greift \vec{F} im Schwerpunkt an

Wirkung von Kräftepaaren: Reine Rotation. Es gilt:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F} - \vec{r}_2 \times \vec{F} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{r}_{12} \times \vec{F}$$

Merke: Das Drehmoment eines Kräftepaares ist unabhängig vom Bezugspunkt 0

Zwei Kräftepaare sind äquivalent, wenn sie das gleiche Drehmoment besitzen. Äquivalente Kräftepaare können einander ersetzen.

8.3 Statisches Gleichgewicht

Statik:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = 0, \quad \vec{M} = \sum \vec{M}_i = 0$$

das heißt keine Translation, keine Rotation

Beispiel 8.5

1. Gleichgewicht eines starren Körpers in Schwerfeld

Frage: Wo muss \vec{F} angreifen um für statisches Gleichgewicht zu sorgen?

Kräfte:

$$\sum \vec{F}_i + \vec{F} = 0$$

$$\vec{F} = - \sum m_i \vec{g} = -m_{ges} \vec{g}$$

Drehmomente:

$$\sum \vec{M}_i + \vec{R} \times \vec{F} = 0$$

$$\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{R} \times \vec{F} = \sum m_i (\vec{r}_i \times \vec{g}) + \vec{R} \times \vec{F}$$

$$= (\sum m_i \vec{r}_i) \times \vec{g} - m_{ges} \vec{R} \times \vec{g}$$

$$= m_{ges} (\vec{R} \times \vec{g}) = m_{ges} (\vec{r}_s \times \vec{g})$$

Lösung A: $\vec{R} = \vec{r}_s$, das heißt Unterstützung im Schwerpunkt mit $\vec{F} = -mg\vec{s}$

Lösung B: $(\vec{R} - \vec{f}_s) \times \vec{g} = 0$, das heißt $(\vec{R} - \vec{r}_s) \parallel \vec{g}$, also Unterstützung oberhalb oder unterhalb des Schwerpunkts 3 Möglichkeiten:

- \vec{R} über Schwerpunkt: stabiles Gleichgewicht
- \vec{R} unter SP: labiles Gleichgewicht
- \vec{R} in PS: indifferentes Gleichgewicht

2. Schiefer Turm

Drehmoment:

$$F_g r = F_z r \rightarrow F_g = F_z$$

Kräftegleichgewicht:

$$F_g + F_z + F_s = 0 \rightarrow F_s = -2F_g$$

3. Stehende Leiter

Kräftegleichgewicht:

$$\vec{F}_N = -\vec{F}_G, \vec{F}'_N = -\vec{F}_R$$

Drehmomente:

Bezugspunkt = unteres Leiter-Ende (günstige Wahl!)

$$F_W h = F_g \left(\frac{1}{2}a\right)$$

(vergleiche Übungsaufgabe)

8.4 Rotation und Trägheitsmoment

Bewegungsenergie eines starren Körpers setzt sich zusammen aus:

- kinetischer Energie der Schwerpunktsbewegung
- kinetische Energie aufgrund von Rotation

Experiment: Rollende Objekte \rightarrow *Form des Körpers wichtig!*

Mathematisch:

$$E_{kin} = \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \quad (\text{mit } \vec{v}_i = \vec{v}_s + \vec{v}_{si})$$

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{v}_s^2 + 2\vec{v}_s \vec{v}_{si} + \vec{v}_{si}^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_s^2 + \vec{v}_s \sum m_i \vec{v}_{si} + \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_{si}^2 \end{aligned}$$

Die kinetische Energie zerlegt sich in die kinetische Energie des Schwerpunktes und Rotationsenergie, aus der kinetischen Energie der Bewegung relativ zum Schwerpunkt

Jetzt: Betrachte Rotation um raumfeste Achse: (Spezialfall: Achse durch Schwerpunkt)
Kinetische Energie des Massenstücks dm :

$$\begin{aligned} dE_{kin} &= \frac{1}{2} dm \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} dm (\omega r_{\perp})^2 \\ &= \frac{1}{2} dm \omega^2 r_{\perp}^2 \\ E_{rot} &= \int dE_{kin} = \frac{1}{2} \int \omega^2 r_{\perp}^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\int r_{\perp}^2 dm}_{\text{Trägheitsmoment}} \end{aligned}$$

Definition 8.6 (Trägheitsmoment) Trägheitsmoment bezüglich einer raumfesten Achse

$$I = \int r_{\perp}^2 dm = \Theta^2 dm = \Theta$$

Diskret:

$$\Theta = \sum r_{\perp,i}^2 m_i$$

Dabei ist r_{\perp} der Abstand zwischen dem Massenstück dm und der Drehachse.

Definition 8.7 (Rotationsenergie) Rotationsenergie eines starren Rotators (Rotation um raumfeste Achse)

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

8.5 Berechnung von Trägheitsmoment

Volumenintegral:

$$I = \int r_{\perp}^2 dm = \int r_{\perp}^2 \rho(\vec{r}) dV$$

Beispiel 8.8 1. Stab (dünn)

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \rho A dx = \rho A \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \rho A \left(\left(\frac{L}{2} \right)^3 - \left(-\frac{L}{2} \right)^3 \right) \\ &= \frac{1}{3} \rho A \frac{L^3}{4} = \frac{1}{12} \rho A L^3 \\ &= \frac{1}{12} m L^2 \end{aligned}$$

2. Scheibe, Zylinder

Zylinderkoordinaten:

$$x = r \cos \phi, y = r \sin \phi, z = z$$

$$dV = r dr d\phi dz$$

$$I = \int_V \tilde{r}_\perp^2 dm = \int_v r_\perp^2 \rho dV$$

Zylinderkoordinaten, also $r_\perp = r$

$$\begin{aligned} &= \rho \int_v r^2 r dr d\phi dz \\ &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h r^2 r dr d\phi dz \\ &= 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi \rho h \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} (\pi R^2 h) \rho R^2 = \frac{1}{2} m R^2 \end{aligned}$$

3. Dünner Hohlzylinder

$$\begin{aligned} I &= \rho \int_R^{R+d} \int_0^{2\pi} \int_0^h r^2 r dr d\phi dz \\ &= 2\pi \rho h \int_R^{R+d} r^3 dr = 2\pi \rho h \frac{1}{4} [r^4]_R^{R+d} \\ &= 2\pi \rho h \frac{1}{4} ((R+d)^4 - R^4) \\ &= 2\pi \rho h \frac{1}{4} (R^4 + 4R^3d + \dots - R^4) \\ &\approx 2\pi \rho h R^3 d = (2\pi R d h \rho) R^2 = m R^2 \end{aligned}$$

4. Kugel

$$I = \int r_\perp^2 dm = \frac{2}{5} m R^2$$

(ohne Beweis, zur Übung...)

8.6 Steinersche Satz

Nochmal Stab:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^L x^2 \rho A dx \\ &= \rho A \int_0^L x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \rho A L^2 \end{aligned}$$

mit $m = \rho AL$

$$= \frac{1}{3}mL^3$$

Allgemein:

$$\begin{aligned} I &= \int r_{\perp}^2 dm \\ &= \int (r_{s,\perp} + R_{\perp})^2 dm \\ &= \int \vec{r}_{s,\perp}^2 dm + \int \vec{R}_{\perp}^2 dm + 2 \int r_{s,\perp} R_{\perp} dm = \underbrace{\vec{r}_{s,\perp}^2 \int dm}_{=r_{s,\perp}^2 m} + I_s + 2r_{s,\perp} \underbrace{\int R_{\perp} dm}_{=0} \end{aligned}$$

Definition 8.9 (Steinersche Satz)

$$I = I_s + r_{\perp,s}^2 m$$

Beispiel 8.10 (Dünner Stab)

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{1}{12}mL^2 \\ I_B &= \frac{1}{3}mL^2 \\ I_B &= I_A + \left(\frac{L}{2}\right)^2 m = \frac{1}{3}mL^2 \end{aligned}$$

Trägheitsmomente sind additiv

$$I = \int_v r_{\perp}^2 dm = \int_{v_1} r_{\perp}^2 dm + \int_{v_2} r_{\perp}^2 dm$$

Translation	Rotation
\vec{r}	$\vec{\phi}$
$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\phi}}$
$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$	$\vec{\alpha} = \ddot{\vec{\phi}} = \dot{\vec{\omega}}$
$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$	$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$
$F = m\vec{a}$	$\vec{M} = I\vec{\alpha}$

Bei nicht ortsfester Rotationsachse:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \Theta \vec{\omega}$$

$$\vec{M} = \Theta \vec{\alpha}$$

$\vec{\Theta}$ ist ein Tensor

$$\begin{aligned}\vec{v}_i &= \vec{\omega} \times \vec{r}_{\perp,i}, \vec{v}_i = \omega r_{\perp,i} \\ \vec{M} &= \vec{r}_{\perp,i} \times \vec{F}_i \\ M_i &= r_{\perp,i} F_{\perp,i} = r_{\perp,i} m_i \frac{dr_i}{dt} \\ &= r_{\perp,i}^2 m_i \frac{d\omega}{dt} \\ M_{tot} &= \sum M_i \\ M_{tot} &= \underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\alpha} \underbrace{\sum r_{\perp,i}^2 m_i}_I\end{aligned}$$

Bewegungsgleichung für die Rotation um eine Raumfeste Achse

$$M = I\dot{\omega} = I\alpha$$

Beispiel 8.11

$$\begin{aligned}M &= I\alpha \\ \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F}_G \\ I &= 2mR^2 \\ \alpha &= \frac{M}{I} = \dot{\omega} \\ \omega &= \alpha t + \omega_0 = \alpha t \\ \phi &= \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \phi_0 = \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ 2\pi &= \frac{1}{2}\alpha T^2 \\ T^2 &= \frac{4\phi}{\alpha} = 4\pi \frac{I}{M}\end{aligned}$$

wir wollen berechnen

$$\begin{aligned}T_0^2 &= 4\pi \frac{I_0}{M} = (1\,72)^2 \text{s}^2 \\ T_1^2 &= 4\pi \frac{I_0 + 2mR^2}{M} = (5\,9)^2 \text{s}^2 \\ T_2^2 &= 4\pi \frac{I_0 + 2m\frac{R^2}{4}}{M} = (3\,3)^2 \text{s}^2 \\ T_1^2 - T_0^2 &= 32 \text{s}^2 \\ T_2^2 - T_0^2 &= 8 \text{s}^2\end{aligned}$$

8.7 Drehimpuls

- Translation: $\vec{F} = m\vec{a}$, $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$
- Rotation: $\vec{M} = I\vec{\alpha}$, $\vec{M} = \dot{\vec{L}} \rightarrow$ Drehimpuls
- Impuls: $p = mv$
- Drehimpuls: (Guess) $L = I\omega = mr^2 \frac{v}{r} = rmv = rp$

Definition 8.12 (Drehimpuls)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Wichtig: Allen bewegten Massenpunkten kann man bezüglich eines Referenzpunkts 0 einen Drehimpuls zuordnen; der hängt vom Bezugspunkt ab.

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \vec{p}}_0 + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

Grundgleichung der Dynamik für Rotationsbewegungen:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}}$$

Drehimpulserhaltung:

$$\vec{M} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{const}$$

Drehimpuls für System von Massenpunkten

$$\begin{aligned} \vec{p}_s &= \sum \vec{p}_i, \dot{\vec{p}}_s = \sum \vec{F}_i \\ \vec{L} &= \sum \vec{L}_i = \sum m_i(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) \\ \vec{L} &= \int d\vec{L} = \int (\vec{r} \times \vec{v}) dm \quad \dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \underbrace{\sum \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i}_0 + \sum \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum \vec{M}_i = \vec{M} \end{aligned}$$

Für System von Massenpunkten:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \dot{\vec{L}} \\ \vec{L} &= 0 \text{ für } \vec{M} = 0 \end{aligned}$$

Allgemeiner Zusammenhang:

mit \hat{I} als Tensor:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \hat{I} \vec{\omega} \\ \vec{L} &= \int d\vec{L} \\ d\vec{L} &= \vec{r} \times d\vec{p} = \vec{r} \times \vec{v} dm \\ &= dm(\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{mit } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\
&= dm(r^2 \vec{\omega} - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{r})) \\
\int d\vec{L} &= \vec{\omega} \int r^2 dm - \int \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) dm
\end{aligned}$$

Beispiel 8.13 (Schief gestellte Hantel) Drehimpuls:

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$$

Drehimpulsvektor steht senkrecht auf Verbindungslinie zu m_1 und m_2 . Aber: Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ zeigt in Richtung der Drehachse.

Beispiel 8.14 (Rotierende Scheibe mit Unwucht) Für Rad mit Masse M gilt: (ohne Unwucht)

$$\vec{L}_1 = \int d\vec{L} \text{ parallel zu } \vec{\omega}$$

aus Symmetriegründen, $\vec{L} = I\vec{\omega}$ Für das Rad plus Unwucht gilt:

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \vec{L}_1 + \vec{L}_2, \quad \vec{L}_2 = \vec{r} \times \vec{p} \\
&\quad \downarrow \\
&\text{Drehimpuls der Unwucht}
\end{aligned}$$

das heißt: \vec{L} nicht parallel zu $\vec{\omega}$, daraus folgt: Drehimpuls hat Komponente senkrecht zur Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, diese rotiert mit $\vec{\omega}$

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}}$$

das heißt auf Achse wirkt Drehmoment.

8.8 Trägheitstensor, freie Rotation und Kreisel

Drehimpuls eines starren Körpers:

$$\vec{L} = \vec{\omega} \int r^2 dm - \int \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) dm$$

(Bezugspunkt wichtig!)

$$\begin{aligned}
L_x &= \omega_x \int r^2 dm - \int x(\omega_x + \omega_y y + \omega_z z) dm \\
&= \omega_x \int (r^2 - x^2) dm - \omega_y \int xy dm - \omega_z \int xz dm \\
&= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z \\
L_y &= I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z \\
L_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z \\
\vec{L} &= \underbrace{\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}}_{\text{Trägheitstensor}} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Definition 8.15 (Trägheitstensor)

$$\begin{array}{c}
 \text{Matrix} \\
 \uparrow \\
 \vec{L} = \hat{I} \vec{\omega}, \hat{I} = I_{ij}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \int (r^2 - x^2) dm & I_{xy} &= I_{yx} = - \int xy dm \\
 I_{yy} &= \int (r^2 - y^2) dm & I_{yz} &= I_{zy} = - \int yz dm \\
 I_{zz} &= \int (r^2 - z^2) dm & I_{xz} &= I_{zx} = - \int xz dm
 \end{aligned}$$

Rotationsenergie:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \hat{I} \vec{\omega}$$

Trägheitstensor \hat{I} hängt von der Wahl des Koordinatensystems ab!

Geeignete Koordinatentransformation \rightarrow Diagonalisieren von \hat{I} . (Hauptachsentransformation)

Nach Hauptachsentransformation:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{pmatrix}$$

mit $I_a > I_b > I_c$.

Es folgt: Bei Rotation eines Körpers um eine der drei Hauptachsen sind Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit parallel.

8.8.1 Kreisel

Ein Kreisel ist ein rotierender starrer Körper, der höchstens an einem Punkt aufgehängt ist. (Kompass, Satellit, Geschoss)

Beschreibung der Kreiselbewegung mit 3 Achsen:

- Figurenachse
- Momentane Drehachse, Richtung von $\vec{\omega}$
- Drehimpulsachse

9 Mechanik deformierbarer Körper

Starrer Körper: $\vec{r}_i - \vec{r}_j = \text{const}$, das heißt Abstand zwischen Massenpunkten konstant.

Wirklichkeit: Verformung bei Anwendung äußerer Kräfte.

9.1 Atomares Modell

Experiment: Alle Körper sind aus Atomen oder Molekülen aufgebaut. Beschreibung von Kräften zwischen Atomen und Molekülen durch Lennard-Jones-Potential. (Dipol-Dipol-Wechselwirkung, Van-der-Waals Kräfte)

Gleichgewichtsabstand: r_0 ($E_{pot} = \text{minimal}$) Für kleine Auslenkung gilt:

$$E_{pot} = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$$

$$F = -\frac{dE_{pot}}{dr} = -k(r - r_0) = -kAr$$

Federkraft! \Rightarrow

- Modell eines Festkörpers: Federmodell.
Temperatur unterhalb des Schmelzpunktes. Mittlere kinetische Energie klein gegen $E_{pot}(r_0)$.
Atome können Gitterplätze nicht verlassen. Fernordnung!
- Modell einer Flüssigkeit: Kugelmodell:
Auch hier mittlerer Abstand $= r_0$, das heißt Dichte ähnlich die des Festkörpers. Aber: Temperatur zu hoch für feste Zuordnung auf Kristallgitterplätzen \Rightarrow flüssiger Zustand. Nahordnung!
- Modell eines Gases: frei bewegliche Teilchen.
Mittlere kinetische Energie ist grob gegen Bindungsenergie, hohe Temperatur!

9.2 Feste Körper.

- Elastischer fester Körper \rightarrow Formelastizität, Volumenelastizität aufgrund rücktreibender Kräfte (Hookscher Bereich)
- Plastisch feste Körper \rightarrow Formänderungen verbleiben

Hier: Elastische Körper! Experimentell findet man:

$$\Delta f \sim F$$

$$\Delta L \sim L, \Delta L \sim A^{-1}$$

$$\Delta L \sim L \frac{F}{A} = Lr \quad (r: \text{Zugspannung})$$

Definition 9.1 (Hooksches Gesetz:)

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} = E\varepsilon$$

- E : Elastizitätsmodul, E-Modul
- ε : Elongation, relative Längenänderung

• σ : Zugspannung, $\sigma = \frac{F}{A}$

Auswertung Hooksches Gesetz: Material-Stahl, $D = 0.3 \text{ mm}$, $L = 6 \text{ m}$, $A = 0.07 \text{ m}^2$

$$F = 1.2 \text{ kPa} = 11.8 \text{ N}, \Delta L = 5 \text{ mm}, \varepsilon = 8 \times 10^{-4} \rightarrow \sigma = 168.6 \text{ N mm}^{-2}$$

$$F = 2.4 \text{ kPa} = 13.5 \text{ N}, \Delta L = 10 \text{ mm}, \varepsilon = 1.7 \times 10^{-3} \rightarrow \sigma = 337.2 \text{ N mm}^{-2} \implies E = \frac{\sigma}{\varepsilon} 2 \times 10^5 \text{ N mm}^{-2} =$$

Einfaches Atomares Modell: Lineare Kette. Es gilt:

$$L = na, \Delta a \sim F, \Delta L \sim m \Delta a \sim nF$$

Außerdem wegen

$$L \sim m : \Delta L \sim LF \rightarrow F \sim \frac{\Delta L}{L}$$

Für eine lineare Kette ist $\varepsilon \frac{\Delta L}{L}$ tatsächlich proportional zur Kraft F .

Für $\varepsilon \sim A^{-1}$ braucht man mehrere lineare Ketten parallel aneinander.

Aber: Auch Wechselwirkung in transversaler Richtung!

Definition 9.2 (Querkontraktion) $\frac{\Delta D}{D} \sim \frac{\Delta L}{L}$

$$\frac{\Delta D}{D} = -\mu \frac{\Delta L}{L}$$

μ : Poissonsche Zahl ≈ 0.3

Volumenänderung (kleine Änderung)

$$V = \left(\frac{\pi}{4}\right) D^2 L$$

$$\Delta \xi = \frac{\Delta V}{V} = ?$$

$$\xi = \ln V$$

$$= 2 \ln D + \ln L + \text{const}$$

$$\Delta \xi \approx \frac{1}{V} \Delta V \approx 2 \frac{1}{D} \Delta D + \frac{1}{L} \Delta L = \frac{d\xi}{dV} \Delta V = \frac{d\xi}{dD} \Delta D + \frac{d\xi}{dL} \Delta L$$

$$\frac{V}{V} = -2\mu \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta L}{L} (1 - 2\mu)$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu) \quad \text{(Volumenänderung)}$$

Kompression (von Flüssigkeiten)

$$\frac{\Delta V}{V} = -\chi \Delta p$$

$$\chi = 3 \frac{1}{E} (1 - 2\mu)$$

χ : Kompressibilität

9.3 Scherung und Torsion

Normalspannung oder Zugspannung

$$\sigma = \frac{F_N}{A}$$

Tangentialspannung oder Scherspannung

$$\tau = \frac{F_T}{A}$$

Für kleine Scherwinkel

$$\tau = G\alpha \quad (G: \text{Schubmodul, Torsionsmodul})$$

Torsion eines Drahtes (Vollzylinder)

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{dF}{dA} \\ R\phi &= L\alpha \\ dM &= dFR \\ dA &= 2\pi R dR \\ \tau &= \frac{dF}{dA} = \underbrace{\frac{dM}{R}}_{dF} \frac{1}{2\pi R dR} = G\alpha = G \frac{R\phi}{L} \\ dM &= \frac{2\pi G\phi}{L} R^3 dR \\ M &= \underbrace{\frac{2\pi G R^4}{2L}}_{\text{const}} \phi = k_0 \phi \end{aligned}$$

Empfindlichkeit:

$$\begin{aligned} \frac{\phi}{M} &\sim \frac{1}{R^4} \\ M &= I\ddot{\phi} = -k_D \phi, k_D = \frac{\pi G R^4}{2L} \\ \phi(t) &= \phi_{max} \sin(\omega_0 t + \phi_0) \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{k_D}{I}} \\ T &= \frac{2\pi}{\omega_0} \sim \sqrt{\frac{I}{k_D}} \frac{1}{R^2} \end{aligned}$$

Ein bisschen was für Ingenieure

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{L}{\rho} = \frac{L + \Delta L}{\rho + \eta} \\ \varepsilon &= \frac{\Delta L}{L} = \frac{\eta}{\rho} \\ dM &= \eta dF \\ dM &= \eta dF = \eta \sigma dA = \eta \varepsilon E dA = \eta^2 \frac{1}{\rho} E dA \quad (\text{wegen } \varepsilon = \frac{\eta}{\rho}) \\ M &= \frac{E}{\rho} \int \eta^2 dA\end{aligned}$$

Definition 9.3 (Flächenträgheitsmoment)

$$J = \int \eta^2 dA$$

- Integral über Querschnittsfläche
- η : senkrechter Abstand der Punkte der Querschnittsfläche von neutraler Ebene

Beispiel 9.4 (Quader)

$$\begin{aligned}J &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^2 v d\eta \\ &= \frac{1}{12} b h^3\end{aligned}$$

Bautechnik: Krümmung κ :

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}$$

9.4 Ruhende Flüssigkeiten-Hydrostatik

keine Formelastizität, $G = 0$!

aber: Hohe Volumenelastizität

Das heißt: Alle Kräfte senkrecht zur Oberfläche.

Definition 9.5 (Druck) Hydrostatischer Druck

$$p = \frac{F}{A}$$

Also die auf die Fläche wirkende Normalkraft pro Fläche.

$$[p] = \text{N m}^{-2} = \text{Pa}$$

$$1 \text{ bar} = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ torr} = 133.322 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ atm} = 1.013 \text{ bar}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \kappa \Delta p = \frac{1}{K} \Delta p$$

Wasser:

$$\kappa = 5 \times 10^{-10} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1}$$

Aluminium:

$$\kappa = 1.4 \times 10^{-10} \text{ m}^2 \text{ N}^{-1}$$

Im Folgende: $\kappa = 0$, $V = \text{const}$, das heißt Wasser „inkompressibel“

Satz 9.6 (Pascalsches Prinzip) Wird auf eine in einem Gefäß eingeschlossene Flüssigkeit ein Druck ausgeübt, dann verteilt sich dieser ungehindert auf jeden Punkt in der Flüssigkeit und die Wände.

Zur Veranschaulichung: betrachte frei schwebendes Flüssigkeitsprisma in ruhender Flüssigkeit, frei wählbar... (hier noch: ohne Schwerkraft)

$$\begin{aligned} F_x &= F_{xc} - F_{xb} = F_c \sin \alpha - F_b \\ &= P_c h c \sin \alpha - p_b h b \stackrel{!}{=} 0 \\ F_y &= F_{ya} - F_{yc} = F_a - F_c \cos \alpha \\ &= p_a a h - p_c h c \cos \alpha \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Mit $\sin \alpha = \frac{b}{a}$, $\cos \alpha = \frac{a}{c}$ folgt:

$$\begin{aligned} p_c h c \frac{b}{c} - p_b h b &= 0 \implies p_c = p_b \\ p_a a h - p_c h c \frac{a}{c} &= 0 \implies p_a = p_c \end{aligned}$$

Bemerkung 9.7 In z-Richtung sind Kräfte aus Symmetriegründen ebenfalls Null! da Flüssigkeitsprisma frei gewählt, das heißt beliebig orientiert werden kann folgt Pascalsches Prinzip

Anwendung: Hydraulische Presse. Druck überall gleich! \implies

$$\begin{aligned} p &= \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \\ F_2 &= F_1 \frac{A_2}{A_1} \end{aligned}$$

Arbeit:

$$\begin{aligned} W_1 &= F_1 a_1 = p A_1 a_1 = p V \\ W_2 &= F_2 a_2 = p A_2 a_2 = p V \end{aligned}$$

Bisher: Vernachlässigung der Schwerkraft.

Jetzt: Druck im Schwerfeld.

Eigengewicht einer Flüssigkeit verursacht einen von der Tiefe abhängenden Druck. Kraftwirkung auch Fläche A :

$$F = mg = \rho V g = \rho A h g$$

mit Tiefe h

$$p = \frac{F}{A} = \rho g h$$

Definition 9.8 (Hydrostatischer Druck) Der Druck in einer ruhenden, inkompressiblen Flüssigkeit nimmt unter Einfluss der Schwerkraft linear mit der Tiefe h zu:

$$p = p_0 + \rho g h$$

Der hydrostatische Druck ist unabhängig von Form und Volumen des einschließenden Behältnisses

Anwendung: Quecksilberbarometer

$$p_{Luft} + \rho g x = \rho g h + \rho g x$$

$$p_{Luft} = \rho g h$$

Druckeinheit: $1 \text{ mm Hg} = 133.322 \text{ Pa}$

9.4.1 Auftrieb

Erfahrung: Ein in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper erfährt Auftrieb.

Grund: Auf Körper einwirkende Druckkräfte.

Satz 9.9 (Prinzip des Archimedes) Ein Körper, der in eine Flüssigkeit eingetaucht ist erfährt eine Auftriebskraft, deren Betrag gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit ist.

$$p_1 = \rho g x_1 + p_0$$

$$p_2 = \rho g x_2 + p_0$$

$$E_1 = \rho g x_1 A + p_0 A$$

$$E_2 = \rho g x_2 A + p_0 A$$

$$F_2 - F_1 = \rho g A \Delta x = m g = F_g$$

Es folgt: Ein Körper schwimmt, wenn seine Dichte kleiner ist als die Flüssigkeit, in die er eingetaucht ist.

9.4.2 Oberflächenspannung

Beobachtung: Flüssigkeiten bilden Oberflächen.

Grund: Potentielle Energie an Oberfläche größer.

Im Inneren: Kräftegleichgewicht

An Oberfläche: Kraftwirkung nach Inneren

Minimierung der potentiellen Energie \implies Minimierung der Oberfläche.

Definition 9.10 (Oberflächenspannung)

$$\sigma = \frac{\text{Zunahme der Oberflächenenergie}}{\text{Zunahme der Oberfläche}}$$

Achtung: Anders als Zugspannung. Hier: Kraft pro Länge

9.5 Gase

Wesentlicher Unterschied zu Festkörpern und Flüssigkeiten: Hohe Kompressibilität.

Definition 9.11 (Gesetz von Boyle-Mariotte)

$$pV = \text{const}$$

falls Temperatur $T = \text{const}$, siehe später

9.5.1 Barometrische Höhenformel:

Flüssigkeiten: $p = \rho gh + p_0$, das heißt Druck steigt linear mit der Tiefe. (Ausnahme: Inkompressibilität, also $\rho = \text{const}$, das heißt Druck steigt linear mit der Tiefe. (Ausnahme: Inkompressibilität, also $\rho = \text{const}$))

Gase: Hohe Kompressibilität! Das heißt Dichteänderungen müssen berücksichtigt werden.

Frage: $p(h) = ?$, $\rho(h) = ?$

Es gilt:

$$pV = \text{const}$$

$$pV = p \frac{M}{\rho} = p_0 V_0 = p_0 \frac{M}{\rho_0}$$

für konstante Masse M :

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= \frac{p_0}{\rho_0} \quad \text{d}p = -\rho g \text{d}h - p \frac{\rho_0}{p_0} g \text{d}h \\ \frac{\text{d}p}{p} &= -\frac{\rho_0 g}{p_0} \text{d}h \\ \ln p - \ln p_0 &= -\frac{\rho_0 g}{p_0} h \\ p &= p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g h}{p_0}\right) \end{aligned}$$

Barometrische Höhenformel:

$$p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g}{p_0} h\right)$$

das heißt: in Atmosphäre mit kompressiblem Gas nimmt der Druck mit der Höhe exponentiell ab.

9.6 Strömende Flüssigkeiten und Gase

Experiment: Flüssigkeitsströmung durch Rohr

Beobachtung: Druckabfall entlang des Rohres

$$\begin{aligned}
 F_p &= A(p(x) - p(x + \Delta x)) \\
 &= -\frac{dp}{dx} \Delta A \\
 &= -\frac{dp}{dx} \Delta V \\
 &= -\frac{\Delta p}{\Delta x} \Delta V \\
 F_p &= -F_{visc} \\
 F \Delta x &= -\Delta p \Delta V \\
 F &= -\text{grad } p \Delta v
 \end{aligned}$$

- \vec{F}_p : Kraft aufgrund des Druckgradienten
- \vec{F}_{visc} : Kraft aufgrund innerer Reibung

Also: Bei der Strömung von Flüssigkeiten muss Arbeit gegen die innere Reibung aufgebracht werden
Es gilt

$$F \Delta x = -\Delta p \Delta V, F dx = -dp \Delta V$$

Eigentlich ist das ganze deutlich komplizierter:

$$\begin{array}{ll}
 \vec{u}(x, y, z, t) & \text{(Geschwindigkeitsfeld)} \\
 p(x, y, z, t) & \text{(Druckfeld)} \\
 \rho(x, y, z, t) & \text{(Dichtefeld)} \\
 dm \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}_p + \vec{F}_{visc} + \vec{F}_{ext} &
 \end{array}$$

Navier-Stokes-Gleichung

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \vec{u} = -\text{grad } p + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{u}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 "F_p" & "F_{ext}" & "F_{visc}"
 \end{array}$$

9.6.1 Kontinuitätsgleichung:

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{\Delta m}{\Delta t} = \text{const} \\
\phi &= \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho A_i \Delta x}{\Delta t} \\
&= \rho A_i v_i \\
\rho A_1 v_1 &= \rho A_2 v_2 \\
A_1 v_1 &= A_2 v_2 \\
W &= F \Delta x = -\Delta p \Delta V = \frac{1}{2} \Delta m (v_2^2 - v_1^2) + \Delta m g (h_2 - h_1) \\
-\Delta p &= \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_2 - \rho g h_1 \\
p_1 - p_2 &= \dots \\
p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 &= p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2
\end{aligned}$$

Definition 9.12 (Bernoullische Gleichung)

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{const}$$

9.6.2 Reibung in Flüssigkeiten

Merke für Flüssigkeiten keine statischen Scherkräfte, aber es gibt dynamische Scherkräfte.

Experiment: Notwendige Schubspannung

$$\tau = \frac{F}{A} \sim \frac{dv_x}{dy}$$

Schubspannung ist proportional zum Geschwindigkeitsgradienten.

Definition 9.13 (Newtonsches Reibungsgesetz:)

$$\tau = \frac{F_R}{A} = \eta \frac{dv_x}{dy}$$

$$F_R = \eta A \frac{dv_x}{dy}$$

η nennt man dynamische Scherviskosität.

9.6.3 Strömung durch ein Rohr mit kreisförmigen Querschnitt (Hagen-Poiseuille)

$$\Delta p = p_2 - p_1$$

$$F = \Delta p \pi r^2$$

$$A = 2\pi r L$$

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{\Delta p \pi r^2}{2\pi r L} = -\eta \frac{dv}{dr} \quad (\text{Newton!})$$

$$v(r) = \int_{v(r)}^{v(R)=0} -dv = \int_r^R \frac{\Delta p r}{2\eta L} dr = \frac{\Delta p}{4\eta L} (R^2 - r^2)$$

$$dV = 2\pi r dr v(r) \Delta t$$

$$\begin{aligned} \Delta V &= \int_0^R 2\pi r dr v(r) \Delta t \\ &= \frac{2\pi \Delta p}{2\eta L} \Delta t \int_0^R (R^2 r - r^3) dr \\ &= \frac{2\pi \Delta p}{2\eta L} \left(\frac{1}{4} R^4 - \frac{1}{4} R^4 \right) \Delta t \end{aligned}$$

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi \Delta p}{8\eta L} R^4 \sim R^4 \bar{v} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{A \Delta x}{A \Delta t} = \frac{dV}{dt} \frac{1}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8\eta L} \Delta p$$

(Hagen-Poiseuille-Gesetz)

$\bar{v} \sim \Delta p$ typisch für laminare Strömung

Turbulenz: $\Delta p \sim \bar{v}^2$

Vergleich:

Stationäre laminare Strömung	Turbulente Strömung
$\dot{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$	$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$
Stromflächen	keine Vorhersage der Teilchenbahnen
$F_R \sim \vec{v}$	$F_W \sim \vec{v}^2$

Reynold-Kriterium:

$$Re < Re_{krit} \quad (\text{laminar})$$

$$Re > Re_{krit} \quad (\text{turbulent})$$

Beispiel 9.14 Für ein rundes Rohr mit Radius R gilt:

$$Re = \frac{2\rho \bar{v} R}{\eta}, Re_{krit} = 2000 - 2300$$

9.6.4 Strömungswiderstand von glatten Körper

Frage: Welche Kraft wird auf einem Körper ausgeübt, der sich mit Geschwindigkeit v durch eine Flüssigkeit bewegt?

1. Laminare Strömung: $F_N \sim v$

Definition 9.15 (Gesetz von Stokes) Strömungswiderstand einer Kugel

$$F_W = F_R = 6\pi\eta r v$$

Gesetz von Stokes wichtig für die gesamte Naturwissenschaft! (Sedimentation, Staubteilchen, Milikanversuch...)

2. Turbulente Strömung: $F_N \sim v^2$ Qualitativer Beweis: Teilchen, die mit der Strömungsgeschwindigkeit \vec{v}_K auf den Körper mit Konturfläche A auftreffen, werde im Staupunkt gebremst. Dadurch steigt der Druck p_0 um Δp . Hinter dem Körper werden die Teilchen in eine turbulente Strömung überführt. Deren Geschwindigkeit entspricht ungefähr der Strömungsgeschwindigkeit v_k , weshalb der Druck hinter dem Körper wieder auf dem alten Druck p_0 absinkt. Die Druckdifferenz zwischen Vorder- und Rückseite des Körpers gibt den Druckwiderstand. Es gilt dann:

- Strömung ungestört: $p_0 + \frac{1}{2}\rho \vec{v}_k^2$
- Druck vor dem Körper: $p_0 + \Delta p$
- Druck hinter dem Körper: $p_0 + \frac{1}{2}\rho \overline{v^2}$
- $\Rightarrow F_W \approx A\Delta p = A\frac{1}{2}\rho \vec{v}_K^2 = A\frac{1}{2}\rho \overline{v^2}$

Strömungswiderstand = Staudruck \times Konturfläche!!

Aber: Der Strömungswiderstand hängt auch von der Form des Körpers ab. \Rightarrow Einführung des „ c_W -Wertes“ für quantitative Beschreibung:

$$F_W = v_W \frac{1}{2}\rho v^2 A$$

10 Wärmelehre

Energieerhaltung: Wichtiges Konzept der Mechanik. Es gilt:

$$E_{pot} + E_{kin} = \text{const}, \Delta E = 0$$

Aber: Obiges Gesetz gilt nur für konservative Kräfte. Beim Auftreten dissipativer Kräfte, zum Beispiel Reibung, geht mechanische Energie verloren. \Rightarrow Umwandlung von Energie in Wärme, Beobachtung: Temperaturerhöhung. Idee zur Rettung des Energiesatzes: Einführung der sogenannten „inneren Energie“ \Rightarrow *Thermodynamik, Temperaturbegriff*

Definition 10.1 (Wärme) Wärme ist ein makroskopisches Maß für den statischen Mittelwert der kinetischen Energie mikroskopischer Objekte. Ist mit deren Relativbewegung auch eine potentielle Energie verknüpft, so tritt sie zur Wärmeenergie hinzu.

Der Wärmebegriff ist damit nur sinnvoll für makroskopische Systeme, das heißt Systeme mit vielen mikroskopischen Objekten (Atome, Moleküle, . . .). Wärmeenergie = innere Energie eines Körpers. (Lange- und Bewegungsenergie des Schwerpunktes werden nicht berücksichtigt).

- Thermodynamik: phänomenologische Beschreibung. Das heißt makroskopische, phänomenologische Beschreibung thermodynamischer Vorgänge. Neue Größen: Temperatur T , Wärme Q , Entropie S , . . . Formulierung über Zustandsgleichungen und 3 Hauptsätze
- Statistische Mechanik: statistische Beschreibung. Das heißt mikroskopische, statistische Beschreibung thermodynamischer Vorgänge. Basis: Gesetzmäßigkeiten der Mechanik und statistische Beobachtungen. Zustandsgrößen: statistische Mittelwerte des Teilchenkollektivs.

10.1 Temperaturbegriff und Wärmeausdehnung

Temperaturbegriff erscheint aufgrund unserer Erfahrung vertraut. (Wahrnehmung von warm und kalt). Aber: Qualitatives Temperaturempfinden kann trügen. Also: Physikalische Beschreibung erfordert ein genaueres Maß! Nutze Erfahrung: Bringt man zwei Körper unterschiedlicher Temperatur für längere Zeit zusammen so heben sie schließlich die gleiche Temperatur. Beide Körper sind dann im thermischen Gleichgewicht. Das heißt: Temperatur beschreibt den Zustand eines Körpers.

Definition 10.2 (Nullter Hauptsatz der Wärmelehre) Befinden sich zwei Körper im thermischen Gleichgewicht mit einem dritten, so stehen sie auch untereinander im thermischen Gleichgewicht.

Der nullte Hauptsatz erlaubt die Definition einer Temperaturskala über Temperaturfixpunkte, zum Beispiel Gefrier- und Siedepunkt von Wasser. Konstruktion von Thermometern über die Ausnutzung von temperaturabhängiger Materialeigenschaften: zum Beispiel Volumenausdehnung mit steigender Temperatur, Temperaturabhängige Längenänderung, Änderung des elektrischen Widerstands

10.1.1 Volumenausdehnung von Gasen

Experimentelle Beobachtung: Gasvolumina vergrößern sich bei Erwärmung. Zur Temperaturdefinition. Annahme: $\Delta V \sim \Delta T$. Das heißt lineare Abhängigkeit wird in die Definition reingesteckt!

Celsius-Skala:

- Fixpunkt 1: $T = 0^\circ\text{C}$
- Fixpunkt 2: $T = 100^\circ\text{C}$

Quantitativ:

Definition 10.3 (Gesetz von Gay-Lussac)

$$V(T) = V_0(1 + \gamma T)$$

- $p = \text{const}$
- T : Temperatur
- V_0 : Gasvolumen bei $T = 0^\circ\text{C}$

Experimentelle Beobachtungen:

$$\gamma = \frac{1}{273.15^\circ\text{C}}$$

für alle Gase, falls T groß und p klein. Damit folgt: $V(T) = 0$ für $T = -273.15^\circ\text{C}$ wenn man Gaseigenschaften bis $V = 0$ extrapoliert. Dieser Sachverhalt legt die Definition einer neuen von Wasser unabhängigen Temperaturskala nahe.

Definition 10.4 (Absolute Temperaturskala) • Fixpunkt 1: $T = 0\text{ K} = -273.15^\circ\text{C}$ (absoluter Nullpunkt)

• Fixpunkt 2: $T = 273.16\text{ K}$ (Tripelpunkt des Wassers)

Unterteilung in Gradschritten bleibt erhalten. Das heißt $\Delta T = 1^\circ\text{C} \hat{=} \Delta T = 1\text{ K}$ Einheit: Kelvin, Basisgröße der Physik, SI-Einheit.

10.1.2 Volumen und Längenausdehnung fester und flüssiger Stoffe

Experiment: Bei Erwärmung dehnen sich Körper im Allgemeinen aus. Man findet:

$$\Delta L = \alpha L \Delta T$$

α : Längenausdehnungskoeffizient.

Für kleine $\alpha \Delta T$ folgt:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{L} &= \alpha dT \\ \ln L - \ln L_0 &= \alpha \Delta T \\ L &= L_0 e^{\alpha \Delta T} \approx L_0 (1 + \alpha \Delta T) \end{aligned}$$

mit L_0 : Länge bei $T = T_0$ Volumenausdehnung:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \gamma V_0 \Delta T \\ V &= V_0 (1 + \gamma \Delta T) \end{aligned}$$

mit V_0 : Volumen bei $T = T_0$.

Es gilt: $\gamma \approx 3\alpha$ Bemerkung:

$$\begin{aligned} V &= l_1 l_2 l_3 \\ \frac{dV}{dT} &= l_1 l_2 \frac{dl_3}{dT} + l_1 l_3 \frac{dl_2}{dT} + l_2 l_3 \frac{dl_1}{dT} \\ \gamma &= \frac{1}{V} \frac{dV}{dT} = \frac{1}{l_3} \frac{dl_3}{dT} + \frac{1}{l_2} \frac{dl_2}{dT} + \frac{1}{l_1} \frac{dl_1}{dT} \end{aligned}$$

für kleine ΔT

10.1.3 Anomalie des Wassers

Wasser: Keine Ausdehnung bei Erwärmung zwischen 0 °C und 4 °C. Stattdessen: Volumen nimmt mit steigender Temperatur ab. Wichtige Eigenschaft! Garantiert Leben im Wasser aufgrund von Eisbildung an Oberfläche.

10.2 Zustandsgleichung idealer Gase

Wir wissen:

$$pV = \text{const} \quad (\text{für } T = \text{const} (\text{Boyle} - \text{Mariotte}))$$

$$V = V_0(1 + \gamma T) \text{ für } p = \text{const} (\text{Gay-Lussac})$$

Wähle absolute Temperaturskala. Dann folgt für Gay-Lussac:

$$V = V_0 \gamma T$$

$$V_0 = V(273.15 \text{ K}), \gamma = \frac{1}{273.15 \text{ K}}$$

Also :

Boyle Mariotte

$$pV = \text{const}$$

Gay-Lussac

$$V = V_0 \gamma T$$

$$pV = pV(p, T) = p_0 V(p_0, T) = p_0 V(p_0, T_0) \gamma T = p_0 V_0 \gamma T \sim T$$

Satz 10.5 (Boyle-Mariotte-Gay-Lussac) Für ideale Gase gilt das Boyle-Mariotte-Gay-Lussac Gesetz

$$pV \sim T, \wedge \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \text{const}$$

$$p \sim T \text{ für } V = \text{const}$$

Frage: Was bedeutet „const“ in dieser Gleichung?

Erwartung: Hängt von Stoffmenge ab. Hierzu: Gedankenexperiment: Fasse zwei identische Kisten gefüllt mit idealem Gas zu einer Kiste zusammen:

1 Kiste

$$p_0 V_0 = \xi T_0$$

2 zusammengefasste Kisten

$$p_0 2V_0 \sim T_0$$

Also: Verdopplung von ξ !. Ansatz: $\xi \sim$ Gasmenge

$$\begin{aligned} \Rightarrow pV &= k_B N T \\ k_B &= 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \end{aligned} \quad \text{(Boltzmannkonstante)}$$

Definition 10.6 (Mol) Das Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das das eben soviel Einzelteilchen besteht, wie Atome im 12 Gramm des Kohlenstoffnuklids ^{12}C enthalten sind. Bei Benutzung des Mol müssen die Einzelteilchen spezifiziert sein und können Atome, Moleküle, Ionen, Elektronen sowie andere Teilchen oder Gruppen solcher Teilchen genau angegebener Zusammensetzung sein.

$$1 \text{ mol} \hat{=} 6.022 \times 10^{23} \text{ Teilchen}$$

Avogadro-Zahl:

$$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Satz 10.7 (Zustandsgleichung idealer Gase)

$$\begin{aligned} pV &= n \underbrace{N_A k_B}_R T \\ pV &= nRT \end{aligned}$$

mit R (universelle Gaskonstante):

$$R = 8.314 \, 51 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}$$

Für Normalbedingungen:

$$p_0 = 1013 \text{ mbar}$$

$$T_0 = 273.15 \text{ K}$$

$$n = 1$$

$$V_0 = 22.4 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 22.4 \text{ L}$$

10.3 kinetische Gastheorie

Bisher: Beschreibung mit Hilfe makroskopische Zustandsgrößen.

Jetzt: Ableitung makroskopischer-Zustandsgrößen aus mikroskopischen Eigenschaften.

Grundidee: Temperatur $\hat{=}$ innere Energie $\hat{=}$ Bewegungsenergie der Teilchen.
Zustandsgrößen $\hat{=}$ Mittelwert mikroskopischer Größe.

Modell des idealen Gases:

- N Punktteilchen (Atome, Moleküle) der Masse m mit statistisch verteilten Geschwindigkeiten ($N \gg 1$)
- Gasteilchen sind starre Kugeln, mittlerer Abstand r zwischen den Gasteilchen sind groß gegen Kugelradius r_0 . (Das heißt Eigenvolumina sind vernachlässigbar)
- Einzige Wechselwirkung: elastische Stöße, das heißt es gelten sowohl Impuls- als auch Energieerhaltung. (Keine innere Anregung der Gasteilchen)
- Stöße mit den Wänden des einschließenden Behälters sind ebenfalls perfekt elastisch.

Druck: Impulsübertrag der Gasteilchen auf Behälterwand. Das heißt

$$\text{Druck} = \frac{F}{A}, F = \dot{p}$$

Betrachte Gesamtkraft auf Fläche A :

$$\begin{aligned} F = \dot{p} &= \frac{\Delta p}{\Delta t} \\ &= \frac{\text{Impulsübertrag}}{\text{Stoß}} \cdot \frac{\text{Stöße}}{\text{Zeit}} \\ &= 2mv_x \cdot \frac{\text{Stöße}}{\text{Zeit}} \end{aligned}$$

Aber v_x ist nicht für alle Gasteilchen gleich, sondern statistisch verteilt. Erwartung: Verteilungsfunktion der v_x -Werte muss symmetrisch um $v_x = 0$ sein, da Gas ruht! Es gilt:

$$\begin{aligned} N &= \int_{-\infty}^{\infty} n(v_x) dv_x \\ \bar{v}_x &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} v_x n(v_x) dv_x = 0 \\ \overline{(v_x^2)} &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 n(v_x) dv_x \neq 0 \end{aligned}$$

Damit folgt für Gesamtkraft F

$$F = \dot{p} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{\tilde{N}} p_i = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} 2mv_x \tilde{N}(v_x) dv_x$$

$\tilde{N}(v_x)$: Anzahl Gasteilchen, die mit Geschwindigkeit v_x im Zeitintervall dt auf Behälterwand treffen,
Bedingung: $v_x > 0$

Betrachte Gasvolumen mit Querschnittsfläche A :

$$\tilde{N}(v_x) = \Theta(v_x) n(v_x) v_x dt A \quad (\Theta: \text{Heavyside Funktion})$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} 2mv_x \tilde{N}(v_x) dv_x \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} 2mv_x n(v_x) v_x dt A dv_x \\ &= \frac{1}{2} mA \int_{-\infty}^{\infty} 2v_x^2 n(v_x) dv_x \\ &= mAN \overline{v_x^2} \\ &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 n(v_x) dv_x \end{aligned}$$

Damit folgt für den Gesamtdruck auf Behälterwand mit Querschnittsfläche A :

$$p = \frac{F}{A} = mN \overline{v_x^2}$$

Dabei ist N die Teilchenanzahl pro Volumen.

Bisher: Betrachtung nur in einer Dimension.

Jetzt: Erweiterung auf drei Dimensionen.

Es gilt:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}, \overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \rightarrow \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

(Geschwindigkeiten der Gasteilchen sind isotrop verteilt! Gas ruht!) \implies

$$p = \frac{1}{3} N m \overline{v^2} = \frac{2}{3} N \overline{E_{kin}}$$

- $\overline{E_{kin}} = \frac{1}{2} m \overline{v^2}$
- p : Druck
- N : Gesamtzahl Gasteilchen pro Volumen!
- E_{kin} : mittlere kinetische Energie

Vergleich mit Zustandsgleichung idealer Gase

$$pV = nRT = k_B n N_A T = k_B (NV) T$$

$$p = k_B N T$$

$$\overline{E_{kin}} = \frac{3}{2} k_B T$$

Damit ergibt sich die Zustandsgleichung idealer Gase aus der Bewegungsenergie der Gasteilchen, das heißt man findet

- Äquivalenz zwischen phänomenologischer und mikroskopischer Beschreibung
- Konsistente Definition eines idealen Gases

Zum Ursprung des Faktors $\frac{3}{2}$ in $\bar{E}_{kin} = \frac{3}{2}k_B T$:

Es gilt: $p = mN\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}mN\overline{v^2}$, das heißt Faktor 3 ergibt sich aus der Zahl möglicher Raumrichtungen beziehungsweise „Translationsfreiheitsgrade“. Legt nahe: Mittlere Energie eines Gasteilchens Pro Freiheitsgrad $= \frac{1}{2}k_B T$. Tatsächlich können bei realen Molekülen zusätzliche Rotations- und Schwingungsfreiheitsgrade auftreten, so dass die Zahl der Freiheitsgrade f insgesamt zunimmt. Die Energie der einzelnen Moleküle verteilt sich dann gleichförmig auf alle vorhandenen Freiheitsgrade. Es gilt: Gleichverteilungssatz oder Äquipartitionsprinzip:

$$\overline{E_{kin}} = f \frac{1}{2} k_B T$$

$$U = nN_A \frac{1}{2} f k_B T$$

nennt man **innere Energie**. Gesamtenergie, die aus der Wärmebewegung von Molekülen etc. resultiert. U_n fasst sowohl kinetische als auch (innere) potentielle Energie

10.4 Wärme, Wärmekapazität und latente Wärme

Beobachtung: Beim Erwärmen oder Abkühlen eines Körpers wird Wärme mit der Umgebung ausgetauscht.

Definition 10.8 (Wärme) Wärme ist die zwischen zwei Systemen aufgrund eines Temperaturunterschieds ausgetauschte Energie

das heißt: Erwärmen findet durch Energieübertragung via Warenfluss statt.

Thermisches Gleichgewicht: Warenfluss zwischen zwei Systemen beziehungsweise System und Umgebung in beide Richtungen gleich oder Nullpunkt Temperatur gleich!

Experiment: Temperaturnausgleich System A und B.

$$(T_A - T)m_A \sim (T - T_B)m_B$$

das heißt größere Masse hat einen größeren Einfluss! Proportionalität hängt von der Art der Materialien ab. Einführung zweier Materialkonstanten!

$$C_A(T_A - T)m_A = C_B(T - T_B)m_B$$

$$Q_A = Q_B$$

- C_A, C_B : materialspezifische Konstanten
- Q_A : Von System A abgegebene Wärme
- Q_B : Von System B aufgenommene Wärme

Definition 10.9 (Wärmemenge)

$$Q = cm\Delta T$$

c : spezifische Wärmekapazität

Kalorie: 1 Kalorie ist die Wärme, mit der man 1 g Wasser um 1 °C erwärmen kann.

Begriffe:

- c = spezifische Wärmekapazität, spezifische Wärme
- $C = cm$ = Wärmekapazität einer Masse m
- $c_m = c_{mol} = cm_{mol}$ = molare Wärmekapazität, spezielle Molwärme

$$Q = c_m n \Delta T$$

Jetzt: Latente Wärme. Beobachtung: Temperatur eines Körpers ändert sich linear mit der zugeführten Wärmeenergie. Aber! Experiment: Poleis schmelzen.

1. Aufheizen $Q = cm\Delta T$ ✓
2. Phasenübergang $Q = \lambda m$
Zuführen von Wärme ohne Temperaturerhöhung. Quantitative Beobachtung: Wärmemenge Q proportional zur Masse m .

Phasenübergänge:

1. Energie wird zum Aufbrechen der Teilchenbindungen gebraucht \implies Wärmezufuhr
 - Schmelzen: fest \rightarrow flüssig
 - Verdampfen: flüssig \rightarrow gasförmig
 - Sublimieren: fest \rightarrow gasförmig
2. Bindungsenergie wird frei \rightarrow Wärmeabgabe
 - Gefrieren / Erstarren: flüssig \rightarrow fest
 - Kondensieren: gasförmig \rightarrow flüssig
 - Kondensieren: gasförmig \rightarrow fest

Die Wärmeenergie, die ein Körper bei einem Phasenübergang aufnimmt beziehungsweise abgibt, ohne das damit eine Temperaturänderung einhergeht, nennt man **latente Wärme**, es gilt:

$$Q = \lambda m$$

mit Q : aufgenommene/abgegebene Wärme, m : Masse. Dabei ist λ die (latente) Schmelzwärme oder (latente) Verdampfungswärme.

$$U = nN_a \frac{1}{2} f k_B T = n \frac{1}{2} f R T, R = k_b N_a, Q = c_m \Delta T, Q = \lambda m$$

10.5 Arbeit und Wärme

Mechanische Arbeit $\xrightarrow{\text{Reibung}}$ Wärme

$$\begin{aligned} W &= Fs \\ &= mg(\pi d)n \\ Q &= c_m \Delta T \\ c_m &= 65 \text{ cal K}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta T &\approx 3 \text{ K} \rightarrow Q \sim 200 \text{ cal} \\ 1 \text{ cal} &\approx 4.3 \text{ J} \rightarrow W \sim 870 \text{ J} \end{aligned}$$

Genau:

$$1 \text{ cal} \approx 4.186 \text{ J}$$

10.6 erster Hauptsatz der Wärmelehre

$$\begin{aligned} \Delta U &= \Delta Q + \Delta WU &= nN_a \overline{E_{kin}} \\ &= \frac{1}{2} nRT \end{aligned}$$

- ΔQ : Wärmezufuhr
- ΔW : aus System geleitete Arbeit
- $\Delta Q > 0$: Wärmezufuhr, $\Delta W > 0$, Arbeit wird **aus** System verrichtet
- $\Delta Q < 0$: Wärmezufuhr, $\Delta W < 0$, Arbeit wird **von** System verrichtet

Bei uns: Anders als in klassischer Mechanik

10.7 Volumenarbeit und PV-Diagramme idealer Gase

Thermodynamische Prozesse, Kreisprozesse: ideale Gase! Zustandsgrößen: n, p, V, T (Q ist **keine** Zustandsgröße)

$$pV = nRT$$

Verschieben des Kolbens:

- Gegen Gasdruck nach **unten**: $\Delta W > 0$
- Gegen Außendruck nach **oben**: $\Delta W < 0$

$$dW = Fds = -pAdl = -pdV$$

$$dW < 0 \text{ für } dV > 0 \quad dW > 0 \text{ für } dV < 0 \implies W = - \int_{v_1}^{v_2} p dV$$

pV -Diagramm:

$$pV = nRT$$

- Isotherme Zustandsänderung: $T = \text{const}$
 - $T = \text{const}$
 - $pV = nRT \rightarrow p \sim \frac{1}{V}$
 - $\Delta U_{12} = 0 = \Delta Q_{12} + \Delta W_{12}$
 - $dU = dQ - pdV = 0$
 - $\int_1^2 dQ = \int_1^2 p dV \rightarrow \Delta Q_{12} = \int_1^2 \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$
 - $\Delta W_{12} = -\Delta Q_{12} = -nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$
- Isobare Zustandsänderung: $P = \text{const}$
 - $\Delta W_{12} = -p(V_2 - V_1) = -nR(T_2 - T_1)$
 - $\Delta Q_{12} = nc_p(T_2 - T_1)$
 - $\Delta U_{12} = \Delta W_{12} + \Delta_{12} = n \underbrace{(c_p - R)}_{\frac{f}{2}R}(T_2 - T_1)$
- Isochore Zustandsänderung $V = \text{const}$
 - $\Delta W_{12} = 0$
 - $\Delta Q_{12} = nc_v(T_2 - T_1)$
 - $\Delta U_{12} = \Delta Q_{12} = nc_v(T_2 - T_1)$
- Adiabatische Zustandsänderung $Q = \text{const}, \Delta Q = 0$

$$- \Delta Q_{12} = 0, \Delta U_{12} = \Delta W_{12}$$

$$dU = dW$$

$$dU = \frac{1}{2} f n R dT = n c_v dT dW = -p dV$$

$$dU = dW \implies n c_v dT = -p dV = -\frac{n R T}{V} dV$$

$$c_v \frac{dT}{T} = -R \frac{dV}{V}$$

$$c_v \ln T = -R \ln V + \text{const}$$

$$c_v \ln T + R \ln V = \text{const}$$

$$\ln T^{c_v} + \ln V^R = \text{const}$$

$$e^{\ln T^{c_v} V^R} = e^{\text{const}}$$

$$T^{c_v} V^R = \text{const}$$

$$T^{c_v} V^{c_p c_v} = \text{const}$$

$$T V^{\frac{c_p - c_v}{c_v}} = \text{const}$$

$$\gamma - 1 := \frac{c_p - c_v}{c_v}$$

$$\gamma = \frac{f + 2}{f}$$

Isotropenindex:

$$T V^{\gamma-1} = \text{const}(pV) V^{\gamma-1} = p V^{\gamma} = \text{const}$$

$$T^{\gamma} p^{1-\gamma} = \text{const}$$

Definition 10.10 (Adiabatengleichungen:)

$$p V^{\gamma} = \text{const}, p \sim V^{-\gamma}$$

$$T V^{\gamma-1} = \text{const}, T \sim V^{1-\gamma}$$

$$T^{\gamma} p^{1-\gamma} = \text{const}, T^{\gamma} \sim p^{\gamma-1}$$

Temperaturerhöhung ist bei konstantem Volumen effektiver als bei konstantem Druck

- Isobar: $\Delta Q = \Delta h - \Delta w$
- Isochor: $\Delta Q = \Delta u$

$$C_v = \frac{f}{2} R, c_p = \frac{f+2}{2} R = \underbrace{\frac{f}{2} R}_{c-v} + R$$

10.8 Zusammenfassung: Spezielle Zustandsänderung idealer Gase

Es gilt

$$pV = nRT, \Delta U = \Delta Q + \Delta W$$

mit $R = 8.314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$

1. Isotherme Zustandsänderung $\Delta T = 0$

$$\Delta U = 0, p \sim \frac{1}{V}$$

$$\Delta Q = -\Delta W = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

2. Isochore Zustandsänderung, $\Delta V = 0$

$$\Delta W = 0$$

$$\Delta U = \Delta Q = nc_V \Delta T$$

3. Isobare Zustandsänderung, $\Delta p = 0$

$$\Delta Q = nc_p \Delta T$$

$$= \Delta U - \Delta W$$

$$\Delta W = -p \Delta V$$

$$\Delta Q = nc_v \Delta T = n \frac{f}{2} R \Delta T$$

$$\Delta Q = nc_p \Delta T = n \frac{f+2}{2} R \Delta T$$

$$\implies C_p = c_v + R$$

4. Adiabatische Zustandsänderung, $\Delta Q = 0$ (Q keine Zustandsgröße!)

$$\Delta U = \Delta W$$

$$pV^\gamma = \text{const}$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}$$

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}$$

Verfügbare Freiheitsgrade? (Vorgriff auf Quantentheorie)

$$C_v = \frac{f}{2} R, C_p = \frac{f+2}{2} R$$

- f : verfügbare Freiheitsgrade
- R : universelle Gaskonstante

Mittlere Energie pro Freiheitsgrad:

$$\bar{E} = \frac{1}{2} k_B T$$

$$U = N \bar{E} = n N_A \frac{f}{2} k_B T = n \frac{f}{2} R T = n c_v T$$

$$f = ?$$

Klassische:

Gleichverteilungssatz oder Äquipartitionsprinzip, Gleichmäßige Verteilung der Energie auf alle Freiheitsgrade.

Quantenmechanik:

Einfrieren von Freiheitsgraden, das heißt nicht alle möglichen Freiheitsgrade verfügbar. Hängt von Temperatur ab (klassisch nicht erklärbar)

10.9 Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre

Erster Hauptsatz: Energieerhaltung, Energieflüsse.

Zweiter Hauptsatz: Richtung thermodynamischer Prozesse.

Erfahrung: Wärme fließt nur vom wärmeren zum kälteren Körper. Mechanische Arbeit kann vollständig in Wärme, nicht aber Wärme vollständig in mechanische Arbeit umgewandelt werden.

Satz 10.11 (Zweiter Hauptsatz) Wärme fließt von selbst nur vom wärmeren zum kälteren Körper, nie umgekehrt.

Eine mehr quantitative Formulierung erfordert die Einführung und Betrachtung reversibler und irreversibler Prozesse.

Definition 10.12 (Reversibler Prozess) Langsam ablaufende Zustandsänderung, bei der jeder einzelne Schritt einer infinitesimalen Veränderung des Systems entspricht, das sich verändernde System befindet sich damit zu jedem Zeitpunkt im Gleichgewicht. Reversible Prozesse sind umkehrbar.

Definition 10.13 (Irreversibler Prozess) Zustandsänderung, bei der sich ein thermodynamisches System stark aus seiner Gleichgewichtslage entfernt. Während des Vorgangs sind die (statistischen) Zustandsgrößen (e.g. p , T) nicht definiert. Irreversible Prozesse sind nicht umkehrbar.

Merke:

- Reversibler Prozess - Nach Umkehrung keine (beobachtbare) Veränderung am System und an der Umgebung
- Irreversibler Prozess - Nach Umkehrung ist das System verändert, ebenso wie auch die Umgebung

10.9.1 Kreisprozesse:

Anfangszustand = Endzustand! \implies

$$\Delta U = 0 \implies \Delta Q = -\Delta W, \Delta W = - \oint p dV$$

- Rechtsläufig: Wärme \rightarrow Arbeit, System leistet Arbeit
- Linksläufig: Arbeit \rightarrow Wärme, Arbeit wird am System geleistet

Interessant:

- zugeführte / abgeführte mechanische Arbeit $\Delta W > 0 / \Delta W < 0$
- zugeführte / abgeführte Wärme $\Delta Q > 0 / \Delta Q < 0$

Prinzip Wärmekraftmaschine

Definition 10.14 (Wirkungsgrad)

$$\eta = \frac{|\Delta W|}{Q_w} = \frac{\text{geleistete Arbeit}}{\text{zugeführte Wärme}} = \frac{Q_W - |Q_K|}{Q_W} = 1 - \frac{|Q_K|}{Q_W}$$

Definition 10.15 (Leistungszahl)

$$\varepsilon_{\text{Wärme}} = \frac{|Q_W|}{\Delta W} = \frac{1}{\eta} > 1 \quad (\text{auch Wirkungsgrad einer Wärmepumpe})$$

$$\varepsilon_{\text{Kälte}} = \frac{Q_K}{\Delta W} = \frac{1}{\eta} - 1 \quad (\text{Auch Wirkungsgrad einer Kältemaschine})$$

Es gilt: $\eta \leq 1$!

Frage: $\eta = 1$ möglich?

Optimale Maschine:

- keine Wärmeverluste durch Reibung etc
- langsam ablaufende Prozess, System immer im Gleichgewicht

das heißt: Betrachtung reversibler Prozesse! Bemerkung: Optimale Maschine in der Realität offenbar nicht realisierbar, Idealisierung!

10.9.2 Carnot-Prozess

Idealisierte Maschine zur Untersuchung der Grundlagen thermodynamischer Prozesse, Realisierung (auch näherungsweise) schwierig

1. Isotherme Expansion ($a \rightarrow b$), $\Delta U = 0$ Wärmezufuhr Q_1
2. Adiabatische Expansion ($b \rightarrow c$), $\Delta Q = 0$, $T_1 \rightarrow T_2$
3. Isotherme Kompression ($c \rightarrow d$), $\Delta U = 0$ Wärmezufuhr Q_2
4. Adiabatische Kompression ($d \rightarrow a$), $\Delta Q = 0$, $T_2 \rightarrow T_1$

Wirkungsgrad:

$$\eta_c = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1}$$

Bemerkung: Schritte 2 und 4 speichern Arbeit zwischen.

Schritt 1: Isotherme:

$$Q_1 = \Delta Q_{ab} = nRT_1 \ln \frac{V_b}{V_a} > 0 \quad \text{da } V_b > V_a$$

$$\Delta W_{ab} = -\Delta Q_{ab}$$

Schritt 3: Isotherme:

$$Q_2 = \Delta Q_{cd} = nRT_2 \ln \frac{V_d}{V_c} < 0 \quad \text{da } V_c > V_d$$

$$\Delta W_{cd} = -\Delta Q_{cd}$$

Außerdem: Schritt 2: Adiabate:

$$T_1 V_b^{\gamma-1} = T_2 V_c^{\gamma-1} \rightarrow \frac{V_b}{V_c} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Schritt 4: Adiabate:

$$T_2 V_d^{\gamma-1} = T_1 V_a^{\gamma-1} \rightarrow \frac{V_a}{V_d} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Adiabate insgesamt:

$$\frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d}$$

Also: Wirkungsgrad einer Carnot-Maschine:

$$\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} < 1$$

Wichtig: T_1, T_2 sind absolute Temperaturen in Kelvin! Maximaler Wirkungsgrad $\eta_c = 1$ kann nur für $T_2 = 0 \text{ K}$ erreicht werden, hieraus ergibt sich eine alternative thermodynamische Definition der absoluten Temperaturskala.

10.9.3 Ottomotor

1. Adiabate: $\Delta Q = 0, \Delta W_{ab} = \Delta U_{ab}$
2. Isochore: $\Delta W, Q_1 = \eta c_V (T_c - T_b) < 0$
3. Adiabate: $\Delta Q = 0, \Delta W_{cd} = \Delta U_{cd}$
4. $\Delta W = 0, Q_2 = \eta c_v (T_a, T_d) > 0$

$$\eta_0 = \frac{|\Delta W|}{Q_2}, \Delta W = \Delta U_{ab} + \Delta U_{cd} = nc_v(T_b - T_a) + nc_v(T_d - T_c) < 0$$

$$= \frac{T_a + T_c - T_b - T_d}{T_a - T_d} = 1 - \frac{T_b - T_c}{T_a - T_d} = 1 - \frac{T_b}{T_a} \frac{1 - \frac{T_c}{T_b}}{1 - \frac{T_d}{T_a}}$$

Aus Adiabatangleichung erhält man $\frac{T_b}{T_a} = \frac{T_d}{T_c}$:

$$1 - \frac{T_b}{T_a} < \eta_c$$

10.9.4 Stirling-Motor

1. Isotherme
2. Isophore
3. Isotherme
4. Isophore

Ohne Regenerator:

$$\eta_s = \frac{R \ln \frac{V_b}{V_a} (T_1 - T_2)}{RT_2 \ln \frac{V_b}{V_a} + c_v (T_1 - T_2)}$$

Mit Regenerator:

$$\eta_s = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \eta_c$$

10.9.5 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Satz 10.16 (2. Hauptsatz der Thermodynamik) Es gibt keine periodisch arbeitende Maschine, die einen höheren Wirkungsgrad hat als der Carnot-Prozess. Diese Aussage ist äquivalent zum Clausius-Prinzip!

Annahme: Es gibt Wundermaschine mit $\eta > 0$

\Rightarrow Wärmereservoir: $\Delta Q_x, T_1 > T_2 \rightarrow$ Wundermaschine $\Delta W \rightarrow$ Kältereservoir: $\Delta Q_y, T_2 < T_1$

$$\Delta W = \eta \Delta Q_x$$

$$\Delta W = \Delta Q_x - \Delta Q_y$$

Wenn man eine Carnot-Maschine mit ΔW betreibt, also \Rightarrow Wärmereservoir: $\Delta Q_1, T_1 > T_2 \leftarrow$, ΔW Carnot-Prozess \leftarrow Kältereservoir: $\Delta Q_2, T_2 < T_1$

$\Rightarrow \Delta Q_x < \Delta Q_1$

$$\Rightarrow \Delta W = \eta_c \Delta Q_1$$

$$\Delta W = \Delta Q_1 - \Delta Q_2$$

$$\Rightarrow \Delta Q_y < \Delta Q_2$$

\Rightarrow Wärme von Kalt nach Warm ohne Arbeit

10.10 Entropie

Zentraler Begriff der Thermodynamik!

- Kriterium für Reversibel und Irreversibel
- Erlaubt mathematische Formulierung des 2. Hauptsatzes
- Ordnungs- beziehungsweise Wahrscheinlichkeitsmaß

Betrachte Carnot-Prozess:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{|\Delta Q_2|}{\Delta Q_1}$$

$$-\frac{\Delta Q_2}{T_2} = \frac{\Delta Q_1}{T_1}$$

$$\frac{\Delta Q_1}{T_1} + \frac{\Delta Q_2}{T_2} = 0$$

$\frac{\Delta Q}{T}$ = reduzierte Wärmemenge.

Definition 10.17 (reversible Kreisprozesse)

$$\sum \frac{\Delta Q_{ij,rev}}{T_i} = 0$$

beziehungsweise

$$\oint \frac{dQ_{rev}}{T} = 0$$

Allgemeiner Kreisprozess:

$$\oint \frac{dQ_{rev}}{T} = 0$$

Definition 10.18 (irreversibler Kreisprozess)

$$\sum \frac{\Delta Q_{i,rev}}{T_i} < 0$$

beziehungsweise

$$\oint \frac{dQ_{rev}}{T} < 0$$

$$\oint \frac{dQ_{rev}}{T} = \oint \frac{dQ_{rev}}{T} + \int \frac{dQ_{extern}}{T} < 0$$

Weg A, B , Anfang: 1, Ende 2: Wegunabhängigkeit \implies :

$$\int_{1,A}^2 \frac{dQ}{T} = \int_{1,B}^2 \frac{dQ}{T}$$

Definition 10.19 (Entropie und Entropieänderung)

$$dS = \frac{dQ_{rev}}{T}, \Delta S = \int_1^2 \frac{dQ_{rev}}{T}$$

$$S(2) = S(1) + \int_1^2 \frac{dQ_{rev}}{T}$$

S : Entropie, ΔS , ds : Entropieänderungen, $[S] = \text{J K}^{-1}$ per Definition:

$$\Delta S = \oint \frac{dQ_{rev}}{T} = 0$$

\Rightarrow Bei einem reversiblen Kreisprozess bleibt die Entropie konstant

Beispiel 10.20 Arbeit \rightarrow Wärme

$$\Delta S = \frac{\Delta W}{T} = \frac{\Delta Q}{T} > 0$$

Beispiel 10.21 (Wärmeleitung) Zwei gleich große Wasserbehälter: $T_1, T_2, T_1 > T_2$ werden vermischt
 $\Rightarrow T_3, T_2 < T_3 < T_1$

$$\Delta Q_1 = c_m(T_3 - T_1) < 0$$

$$\Delta Q_2 = c_m(T_3 - T_2) > 0$$

$$\Delta Q_1 = -\Delta Q_2 \Rightarrow T_3 = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_3} \frac{dQ}{T} = c_m \int_{T_1}^{T_3} \frac{dT}{T} = c_m \ln \frac{T_3}{T_1}$$

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T_3} \frac{dQ}{T} = c_m \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} = c_m \ln \frac{T_3}{T_2}$$

mit $\Delta S_1 < 0$ und $\Delta S_2 > 0$, da $T_3 < T_1$ und $T_2 < T_3$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = c_m \ln \frac{T_3^2}{T_1 T_2} = c_m \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2} > 0 \quad (\text{wegen } (T_1 + T_2)^2 > 4 T_1 T_2)$$

das heißt: Beim Temperatenausgleich zweier Systeme nimmt die Entropie des Gesamtsystems zu.

Satz 10.22 (Zweiter Hauptsatz der Wärmelehre) Allgemein gilt:

In allen abgeschlossenen Systemen nimmt die Entropie im Laufe der Zeit zu ... Kurz: $\Delta s \geq 0$

(Merke: Entropie des Universums nimmt immer zu. \Rightarrow Zeitrichtung, dagegen: $E = \text{const}$)

Das heißt: Ein natürlich, das heißt von selbst ablaufender Prozess zwischen zwei Gleichgewichtszuständen wird nur in die Richtung ablaufen, in der die Entropie des (abgeschlossenen) Gesamtsystems zunimmt. Aussagen ebenfalls äquivalent zum Claudius-Prinzip, da $\Delta s < 0 \iff$ Existenz einer perfekten Kältemaschine (das heißt $\Delta W = 0$)

Frage: Was treibt die Zunahme der Entropie an?

Antwort ergibt sich über statistische Interpretation der Entropie:

- Streben nach Unordnung
- Streben in Richtung maximaler Wahrscheinlichkeit

Hierzu: Betrachte freie, isotherme Expansion eines idealen Gases . . .

- Zeitpunkt $t = 0$: Gas in Volumen V_1
- Zeitpunkt $t > 0$: Gas in Volumen $V_1 + V_2$

Irreversibler Prozess!

Wahrscheinlichkeit nach Ventilöffnung alle Gasteilchen im Volumen V_1 zu finden ist quasi Null. Sei $p(V)$ = Wahrscheinlichkeit **ein** Gasteilchen im Volumen V anzutreffen.

- $V = V_1 + V_2$
- $t = 0 : p(V_1) = 1, p(V_2) = 0$
- $t > 0 : p(V_1) = \frac{V_1}{V}, p(V_2) = \frac{V_2}{V}$

Jetzt: $W(V)$ = Wahrscheinlichkeit **alle** Gasteilchen im Volumen V anzutreffen \implies

$$W(V_1) = (p(V_1))^N$$

wobei N = Anzahl Gasteilchen, $N = n \frac{R}{k_B}$ sehr groß, $N \sim \mathcal{O}(10^{24})$

- Vorher ($t = 0$) : $W(V_1) = 1$
- Nachher ($t > 0$) : $W(V_1) = (\frac{V_1}{V})^N \approx 0$, da $\frac{V_1}{V} < 1$ und N extrem groß.

Logarithmieren:

- Vorher $\implies \ln W_{vor} = 0$
- Nachher $\implies \ln W_{nach} = \ln(\frac{V_1}{V})^N = N \ln(\frac{V_1}{V})$

Es folgt:

$$\ln W_{nach} = \frac{1}{k_B} n R \ln(\frac{V_1}{V_1 + V_2}) \implies k_B \ln W_{nach} = -n R \ln(\frac{V_1 + V_2}{V_1})$$

Jetzt: Entropieänderung für A ?

Problem: Entropieänderung ΔS kann für A nicht über $\int \frac{dQ}{T}$ bestimmt werden, da der Prozess nicht reversibel ist und während der Zustandsänderung kein thermodynamisches Gleichgewicht herrscht. Aber: Anfangs- und Endzustand von A und B sind gleich, das heißt Entropieänderung für beide ebenfalls gleich!

Bemerkung 10.23 Bezieht sich nur auf betrachtete Systeme, nicht auf System + Umgebung! Denn, im Fall A nimmt Gesamtentropie zu (Umgebung bleibt unverändert), während im Fall B die Gesamtentropie aufgrund der Wärmeentnahme aus Umgebung konstant bleibt

Also: Bestimme Entropieänderung über reversiblen Prozess B

$$\Delta S = \int_{V_1}^V \frac{dQ_{rev}}{T} = \frac{1}{T} \int_{V_1}^V dQ_{rev} = \frac{1}{T} \int_{V_1}^V p dV = nR \int_{V_1}^V \frac{dV}{V} = vR \ln \frac{V}{V_1} = nR \ln \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1} \right)$$

Vergleicht mit 10.10 ergibt:

$$\Delta S = -k_B \ln W_{nach} > 0$$

da $W_{nach} < 1$, beziehungsweise

$$\Delta S = k_B \ln \frac{1}{W_{nach}}, W_{vor} = 1 \implies \Delta S = k_B \ln \frac{W_{vor}}{W_{nach}} = k_B \ln \frac{1}{W_{nach}} - k_B \ln \frac{1}{W_{vor}}$$

Im Allgemeinen ist die Wahrscheinlichkeit w eines Zustands umgekehrt proportional zur Zahl der Realisierungsmöglichkeiten Ω , die für einen bestehenden thermodynamischen Zustand verfügbar sind, das heißt

$$\frac{1}{W} \sim \Omega$$

Damit

$$S = k_B \ln \Omega = k_B \ln \frac{1}{W} + \text{const}$$

Die Entropie ist proportional zum Logarithmus der Zahl der Realisierungsmöglichkeiten eines thermodynamischen Zustands. \implies

$$\Delta S = k_B \ln \frac{\Omega_{nach}}{\Omega_{vor}} = k_B \ln \frac{W_{vor}}{W_{nach}}$$

Es folgt:

$$\Delta S > 0$$

, da $W_{nach} < W_{vor}$ (siehe obiges Beispiel)

10.11 Thermodynamische Temperaturskala

(und 3. Hauptsatz der Wärmelehre)

10.11.1 Temperaturskala (via Carnot-Wirkungsgrad)

Es gilt:

$$1 - \eta = \frac{|\Delta Q_2|}{\Delta Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

mit $T_2 < T_1$. Wähle Fixpunkt $T_1 = 273.16 \text{ K}$ (Tripelpunkt des Wassers) \implies

$$T_2 = 273.16 \text{ K}(1 - \eta), \eta = 1 \implies T_2 = 0 \text{ K}$$

Definition 10.24 (Thermodynamische Temperaturskala) Ein Kelvin ist der 273.16 ste Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunkt des Wassers

10.11.2 Dritter Hauptsatz

Betrachte Kältemaschine:

$$\varepsilon_{klte} = \frac{1}{\eta} - 1 = \frac{\Delta Q_K}{\Delta W} = \frac{T_K}{T_W - T_K}$$

mit $T_W > T_K$. Arbeitsaufwand um $T_K = 0$ zu erreichen:

$$\Delta W = \Delta Q_K \frac{T_N - T_K}{T_K} \xrightarrow{T_K \rightarrow 0} \infty$$

\Rightarrow

Satz 10.25 (Dritter Hauptsatz der Wärmelehre) Es ist prinzipiell unmöglich den absoluten Temperaturnullpunkt $T = 0$ K zu erreichen.

Formulierung durch W.Nernst: Für reine Stoffe gilt:

$$S(T = 0 \text{ K}) = 0$$

10.12 Zusammenfassung thermodynamische Gesetze

- Erster Hauptsatz: $\Delta U = \Delta Q + \Delta W$ (Energieerhaltung). Es gibt kein Perpetuum Mobile erster Art.
- Zweiter Hauptsatz: Es gibt keine perfekte Kühlmaschine. Maximaler Wirkungsgrad $\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1}$. Es gibt kein Perpetuum Mobile zweiter Art. Die Entropie des Universums nimmt immer zu.
- Dritter Hauptsatz: Der absolute Temperaturnullpunkt ist unerreichbar

10.13 Thermodynamik realer Gase und Flüssigkeiten.

Bisher: ideales Gas, das heißt

- kein Eigenvolumen der Gasteilchen
- keine Wechselwirkung zwischen Gasteilchen
- $pV = nRT$

Ein ideales Gas bleibt immer gasförmig!

Aber: In der Realität Beobachtung von Phasenübergängen

10.13.1 Ausdehnung

Kovolumen:

$$V_K = \frac{4}{3}\pi(2r)^3 = 8V_a$$

mit V_a = Volumen der Gasteilchen. \Rightarrow Gesamtes Kovolumen:

$$V_N = \frac{1}{2}N(8V_a) = 4NV_a = 4(nN_a)V_a = nb$$

mit:

- $b = 4N_A V_a$
- $V_a = \frac{4}{3}\pi r^3$

Das Kovolumen muss vom verfügbaren Volumen für Gasteilchen abgezogen werden. Verlust an freiem Volumen erhöht Zahl der Wandanstöße \Rightarrow Druckerhöhung

10.13.2 Wechselwirkung

Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Gasteilchen durch Leenard-Jones-Potential \Rightarrow Langreichweitige Anziehungskraft.

$$U \sim \rho n \sim \frac{n}{V} n$$

$$\frac{dU}{dV} = \frac{an^2}{V^2} = -P_{innen}$$

Satz 10.26 (Van-der-Waals Gleichung)

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

\Rightarrow

$$p(V) = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

11 Transportprozesse

Nichtgleichgewichtszustände \Rightarrow Transport

- Wärme (Wärmeleitung, Konvektion)
- Materie (Diffusion, Strömungen)
- Ladung (Strom)

Fluss einer physikalischen Größe in Richtung Gleichgewicht

Energiefluss:

$$J_{\frac{E}{a}} = \frac{dE}{dt} a \quad j_E = \frac{dE}{A dt}$$

Massenfluss:

$$J_m = \frac{dm}{dt} \quad j_M = \frac{dm}{A dt}$$

Ladungsfluss:

$$J_a = \frac{dQ}{dt} \quad j_a = \frac{dQ}{A dt}$$

Allgemein gilt die Kontinuitätsgleichung (1-dim.):

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{dj}{dz} = 0$$

- ρ : Dichte
- j : Stromdichte

„Beweis:“

$$\frac{dj}{dz} = \frac{d}{dz} \frac{dm}{A dt} = \frac{d}{dt} \frac{dm}{dV} = \dot{\rho}$$

3-dim:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial}{\partial x} j_x + \frac{\partial}{\partial y} j_y + \frac{\partial}{\partial z} j_z$$

Außerdem

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

„Beweis:“

$$j = \frac{dm}{A dt} = \underbrace{\frac{dm}{A dz}}_{\rho} \underbrace{\frac{dz}{dt}}_v$$

11.1 Wärmetransport

Beobachtung:

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \text{const}$$

Ansatz:

$$J_{\frac{E}{a}} = -\lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Satz 11.1 (Fouriersches Gesetz der Wärmeleitung) 1-dim.

$$j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

3-dim.

$$\vec{j}_Q = -\lambda \operatorname{grad} T$$

- \vec{j}_Q : Wärmestromdichte

- λ : Wärmeleitfähigkeit

Bemerkung 11.2 (Analogie zum Ohmschen Gesetz)

$$J_Q = \frac{dQ}{dt} = \lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x} = \Delta T R$$

$$R = \frac{\Delta x}{\lambda A} \implies \Delta T = R J_Q$$

Elektrizitätslehre:

$$J_Q \hat{=} I, \Delta T \hat{=} U, R = \frac{d}{\sigma A}, U = RI$$

Besseres Verständnis über Diffusion . . .

11.2 Diffusion

Materietransport aufgrund eines Konzentrationsgefälles. Hier: Eindimensionale, vereinfachte Betrachtung.

Box mit zwei Molekülsorten A und B .

Start $t = 0$: Alle Moleküle der Sorte B in V_1 .

$t \gg 0$: Gleichgewicht.

Betrachte Umgebung um Ebene E :

„Nettofluß“ = Fluß nach rechts - Fluß nach links = $j_1 - j_2$

$$j_1 = \frac{1}{6} n_1 v$$

$$j_2 = \frac{1}{6} n_2 v$$

$$j = \frac{1}{6} (n_1 - n_2) v$$

Aber: Allgemein gilt $n = n(x)$.

Frage: Was muss man für

$$n_{1,2} = n(x_E \pm \frac{1}{2} \Delta x)$$

einsetzen?

Antwort:

$$\frac{1}{2} \Delta x = \lambda$$

wobei λ die mittlere freie Weglänge der Molekülsorte B ist, das heißt man wählt die Teilchendichten

dort, wo die Moleküle nach dem letzten Stoß starten.

$$\begin{aligned}
 j &= \frac{1}{6} \left(n(x_E - \frac{1}{2}\Delta x) + n(x_E + \frac{1}{2}\Delta x) \right) v \\
 &= -\frac{1}{6} \frac{dn}{dx} \Delta x \\
 &= -\frac{\lambda v}{3} \frac{dn}{dx} = -\frac{\lambda^2}{3\tau} \frac{dn}{dx} = -D \frac{dn}{dx} \\
 D &= \frac{\lambda v}{3} = \frac{\lambda^2}{2\tau}
 \end{aligned}$$

- λ : mittlere freie Weglänge
- τ : mittlere Zeit zwischen zwei Stößen
- $v = \frac{\lambda}{\tau}$: mittlere Geschwindigkeit

Also:

Satz 11.3 (1. Ficksches Gesetz)

$$j_D = -D \frac{dn}{dx} \quad (1\text{-dim})$$

$$j_D = -D \text{grad } n \quad (3\text{-dim})$$

Vergleich:

Diffusion	Konzentrationsgradient
Wärmeleitung	Temperaturgradient
laminare Strömung	Druckgradient

Laminare Strömung:

- Volumenstrom: $\dot{V} = -\frac{\pi \Delta p}{8\eta L} R^4$
- Stromdichte: $j = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{\dot{L}}{\pi R^2} = -\frac{R^2}{8\eta} \frac{\Delta p}{\Delta x}, L = \Delta x$
- $\implies j = -\xi \frac{dp}{dx}, \xi = \frac{R^2}{8\eta}$

11.3 Wärmestrahlung

Wärmetransport im Allgemeinen sehr komplex. Zusätzlich zur Wärmeleitung: Konvektion und Wärmestrahlung. Erfahrung:

Auch ohne direkten Kontakt findet Warenaustausch von Körpern über thermische Strahlung statt, elektromagnetische Strahlung siehe später.

Interessant:

Emissions- und Absorptionsvermögen von Körpern.

Charakterisierungsgrößen:

Emission	Absorption
$\phi = \frac{dQ}{dt}$ Strahlungsleistung, $[\phi] = \text{J s}^{-1} = \text{W}$	$I = \frac{\phi}{F}$ Bestrahlungsstärke, Intensität
$E = \frac{\Phi}{F}$ Emissionsvermögen, Intensität, $[E] = \text{W m}^{-2}$	$A = \frac{\text{absorbierte Strahlungsleistung}}{\text{auffallende Strahlungsleistung}}$ Absorptionsvermögen, $[A] = \text{L}$
$F_\lambda = \frac{dE}{d\lambda}$ spektrales Emissionsvermögen	$A_\lambda = \frac{\text{absorbierte Strahlungsleistung im Bereich}[\lambda, \lambda+d\lambda]}{\text{einfallende Strahlungsleistung im Bereich}[\lambda, \lambda+d\lambda]}$

Es gilt:

$$E = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda, A, A_\lambda \leq 1 \wedge R = 1 - A : \text{Reflexionsvermögen}$$

Beispiel 11.4 (Jahresmittelwert der Sonneneinstrahlung der Erde) Solarkonstante: (merken!)

$$I_{\text{solar}} = 1.37 \text{ kW m}^{-2} \approx 1 \text{ kW m}^{-2}$$

Emissions und Absorptionsvermögen hängen sicherlich von der Art und Beschaffenheit des abstrahlenden/absorbierenden Körpers ab.

Experiment: Leslie Würfel.

Messung:

- $A : T_s > T_b$
- $B : T_s = T_b$

Sei

$$T_s = T_0 + \Delta T_s$$

$$T_b = T_0 + \Delta T_b$$

- $A : \Delta T_s > \Delta T_b$
- $B : \Delta T_s = \Delta T_b$

Außerdem:

$$\Delta T \sim \Delta U \sim \Delta Q \sim EA$$

Damit ergibt sich aus B:

$$E_s A_b = E_b A_s \implies \frac{E_b}{A_b} = \frac{E_s}{A_s}$$

Das Verhältnis von Emissions- und Absorptionsvermögen eines Körpers ist unabhängig von der Beschaffenheit seiner Oberfläche. Übliche Referenz: Nicht-reflektierender Körper, auch „schwarzer Körper“ oder „schwarzer“ Strahler. das heißt

$$A_\lambda^s = 1$$

für alle Wellenlängen gleich!

Wichtig: Auch für $A_\lambda = 1$ sendet ein Körper Wärmestrahlung aus, seinen eigene!, das heißt ein schwarzer Körper kann „weiß“ sein.

Technische Realisierung eines schwarzen Strahlers: Hohlraumstrahler. (Da kein Material mit $A_\lambda = 1$ existiert)

Hohlraum mit stark absorbierenden Wänden. Reflexionsvermögen der Öffnung verschwindet quasi!
 \Rightarrow

Satz 11.5 (Kirchhoffsches Strahlungsgesetz) Für alle Körper im thermischen Gleichgewicht gilt:

$$\frac{E_\lambda(T)}{A_\lambda(T)} = E_\lambda^s(T), A_\lambda^s(T) = 1$$

das heißt das Verhältnis von spektralem Emissions- und Absorptionsvermögen ist unabhängig von der Oberflächenbeschaffenheit eines Strahlers und gleich dem Emissionsvermögen eines schwarzen Strahlers. (bei gegebener Temperatur) Es folgt: Ein schwarzer Strahler hat maximales Emissionsvermögen.

\Rightarrow Emissionsvermögen eines schwarzen Strahlers ist universell!

Experiment: Schwarzer Strahler.

Beobachtung:

1. Bei höheren Temperaturen wird mehr Energie abgestrahlt
2. Warme Körper strahlen „unsichtbar“ (IR-Strahlung), wärmere „rot“, heiße „weiß-blau“

\Rightarrow Mit steigender Temperatur strahlen Körper elektromagnetische Strahlung mit höheren Frequenzen ab \Rightarrow

$$E_r^q(T) = \sigma \quad E(T) = \varepsilon \sigma T^4 \quad (\text{Stefan-Boltzmannsches Strahlungsgesetz})$$

Plancksches Strahlungsgesetz:

$$E_\lambda^q(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

$$E_V^{SK}(T) = \frac{2\pi h v^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

- $\sigma = 5.7 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$: Stefan-Boltzmann-Konstante
- λ : Wellenlänge
- v : Frequenz
- h : Plancksches Wirkungsquantum