

Analysis II (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

28. April 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Metrische und normierte Räume	1
1.1	Metrische Räume	1
1.2	Normierte Räume	3
1.3	Hilberträume	4
1.4	Stetigkeit und Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^n	7

1 Metrische und normierte Räume

1.1 Metrische Räume

Definition 1.1 Sei M eine Menge, $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ heißt **Metrik** auf M genau dann wenn $\forall x, y, z \in M$

- (D1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Definitheit)
- (D2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
- (D3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

Beispiel 1.2 1. Charakterische (diskrete) Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Sei $X = \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}) mit Metrik

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{n}{2}}$$

(euklidische Metrik)

3. Sei $X = \mathbb{R}^n$. Für $1 \leq \phi \leq \infty$. Sei

$$d_\phi(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^\phi \right)^{\frac{1}{\phi}}$$

Ist $\phi = \infty$, so definieren wir

$$d_\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$$

4. $X = \mathbb{R}$ mit Metrik

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

5. Der Raum der Folgen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (beziehungsweise $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) kann mit der Metrik

$$d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

Definition 1.3 Sei M eine Menge mit Metrik d . Wir definieren für $x \in M, \varepsilon > 0$, die offene ε -Kugel um x durch

$$K_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

und eine abgeschlossene Kugel durch

$$K_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

$A \subset M$ heißt **Umgebung** von $x \in M \Leftrightarrow \exists \varepsilon : K_\varepsilon(x) \subset A$

Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen

Definition 1.4 Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) ist konvergent gegen einem $x \in X$ genau dann wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 d(x_n, x) < \varepsilon$

Satz 1.5 1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist $A \subseteq X$ abgeschlossen genau dann wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in A mit $x_n \rightarrow x \Rightarrow x \in A$

2. Seien $(X, d_1), (Y, d_2)$ zwei metrische Räume. Dann ist die Funktion stetig in $x \in X$ genau dann wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Definition 1.6 ((Cauchy Folgen und Vollständigkeit)) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge falls $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ für $n, m \rightarrow \infty$. Der metrische Raum heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge konvergent ist.

1.2 Normierte Räume

Definition 1.7 Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist ein Paar bestehend aus einem \mathbb{K} -Vektorraum X und einer Abbildung $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ mit

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in X$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in X$

Bemerkung 1. Die Norm $\|\cdot\|$ induziert auf X eine Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$

2. Eine Metrik d auf einem Vektorraum definiert die Norm $\|d(x, 0)\|$ nur dann, wenn

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x, y, z \in X : d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y) \quad (\text{Homogenität})$$

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad (\text{Translationsinvarianz})$$

Definition 1.8 (Banachraum) Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt vollständig, falls X als metrischer Raum mit der Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ vollständig ist. Ein solcher vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**

Beispiel 1.9 1. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, wobei

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{n}{2}}$$

2. Sei K eine kompakte Menge:

$$C_{\mathbb{K}} := \{f : K \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\}$$

$$\|\cdot\|_{\infty} = \max_{x \in K} |f(x)|$$

$(C_{\mathbb{K}(K)}, \|\cdot\|_{\infty})$ ist ein Banachraum.

Bemerkung 1. Jede Cauchy-Folge in \mathbb{K}^n konvergiert, das heißt $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ ist vollständig

2. Jede beschränkte Folge in \mathbb{K}^n besitzt eine konvergente Teilfolge. (Bolzano-Weierstraß Satz gilt in \mathbb{R}^n) (Beweis für \mathbb{R}^n zum Beispiel in RR Ana2 Satz 1.1)

Satz 1.10 (Äquivalenz von Normen) Auf dem endlich dimesionalen Vektorraum \mathbb{K}^n sind alle Normen **äquivalent** zur Maximumnorm, das heißt zu jeder Norm $\|\cdot\|$ gibt es positive Konstanten w, M mit denen gilt

$$m\|x\|_{\infty} \leq \|x\| \leq M\|x\|_{\infty}, x \in \mathbb{K}^n$$

Beweis Sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm $\forall x \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \|e^{(k)}\| \leq M \|x\|_\infty$$

mit

$$M := \sum_{k=1}^n \|e^{(k)}\|$$

Wir setzen

$$S_1 := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}, m := \inf\{\|x\|, x \in S_1\} \geq 0$$

Zu zeigen $m > 0$ (dann ergibt sich für $x \neq 0$ wegen $\|x\|_\infty^{-1} x \in S_1$ auch $m \leq \|x\|_\infty^{-1} \|x\| \Rightarrow 0 < m \|x\|_\infty \leq \|x\| \quad x \in \mathbb{K}^n$) Sei also angenommen, dass $m = 0$

Dann gibt eine Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \in S_1$ mit $\|x^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Da diese Folge bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ beschränkt ist, gibt es nach dem B.-W. Satz eine Teilfolge auch von $(x^{(k)})$, die bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ gegen ein $x \in \mathbb{K}^n$ konvergiert.

$$|1 - \|x\|_\infty| = \left| \|x^{(k)}\|_\infty - \|x\|_\infty \right| \leq \|x^{(k)} - x\|_\infty \rightarrow 0 \Rightarrow \|x\|_\infty = 1 \Rightarrow x \in S_1$$

Andererseits gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} : \|x\| \leq \|x - x^{(k)}\| + \|x^{(k)}\| \leq M \|x - x^{(k)}\|_\infty + \|x^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Rightarrow x = 0$$

↳ zu $x \in S_1$

□

Definition 1.11 Eine Menge $M \subset K^n$ heißt kompakt (folgenkompakt), wenn jede beliebige Folge in M eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert ebenfalls in M enthalten ist.

Beispiel 1.12 Mit Hilfe von dem Satz von B.W. folgt, dass alle abgeschlossene Kugeln im \mathbb{R}^n ($K_r(a)$, $a \in K^n$) kompakt sind. Ferner ist für beschränkte Mengen M der Rand ∂M kompakt. Jede endliche Menge ist auch kompakt.

1.3 Hilberträume

Definition 1.13 Sei H \mathbb{K} Vektorraum. Ein **Skalarprodukt** auf eine Abbildung

$$(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$$

mit

1. $\forall x, y, z \in H, \lambda \in \mathbb{K} : (z, x + \lambda y) = (z, x) + \lambda(z, y)$
2. $\forall x, y \in H : (x, y) = \overline{(y, x)}$
3. $\forall x \in H : (x, x) \geq 0 \wedge (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$(H, (\cdot, \cdot))$ nennt man einen Prähilbertraum.

Bemerkung Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist das Skalarprodukt linear in der zweiten Komponente aber antilinear in der ersten ($(\lambda x, y) = \bar{\lambda}(x, y)$).

Lemma 1.14 (Cauchy-Schwarz Ungleichung) Sei $(H, (\cdot, \cdot))$ Prähilbertraum, dann gilt

$$\forall x, y \in H : |(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

Beweis Da die Ungleichung für $y = 0$ bereits erfüllt ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen $y \neq 0$. Für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$0 \leq (x + \alpha y, x + \alpha y) = (x, x) + \bar{\alpha}(y, x) + \alpha(x, y) + \alpha\bar{\alpha}(y, y)$$

Setze nun $\alpha := -(x, y)(y, y)^{-1}$

$$\begin{aligned} &= (x, x) - \overline{(x, y)}(y, y)^{-1} - (x, y)(y, y)^{-1}(x, y) - |(x, y)|^2(y, y)^{-1} \\ &= (x, x) - \underbrace{((y, x)(y, x) + (x, y)(x, y))(y, y)^{-1}}_{>0} - |(x, y)|^2(y, y)^{-1} \\ &\leq (x, x) - |(x, y)|^2(y, y)^{-1} \\ &\Leftrightarrow |(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y) \end{aligned}$$

□

Korollar 1.15 Sei $(H, (\cdot, \cdot))$ ein Prähilbertraum, dann ist $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ eine Norm auf H .

Beweis Es ist nur die Dreiecksungleichung zu beweisen, weil der Rest klar ist. Für $x, y \in H$ gilt

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(x, y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x, y)| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

□

Definition 1.16 Ein Prähilbertraum $(H, (\cdot, \cdot))$ heißt Hilbertraum, falls $(H, \|\cdot\|)$ mit $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ ein Banachraum ist.

Beispiel 1.17 1. $H = \mathbb{R}^n$ versehen mit $\underbrace{(x, y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i}_{\text{euklidisches Skalarprodukt}}$ ist ein Hilbertraum

2. $H = \mathbb{C}^n$ mit $\underbrace{(x, y) := \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i}_{\text{euklidisches Skalarprodukt}}$ ist ein Hilbertraum

3. Sei $l^2\mathbb{K} := \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{K}, \forall k \in \mathbb{N} \wedge \sum_{i=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}$ versehen mit $(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \bar{x}_i y_i$ ist ein Hilbertraum.

$$\sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|_{l^2} \|y\|_{l^2} < \infty$$

Lemma 1.18 (Höller-Ungleichung) Für das euklidische Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_2$ gilt für beliebige p, q mit $1 < p, q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ die Ungleichung

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n : |(x, y)_2| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Darüber hinaus gilt die Ungleichung auch für $p = 1, q = \infty$

Lemma 1.19 (Young'sche Ungleichung) Für $p, q \in \mathbb{R}, 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{K} : |(x, y)| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}$$

Lemma 1.20 (Minkowski-Ungleichung) Für ein beliebiges $p \in [1, \infty]$ gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n : \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Satz 1.21 (Banachscher Fixpunktsatz) Sei (M, d) ein vollständiger, metrischer Raum und $f : M \rightarrow M$ ist eine strenge Kontraktion, das heißt

$$\exists 0 < \alpha < 1 \forall x, y \in M : d(f(x), f(y)) < \alpha d(x, y)$$

Dann existiert ein eindeutiger Fixpunkt von f , das heißt es existiert ein eindeutiges $x^* \in M : f(x^*) = x^*$

Beweis Existenz:

Wähle ein $x_0 \in M$ beliebig, aber fest und definiere dann $x_1 := f(x_0), x_2 := f(x_1), \dots$ Dann gilt für $n \leq m$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(f(x_{n-1}), f(x_{m-1})) < \alpha d(x_{n-1}, x_{m-1}) \\ &= \alpha d(f(x_{n-2}), f(x_{m-2})) < \dots < \alpha^n d(x_0, x_{m-n}) \end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\begin{aligned} d(x_0, x_{m-n}) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n}) \\ &\leq d(x_0, x_1) + \alpha d(x_0, x_1) + \dots + \alpha^{m-n-1} d(x_0, x_1) \\ &= d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{m-n-1} \alpha^i \leq d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \\ &= \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \alpha} < \infty \\ \Rightarrow d(x_n, x_m) &\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Also ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge. Da (M, d) vollständig ist existiert $x^* \in M$, sodass $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^*$.
Zeige, dass x^* Fixpunkt von f ist:

$$\begin{aligned} 0 \leq d(x^*, f(x^*)) &\leq d(x^*, x_k) + d(x_k, f(x^*)) \\ &\leq d(x^*, x_k) + \alpha d(x_{k-1}, x^*) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x^*) = x^*$$

Eindeutigkeit: Angenommen $\exists x' \in M, x' \neq x^* : f(x') = x'$:

$$0 < d(x^*, x') = d(f(x^*), f(x')) < \alpha d(x^*, x') \Rightarrow \alpha > 1 \quad \square$$

1.4 Stetigkeit und Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^n

Definition 1.22 Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, D \neq \emptyset$, ist stetig in einem $a \in D$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

Bemerkung Es gelten auch im Mehrdimensionalen die Permanenzeigenschaften, das heißt f, g stetig $\Rightarrow f + g, f \circ g$ sind stetig.

Satz 1.23 Eine stetige Funktion $f : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ ist auf einer kompakten Menge $K \subset D$ beschränkt, das heißt für jede kompakte Menge K existiert eine Konstante M_K , sodass

$$\forall x \in K \|f(x)\| < M_K$$

Beweis Angenommen f wäre auf K unbeschränkt, dann gäbe es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in K$ mit $\|f(x_k)\| > k$. Da K kompakt hat die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ für die gilt $x_{k_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x \in K$. Da f stetig $f(x_{k_j}) \rightarrow f(x)$ und $\|f(x)\| < \infty$, was im Widerspruch steht zu $\|f(x_{k_j})\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$. \square

Satz 1.24 Eine stetige Funktion $f : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt auf jeder (nicht leeren) kompakten Menge $K \subset D$ ihr Minimum und Maximum an.

Beweis Nach Satz 2.2 besitzt f eine obere Schranke auf K

$$\mathcal{K} := \sup_{x \in K} f(x)$$

Dazu $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq K$, sodass $f(x_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathcal{K}$. Da K kompakt existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ und ein x_{max} , sodass $x_{k_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x_{max}$. Da f stetig, gilt $f(x_{k_j}) \rightarrow f(x_{max})$. \square

Bemerkung Auf diese Weise lassen sich die Ergebnisse der Stetigkeit aus dem Eindimensionalen ins Mehrdimensionale verallgemeinern.

Im folgenden Teil sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Definition 1.25 Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in einem Punkt $x \in D$ partiell differenzierbar bezüglich der i -ten Koordinatenrichtung, falls der Limes

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) =: \partial_i f(x)$$

existiert. Existieren in allen Punkten $x \in D$ alle partiellen Ableitungen, so heißt f partiell differenzierbar. Sind alle partiellen Ableitungen stetig auf D , so heißt f stetig partiell differenzierbar. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt (stetig) partiell differenzierbar, wenn $f_i, i = 1, \dots, m$ (stetig) partiell differenzierbar.

Bemerkung Die Ableitungsregeln aus dem Eindimensionalen übertragen sich auf partielle Ableitungen.

Beispiel 1.26 1. Polynome sind stetig partiell differenzierbar. Sei $p : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto a_{01}x_2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 + a_{21}x_1^2x_2$. Dann ist

$$\frac{\partial p}{\partial x_1}(x_1, x_2) = a_{11}x_2 + 2a_{21}x_1x_2 \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = a_{01} + a_{11}x_1 + 2a_{02}x_2 + a_{21}x_1^2$$

2. $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig partiell differenzierbar, da

$$\frac{\partial \|\cdot\|}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{2x_i}{(x_1^2 + \dots + x_k^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x_i}{\|x\|_2}$$

3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$ für $x \neq 0, f(0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} - 4 \frac{x_1^2 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^3}, x \neq 0$$

Für $x = 0$ ist $f(0) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(xe_i) - f(0)}{h} = 0$$

Sei $x_\varepsilon(\varepsilon, \varepsilon)$ und damit gilt $\|x_\varepsilon\|_2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$

$$f(x_\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{4\varepsilon^4} = \frac{1}{4\varepsilon_2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$$

Satz 1.27 Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ habe in einer Kugelumgebung $K_r(x) \subset D$ eines Punktes $x \in D$ beschränkte partielle Ableitungen, das heißt

$$\sup_{y \in K_r(x)} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \leq M, i = 1, \dots, n$$

dann ist f stetig in x .

Beweis Es genügt $n = 2$. Für $(y_1, y_2) \in K_r(x)$

$$f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2) - f(x_1, y_2) + f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2)$$

Nach dem 1-D Mittelwertsatz existieren $\xi, \eta \in K_r(x)$, sodass

$$\begin{aligned} |f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2)| &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi, y_2)(y_1 - x_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \eta)(y_2 - x_2) \\ &\leq M(|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|) \end{aligned} \quad \square$$

Höhere partielle Ableitungen definieren sich durch sukzessives Ableiten, das heißt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$$

Beispiel 1.28

$$\frac{x_1}{x_2} := \frac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}$$

für $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$. f zweimal partiell diffbar, aber

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(0, 0) \neq \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(0, 0)$$

Satz 1.29 Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei in einer Umgebung $K_r(x) \subset D$ eines Punktes $x \in D$ zweimal stetig partiell differenzierbar, dann gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(x), i, j = 1, \dots, n$$

Beweis $n = 2$. Sei $A := f(x_1 - h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2 + h_2) + f(x_1, x_2)$.

$$\varphi(x_1) := f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) \Rightarrow A = \varphi(x_1 + h_1) - \varphi(x_1)$$

Mit dem Mittelwertsatz erhalten wir $A = h_1 \varphi'(x_1 + \theta_1 h_1)$, $\theta_1 \in (0, 1)$.

$$\varphi'(x_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2 + h_2) - \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(x_1, x_2 + \theta'_1 h_2), \theta'_1 \in (0, 2)$$

Analog verfähre man mit x_2 und erhalte für $\psi(x_2) := f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2)$

$$A = \psi(x_2 - h_2) - \psi(x_2) = h_2 \psi'(x_2 + \theta_2 h_2) = h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1 + \theta_2 h_1, x_2 + \theta'_2 h_2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(x_1 + \theta_1 h_1, x_2 + \theta'_1 h_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1 + \theta_2 h_1, x_2 + \theta'_2 h_2)$$

$$\xrightarrow{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1, x_2) \quad \square$$