Theoretische Physik III (Schäfer)

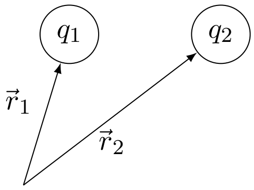
Robin Heinemann

26. Oktober 2017

Inhaltsverzeichnis

Teil A.
Phänomenologie der Maxwell-Gleichungen

A.1 . elektrisches Feld



$$
\begin{aligned}
F &= k\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^2} \\
k &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \\
\varepsilon_0 &= 8654\times 10^{-12}\,\mathrm{A\,s\,V^{-1}\,m} \simeq \frac{1}{4\pi 9\times 10^9}\mathrm{A\,s\,V^{-1}\,m}
\end{aligned}
$$

im SI-System.

$$q \to \frac{q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}} \to k=1, F=\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^2}$$

q wird gemessen in $\sqrt{\mathrm{erg\,cm}} = 1\,\mathrm{esu}$ „elektrostatic unit".

A.2 . elektrische Feldstärke

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$$

Achtung

viele Bücher verlangen:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{\Delta q\to 0}\frac{\Delta\vec{F}}{\Delta q}$$

dies ist nicht notwending $\to$ Linearität der Elektrodynamik

analog: Lorentz-Kraft auf bewegte Ladungen $\to$ magnetische Felder

A.3 . Maxwell-Gleichungen

$\to$ axiomatisch für die Elektrodynamik. Verbindung zwischen Ladungsdichte ρ, elektrischen Stromdichte $\vec{j}$ und den Feldern $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$ und $\vec{B}$. In einem Inertialsystem nehmen die Maxwell-Gleichungen diese Form an:

1. div $\vec{E} = \nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$ Gesetz von Grauß.
   elektrische Ladungen sind Quellen des elektrischen Feldes

$$\int_V \mathrm{d}^3 r\,\mathrm{div}\,\vec{E} \overset{\overset{\text{Satz von Gauß}}{\uparrow}}{=} \int_{\partial V}\mathrm{d}\vec{S}\,\vec{E} = \underset{\underset{\text{el. Fluss}}{\downarrow}}{\psi} = \int_v \mathrm{d}^3 r 4\pi\rho = 4\pi \overset{\overset{\text{eingschl. Ladung}}{\uparrow}}{q}$$

2. div $\vec{B} = \nabla \vec{B} = 0$

$$\int_v \mathrm{d}^3 r \operatorname{div} \vec{B} = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{S}\,\vec{B} = \phi = 0$$

3. rot $\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = -\partial_{ct} \vec{B}$ Faraday-Induktionsgesetz.
   $\downarrow$
   Lenz.-Regel.

$$\partial_{ct} = \frac{\partial}{\partial(ct)} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} = \underbrace{\int_{\partial S} \mathrm{d}\vec{r}\,\vec{E}}_{U} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(ct)} \underbrace{\int_s \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{B}}_{\phi}$$

4. rot $\vec{B} = \nabla \times \vec{B} = \partial_{ct} \vec{E} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$

$$\int_s \mathrm{d}\vec{S} \operatorname{rot} \vec{B} = \int_{\partial S} \mathrm{d}\vec{r}\,\vec{B} = \frac{d}{(ct)} \underbrace{\int_S \mathrm{d}\vec{S}\,\vec{E}}_{\psi} + \frac{4\pi}{c} \underbrace{\int_S \mathrm{d}\vec{S}\,\vec{j}}_{I}$$

A.4 . Eigenschaften der Maxwell-Gleichungen

- zwei skalare und zwei vektoriell Gleichungen
- lineare, partielle Differenzialgleichungen erster Ordnung
- für vorgegebene ρ und $\vec{j}$ lassen sich $\vec{E}$ und $\vec{B}$ berechnen
- **oder** aus einer Feldkonfiguration $\vec{E}$ und $\vec{B}$ lassen sich Ladungen ρ und $\vec{j}$ finden
- Maxwell-Gleichungen gelten in einem Inertialsystem: erst die Definitonen aus Bezugssystem bestimmt, was ρ und $\vec{j}$ ist, und damit $\vec{E}$ und $\vec{B}$
  darüber hinaus ist mit Wahl des Systems klar, was xvolt ist, und damit ∂_{ct} und ∇.
- nur eine Skala enthalten: $c \sim$ Lichtgeschwindigkeit
- im Vakuum: $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$: $\varepsilon = 1 = \mu \to \vec{D} = \vec{E}$, $\vec{H} = \vec{B}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial_{ct} \vec{B} \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= -\partial_{ct} \vec{E} \end{aligned}$$

  Wenn man $\vec{E} \to \vec{B}$, $\vec{B} \to -\vec{E}$ vertauscht, dann ändern sich die Gleichungen nicht $\to$ **elektromagnetische Dualität**.

- seltsame Asymmetrie, es gibt kein ρ_{mag} oder $\vec{j}_{\text{mag}}$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 4\pi\rho_{\text{mag}} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\partial_{ct} \vec{B} + \underbrace{\frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{mag}}}_{=0} \end{aligned}$$

A.5 . Erhaltung der elektrischen Ladung

$$
\begin{aligned}
\text{rot } \vec{B} &= \partial_{ct} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\
\text{div rot } \vec{B} &= \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j B_k = 0 = \partial_{ct} \underbrace{\text{div } \vec{E}}_{=4\pi\rho} + \frac{4\pi}{c} \text{ div } \vec{j} \\
&= \frac{4\pi}{c} \left(\partial_t \rho + \text{div } \vec{j} \right) \\
\implies \partial_t \rho + \text{div } \vec{j} &= 0 \qquad \text{(Kontinuitätsgleichung)}
\end{aligned}
$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt die Ladungserhaltung

$$
\int_V \mathrm{d}^3 r \partial_t \rho = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\int_V \mathrm{d}^3 r \rho}_{q} = - \int_V \mathrm{d}^3 r \text{ div } \vec{j} = - \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{j}
$$

- Änderung der Ladung in einem Volumen = Fluss der Ladung durch die Oberfläche.
- Dynamik der Felder ist konsistent zur Bewegung der Ladungen
- gilt auch in Materie! Ampere-Gesetz und Gauß-Gesetz enthalten falls $\varepsilon \neq 1$ die dielektrische Verschiebung $\vec{D}$.
- es existiert implizit eine zweite Erhaltungsgleichung für die magnetische Ladungen, die nicht existieren. $2(1+3)$ Maxwell-Gleichungen für $2 \cdot 2 \cdot 3$ Felder!

A.6 . Elektrodynamik in Materie

Wechselwirkungen zwischen dem elektromagnetischen Feld und Materie ist **sehr** kompliziert im Mikroskopischen $\rightarrow$ in vielen Fällen ist es trotzdem möglich, mit zwei Konstatnen eine einfach **effektive** Beschreibung zu finden.

- ε: Dielektrizitätskonstante $\rightarrow$ $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$
- μ: Permeabilitätskonstante $\rightarrow$ $\vec{B} = \mu \vec{H}$

Im Vakuum: $\varepsilon = 1, \mu = 1$, in Materie: $\varepsilon \neq 1, \mu \neq 1$

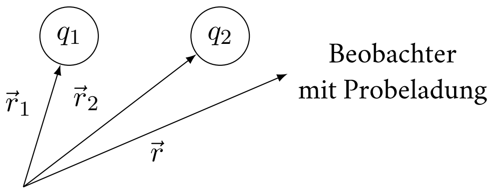
im Vakuum	in Materie
$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho$	$\text{div } \vec{D} = 4\pi\rho$
$\text{div } \vec{B} = 0$	$\text{div } \vec{B} = 0$
$\text{rot } \vec{E} = -\partial_{pt} \vec{B}$	$\text{rot } \vec{E} = -\partial_{pt} \vec{B}$
$\text{rot } \vec{B} = \partial_{ct} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$	$\text{rot } \vec{H} = \partial_{ct} \vec{D} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$

(wir brauchen noch zwei Konzepte, Dipolfelder und das elektrische Potenzial um ein Modell für ε aufstellen zu können).

A.7 . elektrisches Potenzial → Elektrostatik

$$\vec{E}(\vec{r}) = q_1 \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$



(Definiton: Probeladung ist positiv → abstoßende Coulomb-Kraft falls $q_1 > 0$.)
Superposition wegen der Linearität der Maxwell-Gleichnug.
Kontinuumslimit: ersetze $q \to \rho$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\int_V \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}) \nabla \frac{1}{|r - r'|}$$
$$= -\nabla \underbrace{\int_V \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{=\phi(\vec{r})}$$
$$\to \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \phi(\vec{r})}$$
$$\phi(\vec{r}) = \int_V \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

und es gilt automatisch in diesem Fall:

$$\mathrm{rot}\, \vec{E} = -\,\mathrm{rot}\, \nabla \phi = 0; \qquad (\mathrm{rot}\, E)_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \partial_k \phi = 0$$

Substitution in das Gauß-Gesetz:

$$\mathrm{div}\, \vec{E} = 4\pi\rho$$
$$\to \boxed{\triangle \phi = -4\pi\rho} \qquad \text{(Poisson-Gleichung)}$$

Falls keine Ladungen vorliegen, muss $\triangle \phi = 0$ gelten.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{|r - r'|}$$

Für Quelle mit $q = 1$ an der Stelle $\vec{r}' = \vec{0}$:

$$\triangle \phi = \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right)\phi \underset{\downarrow}{=} \triangle \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(r \frac{1}{r} \right) = 0$$

Kugelkoordinaten, Winkel fallen weg, da sie nicht in ϕ vorkommen

klar, bei $\vec{r}$ ist die Ladung nicht, sondern bei $\vec{0}$

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \, \triangle \phi = \int_V \mathrm{d}^3 r \nabla (\nabla \phi) \underset{\downarrow}{=} \int_{\partial V} \mathrm{d}\, \vec{S} \nabla \phi$$

Satz von Gauß

$$= \int r^2 \mathrm{d}\Omega \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial r}}_{=-\frac{1}{r^2}} = -\int \mathrm{d}\Omega = -4\pi$$

Zusammenfassung beider Fälle

$$\triangle \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\delta_D\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)$$

analog für Gravitation

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{g} &= 4\pi\rho \\ \triangle\phi &= 4\pi G\rho \end{aligned}$$

A.8 . Dirac-Funktion δ_D

Elektrodynamik ist eine Kontinuumstheorie $\to \rho$ ist eine Ladungsdichte:

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \rho = q \qquad \text{(im Volumen } V\text{)}$$

$q\delta_D(\vec{r}-\vec{r}')$ repräsentiert eine Punktladung q an der Stelle $\vec{r}'$.

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= \sum_i q_i \delta_D(\vec{r}-\vec{r}_i) \\ \phi(\vec{r}) &= \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned} \triangle\phi(\vec{r}) &= \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}') \triangle \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int \mathrm{d}^3 r' \rho\left(\vec{r}'\right)(-4\pi)\delta_D\left(\vec{r}-\vec{r}'\right) \\ \triangle\phi(\vec{r}) &= -4\pi\sigma(\vec{r}) \qquad \text{Poisson-Gleichung} \end{aligned}$$

im diskreten Fall:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \\ \triangle\phi(\vec{r}) &= \sum_i q_i \triangle \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_i q_i(-4\pi)\delta_D(\vec{r}-\vec{r}_i) \\ &= -4\pi \sum_i q_i \sigma_D\left(\vec{r}-\vec{r}'\right) = -4\pi\rho(\vec{r}) \end{aligned}$$

A.9 . potenzielle Energie und das elektrostatische Potenzial

⚠ **Achtung**

> bitte seid super vorsichtig mit Energieinterpretationen von allem, was mit Relativität zutun hat!

Coulomb-Kraft $\vec{F}$:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

Verschiebearbeit W:

$$W = \int_A^B \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{F} = -q\int_A^B \mathrm{d}\vec{r}\,\underset{\substack{\downarrow \\ \vec{E} = -\nabla\phi}}{\vec{E}} = g\int_A^B \underbrace{\mathrm{d}\vec{r}\nabla\phi}_{=\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\phi}$$

mit $\mathrm{d}\vec{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\phi=\mathrm{d}\phi$ (totales Differenzial)

$$W=q\int_A^B \mathrm{d}\phi=q(\phi(B)-\phi(A))$$

- Potenzialdifferenz entspricht der Verschiebearbeit pro Ladung
- Verschiebung muss extrem langsam erfolgen, dass $E\to B$ nicth transformiert (Lorentz!)

A.10 . Eigenschaften der δ_D-Funktion

Normierung

$$\int \mathrm{d}^n x\delta_D(x)=1$$

Lokalisierung

$$\int \mathrm{d}^n xg(x)\delta_D(x-y)=g(y)$$

$$\int_a^b \mathrm{d}x\delta_D(x-c)=\begin{cases}1 & a\le c\le b\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Durch Substitution

$$\int \mathrm{d}x\delta_D(ax)=\frac{1}{a}$$

Durch partielle Integration

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}xg(x)\delta_D'(x-a)&=g(x)\delta_D(x-a)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int \mathrm{d}xg'(x)\delta_D(x-a)\\&=0-g'(a)\end{aligned}$$

A.11 . Feldänderung an einer Oberfläche

Betrachte Oberfläche mit Oberflächenladung σ

$$\sigma=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta S}$$

wie wird ein elektrischen Feld durch diese Oberfläche beeinflusst? (vor Oberfläche: $\vec{E}_1$, nach Oberfläche $\vec{E}_2$) Dazu wählen Zylinder mit den Mantelflächen parallel zur Oberfläche und Volumen ΔV und, dass der elektrische Full durch die Seitenwände sehr klein ist und nicht zum Integral beiträgt.

$$\int_{\Delta V}\mathrm{d}^3r'\,\mathrm{div}\,\vec{E}\underset{\substack{\downarrow\\ \text{Gauß}}}{=}\int_{\Delta S}\mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{E}=4\pi q=4\pi\overbrace{\int_{\partial V}\mathrm{d}\vec{S}\sigma}^{\Delta S\cdot\sigma}=\Delta S\Big(E_2^\perp-E_1^\perp\Big)$$

$$\implies E_2^\perp=E_1^\perp+4\pi\sigma$$

Wenn das Feld tangential zur Oberfläche ist, kann man stattdessen eine Schleife wählen und den Satz von Stokes benutzen:

$$\int_\partial \mathrm{d}\vec{r}\,\vec{E}\underset{\substack{\downarrow\\ \text{Stokes}}}{\tau}\int_S \mathrm{d}\vec{S}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}=\Big(E_2^{\|}-E_1^{\|}\Big)\Delta r\to E_2^{\|}=E_1^{\|}$$

Außerdem: $\vec{E}=-\nabla\phi\implies\mathrm{rot}\,\vec{E}=-\,\mathrm{rot}\,\nabla\phi=0.$

A.12 . Energie einer statischen Ladungsverteilung

Achtung

Energie + Relativitätstheorie: supervorsichtig!

1. q_1 an einer Stelle $\vec{r}_1$ $\rightarrow$ Potential $\phi_1 = \frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}$
2. q_2 an einer Stelle $\vec{r}_2$ $\rightarrow$ $W_2 = q_2 \cdot \phi_1(\vec{r}_2)$
3. q_3 an einer Stelle $\vec{r}_3$ $\rightarrow$ $W_3 = q_3 \cdot (\phi_1(\vec{r}_2) + \phi_2(\vec{r}_3))$ Man erkennt

$\vdots$

n. q_n an einer Stelle $\vec{r}_n$ $\rightarrow$ $W_n = q_n \cdot \sum_i^{n-1} \phi_i(\vec{r}_n)$

$$W = \sum_n^N W_n = \sum_n^N q_n \sum_i^{n-1} \phi_i(\vec{r}_n)$$

$$W = \sum_n^N q_n \sum_i^{n-1} \frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_n|} = \underset{\downarrow}{\frac{1}{2}} \sum_n^N \sum_{\substack{i \\ i \neq n}}^N \frac{q_i q_n}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_n|}$$

Korrektur der doppelten Zählung

Kontinuums-Limes

$$\sum_i q_i \rightarrow \int \mathrm{d}^3 r' \rho(\vec{r}')$$

$$W = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \int \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \rho(\vec{r}) \underbrace{\int \mathrm{d}^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{=\phi(\vec{r})}$$

$$= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r})$$

$$W \underset{\downarrow}{=} -\frac{1}{8\pi} \int \mathrm{d}^3 r \, \triangle\phi\phi = -\frac{1}{8\pi} \int \mathrm{d}^3 r^3 \phi \, \triangle\phi$$

Poisson-Gleichung $\triangle\phi = -4\pi\rho$

Es gilt: $\phi \, \triangle\phi = \phi\nabla \cdot (\nabla\phi) = \nabla(\phi\nabla\phi) - \nabla\phi\nabla\phi$

$$W = -\frac{1}{8\pi} \int \mathrm{d}^3 r \nabla(\phi\nabla\phi) + \frac{1}{8\pi} \int \mathrm{d}^3 r (\nabla\phi)^2$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \int \mathrm{d}\vec{S}(\phi\nabla\phi) + \frac{1}{8\pi} \int \mathrm{d}^3 r \underbrace{(\nabla\phi)^2}_{\vec{E}=-\nabla\phi}$$

Satz von Gauß: $\int \mathrm{d}\vec{S}(\phi\nabla\phi) = 0$ für große Volumen, da typischerweise $\phi \sim 1/r$, $\nabla\phi \sim 1/r^2 \implies \phi\nabla\phi \sim 1/r^3$, aber $\mathrm{d}\vec{S} \sim r^2$

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \mathrm{d}^3 r E^2$$

Energiedichte des elektrischen Felds:

$$\rho_{el} = \frac{\vec{E}^2}{8\pi}$$

Achtung

Selbstenergie für $\vec{r}' = \vec{r}$ - keine Lösung in der klassischen Elektrodynamik.

Teil B.
Potentialtheorie

Lösungen der Poisson-Gleichung $\triangle\phi = -4\pi\rho$. 3 Probleme

1. Inversion des Differenzialoperators $\to$ Green-Funktion
2. Geometrie der Ladungsverteilung $\to$ Multipolentwicklung
3. Randbedingungen $\to$ Green-Theorie

B.1 . Green-Theoreme

Es gilt für $\vec{A}(\vec{r}) = \varphi\nabla\psi$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} - \mathrm{div}(\varphi\nabla\psi) = \nabla\varphi\nabla\psi + \varphi\triangle\psi$$

Satz von Gauß:

$$\int_V \mathrm{d}^3\,\mathrm{div}\,\vec{A} = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{S}\,\vec{A}$$

$\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$, $\vec{n} \sim$ Normalenvektor

$$\int_V \mathrm{d}^3r'\big(\nabla'\varphi\nabla'\psi + \varphi\triangle'\psi\big) = \int_{\partial V} \mathrm{d}S\varphi\nabla'\psi\cdot\vec{n} = \int_{\partial V}\mathrm{d}S\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} \qquad \text{Erste greensche Identität}$$

$\varphi \rightleftharpoons \psi$ und Subtraktion der Gleichungen

$$\int_V \mathrm{d}^3r'\big(\varphi\triangle'\psi - \psi\triangle'\varphi\big) = \int_{\partial U}\mathrm{d}S\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right) \qquad \text{Zweite greensche Identität}$$