Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2016/17

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. D. Vogel
Dr. M. Witte

Blatt 14

Keine Abgabe! Eine Musterlösung wird nächste Woche veröffentlicht.

Aufgabe 1. *(Permutationen)* Stellen Sie jede der folgenden Permutationen $\sigma \in S_5$ als Produkt von Transpositionen dar. Berechnen Sie das Signum $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

(a) $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

(b) $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

(c) $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$.

Aufgabe 2. *(Explizite Berechnung einer Determinante)* Bestimmen Sie (unter Angabe der Rechenschritte) die Determinante der folgenden Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 & -2 & 7 & -6 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -20 & -2 & 12 & 0 \\ 4 & 37 & 4 & 19 & 28 \\ 3 & 8 & 0 & 21 & -18 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3. *(Der Kern eines Gruppenhomomorphismus)*

(a) Sei $f\colon G \to H$ ein Homomorphismus von Gruppen. Zeigen Sie, dass

$$\ker f := \{g \in G \mid f(g) = 1_H\}$$

eine Untergruppe von G ist und dass für $k \in \ker f$, $g \in G$ auch $gkg^{-1} \in \ker f$ gilt. Dabei bezeichnet 1_H das neutrale Element von H und g^{-1} das Inverse von g. Eine Untergruppe von G mit dieser Zusatzeigenschaft heißt *Normalteiler* von G. *Tipp:* Erinnern Sie sich an Aufgabe 4 von Blatt 4.

(b) Zeigen Sie: Für $n \in N$ ist $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{-1, 1\}$ ein Gruppenhomomorphismus und

$$A_n := \{\sigma \in S_n \mid \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\}$$

ein Normalteiler von S_n. (A_n heißt die *alternierende Gruppe* auf n Ziffern.)

(c) Zeigen Sie: Sei K ein Körper. Für $n \in N$ ist

$$\mathrm{SL}(n, K) := \{A \in \mathrm{GL}(n, K) \mid \det A = 1\}$$

ein Normalteiler von $\mathrm{GL}(n, K)$. ($\mathrm{SL}(n, K)$ heißt die *spezielle lineare Gruppe vom Rang n*)

Aufgabe 4. *(Determinanten antisymmetrischer Matrizen)* Sei n eine ungerade natürliche Zahl.

(a) Zeigen Sie: Ist A eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ und $A^t = -A$, so ist A nicht invertierbar.

(b) Gibt es eine invertierbare reelle 2×2-Matrix A mit $A^t = -A$?

Aufgabe 5. *(Homogene und scherungsinvariante Abbildungen)* Zeigen Sie: Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $d : M(n \times n, K) \to K$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

(a) *Scherungsinvarianz:* $d(E_{i,j}(\lambda)A) = d(A)$ für $A \in M(n \times n, K)$ und $E_{i,j}(\lambda)$, $1 \leq i \neq j \leq n$, $\lambda \in K$, eine elementare Scherungsmatrix.

(b) *Homogenität:* $d(D_i(\lambda)A) = \lambda d(A)$ für $A \in M(n \times n, K)$ und $D_i(\lambda)$, $1 \leq i \leq n$, $\lambda \in K$, eine elementare Streckungsmatrix (wobei auch der Fall $\lambda = 0$ erlaubt ist).

Dann gibt es ein $c \in K$, so dass $d(A) = c \det(A)$ für alle $A \in M(n \times n, K)$.

Tipp: Reduzieren Sie mit Aufgabe 3 von Blatt 8 auf den Fall, dass A eine Matrix in strenger Zeilenstufenform ist und zeigen Sie dann, dass $d(A) = 0$, falls A nicht invertierbar ist.