

# Übungszettel 7

Robin Heinemann

December 9, 2017

## Aufgabe 7.2

a) Der optimale Fall ist, wenn das Array bereits sortiert ist. Dann wird von der inneren Schleife immer nur der erste Durchlauf ausgeführt. Die äußere Schleife wird genau  $n$  mal ausgeführt, damit erhält man  $f_1(n) = n$ , dies lässt sich zu  $n \in \Omega(n) \implies g_1(n) = n$  umformen. Hier muss  $\Omega$ -Notation verwendet werden, da es sich um den günstigsten Fall handelt, es gibt Fälle, bei denen  $\mathcal{O}(n)$  nicht die obere Schranke ist.

b) Der schlechteste Fall tritt auf, wenn das Array genau invers sortiert ist. Die innere Schleife wird also immer genau  $n - i$  mal durchlaufen, wobei  $i$  die Anzahl der Durchläufe der äußeren Schleife bezeichnet. Damit erhält man:

$$f_2(n) = \sum_{i=1}^n n - i = \frac{1}{2}(n^2 - n)$$

Dies lässt sich zu:

$$f_2(n) \in \mathcal{O}(n^2) \implies g_2(n) = n^2$$

vereinfachen.

c) Analog zum schlechtesten Fall erhält man dann für die innere Schleife  $\frac{n-i}{2}$  Durchläufe:

$$f_2(n) = \sum_{i=1}^n \frac{n-i}{2} = \frac{1}{4}(n^2 - n)$$

und damit:

$$f_3(n) \in \mathcal{O}(n^2) \implies g_3(n) = n^2$$

d)

· ohne Optimierungen insertion sort best case:

| $n$      | Zeit in Sekunden | Zeit / $n \log n$          |
|----------|------------------|----------------------------|
| 1000000  | 0.0384659        | $3.846\,59 \times 10^{-8}$ |
| 1200000  | 0.0470058        | $3.917\,15 \times 10^{-8}$ |
| 1440000  | 0.0567039        | $3.937\,77 \times 10^{-8}$ |
| 1727999  | 0.0673467        | $3.897\,38 \times 10^{-8}$ |
| 2073600  | 0.0811057        | $3.911\,35 \times 10^{-8}$ |
| 2488319  | 0.098592         | $3.962\,19 \times 10^{-8}$ |
| 2985983  | 0.116828         | $3.912\,55 \times 10^{-8}$ |
| 3583180  | 0.140203         | $3.9128 \times 10^{-8}$    |
| 4299816  | 0.16865          | $3.922\,27 \times 10^{-8}$ |
| 5159780  | 0.203377         | $3.941\,58 \times 10^{-8}$ |
| 6191736  | 0.243178         | $3.927\,46 \times 10^{-8}$ |
| 7430083  | 0.292753         | $3.940\,11 \times 10^{-8}$ |
| 8916100  | 0.350108         | $3.9267 \times 10^{-8}$    |
| 10699320 | 0.414265         | $3.871\,89 \times 10^{-8}$ |
| 12839184 | 0.50081          | $3.900\,63 \times 10^{-8}$ |
| 15407021 | 0.59793          | $3.880\,89 \times 10^{-8}$ |
| 18488425 | 0.724838         | $3.9205 \times 10^{-8}$    |
| 22186111 | 0.880652         | $3.969\,38 \times 10^{-8}$ |
| 26623333 | 1.04973          | $3.942\,91 \times 10^{-8}$ |
| 31947999 | 1.26629          | $3.963\,61 \times 10^{-8}$ |
| 38337599 | 1.50603          | $3.928\,33 \times 10^{-8}$ |
| 46005119 | 1.83551          | $3.9898 \times 10^{-8}$    |
| 55206143 | 2.18521          | $3.958\,28 \times 10^{-8}$ |
| 66247372 | 2.5922           | $3.9129 \times 10^{-8}$    |
| 79496847 | 3.12522}         | $3.931\,26 \times 10^{-8}$ |

Durchschnitt:  $3.925\,05 \times 10^{-8}$

insertion sort worst case:

| $n$   | Zeit in Sekunden | Zeit / $n \log n$          |
|-------|------------------|----------------------------|
| 2000  | 0.0563335        | $1.408\,34 \times 10^{-8}$ |
| 2140  | 0.0637945        | $1.393\,02 \times 10^{-8}$ |
| 2289  | 0.0708066        | $1.3514 \times 10^{-8}$    |
| 2450  | 0.0824421        | $1.373\,46 \times 10^{-8}$ |
| 2621  | 0.0940372        | $1.368\,88 \times 10^{-8}$ |
| 2805  | 0.107795         | $1.370\,04 \times 10^{-8}$ |
| 3001  | 0.127077         | $1.411\,03 \times 10^{-8}$ |
| 3211  | 0.14668          | $1.422\,62 \times 10^{-8}$ |
| 3436  | 0.161834         | $1.370\,76 \times 10^{-8}$ |
| 3676  | 0.18396          | $1.361\,35 \times 10^{-8}$ |
| 3934  | 0.21371          | $1.380\,88 \times 10^{-8}$ |
| 4209  | 0.2442           | $1.378\,44 \times 10^{-8}$ |
| 4504  | 0.291699         | $1.437\,93 \times 10^{-8}$ |
| 4819  | 0.324696         | $1.398\,18 \times 10^{-8}$ |
| 5157  | 0.377055         | $1.417\,79 \times 10^{-8}$ |
| 5518  | 0.429574         | $1.410\,83 \times 10^{-8}$ |
| 5904  | 0.494398         | $1.418\,35 \times 10^{-8}$ |
| 6317  | 0.575462         | $1.4421 \times 10^{-8}$    |
| 6759  | 0.637805         | $1.396\,12 \times 10^{-8}$ |
| 7233  | 0.757041         | $1.447\,05 \times 10^{-8}$ |
| 7739  | 0.850441         | $1.419\,95 \times 10^{-8}$ |
| 8281  | 1.0016           | $1.460\,59 \times 10^{-8}$ |
| 8860  | 1.10167          | $1.403\,41 \times 10^{-8}$ |
| 9481  | 1.27307          | $1.416\,27 \times 10^{-8}$ |
| 10144 | 1.4453}          | $1.404\,56 \times 10^{-8}$ |

Durchschnitt:  $1.402\,53 \times 10^{-8}$

insertion sort typical case:

| $n$   | Zeit in Sekunden | Zeit / $n \log n$          |
|-------|------------------|----------------------------|
| 5000  | 0.179809         | $7.192\,36 \times 10^{-9}$ |
| 5350  | 0.202922         | $7.089\,59 \times 10^{-9}$ |
| 5724  | 0.236923         | $7.231\,16 \times 10^{-9}$ |
| 6125  | 0.270223         | $7.202\,95 \times 10^{-9}$ |
| 6553  | 0.311509         | $7.254\,21 \times 10^{-9}$ |
| 7012  | 0.35963          | $7.314\,28 \times 10^{-9}$ |
| 7503  | 0.427693         | $7.597\,35 \times 10^{-9}$ |
| 8028  | 0.475772         | $7.382\,17 \times 10^{-9}$ |
| 8590  | 0.558334         | $7.566\,72 \times 10^{-9}$ |
| 9192  | 0.648983         | $7.680\,92 \times 10^{-9}$ |
| 9835  | 0.750438         | $7.758\,29 \times 10^{-9}$ |
| 10524 | 0.812448         | $7.335\,57 \times 10^{-9}$ |
| 11260 | 0.912265         | $7.195\,23 \times 10^{-9}$ |
| 12049 | 1.10621          | $7.619\,65 \times 10^{-9}$ |
| 12892 | 1.2469           | $7.502\,25 \times 10^{-9}$ |
| 13795 | 1.41741          | $7.448\,23 \times 10^{-9}$ |
| 14760 | 1.5875           | $7.286\,85 \times 10^{-9}$ |
| 15794 | 1.86811          | $7.4889 \times 10^{-9}$    |
| 16899 | 2.0874           | $7.309\,42 \times 10^{-9}$ |
| 18082 | 2.37665          | $7.268\,97 \times 10^{-9}$ |
| 19348 | 2.74368          | $7.329\,27 \times 10^{-9}$ |
| 20702 | 3.09305          | $7.2171 \times 10^{-9}$    |
| 22152 | 3.58881          | $7.3135 \times 10^{-9}$    |
| 23702 | 4.0872           | $7.275\,38 \times 10^{-9}$ |
| 25361 | 4.64648          | $7.224\,23 \times 10^{-9}$ |

Durchschnitt:  $7.363\,38 \times 10^{-9}$

std::sort:

| $n$    | Zeit in Sekunden | Zeit / $n \log n$          |
|--------|------------------|----------------------------|
| 100000 | 0.0448357        | $3.894\,38 \times 10^{-8}$ |
| 107000 | 0.0485742        | $3.920\,05 \times 10^{-8}$ |
| 114490 | 0.0526924        | $3.951\,12 \times 10^{-8}$ |
| 122504 | 0.0572872        | $3.991\,46 \times 10^{-8}$ |
| 131079 | 0.0620617        | $4.018\,04 \times 10^{-8}$ |
| 140255 | 0.0672582        | $4.046\,35 \times 10^{-8}$ |
| 150073 | 0.0706144        | $3.9478 \times 10^{-8}$    |
| 160578 | 0.0765097        | $3.975 \times 10^{-8}$     |
| 171818 | 0.0809247        | $3.907\,28 \times 10^{-8}$ |
| 183845 | 0.087469         | $3.924\,94 \times 10^{-8}$ |
| 196715 | 0.0945126        | $3.941\,54 \times 10^{-8}$ |
| 210485 | 0.0999723        | $3.874\,97 \times 10^{-8}$ |
| 225219 | 0.10864          | $3.913\,84 \times 10^{-8}$ |
| 240984 | 0.118354         | $3.963\,11 \times 10^{-8}$ |
| 257853 | 0.126013         | $3.922\,11 \times 10^{-8}$ |
| 275903 | 0.136135         | $3.938\,56 \times 10^{-8}$ |
| 295216 | 0.151025         | $4.061\,59 \times 10^{-8}$ |
| 315881 | 0.158583         | $3.964\,54 \times 10^{-8}$ |
| 337993 | 0.168726         | $3.921\,21 \times 10^{-8}$ |
| 361652 | 0.180095         | $3.890\,93 \times 10^{-8}$ |
| 386968 | 0.194031         | $3.897\,17 \times 10^{-8}$ |
| 414056 | 0.207441         | $3.873\,56 \times 10^{-8}$ |
| 443040 | 0.226052         | $3.924\,42 \times 10^{-8}$ |
| 474052 | 0.241299         | $3.8948 \times 10^{-8}$    |
| 507236 | 0.258856         | $3.884\,72 \times 10^{-8}$ |

Durchschnitt:  $3.937\,74 \times 10^{-8}$

- mit Optimierungen insertion sort best case:

| $n$      | Zeit in Sekunden | Zeit / $n$                 |
|----------|------------------|----------------------------|
| 1000000  | 0.00180217       | $1.802\,17 \times 10^{-9}$ |
| 1200000  | 0.00221753       | $1.847\,94 \times 10^{-9}$ |
| 1440000  | 0.00302139       | $2.098\,19 \times 10^{-9}$ |
| 1727999  | 0.00383213       | $2.217\,67 \times 10^{-9}$ |
| 2073600  | 0.00465811       | $2.246\,39 \times 10^{-9}$ |
| 2488319  | 0.00552709       | $2.221\,21 \times 10^{-9}$ |
| 2985983  | 0.00680263       | $2.278\,19 \times 10^{-9}$ |
| 3583180  | 0.00791746       | $2.209\,62 \times 10^{-9}$ |
| 4299816  | 0.00957455       | $2.226\,73 \times 10^{-9}$ |
| 5159780  | 0.0114418        | $2.2175 \times 10^{-9}$    |
| 6191736  | 0.013643         | $2.203\,43 \times 10^{-9}$ |
| 7430083  | 0.0169643        | $2.283\,19 \times 10^{-9}$ |
| 8916100  | 0.0204979        | $2.298\,97 \times 10^{-9}$ |
| 10699320 | 0.0237447        | $2.219\,27 \times 10^{-9}$ |
| 12839184 | 0.028712         | $2.236\,28 \times 10^{-9}$ |
| 15407021 | 0.0342781        | $2.224\,84 \times 10^{-9}$ |
| 18488425 | 0.0410346        | $2.219\,47 \times 10^{-9}$ |
| 22186111 | 0.0506048        | $2.280\,92 \times 10^{-9}$ |
| 26623333 | 0.0595367        | $2.236\,26 \times 10^{-9}$ |
| 31947999 | 0.0714738        | $2.237\,19 \times 10^{-9}$ |
| 38337599 | 0.0865582        | $2.257\,79 \times 10^{-9}$ |
| 46005119 | 0.103315         | $2.245\,72 \times 10^{-9}$ |
| 55206143 | 0.132733         | $2.404\,31 \times 10^{-9}$ |
| 66247372 | 0.171755         | $2.592\,63 \times 10^{-9}$ |
| 79496847 | 0.195373         | $2.457\,63 \times 10^{-9}$ |

Durchschnitt:  $2.230\,54 \times 10^{-9}$

insertion sort worst case:

| $n$   | Zeit in Sekunden | Zeit / $n^2$                |
|-------|------------------|-----------------------------|
| 2000  | 0.00131307       | $3.282\,68 \times 10^{-10}$ |
| 2140  | 0.00151938       | $3.317\,71 \times 10^{-10}$ |
| 2289  | 0.00175493       | $3.3494 \times 10^{-10}$    |
| 2450  | 0.00203224       | $3.385\,66 \times 10^{-10}$ |
| 2621  | 0.00289405       | $4.2128 \times 10^{-10}$    |
| 2805  | 0.00272793       | $3.467\,11 \times 10^{-10}$ |
| 3001  | 0.00347161       | $3.854\,77 \times 10^{-10}$ |
| 3211  | 0.00443669       | $4.303\,07 \times 10^{-10}$ |
| 3436  | 0.00420283       | $3.559\,88 \times 10^{-10}$ |
| 3676  | 0.00480767       | $3.557\,82 \times 10^{-10}$ |
| 3934  | 0.00556181       | $3.593\,75 \times 10^{-10}$ |
| 4209  | 0.00692586       | $3.909\,45 \times 10^{-10}$ |
| 4504  | 0.00730396       | $3.600\,49 \times 10^{-10}$ |
| 4819  | 0.00962725       | $4.145\,61 \times 10^{-10}$ |
| 5157  | 0.00958699       | $3.604\,86 \times 10^{-10}$ |
| 5518  | 0.0116548        | $3.827\,74 \times 10^{-10}$ |
| 5904  | 0.0129458        | $3.713\,94 \times 10^{-10}$ |
| 6317  | 0.0144537        | $3.622\,09 \times 10^{-10}$ |
| 6759  | 0.0172369        | $3.773\,07 \times 10^{-10}$ |
| 7233  | 0.0190871        | $3.6484 \times 10^{-10}$    |
| 7739  | 0.0219383        | $3.662\,97 \times 10^{-10}$ |
| 8281  | 0.02532          | $3.6923 \times 10^{-10}$    |
| 8860  | 0.0298174        | $3.798\,42 \times 10^{-10}$ |
| 9481  | 0.0346395        | $3.853\,57 \times 10^{-10}$ |
| 10144 | 0.0427375}       | $4.153\,27 \times 10^{-10}$ |

Durchschnitt:  $3.715\,63 \times 10^{-10}$

insertion sort worst case:

| $n$   | Zeit in Sekunden | Zeit / $n^2$                |
|-------|------------------|-----------------------------|
| 5000  | 0.00493283       | $1.973\,13 \times 10^{-10}$ |
| 5350  | 0.00571745       | $1.997\,54 \times 10^{-10}$ |
| 5724  | 0.00632268       | $1.929\,75 \times 10^{-10}$ |
| 6125  | 0.0076292        | $2.033\,61 \times 10^{-10}$ |
| 6553  | 0.00888076       | $2.068\,09 \times 10^{-10}$ |
| 7012  | 0.00992745       | $2.019\,08 \times 10^{-10}$ |
| 7503  | 0.0112757        | $2.002\,97 \times 10^{-10}$ |
| 8028  | 0.0131061        | $2.033\,57 \times 10^{-10}$ |
| 8590  | 0.0155581        | $2.108\,48 \times 10^{-10}$ |
| 9192  | 0.0172611        | $2.042\,91 \times 10^{-10}$ |
| 9835  | 0.020206         | $2.088\,97 \times 10^{-10}$ |
| 10524 | 0.0228511        | $2.063\,22 \times 10^{-10}$ |
| 11260 | 0.026403         | $2.082\,46 \times 10^{-10}$ |
| 12049 | 0.029942         | $2.062\,43 \times 10^{-10}$ |
| 12892 | 0.0342058        | $2.058\,07 \times 10^{-10}$ |
| 13795 | 0.0388196        | $2.039\,89 \times 10^{-10}$ |
| 14760 | 0.0452196        | $2.075\,65 \times 10^{-10}$ |
| 15794 | 0.0519203        | $2.081\,39 \times 10^{-10}$ |
| 16899 | 0.0591509        | $2.071\,28 \times 10^{-10}$ |
| 18082 | 0.0680828        | $2.0823 \times 10^{-10}$    |
| 19348 | 0.07862          | $2.1002 \times 10^{-10}$    |
| 20702 | 0.0894472        | $2.087\,09 \times 10^{-10}$ |
| 22152 | 0.102976         | $2.098\,51 \times 10^{-10}$ |
| 23702 | 0.117309         | $2.088\,14 \times 10^{-10}$ |
| 25361 | 0.13398          | $2.083\,09 \times 10^{-10}$ |

Durchschnitt:  $2.054\,87 \times 10^{-10}$

std::sort typical case:



| $n$    | Zeit in Sekunden | Zeit / $n \log n$          |
|--------|------------------|----------------------------|
| 100000 | 0.00763783       | $6.634\,14 \times 10^{-9}$ |
| 107000 | 0.00816836       | $6.592\,05 \times 10^{-9}$ |
| 114490 | 0.00882383       | $6.616\,52 \times 10^{-9}$ |
| 122504 | 0.00930791       | $6.485\,25 \times 10^{-9}$ |
| 131079 | 0.0102184        | $6.615\,67 \times 10^{-9}$ |
| 140255 | 0.0109099        | $6.563\,59 \times 10^{-9}$ |
| 150073 | 0.0118967        | $6.651\,05 \times 10^{-9}$ |
| 160578 | 0.0125743        | $6.5329 \times 10^{-9}$    |
| 171818 | 0.0138146        | $6.670\,08 \times 10^{-9}$ |
| 183845 | 0.0147697        | $6.627\,53 \times 10^{-9}$ |
| 196715 | 0.0159018        | $6.631\,69 \times 10^{-9}$ |
| 210485 | 0.0170402        | $6.604\,85 \times 10^{-9}$ |
| 225219 | 0.0181737        | $6.547\,22 \times 10^{-9}$ |
| 240984 | 0.0194615        | $6.516\,74 \times 10^{-9}$ |
| 257853 | 0.0210726        | $6.558\,77 \times 10^{-9}$ |
| 275903 | 0.0227183        | $6.572\,72 \times 10^{-9}$ |
| 295216 | 0.0244938        | $6.587\,22 \times 10^{-9}$ |
| 315881 | 0.0263135        | $6.578\,31 \times 10^{-9}$ |
| 337993 | 0.028485         | $6.619\,93 \times 10^{-9}$ |
| 361652 | 0.030154         | $6.514\,74 \times 10^{-9}$ |
| 386968 | 0.0329184        | $6.611\,75 \times 10^{-9}$ |
| 414056 | 0.0351035        | $6.554\,92 \times 10^{-9}$ |
| 443040 | 0.03794          | $6.586\,64 \times 10^{-9}$ |
| 474052 | 0.0404175        | $6.523\,78 \times 10^{-9}$ |
| 507236 | 0.0432129        | $6.485\,08 \times 10^{-9}$ |

Durchschnitt:  $6.579\,33 \times 10^{-9}$

· Analyse:

- Es zeigt sich wie erwartet für insertion sort worst / typical case ein quadratisches Verhalten und für best case lineares Verhalten. Außerdem bestätigt sich die Annahme, dass im typischen Fall nur die Hälfte der Inneren Schleife durchschritten wird.
- Die Optimierung wirkt sich sehr positiv auf die Laufzeit aus (bis zu 40x, beim typischen Fall), allerdings unterschiedlich stark auf die insertion sort und std::sort
- Um zu Berechnen, bis zu welchen  $n$  Insertion Sort mit std::sort mithalten kann muss man einfach das jeweilige  $c$  einsetzen:

$$2.054\,87 \times 10^{-10} n^2 = 6.579\,33 \times 10^{-9} n \log n \implies n \approx 163$$

## Aufgabe 7.3

a)

$$\begin{aligned}t_{64} &= c \cdot f(64) \\t_{32} &= c \cdot f(32) = 5 \text{ s} \\c &= \frac{5 \text{ s}}{f(32)} \\t_{64} &= \frac{f(64) 5 \text{ s}}{f(32)}\end{aligned}$$

Damit erhält man für die verschiedenen Komplexitäten:

$$\begin{aligned}t_{64} &= \frac{\log_2(64) \cdot 5 \text{ s}}{\log_2(32)} = 6 \text{ s} \\t_{64} &= \frac{64 \cdot 5 \text{ s}}{32} = 10 \text{ s} \\t_{64} &= \frac{64 \log_2(64) \cdot 5 \text{ s}}{32 \log_2(32)} = 12 \text{ s} \\t_{64} &= \frac{64^2 \cdot 5 \text{ s}}{32^2} = 20 \text{ s} \\t_{64} &= \frac{2^{64} \cdot 5 \text{ s}}{2^{32}} = 21\,474\,836\,480 \text{ s}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\log_a(n) &= \frac{\log_b(n)}{\log_b(a)} \\ \implies \log_b(a) \log_a(n) &\leq \log_b(n) \quad \forall n \\ \implies \exists C : C \log_a(n) &\leq \log_b(n) \quad \forall n, C = \log_b(a)\end{aligned}$$

c)

Die Reihenfolge ist:

$$\begin{aligned}\log(n), \sqrt{n}, n \log(n), n^2, 2^n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\log n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} n} = \sqrt{\infty} = \infty \\ \log(x) = x \log(x) \implies x = 1 \implies \log(x) > 0 \implies x \log(x) > \log(x) \iff x > 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n \log(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\log(n) + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n = \infty\end{aligned}$$