Analysis II (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

24. April 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Metrische und normierte Räume

1.1 Metrische Räume

Definition 1.1 Sei M eine Menge, $d : M \times M \to [0, \infty)$ heißt **Metrik** auf M genau dann wenn $\forall x, y, z \in M$

- (D1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Definitheit)
- (D2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
- (D3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

Beispiel 1.2

1. Charakterische (diskrete) Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Sei $X = \mathbb{K}^n (\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C})$ mit Metrik

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{n}{2}}$$

(euklidische Metrik)

3. Sei $X = \mathbb{R}^n$. Für $1 \leq \phi \leq \infty$. Sei

$$d_\phi(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^\phi \right)^{\frac{n}{\phi}}$$

   Ist $\phi = \infty$, so definieren wir

$$d_\infty(x, y) = \max_{i-1,\ldots,n} |x_i - y_i|$$

4. $X = \mathbb{R}$ mit Metrik

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

5. Der Raum der Folgen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (beziehungsweise $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) kann mit der Metrik

$$d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

Definition 1.3 Sei M eine Menge mit Metrik d. Wir definieren für $x \in M, \varepsilon > 0$, die offene ε-Kugel um x durch

$$K_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

und eine abgeschlossene Kugel durch

$$K_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

$A \subset M$ heißt **Umgebung** von $x \in M \Leftrightarrow \exists \varepsilon : K_\varepsilon(x) \subset A$

Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen

Definition 1.4 Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) ist konvergent gegen einem $x \in X$ genau dann wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 d(x_n, x) < \varepsilon$

Satz 1.5

1. Sei (X, d) ein metrischer Raumn. Dann ist $A \subseteq X$ abgeschlosen genau dann wenn $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in A mit $x_n \to x \Rightarrow x \in A$
2. Seien $(X, d_1), (Y, d_2)$ zwei metrische Räume. Dann ist die Funktion stetig in $x \in X$ genau dann wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$.

Definition 1.6 ((Cauchy Folgen und Vollständigkeit)) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge falls $d(x_n, x_m) \to 0$ für $n, m \to \infty$. Der metrische Raum heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge konvergent ist.

1.2 Normierte Räume

Definition 1.7 Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist ein Paar bestehend aus einem $\mathbb{K}$ -Vektorraum X und einer Abbildung $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ mit

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in X$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in X$

Bemerkung 1. Die Norm $\|\cdot\|$ induziert auf X eine Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$

2. Eine Metrik d auf einem Vektorraum definiert die Norm $\|d(x, 0)\|$ nur dann, wenn

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x, y, z \in X : d(\lambda x, \lambda y) &= |\lambda| d(x, y) && \text{(Homagenität)} \\ d(x + z, y + z) &= d(x, y) && \text{(Translationsinvarianz)} \end{aligned}$$

□

Definition 1.8 (Banachraum) Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt vollständig, falls X als metrischer Raum mit der Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ vollständig ist. Ein solcher vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**

Beispiel 1.9 1. $\left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2\right)$, wobei

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{n}{2}}$$

2. Sei K eine kompakte Menge:

$$C_{\mathbb{K}} := \{f : K \to \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\}$$

$$\|\cdot\|_\infty = \max_{\lambda \in K} |f(x)|$$

$\left(C_{\mathbb{K}(K)}, \|\cdot\|_\infty\right)$ ist ein Banachraum.

Bemerkung 1. Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{K}^n$ konvergiert, das heißt $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ ist vollständig

2. Jede beschränkte Folge in $\mathbb{K}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge. (Bolzano-Weierstraß Satz gilt in $\mathbb{R}^n$) (Beweis für $\mathbb{R}^n$ zum Beispiel in RR Ana2 Satz 1.1) □

Satz 1.10 (Äquivalenz von Normen) Auf dem endlich dimesionalen Vektorraum $\mathbb{K}^n$ sind alle Normen **äquivalent** zur Maximumnorm, das heißt zu jeder Norm $\|\cdot\|$ gibt es positive Konstanten w, M mit denen gilt

$$m\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M\|x\|_\infty, x \in \mathbb{K}^n$$

Beweis Sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm $\forall x \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \|e^{(k)}\| \leq M \|x\|_\infty$$

mit

$$M := \sum_{k=1}^{n} \|e^{(k)}\|$$

Wir setzen

$$S_1 := \{x \in \mathbb{K}^m \mid \|x\|_\infty = 1\}, m := \inf\{\|x\|, x \in S_1\} \geq 0$$

Zu zeigen $m > 0$ (dann ergibt sich für $x \neq 0$ wegen $\|x\|_\infty^{-1} x \in S_1$ auch $m \leq \|x\|_\infty^{-1} \|x\| \Rightarrow 0 < m\|x\|_\infty \leq \|x\| \quad x \in \mathbb{K}^n$) Sei also angenommen, dass $m = 0$

Dann gibt eine eine Folge $\left(x^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}} \in S_1$ mit $\left\|x^{(k)}\right\| \xrightarrow{k \to \infty} 0$. Da diee Folge bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ beschränkt ist, gibt ei nach dew B.-W. Satz eine Teilfolge auch von $\left(x^{(k)}\right)$, die bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ gegen ein $x \in \mathbb{K}^n$ konvergiert.

$$\left|1 - \|x\|_\infty\right| = \left|\left\|x^{(k)}\right\|_\infty - \|x\|_\infty\right| \leq \left\|x^{(k)} - x\right\|_\infty \to 0 \Rightarrow \|x\|_\infty = 1 \Rightarrow x \in S_1$$

Anderseits gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} : \|x\| \leq \left\|x - x^{(k)}\right\| + \left\|x^{(k)}\right\| \leq M \left\|x - x^{(k)}\right\|_\infty + \left\|x^{(k)}\right\| \xrightarrow{k \to \infty} \Rightarrow x = 0$$

↯zu $x \in S_1$ □

Definition 1.11 Eine Menge $M \subset K^n$ heißt kompakt (folgenkompakt), wenn jede beliebige Folge in M eine konvergente Teifolge besitzt, deren Grenzwert ebenfalls in M enthalten ist.

Beispiel 1.12 Mit Hilfe von dem Satz von B.W. folgt, dass alle abgeschlossene Kugeln im $\mathbb{R}^n$ ($K_r(a), a \in K^n$) kompakt sind. Ferner ist für beschränkte Mangen M der Rand ∂M kompakt. Jede endliche Menge ist auch kompakt.

1.3 Hilberträume

Definition 1.13 Sei $H\mathbb{K}$ Vektorraun. Ein **Skalarprodukt** auf eine Abbildung

$$(\cdot, \cdot) : H \times H \to \mathbb{K}$$

mit

1. $\forall x, y, z \in H, \lambda \in \mathbb{K} : (z, x + \lambda y) = (z, x) + \lambda(z, y)$
2. $\forall x, y \in H : (x, y) = \overline{(y, x)}$
3. $\forall x \in H : (x, x) \geq 0 \wedge (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$(H, (\cdot,\cdot))$ nennt man einen Prähilbertraum.

Bemerkung Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist das Skalarprodukt linar in der zweiten Komponente aber antilinear in der ersten ($(\lambda x, y) = \bar{\lambda}(x, y)$). □

Lemma 1.14 (Cauchy-Schwarz Ungleichung) Sei $(H, (\cdot,\cdot))$ Prähilbertraum, dann gilt

$$\forall x, y \in H : |(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)$$

Beweis Da die Ungleichung für $y = 0$ bereits erfüllt ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeiheit annehmen $y \neq 0$. Für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$0 \leq (x + \alpha y, x + \alpha y) = (x,x) + \bar{\alpha}(y,x) + \alpha(x,y) + \alpha\bar{\alpha}(y,y)$$

Setze nun $\alpha := -(x,y)(y,y)^{-1}$

$$\begin{aligned}
&= (x,x) - \overline{(x,y)}(y,y)^{-1} - (x,y)(y,y)^{-1}(x,y) - \left|(x,y)^2\right|(y,y)^{-1} \\
&= (x,x) - \underbrace{((y,x)(y,x) + (x,y)(x,y))(y,y)^{-1}}_{>0} - |(x,y)|^2(y,y)^{-1} \\
&\leq (x,x) - |(x,y)|^2(y,y)^{-1} \\
&\Leftrightarrow |(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)
\end{aligned}$$

□

Korollar 1.15 Sei $(H, (\cdot,\cdot))$ ein Prähilbertraum, dann ist $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ eine Norm auf H.

Beweis Es ist nur die Dreiecksungleichung zu beweisen, weil der Rest klar ist. Für $x, y \in H$ gilt

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(x,y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x,y)| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

□

Definition 1.16 Ein Prähilbertraum $(H, (\cdot,\cdot))$ heißt Hilbertraum, falls $(H, \|\cdot\|)$ mit $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ ein Banachraum ist.

Beispiel 1.17

1. $H = \mathbb{R}^n$ versehen mit $\underbrace{(x,y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i}_{\text{euklidisches Skalarprodukt}}$ ist ein Hilbertraum
2. $H = \mathbb{C}^n$ mit $\underbrace{(x,y) := \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i}_{\text{euklidisches Skalarprodukt}}$ ist ein Hilbertraum
3. Sei $l^2\mathbb{K} := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{K}, \forall k \in \mathbb{N} \wedge \sum_{i=1}^\infty |x_k|^2 < \infty\}$ versehen mit $(x,y) := \sum_{i=1}^\infty \bar{x}_i y_i$ ist ein Hilbertraum.

$$\sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|_{l^2}\|y\|_{l^2} < \infty$$

Lemma 1.18 (Höller-Ungleichung) Für das euklidische Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_2$ gilt für beliebige p, q mit $1 < p, q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ die Ungleichung

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n : \left|(x,y)_2\right| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Darüber hinaus gilt die Ungleichung auch für $p = 1, q = \infty$

Lemma 1.19 (Young'sche Ungleichung) Tür $p, q \in \mathbb{R}, 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{K} : |(x,y)| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}$$

Lemma 1.20 (Minkowski-Ungleichung) Für ein beliebiges $p \in [1, \infty]$ gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n : \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Satz 1.21 (Banachscher Fixpunktsatz) Sei (M, d) ein vollständiger, metrischer Raum und $f : M \to M$ ist eine strenge Kontraktion, das heißt

$$\exists 0 < \alpha < 1 \forall x, y \in M : d(f(x), f(y)) < \alpha d(x, y)$$

Dann existiert ein eindeutiger Fixpunkt von f, das heißt es existiert ein eindeutiges $x^* \in M : f(x^*) = x^*$

Beweis Existenz:
Wähle ein $x_0 \in M$ beliebig, aber fest und definiere dann $x_1 := f(x_0), x_2 := f(x_1), \ldots$. Dann gilt für $n \leq m$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(f(x_{n-1}), f(x_{m-1})) < \alpha d(x_{n-1}, x_{m-1}) \\ &= \alpha d(f(x_{n-2}), f(x_{m-2})) < \cdots < \alpha^n d(x_0, x_{m-n}) \end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\begin{aligned} d(x_0, x_{m-n}) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n}) \\ &\leq d(x_0, x_1) + \alpha d(x_0, x_1) + \cdots + a^{m-n-1} d(x_0, x_1) \\ &= d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{m-n-1} \alpha^i \leq d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \\ &= \frac{d(x_0, x_1)}{1-\alpha} < \infty \\ \Rightarrow d(x_n, x_m) &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Also ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge. Da (M, d) vollständig ist existiert $x^* \in M$, sodass $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x^*$.
Zeige, dass x^* Fixpunkt von f ist:

$$\begin{aligned} 0 \leq d(x^*, f(x^*)) &\leq d(x^*, x_k) + d(x_k, f(x^*)) \\ &\leq d(x^*, x_k) + \alpha d(x_{k-1}, x^*) \xrightarrow{k\to\infty} 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(x^*) = x^*$
Eindeutigkeit: Angenommen $\exists x' \in M, x' \neq x^* : f(x') = x'$:

$$0 < d(x^*, x') = d\big(f(x^*), f(x')\big) < \alpha d(x^*, x') \Rightarrow \alpha > 1 \qquad \square$$