Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2016/17

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. D. Vogel
Dr. M. Witte

Blatt 12
Abgabetermin: Donnerstag, 26.01.2017, 9.30 Uhr

Aufgabe 1. *(Gauß-Algorithmus)* Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{llllllll} \bar{6}x_1 & +\bar{1}x_2 & +\bar{2}x_3 & +\bar{3}x_4 & +\bar{1}x_5 & +\bar{6}x_6 & =\bar{1} \\ \bar{3}x_1 & +\bar{6}x_2 & +\bar{5}x_3 & & +\bar{4}x_5 & +\bar{5}x_6 & =\bar{2} \\ \bar{1}x_1 & & & +\bar{3}x_4 & +\bar{5}x_5 & +\bar{4}x_6 & =\bar{3} \\ \bar{2}x_1 & +\bar{4}x_2 & +\bar{5}x_3 & +\bar{2}x_4 & & & =\bar{4} \end{array}$$

in den Unbestimmten $x_1 \ldots, x_6$ und Koeffizienten aus $\mathbb{F}_7$ mittels des in der Vorlesung vorgestellten Gauß-Algorithmus.

Aufgabe 2. *(Berechnung der inversen Matrix)* Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1} zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$.

Tipp: Mittels elementaren Zeilenoperationen können Sie A in strenge Zeilenstufenform überführen. Führen Sie dieselben Operationen an der Einheitsmatrix aus.

Aufgabe 3. *(Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung)* Sei $A = (a_{i,j}) \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\phi_A \colon M(2 \times 2, \mathbb{C}) \to M(2 \times 2, \mathbb{C}), \qquad X \mapsto AX - XA$$

eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B}_1 = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right)$$

eine Basis von $M(2 \times 2, \mathbb{C})$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(\phi_A)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$ und der Standardbasis

$$\mathcal{B}_2 = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right).$$

Aufgabe 4. *(Bestimmung einer Basis des Kerns einer linearen Abbildung)* Sei S_3 die symmetrische Gruppe auf 3 Ziffern, $V = \mathrm{Abb}(S_3, \mathbb{C})$ und $W = \mathrm{Abb}(\{1, 2, 3\}, \mathbb{C})$.

(a) Zeigen Sie: $\epsilon \colon V \to W$ mit

$$\epsilon(f)(r) = \sum_{\sigma \in S_3} f(\sigma)\sigma(r)$$

für $f \in V$ und $r \in \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{C}$ ist $\mathbb{C}$-linear.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns von ϵ.

Zusatzaufgabe 5. *(Zählen von Unterräumen)* Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen, V ein K-Vektorraum der Dimension n mit $0 < n < \infty$ und k eine natürliche Zahl mit $1 \leq k \leq n$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt
$$\prod_{r=0}^{k-1} (q^n - q^r)$$
verschiedene linear unabhängige Systeme von k Vektoren in V.

(b) Es gibt
$$\prod_{r=0}^{k-1} \frac{q^n - q^r}{q^k - q^r}$$
verschiedene Unterräume der Dimension k in V.