

Theoretische Physik II (Hebecker)

Robin Heinemann

20. April 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Lagrange - Formalismus	1
1.1	Grundidee (1788, Joseph-Louis Lagrange)	1
1.2	Variationsrechnung: Der Funktionalbegriff	1
1.3	Weglänge als Funktional	2
1.4	Variationsrechnung: Extremalisierung von Funktionalen	3
1.5	Das Hamiltonsche Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung)	4
1.6	Form der Lagrange-Funktion und erste Anwendungen	5

1 Lagrange - Formalismus

1.1 Grundidee (1788, Joseph-Louis Lagrange)

Vorteile gegenüber Newton:

- Flexibilität
- Zwangskräfte
- Zusammenhang zwischen Symmetrie und Erhaltungsgrößen

Zentrales Objekt: Wirkungsfunktional S .

Abbildung $S : \text{Trajektorie} \mapsto \text{reelle Zahl}$

(S definiert mittels Lagrange-Funktion L)

Zentrale physikalische Aussage des Formalismus: „Wirkungsprinzip“ („Hamilton-Prinzip“)

Letztes besagt: Eine physikalische Bewegung verläuft so, dass das Wirkungsfunktional minimal wird.

→ DGL („Euler-Lagrange-Gleichung“), im einfachen Fall \equiv Newton Gleichung

1.2 Variationsrechnung: Der Funktionalbegriff

Funktion (mehrerer Variablen) y ;

$$y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, y : \vec{x} \mapsto y(\vec{x})$$

Funktional: analg, mit \mathbb{R}^n ersetzt durch eine Menge von Funktionen (Vektorraum \mathbb{V})

$$F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}, F : y \mapsto F[y]$$

Beispiel 1.1 \mathbb{V} seinen differenzierbare Funktionen auf $[0, 1]$ mit $y(0) = y(1) = 0$

Diskretisierung:

$$\begin{array}{c} x_1, \dots, x_n \rightarrow \{y(x_1), \dots, y(x_n)\} \\ \downarrow \\ \text{Vektor} \equiv \text{Funktion} \end{array}$$

\Rightarrow im diskreten Fall ist unser Funktional schlicht eine Funktion mit Vektor-Argument. (Eigentlicher Funktionalbegriff folgt im Limes $n \rightarrow \infty$).

Beispielfunktionale zu obigem \mathbb{V} .

- $F_1[y] = y(0.5)$
- $F_2[y] = y'(0.3)$
- $F_3[y] = y(0.1) + y(0.5) + y'(0.9)$
- $F_4[y] = \int_0^1 dx (x \cdot y(x)^2 + y'(x)^2)$
- $F_5[y] = \int_0^1 dx f(y(x), y'(x), x)$

F_5 hängt von Funktion f (von 3 Variablen) ab. Falls wir $f(a, b, c) = ca^2 + b^2$ wählen, folgt F_4 wählen, folgt F_4 . Noch konkreter: wähle Beispielfunktion (ignoreiere zur Einfachheit Randbedingung $y(1) = 0$)

$$\begin{aligned} y_0 : x \mapsto x^2; y_0(x) &= x^2; y'_0(x) = 2x; \\ \Rightarrow F_1[y_0] &= 0.25; F_2[y_0] = 0.6, F_3[y_0] = 0.01 + 0.25 + 1.8 = 2.06 \\ F_4[y_0] &= \int_0^1 dx (x^5 + 4x^2) = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

1.3 Weglänge als Funktional

Weg von \vec{y}_a nach \vec{y}_b : $\vec{y} : \tau \mapsto \vec{y}(\tau), \tau \in [0, 1]; \vec{y}(0) = \vec{y}_a, \vec{y}(1) = \vec{y}_b$

Weglänge:

$$F[\vec{y}] = \int_{\vec{y}_a}^{\vec{y}_b} |d\vec{y}| = \int_0^1 d\tau \sqrt{\left(\frac{d\vec{y}(\tau)}{d\tau}\right)^2}$$

(Eigentlich haben wir sogar ein Funktional einer vektorwertigen Funktion beziehungsweise ein Funktional mit 3 Argumenten: $F[y] = F[y^1, y^2, y^3]$)

Etwas interessanter: Weglänge im Gebirge:

Sei $\vec{x}(\tau) = \{x^1(\tau), x^2(\tau)\}$ die Projektion des Weges auf Horizontale. Zu jedem solchen Weg

gehört die „echte“ Weglänge im Gebirge. Beachte: Höhenfunktion $z : \vec{x} \mapsto z(\vec{x})$
 \Rightarrow 3-d Weg:

$$\begin{aligned}\vec{y}(\tau) &= \{y^1(\tau), y^2(\tau), y^3(\tau)\} \\ &\equiv \{x^1(\tau), x^2(\tau), z(\vec{x}(\tau))\} \\ F_{Geb.}[x] &= F[\vec{y}[\vec{x}]] = \int dt \sqrt{\left(\frac{dx^1(\tau)}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx^2(\tau)}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz(x^1(\tau), x^2(\tau))}{d\tau}\right)^2}\end{aligned}$$

1.4 Variationsrechnung: Extremalisierung von Funktionalen

Funktionen: $y : x \mapsto y(x)$; wir wissen y hat Extremum bei $x_0 \Rightarrow y'(x_0) = 0$

Funktional der Form: $F[y] = \int_0^1 dx f(y, y', x)$; $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$; $y(0) = y_a$; $y(1) = y_b$

Annahme: y_0 extremalisiert F . Sei weiterhin δy eine beliebige 2-fach differenzierbare Funktion mit $\delta y(0) = \delta y(1) = 0$

$$\Rightarrow y_\alpha \equiv y_0 + \alpha \cdot \delta y \quad (\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon))$$

Ist eine Funktion aus unserem Wertevorrat von F

\Rightarrow Betrachte Abbildung $(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \alpha \mapsto F[y_\alpha]$. Per unserer Annahme hat diese Abbildung Extremum bei $\alpha = 0$. Also gilt

$$\left. \frac{d}{d\alpha} F[y_\alpha] \right|_{\alpha=0} = 0$$

Taylor.entwickle um $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned}F[y_\alpha] &= \int_0^1 dx f(y_0 + \alpha \delta y, y'_0 + \alpha \delta y', x) \\ &= F[y_0] + \int_0^1 dx \left(\frac{\partial f}{\partial y}(y_0, y'_0, x) \cdot \alpha \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}(y_0, y'_0, x) \cdot \alpha \delta y' \right) + O(\alpha^2)\end{aligned}$$

Term linear in α muss verschwinden:

$$0 = \int_0^1 dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dx}(\delta y) \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} \delta y = 0 \text{ bei } 0, 1$$

$$= \int_0^1 dx \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) \delta y = 0$$

für beliebige $\delta y \Rightarrow$ der Koeffizient von δy im Integral muss verschwinden

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \quad (\text{Eulersche Differentialgleichung})$$

Falls y_0 das Funktional F extremalisiert, so gilt die obige Gleichung für $y_0 \forall x \in [0, 1]$

Beispiel 1.2 $f(y, y', x) = y^2 + y'^2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) &= \frac{d}{dx} 2y' = 2y'' \\ \Rightarrow y'' - y_0 &= 0\end{aligned}$$

Beachte: y und y' sind hier unabhängig, das heißt es spielt für die Herleitung der Eulerschen Differentialgleichung keine Rolle, dass y' die Ableitung von y ist.

1.5 Das Hamiltonsche Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung)

Die Lage einer sehr großen Klasse von Systemen beschreiben durch verallgemeinerte Koordinaten (q_1, \dots, q_s) , s : Zahl der Freiheitsgrade.

Beispiel 1.3 • N Massenpunkte: $s = 3N$, $(q_1, \dots, q_{3N}) = (x_1^1, x_1^2, x_1^3, \dots, x_N^1, x_N^2, x_N^3)$

- 1 Massenpunkt in Kugelkoordinaten: $s = 3$, $(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \varphi)$
- eine dünne Stange: $s = 5$. Schwerpunktskoordinaten x_s^1, x_s^2, x_s^3 . 2 Winkel zur Ausrichtung θ, φ
- Rad auf einer Welle: $s = 1$, $q_1 = \varphi$
- Perle auf einem Draht: $s = 1$, $q_1 = s$ (Bogenlänge)

Hamiltonsches Prinzip:

Für jedes (in einer sehr großen Klasse) mechanische System s Freiheitsgraden existiert die Lagrange-Funktion $L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$ (kurz $L(q, \dot{q}, t)$), für die gilt:

Die physikalische Bewegung aus einer Lage $q(t_1) = q^{(1)}$ in eine Lage $q(t_2) = q^{(2)}$ verläuft so, dass das Wirkungsfunktional

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t)$$

extremal wird.

Anmerkung 1.4 • für kleine Bahnabschnitte: Minimalität

- DGL. aus Stationalität
- Wirkung: Dimensionsgründe $[S] = \text{Zeit} \cdot \text{Wirkung}$
- Bedeutung des Wirkungsprinzips kann man kaum überschätzen. [spezielle + allgemeine Relativitätstheorie, Feldtheorie (Elektro-Dynamik), Quantenfeldtheorie (Teilchenphysik, kondensierte Materie), Quantengravitation]

für $s = 1$ folgt aus dem Hamiltonschen Prinzip:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

(Euler-Lagrange-Gleichung, oder Lagrange-Gleichung der 2. Art)

für $s \geq 1$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = 1, \dots, s$$

1.6 Form der Lagrange-Funktion und erste Anwendungen

Fundamentaler Fakt:

$$L = T - V$$

- T : kinetische Energie
- V : potentielle Energie

Beispiel 1.5 (Massenpunkt im Potenzial)

$$\begin{aligned} L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) &= \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} &= 0 \\ \frac{d}{dt} (m \dot{x}^i) - \left(-\frac{\partial V}{\partial x^i} \right) &= 0 \\ m \ddot{x}^i - F^i &= 0 \\ m \ddot{\vec{x}} - \vec{F} &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel 1.6 (System wechselwirkender Massenpunkte)

$$\begin{aligned} T &= \sum_a T_a = \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\vec{x}}_a^2 \\ V &= \sum_{\substack{a,b \\ a < b}} V_{ab}(|x_a - x_b|) \end{aligned}$$

Lagrange Gleichung für x_a^i :

$$\begin{aligned} m_a \ddot{x}_a^i - \frac{\partial}{\partial x_a^i} \left(\sum_b V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|) \right) &= 0 \\ m_a \ddot{\vec{x}}_a - \vec{\nabla}_a \sum_b V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|) &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel 1.7 (Perle auf Draht) Draht: beschrieben durch $\vec{x}(s)$ (s : Bogenlänge)

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{m}{2} v^2 - V(\vec{x}(s)) \\
 v &= \left| \frac{d\vec{x}}{ds} \right| \frac{ds}{dt} \\
 L &= \frac{m}{2} \dot{s}^2 - V(\vec{x}(s)) \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} &= 0 \\
 m\ddot{s} - \sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x^i}}_{-\frac{\partial V}{\partial x^i}} \frac{\partial x^i}{\partial s} &= 0 \\
 m\ddot{s} - \vec{F} \cdot \frac{\vec{x}}{s} &= 0
 \end{aligned}$$

Beispiel 1.8 (Mathematisches Pendel im Fahrstuhl) Beschleunigung des Fahrstuhls: $v_y = a \cdot t$

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{m}{2} \vec{v}^2 - V \\
 \vec{v} &= \left(\frac{d}{dt}(l \sin \varphi), at - \frac{d}{dt}(l \cos \varphi) \right) \\
 &= (l \cos(\varphi) \dot{\varphi}, at + l \sin \varphi \dot{\varphi}) \\
 V &= mg \left(\frac{a}{2} t^2 - l \cos \varphi \right) \\
 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} (l^2 \cos^2 \varphi 2 \dot{\varphi} + 2atl \sin \varphi + l^2 \sin^2 \varphi 2 \dot{\varphi}) \right) - \\
 &\quad \left(\frac{m}{2} (l^2 \dot{\varphi}^2 2 \cos \varphi (-\sin \varphi) + 2atl \dot{\varphi} \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 2 \sin \varphi \cos \varphi) - mgl \sin \varphi \right) \\
 0 &= (2l^2 \cos \varphi (-\sin \varphi) \dot{\varphi}^2 + l^2 \cos^2 \varphi \ddot{\varphi} + al \sin \varphi + atl \cos \varphi \dot{\varphi} + l^2 2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + l^2 \sin^2 \varphi \ddot{\varphi}) \\
 &\quad - tal \dot{\varphi} \cos \varphi + gl \sin \varphi \\
 0 &= l^2 \ddot{\varphi} + l \sin \varphi (a + g)
 \end{aligned}$$