Einführung in die Anwendungsorientierte Informatik (Köthe)

Robin Heinemann

13. Januar 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Was ist Informatik?

„Kunst“ Aufgaben mit Computerprogrammen zu lösen.

1.1 Teilgebiete

1.1.1 theoretische Informatik (ITH)

- Berechenbarkeit: Welche Probleme kann man mit Informatik lösen und welche prinzipiell nicht?
- Komplexität: Welche Probleme kann man effizient lösen?
- Korrektheit: Wie beweist man, dass das Ergebnis richtig ist?
  Echtzeit: Dass das richtige Ergebnis rechtzeitig vorliegt.
- verteilte Systeme: Wie sichert man, dass verteilte Systeme korrekt kommunizieren?

1.1.2 technische Informatik (ITE)

- Auf welcher Hardware kann man Programme ausführen, wie baut man dies Hardware?
- CPU, GPU, RAM, HD, Display, Printer, Networks

1.1.3 praktische Informatik

· Wie entwickelt man Software?

· Programmiersprachen und Compiler: Wie kommuniziert der Programmierer mit der Hardware? **IPI**, **IPK**

· Algorithmen und Datenstrukturen: Wie baut man komplexe Programme aus einfachen Grundbausteinen? **IAL**

· Softwaretechnik: Wie organisiert man sehr große Projekte? **ISW**

· Kernanwendung der Informatik: Betriebssysteme, Netzwerke, Parallelisierung **IBN**

  · Datenbanksysteme **IDB1**

  · Graphik, Graphische Benutzerschnittstellen **ICG1**

  · Bild- und Datenanalyse

  · maschinelles Lernen

  · künstliche Intelligenz

1.1.4 angewandte Informatik

· Wie löst man Probleme aus einem anderem Gebiet mit Programmen?

· Informationstechnik

  · Buchhandlung, e-Kommerz, Logistik

· Web Programmierung

· scientific computing für Physik, Biologie

· Medizininformatik

  · bildgebende Verfahren

  · digitale Patientenakte

· Computer Linguistik

  · Sprachverstehen, automatische Übersetzung

· Unterhaltung: Spiele, special effects im Film

2 Wie unterscheidet sich Informatik von anderen Disziplinen?

2.1 Mathematik

Am Beispiel der Definition $a \leq b : \exists c \geq 0 : a + c = b$
Informatik:

Lösungsverfahren: $a - b \leq 0$, das kann man leicht ausrechnen, wenn man subtrahieren und mit 0 vergleichen kann.
Quadratwurzel: $y = \sqrt{x} \iff y \geq 0 \wedge y^2 = x(\implies x > 0)$
Informatik: Algorithmus aus der Antike: $y = \frac{x}{y}$ iteratives Verfahren:
Initial Guess $y^{(0)} = 1$ schrittweise Verbesserung $y^{(t+1)} = \frac{y^{(t)} + \frac{x}{y^{(t)}}}{2}$

3 Informatik

Lösungswege, genauer Algorithmen

3.1 Algorithmus

schematische Vorgehensweise mit der jedes Problem einer bestimmten **Klasse** mit **endliche** vielen **elementaren** Schritten / Operationen gelöst werden kann

- schematisch: man kann den Algorithmus ausführen, ohne ihn zu verstehen ($\implies$ Computer)
- alle Probleme einer Klasse: zum Beispiel: die Wurzel aus jeder beliebigen nicht-negativen Zahl, und nicht nur $\sqrt{11}$
- endliche viele Schritte: man kommt nach endlicher Zeit zur Lösung
- elementare Schritte / Operationen: führen die Lösung auf Operationen oder Teilprobleme zurück, die wir schon gelöst haben

3.2 Daten

Daten sind Symbole,

- die Entitäten und Eigenschaften der realen Welt im Computer repräsentieren.
- die interne Zwischenergebnisse eines Algorithmus aufbewahren

$\implies$ Algorithmen transformieren nach bestimmten Regeln die Eingangsdaten (gegebene Symbole) in Ausgangsdaten (Symbole für das Ergebnis). Die Bedeutung / Interpretation der Symbole ist dem Algorithmus egal $\stackrel{\wedge}{=}$ „schematisch“

3.2.1 Beispiele für Symbole

- Zahlen
- Buchstaben
- Icons
- Verkehrszeichen

aber: heutige Computer verstehen nur Binärzahlen $\Longrightarrow$ alles andere muss man übersetzen Eingansdaten: „Ereignisse“:

- Symbol von Festplatte lesen oder per Netzwerk empfangen
- Benutzerinteraktion (Taste, Maus, …)
- Sensor übermittelt Messergebnis, Stoppuhr läuft ab

Ausgangsdaten: „Aktionen“:

- Symbole auf Festplatte schreiben, per Netzwerk senden
- Benutzeranzeige (Display, Drucker, Ton)
- Stoppuhr starten
- Roboteraktion ausführen (zum Beispiel Bremsassistent)

Interne Daten:

- Symbole im Hauptspeicher oder auf Festplatte
- Stoppuhr starten / Timeout

3.3 Einfachster Computer

endliche Automaten (endliche Zustandsautomaten)

- befinden sich zu jedem Zeitpunkt in einem bestimmten Zustand aus einer vordefinierten endlichen Zustandsmenge
- äußere Ereignisse können Zustandsänderungen bewirken und Aktionen auslösen

3.3.1 TODO Graphische Darstellung

graphische Darstellung: Zustände = Kreise, Zustandsübergänge: Pfeile

3.3.2 TODO Darstellung durch Übergangstabellen

Zeilen: Zustände, Spalten: Ereignisse, Felder: Aktion und Folgezustände

Zustände $\setminus$ Ereignisse	Knopf drücken	Timeout
aus	$\Longrightarrow$ {halb} $\setminus$ {4 LEDs an}	%
halb	($\Longrightarrow$ {voll},{8 LEDs an})	%
voll	($\Longrightarrow$ {blinken an},{Timer starten})	%
blinken an	($\Longrightarrow$ {aus},{Alle LEDs aus, Timer stoppen})	($\Longrightarrow$ {blinken aus},{alle LEDs
blinken aus	($\Longrightarrow$ {aus},{Alle LEDs aus, Timer stoppen})	($\Longrightarrow$ {blinken an},{alle LEDs

Variante: Timer läuft immer (Signal alle 0.3s) $\Longrightarrow$ Timout ignorieren im Zustand „aus“, „halb“, „voll“

3.3.3 Beispiel 2:

$$\begin{aligned} &1\,0\,1\,1\,0\,1\,0 && = 2 + 8 + 16 + 74 = 90_{\text{dez}} && (1) \\ +&0\,1\,1\,1\,0\,0\,1 && = 1 + 8 + 16 + 32 = 57_{\text{dez}} && (2) \\ \hline &1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,1 && = 1 + 2 + 16 + 128 = 147_{\text{dez}} \checkmark && (3) \end{aligned}$$

Implementation mit Endlichen Automaten Prinzipien:

· wir lesen die Eingangsdaten von rechts nach links

· Beide Zahlen gleich lang (sonst mit 0en auffüllen)

· Ergebnis wird von rechts nach links ausgegeben

TODO Skizze der Automaten

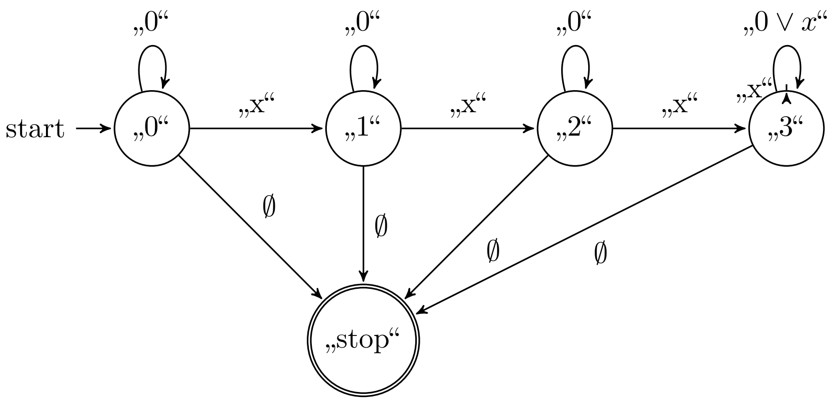
Zustand	Ereignis	Ausgeben
start	(0,1)	„1“
start	(1,0)	„1“
start	(0,0)	„0“
start	(1,1)	„0“
carry = 1	(1,1)	„1“
carry = 1	(0,1)	„0“
carry = 1	(1.0)	„0“
carry = 1	$\emptyset$	„1“

Wichtig: In jedem Zustand muss für **alle möglichen** Ereignisse eine Aktion und Folgezustand definiert werden. Vergisst man ein Ereignis zeigt der Automat undefiniertes Verhalten, also einen „Bug“. Falls keine sinnvolle Reaktion möglich ist: neuer Zustand: „Fehler“ $\Longrightarrow$ Übergang nach „Fehler“, Aktion: Ausgeben einer Fehlermeldung

TODO Skizze Fehlermeldung Ein endlicher Automat hat nur ein Speicherelement, das den aktuellen Zustand angibt. Folge:

· Automat kann sich nicht merken, wie er in den aktuellen Zustand gekommen ist („kein Gedächtnis“)

· Automat kann nicht beliebig weit zählen, sondern nur bis zu einer vorgegebenen Grenze



Insgesamt: Man kann mit endlichen Automaten nur relativ einfache Algorithmen implementieren. (nur reguläre Sprachen) Spendiert man zusätzlichen Speicher, geht mehr:

· Automat mit Stack-Speicher (Stapel oder Keller) $\implies$ Kellerautomat (Kontextfreie Sprachen)

· Automat mit zwei Stacks oder äquivalent Turing-Maschine kann alles ausführen, was man intuitiv für berechenbar hält

Markov Modelle: endliche Automaten mit probabilistischen Übergangen. Bisher: Algorithmen für einen bestimmten Zweck (Problemklasse) Frage: Gibt es einen universellen Algorithmus für alle berechenbare Probleme? Betrachte formale Algorithmusbeschreibung als Teil der Eingabe des universellen Algorithmus.

4 Substitutionsmodell (funktionale Programmierung)

· einfaches Modell für arithmetische Berechnung „Taschenrechner“

· Eingaben und Ausgaben sind Zahlen (ganze oder reelle Zahlen). Zahlenkonstanten heißen „Literale“

· elementare Funktionen: haben eine oder mehrere Zahlen als Argumente (Parameter) und liefern eine Zahl als Ergebnis (wie Mathematik):

  · add(1,2) $\to$ 3, mul(2,3) $\to$ 6, analog sub(), div(), mod()

· Funktionsaufrufe können verschachtelt werden, das heißt Argumente kann Ergebnis einer anderen Funktion sein

  · mul(add(1,2),sub(5,3)) $\to$ 6

4.1 Substitutionsmodell

Man kann einen Funktionsaufruf, dessen Argument bekannt ist (das heißt Zahlen sind) durch den Wert des Ergebnisses ersetzen („substituieren“). Geschachtelte Ausdrücke lassen sich so von innen nach außen auswerten.

$$mul(add(1,2), sub(5,3))$$

$$mul(3, sub(5,3))$$

$$mul(3,2)$$

$$6$$

- Die arithmetischen Operationen add(), sub(), mul(), div(), mod() werden normalerweise von der Hardware implementiert.
- Die meisten Programmiersprachen bieten außerdem algebraische Funktionen wie: sqrt(), sin(), cos(), log()
    - sind meist nicht in Hardware, aber vorgefertigte Algorithmen, werden mit Programmiersprachen geliefert, „Standardbibliothek"
- in C++: mathematisches Modul des Standardbibliothek: „cmath"
- Für Arithmetik gebräuchlicher ist „Infix-Notation" mit Operator-Symbolen „+", „-", „*", „/", „%"
- mul(add(1,2),sub(5,3)) $\iff$ ((1+2)*(5-3))
    - oft besser, unter anderem weil man Klammer weglassen darf
        1. „Punkt vor Strichrechnung" 3+4*5 $\iff$ 3+(4*5), mul, div, mod binden stärker als add, sub
        2. Operatoren gleicher Präzedenz werden von links nach rechts ausgeführt (links-assoziativ)
           1+2+3-4+5 $\iff$ ((((1+2)+3)-4)+5)
        3. äußere Klammer kann man weglassen (1+2) $\iff$ 1+2
- Computer wandeln Infix zuerst in Präfix Notation um
    1. weggelassene Klammer wieder einfügen
    2. Operatorensymbol durch Funktionsnamen ersetzen und an Präfix-Position verschieben

$$1 + 2 + 3 * 4/(1 + 5) - 2$$

$$(((1 + 2) + ((3 * 4)/(1 + 5))) - 2)$$

$$sub(add(add(1,2), div(mul(3,4), add(1,5))), 2)$$

$$sub(add(3, div(12,6)), 2)$$

$$sub(add(3,2), 2)$$

$$sub(5,2)$$

$$2$$

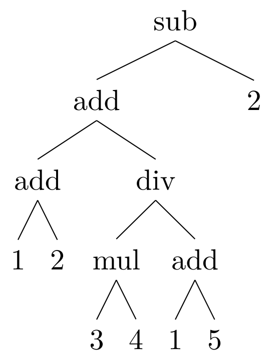
4.2 Bäume

- bestehen aus Knoten und Kanten (Kreise und Pfeile)
- Kanten verbinden Knoten mit ihren Kind-knoten
- jeder Konten (außer der Wurzel) hat genau ein Elternteil („parent node“)
- Knoten ohne Kinder heißen Blätter („leaves / leaf node“)
- Teilbaum
  - wähle beliebigen Knoten
  - entferne temporär dessen Elternkante, dadurch wird der Knoten temporär zu einer Wurzel, dieser Knoten mit allen Nachkommen bildet wieder einen Baum (Teilbaum des Originalbaumes)
- trivialer Teilbaum hat nur einen Knoten
- Tiefe: Abstand eines Knotens von der Wurzel (Anzahl der Kanten zwischen Knoten und Wurzel)
  - Tiefe des Baums: maximale Tiefe eines Knoten

4.2.1 Beispiel

$$1 + 2 + 3 * 4/(1 + 5) - 2$$

$$sub(add(add(1, 2), div(mul(3, 4), add(1, 5))), 2)$$



4.3 Rekursion

Rekursiv $\hat{=}$ Algorithmus für Teilproblem von vorn.

4.4 Präfixnotation aus dem Baum rekonstruieren

1. Wenn die Wurzel ein Blatt ist: Drucke die Zahl
2. sonst:
   - Drucke Funktionsnamen
   - Drucke „("
   - Wiederhole den Algorithmus ab 1 für das linke Kind (Teilbaum mit Wurzel = linkes Kind)
   - Drucke „,"
   - Wiederhole den Algorithmus ab 1 für das rechte Kind (Teilbaum mit Wurzel = rechtes Kind)
   - Drucke „)"

$\Longrightarrow$
$$sub(add(add(1,2), div(mul(3,4), add(1,5))), 2)$$

4.5 Präfixnotation aus dem Baum rekonstruieren

1. Wenn die Wurzel ein Blatt ist: Drucke die Zahl
2. sonst:
   - Drucke Funktionsnamen
   - Drucke „("
   - Wiederhole den Algorithmus ab 1 für das linke Kind (Teilbaum mit Wurzel = linkes Kind)
   - Drucke Operatorsymbol
   - Wiederhole den Algorithmus ab 1 für das rechte Kind (Teilbaum mit Wurzel = rechtes Kind)
   - Drucke „)"

$\Longrightarrow$
$$sub(add(add(1,2), div(mul(3,4), add(1,5))), 2)$$

$\Longrightarrow$ **inorder**

4.6 Berechnen des Werts mit Substitutionsmodell

1. Wenn Wurzel dein Blatt gib Zahl zurück
2. sonst:
   - Wiederhole den Algorithmus ab 1 für das linkes Kind (Teilbaum mit Wurzel = rechtes Kind), speichere Ergebnis als „lhs"

  - Wiederhole den Algorithmus ab 1 für das rechte Kind (Teilbaum mit Wurzel = rechtes Kind), speichere Ergebnis als „rhs“
  - berechne funktionsname(lhs,rhs) und gebe das Ergebnis zurück

$\Longrightarrow$ **post-order**

5 Maschinensprachen

- optimiert für die Hardware
- Gegensatz: höhere Programmiersprachen (c++)
  - optimiert für Programmierer
- Compiler oder Interpreter übersetzen Hoch- in Maschinensprache

5.1 Umwandlung in Maschinensprache

1. Eingaben und (Zwischen)-Ergebnisse werden in Speicherzellen abgespeichert $\Longrightarrow$ jeder Knoten im Baum bekommt eine Speicherzelle
2. Speicherzellen für Eingaben initialisieren
   - Notation: SpZ $\leftarrow$ Wert
3. Rechenoperationen in Reihenfolge des Substitutionsmodell ausführen und in der jeweiligen Speicherzelle speichern
   - Notation: SpZ-Ergebnis $\leftarrow$ fname SpZArg1 SpZArg2
4. alles in Zahlencode umwandeln
   - Funktionsnamen:

Opcode	Wert
init	1
add	2
sub	3
mul	4
div	5

6 Funktionale Programmierung

- bei Maschinensprache werden Zwischenergebnisse in Speicherzellen abgelegt
- das ist auch in der funktionalen Programmierung eine gute Idee
- Speicherzellen werden durch Namen (vom Programmierer vergeben) unterschieden

6.1 Beispiel

Lösen einer quadratischen Gleichung:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 - 2px + q = 0, p = -\frac{b}{2a}, q = \frac{c}{d}$$

$$x_2 = p + \sqrt{p^2 - q}, x_2 = p - \sqrt{p^2 - q}$$

ohne Zwischenergebnisse:

$$x_1 \leftarrow add(div(div(b,a),-2), sqrt(sub(mul(div(b,a),-2), div(div(b,a)-1)), div(c,a)))$$

mit Zwischenergebnis und Infix Notation

$$p \leftarrow b/c/-2 \text{ oder } p \leftarrow -0.5 * b/a$$

$$a \leftarrow c/a$$

$$d \leftarrow sqrt(p * p - q)$$

$$x_1 \leftarrow p + d$$

$$x_2 \leftarrow p - d$$

6.2 Vorteile von Zwischenergebnissen

1. lesbarer
2. redundante Berechnung vermieden. Beachte: In der funktionalen Programmierung können die Speicherzellen nach der Initialisierung nicht mehr verändert werden
3. Speicherzellen und Namen sind nützlich um Argumente an Funktionen zu übergeben $\implies$ Definition eigener Funktionen

```
function sq(x) {
        return x * x
}
```

$\implies$ $d \leftarrow sqrt(sq(p) - q)$ Speicherzelle mit Namen „x“ für das Argument von sq

6.3 Funktionale Programmierung in c++

- in c++ hat jede Speicherzelle einen Typ (legt Größe und Bedeutung der Speicherzelle fest)
  - wichtige Typen

int	ganze Zahlen
double	reelle Zahlen
std::string	Text

int: $12, -3$
double: $-1.02, 1.2e-4 = 1.2 * 10^{-4}$
std::string: „text“

- Initialisierung wird geschrieben als „typename spzname = Wert;“

```
double a = ...;
double b = ...;
double c = ...;
double p = -0.5 b / a;
double q = c / a;
double d = std::sqrt(p*p - q);
double x1 = p + d;
double x2 = p - d;
std::cout << "x1: " << x1 << ", x2: " << x2 << std::endl;
```

- eigene Funktionen in C++

```
// Kommentar (auch /* */)
type_ergebnis fname(type_arg1 name1, ...) {
    // Signatur / Funktionskopf / Deklaration
    return ergebnis;
    /* Funktionskörper / Definition / Implementation */
}
```

  - ganze Zahl quadrieren:

```
int sq(int x) {
    return x*x;
}
```

  - reelle Zahl quadrieren:

```
double sq(double x) {
    return x*x;
}
```

  - beide Varianten dürfen in c++ gleichzeitig definiert sein $\implies$ „function overloading“ $\implies$ c++ wählt automatisch die richtig Variable anhand des Argumenttyps („overload resolution“)

```cpp
int x = 2;
double y = 1.1
int x2 = sq(x) // int Variante
double y2 = sq(y) // double Variante
```

- jedes c++-Programm muss genau eine Funktion namens „main“ haben. Dort beginnt die Programmausführung.

```cpp
int main() {
    Code;
    return 0;
}
```

  - return aus der „main“ Funktion ist optional
- Regel von c++ für erlaubte Name
  - erstes Zeichen: Klein- oder Großbuchstaben des englischen Alphabets, oder „_“
  - optional: weitere Zeichen oder, „_“ oder Ziffer 0-9
- vordefinierte Funktionen:
  - eingebaute $\triangleq$ immer vorhanden
    - Infix-Operatoren $+, -, *, /, \%$
    - Präfix-Operatoren $operator+, operator-, \ldots$
  - Funktion der Standardbibliothek $\triangleq$ müssen „angefordert“ werden
    - Namen beginnen mit „std::“, „std::sin,...“
    - sind in Module geordnet, zum Beispiel
      - cmath $\implies$ algebraische Funktion
      - complex $\implies$ komplexe Zahlen
      - string $\implies$ Zeichenkettenverarbeitung
    - um ein Modul zu benutzen muss man zuerst (am Anfang des Programms) sein Inhaltsverzeichnis importieren (Header inkludieren) $\rightarrow$ include <name>

```cpp
#include <iostream>
#include <string>
int main() {
    std::cout << "Hello, world!" << std::endl;
    std::string out = "mein erstes Programm\n";
    std::cout << out;
```

```
    return 0;
}
```

- overloading der arithmetischen Operationen
  - overloading genau wie bei *sq*
    - 3 * 4 $\implies$ int Variante
    - 3.0 * 4.0 $\implies$ double Variante
    - 3 * 4.0 $\implies$ automatische Umwandlung in höheren Typ, hier „double“ $\implies$ wird als 3.0 * 4.0 ausgeführt
- $\implies$ Division unterscheidet sich
  - Integer-Division: 12 / 5 = 2 (wird abgerundet)
  - Double-Division: 12.0 / 5.0 = 2.4
  - -12 / 5 = 2 ($\implies$ truncated Division)
  - 12.0 / 5.0 = 2.4
  - Gegensatz (zum Beispiel in Python)
    - floor division $\implies$ wird immer abgerundet $\implies$ -12 / 4 = -2

7 Prozedurale Programmierung

7.1 Von der Funktionalen zur prozeduralen Programmierung

- Eigenschaften der Funktionalen Programmierung:
  - alle Berechnungen durch Funktionsaufruf, Ergebnis ist Rückgabe
  - Ergebnis hängt nur von den Werten der Funktionsargumente ab, nicht von externen Faktoren „referentielle Integrität“
  - Speicherzellen für Zwischenergebnisse und Argumente können nach Initialisierung nicht geändert werden „write once“
  - Möglichkeit rekursiver Funktionsaufrufe (jeder Aufruf bekommt eigene Speicherzellen)
    - Vorteile
      - natürliche Ausdrucksweise für arithmetische und algebraische Funktionalität („Taschenrechner“)
      - einfache Auswertung durch Substitutionsmodell → Auswertungsreihenfolge nach Post-Order
      - mathematisch gut formalisierbar $\implies$ Korrektheitsbeweise, besonders bei Parallelverarbeitung
      - Rekursion ist mächtig und natürliche für bestimmte Probleme (Fakultät, Baum-Traversierung)

- Nachteile
  - viele Probleme lassen sich anders natürlicher ausdrücken (z.B. Rekursion vs. Iteration)
  - setzt unendlich viel Speicher voraus ($\implies$ Memory Management notwendig $\implies$ später)
  - Entitäten, die sich zeitlich verändern sind schwer zu modellieren
- Korollar: kann keine externen Ressourcen (z.B. Konsole, Drucker, ..., Bildschirm) ansprechen „keine Seiteneffekte“
  - $\implies$ Multi-Paradigmen-Sprachen, zum Beispiel Kombination von Funktionaler Programmierung und prozeduraler Programmierung

7.2 Kennzeichen

7.2.1 Prozeduren

- Prozeduren: Funktionen, die nichts zurückgeben, haben nur Seiteneffekte
  - Beispiel

```
std::cout << "Hello\n"; // Infix
operator<<(std::cout, "Hello\n"; // Präfix
```

  - Prozeduren in c++

    1. Funktion die „void“ zurück gibt (Pseudotyp für „nichts“)

```
void foo(int x) {
    return;
}
```

    2. Returnwert ignorieren

7.2.2 Steuerung des Programmablaufs

- Anweisungen zur Steuerung des Programmablaufs

```
if(), else, while(), for()
```

  - Funktional

```
int abs(int x) {
    return (x >= 0) ? x : -x;
}
```

  - Prozedural

```
int abs(int x) {
    if(x >= 0) {
        return x;
    } else {
        return -x;
    }

    // oder
    if(x >= 0) return x;
    return -x;
}
```

7.2.3 Veränderung von Speicherzellen

- Zuweisung: Speicherzellen können nachträglich verändert werden („read-write“)
  - prozedural:

```
int foo(int x) {      // x = 3
    int y = 2;
    int z1 = x * y;   // z1 = 6
    y = 5;
    int z2 = z * y;   // z2 = 15
    return z1 + z2;   // 21
}
```

  - funktional:

```
int foo(int x) {        // x = 3
    int y1 = 2;
    int z1 = x * y1;    // z1 = 6
    int y2 = 5;
    int z2 = z1 * y2;   // z2 = 15
    return z1 + z2;     // 21
}
```

  - Syntax

```
name = neuer_wert;             // Zuweisung
typ name = neuer_wert;         // Initialisierung
typ const name = neuer_wert;   // write once
```

  - $\Longrightarrow$ Folgen: mächtiger, aber ermöglicht völlig neue Bugs $\Longrightarrow$ erhöhte Aufmerksamkeit beim Programmieren

- die Reihenfolge der Ausführung ist viel kritischer als beim Substitutionsmodell
- Programmierer muss immer ein mentales Bild des aktuellen Systemzustands haben

7.2.4 Schleifen

Der gleiche Code soll oft wiederholt werden

```
while(Bedingung) {
    // Code, wird ausgeführt solange Bedingung "true"
}
```

```
int counter = 0;
while(counter < 3) {
    std::cout << counter << std::endl;
    counter++; // Kurzform für counter = counter + 1
}
```

counter	Bedingung	Ausgabe
0	true	0
1	true	1
2	true	2
3	false	$\emptyset$

- in c++ beginnt Zählung meist mit 0 („zero based“)
- vergisst man Inkrementieren $\implies$ Bedingung immer „true“ $\implies$ Endlosschleife $\implies$ Bug
- drei äquivalente Schreibweisen für Inkrementieren:
  - counter = counter + 1; // assignment $\triangleq$ Zuweisung
  - counter += 1; // add-assignment $\triangleq$ Abkürzung
  - ++counter; // pre-increment

7.2.5 prozedurale Wurzelberechnung

Ziel

```
double sqrt(double y);
```

Methode iterative Verbesserung mittels Newtonverfahren initial_guess $x^{(0)}$ („geraten“), t = 0
while not_good_enough($x^{(t)}$):
update $x^{(t+1)}$ from $x^{(t)}$ (zum Beispiel $x^{(t+1)} = x^{(x)} + \Delta^{(t)}$ additives update, $x^{(t+1)} = x^{(t)}\Delta^{(t)}$ multiplikatives update)
t = t + 1

Newtonverfahren Finde Nullstellen einer gegebenen Funktion $f(x)$, das heißt suche x^* sodass $f(x^*) = 0$ oder $|f(x^*)| < \varepsilon$ Taylorreihe von $f(x)$:, $f(x + \Delta) \approx f(x) + f'(x)\Delta +$ setze $x^* = x + \Delta$

$$0 \overset{!}{=} f(x^*) \approx f(x) + f'(x)\Delta = 0 \implies \Delta = -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Iterationsvorschrift:

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} - \frac{f\left(x^{(*)}\right)}{f'\left(x^{(*)}\right)}$$

Anwendung auf Wurzel: setze $f(x) = x^2 - y \implies$ mit $f(x^*) = 0$ gilt

$$(x^*)^2 - y = 0 \quad (x^*)^2 = y \quad x^* = \sqrt{y} \quad f'(x) = 2x$$

Iterationsvorschrift:

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} - \frac{\left(x^{(t)^2}\right) - y}{2x^{(t)}} = \frac{x^{(t)^2} + y}{2x^{(t)}}$$

```
double sqrt(double y) {
  if(y < 0.0) {
      std::cout << "Wurzel aus negativer Zahl\n";
      return -1.0;
    }
    if(y == 0.0) return 0.0;

    double x = y; // inital guess
    double epsilon = 1e-15 * y;

    while(abs(x * x - y) > epsilon) {
        x = 0.5*(x + y / x);
    }
}
```

7.2.6 for-Schleife

```
int c = 0;
while(c < 3) {
```

```
    // unser Code
    c++; // vergisst man leicht
}
```

Bei der while Schleife kann man leicht vergessen c zu inkrementieren, die for Schleife ist idiotensicher
Äquivalent zu der while Schleife oben ist:

```
for(int c = 0; c < 3; c++) {
    // unser Code
}
```

Allgemeine Form:

```
for(init; Bedingung; Inkrement) {
    // unser Code
}
```

- Befehle, um Schleifen vorzeitig abzubrechen
  - continue: Bricht aktuelle Iteration ab und springt zum Schleifenkörper
  - break: bricht die ganze Schleife ab und springt hinter das Schleifenende
  - return: beendet Funktion und auch die Schleife

Beispiel: nur gerade Zahlen ausgeben

```
for(int i = 0; i < 10; i++) if(c % 2 == 0) std::cout << c << std::endl;
```

Variante mit continue:

```
for(int i = 0; i < 10; i++) {
    if(c % 2 != 0) continue;
    std::cout << c << std::endl;
}
```

```
for(int i = 0; i < 10; i += 2) {
    std::cout << c << std::endl;
}
```

```
double sqrt(double y) {
    while(true) {
        x = (x + y / 2) / 2.0;
        if(abs(x * x - y) < epsilon) {
            return x;
        }
    }
}
```

8 Datentypen

8.1 Basistypen

Bestandteil der Sprachsyntax und normalerweise direkt von der Hardware unterstützt (CPU)

- int, double, bool ($\Longrightarrow$ später mehr)

8.2 zusammengesetzte Typen

mit Hilfe von „struct“ oder „class“ aus einfachen Typen zusammengesetzt

- wie das geht $\Longrightarrow$ später
- Standardtypen: in der C++ Standardbibliothek definiert, aktivieren durch $\#include < module_{n}ame >$
  - std::string, std::complex, etc.
- externe Typen: aus anderer Bibliothek, die man zuvor herunterladen und installieren muss
- eigene Typen: vom Programmierer selbst implementiert $\Longrightarrow$ später

Durch „objekt-orientierte Programmierung“ ($\Longrightarrow$ später) erreicht man, dass zusammengesetzte Typen genauso einfach und bequem und effizient sind wie Basistypen (nur c++, nicht c)

- „Kapselung“: die interne Struktur und Implementation ist für Benutzer unsichtbar
- Benutzer manipuliert Speicher über Funktionen („member functions“) $\hat{=}$ Schnittstelle des Typs, „Interface“, API

$\Longrightarrow$ Punktsyntax: type_name t = init; t.foo(a1, a2); $\hat{=}$ foo(t, a1, a2);

8.3 Zeichenketten-Strings:

zwei Datentypen in c++

- klassischer c-string: char[] („Charakter Array") $\Longrightarrow$ nicht gekapselt, umständlich
- c++ string: std::string gekapselt und bequem (nur dieser in der Vorlesung)
- string Literale: „Zeichenkette", einzelnes Zeichen: 'z' („z" = Kette der Länge 1) Vorsicht: die String-Literale sind c-strings (gibt keine c++ string-Literale), müssen erst in c++ strings umgewandelt werden, das passiert meist automatisch
  - #include <string>
  - Initialisierung:

```
std::string s = "abcde";
std::string s2 = s1;
std::string leer = "";
std::string leer(); // Abkürzung, default Konstruktor
```

  - Länge

```
s.size();
assert(s.size() == 5);
assert(leer.size() == 0);
s.empty() // Abkürzung für s.size() == 0
```

  - Zuweisung

```
s = "xy";
s2 = leer;
```

  - Addition Aneinanderkettung von String („concatenate")

```
std::string s3 = s + "ijh"; // "xyijh"
s3 = "ghi" + s; // "ghixy"
s3 = s + s; // "xyxy"
// aber nicht!!
s3 = "abc" + "def"; // Bug Literale unterstützen + mit ganz
 ↪ anderer Bedeutung
s3 = std::string("abc") + "def"; // Ok
```

  - Add-Assignment: Abkürzung für Addition gefolgt von Zuweisung

```
s += "nmk"; // s = s + "nmk" => "xynmk"
```

- die Zeichen werden intern in einem C-Array gespeichert (Array = „Feld“)
  Array: zusammenhängende Folge von Speicherzellen des gleichen Typs, hier 'char' (für einzelne Zeichen), Die Länge wird (bei std::string) automatisch angepasst, die einzelnen Speicherzellen sind durchnummeriert in c++: von 0 beginnend $\triangleq$ Index
  - Indexoperator:

```
s[index]; // gibt das Zeichen an Position "index" zurück
```

    Anwendung: jedes Zeichen einzeln ausgeben

```
std::string s = "abcde";

for(int i = 0; i < s.size(); i++) {
    std::cout << s[i] << std::endl;
}
```

    String umkehren

```
int i = 0; // Anfang des Strings
int k = s.size() - 1; // Ende des String
while(i < k) {
    char tmp = s[i];
    s[i] = s[k];
    s[k] = tmp;
    i++; k--;
}
```

    Variante 2: neuen String erzeugen

```
std::string s = "abcde";
std::string r = "";
for(int i = s.size() - 1; i >= 0; i--) {
    r += s[i];
}
```

9 Umgebungsmodell

Gegenstück zum Substitutionsmodell (in der funktionalen Programmierung) für die prozedurale Programmierung

- Regeln für Auswertung von Ausdrücken
- Regeln für automatische Speicherverwaltung

    - Freigeben nicht mehr benötigter Speicherzellen, $\implies$ bessere Approximation von „unendlich viel Speicher“
- Umgebung beginnt normalerweise bei „{“ und endet bei „}“
  Ausnahmen:
    - for: Umgebung beginnt schon bei „for“ $\implies$ Laufvariable ist Teil der Umgebung
    - Funktionsdefinitionen: Umgebung beginnt beim Funktionskopf $\implies$ Speicherzellen für Argumente und Ergebnis gehören zur Umgebung
    - globale Umgebung außerhalb aller „{ }“ Klammern
- automatische Speicherverwaltung
    - Speicherzellen, die in einer Umgebung angelegt werde (initialisiert, deklariert) werde, am Ende der Umgebung in umgekehrter Reihenfolge freigegeben
    - Computer fügt vor „}“ automatisch die Notwendigen Befehle ein
    - Speicherzellen in der globalen Umgebung werden am Programmende freigegeben

```
- int global = 1;
  int main() {
      int l = 2;
      {
          int m = 3
      } // <- m wird freigegeben
  } // <- l wird freigegeben
  // <- global wird freigegeben
```

- Umgebungen können beliebig geschachtelt werden $\implies$ alle Umgebungen bilden einen Baum, mit der globalen Umgebung als Wurzel
- Funktionen sind in der globalen Umgebung definiert
    - Umgebung jeder Funktion sind Kindknoten der globalen Umgebung (Ausnahme: Namensräume $\implies$ siehe unten)
      $\implies$ Funktions Umgebung ist **nicht** in der Umgebung, wo die Funktion aufgerufen wird
- Jede Umgebung besitzt eine **Zuordnungstabelle** für alle Speicherzellen, die in der Umgebung definiert wurden

Name	Typ	aktueller Wert
l	int	2

- jeder Name kann pro Umgebung nur einmal vorkommen
- Ausnahme Funktionsnamen können mehrmals vorkommen bei function overloading (nur c++)

- Alle Befehle werden relativ zur aktuellen Umgebung ausgeführt
    - aktuell: Zuordnungstabelle der gleichen Umgebung und aktueller Wert zum Zeitpunkt des Aufrufs
      Beispiel: $c = a * b$;
      Regeln:
    - wird der Name (nur a, b, c) in der aktuellen Zuordnungstabelle gefunden
        1. Typprüfung $\implies$ Fehlermeldung, wenn Typ und Operation nicht zusammenpassen
        2. andernfalls, setze aktuellen Wert aus Tabelle in Ausdruck ein (ähnlich Substitutionsmodell)
    - wird Name nicht gefunden: suche in der Elternumgebung weiter
    - wird der Name bis zur Wurzel (globale Umgebung) nicht gefunden $\implies$ Fehlermeldung
    - $\implies$ ist der Name in mehreren Umgebungen vorhanden gilt der zuerst gefundene (Typ, Wert)
- $\implies$ Programmierer muss selbst darauf achten, dass
    1. bei der Suche die gewünschte Speicherzelle gefunden wird $\implies$ benutze „sprechende Namen“
    2. der aktuelle Wert der richtig ist $\implies$ beachte Reihenfolge der Befehle!
- Namensraum: spezielle Umgebungen in der globalen Umgebung (auch geschachtelt) mit einem Namen
  Ziele:
    - Gruppieren von Funktionalität in Module (zusätzlich zu Headern)
    - Verhinderung von Namenskollisionen

  Beispiel: c++ Standardbibliothek:

```cpp
namespace std {
double sqrt(double x);
namespace chrono {
class system_clock;
}
}

// Benutzung mit Namespace-Präfix:
std::sqrt(80);
std::chrono::system_clock clock;
```

  Besonderheit: mehrere Blöcke mit selbem Namensraum werden verschmolzen Beispiel

```
int p = 2;
int q = 3;

int foo(int p) {
    return p * q;
}

int main() {
    int k = p * q; // beides global => 6 = 2 * 3
    int p = 4; // lokales p verdeckt globales p
    int r = p * q; // p lokal, q global => 12 = 4 * 3
    int s = foo(p); // lokale p von main() wird zum lokalen p von foo() 12 = 4 * 3
    int t = foo(q); // globales q wird zum lokalen p von foo() 9 = 3 * 3
    int q = 5;
    int n = foo(g); // lokales q wird zum lokalen p von foo() 15 = 5 * 3
}
```

10 Referenzen

sind neue (zusätzliche) Namen für vorhandene Speicherzellen

```
int x = 3; // neue Variable x mit neuer Speicherzelle
int & y = x; // Referenz: y ist neuer Name für x, beide haben die selbe Speicherzelle
y = 4; // Zuweisung an y, aber x ändert sich auch, das heißt x == 4
x = 5; // jetzt y == 5
int const & z = x; // read-only Referenz, das heißt z = 6 ist verboten
x = 6; // jetzt auch z == 6
```

Hauptanwendung:

- die Umgebung, in der eine Funktion aufgerufen wird und die Umgebung der Implementation sind unabhängig, das heißt Variablen der einen Umgebung sind in der anderen nicht sichtbar
- häufig möchte man Speicherzellen in beiden Umgebungen teilen $\Longrightarrow$ verwende Referenzen
- häufig will man vermeiden, dass eine Variable kopiert wird (pass-by-value)

- Durch pass-by-reference braucht man keine Kopie $\Longrightarrow$ typisch „const &“, also read-only, keine Seiteneffekte

```cpp
int foo(int x) { // pass-by-value
    x += 3;
    return x;
}

int bar(int & y) { // pass-by-reference
    y += 3; // Seiteneffekt der Funktion
    return y;
}

void baz(int & z) { // pass-by-reference
    z += 3;
}

int main() {
    int a = 3;
    std::cout << foo(a) << std::endl; // 5
    std::cout << a << std::endl; // 3
    std::cout << bar(a) << std::endl; // 5
    std::cout << a << std::endl; // 5
    baz(a);
    std::cout << a << std::endl; // 8
}
```

in der funktionalen Programmierung sind Seiteneffekte grundsätzlich verboten, mit Ausnahmen, zum Beispiel für Ein-/Ausgabe

11 Container-Datentypen

Dienen dazu, andere Daten aufzubewahren

- Art der Elemente:
  - homogene Container: alle Elemente haben gleichen Type (typisch für c++)
  - heterogene Container: Elemente könne verschiedene Typen haben (z.B. Python)
- nach Größen
  - statische Container: feste Größe, zur Compilezeit bekannt
  - dynamische Container: Größe zur Laufzeit veränderbar
- Arrays sind die wichtigsten Container, weil effizient auf Hardware abgebildet und einfach zu benutzen

- klassisch: Arrays sind statisch, zum Beispiel C-Arrays (hat c++ geerbt)

  ```
  int a[20];
  ```

- modern: dynamische Arrays
  - Entdeckung einer effizienten Implementation
  - Kapselung durch objekt-orientierte Programmierung (sonst zu kompliziert)

- wir kennen bereits ein dynamisches Array: std::string ist Abbildung int (Index) → char (Zeichen), mit $0 \leq$ index $<$ s.size()
  - wichtigste Funktion: s.size() (weil Größe dynamisch), s[4] Indexzugriff, s+=„mehr“ Zeichen anhängen
- wir wollen dasselbe Verhalten für beliebige Elementtypen:

```
#include <vector>

//          Elementtyp    Größe  Initialwert der Elemente
std::vector<double     > v(20    ,           0.0           );
// analog
std::vector<int>;
std::vector<std::string>;
```

- weitere Verallgemeinerung: Indextyp beliebig (man sagt dann „Schlüssel-Typ“) „assoziatives Array“
  - typische Fälle:
    - Index ist nicht im Bereich (0,size], zum Beispiel Matrikelnummern
    - Index ist string, zum Beispiel Name eines Studenten

    ```
    #include <map>
    #include <unordered_map>

    // Binärer Suchbaum
    std::map;

    // Hashtabelle, siehe Algorithmen und Datenstrukturen
    std::unordered_map;

    //        Schlüsseltyp  Elementtyp
    std::map<int         , double> noten; noten[3121101] = 10;
    std::map<std::string, double> noten; noten["krause"] = 10;
    ```

    - Indexoperationen wie beim Array
    - Elemente werden beim 1. Zugriff automatisch erzeugt (dynamisch)
- alle dynamischen und assoziativen Arrays unterstützen a.size() zum Abfragen der Größe

11.1 std::vector

- Erzeugen:

```
std::vector<double> v(20, 1.0);
std::vector<double> v; // leeres Array
std::vector<double> v = {1.0, -3.0, 2.2}; // "initializer list": Element für Anfangszustand
```

- Größe:

```
v.size();
v.empty(); // => v.size() == 0
```

- Größe ändern

```
v.resize(neue_groesse, initialwert);
// Dann:
// Fall 1: neue_groesse < size(): Element ab Index "neue_groesse" gelöscht die andern bleiben
// Fall 2: neue_groesse > size(): neue Elemente mit Initialwert am Ende anhängen, die anderen bleiben
// Fall 3: neue_groesse == size(): nichts passiert

v.push_back(neues_element); // ein neues Element am Ende anhängen (ähnlich string += "mehr")
v.insert(v.begin() + index, neues_element); // neues element an Position "index" einfügen 0 <= index <= size()
// Falls index == size(): am Ende anhängen, sonst: alte Elemente ab Index werden eine Position nach hinten verschoben (teuer)

v.pop_back(); // letztes Element löschen (effizient)
v.erase(v.begin() + index); // Element an Position index löschen, alles dahinter eine Position verschieben (teuer)
v.clear(); // alles löschen
```

- Zugriff

```
v[k]; // Element bei Index k
v.at(k); // wie v[k], aber Fehlermeldung, wenn nicht 0 <= k < size() (zum Debuggen)
```

- Funktionen für Container benutzen in c++ immer Iteratoren, damit sie für verschiedene Container funktionieren
    - Iterator-Range

```
// erstes Element
v.begin()

// hinter letztem Element
v.end()
```

- im Header <algorithm>
- alle Elemente kopieren

```
std::vector<double> source = {1.0, 2, 3, 4, 5};
std::vector<double> target(source.size(), 0.0);
std::copy(source.begin(), source.end(), target.begin());
std::copy(source.begin() + 2, source.end() - 1, target.begin()); // nur index 2 .. size() - 1 kopieren
```

- Elemente sortieren

```
std::sort(v.begin(), v.end()); // "in-place" sortieren
```

- Elemente mischen:

```
std::random_shuffle(v.begin(), v.end()); // "in-place" mischen
```

11.1.1 Effizienz von push_back

Warum ist push_back() effizient? (bei std::vector)

- veraltete Lehrmeinung: Arrays sind nur effizient wenn statisch (das heißt Größe zur Compilezeit, oder spätestens bei Initialisierung, bekannt)
    - sonst: andere Datenstruktur verwenden, zum Beispiel verkettete Liste (std::list)
- modern: bei vielen Anwendungen genügt, wenn Array (meist) nur am Ende vergrößert wird (zum Beispiel push_back())
    - dies kann sehr effizient unterstützt werden $\Longrightarrow$ dynamisches Array

- std::vector verwaltet intern ein statisches Array der Größe „capacity“, v.capacity() >= c.size()
  - wird das interne Array zu klein $\implies$ wird automatisch auf ein doppelt so großes umgeschaltet
  - ist das interne Array zu groß, bleiben unbenutzte Speicherzellen als Reserve
- Verhalten bei push_back():
  1. noch Reserve vorhanden: lege neues Element im eine unbenutzte Speicherzelle $\implies$ billig
  2. keine Reserve
     a) alloziere neues statisches Array mit doppelt Kapazität
     b) kopiere die Daten aus dem altem in das neue Array
     c) gebe das alte Array frei
     d) gehe zum Anfang des Algorithmus, jetzt ist wieder Reserve vorhanden
- das Umkopieren ist nicht zu teuer, weil es nur selten notwendig ist
- Beispiel:

```cpp
std::vector<int> v;

for(int i = 0; i < 32; i++) v.push_back(k);
```

k	capacity vor push_back()	capacity nach push_back()	size()	Reserve	#Umkopieren
0	0	1	1	0	0
1	1	2	2	0	1
2	2	4	3	1	2
3	4	4	4	0	2
4	4	8	5	3	4
5-7	8	8	8	0	0
8	8	16	9	7	8
9-15	16	16	16	0	0
16	16	32	17	15	16
17-31	32	32	32	0	0

  - was kostet das:
    - 32 Elemente einfügen = 32 Kopien extern $\implies$ intern
    - aus allem Array ins neu kopieren $(1 + 2 + 4 + 8 + 16) = 31$ kopieren intern $\implies$ intern
    - $\implies$ im Durchschnitt sind pro Einfügung 2 Kopien nötig

- $\implies$ dynamisches Array ist doppelt so teuer sie das statische $\implies$ immer noch sehr effizient

- relevante Funktionen von std::vector

```
v.size() // aktuelle Zahl der Elemente
v.capacity() // aktuelle Zahl Speicherzellen
assert(v.capacity() - v.size() >= 0) // Reserve
v.resize(new_size) // ändert immer v.size(), aber v.capacity() nur
    wenn < new_size
v.reserve(new_capacity) // ändert v.size() nicht, aber v.capacity()
    falls new_capacity >= size
v.shrink_to_fit() // == v.reserve/v.size()) Reserve ist danach 0,
    wenn Endgröße erreicht
```

- wenn Reserve > size: capacity kann auch halbiert werden
- wichtige Container der c++ Standardbibliothek
- wir hatten dynamische Arrays std::string, std::vector, assoziative Arrays std::map, std::unordered_map
- std::set, std::unordered_set: Menge, jedes Element ist höchstens einmal enthalten zum Beispiel Duplikate
- std::stack (Stapel, Keller): unterstützt push und pop() mit Last in- First out Semantik (LIFO) äquivalent zu push_back() und pop_back() bei std::vector
- std::queue (Warteschlange) push() und pop() mit First in-first out Semantik (FIFO)
- std::deque („double-ended queue“) gleichzeitig stack und queue, push, pop_front(), pop_back()
- std::priority_queue, push() und pop() - Element mit höchster niedrigster Priorität (user defined)

12 Iteratoren

- für Arrays lautet die kanonische Schleife

```
for(int i = 0; i != v.size(); i++) {
    int current = v[i]; // lesen
    v[i] = new_value; // schreiben
}
```

- wir wollen eine so einfache Schleife für beliebige Container
  - der Index-Zugriff v[] ist bei den meisten Container nicht effizient
  - Iteratoren sind immer effizient $\implies$ es gibt sie in allen modernen Programmiersprachen, aber Details sehr unterschiedlich
  - Analogie: Zeiger einer Uhr, Cursor in Textverarbeitung
    - $\implies$ ein Iterator zeigt immer auf ein Element des Containers, oder auf Spezialwert „ungültiges Element"
  - in c++ unterstützt jeder Iterator 5 Grundoperationen
    1. Iterator auf erstes Element erzeugen: auto iter = v.begin();
    2. Iterator auf „ungültiges Element" erzeugen: auto end = v.end();
    3. Vergleich $iter1 == iter2$ (Zeigen auf gleiches Element), $iter! = end$:

    iter zeigt **nicht** auf ungültiges Element

    1. zum nächsten weitergehen: ++iter. Ergebnis ist v.end(), wenn man vorher beim letzten Element war
    2. auf Daten zugreifen: *iter („Dereferenzierung") analog v[k]

    kanonische Schleife:

```
for(auto iter = v.begin(); iter != v.end(); ++iter) {
int current = *iter; // lesen
*iter = new_value; // schreiben
}
// Abkürzung: range-based for loop
for(auto & element : v) {
int current = element; // lesen
element  = new_value; // schreiben
}
```

- Iteratoren mit den 5 Grundoperationen heißen „forward iterator" (wegen ++iter)
- „bidirectional iterators": unterstützen auch $--iter$, zum vorigen Element ((fast) alle Iteratoren in std)
- „random access iterators": beliebige Sprünge „iter += 5; iter -= 3;"
- Besonderheit für assoziative Arrays (std::map, std::unordered_map) Schlüssel und Werte können beliebig gewählt werden
  - $\implies$ das aktuelle Element ist ein Schlüssel / Wert -Paar, das heißt Iterator gibt Schlüssel und Wert zurück

```
(*iter).first; // Schlüssel
(*iter).second; // Wert
// Abkürzung
iter->first;
iter->second;
```

- bei std::map liefern die Iteratoren die Elemente in aufsteigender Reihenfolge der Schlüssel

- Die Funktion std::transform()
  - wir hatten: std::copy()

```
std::vector<double> source = {1, 2, 3, 4};
std::vector<double> target(source.size());
std::copy(source.begin(), source.end(), target.begin());
```

  - std::transform:

```
// nach Kleinbuchstaben konvertieren
std::string source = "aAbCdE";
std::string target = source;
std::transform(source.begin(), source.end(), target.begin(),
↪  std::tolower); // Name einer Funktion, die ein einzelnes
↪  Element transformiert, t="aabcde"
// die Daten quadrieren
double sq(double x) { return x * x; }
std::transform(source.begin(), source.end(), target.begin(),
↪  sq); // target == {1, 4, 9, 16}
// das ist eine Abkürzung für eine Schleife
auto src_begin = source.begin();
auto src_end = source.end();
auto tgt_begin = target.begin();

for(; src_begin != src_end; src_begin++, tgt_begin++) {
    *tgt_begin = sq(*src_begin);
}
```

    - Der Argumenttyp der Funktion muss mit dem source Elementtyp kompatibel sein. Der Returntyp der Funktion muss mit dem Target-Elementtyp kompatibel sein.
    - Das letzte Argument von std::transform() muss ein Funktor sein (verhält sich wie eine Funktion), drei Varianten:

1. normale Funktion, z.B. sq. Aber: wenn Funktion für mehrere Argumenttypen überladen ist (overloading) (zum Beispiel, wenn es sq(double) und sq(int) gibt), muss der Programmierer dem Compiler sagen, welche Version gemeint ist $\implies$ für Fortgeschrittene („functionpointer cast“)
2. Funktionsobjekt $\implies$ objekt-orientierte Programmierung
3. Definiere eine namenlose Funktion $\implies$ „Lambda-Funktion λ“
   - statt λ verwenden wir den Universalnamen []

```
std::transform(source.begin(), source.end(), target.begin(), [](double x) { return x*x; }); // statt Funktionsname sq wie bei 1 steht hier die ganz Funktionsimplementation
// Returntyp setzt Computer automatisch ein, wenn es nur einen return-Befehl gibt.
```

   - Lambda-Funktionen können noch viel mehr $\implies$ für Fortgeschrittene
   - std::transform() kann in-place arbeiten (das heißt source-Container überschreiben), wenn source und target gleich

```
std::transform(source.begin(), source.end(), source.begin(), sq);
```

- Die Funktion std::sort() zum in-place sortieren eines Arrays

```
std::vector<double> v = {4, 2, 3, 5 ,1};
std::sort(v.begin(), v.end()); // v == {1, 2, 3, 4, 5}
```

- std::sort ruft intern den $<$-Operator des Elementtyps auf, um Reihenfolge zu bestimmen
- die $<$-Operation muss eine totale Ordnung der Elemente definieren:
  - $a < b$ muss für beliebige a, b ausführbar sein
  - transitiv: $(a < b) \wedge (b < c) \implies (a < c)$
  - anti-symmetrisch: $\neg(a < b) \wedge \neg(b < a) \implies a == b$

13 Insertion Sort

schnellster Sortieralgorithmus für kleine Arrays ($n \leq 30$) hängt von Compiler und CPU ab

- Idee von Insertion Sort:

- wie beim Aufnehmen und Ordnen eines Kartenblatts
- gegeben: bereits sortierte Teilmenge bis Position $k-1$ Karten bereits in Fächer
- Einfügen des k-ten Elements an richtiger Stelle → Erzeuge Lücke an richtiger Position durch verschieben von Elementen nach rechts
- Wiederholung für $k = 1, \dots, N$
- Beispiel:

4	2	3	5	1
4	_	3	5	1
_	4	3	5	1
2	4	3	5	1
2	4	_	5	1
2	_	4	5	1
2	3	4	5	1
2	3	4	_	1
2	3	4	5	1
2	3	4	5	_
_	2	3	4	5
1	2	3	4	5

```cpp
void insertion_sort(std::vector<double> & v) {
    for(int i = 0; i < v.size(); i++) {
        double current = v[i];
        int j = i; // Anfangsposition der Lücke
        while(j > 0) {
            if(v[j - 1] < current) { // -> if(cmp(a, b))
                break; // j ist richtige Position der Lücke
            }
            v[j] = v[j - 1];
            j--;
        }
        v[j] = current;
    }
}
```

- andere Sortierung: definiere Funktor cmp(a, b), der das gewünschte kleiner realisiert (gibt genau dann „true" zurück, wenn a „kleiner" b nach neuer Sortierung)
- neue Sortierung am besten per Lambda-Funktion an std::sort übergeben

```cpp
std::sort(v.begin(), v.end()); // Standartsort mit "<"
std::sort(v.begin(), v.end(), [](double a, double b) { return a < b; }); // Standardsortierung aufsteigen
```

```
std::sort(v.begin(), v.end(), [](double a, double b) { return b < a; }); // absteigende Sortierung
std::sort(v.begin(), v.end(), [](double a, double b) { return std::abs(a) < std::abs(b); }); // Normal nach Betrag; // Normal nach Betrag
std::sort(v.begin(), v.end(), [](std::string a, std::string b) {
    std::transform(a.begin(), a.end(), a.begin(), std::tolower);
    std::transform(b.begin(), b.end(), b.begin(), std::tolower);
    return a < b;
});
```

14 generische Programmierung

insertion_sort soll für beliebige Elementtypen funktionieren

```
template<typename T>
void insertion_sort(std::vector<T> & v) {
    for(int i = 0; i < v.size(); i++) {
        T current = v[i];
        int j = i; // Anfangsposition der Lücke
        while(j > 0) {
            if(v[j - 1] < current) { // -> if(cmp(a, b))
                break; // j ist richtige Position der Lücke
            }
            v[j] = v[j - 1];
            j--;
        }
        v[j] = current;
    }
}
```

- Ziel: benutze template-Mechanismus, damit **eine** Implementation für viele verschiedene Typen verwendbar ist
  - erweitert funktionale und prozedurale und objekt-orientiere Programmierung
- zwei Arten von Templates („Schablone“):
  1. Klassen-templates für Datenstrukturen, zum Beispiel Container sollen beliebige Elementtypen unterstützen
     - Implementation $\Longrightarrow$ später
     - Benutzung: Datenstrukturname gefolgt vom Elementtyp in spitzen Klammern (std::vector<double>), oder mehrere Typen, zum Beispiel Schlüssel und Wert bei std::map<std::string, double>

2. Funktionen-Templates: es gab schon function overloading

```cpp
int sq(int x) {
    return x * x;
}

double sq(double x) {
        return x * x;
}

// und so weiter für komplexe und rationale Zahlen...
```

- Nachteil
  - wenn die Implementationen gleich sind → nutzlose Arbeit
  - Redundanz ist gefährlich: korrigiert man einen Bug wir leicht eine Variante vergessen
- mit templates reicht eine Implementation

```cpp
template<typename T> // T: Platzhalter für beliebigen Typ, wird später durch einen tatsächlichen Typ ersetzt
T sq(T x) {
    return x * x; // implizierte Anforderung an den Typ T, er muss Multiplikation unterstützen, sonst: Fehlermeldung
}
```

  - wie bei Substituieren von Variablen mit Werten, aber jetzt mit Typen
  - Benutzung:
    - Typen für die Platzhalter hinter dem Funktionsnamen in spitzen klammern

```cpp
sq<int>(2) == 4;
sq<double>(3.0) == 9.0,
```

    - meist kann man die Typenangabe <type> weglassen, weil der Computer sie anhand des Argumenttyps automatisch einsetzt:

```cpp
sq(2); // == sq<int>(2) == 4
sq(3.0); // == sq<double>(3.0) == 9
```

    - kombiniert man templates mit Overloading, wird die ausprogrammierte Variante vom Compiler bevorzugt. Komplizierte Fälle (Argument teilweise Template, teilweise hard_coded) $\implies$ für Fortgeschrittene

- Beispiel 2: Funktion, die ein Array auf Konsole ausgibt, für beliebige Elementtypen

```
template<typename ElementType>
void print_vector(std::vector<ElementType> const & v) {
    std::cout << "{";
    if(v.size() > 0) {
        std::cout << " " << v[0];
        for(int i = 1; i < v.size(); i++) {
            std::cout << ", " << v[i];
        }
    }
    std::cout << " }";
}
```

- Verallgemeinerung für beliebige Container mittels Iteratoren:

```
std::list<int> l = {1, 2, 3};
print_container(l.begin(), l.end()); // "{1,2,3}"
```

- es genügen forward_itertators

```
Iterator iter2 = iter1; // Kopie erzeugen
iter1++; // zum nächsten Element
iter1 == iter2; // Zeigen sie auf das selbe Element?
iter1 != end;
*iter1; // Zugriff auf aktuelles Element

template<typename Iterator>
void print_container(Iterator begin, Iterator end) {
    std::cout << "{}";
    if(begin != end) { // Container nicht leer?
        std::cout << " " << *begin++;
        for(;begin != end; begin++) {
            std::cout << ", " << *begin;
        }
    std::cout << "}";
}
```

- Beispiel 3: überprüfen, ob Container sortiert ist

```
template<typename E, typename CMP>
```

```
bool check_sorted(std::vector<E> const & v, CMP less_than) {
    for(int i = 1; i < v.size(); i++) {
        if(less_than(v[k], v[k - 1])) { // statt v[k] < v[k - 1], ausnutzen der Transitivität
            return false;
        }
    }
    return true;
}

// Aufruf:
std::vector<double> v = {1.0, 2.0, 3.0};
check_sorted(v, [](double a, double b) { return a < b; } ); // == true

check_sorted(v, [](double a, double b) { return a > b; } ); // == false

// Implementation für Iteratoren
template<typename Iterator, typename CMP>
bool check_sorted(Iterator begin, Iterator end, CMP less_than) {
    if(begin == end) {
        return true;
    }
    Iterator next = begin;
    ++next;
    for(; next != end; ++begin, ++next) {
        if(less_than(*next, *begin)) {
            return false;
        }
    }
    return true;
}
// == std::is_sorted
```

- Bemerkung: Compiler-Fehlermeldungen bei Template-Code sind oft schwer zu interpretieren, $\implies$ Erfahrung nötig aber: Compiler werden darin immer besser, besonders clang-Compiler
- mit Templates kann man noch viel raffinierter Dinge machen, zum Beispiel Traits-Klassen, intelligent libraries template meta programming $\implies$ nur für Fortgeschrittene

15 Effizienz von Algorithmen und Datenstrukturen

15.1 Bestimmung der Effizienz

2 Möglichkeiten:

1. Messe die „wall clock time“ - wie lange muss man auf das Ergebnis warten
2. unabhängig von Hardware benutzt man das Konzept der algorithmischen Komplexität

15.1.1 wall clock

wall clock time misst man zum Beispiel mit dem Modul <chrono>

```cpp
#include <chrono>
#include <iostream>

int main() {
    // alles zur Zeitmessung vorbereiten

    auto start = std::chrono::high_resolution_clock::now(); // Startzeit
    // code der gemessen werden soll
    auto stop = std::chrono::high_resolution_clock::now();
    std::chrono::duration<double> diff = stop - start; // Zeitdifferenz
    std::cout << "Zeitdauer: " << diff.count() << " Sekunden\n" <<
    ↪  std::endl; // ausgeben
}
```

Pitfalls:

- moderne Compiler optimieren oft zu gut, das heißt komplexe Berechnungen werden zur Compilezeit ausgeführt und ersetzt $\implies$ gemessene Zeit ist viel zu kurz. Abhilfen:
  - Daten nicht „hard-wired“, sondern zum Beispiel von Platte lesen
  - „volatile“ Schlüsselwort „volatile int k = 3;“
- der Algorithmus ist schneller als die clock $\implies$ rufe den Algorithmus mehrmals in einer Schleife auf
- die Ausführung ihres Programms kann vom Betriebssystem jederzeit für etwas wichtigeres unterbrochen werden (zum Beispiel Mail checken) $\implies$ gemessene Zeit zu lang $\implies$ messe mehrmals und nimm die kürzeste Zeit (meist reicht 3 bis 10 fach)
- Faustregel: Messung zwischen 0.02 s und 3 s

Nachteil: Zeit hängt von der Qualität der Implementation, den Daten (insbesondere der Menge) und der Hardware ab

15.1.2 algorithmische Komplexität

Algorithmische Komplexität ist davon unabhängig, ist eine Art theoretisches Effizienzmaß. Sie beschreibt, wie sich die Laufzeit verlängert, wenn man mehr Daten hat.

Beispiel 1. Algorithmus braucht für n Elemente x Sekunden, wie lange dauert es für $2n$, $10n$ für große n

Bei effiziente Algorithmen steigt der Aufwand mit n nur langsam (oder bestenfalls gar nicht)
Grundidee:

1. berechne, wie viele elementare Schritte der Algorithmus in Abhängigkeit von n benötigt $\implies$ komplizierte Formel $f(n)$

2. vereinfache $f(n)$ in eine einfache Formel $g(n)$, die dasselbe wesentliche Verhalten hat. Die Vereinfachung erfolgt mittels **O-Notation** und ihren Verwandten
   Gegeben: $f(n)$ und $g(n)$

   a) $g(n)$ ist eine asymptotische (für große n) obere Schranke für $f(n)$ („f(n) $\leq$ g(n)“), $f(n) \in O(g(n))$ „$f(n)$ ist in der Komplexitätsklasse $g(n)$“, wenn es ein n_0 (Mindestgröße) gibt und C (Konstante) gibt, sodass $\forall\, n > n_0 : f(n) \leq Cg(n) \iff f(n) \in O(g(n))$

   b) $g(n)$ ist asymptotische untere Schranke für $f(n)$ $(f(n) \geq g(n))$

   $$f(n) \in \Omega(g(n)) \iff \exists\, n_0, C : \forall\, n > n_0 f(n) \geq Cg(n)$$

   c) $g(n)$ ist asymptotisch scharfe Schranke für $f(n)(f(n) = g(n))$

   $$f(n) \in \Theta(g(n)) \iff f(n) \in O(g(n)) \wedge f(n) \in \Omega(g(n))$$

Regeln:

1. $f(n) \in \Theta(f(n)) \implies f(n) \in O(f(n)), f(n) \in \Omega(f(n))$

2. $c' f(n) \in \Theta(f(n))$

3. $O(f(n)) \cdot O(g(n)) \in O(f(n)g(n))$ Multiplikationsregel

4. $O(f(n)) + O(g(n)) \in O(\text{„max“}(f(n), g(n)))$ Additionsregel
   formal: wenn $f(n) \in O(g(n)) \implies O(f(n)) + O(g(n)) \in O(g(n))$
   $g(n) \in O(f(n)) \implies O(f(n)) + O(g(n)) \in O(f(n))$

5. $n^p \in O(n^q)$ wenn $p \leq q$

Beliebte Wahl für $g(n)$

- $O(1)$ „konstante Komplexität“
  elementare Operation „+, -, *, /“, Array-Zugriff v[k] (v: std::vector)
- $O(\log(n))$ „logarithmische Komplexität“
  zum Beispiel: auf Element von std::map zugreifen m[k] (m: std::map)
- $O(n)$ „lineare Komplexität“
  zum Beispiel std::transform() ($n =$ Anzahl der transformierten Elemente)
- $O(n\log(n))$ „n log n“, „log linear“ „linearithmisch“
  Beispiel: std::sort
- $O\left(n^2\right)$ „quadratische Komplexität“
- $O(n^p)$ „polynomielle Komplexität“
- $O(2^n)$ „exponentielle Komplexität“

Beispiel 2.

$$f(n) = 1 + 15n + 4n^2 + 7n^3 \in O\left(n^3\right)$$

15.1.3 Anwendung

1. Fibonacci-Zahlen: $f_k = f_{k-2} + f_{k-1}$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f_k	0	1	1	2	3	5	8	13	21

```cpp
int fib1(int k) {
    if(k < 2) { // O(1)
        return k; // O(1)
    }
    // O(1)
    int f1 = 0; // letzten beiden Fibonacci Zahlen, anfangs die
    ↪   ersten beiden
    int f2 = 1;
    for(int i = 2; i <= k; i++) { // f(k) = k - 1 e O(k)
        int f = f1 + f2; // O(1)
        f1 = f2; // O(1)
        f2 = f; // O(1)
    } // gesamte Schleife: O(1)*O(k) = O(k)
    return f2;
} // gesamte Funktion: teuerstes gewinnt: O(k)

// rekursive Variante:
int fib2(int k) {
    if(k < 2) { // O(1)
        return k; // O(1)
```

```
    }
    return fib2(k - 2) + fib2(k - 1);
}
```

- sehr ineffizient, weil alle Fibonacci-Zahlen $< k$ mehrmals berechnet werden

Sei $f(k)$ die Anzahl der Schritte, $f'(k)$ die Schritte oberhalb, Annahme: jeder Knoten ist $O(1) \implies f(k) \in O(\text{Anzahl Knoten})$. Oberhalb ist der Baum vollständig (jeder nnere Knoten hat zwei Kinder), Anzahl der Knoten im vollständigen Baum der Tielfe l:

$$1 + 2 + 4 + \ldots + 2^l = 2^{l+1} - 1$$

16 Zahlendarstellung im Computer

Problem: es gibt ∞ viele Zahlen, aber der Computer ist endlich.

16.1 Natürliche Zahlen

Natürliche Zahlen $\implies x \geq 0$. c++ bietet Typen verschiederne Größe.

klassisch	mit Größe	Anzahl Bits	Bereich	Literale
unsigned char	uint8_t	$(\geq)$ 8	0 - 255	
unsigned short	uint16_t	$(\geq)$ 16	0 - 65535	
unsigned int	uint32_t	$(\geq)$ 32	0 - 4×10^9	
unsigned long		32 oder 64		
unsigned long long	uint64_t	64	0 - 0 - 2×10^{19}	L

was passiert bei zu großen Zahlen?

- alle Operationen werden Modula 2^m ausgeführt, wenn der Typ m Bits hat

```
uint8_t x = 250, y = 100;
uint8_t s = x + y; // 350 % 256 = 94
uint8_t p = x * y; // 25000 % 256 = 168
```

„integer overflow“: einfach Bits oberhalb von m wegwerfen

16.1.1 Pitfalls

```
std::vector<uint8_t> v = { ... };
uint8_t sum = 0; // FALSCH, da es zu overflow kommen kann
// verwende uint32_t, uint64_t, verhndern overflow mit hoher
↪ Wahrscheinlichkeit
for(int k = 0; k < v.size(); k++) {
```

```
    sum += v[k];
}

// Endlosschleife, da i nie < 0, da unsigned
// Abhilfe: int verwenden
for(uint8_t i = v.size(); i >= 0; i++) {
    // auf v[k] zugreifen
}
```

16.1.2 arithmetische Operationen

- Addition in Kapitel Automaten

Subtraktion Subtraktion kann auf Addition zurückgeführt werden Erinnerung: Restklassenarithmetik: (Modulo)
alle Zahlen mit dem gleichen Rest modulo k bilden „Äquivalenzklasse", zum Beispiel $k = 4$

$$\begin{aligned}
0 \mod 4 &= 0 \equiv 4 \mod 4 \equiv 8 \mod 4 \equiv 12 \mod 4 \dots \\
1 \mod 4 &= 1 \equiv 5 \mod 4 \equiv 9 \mod 4 \equiv 13 \mod 4 \dots \\
2 \mod 4 &= 2 \equiv 6 \mod 4 \equiv 10 \mod 4 \equiv 14 \mod 4 \dots \\
3 \mod 4 &= 3 \equiv 7 \mod 4 \equiv 11 \mod 4 \equiv 15 \mod 4 \dots
\end{aligned}$$

Ein Mitglied jeder Äquivalentzklasse wird Represäntant.
Hier: kleinste Repreäsentanten $0, \dots, (k-1)$, mit $k = 2^m$ sind das gerade die uint-Werte
Eigenschaft: man kann Vielfache nk addieren, ohne Äquivalenzklase zu ändern:

$$(a-b) \mod 2^m = \left(a + \underbrace{2^m - b}_{z:\text{ Zweierkomplement}}\right) \mod 2^m = (a+z) \mod 2^m$$

$z = (2^m - b) \mod 2^m$ lässt sich billig berechnen als $(\sim b + 1) \mod 2^m$ Dabei ist $\sim$ bitweise Negation (dreht alle Bits um)

- $m = 4, \sim(1001) = 0110$

Satz 1.

$$(2^m - b) \mod 2^m = (\sim b + 1) \mod 2^m$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
b + \sim b &= 1111\dots1 = 2^m - 1 \\
\sim b + 1 &= 2^m - b
\end{aligned}$$

Fall 1: $b > 0$

$$\implies \sim b < 2^m - 1 \implies \sim b + 1 < 2^m \implies (\sim b + 1) \mod 2^m = \sim b + 1$$
$$\implies (\sim b + 1) \mod 2^m = (2^m - b) \mod 2^m$$

Fall 2: $b = 0$

$$\begin{aligned} &\implies \sim b = 2^m - 1 \\ &\sim b + 1 = 2^m \\ (\sim b + 1) &\mod 2^m = 0 \\ &2^m - b = 2^m \\ &z = (2^m - b) \mod 2^m = (\sim b + 1) \mod 2^m = 0 \end{aligned}$$

$\square$

Multiplikation Neue Operationen: $\ll$ und $\gg$ (left und right shift). Verschiebt die Bits um k Positionen nach links oder rechts. Die herausgeschobenen Bits werden vergessen und auf der anderen Seite durch \$0\$-bits ersetzt.

```
// m = 8
assert(11011101b << 3 == 11101000b)
assert(11011101b >> 3 == 00011011b)
```

Satz 2.

$$x \ll k \equiv \left(x \cdot 2^k\right) \mod 2^m$$
$$x >> k \equiv \left(\frac{x}{2^k}\right)$$

Operation & und |: bitw4eise und beziehungsweise oder-Verknüpfung (nicht verwechseln mit && und || füür logische Operationen) m = 8: \$10110011 & 1 = \$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

(testet, ob in linker Zahl Bit 0 gesetzt ist) 10110011 | 1 =

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

kombiniere & mit $\ll$:

$$x \& (1 \ll k)$$

testet, ob in x Bit k gesetzt ist.

```
uint8_t mul(uint8_t x, uint8_t y) {
     uint8_t res = 0;
     for(int i = 0; i < 8; i++) {
          if(y & (1 << i)) {
                   res += x;
          }
          x = x << 1; // x * 2
     }
}
```

16.2 Ganze Zahlen

klassisch	mit Größe	Anzahl Bits	Bereich
signed char	int8_t	8	-128 …127
signed short	int16_t	16	-2^15 …2^15 - 1
signed int	int32_t	32	-2^31 …2^31 - 2
signed long		32 oder 64	
signed long long	int64_t	64	-2^63 …2^63 - 1

Wird der erlaubte Bereich überschritte, ist Verhalten Compiler abhängig. In der Praxis: auch Modulo 2^m, aber mit anderen Repräsentanten.

für Restklassen:
statt $0 \dots 2^m$ bei unsigned jetzt $-2^{m-1} \dots 2^{m-2} - 1$
das heißt:

- $x < 2^{m-1}$: Repräsentant bleibt
- $x \geq 2^{m-1}$: neuer Represenant $x - 2^m$ ist gleiche Restklasse

Vorteil: $x, -, *$ kann von unsigned übernommen werden
a, b signed: a OP $b \to c$ signed (interpretiere Bitmuster von a und b als unsigned und Interpretiere das Ergebnis dann als signed) Konsequenzen:

- bei negativer Zahl ist höchstes Bit 1, weil $x \to x - 2^m$ falls $x \geq 2^{m-1}$

- unäre Negation $-x$ duch Zweierkomplement

$$
\begin{aligned}
-x &= (\sim x + 1) \mod 2^m \\
-0 &= (\sim 00000000 + 1) \mod 2^8 \\
&= (11111111 + 1) \mod 2^8 \\
&= \underbrace{(100000000)}_{2^8} \mod 2^8 = 0 - 1 \qquad = (\sim 00000001 + 1) \mod 2^8 \\
&= (11111110 + 1) \mod 2^8 \\
&= \underbrace{(11111111)}_{2^8 - 1 < 2^8} \mod 2^8 \\
&= 11111111
\end{aligned}
$$

Ausnahmeregel für $\gg$ bei negativen Zahlen: Compilerabhängig, meist wird links ein 1-Bit reingeschoben, damit Zahl negativ bleibt $\implies$ es gilt immer noch $x \gg k = \left(x/2^k\right)$
Reichen 64 Bit nicht aus (zum Beispiel bei moderner Verschlüsselung) verwende BigInt: Datentyp variabler Größe. Zum Beispiel GNU Multi-Precision Library

16.3 reelle Zahlen

c++ bietet Typen

Name	Größe	Bereich	kleinste Zahl	Literale
float	32bit	$-1 \times 10^{38} - 1 \times 10^{38}$	$10e - 38$	4.0f
double	64bit	$-1 \times 10^{308} - 1 \times 10^{308}$	1×10^{-308}	4.0, 1e-2
long double	platformabhängig, $\geq$ 64bit			

Der c++ Standard legt die Größe nicht fest, aber praktisch alle gängigen CPUs benutzen Standard IEEE 754, c++ übernimmt HW-Implementation. Ziele der Definition von reellwertigen Typen:

- hohe Genauigkeit (viele gültige Nachommastellen)
- Zahlen sehr unterschiedlicher Größenskalen (zum Beispiel Durchmesser eines Proton $= 2 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$ vs. Durchmesser des sichtbaren Universum $1 \times 10^{27}\,\mathrm{m}$) mit natürlichen Zahlen bräuchte man > 150bit

elegante Lösung: halb-logarithmische Darstellung („floating point“). Datentyp ist aus 3 natürlichen Zahlen zusammengesetz (aber alles von der CPU gekapselt)

- S (1-bit): Vorzeichen, 0 = „+“, 1 = „-“
- M (m-bit): Mantisse: Nachkommastellen
- E: (e-bit, Bias b): Exponent: Größenordung

die eigentliche Zahl wird durch

$$x = (-1)^s \cdot \big(1 + M \cdot 2^{-m}\big) \cdot 2^{E-b}$$

- $M \cdot 2^{-m} \in [0, \frac{2^m-1}{2^m}) \in [0,1)$
- $M \in [0, 2^m - 1]$
- $1 + M \cdot 2^{-m} \in [1,2)$

Beispiel: natürliche Zahlen

x	$M \cdot 2^{-m}$	$E-b$	effektive Darstellung
1	0	0	$1 \cdot 2^0$
2	0	1	$1 \cdot 2^1$
3	0.5	1	$1.5 \cdot 2^1$
4	0	2	$1 \cdot 2^2$
5	0.25	2	$1.25 \cdot 2^2$

Konsequenz: alle ganzen Zahlen zwischen $-2^m, \ldots, 2^m$ könne exakt dargestellt werden und haben exakte Arithmetik. (IEEE 754) Werte für m, e, b

- float
  - $m = 23$
  - $e = 8$
  - $b = 127$
  - $2^{E-b} \in [2^{-126}, 2^{127}] \approx [10^{-38}, 10^{38}]$
- double
  - $m = 52$
  - $e = 11$
  - $b = 1024$
  - $2^{E-b} \in [2^{-1022}, 2^{1023}] \approx [10^{-308}, 10^{308}]$

Anzahl der Nachkommastellen: $\varepsilon = 2^{-m}$ (machine epsilon, unit last place (ULP))

- float $2^{-23} \approx 1 \times 10^{-7}$
- float $2^{-52} \approx 1 \times 10^{-16}$

ε ist die kleinste Zahl, sodass

$$(1.0 + \varepsilon) \neq 1.0$$

weil Nachkommastellen außerhalb der Mantisse (rechts von 2^{-m}) ignoriert werden. $\implies$ Problem der Auslöschung von signifikanten Stellen. Wenn man zwei fast gleich große Zahlen subtrahiert, löschen sich fast alle Bits der Mantisse $\implies$ nur wenige gültige Nachkommastellen überleben. Zum Beispiel:

$$0.1234567 - 0.1234566 = 0.000001 \qquad \text{(nur eine gültige Nachkommastelle!)}$$

$$1.0 - \cos x, x \to 0, x \approx 0 \implies \cos x \approx 1 \qquad \implies \text{Auslösung}$$

x	Anzahl der gültigen Stellen	Additionstheoriem $1-\cos(x)=2(\sin(x/2))^2$
0.001	9	15
1×10^{-8}	0 ($\cos(1\times10^{-8})$)	15

Quadratische Gleichung:

$$ax^2+bx+c=0, b>0$$
$$x_1=\frac{1}{2a}\left(-b+sqrtb^2-4ac\right)$$

falls $a\cdot c\wedge b^2\gg 4ac \implies \sqrt{b^2-4ac}\approx b \implies x_1\approx -b+b+(\varepsilon')\approx 0 \implies$ Auslöschung, wenig gültige Stellen. Also umstellen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2a}\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{-b-sqrtb^2-4ac} \\ &= \frac{2c}{\underbrace{-b-\underbrace{\sqrt{b^2-4ac}}_{\approx b}}_{\approx -2b}} \end{aligned}$$

$\implies$ keine Auslösung

Dies tritt auch bei Aufgabe 8.3 der Übungszettel auf

Ausnahmeregeln (spezielle Werte)

- normal: $E\in[1,2^e-2]$
- $E=2^e-1$ (größtmöglicher Wert): $\begin{cases} x=-\infty & M=0\wedge S=1 \\ x=\infty & M=0\wedge S=0 \\ x=\text{ NaN} & M=0 \end{cases}$
  - $\pm\infty : \frac{1.0}{0.0}, \frac{-1.0}{0.0}, \dots$
  - NaN: $\frac{0.0}{0.0}, \sqrt{-1.0}, \infty\cdot 0$
- $E=0$ (kleinstmöglicher Wert): $\begin{cases} -0 & M=0\wedge S=1 \\ 0 & M=0\wedge S=0 \\ \text{denormalisierte Zahlen (für sehr kleine Werte)} & M>0 \end{cases}$

17 Buchstabenzeichen

Buchstabenzeichen: „glyphs“ müssen durch Zahlen repräsentiert werden „Zeichencode“

17.1 Geschichte

1963	ASCII	7-bit	Zeichen der englischen Schreibmaschiene (**kei**
1964 … 2000		8-bit Codes	mit Umlauten, Akzenten, kyrillische Zeichen,
1991 … heute	Unicode	anfangs 16-bit, jetzt $\approx$ 21-bit	alles (chinesisch, Hyroglyphen, Emojis, …)

3 Codierungen für Unicode:

- UTF-8: variable length code: pro glyph 1 … 4 uint8
- UTF-16: variable length code: pro glyph 1 … 2 uint16
- UTF-32: fixed length code: pro glyph 1 uint32 pro glyph

In c++:

- char: 8-bit Codes
- wchar_t: 16-bit (Windows), 32-bit (Linux)
- u16char_t, u32char_t:

leider sehr Plattformabhängig

Symbol	DOS	ANSI	UTF-8
ö	148	246	195 182
€	221	128	226 130 172

$\Longrightarrow$ ICU Library.
hat man ale Zeichen korrekt, ist Problem noch nicht gelöst: alphabetische Sortierung:

- kontext abhängig
- sprach abhängig
- :
  - deutschen Wörterbuch: wie a
  - deutsches Telefonbuch: wie ae
  - schwedisch: hinter Zeichen $\mathring{a}$

```
#include <locale>
#include <codecvt
std::sort(v.begin(), v.end(), std::locale("se_SE.UTF-8")); // für schwedisch (falls se_SE.UTF-8 installiert)
```

18 Eigene Datentypen

3 Möglichkeiten

- enum: Aufzählungstypen $\Longrightarrow$ Selbststudium
- struct: strukturierte Daten, zusammengesetzte Typen
- class: wie struct, auf objekt-orientiert

struct und enum schon in C, struct und class fast gleich

```cpp
struct TypeName { // Neuer Typ
    type_name1 var_name1; // existierende Typen
    type_name2 var_name2;
    // ...
}; // semikolon WICHTIG, falls vergessen: Fehlermeldung

// Beispiel:
struct Date {
    // Datenmember, Membervariables
    int day;
    int month;
    int year;
};

Date easter(int year) {
    // Datum ausrechnen

    // Datum zurückgeben
    Date d;
    d.day = day; // Punktsyntax kennen wir schon
    d.month = month;
    d.year = year;
    return d;
}

struct Character {
wchar_t clear;
wchar_t encrypted;
int count;
};

Character c;
c.count = 0;
c.count += 1;
```

19 Objektorientiere Programmierung

Eigene Datentypen mit Kapselung. Eigene Datentypen sind zusammengesetz aus einfachen existierenden Datentypen (Ausnahme: enum), zwei Arten:

- offene Typen: Benutzer kann auf interne Daten zugreifen, „C-style types“ wenige Beispiele in der Standardbibilothek:
  - std::pair
  - std::tm (von C übernommen)
  - std::div_t (Resultat von div(), zwei Returnwerte: Quotient und Rest)
- gekapselte Typen: Benutzer kann nicht auf interne Daten zugreifen „private“. Alle Benutzerzugriffe über Offentliches Interface „public“. Vorteile:
  - komplexe Details zur Verwaltung bleiben verborgen
  - öfftenliches Interface (hoffentlich) einfach, zum Beispiel std::vector
  - interne Details können bei Bedarf geändert werden, ohne dass sich das öfftenliche Interface ändert $\Longrightarrow$ Benutzer muss Code nicht änder, aber plötzlich geht Programm schneller, „Rückwärts-Kompatibilität“

Wie erreicht man Kapselung?
Zwei Schlüsselwörter für eigene Typen „class“ (Konvention OOP), „struct“ (von C übernommen)
Zwei Schlüsselwörter für Kapselung: „public“ (öffentlicher Teil), „private“ (gekapselter Teil). class ist standardmäßig „private“, struct standardmößig „public“

```
class MyType {
    // private by default
    public:
    // jetzt öffentlich
    private:
    // wieder private
    public:
    // etc.
}; // <--- Semikolon wichtig
struct MyType {
    // öffentlich by default
    private:
    // jetzt privat
    public:
    // etc
};
```

Benutzer können nur auf Funktionalität in public-Teil zugreifen.
Die im zusammengesetzten typ enthaltenen daten heißten „Daten-Members“, „member variables“ sind normalerweise „private“ $\Longrightarrow$

- kann nachträglich geändert werden, zum Beispiel comples real/imaginär vs. Betrag/Phase
- Benutzer kann nicht unbeabsichtigt die Konsistenz verletzen (zum Beispiel versentlich negativer Betrag bei complex)

Running example: Punkt-Klasse für 2-dimensionalen PUnkt

```
class Point {
    double x_; // Koordinaten als private
    double y_; // Datenmenber (Konvention "_" am Ende)
};
```

dieser Typ ist unbenutzbar, weil alle privat.
unverzichtabr: öfftenliche Punktion zum Initialisieren des Speichers = „Konstructoren“

- Prozeduren innerhalb der Klasse, Name gleich Klassenamen, Returntyp muss weggelassen werden (fügt Compiler automatisch ein) $\Longrightarrow$ nur Seiteneffekt: neues Objekt initialisieren, also die Konstruktoren der Datenmember aufrufen.
- zur Erinnerung: zwei Möglichkeiten für normale Variableninitialisierung

```
double z = 1.0;
double z(1.0); // nur diese Syntax im Konstruktor erlaubt.
double z{1,0}; // seit c++11

class Point {
    double x_;
    double y_;
public:
    Point(double x, double y) :x_(x), // Member x_ auf Initialwert x vom Prozedurargument setzen
    y_(y) // Member y_ auf Initialwert y vom Prozedurargument setzen
    {
    // normaler Rumpf der Prozedur, hier leer, weil nichts zu tun
    // Datenmenber hier schon fertig initialisiert und können benutzt werden
    }
};
Point p(1.0, 2.0);
Point q = {3.0, 4.0}
```

Spezieller Konstruktor: ohne Argument = Standardkonstruktor, „default constructor“, initialisiert Objekt in Standardzustand. Zum Beispiel bei Zahlen auf 0 setzten, hier au Koordinatenursprung Point origin; $\Longleftrightarrow$ Point origin(0.0, 0.0);

```
class Point {
// ... wie zuvor
Point() : x_(0.0), y_(0.0) {} // Standardkonstruktor
};
```

um mit Punkt-Objekten zu arbeiten, brauchen wir weitere Funktionen: zwei Möglichkeiten

- Member-Funktionen: innerhalb der Klasse definiert (wie Konstruktor), dürfen auf alles private zugreifen, können als private oder public definiert sein
- freie Funktionen: normale Funktionen außerhalb der Klasse, die ein Argument des neuen Typs haben, können nur auf Öffentliches Interface zugreifen

wichtigeste Vertreter der Member-Funkitonen: Zugriffsfunktionen „Getter“: erlauben Benutzer, aktuellen Zustand abzufragen:

```
std::vector<int> v = {1, 2, 3};
v.size(); // getter für Arraygröße
Point p(1,0, 2.0);
p.x() // -> 1.0 x-Koordinate abfragen
p.y() // -> 2.0 y-Koordinate abfragen
```

Member-Funktionen werden mit Punkt-Syntax aufgefuren: p.x(), das Objekt for dem Punkt ist das „nullte“ Argument der Funktion, Compiler macht daraus x(p). Bei Implementation der Member Funktion schreibt man das nullte Argument nicht hin. Der Compiler stellt es automatisch unter dem Namen „(*this)“ zur Verfügung.

```
class Point {
    // ... wie zuvor
    double x() const {
        return (*this).x_;
    }

    double y() const {
        return (*this).y_;
    }
};
```

Meist kann man (*this) weglassen, wenn eindeutig ist, welchen Member man meint, fügt es der Compiler es automatisch ein. Getter-Funktionen sind read-only (ändern die Member-Variablen nicht), man sollte sie deshalb mittels „const“ explizit als read-only markieren. Vorteile:

- Programmierer kann Member-Variablen nicht irrtümlich ändern
- Funktion kann in Kontexten benutzt werden, wo das Objekt (nulltes Argument) explizit als read-only markiert ist.

```
Point const cp(1.0, 2.0); // write-once
cp.x();
```

Point auf Konsole ausgeben: nach String wandeln und String ausgeben

- zwei Möglichkeiten:

```
// Member Funktion:
std::cout << p.to_string() << endl;
class Point {
    // ... wie zuvor
    std::string to_string() const {
        std::string res;
        res += "[" + std::to_string((*this).x()) + "," +
        ↪  std::to_string((*this).y()) + "]"
        return res;
    }
};

// freie Funktion:
std::cout << to_string(p) << endl;
std::string to_string(Point p) const {
    std::string res;
    res += "[" + std::to_string((*this).x()) + "," +
    ↪  std::to_string((*this).y()) + "]"
    return res;
}
```

Was man wählt ist Geschmackssache (freie Funktion ist kompatibel zu std::to_string, kleiner Vorteil).
Punkte vergleichen:

```
class Point {
    // ... wie zuvor
```

```
    bool equals(Point other) const {
        return (*this).x() == other.x() && (*this).y() == other.y();
    }
    bool operator==(Point other) const {
        return (*this).x() == other.x() && (*this).y() == other.y();
    }
    bool operator!=(Point other) const {
        return (*this).x() != other.x() || (*this).y() != other.y();
    }
}

Point p(1.0, 2.0);
Point origin;
assert(p.equals(p));
assert(!p.equals(origin));
// üblicher: Infix-Notation
assert(p == p);
assert(!(p == origin));
assert(p != origin);
```

Für Infix-Notation muss Prefix-Varante operator== und operator!= implementiert werden.

```
p == origin; // -> p.operator==(origin) -> operator==(point, origin)
```

zwei weitere Funktionen:

- neuen Punkt erzeugen, transponiert, das heißt x- und y-Koordinate vertauscht.
- verschoben um Punkt

```
class Point {
    // ... wie zuvor
    Point transpose() const {
        Point res((*this).y(), (*this).x());
        return res;
    }
    Point translate(Point v) const {
        Point res((*this).x() + v.x(), (*this).y() + v.y());
        return res;
    }
}
```

Jede Klasse hat bestimmte spezielle Menber-Funktionen:

· Konstruktoren bringen Objekt in wohldefinierten Anfangszustand

· Destruktoren: Entsorgt ein nicht mehr benötigtes Objekt (meist am Ende der Umgebung)

· Zuweisungsoperatoren: um Objekt per Zuweisung („=“) zu überschreiben $\Longrightarrow$ später

19.1 Destruktoren

jede Klasse muss genau einen Destruktor haben, wenn der Programmierer das nicht expliziet implementiert, fügt Compiler ihn automatisch ein. Syntax:

```
class klassenName {
public:
    ~klassenName(){
         // Implementation
         }
};
```

Der automatische Destruktor ruft einfach die Destruktoren aller Member-Variablen auf. Meist ist das ausreichend, aber in bestimmten Situationen muss der Programmierer zusätzliche Aktionen implementieren. Beispiele dafür:

1. manuelle Speicherverwaltung: Destruktor muss nicht mehr benötigten Speicher an Betriebssystem zurückgeben ($\Longrightarrow$ später), zum Beispiel Destruktor von std::vector, std::string (Kapselung: Benutzer merken davon nichts)

2. manuelles Dateimanagement: Destruktor muss Datei schließen, also Dateien aus dem Festplattencache auf Platte übertragen und Metadaten für Datei schreiben, zum Beispiel std::ofstream, std::ifstream

3. Abmelden von einem Service (ausloggen, Verbindung beenden)

19.2 Kopier-Konstruktor

Spezieller Kontruktor: Kopier-Konstruktor zum Erzeugen einer Kopie eines vorhandenen Objekts, das heißt neue Speicherzelle mit gleichem Inhalt.

```
Point p(1.0, 2.0); // Konstruktor mit Initialwert
Point q = p;       // Kopierkonstruktor
Point r(p);        // Kopierkonstruktor

int foo(Point q) {
```

```
    // ...
}
int bar(Point const & g) {
    // ...
}
int main() {
    Pont p(1.0, 2.0);
    foo(p) // Kopierkonstruktor, um lokales q in foo aus p zu erzeugen, "pass-by-value"
    bar(p) // g ist neuer Name für p, keine neue Speicherzelle, kein Kopierkonstruktor, "pass-by-reference"
}

// Syntax:
class KlassenName {
public:
    klassenName(klassenName const & existing) {
    // ...
    }
};
```

Der Compiler erzeugt Kopier-Konstruktor automatisch, falls nicht explizit programmiert = ruft Kopier-Konstruktor aller Member-Variablen auf, meistens richtig, Ausnahmen wie oben.

19.3 Standard-Konstruktor

Spezieller Konstruktor: Standard-Konstruktor („default constructor“): ohne Argumente, bringt Object in Standard-Zustand, zum Beispiel „0“ bei Zahlen, „“ bei (Leerstring) bei std::string, leeres Array std::vector, (0, 0) bei Point. Syntax:

```
class klassenName {
public:
    klassenName() {}
    klassenName() : Initialiserungserte der Member-Variablen {}
};
```

Compiler erzeugt Standard-Konstruktor automatisch, falls es **keinen** eenutzerdefinierten Konstruktor gibt.

19.4 rule of three

„rule of three“: Faustregel: wenn es notwendig ist, eine der drei Funktionen Destruktor, Kopierkonstruktor, Kopier-Zuweisung ($\implies$ später) explizit zu implementieren, müssen alle drei explizit implementiert werden

19.5 Vorteile der Kapselung:

1. Benutzung der Klasse ist viel einfacher, weil unwichtige Details verborgen sind
2. interne Implementatoin kann geändert werden, ohne den Benutzer zu Folgeänderungen zu zweingen, weil externe Schnittstelle erhalten bleibt.

19.6 Arithmetische Infix-Operationen

Ziel der OO-Programmierung: Arbeiten mit Nutzer-definierten Datenstruktoren möglichst einfach, wie mit eingebauten. Zum Beispiel arithmetische Infix-Operationen

```
Point p(2.0, 3.0), q(4.0, 5.0);
Point r = 2.5 * p + q;
assert(r == Point(9.0, 12.5));
```

dazu muss man die entsprechenden Prefix-Funktionen implementieren

- Addition:

```
Point operator+(Point p1, Point p2) {
    Point res(p1.x() + p2.x(), p1.y() + p2.y());
    return res;
}

Point operator+(Point & p1, Point & p2) {
    Point res(p1.x() + p2.x(), p1.y() + p2.y());
    return res;
}
```

- subtraktion, elementweise Multiplikation und Division genauso („+“ überall durch „-“, „*“, „/“ ersetzen)
- Skalierungsoperation: Multiplikation von Punkt mit Zahl, das heißt zwei verschiedene Argumenttypen $\Longrightarrow$ zwei Versionen: 2.5*p und p*2.5

```
Point operator*(double s, Point p) {
    Point res(s * p.x(), s * p.y());
    return res;
}

Point operator*(Point p, double s) {
    Point res(p.x() * s, p.y() * s);
    return res;
}
```

alle diese Versionen können dank „function overloading“ gleichzeitig implementiert sein

Bisher: freie Funktionen. Falls das erste Argument vom Typ Point oder Point const & ist, kann man die Funktionen alternativ als Member-Funktion implementieren:

```
class Point {
    // ... wie bisher
    Point operator+(Point const & other) const {
    Point res(x_ * other.x_, y_ * other.y_);
    return res;
    }
};
```

Vorteil von Member Funktionen: Zugriff auf private Member der Klasse (hier nicht notwendig).
Nachteil:

- nur möglich, wenn das linke Argument vom Klassentyp ist p*2.5 kann Member Funktion sein, 2.5*p nicht
- nur möglich,wenn man die Klassendefinition ändern darf

19.7 Objekte nachrträglich verändern

Bisher: Alle Objekte waren write-once, das heißt Speicher wurde im Konstruktor initialisiert und war dann unveränderlich. $\Longrightarrow$ Paradigma der funktionalen Programmierung - „referentielle Integrität“ Prozedurale Programmierung erfodert Möglichkeit, Objekte zu änder, zum Beispiel um entsprechende Änderungen in der realen Welt wiederzuspiegeln (zum Beispiel Student besteht Prüfung). Möglichkeit 1: Setter-Funktionen

```
class Point {
    // ... wie bisher

    void setX(double new_x) {
    x_ = new_x;
    }

    void setY(double new_y) {
    y_ = new_y;
    }
};
```

Möglichkeit 2: Index-Zugriff, wie bei std::vector

```
Point p(2, 3);
assert(p[0] == 2 && p[1] == 3);
p[0] = 4;
p[1] = 5;
assert(p[0] == 4 && p[1] == 5);

// dazu muss die Member-Funktion operator[] implementiert werden
class Point {
    // ... wie bisher

    double operator[](int index) const {
    if(index == 0) { return x_; }
    if(index == 1) { return y_; }
    // andernfalls Fehlermeldung (Exception -> später)
    }

    double operator[](int index) {
    // implementation identisch / gleicher Quellcode, aber
    // unterschiedlicher Maschienencode
    }
}

// Verwendung (Langform):
Point p(2.0, 3.0);
double & x = p[0]; // neue Namen x, y für Variablen p.x_ und p.y_
double & y = p[1];
x = 4.0; // ändert indirekt auch p.x_
y = 5.0; // ändert indirekt auch p.y_
```

Möglichkeit 3 : Zuweisungoperatoren

```
Point p(2, 3), g(4, 5);
p = 1.0; // beide Koordinaten mit 1.0 überschreiben
assert(p == Point(1.0, 1.0)) p = q; // Speicherzelle p werden die gleichen
                    // Werte zugewiesen wie Speicherzelle q
assert(p == Point(4.0, 5.0)) Point & r =
    q; // Gegesatz r und q sind Namen für gleiche Speicherzelle

class Point {
    // ... wie bisher

    void operator=(double v) {
    x_ = v;
```

```
    y_ = v;
    }

    // copy assignment operator (analog zu copy constructor)
    operator=(Point const & other) {
    x_ = other.x_;
    y_ = other.y_;
    }
}
```

Bemerkung:

1. implementiert der Programmierer keinen copy assignment Operator, implementiert Compiler ihn automatisch (wieKopierkonstruktor): ruft copy assignment für alle Member-Variablen auf

2. man implementiert meist

```
Point & operator=(...) {
    // ... wie bisher
    return *this;
}
```

Vorteil: man kann Zuweisung verketten:

```
r = p = q; // -> r = (p = q)
```

arithmetische Zuweisung:

```
Point p(2, 3),
q(4, 5);
p += q; // add -asign: Abbkürzung für p = p + q
assert(p == Point(6, 8));

class Point {
    // ... wie bisher
    Point & operator+=(Point const & other) {
    x_ += other.x_;
    y_ += other.y_;
    return *this;
    }
};
```

19.8 Klasse Image

Speichert 2D Bild (analog: Matrix) zunächst nur Graubilder, später: Farbbilder. Beispiel für dynamische Datenstruktor, Größe erst zu Laufzeit bekannt und änderbar. Besteht aus Pixeln („picture elements“), die mit 2 Indizes x und y angesprochen werden Problem: Speicher ist 1-dimensional, Lösung: Lege Zeieln hinterineanger ab. $\Longrightarrow$ Übergangsformeln:

$$
\begin{aligned}
i &= x + y \cdot width \\
x &= 1y & &= \frac{1}{width}
\end{aligned}
$$

```
class Image {
    int                   width_, height_;
    std::vector<uint16_t> data_;

public:
    Image() : width_(0), height_(0) {}
    Image(unsigned int w, unsigned int h)
    : width_(w), height_(h), data_(w * h, 0) {}
    int  width() const { return width_; }
    int  height() const { return height_; }
    int  size() const { return width_ * height_; }
    void resize(unsigned int w, unsigned int h) {
    width_  = w;
    height_ = h;
    data.resize(w * h);
    }
    uint16_t get(int x, int y) const { return data_[x + y * width_]; }
    void set(int x, int y, uint16_t v) { data_[x + y * width_] = v; }

    // Zugriff bequemer: wünschenswert:
    // uint16_t v = image[1, 2];
    // image[1, 2] = 255;
    // geht nicht, weil im Indexoperator nur 1 Argument sein darf
    // -> verwende Stattdessen runde Klammern
    uint16_t operator()(int x, int y) const {
    return get(x, y); // return data_[x + y * width_];
    }
    uint16_t operator()(int x, int y) {
    return return data_[x + y * width_];
    }
    // damit: uint16_t = image(1, 2); image(1, 2) = 255;
};
```

```cpp

std::string to_string(Image const & im) {
    std::string res;
    for(int x = 0; x < im.width(); x++) {
    for(int y = 0; y < im.height(); y++) {
            res += std::to_string(im(x, y)) + " ";
    }
        res.pop_back();
        res += "\n";
    }

    return res;
}
```

PGM-Format („Portable GrayMap“): reines Textformat: my_image.pgm:

```
P2
# Kommentar
<width> <height>
255
Ausgabe von to_string
```