Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2016/17

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. D. Vogel
Dr. M. Witte

Blatt 5
Abgabetermin: Donnerstag, 24.11.2016, 9.30 Uhr

Aufgabe 1. *(Teilbarkeitsregeln)* Es sei n eine natürliche Zahl mit der Dezimaldarstellung

$$n = a_r \cdot 10^r + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0, \quad a_i \in \{0, \ldots, 9\}.$$

Benutzen Sie das Rechnen mit Restklassen, um die folgenden Regeln zu beweisen:

(a) *(Dreierregel)* Die Zahl n ist genau dann durch 3 bzw. 9 teilbar, wenn es ihre Quersumme $a_r + \ldots + a_1 + a_0$ ist.

(b) *(Elferregel)* Die Zahl n ist genau dann durch 11 teilbar, wenn es ihre alternierende Quersumme $(-1)^r a_r + (-1)^{r-1} a_{r-1} + \ldots - a_1 + a_0$ ist.

Aufgabe 2. *(Polynomdivision)* Bestimmen Sie für folgende Polynome $f, g \in K[t]$ die eindeutig bestimmten Polynome $q, r \in K[t]$ mit $f = qg + r$ und $\deg(r) < \deg(g)$.

(a) $K = \mathbb{Q}$, $f = t^7 + 4t^3 - 3t^2 + 1$, $g = 3t^3 + 7t^2 + t + 1$.

(b) $K = \mathbb{R}$, $f = \frac{1}{5}t^4 + \frac{7+25\sqrt{2}}{25}t^3 + \frac{\pi+10+14\sqrt{2}}{10}t^2 + \frac{14+5\sqrt{2}\pi}{10}t + \frac{\pi}{2}$, $g = t^2 + \frac{7}{5}t + \frac{\pi}{2}$.

(c) $K = \mathbb{F}_3$, $f = t^5 + \bar{2}t^3 + t + \bar{2}$, $g = t^3 + t^2 + \bar{2}t + \bar{1}$.

Aufgabe 3. *(Faktorgruppen und Faktorringe)* Sei $(A, +)$ eine abelsche Gruppe und $U \subseteq A$ eine Untergruppe (siehe Blatt 4, Aufgabe 4). Es gelte für $a, b \in A$ genau dann $a \sim_U b$, wenn $a - b \in U$. Zeigen Sie:

(a) $\sim_U$ ist eine Äquivalenzrelation auf A und die Äquivalenzklasse von $a \in A$ ist durch

$$a + U := \{a + u \mid u \in U\}$$

gegeben. Wir schreiben $A/U := A/\sim_U$.

(b) Durch $+\colon A/U \times A/U \to A/U$, $(a + U, b + U) \mapsto (a + b) + U$ ist eine wohldefinierte Verknüpfung auf A/U gegeben und $(A/U, +)$ ist eine abelsche Gruppe, die sogenannte *Faktorgruppe* von A modulo U.

(c) Sei $(A, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring und die Untergruppe $U \subseteq A$ erfülle $au \in U$ für alle $a \in A$ und $u \in U$. (Eine solche Untergruppe nennt man *Ideal* des Rings A.) Dann ist durch $\cdot\colon A/U \times A/U \to A/U$, $(a + U, b + U) \mapsto (ab) + U$ eine wohldefinierte Verknüpfung auf A/U gegeben und $(A/U, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring, der sogenannte *Faktorring* von A modulo U.

Aufgabe 4. *(Ein Körper mit 9 Elementen)* Sei $f = t^2 + \bar{1} \in \mathbb{F}_3[t]$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{F}_3[t]f = \{gf \mid g \in \mathbb{F}_3[t]\}$$

ein Ideal in $\mathbb{F}_3[t]$ ist und dass der Faktorring $\mathbb{F}_3[t]/\mathbb{F}_3[t]f$ ein Körper mit 9 Elementen ist.

Zusatzaufgabe 5. *(Quotientenkörper)* Sei R ein Integritätsbereich. Wir definieren wie folgt eine Relation $\sim$ auf $R \times (R \setminus \{0\})$: Es gelte $(a,b) \sim (a',b')$ genau dann, wenn $ab' = a'b$ in R.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Sei $Q(R) \coloneqq R \times (R \setminus \{0\})/\sim$. Wir schreiben $\frac{a}{b} \in Q(R)$ für die Äquivalenzklasse von $(a,b) \in R \times (R \setminus \{0\})$. Zeigen Sie, dass durch

$$+\colon Q(R) \times Q(R) \to Q(R), \qquad \left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}\right) \mapsto \frac{ab' + a'b}{bb'},$$
$$\cdot\colon Q(R) \times Q(R) \to Q(R), \qquad \left(\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}\right) \mapsto \frac{aa'}{bb'}$$

zwei wohldefinierte Verknüpfungen gegeben sind und dass $(Q(R), +, \cdot)$ ein Körper ist.

(Für $R = \mathbb{Z}$ erhält man so den Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, für den Polynomring $R = K[t]$ über einem Körper K den *Körper der rationalen Funktionen* $K(t)$.)