Analysis III (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

9. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der Maß- und Integrationstheorie

Motivation: Erweiterung des Riemannintegrals auf einen größeren Bereich von Funktionen

Satz 1.1 (Kriterium für Riemann Integrierbarkeit) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f genau dann Riemann integrierbar, falls die Menge S der Unstetigkeiten von f eine Nullmenge ist, im Sinne, dass es für jedes für jedes $\varepsilon > 0$ eine abzählbare Familie von Intervallen I_i gibt, mit

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon$$

Bemerkung Insbesondere ist die Funktion

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nicht Riemann integrierbar.

Das Riemann-Integral der Funktion ist definiert über eine Zerlegnug des Definitionsbereiches in kleine Intervalle. Beim Lebesgue Integral wird stattdessen der Bildbereich zerlegt! Für eine nichtnegative $f : \Omega \to [0, \infty], \Omega \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Mengen

$$E_k := f^{-1}((t_k, t_{k+1}]) \subset \mathbb{R}^n$$

wobei $t_k = hk$ für ein vorgegebenens $h > 0$, und approximieren dann das Integral von f durch

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_k^{(h)} \mu(E_k) \leq \int f(x) \mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^{\infty} t_{k+1}^{(h)} \mu(E_k) \tag{$*$}$$

wobei das **Maß** $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ eine Abbildung ist, welche das Maß der Menge $E = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ misst. Das Integral ergibt sich aus $(*)$ im Limes $h \to 0$. Für das Lebesgue-Integral müssen wir ein geeignetes Maß definieren $\to$ Lebesguemaß $\mathcal{L}^n$

$$\int_0^1 f(x) \mathrm{d}\mathcal{L}^1(x) = \underbrace{\mathcal{L}^1(\mathbb{Q})}_{0} \cdot 1 + \underbrace{\mathcal{L}^2(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}_{1} \cdot 0 = 0$$

Definition 1.2 (Maßproblem) Wir suchen eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ mit den folgenden Eigenschaft

1. $\mu(A) \subseteq \mu(B) \forall A \subset B$ (Monotonie)
2. $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ falls $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$ (σ-Additivität)
3. $\mu([0,1]^n) = 1$ (Normierung)
4. $\mu(QA + y) = \mu(A)$ falls $Q \in O(n), y \in \mathbb{R}^n$ (Euklidische Invarianz)

Dieses Problem heißt Maßproblem. In einer etwas schwächeren Version kann man auch fordern

2. $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)$

4. $\mu(A + y) = \mu(A)$ für $y \in \mathbb{R}^n$

Satz 1.3 (Vitali: 1908) Es gibt keine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ welche die Forderungen des Maßproblems erfüllt.

Beweis Sei $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ eine Abbildung die die Forderungen des Maßproblems erfüllt. Sei $q_i, i \in \mathbb{N}$ eine Abzählung von $[0,1]^n \cap \mathbb{Q}^n$. Wir definieren die Äquivalenzrelation $x \sim y$ auf $E := [0,1]^n$ durch $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Nach dem Auswahlaxiom gibt es eine Menge $M_0 \subset [0,1]^n$, welche aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält, das heißt es gilt:

1. $\forall y \in [0,1]^n \exists x \in M_0 : x \sim y \in \mathbb{Q}$
2. Aus $x, y \in M_0, x - y \in \mathbb{Q} \implies x = y$

Wir definieren $M_i = M_0 + q_i$. Aus der Definition von M_i folgt $M_i \cap M_j = \emptyset \forall i \neq j$. In der Tat falls $x \in M_i \cap M_j$, dann $x - q_i \in M_0$ und $x - q_j \in M_0 \overset{1.}{\Rightarrow} q_i = q_j$. Außerdem gilt $[0,1]^n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \subset [0,2]^n$. Die erste Einbettung folgt aus 1., die zweite Einbettung gilt, da $y + q_j \in [0,2]^n \forall y \in M_0$ und $y \in [0,1]^n$ schließlich gilt $\mu(M_j) = \mu(M_0) \forall j \in \mathbb{N}$. Dies folgt aus den Forderungen 1., 3., 4. (abgeschwächte Version reicht).

$$\implies 1 = \mu([0,1]^n) \leq \mu\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} M_j\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(M_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(M_0) \implies \mu(M_i) = \mu(M_0) > 0$$

und

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i\right) = \infty$$

Aus 3. und 4. folgt andererseits

$$\mu([0,2]^n) = 2^n \mu([0,1]^n) = 2^n$$
$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} M_i\right) \leq \mu([0,2]^n) = 2^n < \infty` \qquad \square$$

Bemerkung Jedes Maß, welche die Eigenschaften des Maßproblems erfüllt, kann also nicht auf der ganzen $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ definiert sein, sondern auf einer Untermenge der $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

Frage: Welche ist die „größte" (eine „gute") Untermenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, sodass es eine Lösung des Maßproblems gibt?

Definition 1.4 (Algebra und σ-Algebra) Eine Algebra $\mathcal{A}$ ist die Familie von Teilmengen einer gegebenen Menge X mit

- $X \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \implies A^C := X \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$

Falls

$$(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \implies \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A \in \mathcal{A}$$

so spricht man von einer σ-Algebra.

Lemma 1.5 Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ Algebra und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$. Dann gehören $\emptyset, \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ und $A_1 \setminus A_2$ zu $\mathcal{A}$.

Beweis (Übung) $\square$

Definition 1.6 (Erzeugte und relative σ-Algebra) Für $S \subset \mathcal{P}(X)$ wird

$$\Sigma(S) = \Sigma(S \mid X) := \bigcap \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra mit } S \subseteq \mathcal{A}\}$$

als die von S erzeugte σ-Algebra bezeichnet. $\forall Y \subset X$ definieren wir die relative σ-Algebra

$$\mathcal{A} \cap Y := \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{A}\}$$

Lemma 1.7 Die erzeugte relative σ-Algebra sind wohldefiniert. Für alle Mengen $S \subset \mathcal{P}(X), Y \subset X$ gilt

$$\Sigma(S \cap Y \mid Y) = \Sigma(S \mid X) \cap Y$$

Beweis (Übungen) $\square$

Definition 1.8 (Topologischer Raum) Ein topologischer Raum ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ bestehend aus Menge X und $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ mit

- $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
- $U, V \in \mathcal{O} \implies U \cap V \in \mathcal{O}$
- $(U_k)_{k\in I} \subset \mathcal{O} \implies \bigcup_{k\in I} U_k \in \mathcal{O}$ für eine beliebige Indexmenge I.

Die Elemente von $\mathcal{O}$ werden als **offene Menge** bezeichnet.

Bemerkung Topologische Raum ist abgeschlossen unter endlichen Schnitten und abzählbaren Vereinigungen.

Definition 1.9 (Borel-σ-Algebra, Borel Menge) Ist X ein topologischer Raum, so ist die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$ diejenige σ-Algebra, die von den offenen Mengen erzeugt wird. Ihre Elemente heißen Borel-Mengen.

$$\mathcal{B}^n := \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$
$$\mathcal{B} := \mathcal{B}^1$$

Bemerkung Die σ-Algebra die von den abgeschlossenen Mengen erzeugt wird, ist ebenfalls identisch mit der Borel σ-Algebra.

Definition 1.10 (Messraum, Maß, Maßraum) Eine Menge X mit einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt **Messraum**. Ein **Maß** ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$ für disjunkte Mengen σ-Additivität

Die Elemente in $\mathcal{A}$ heißen messbar, und $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **Maßraum**.

Definition 1.11 (σ-Finitheit) Ein Mah heißt σ-finit, falls es eine abzählbare Überdeckung $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ von X gibt, also

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$$

sodass $\mu(X_k) < \infty \forall k$.
μ heißt endlich falls $\mu(X) < \infty$. Bei Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu(X) = 1$.

Beispiel 1.12

1. Zählmaß: Für X und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ setze für $A \in \mathcal{A}$:

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A & A \text{ endlich} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

   μ ist endlich falls X endlich und σ-finit wenn X abzählbar.

2. Dirac-Maß: Für einen fest gewählten $x_0 \in X$ und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ setzen wir für $A \subset X$

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & x_0 \notin A \\ 1 & x_0 \in A \end{cases}$$

3. Positive Linearkombination: μ_1, μ_2 Maße auf $(X, \mathcal{A})$. Dann ist $\mu := \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2$ für $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ wieder ein Maß

Lemma 1.13 Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $Y \in \mathcal{A}$. Dann ist $\mu\mid_Y (A) := \mu(A \cap Y) \forall A \in \mathcal{A}$ wieder ein Maß auf $(X, \mathcal{A})$. Durch Einschränken der σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{A}\mid_Y := \{A \in \mathcal{A} \mid A \subset Y\}$ wird $(Y, \mathcal{A}\mid_Y, \mu\mid_Y)$ auch ein Maßraum. Falls $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-finit, dann $(Y, \mathcal{A}\mid_Y, \mu\mid_Y)$ auch.

Notation: Zu $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ schreiben wir

- $A_k \nearrow A (k \to \infty)$ falls $A_k \subset A_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$ und $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$

- $A_k \searrow A (k \to \infty)$ falls $A_k \supset A_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$ und $A = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$

Satz 1.14 Für jeden Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ gilt

1. $A_1 \subset A_2 \implies \mu(A_1) \leq \mu(A_2)$ (Monotonie)
2. $\mu\big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\big) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$ (σ-Subadditivität)
3. $A_k \nearrow A \implies \mu(A_k) \nearrow \mu(A)$ für $(k \to \infty)$ (Stetigkeit von Unten)
4. $A_k \searrow A \implies \mu(A_k) \searrow \mu(A)$ für $(k \to \infty)$ und $\mu(A_1) < \infty$ (Stetigkeit von Oben)

Beweis 1. $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \implies B = A \,\dot\cup\, (B \setminus A), B \setminus A \in \mathcal{A} \implies \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$

2. Wir definieren $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ durch

$$B_1 := A_1, B_{k+1} := A_{k+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{k} A_k \implies \dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} B_k \qquad = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$$

Nach Definition gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$$

3. Definieren $(C_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ durch

$$\begin{aligned} C_1 &:= A_1 \\ C_{k+1} &:= A_{k+1} \setminus A_k \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \implies \dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} C_k &= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = A \\ \mu(A_k) &= \sum_{j=1}^{k} \mu(C_j) \xrightarrow{k\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(C_k) = \mu(A) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) \end{aligned}$$

4. $D_k := A_1 \setminus A_k \forall k \in \mathbb{N}$. Damit ist $D_k \nearrow A_1 \setminus A$ und

$$\mu(A_1) - \mu(A_k) = \mu(A_1 \setminus A_k) \xrightarrow{k\to\infty} [3.] \mu(A_1 \setminus A) = \mu(A_1) - \mu(A)$$

Subtraktion von $\mu(A_1) < \infty$ liefert die Behaptung. □

Beispiel 1.15 $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty], \mu(A) := \#A$. Die Mengenfolge $A_n := \{n, n+1, n+2, \dots\}$ ist fallend gegen die leere Menge, aber es ist

$$0 = \mu(\emptyset) \neq \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \infty$$

Definition 1.16 (Borel-Maß) Set X ein topologischer Raum. Ein Maß auf einer Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$ heißt Borel-Maß, falls es auf Kompakta stets endlich Werte annimmt.

Beispiel 1.17 Für $X = \mathbb{R}$ ist das Dirac-Maß ein Brel-Maß, aber nicht das Zählmaß.

Definition 1.18 (Regularität) Sei X ein topologischer Raum, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Das Maß μ heißt **regulär von außen**, wenn für $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subset U, U \text{ offen}\}$$

μ heißt **regulär von innen**, wenn für $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A, K \text{kompakt}\}$$

Beispiel 1.19 Das Zählmaß mit $X = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathcal{B}$, ist regulär von inne, aber nicht von außen. Das Dirac-Maß ist regulär.

Definition (Kompaktheit) Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$. Dann nennt man A kompakt, wenn **jede** offene Überdeckung von A eine **endliche** Teilüberdeckung besitzt. Das beutet:

$$\forall I \exists I' \subset I, |I'| < \infty : A \subset \bigcup_{i \in I} A_i \implies A \subset \bigcup_{i \in I'} A_i$$

Bemerkung In einem metrischen Raum isnd die bisherigen Definitionen der Kompaktheit mit der neu eingeführten äquivalent.

Konstruktion von Maßen
Strategie:

1. Starte mit einem Prämaß λ auf einer Algebra endlichen, disjunkten Vereinigungen von Intervallen, λ = Summe der Längen
2. Dieses Prämaß kann zu einem äußeren Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ fortgesetzt werden (keine σ-Additivität)
3. Einschränkung auf Borel-σ-Algebra liefert ein Maß.

Definition 1.20 (Dynkin-System) Eine Familie $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$, X Menge, heißt Dynkin-System, falls gilt:

1. $X \in \mathcal{D}$
2. $A \in \mathcal{D} \implies A^C \in \mathcal{D}$
3. $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}, A_k \cap A_l = \emptyset \forall k, l \in \mathbb{N}, k \neq l \implies \bigcup_{k \in \mathbb{N} A_k \in \mathcal{D}}$

Bemerkung
1. Ein Dynkin-System ist abgeschlossen bezüglich Mengensubtraktion:

$$A, B \in \mathcal{D}, B \subset A \implies A \setminus B = A \cap B^C = \left(A^C \cup B\right)^C \in \mathcal{D}$$

2. Ist $S \subset \mathcal{P}(X)$, so ist

$$\mathcal{D}(S) = \bigcap\{\mathcal{D} \mid \mathcal{D} \text{ Dynkin-System}, S \subset \mathcal{D}\}$$

das von S erzeugte Dynkin-System

3. Das von S erzeugte Dynkin-System ist wohldefinieret, dass heiß, es ist eindeutig und tatsächlich ein Dynkin-System.

Lemma 1.21 Ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System und abgeschlossen bezüglich endlicher Schnitte oder alternativ bezüglich beliebiger (also nicht disjunkter) endlicher Vereinigung, so ist $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra

Beweis Übungen $\square$

Lemma 1.22 Sei S eine (nicht leere) Familie von Teilmengen einer Menge X, die abgeschlossen ist unter endlichen Schnitten sind, dann folgt $\mathcal{D}(S) = \Sigma(S)$

Beweis Nach Definition gilt $\mathcal{D} \subset \Sigma(S)$. Die andere Inklusion folgt sofort, wenn wir zeigen, dass $\mathcal{D}(S)$ σ-Algebra ist. Nach Lemma 1.21 genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{D}(S)$ abgeschlossen ist unter endlichen Schnitten. Definiere für ein beliebiges $A \in \mathcal{D}(S)$

$$D(A) := \{B \in \mathcal{D} \mid A \cap B \in \mathcal{D}\} \subset \mathcal{D}$$

wir müssen beweisen $D(A) = \mathcal{D}$ für alle $A \in \mathcal{D}$. Es gilt

1. $X \in \mathcal{D}, A \cap X = A \in \mathcal{D} \implies X \in D(A)$
2. $B \in D(A) \implies B \in \mathcal{D}, A \cap B \in \mathcal{D}$ woraus folgt
$$A \cap B^C = A \setminus (B \cap A) \in \mathcal{D} \implies B^C \in D(A)$$
3. $B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k, B_k \in D(A) \implies B_k \in \mathcal{D}, A \cap B_k \in \mathcal{D}$ woraus folgt, dass $B \in \mathcal{D}$ und
$$B \cap A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (B_k \cap A) \in \mathcal{D} \implies B \in D(A)$$

Behauptung: $A \in S \implies S \subset D(A)$, denn: $B \in S \implies A \cap B \in S \implies B \in D(A)$. Da $\mathcal{D} = D(S)$ das kleinste Dynkin-System ist, das S enthätlt folgt $\mathcal{D} \subset D(A) \implies \mathcal{D} = D(A)$. Für beliebiges $U \in S, V \in \tilde{\mathcal{D}} = D(U)$ folgt nach Definition $U \cap V \in \mathcal{D}$. Dies impliziert $U \in D(V)$, also $S \subset D(V) \forall V \in \mathcal{D}$. Wie eben ist $D(V) \subset \mathcal{D}$, also $D(V) = \mathcal{D} \forall V \in \mathcal{D}$. □

Bemerkung Lemma 1.22 lässt sich wie folgt anwenden:

1. Verifiziere eine Eigenschaft ε auf einer Menge $S \subset \mathcal{P}(X)$, die abgeschlossen ist unter endlichen Schnitten ist.
2. Zeige, dass die Menge aller Mengen, die ε erfüllen ein Dynkin-System ist.
3. Schließe, dass ε auf $\Sigma(S)$ gilt.

Satz 1.23 (Eindeutigkeit von Maßen) Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum und $S \subset \mathcal{P}(X)$ Familie von Menge, die abgeschlossen unter endlichen Schnitten und $\Sigma = \Sigma(S)$. Weiter enthalte S eine Folge aufsteigender Mengen $(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset S$ mit $X_k \nearrow X$ und $\mu(X_k) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist μ auf $\Sigma = \Sigma(S)$ durch die Werte auf S eindeutig bestimmt.

Beweis Sei $\tilde{\mu}$ ein weiteres Maß mit $\tilde{\mu} = \mu$ auf S. Dann gilt

$$\tilde{\mu}(X) = \lim_{k\to\infty} \tilde{\mu}(X_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(X_k) = \mu(X)$$

zunächst $\mu(X) < \infty$. Idee:
$$\mathcal{D} = \{A \in \Sigma \mid \tilde{\mu}(A) = \mu(A)\}$$

ist ein Dynkin-System.
$X \in \mathcal{D}$ bereits gezeigt. Für $A \in \mathcal{D}$ ist

$$\tilde{\mu}(A^C) = \tilde{\mu}(X) - \tilde{\mu}(A) = \mu(X) - \mu(A) = \mu(A^C)$$

$\implies A^C \in \mathcal{D}$. Betrachte $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}, B_k \cap B_l = \emptyset \forall k, l \in \mathbb{N}, k \neq l$ und $B_k \in \mathcal{D}$ sowie $B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$. Dann gilt

$$\tilde{\mu}(B) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \tilde{\mu}(B_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k) = \mu(B)$$

Nach Lemma 1.22 folgt also $\Sigma = \Sigma(S) = \mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D} \subset \Sigma \implies \mathcal{D} = \Sigma$.
Im allgemeinen Fall erhalten wir für $A \in \Sigma$:

$$\tilde{\mu}(A) = \lim_{k\to\infty} \tilde{\mu}(A \cap X_k) = \lim_{k\to\infty} \mu(X_k \cap A)$$

□

Definition 1.24 (Prämaß) Sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Algebra. Ein **Prämaß** auf X ist eine σ-additive Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$.

Bemerkung Man braucht nur die σ-Additivität für solche (paarweise disjunkte) Folgen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ gewährleisten, deren Vereinigung

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$$

Ein Prämaß auf einer σ-Algebra ist ein Maß.

Korollar 1.25 Sei μ ein σ-finites Prämaß auf einer Algebra $\mathcal{A}$, dann gibt es höchstens eine Fortsetzung auf $\Sigma(\mathcal{A})$.

Beweis Setze $S = \mathcal{A}$ wie im Satz 1.23. Offenbar ist abgeschlossen unter endlichen Schnitten. Da X σ-finit ist, gibt es eine Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ und $\mu(X_k) < \infty \forall k \in \mathbb{N}$. Für $A_k := \bigcup_{j=1}^k X_j$ ist $A_k \nearrow X$ und

$$\mu(A_k) \leq \sum_{j=1}^{k} \mu(X_k) < \infty$$

Nach dem Setz 1.23 ist das auf (X, Σ), so es denn existiert, eindeutig. □

Beispiel 1.26 Die Menge S, sei die Menge, die alle Intervalle $[a, b), -\infty \leq a\_eqb \leq \infty$ erzeugt dann unter endlichen Vereinigungen eine Algebra $\mathcal{A}$. Wir setzen

$$\mu(\emptyset) = 0$$
$$\mu([a, b)) = \infty$$

Dieses μ ist Prämaß auf $\mathcal{A}$. Es gibt (mindestens) zwei Fortsetzungen:

1. Zählmaß ist eine Fortsetzung
2. $\mu(A) = \infty \forall A \neq \emptyset$

Definition 1.27 (äußeres Maß) EIne Funktion $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ ist ein äußeres Maß auf X, falls für alle $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$, falls $A_1 \subset A_2$ (Monotonie)
3. $\mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(A_k)$ (σ-Subadditivität)

Satz 1.28 Sei μ^* ein äußeres Maß auf eine Menge X. Wir sagen, die Menge $A \subset X$ erfüllt die Caratheodory-Bedingung (CB) falls

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*\left(E \cap A^C\right) \forall E \subset X$$

Die Familie Σ aller Mengen, die die Caratheodory-Bedingung erfüllen bildet eine σ-Algebra und $\mu^*|_\Sigma$ ist ein Maß.

Beweis Wir zeigen zunächst, dass Σ eine Algebra ist. Offenbar $X \in \Sigma$. Abgeschlossen unter Komplementbildung ist klar. Für endliche Vereinigungen wähle $A, B \in \Sigma$. Sei $E \subset X$ beliebig.

$$\mu^*((A \cup B) \cap E) \leq \mu^*\left(A \cap B^C \cap E\right) + \mu^*\left(A^C \cap B \cap E\right) + \mu^*(A \cap B \cap E)$$

Nun wird die Caratheodory-Bedingung zweimal angewandt

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*\left(E \cap A^C\right)\\ &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*\left(E \cap A \cap B^C\right) + \mu^*\left(E \cap A^C \cap B\right) + \mu^*\left(E \cap A^C \cap B^C\right)\end{aligned}$$

Mit obiger Abschätzung erhalten wir

$$\mu^*(E) \geq \mu^*((A \cup B) \cap E) + \mu^*\left(E \cap A^C \cap B^C\right) = \mu^*((A \cup B) \cap E) + \mu^*\left((A \cup B)^C \cap E\right)$$

Die andere Richtung folgt aus der σ-Subadditivität
Sei nun also $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die A_k paarweise disjunkt sind. Nun ist für jedes $E \subset X$ und

$$\begin{aligned}B_k &= \bigcup_{j=1}^{k} A_k \in \Sigma, \qquad B_k \nearrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\\ \mu^*(B_k \cup E) &= \mu^*(B_k \cap E \cap A_k) + \mu^*\left(B_k \cap E \cap A_k^C\right)\\ &= \sum_{j=1}^{k} \mu^*(E \cap A_j)\end{aligned}$$

Also haben wir

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_k) + \mu^*\left(E \cap B_k^C\right)$$

Mit $k \to \infty$ erhält man

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\geq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*\left(E \cap A^C\right) \geq \mu^*\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (A_k \cap E) + \mu^*\left(E \cap A^C\right)\right)\\ &\geq \mu^*(E)\end{aligned}$$

Also gilt

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \Sigma$$

Damit $\mu^*|_\Sigma$ ein Maß ist, betrachte Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkt. Da Σ eine σ-Algebra ist wähle in der Caratheodory-Bedingung $E = A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$.

$$\mu^*(E) = \mu^*(A) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(A \cap A_k) + \mu^*\left(A \cap A^C\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(A_k)$$

$\mu^*(\emptyset) = 0$ gilt nach Definition des äußeren Maßes. $\square$

Bemerkung Das soeben konstruierte Maß $\mu^* |_\Sigma$ ist vollständig, jede Teilmenge einer Nullmenge ist messbar.

Beweis Sei $A \in \Sigma$, $\mu^*(A) = 0$ und $B \subset A$. Es gilt für $E = X$ in der Caratheodory-Bedingung

$$\mu^*(E \cap B) \leq \mu^*(A) + \mu^*\left(E \cap B^C\right) \leq \mu^*(E)$$

Insofern ist $B \in \Sigma$ □

Fahrplan für das Lebesgue-Maß
Für ein verallgemeinertes Intervall I der Form $(a,b), (a,b], [a,b), [a,b]$ mit $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ setzen wir $\lambda(I) := b - a \in [0,\infty]$

Lemma 1.31 Dies ergibt ein eindeutiges σ-finites Prämaß auf der Algebra $\mathcal{A}$, die aus endliches Vereinigungen disjunkter Intervalle besteßt

$$\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{k} I_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j)$$

Wir erhalten zunechst eine Fortsetzung von λ zu einem äußeren Maß λ^*, also $\lambda = \lambda^*$ auf $\mathcal{A}$, wobei jede Menge aus $\mathcal{A}$ die Caratheodory-Bedingung erfüllt. Satz 1.27 liefert eine σ-Algebra $\Lambda \supset \mathcal{A}$, sodass $\lambda := \lambda^* |_\Lambda$ ein Maß ist

Definition 1.32 Die Elemente von Λ nennt man Lebesque-messbare Mengen und λ das Lebesque-Maß.

Lemma 1.31 Sei μ ein Prämaß auf einer Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Wir setzen für $A \subset X$

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k) \mid (A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}, A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\}$$

Dies ist ein äußeres Maß mit $\mu^* = \mu$ auf $\mathcal{A}$ und jede Menge aus $\mathcal{A}$ erfüllt die Caratheodory-Bedingung.

Beweis (Caratheodory-Eigenschaft) Sei $E \subset X$ und $A \subset \mathcal{A}$. Zu zeigen:

$$\mu^*(E) = \mu^*\left(E \cap A^C\right) + \mu^*(E \cap A)$$

„$\leq$“ folgt aus Subadditivität. Noch zu zeigen: $\geq$. Wir betrachten eine beliebige Überdeckung von E durch $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, $B := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \supset E$. Dann ist zunächst auch $(B_k \cap A)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von $E \cap A$ und entsprechend $\left(B_k \cap A^C\right)_{k\in\mathbb{N}}$ von $E \cap A^C$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k \cap A) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu\left(B_k \cap A^C\right) \\ &\geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*\left(E \cap A^C\right)\end{aligned}$$

Infimum über $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \supset E$ liefert

$$\mu(E^*) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*\left(E \cap A^C\right)$$ □

Beweis (von Lemma 1.31)

- $\mathcal{A}$ ist Algebra ($\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$, das Komplement einer endlichen Vereinigung disjunkter Intervalle besitzt wieder diese Form)

- Offenbar gilt $\lambda(\emptyset) = 0$

zu zeigen (für σ-Algebra): für alle paarweise disjunkten Folgen $(I_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$

$$\lambda\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(I_k)$$

Wir bekommen

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Additivität}}}{=} \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{k} I_j\right) \overset{\substack{\text{Monotonie} \\ \uparrow}}{\leq} \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right) = \lambda(I)$$

„$\geq$“: wür wählen $\forall k \in \mathbb{N}$ ein offenes $J_k \supset I_k$ mit

$$\lambda(J_k) \leq \lambda(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \qquad \text{für ein } \varepsilon > 0$$

Sei zunächst I kompakt. Dann können wir endlich viele J_k auswählen, sodass diese I überdecken. Wir nehmen an, dass dies die ersten K Elemente sind (Umnummerierung). Es gilt

$$\lambda(I) \overset{\substack{\text{Monotonie} \\ \uparrow}}{=} \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{k} J_j\right) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Subadditivität}}}{\leq=} \sum_{j=1}^{k} \lambda(J_j) \overset{\substack{\text{aus Konstruktion} \\ \uparrow}}{\leq} \sum_{j=1}^{k} \lambda(I) + \varepsilon$$

Mit $\varepsilon \searrow 0$ folgt σ-Additivität für kompakte I. Die Behauptung folgt auch für beschränkte I (weil mit Additivität und $\lambda(\{x\}) = \lambda([x,x]) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ können wir die Endpunkte an Intervalle hinzufügen oder entfernen). Sei I ein unbeschränkts Intervall $\lambda(I) = \infty$. Zu zeigen

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) = \infty$$

Sei $\xi \in I, I \cap [\xi - x, \xi + x]$ kompakt. $\forall x \in \mathbb{R}$ und von den ersten K Elementen überdeckt. $K = K(\xi)$. Wir bekommen

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) \geq \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Konstruktion}}}{\geq} \sum_{j=1}^{k} \lambda(J_i) - \varepsilon$$

$$\geq \lambda(I \cap [\xi - x, \xi + x]) - \varepsilon \geq x - |\xi| - \varepsilon$$

$$\implies \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) \geq x - |\xi| - \varepsilon \xrightarrow{x\to\infty} \infty \qquad \square$$

1.1 Messbare Funktionen

Definition 1.32 Seien $(X, \Sigma_X), (Y, \Sigma_Y)$, $f : X \to Y$ heißt **messbar** ($\Sigma_X - \Sigma_Y$ messbar) falls

$$\forall A \in \Sigma_Y f^{-1}(A) \in \Sigma_X$$

Ist X ein topologischer Raum und Σ_X die entsprechende Borel-σ-Algebra so nennen wir eine messbare Funktion die Borel-Funktion.

Bemerkung Es genügt, Messbarkeit für ein Messsystem $S \subset \mathcal{P}(Y)$ mit $\Sigma(S) = \Sigma_Y$ zu überprüfen. In der Tat ist $f^{-1}(A) \in \Sigma_X \forall A \in S$ so folgt

$$f^{-1}(A^C) = f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A) = \left(f^{-1}(A)\right)^C \in \Sigma_x$$

weiter ist

$$f^{-1}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_k) \in \Sigma_x$$

Wir werden häufig nutzen $(Y, \Sigma) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$

Lemma 1.33 $f : (X, \Sigma) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ ist genau dann messbar, wenn

$$f^{-1}(I) \in \Sigma \forall I = \bigtimes_{j=1}^{n} (a_j, \infty), a_j \in \mathbb{R}$$

insbesondere ist f genau dann messbar, wenn jede seiner Komponenten $x \to \langle f(x), e_i \rangle, i = 1, \ldots, n$ messbar ist und eine komplexwertige Funktion ist messbar genau dann wenn Real- und Imaginärteil messbar sind.

Beweis Die σ-Algebra die von den verallgemeinerten Quadern erzeugt wird enthält die Quader der Form

$$\bigtimes_{j=1}^{n} (a_j, b_j)$$

Diese bilden eine Basis für die Topologie $\implies$ führen auf $\mathcal{B}^n$. □

Lemma 1.34 Seien $(X, \Sigma_X), (Y, \Sigma_Y), (Z, \Sigma_Z)$ Messräume. Sind $f : X \to Y, g : Y \to Z$ messbar , dann ist auch $g \circ f : X \to Z$ messbar. Sind X, Y topologische Räume, Σ_X, Σ_Y $\mathcal{B}$-σ-Algebren so ist jede stetige Funktion $f : X \to Y$ messbar.

Beweis Das Urbild offener Mengen (diese erzeugen $\mathcal{B}$-σ-Algebra Σ_Y) ist aufgrund der stetigkeit offen, also messbar. Ist $C \in \Sigma_Z$ messbar, so ist es auch $B := g^{-1}(C) \in \Sigma_y$ und $A := f^{-1}(B) \in \Sigma_x$ □

Lemma 1.35 (1.36) Sind $f, g : (X, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ messbar, so auch $f + g, f - g$.

Beweis Aus Stetigkeit von Addition und Subtraktion auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und Lemma 1.36. □

Bemerkung Für $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ist $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Borel-Funktion, wenn $f^{-1}(\{-\infty; \infty\})$ beiden Borel-Mengen sind und $f\big|_{X \setminus f^{-1}(\{\pm\infty\})}$ eine Borel-Funktion.

Lemma 1.36 (1.40) Sei (f_k) eine Folge messbarer Funktionen $\left(X, \bar{Z}\right) \to \left(\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}}\right)$. Dann sind auch

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k, \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k, \limsup_{k\to\infty} f_k, \liminf_{k\to\infty} f_k$$

messbar.

1.2 Integration

Definition 1.37 Eine messbare Funktion $f : (X, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ heißt **einfach**, wenn ihr Bild endlich ist, das heiß $\exists A_1, \dots, A_m \in \Sigma, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ mit

$$f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j}$$

wobei χ_M die charakteristische Funktion ist.

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & x \in M \\ 0 & x \notin M \end{cases}$$

Wir können fordern, dass A_j paarweise disjunkt sind, $\alpha_i \neq \alpha_j, i \neq j$ und $\bigcup A_j = X$ gilt.

$$\implies f(x) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}, \qquad f^{-1}(\{\alpha_j\}) = A_j \quad \forall j = 1, \dots, m$$

und diese Darstellung ist eindeutig.
Den Vektorraum einfacher Funktionen bezeichnen wir mit $S(X, \mu)$

Definition 1.38 (Integral auf $S(X, \mu)$) Das Integral einer nicht negativen einfachen Funktion über die Menge $A \in \Sigma$ wird durch

$$\int_A f \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j \cap A)$$

erklärt, wobei wir $0 \cdot \infty = 0$ vereinbaren.

Lemma 1.39 Das Integral hat die folgenden Eigenschaften

1. $\displaystyle\int_A f \mathrm{d}\psi = \int_X \chi_A f \mathrm{d}\mu \qquad \text{für } f \in S(X, \mu)$
2. $\displaystyle\int_{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k} f \mathrm{d}\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{B_k} f \mathrm{d}\mu \qquad B_k \text{ paarweise disjunkt, } (B_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \Sigma$
3. $\displaystyle\int_A \alpha f \mathrm{d}\mu = \alpha \int_A f \mathrm{d}\mu \qquad \text{für } \alpha \geq 0$
4. $\displaystyle\int_A (f + g) \mathrm{d}\mu = \int_A f \mathrm{d}\mu + \int_A g \mathrm{d}\mu \qquad \text{für } g \geq S(X, \mu)$
5. $\displaystyle A \subset B, B \in \Sigma \implies \int_A f \mathrm{d}\mu \leq \int_B f \mathrm{d}\mu$
6. $\displaystyle f \leq g \implies \int_A f \mathrm{d}\mu \leq \int_A g \mathrm{d}\mu, g \in S(\Sigma, \mu), g \geq 0$

Beweis 1. aus Definition

2. $\displaystyle\mu\left(A_j \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_j \cap B_k)$ (man darf die Reihe über nichtnegative Zahlen umsortieren)

3. klar

4. Für

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}$$
$$g = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \chi_{B_k}$$

gilt mit $C_{jk} = A_j \cap B_k$

$$\begin{aligned}\int_A (f+g)\mathrm{d}\mu &= \sum_{j,k} \int_{C_{jk}} (f+g)\mathrm{d}\mu = \sum_{j,k} (\alpha_j + \beta_k)\mu(C_{jk}) \\ &= \sum_{j,k} \alpha_j \mu(C_{jk}) + \sum_{j,k} \beta_k \mu(C_{jk}) = \int_A f\mathrm{d}\mu + \int_A g\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

5. Aus Monotonie von μ

6. Wie in 4. mit

$$\int_A f\mathrm{d}\mu = \sum_{j,k} \alpha_j \mu(C_{jk}) \leq \sum_{j,k} \beta_k \mu(C_{jk}) = \int_A g\mathrm{d}\mu$$

□

Definition 1.40 (Integral von nichtnegativen Funktionen) Sei (X, Σ, μ) Maßraum, $A \in \Sigma$, $f : (X, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ messbar und nichtnegtiv. Dann ist

$$\int_A f\mathrm{d}\mu := \sup\{\int_a g\mathrm{d}\mu \mid g \in S(X, \mu), g \leq f, g \geq 0\}$$

Bemerkung Bis auf 2. und 4. übertragen sich die Eigenschaften des Integrals über einfache Funktionen.

Satz 1.41 (Monotone Konvergenz / Beppo Levi) Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer nichtnegativer Funktionen

$$f_k : (X, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \quad \text{mit} \quad f_k \nearrow f$$

($f_k \nearrow f \implies f_k \xrightarrow{k \to \infty} f$ punktweise und (implizit aus Nichtnegativität) $\sum_{k=1}^{n} f_k$ monoton)
Dann ist für $A \in \Sigma$

$$\int_A f_k \mathrm{d}\mu \to \int_A f\mathrm{d}\mu$$

Beweis f messbar, damit erhält man die Monotonie von

$$\int_A f_k \mathrm{d}\mu$$

und hieraus Konvergenz gegen $\varphi \in [0, \infty]$. Aus $f_k \leq f$ und Monotonie den Integral:

$$\varphi \leq \int_A f\mathrm{d}\mu$$

Für „$\geq$“ nehmen wir $g \in S(X, \mu), g \geq 0, g \leq f$ mit

$$A_k := \{x \in A \mid f_k(x) \geq \theta \cdot g(x)\}$$

für ein festes $\theta \in (0,1)$ und hierraus

$$\begin{aligned}\varphi \xleftarrow{k\to\infty} \int_A f_k \mathrm{d}\mu \geq \int_{A_k} f_k \mathrm{d}\mu \geq \int_A \theta g \mathrm{d}\mu \\ \geq \theta \int_{A_k} g\mathrm{d}\mu \to \theta \int_A g\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Insbesondere gilt für $\theta = 1$

$$\begin{aligned}&\implies \varphi \geq \int_A g\mathrm{d}\mu \\ &\implies \varphi = \int_A f\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

□

Bemerkung $\forall f \geq 0$, mit einer monoton steigenden Folge nicht negativer einfacher Funktionen $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}, g_k \nearrow f$ ist

$$\int_A g_k \mathrm{d}\mu \nearrow \int_A f\mathrm{d}\mu$$

Eine geeignete Funktion ist

$$g_k(x) := \sum_{j=0}^{k2^k} \frac{j}{2^k} \chi_{f^{-1}(A_j)}(x)$$

mit

$$A_j = \{[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}) \mid j = 0, \dots, k2^k - 1\}$$

Ist f gleichmäßig beschränkt $\implies$ $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäcßig (denn $0 \leq f - g_k \leq \frac{1}{2^k}$ für k groß genug) Mit Satz von Beppo Levi erhält man somit

2. $\displaystyle\int_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k} f\mathrm{d}\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{B_k} f\mathrm{d}\mu \qquad B_k$ paarweise disjunkt, $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \Sigma$

4. $\displaystyle\int_A (f+g)\mathrm{d}\mu = \int_A f\mathrm{d}\mu + \int_A g\mathrm{d}\mu \qquad$ für $g \geq S(X,\mu)$

Lemma 1.42 Ist $f \geq 0$ messbar, so wird durch

$$\nu(A) := \int f\mathrm{d}\mu$$

ein Maß mit

$$\int d\mathrm{d}\nu = \int gf\mathrm{d}\mu$$

für jedes messbare $g \geq 0$ definiert (Bezeichnung: $\mathrm{d}\nu = f\mathrm{d}\mu$)

Beweis

$$\begin{aligned}\nu(\emptyset) &= \int_\emptyset f\mathrm{d}\mu = \int \chi_\emptyset f\mathrm{d}\mu = 0 \cdot \int f\mathrm{d}\mu = 0 \\ \nu(A \cup B) &= \int_{A\cup B} f\mathrm{d}\mu = \int_A f\mathrm{d}\mu + \int_B \mathrm{d}\mu = \nu(A) + \nu(B) \quad \text{für } A \cap B = \emptyset\end{aligned}$$

Für abzählbare Vereinigungen äquivalent

$$\nu\left(\dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} A_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu(A_k)$$

Ist g einfach und ≥ 0

$$\implies g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_j \chi_{B_j}$$

für disjunkte $B_j \in \Sigma, \bigcup B_j = X, \alpha_j \geq 0$

$$\begin{aligned} \int g\mathrm{d}\nu &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \nu(A_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \int_{B_j} f\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} \int \alpha_j f \chi_{B_j} \mathrm{d}\mu \\ &= \int \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(\alpha_j \chi_{B_j})}_{=g} f\mathrm{d}\mu = \int gf\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

Appoximation liefert die Behauptung für beliebigte $g \geq 0$. $\square$

Satz 1.43 (Fatou Lemma) Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum. Ist f_k eine Folge nicht-negativer Funktionen $(X, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ so gilt $\forall A \in \Sigma$

$$\int_A \liminf_{k\to\infty} f_k \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_A f_k \mathrm{d}\mu$$

Beweis Wir setzen $g_k := \inf_{j\geq k} f_j$, also

$$g_k \nearrow \liminf_{j\to\infty} f_j$$

Weiterhin $g_k \leq f_k \forall k \in \mathbb{N}$

$$\implies \int_A g_k \mathrm{d}\mu \leq \int_A f_k \mathrm{d}\mu$$

Übergang zum $\liminf$

$$\begin{aligned} \implies \liminf \int g_k \mathrm{d}\mu &= \lim_{k\to\infty} \int g_k \mathrm{d}\mu = \int_A \lim_{k\to\infty} g_k \mathrm{d}\mu \\ &= \int_A \liminf_{k\to\infty} f_k \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$ $\square$

Bemerkung Im Allgemeinen können wir keine Gleichheit erwarten. Zum Beispiel ist für $f_x := \chi_{(k,k+1)}, k \in \mathbb{N}$ einerseits $f_k(x) \to 0$ punktweise, andererseits

$$\int_{\mathbb{R}} f_k \mathrm{d}x = 1, f_k = k\chi_{(0,\frac{1}{k})} \text{ und } f_k = \frac{1}{k}\chi_{(0,k)}$$

Definition 1.44 Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum, $A \in \Sigma$ und $f : (X, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ messbar. Ist

$$\int_A f^{\pm} \mathrm{d}\mu < \infty$$

so nennen wir f integrierbar über A und wir setzen

$$\int Af\mathrm{d}\mu = \int_A f^+ \mathrm{d}\mu - \int_A f^- \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$$

Die Menge der über A integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^1(A, \mu)$

Lemma 1.45 Unter den Bedingungen der Defininiton ist das Integral linear und es erfüllt sämtlich Eigenschaften von Lemma 1.39. Eine Funktion ist genau dann integrierbar, wenn ihr Betrag integrierbar ist. Darüber hinaus gilt für integrierbare Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}$

$$\left|\int_A f \mathrm{d}\mu\right| \leq \int_A |f| \mathrm{d}\mu \quad \text{und} \quad \int_A |f+g| \mathrm{d}\mu \leq \int_A |f| \mathrm{d}\mu + \int_A |g| \mathrm{d}\mu$$

Beweis Die Linearität und die Eigenschaften aus dem Lemma 1.39 wird dem geneigten Leser überlassen. Setze $\varphi := \int_A f \mathrm{d}\mu$, dann ist

$$|\varphi| = (\operatorname{sgn}\varphi)\varphi = \int_A (\operatorname{sgn}\varphi) f \mathrm{d}\mu \leq \int_A |f| \mathrm{d}\mu$$

Die Dreiecksungleichung folgt aus $|f+g| \leq |f| + |g|$ und der Linearität des Integrals. □

Lemma 1.46 Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum, $f : X \to \mathbb{R}$ messbar.

1. $\int_X |f| \mathrm{d}\mu = 0 \iff f(x) = 0$ für μ-fast alle $x \in X$
2. Ist f außerdem integrierbar oder nicht negativ und $A \in \Sigma$ so gilt

$$\mu(A) = 0 \implies \int_A f \mathrm{d}\mu = 0$$

Beweis Übungen. □

Lemma 1.47 Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum, $A \in \Sigma$, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus messbaren Funktionen mit $f_k : X \to \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{N}$ und $g : X \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann gilt

$$\int_A \liminf_{k\to\infty} f_k \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\in\infty} \int_A f_k \mathrm{d}\mu \quad \text{falls } g \leq f_k \forall k \in \mathbb{N}$$
$$\limsup_{k\to\infty} f_k \mathrm{d}\mu \leq \int_A \limsup_{k\in\infty} f_k \mathrm{d}\mu \quad \text{falls } f_k \leq g \forall k \in \mathbb{N}$$

Beweis Man wende für die erste Ungleichung das Fatou-Lemma auf $f_k - g$ an und subtrahiere $\int_A g \mathrm{d}\mu$ auf beiden Seiten. Die zweite Ungleichung folgt mit $\liminf(-f_k) = -\limsup f_k$. □

Satz 1.48 (Satz von der dominierten Konvergenz) Sie (X, Σ, μ) ein Maßraum, $A \in \Sigma$, (f_k) ein Folge messbarer Funktionen von X nach $\mathbb{R}$, die punktweise fast überall gegen ein $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiere. (Punktweise fast überall bedeutet: $f_k(x) \to f(x)$ für μ-fast alle von X). Gibt es eine Majorante, dah heißt eine integrierbare Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ mit $\sup_{k\in\mathbb{N}} |f_k| \leq g$ so ist auch f integrierbar und wir erhalten

$$\int_A f_k \mathrm{d}\mu \xrightarrow{k\to\infty} \int_A f \mathrm{d}\mu$$

Beweis Nach Vorraussetzung ist $-g \leq f_k \leq g$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und folglich erhalten wir mit dem erweiterten Fatou-Lemma

$$\int_A f = \int A \liminf_{k\to\infty} f_k \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_a f_k \mathrm{d}\mu \leq \limsup_{k\to\infty} \int_A f_k \leq \int_A \limsup_{k\to\infty} f_k \mathrm{d}\mu = \int_A f \mathrm{d}\mu$$ □

Bemerkung Für stetige und Lebesgue-integrierbare Funktionen auf reellen Intervallen stimmen Riemann- und Lebesgue-Integrierbarkeit überein. Ist f stetig auf einem kompakten Intervall, so ist f beschränkt und messbar, also Lebesgue-Integrierbar.
Allgemeiner ist jede beschränkte, messbare Funktion auf einem kompakten Intervall genau dann Riemann-integrierar, wenn die Menge ihrer Unstetigkeiten eine Lebesgue-Nullmenge ist. In diesem Fall stimmen die beiden Integralbegriffe überein. Diese Aussage gilt nicht für verallgemeinerte Intervalle.

Beispiel 1.49

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$$

existiert als Riemann-Integral

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$$

andererseits

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\mathrm{d}x = \infty$$

also keine Lebesgue-Integrierbarkeit.

1.3 Produktmaße

Notation: Für Messräume $(X_1, \Sigma_1), (X_2, \Sigma_2)$ bezeichnen wir die σ-Algebra, die alle „Rechtecke“ der $A_1 \times A_2$ mit $A_1 \in \Sigma_1, A_2 \in \Sigma_2$ enthält mit $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$.

Lemma 1.50 Für Messräume $(X_1, \Sigma_1), (X_1, \Sigma_2)$ und $A \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ liegen die Schnitte

$$\begin{aligned} A_1(x_2) &:= \{x_1 \in X_1 \mid (x_1, x_2) \in A\} \\ A_2(x_1) &:= \{x_2 \in X_2 \mid (x_1, x_2) \in A\} \end{aligned}$$

in Σ_1 beziehungsweise Σ_2

Beweis Setze $S := \{A \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \mid A_1(x_2) \in \Sigma_1\}$. Natürlich gilt $A_1 \times A_2 \in S$ für alle $A_1 \in \Sigma_1, A_2 \in \Sigma_2$. Isofern genügt es zu zeigen, dass S eine σ-Algebra bildet. In der Tat ist $X_1 \times X_2 \in S$ und für $A \in S$ ist

$$\left(A^C\right)_1(x_2) = \{x_1 \in X_1 \mid (x_1, x_2) \in A^C\} = \{x_1 \in X_1 \mid (x_1, x_2) \in A\}^C = (A_1(x_2))^C \in \Sigma_1$$

Für $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset S$ haben wir

$$\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)_1 (x_2) = \{x_1 \in X_1 \mid (x_1, x_2) \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{x_1 \in X_1 \mid (x_1, x_2) \in A_k\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_k)_1(x_2) \in \Sigma_1$$

Für $A_2(x_1)$ argumentiert man analog. □

Korollar 1.51 Seien $(X_1, \Sigma_2), (X_2, \Sigma_2)$ Messräume und sei $f : (X_1 \times X_2, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ messbar. Dann ist auch $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ für jedes $x_2 \in X_2$ auf X_1 messbar und entsprechend $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ für jedes $x_1 \in X_1$ auf X_2

Beweis Für $B \in \mathcal{B}$ und $x_2 \in X_2$ ist $f^{-1}(\cdot, x_2)(B) \in \Sigma_1$, denn für $A = f^{-1}(B), A \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ ist

$$f^{-1}(\cdot, x_2)(B) = \{x_1 \in X_1 \mid f(x_1, x_2) \in B\} = \{x_1 \in X_1 \mid (x_1, x_2) \in A\} = A_1(x_2)$$ □

Ziel: Definition Produktmaß $\mu_1 \otimes \mu_2$ auf $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ mit

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \forall A_1 \in \Sigma_1, A_2 \in \Sigma_2$$

Satz 1.52 Sind $(X_1, \Sigma_1, \mu_1), (X_2, \Sigma_2, \mu_2)$ Maßräume mit σ-finiten Maßen und $A \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$. Dann sind die Abbildungen

$$x_1 \mapsto \mu_2(A_2(x_1))$$
$$x_2 \mapsto \mu_2(A_1(x_2))$$

messbar und

$$\int_{X_1} \mu_2(A_2(x_1)) \mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \mu_1(A_1(x_2)) \mathrm{d}\mu_2(x_2)$$

Beweis ohne Beweis □

Definition 1.53 Seien $(X_1, \Sigma_1, \mu_1), (X_2, \Sigma_2, \mu_2)$ Maßräume mit σ-finiten Maßen, für $A \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ setzen wir

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) := \int_{X_1} \underbrace{\mu_2(A_2(x_1)) \mathrm{d}\mu_1(x_1)}_{\int_{X_2} \chi_A(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_2(x_2)} = \int_{X_2} \underbrace{\mu_1(A_1(x_2)) \mathrm{d}\mu_2(x_2)}_{\int_{X_1} \chi_A(x_1, x_2) \mathrm{d}\mu_1(x_1)}$$

Beweis

$$\chi_{A_1(x_2)}(x_1) = \chi_A(x_1, x_2) = \chi_{A_2(x_1)}(x_2)$$ □

Lemma 1.54 Das Produktmaß ist für σ-finite Maße ebenfalls ein Maß und es ist eindeutig bezüglich

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \forall A_1 \in \Sigma_1, A_2 \in \Sigma_2$$

Beweis
- Eindeutigkeit aus Satz 1.23
- $(\mu_1 \otimes \mu_2)(\emptyset) = 0$ klar
- σ-Additivität folgt aus dem Satz über monotone Konvergenz

$$\begin{aligned}
(\mu_1 \otimes \mu_2)\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{\tau}} A_k\right) &:= \int_{X_1} \mu_2\left(\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{\tau}}\right)_2 (x_1)\right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\
&= \int_{X_1} \mu_2\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{\tau}} (A_k)_2(x_1)\right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\
&= \int_{X_1} \sum_{k=1}^{\tau} \mu_2((A_k)_2(x_1)) \mathrm{d}\mu_1(x_1) = \sum_{k=1}^{\tau} (\mu_1 \otimes \mu_2)(A_k)
\end{aligned}$$ □

Satz 1.55 (Fubini) Seien $(X_1, \Sigma_1, \mu_1), (X_2, \Sigma_2, \mu_2)$ Maßräume mit σ-finiten Maßen und $f : (X_1 \times X_2, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ messbar.

1. (Tonelli) Ist f nicht-negativ, so sind

$$\begin{aligned} &\int_{X_2} f(\cdot, x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2) \\ \text{und } &\int_{X_1} f(x_1, \cdot)\mathrm{d}\mu_1(x_1) \end{aligned}$$

als Funktion auf X_1 beziehungsweise X_2 messbar und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\ &= \int_{X_1} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2)\mathrm{d}\mu_1(x_1) \right) \mathrm{d}\mu_2(x_2) \end{aligned}$$

2. Allgemein ist $f \in \mathcal{L}(X_1 \times X_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} &\int_{X_1} |f(x_1, \cdot)|\mathrm{d}\mu_1(x_1) \in \mathcal{L}(X_2, \mu_2) \\ &\int_{X_2} |f(\cdot, x_2)|\mathrm{d}\mu_2(x_2) \in \mathcal{L}(X_1, \mu_1) \end{aligned}$$

und 1. gilt.

Beweis Aufgrund deer Linearität bekommen wir für eine einfach Funktion

$$f = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j}, \alpha_j \geq 0, A_j \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, A_i \cap A_j = \emptyset, X = \bigcup_{j=1}^{k} A_j$$

$$\int_{X_2} f(\cdot, x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu_2\big((A_j)_2(\cdot)\big)$$

Weiterhin,

$$\begin{aligned} \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \int_{X_1 \times X_2} \chi_{A_j}(x_1, x_2)\mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \int_{X_1} \left(\int_{X_2} \chi_{A_j}(x_1, x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\ &= \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1) \\ \text{analog: } &= \int_{X_2} \int_{X_1} \dots \end{aligned}$$

Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset S(X_1 \times X_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ mit $0 \leq f_k \nearrow f$.

$$\begin{aligned} &\implies \int_{X_2} f_k(\cdot, x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2) \leq \int_{X_2} f(\cdot, x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2) \forall k \in \mathbb{N} \\ &\text{und } \lim_{k \to \infty} \int_{X_2} f_k(\cdot, x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Beppo-Levi}}}{=} \int_{X_2} f(\cdot, x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2) \end{aligned}$$

Wir erhalten auch

$$\lim_{k\to\infty}\int_{X_1}\int_{X_2} f_k(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2)\mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_1}\int_{X_2} f(x_1,x_2)\mathrm{d}\mu_2(x_2)\mathrm{d}\mu_1(x_1)$$

Genauso mit 1 und 2 vertauscht, auch

$$\lim_{k\to\infty}\int_{X_1\times X_2} f_k(x_1,x_2)\mathrm{d}(\mu_1\otimes\mu_2)(x_1,x_2) = \int_{X_1\times X_2} f(x_1,x_2)\mathrm{d}(\mu_1\otimes\mu_2)(x_1,x_2)$$

Man erhält 2. aus 1. mit $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$.

$$f\in\mathcal{L}^1(X_1\times X_2) \iff \int_{X_1\times X_2} |f|\mathrm{d}(\mu_1\otimes\mu_2)(x_1,x_2) < \infty$$

□

Beispiel 1.56

$$X = \mathbb{R}^2, \Sigma = \mathcal{B}^2, f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$$

Wir betrachten das Riemann-Integral

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Dazu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{(x+y)^2}\right) = \frac{1}{(x+y)^2} - 2\frac{x}{(x+y)^3} = \frac{x-y}{(x+y)^3}$$

$$\implies \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{(1+y)^2}\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}$$

aber

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

Wäre $f\in\mathcal{L}^1\left([0,1]^2\right)$, so folge aus Satz von Fubini die Integrierbarkeit

$$\int_{(0,1)} f(x_1,\cdot)\mathrm{d}\lambda(x_1), \int_{(0,1)} f(\cdot,x_2)\mathrm{d}\lambda(x_2)$$

f auf $(0,1)\times(0,1)$ stetig ist, erhalten wir Übereinstimmung von $\mathcal{L}$-Integral und Riemann-Integral und

$$\int_{X_2}\int_{X^1} f\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \int_{X_1}\int_{X_2} f\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1`$$

Lemma 1.57 Seien $(X_1,\Sigma_1),(X_2,\Sigma_2)$ Messräume und $S_1\subset\Sigma_1, S_2\subset\Sigma_2$ mit $\Sigma_{X_1}(S_1)=\Sigma_1, \Sigma_{X_2}(S_2)=\Sigma_2$. Dann gilt

$$\Sigma_1\otimes\Sigma_2 = \Sigma_{X_1\times X_2}(S_1\times S_2) =: \Sigma$$

wobei

$$S_1\times S_2 = \{A_1\times A_2 \mid A_1\in S_1, A_2\in S_2\}$$

Lemma 1.58 Gegeben sind $(X_j,\Sigma_j,\mu_j), j=1,2,3$ mit σ-finiten Maßen. Dann gilt

$$(\Sigma_1\otimes\Sigma_2)\otimes\Sigma_3 = \Sigma_1\otimes(\Sigma_2\otimes\Sigma_3)$$
$$\text{und } (\mu_1\otimes\mu_2)\otimes\mu_3 = \mu_1\otimes(\mu_2\otimes\mu_3)$$

Lemma 1.59 (Lebesgue-Maß) Das durch $\lambda^n := \lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_n$ definierte Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$ besitzt die Eigenschaften.

1. Durch die Werte auf der Menge I
$$I = \bigtimes_{j=1}^{n} I_j$$
wobei I_j Intervalle sind, ist es eindeutig definiert.

2. $\forall B \in \mathcal{B}^n$ gilt
$$\lambda^n(B) = \inf\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda^n(A_k) \mid (A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset I, B \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\}$$

3. λ^n ist translationsinvariant und bis auf Normierung das einzige Borelmaß mit diesen Eigenschaften:

Bemerkung Produktmaß zweier vollständiger Maße ist im Allgemeinen nicht vollständig.
A-nichtmessbar in $\mathbb{R}$, 1-Nullmenge in $\mathbb{R}$
$A \times \{1\}$ ist eine Teilmenge der Nullmenge $\mathbb{R} \times \{1\}$

Beispiel 1.60 (Cantormenge) Wir behalten $I_0 = [0,1]$. Wir entfernen aus I_0 das mittleren offene Intervall $J_{1,1} = (1/3, 2/3)$. Wir bekommen $I_{1,2} = [0, 1/3], I_{1,2} = [2/3, 1]$. Dann entfernen wir $(1/9, 2/9)$ und $(7/9, 8/9)$, usw. Induktiv erhalten wir die kompakte Intervalle $I_{n,k}$ $n \in \mathbb{N}, k = 1, \ldots, 2^n$. Wir definieren

$$C_0 := I_0, C_n := \bigcup_{k=1}^{2^n} I_k, C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

C heißt **Cantormenge**. Es gilt

1. $C \subset [0,1]$ ist kompakt (und damit Borelmenge)
2. $\lambda^n(C) = 0$
3. C ist gleichmächtig mit $\mathbb{R}$ (insbesondere überabzählbar)

Beweis 1. C ist offenbar beschränkt und abgeschlossen (als Vereinigung abgeschlossener Mengen) $\implies C$ kompakt

2. C_n ist die Vereinigung von 2^n disjunkten Intervallen der Länge 3^{-n}
$$\implies \lambda^n(C_n) = 2^n e^{-m} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$
Aus der Monotonie des Lebesguemaßen
$$\implies \lambda^n(C) \leq \lim_{n\to\infty} \lambda^n(C_n) = 0$$
□

Korollar 1.61 Sei $n \geq 1$. Dann gibt es überabzählbare λ^n-Nullmengen in $\mathbb{R}^n$

Beweis Für $n > 1$ zeigt man leicht, dass die Menge $\{0\} \times R^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ eine überabzählbare Nullmenge ist.
Für $n = 1 \to$ Cantormenge $C \subset \mathbb{R}$ □

Bemerkung Das Lebesgque-Maß λ^n ist vollständig.

1.4 Transformation

Lemma 1.62 (Bildmaß) Sei $(X, \Sigma_X), (Y, \Sigma_Y)$ Messräume, $f : X \to Y$ messbar. Ist μ ein Maß auf (X, Σ_X) so wird durch

$$(f * \mu)(B) := \mu\big(f^{-1}(B)\big), B \in \Sigma_Y, f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

ein Maß auf Y definiert (Bildmaß von μ bezüglich f). Es gilt $(f * \mu)(B) = 0 \forall B \in \Sigma_Y$ mit $B \cap f(X) = \emptyset$

Beweis Es gilt $(f * \mu)(\emptyset) = \mu\big(f^{-1}(\emptyset)\big) = 0$, da $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und

$$(f * \mu)\left(\dot{\bigcup_{k \in \mathbb{N}}} B_k\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\dot{\bigcup_{k \in \mathbb{N}}} B_k\right)\right)$$

für $(B_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \Sigma_Y$, paarweise disjunkt $\implies$ $f^{-1}(B_k) =: A_k$ ebenfalls eine Folge paarweise disjunkter Mengen und

$$(f * \mu)\left(\dot{\bigcup_{k \in \mathbb{N}}} B_k\right) = \mu\left(\dot{\bigcup_{k \in \mathbb{N}}} f^{-1}(B_k)\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu\big(f^{-1}(B_k)\big) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (f * \mu)(B_k)$$

Ist $B \in \Sigma_Y$ mit $B \cap f(X) = \emptyset$

$$\implies (f * \mu)(B) = \mu\big(f^{-1}(B)\big) = \mu(\emptyset) = 0$$

□

Satz 1.63 Sei (X, Σ, μ) ein Maßraum, Y topologischer Raum. $f : (X, \Sigma) \to (Y, \mathcal{B}(Y)), g : (Y, \mathcal{B}(Y)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar. $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ genau dann μ-fast überall nicht negativ oder integrierbar, wenn das auf g bezüglich $f * \mu$ zutrifft und in diesem Fall gilt:

$$\int_Y g \mathrm{d}(f * \mu) = \int_X (g \circ f) \mathrm{d}\mu$$

Beweis Für $A := \{x \in X \mid (g \circ f) > 0\}$ und $B = \{y \in Y \mid g(y) > 0\}$ gilt

$$(f * \mu)(B) = \mu\big(f^{-1}(B)\big) = \mu(\{x \in X \mid f(x) \in B\}) = \mu(A)$$

Also $(f * \mu)\big(B^C\big) = \mu\big(A^C\big)$. Für das Integral nehmen wir zuerst einfache Funktion

$$g = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{B_j}, \alpha_j \geq 0, B_j \in \mathcal{B}(Y), B_i \cap B_j = \emptyset \forall i \neq j, Y = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$$

$$\begin{aligned}
\chi_{B_j} \circ f &= \chi_{f^{-1}(B_j)} \\
\implies \int_Y g \mathrm{d}(f * \mu) &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \int_Y \chi_{B_j} \mathrm{d}(f * \mu) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu\big(f^{-1}(B_j)\big) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \int_X \chi_{f^{-1}(B_j)} \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \int_X \chi_{B_j} \circ f \mathrm{d}\mu \int_X (g \circ f) \mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

Sei g eine messbare nichtnegative Funktion. Wir konstruieren Folge nicht genativer Funktionen $(g_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(Y, f * \mu)$ mit $g_k \nearrow g$. Dann ist auch $g \circ f$ eine Folge nichtnegativer Funktionen mit $g_k \circ f \nearrow g \circ f$. Satz von Beppo-Levi liefert

$$\int_X g_k \circ f \mathrm{d}\mu \circ f \mathrm{d}\mu \nearrow \int_X g \circ f \mathrm{d}\mu$$

$$\int_Y g_k \mathrm{d}(f * \mu) \nearrow \int_Y g \mathrm{d}(f * \mu)$$

Mit $g = g^+ - g^-$ folgt der allgemeine Fall.

□

Bemerkung 1. Verkettung von Bildmaßen $f : X \to Y, g : Y \to Z$

$$\begin{aligned}(g \circ f) * \mu(C) &= \mu\Big((g \circ f)^{-1}\Big)(C) = \mu\big((f^{-1} \circ g^{-1})(C)\big) \\ &= \mu\big(f^{-1}\big(g^{-1}(C)\big)\big) = f * \mu\big(g^{-1}(C)\big) = g * f * \mu(C)\end{aligned}$$

2. Sei $f : X \to Mx + b \in \mathbb{R}^{n \times m}$ invertierbar. Für $b \in \mathbb{R}$ gilt

$$f * \lambda^n = \frac{1}{|\det M|} \lambda^n$$

Zunächst $f * \lambda^n$ ist translationsinvariant und damit ist $f * \lambda^n$ ein Vielfaches von λ^n. Weiter nutzt man, dass da M invertierbar $\exists V_1, V_2 \in O(n)$, D Diagonalmatrix sodass $M = V_1 D V_2$. Jede invertierbare Matirx M kann man als Produkt $U_1 D U_2$ mit $U_1, U_2 \in \mathcal{O}(n)$ und D diagonal schreiben. (M invertierbar $\implies$ $M^T M$ symmetrisch, positiv definit $\implies$ $\exists U \in \mathcal{O}(n), D$ diagonal mit positiven Einträgen $M^T M = U^T D^2 U$). Setze $U_1 := M U^T D^{-1}, U_2 := U \in \mathcal{O}(n)$

$$\implies U_1^T U_1 = \left(D^{-1}\right)^T U M^T M U^T D^{-1} = D^{-1} D^2 D^{-1} = \mathbb{1}$$

$\implies U_1 \in \mathcal{O}(n)$ und $U_1 D U_2 = M U^T D^{-1} D U = M$

3.

$$\begin{aligned}\int_A g \underbrace{(Mx + b)}_{=:f} \mathrm{d}\lambda^n &= \int_A (g \circ f) \mathrm{d}\lambda^n = \int_{MA+b} g \circ f_x \mathrm{d}\lambda^n \\ &= \frac{1}{|\det M|} \int_{MA+b} g \mathrm{d}\lambda^n\end{aligned}$$

Satz 1.64 (Transformationssatz) Seien $U, V \subset \mathbb{R}$ und $f \in C^1(U, V)$, f : Diffeomorphismus. Dann gilt

$$f^{-1} * \lambda^n = |Jf| \lambda^n, Jf = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Jacobi Matrix}}}{\det (J) f}$$

Es gilt

$$\int_U (g \circ f) |Jf| \mathrm{d}\lambda^n = \int_V g \mathrm{d}\lambda^n$$

$\forall$ nichtnegative Funktionen $g : V \to \mathbb{R}$

Beweis zu zeigen:

$$\int_U (g \circ f) |Jf| \mathrm{d}\lambda^n = \int_V g \mathrm{d}\lambda^n$$

Vorraussetzung: f ist **Diffeomorphismus**:

$$f \in C^1(U, V), f^{-1} \in C^1(V, U)$$

(also auch f bijektiv)
Schritt 1: Wir betrachten $g = 1$ und offene Quader $R \subset U$. Zu zeigen:

$$\int_R |Jf| f \mathrm{d}\lambda^n = \int_{f(R)} \mathrm{d}\lambda^n = \lambda^n(f(R))$$

Wir setzen

$$\varphi = \frac{\chi_{B_1}(0)}{\lambda^n(B_1(0))}$$

und damit

$$\varphi_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-n}\varphi\Big(\frac{y}{n}\Big)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y)\mathrm{d}\lambda^n(y) = 1$$

nach Translationsinvarianz, mit $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix}$. Wir definieren

$$\begin{aligned} I_\varepsilon := &\int_{f(R)} \big|Jf\big(f^{-1}y\big)\big| \underbrace{\int_R \varphi_\varepsilon(f(z)-y)\mathrm{d}\lambda^n z}_{h_\varepsilon(y)} \,\mathrm{d}\lambda^n y \\ = &\int_{f(R)} \big|Jf\big(f^{-1}(y)\big)\big| h_\varepsilon(y)\mathrm{d}\lambda^n y \end{aligned}$$

Für $\varepsilon < \varepsilon_0$ ist $h_\varepsilon \neq 0$ nur für $z \in K := f^{-1}\Big(\overline{B_\varepsilon(y)}\Big)$ kompakt. Setze $x := f^{-1}(y) \in K$, dann erhalten wir mit Transformation $z \to x + \varepsilon z$ und $W_\varepsilon(x) := \{\frac{1}{\varepsilon}(y-x) \mid y \in K\}$

$$\begin{aligned} \implies h_\varepsilon(y) &= \int_K \varphi_\varepsilon(f(z)-y)\mathrm{d}\lambda^n(z) = \varepsilon^{-n}\int_K \varphi\Big(\frac{f(z)-y}{\varepsilon}\Big)\mathrm{d}\lambda^n(z) \\ &= \int_{W_\varepsilon(x)} \varphi\Big(\frac{f(x+\varepsilon z)-f(x)}{\varepsilon}\Big) \\ \text{wegen} \quad &\Big|\frac{f(x+\varepsilon z)-f(x)}{\varepsilon}\Big| \geq \frac{|z|}{c} \quad \text{für} \quad c := \sup_K \big|D\big(f^{-1}\big)\big| \end{aligned}$$

$x+\varepsilon z \in U$ ist der Integrand nur für $B_C(0)$ von Null verschieden. Mit $\varepsilon \searrow 0$ wird das Gebiet $B_C(0)$ überdecken

$$\begin{aligned} \implies \lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon(y) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_C(0)} \varphi\Big(\frac{f(x+\varepsilon z)-f(x)}{\varepsilon}\Big)\mathrm{d}\lambda^n(z) \\ &= \int_{B_C(0)} \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi\Big(\frac{f(x+\varepsilon z)-f(x)}{\varepsilon}\Big)\mathrm{d}\lambda^n(z) \\ \frac{f(x+\varepsilon z)-f(x)}{\varepsilon} &\to Df(x)z \implies \varphi\Big(\frac{f(x+\varepsilon z)-f(x)}{\varepsilon}\Big) \to \varphi(Df(x)z) \end{aligned}$$

$\forall z \in B_C(0)$ mit $|Df(x)z| \neq 1$ (wegen Unstetigkeit von φ).
Da $\{z \in \mathbb{R}^n \mid |Df(x)z| = 1\}$ eine Nullmenge ist, gilt die Konvergenz fast überall.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \int_{f(R)} 1\mathrm{d}\lambda^n = \lambda^n(f(R))$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{f(R)} Jf\big(f^{-1}(y)\big)\right|\varphi_\varepsilon(f(z)-y)\mathrm{d}\lambda^n(z)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_\varepsilon(F(z))}\big(\big|Jf\big(f^{-1}(y)\big)\big| - \big|Jf\big(f^{-1}(f(z))\big)\big| + \big|J_f f^{-1}(f(z))\big|\big)\varphi_\varepsilon(f(z)-y)\mathrm{d}\lambda^n(z)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\big|Jf\big(f^{-1}(f(z))\big)\big| + \int_{B_\varepsilon(f(z))}\big|Jf\big(f^{-1}(y)\big)\big| - \big|Jf\big(f^{-1}(f(z))\big)\big|\right)\varphi_\varepsilon(f(z)-y)\mathrm{d}\lambda^n y$$
$$\big|Jf\big(f^{-1}(y)\big)\big| - \big|Jf\big(f^{-1}(f(z))\big)\big| \le \sup_{\eta\in B_\varepsilon(f(x))}\big|Jf\big(f^{-1}(n)\big)\big| - \big|Jf\big(f^{-1}(f(z))\big)\big|$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \int_R |Jf(z)|\mathrm{d}\lambda^n(z)$$

Schritt 2: Für $B\in\mathcal{B}(U), \mu(B) = \int_B |Jf|\mathrm{d}\lambda^n$ definiert ein neues Maß.

$$\implies \mu(\cdot) = \lambda^n(f(\cdot)) = \big(f^{-1}\big)*(\lambda^n) \text{ auf } B(U)$$

Dann gilt Transformationssatz für $g = \chi_B, B\in\mathcal{B}(U) \implies$ Für einfache Funktionen $\implies$ nichtnegative messbare Funktionen $\implies g = g^+ - g^-$ □

$f^{-1}\in C^1$

$$|x+\varepsilon z - x| \le \sup\big|Df^{-1}\big||f(x+\varepsilon z) - f(x)|$$
$$\frac{|z|}{c} \le \frac{|f(x+\varepsilon z) - f(x)|}{\varepsilon}$$

2 L^p-Räume

Definition 2.1 (L^p-Norm) Für einen Maßraum (X,Σ,μ) definieren wir L^p-Norm einer messbaren Funktion $f:(X,\Sigma)\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$ durch

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \qquad p\in[1,\infty)$$

und mit $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ bezeichnen wir die Menge aller reelwertigen messbaren Funktionen, deren L^p-Norm endlich ist.

- $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ ist ein Vektorraum:

$$|f+g|^p \le 2^p\max(|f|^p,|g|^p) \le 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

zu zeigen: $\|\cdot\|_{L^p}$ ist eine Norm (Problem: Nullmenge, Lösung: einfach rausteilen)

- Dreiecksungleichnug ($\leftarrow$ Minkowski Ungleichung) $\to$ L^p-Räume
- L^p-Räume sind Banachräume (vollständig)

Lemma 2.2 Sei $f:(X,\Sigma)\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$ messbar. Dann gilt

$$\int |f|^p\mathrm{d}\mu = 0 \iff f = 0 \quad \mu\text{-fast überall}$$

Beweis Mit $g := |f|^p$

$$\implies \int_X g\mathrm{d}\mu = 0 \iff g = 0 \quad \mu\text{-fast überall} \iff f = 0 \quad \mu\text{-fast überall}$$ □

Wir setzen $\mathcal{N}(X,\mu) = \{f : (X,\Sigma) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}) \mid f \text{ messbar}, f(x) = 0 \quad \mu\text{-fast überall}\}$. $\mathcal{N}(X,\mu)$ ist ein linearer Unterraum von $\mathcal{L}^p$. Wir bilden den Quotientenraum

$$L^p(X,\mu) := {}^{\mathcal{L}^p(X,\mu)}\!\big/\!_{\mathcal{N}(X,\mu)}$$

Für $X \subset \mathbb{R}^n$, $L^p(X) := L^p(X,\lambda^n)$. Die Elemente von $L^p(X,\mu)$ sind Äquivalenzklassen von Funktionen. Wohldefiniertheit der L^p-Norm auf $L^p(X,\mu)$ folgt aus Lemma 2.2.

- Im Fall $p = 2$ haben wir einen Hilbertraum, das heißt einen vollständig normierten Raum (Banach Raum) mit Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_{L^2(X,\mu)} := \int_X f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}\mu(x)$$

- Wir können auch $p = \infty$ betrachten,

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} &= \inf\{s > 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| \geq s\}) = 0\} \\ &= \sup\{s \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| \geq s\}) > 0\}\end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit $B(X,\mu)$ die Menge der essentiell beschriebenen Funktionen und setzen $L^\infty(X,\mu) = {}^{B(X,\mu)}\!\big/\!_{\mathcal{N}(X,\mu)}$

Beispiel 2.3

$$\begin{aligned}\|\chi_\mathbb{Q}\|_{L^\infty(\mathbb{R},\lambda)} &= 0 \\ \|\chi_\mathbb{Q}\|_{L^\infty(\mathbb{R},\delta_0)} &= 1 \\ \delta_0(\{x \in \mathbb{R} \mid \chi_\mathbb{Q}(x) \geq s\}) &= 1\end{aligned}$$

Definition 2.4 Sei X ein metrischer Raum, der lokal kompakt ist (das heißt jeder Punkt aus X besitzt eine kompakte Umgebung). Dann heißt $f : (X,\Sigma) \to (\mathbb{R},\mathcal{B})$ **lokal p-integrierbar** falls

$$f \in L^p(K,\mu) \forall K \subset X$$

Bezeichnung: $L^p_{\text{loc}}(X,\mu)$

Ungleichnugen (Jemen, Hölder, Minkowski)
Erinnerung: Konvexe Funktion:

$$f : (a,b) \to \mathbb{R} : \varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-y)\varphi(y) \forall x,y \in (a,b), \lambda \in (0,1)$$

strikt konvex für „$<$".
Jede Norm auf einem Vektorraum ist konvex. denn für $f, g \in X, \lambda \in (0,1)$ gilt:

$$\|\lambda f + (1-\lambda)g\|_X \leq \lambda\|f\|_X + (1-\lambda)\|g\|_X$$

$\forall$ konvexe φ auf $a < x < z < y < b$ $(z = \lambda x + (1-\lambda)y$ für ein $\lambda \in (0,1))$

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(x)}{z-x} \leq \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} \leq \frac{\varphi(y)-\varphi(z)}{y-z} \tag{$*$}$$
$$\frac{\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y)-\varphi(x)}{(\lambda-1)x+(1-\lambda)y} \leq \frac{(\lambda-1)\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)}{(1-\lambda)(y-x)} = \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}$$

Wir erhalten „$<$" für strikte Konvexität.

Lemma 2.5 Die folgende Aussagen gelten für alle konvexe $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$:

1. φ ist lokal Lipschitz-stetig, das heißt für alle kompakte $I \subset (a,b) \exists L_1 < \infty$ mit
$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L_1 |x-y| \forall x, y \in I$$
2. Die Ableitungen
$$\varphi'_{\pm} = \lim_{h \searrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{\pm h}$$
existieren und sind monoton fallend. Darüber hinaus existiert φ' bis auf Nullmenge.
3. Für ein festes $\bar{x} \in (a,b) \forall \alpha \in [\varphi'_-(\bar{x}), \varphi'_+(\bar{x})]$ gilt
$$\varphi(y) \geq \varphi(\bar{x}) + \alpha(y - \bar{x}) \quad \forall y \in (a,b)$$
„$>$“ für strikte Konvexität von φ und $y \neq \bar{x}$

Beweis Wir setzen
$$\begin{aligned} \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} &=: D(x,y) = D(y,x) \\ &\overset{(*)}{\Longrightarrow} D(x,z) \leq D(x,y) \leq D(y,z) \quad \text{für } x < z < y \end{aligned}$$

Damit ist $\varepsilon \to D(x+\varepsilon, x)$ monoton steigend (und beschränkt) (Für $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \implies D(x+\varepsilon_1, x) \leq D(x+\varepsilon_2, x)$)
$\implies \exists \varphi'_+(x)$ und $\varphi'_-(x)$
$$\begin{aligned} D(x-\varepsilon, x) \leq D(x+\varepsilon, x) &\implies \varphi'_-(x) \leq \varphi'_+(x) \\ & \varphi'_+(x) \leq \varphi'_-(y) \text{ für } x < y \\ &\implies \varphi'_-(x) \leq \varphi'_+(x) \leq \varphi'_-(y) \leq \varphi'_+(y) \quad \text{für} \quad x < y \end{aligned}$$

Da eine monotone Funktione nur eine abzählbare Anzahl von Sprüngen enthalten kann (jedes Sprungintervall enthält eine rationale Zahl und sie sind paarweise disjunkt) $\implies$ 2. Aus $(*)$ $\implies$
$$\begin{aligned} \varphi'_+(x) \leq D(x,y) \leq \varphi'_-(y) \quad &\text{für} \quad x < y \\ \implies y > x \implies \varphi(y) &\geq \varphi(x) + \varphi'_+(x)(y-x) \\ y < x \implies \varphi(y) &\geq \varphi(x) + \varphi'_-(x)(y-x) \\ \varphi'_-(x)(y-x), \varphi'_+(x)(y-x) &\to \alpha(y-x) \end{aligned}$$

$\implies$ 3.
Für $a < \alpha < x < y < \beta$ ist $\varphi'_+(\alpha) \leq D(x,y) \leq \varphi'_-(\beta) \implies$ 1. mit
$$L_{[\alpha,\beta]} := \max\big(|\varphi'_+(\alpha)|, |\varphi'_-(\beta)|\big)$$
□

Satz 2.6 (Jensen'sche Ungleichung) Sei $\phi : (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex für $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Ist μ ein W'maß auf (X, Σ) mit $\mu(X) = 1$, $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ mit $a < f(x) < b$ für alle $x \in X$, dann ist der negtive Teil von $\phi \circ f$ integrierbar und
$$\phi\left(\int_X f \mathrm{d}\mu\right) \leq \int_X (\phi \circ f) \mathrm{d}\mu$$
Ist $\phi \geq 0$ nicht fallend, $f \geq 0$ und
$$\phi(b) := \lim_{x \to b} \phi(x)$$
so gilt die Aussage für nicht integrierbare f.

Beweis Eigenschaft 3. des Lemma 2.5 impliziert

$$\phi(f(x)) \geq \phi(\bar{x}) + \alpha(f(x) - \bar{x}) \forall x \in X, \bar{x} = \int_X f \mathrm{d}\mu \in (a,b)$$

Damit ist $(\phi \circ f)_-$ integrierbar und wir erhalten

$$\int_X \phi(f(x)) \mathrm{d}\mu(x) \geq \phi(\bar{x}) + \alpha\Big(\int_X f(x) \mathrm{d}\mu(x) - \bar{x}\Big) = \phi(\bar{x})$$

Sei nun $f \geq 0$, aber $f \notin \mathcal{L}^1(X,\mu)$, so setze

$$X_n := \{x \in X \mid f(x) \leq n\}$$

und erhalten wir aus dem bisher gezeigten

$$\phi\Big(\frac{1}{\mu(X_n)} \int_{X_n} f \mathrm{d}\mu\Big) \leq \frac{1}{\mu(X_n)} \int_{X_n} \phi \circ f \mathrm{d}\mu$$

für $n \to \infty$ erhlaten wir $X_n \nearrow X$ einerseits und $\mu(X_n) \nearrow \mu(X)$ andererseits. Die Konvergenz der Integrale erhalten wir mit dem Satz über monotone Konvergenz. □

Satz 2.7 (Hölder-Ungleichung) Seien $p, p' \in [1,\infty]$ dual, das heißt

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Ist $f \in L^p(X,\mu)$ und $g \in L^{p'}(X,\mu)$, so folgt $f \cdot g \in L^1(X,\psi)$ und es gilt

$$\|f \cdot g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

Beweis Übungen □

Korollar 2.8 Für jedes $f \in L^p(X,\mu)$ mit $p \in [1,\infty)$ gilt

$$\|f\|_{L^p} = \sup\{\int_X f \cdot g \mathrm{d}\mu \mid g \in L^{p'}(X,\mu), \|g\|_{L^{p'}} = 1\}$$

Beweis „$\geq$" folgt unmittelbar aus Hölder.
„$\leq$" Wähle geeignetes g, nämlich

$$g := \frac{\operatorname{sgn}(f)|f|^{p-1}}{\left\| |f|^{p-1} \right\|_{L^p}}, f \neq 0$$

Für $p = 1$ wähle $g = \operatorname{sgn}(f)$ □

Lemma 2.9 Sei μ ein σ-finites Maß, $f : (X,\Sigma) \to (\mathbb{R},\mathcal{B})$ messbar und $p \in [1,\infty)$. Gilt $f \cdot s \in L^1(X,\mu)$ für jedes $s \in S(X,\mu) \cap \mathcal{L}^1(X,\mu)$ so folgt $f \in L^p(X,\mu)$ und

$$\|f\|_{L^p} = \sup\{\int_X f \cdot s \mathrm{d}\mu \mid s \in S(X,\mu) \cap \mathcal{L}^1(X,\mu), \|s\|_{L^{p'}} = 1\}$$

Satz 2.10 (Minkowski-Ungleichnug) Seien μ, ν zwei σ-finite Maße auf den Maßräumen $(X,\Sigma,\mu), (Y,\Upsilon,\nu)$ und f sei $(\mu \otimes \nu)$-messbar. Dann haben wir für $p \in [1,\infty)$

$$\left\| \int_Y f(\cdot,y) \mathrm{d}\nu(y) \right\|_{L^p} \leq \int_Y \|f(\cdot,y)\|_{L^p} \mathrm{d}\nu(y)$$

Beweis Sei $g \in L^p(X,\mu)$ mit $g \geq 0$ und $\|g\|_{L^{p'}} = 1$. Aus Fubini folgt

$$\int_X g(x) \int_Y |f(x,y)| \mathrm{d}\nu(y) \mathrm{d}\mu(x) \overset{\substack{\text{Fubini} \\ \uparrow}}{=} \int_Y \int_X |f(x,y)| g(x) \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\nu(y)$$

Durch Anwendung des Korollar 2.8 schließen wir, dass die linke Seite gerade die L^p-Norm von

$$\int_Y f(\cdot,y)\mathrm{d}\nu(y)$$

ist. Außerdem gilt mit Hölder

$$\int_Y \int_X |f(x,y)| g(x) \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}\nu(y) \leq \int_Y \|f(\cdot,y)\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} \mathrm{d}\nu(y)$$

□

Bemerkung Aus Fatous Lemma erhalten wir die Unterhalbsstetigkeit der L^p-Normen. Gilt $f_n \to f$ punktweise μ-fast überall so haben wir

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_X \liminf_{k\to\infty} |f_k|^p \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X |f_k|^p \mathrm{d}\mu = \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_{L^p}^p$$

Lemma 2.11 Sei $p \in [1,\infty)$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(X,\mu)$ konvergiere punktweise μ-fast überall gegen ein f. Gibt es also eine Funktion $g \in L^p(X,\mu)$, $|f_k| \leq g$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, so ist auch $f \in L^p(X,\mu)$ und die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $L^p(X,\mu)$.

Beweis Zunächst ist $|f| \leq g$ und damit

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_X |f|^p \mathrm{d}\mu \leq \int_X g^p \mathrm{d}\mu < \infty$$

Da die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise μ-fast überall gegen f konvergiert

$$|f_k - f|^p \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

μ-fast überall. Außerdem ist $|f_k - f|^p \leq 2^p g^p$. $2^p g^p$ ist integrierbar und so liefert der Satz von Lebesgue

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L^p} = \lim_{k\to\infty} \left(\int_X |f_k - f|^p \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

□

Satz 2.12 (Fischer-Riesz (Vollständigkeit)) Der Raum $L^p(X,\mu)$ ist für $p \in [1,\infty]$ vollständig und somit ein Banachraum.

Beweis Wir verwenden die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. Sei $p < \infty$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(X,\mu)$ sei eine Cauchyfolge, das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k = k(\varepsilon) \forall t, k \geq K : \|f_j - f_k\|_{L^p} < \varepsilon$$

Wir möchten zeigen, dass es ein $f \in L^p(X,\mu)$ gibt mit $\|f_k - f\|_{L^p} \to 0$. Es genügt dies für eine Teilfolge zu verifizieren. Durch Auswahl von Elementen der Folge können wir

$$\|f_{k+1} - f_k\| \leq 2^{-k} \forall k \in \mathbb{N}$$

erreichen. Mit $f_0 = 0, g_k := f_k - f_{k-1} \forall k \in \mathbb{N}$ und

$$G := \sum_{k\in\mathbb{N}} |g_k|$$

erhalten wir

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} |g_j| \right\|_{L^p} \leq \sum_{j=1}^{k} \|g_j\|_{L^p} \leq \|g_1\|_{L^p} + \sum_{j=1}^{k} 2^{-j} \leq \|g_1\|_{L^p} + 1$$

Aus dem Satz über monotone Konvergenz gewinnen wir $G \in L^p$ und wir erhalten insbesondere $G(x) < \infty$ für fast alle $x \in X$. An diesen Punkten konvergiert

$$\tilde{f} = \sum_{k\in\mathbb{N}} g_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} g_j = \lim_{k\to\infty} f_k$$

absolut. Dort ist

$$\left| f_k(x) - \tilde{f}(x) \right|^p \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

und zusätzlich in den Punkten wo $G(x) < \infty$

$$\left| f_k - \tilde{f} \right|^p = \left| \sum_{j=1}^{k} g_j - \sum_{j=1}^{\infty} g_j \right|^p = \left| \sum_{j=k+1}^{\infty} g_j \right|^p \leq \left| \sum_{j=1}^{\infty} |g_j| \right|^p \leq |G|^p$$

Nun ist $|G|^p \in L^1(X,\mu)$ mit $f = \liminf_{k\to\infty} f_k$ erhalten wir eine messbare Funktion $f = \tilde{f}$ μ-fast überall. Nun folgt aus dem Satz über dominierte Konvergenz

$$\|f_k - f\|_{L^p}^p = \int_X |f_k - f|^p \mathrm{d}\mu \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Im Fall $p = \infty$ gilt für die Cauchyfolge $(f_k)_{k.\mathbb{N}} \subset L^\infty$

$$\forall m \in \mathbb{N} \exists M(m) \in \mathbb{N} \forall j,k \geq M : \|f_k - f_j\|_{L^\infty} < \frac{1}{m}$$

Also existiert eine Nullmenge $A_{j,k,m} \in \Sigma$ mit

$$|f_j(x) - f_k(x)| \leq \frac{1}{m} \forall x \in X \setminus A_{j,k,m}$$

Definiere

$$A = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{j,k\geq M} A_{j,k,m}$$

A ist eine Nullmenge. Folglich ist $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ für jedes $x \in X \setminus A$ eine Cauchyfolge. Somit

$$f(x) := \liminf_{k\to\infty} f_k(x)$$

Damit haben wir $|f_j(x) - f(x)| \leq \frac{1}{m} \forall x \in X \setminus A, j \geq M$. Weiterhin ist f messbar. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\|f_k - f\|_{L^\infty} &= \sup\{s \geq 0 \mid \mu(\{x \in S \mid |f_k(x) - f(x)| \geq 0\}) > 0\} \\
&= \sup\{s \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \setminus A \mid |f_k(x) - f(x)| \geq s\}) > 0\} \\
&\leq \frac{1}{m} \quad \text{für } k = M
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\|f_k - f\|_{L^\infty} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

□

Korollar 2.13 Konvergiert eine Folge in $L^P(X,\mu), p \in [1,\infty)$, so gibt es eine Teilfolge, die punktweise μ-fast überall konvergiert. Die Grenzwerte einer in L^p und $L^q, p, q \in [1,\infty]$ konvergierende Folge stimmen fast überall überein.

Beispiel 2.14 $\underbrace{\chi_{[0,\frac{1}{2}]}, \chi_{[\frac{1}{2},1]}}_{\|\cdot\|_{L^p}=\frac{1}{2}}, \underbrace{\chi_{[0,\frac{1}{3}]}, \chi_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}, \chi_{[\frac{2}{3},1]}}_{\|\cdot\|_{L^p}=\frac{1}{3}}, \dots$ Also konvergiert diese Folge in L^p gegen 0, aber nicht punktweise fast überall.

2.1 Approximation

Definition 2.15 (Dichtheit) Eine Teilmenge A eines topologischen Raums X heißt **dicht**, falls es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus A gibt mit $x_n \to x$.

Satz 2.16 Sei X ein lokal kompakter, metrischer Raum (jeder Punkt liegt in einer kompakten Umgebung) und μ ein reguläres Borelmaß (endliche Werte auf Kompakta).

- Regulär von innen: $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A \text{ kompakt}\}$
- Regulär von außen: $\mu(A) = \inf\{\mu(K) \mid A \subset U \text{ offen}\}$

Dann ist die Menge $C_c^0(X)$ aller stetigen Funktionen mit kompakten Träger dicht in $L^p(X,\mu)$. Dabei ist der Träger eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}\, \operatorname{supp}(f)$ definiert als

$$\succ (f) = \overline{\{x \in A \mid f(x) \neq 0\}}$$

Beweis Wir können nicht-negative Funktionen durch eine Folge von einfachen Funktionen bezüglich der L^1-Norm approximieren. Man überträgt leicht dieses Argument auf beliebige integrierbare Funktionen und Funktionen aus $\mathcal{L}^p$ beziehungsweise $L^p, p \in [1,\infty)$. Da die einfachen Fuktionen durch die Linearkombination von charakteristischen Funktionen auf Urbilder halboffener Mengen und da das Maß regulär ist von innen können wir diese Mengen beliebig gut durch Kompakta approximieren. Folglich genügt es zu zeigen, dann $\chi_K, K \subset X$ kompakt bezüglich der L^p-Norm beliebig gut durch stetige Funktionen approximierbar ist. Ausgrund der äußeren Regularität des Maßes finden wir für $\varepsilon > 0$ eine offene Menge U mit $K \subset U$ und $\mu(U \setminus K) = \mu(U) - \mu(K) < \varepsilon$. Wir setzen

$$f_\varepsilon(x) := \frac{\operatorname{dist}\big(x, U^C\big)}{\operatorname{dist}(x,K) + \operatorname{dist}(x,U^C)}$$

Dies liefert eine stetige Funktion mit $f_\varepsilon(x) \in [0,1]$ und

$$\operatorname{dist}(x,A) := \inf_{y\in A}|x-y|$$

$$f_\varepsilon(x) = 0 \iff \operatorname{dist}\big(x,U^C\big) = 0 \iff x \in U^C$$
$$f_\varepsilon(x) = 1 \iff \operatorname{dist}(x,K) = 0 \iff x \in K$$

$$\int_X |f_\varepsilon(x) - \chi_K(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) = \int_{U\setminus K} |(f_\varepsilon(x) - \chi_k)|^p \mathrm{d}\mu(x) \leq \mu(U \setminus K) < \varepsilon \qquad \square$$

Bemerkung Diese Aussage gilt nicht für $p=\infty$, da für stetige Funktionen die L^∞-Norm der Supremumsnorm entspricht und somit die Grenzfunktion stetig ist.

Definition 2.17 (Faltung) Für integrierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ setzen wir

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}\lambda^n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)\mathrm{d}\lambda^n(y)$$

und bezeichnen den Ausdruck $f * g$ als Faltung. Die Faltung selbst ist integrierbar, denn es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f * g| \mathrm{d}\lambda^n &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)| \mathrm{d}\lambda^n(y) \mathrm{d}\lambda^n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \mathrm{d}\lambda^n(x) |g(y)| \mathrm{d}\lambda^n(y) = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < \infty\end{aligned}$$

Lemma 2.18 Die Faltung besitzt folgende Eigenschaften:

1. Für $x \in \oint \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $f(x - \cdot)g(\cdot)$ genau dann integrierbar, wenn $f(\cdot)g(x - \cdot)$ integrierbar ist und es gilt in diesem Fall $(f * g)(x) = (g * f)(x)$
2. Für $\phi \in C_c^k(\mathbb{R}^n), k \in \mathbb{N}$ und $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ folgt $f * \phi \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und $\partial_\alpha(\phi * f) = \partial_\alpha \phi * f$ für jede partielle Ableitung einer Ordnung $\leq k$.
3. Für $\phi \in C_c^k(\mathbb{R}^n), k \in \mathbb{N}$ und $f \in L_c^1$ (es gibt einen Repräsentanten mit kompaktem Träger) ist $\phi * f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$
4. Für $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n), f \in L^p(\mathbb{R}^n), p \in [1, \infty]$ gilt auch $f * \phi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und wir haben die Young-Ungleichnug:
$$\|f * \phi\|_{L^p} \leq \|\phi\|_1 \|f\|_1$$

Beweis
1. Folgt unmittelbar aus dem Transformationssatz
2. Folgt induktiv durch vertauschen von Differentation und Integration.
3. Ist $\operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} \phi \subset B_R(0)$ für $R > 0$, so erhalten wir für $x \in \mathbb{R}^n$:
$$\begin{aligned}(f * \phi)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi(x-y) \mathrm{d}\lambda^n(y) \neq 0 \\ \implies y, x - y &\overset{!}{\in} B_R(0) \implies x = (x-y) + y \in B_{2R}(0)\end{aligned}$$
Demnach ist $\operatorname{supp} f * \phi \subset B_{2R}(0)$.
4. $p = \infty$
$$\|f * \phi\|_{L^\infty} = \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) \mathrm{d}\lambda^n(y) \right\| \leq \|f\|_{L^\infty} \|\phi\|_{L^1}$$
Sei nun $p < \infty$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen $\|\phi\|_{L^1} = 1$. Anwendung der Jensen-Ungleichnug (mit $\varphi(\xi) = |\xi|^p, \mathrm{d}\mu = |\phi| \mathrm{d}\lambda^n$)
$$\begin{aligned}\|f * \phi\|_{L^p}^p &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||\phi(y)| \mathrm{d}\lambda^n(y) \right|^p \mathrm{d}\lambda^n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||\phi(y)| \mathrm{d}\lambda^n(y) \right) \mathrm{d}\lambda^n(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p |\phi(y)|^p \mathrm{d}\lambda^n(y) \mathrm{d}\lambda^n(x) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p \mathrm{d}\lambda^n(x) = \|f\|_{L^p}^p\end{aligned}$$
□

Definition 2.19 Eine Familie $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon >}$ integrierbarer Fuktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ heißt **approximative Identität** falls

1. $\sup_{\varepsilon > 0} \|\phi_\varepsilon\|_{L^1} < \infty$ (manchmal wir auch $\phi_\varepsilon \geq 0 \forall \varepsilon > 0$ vorrausgesetzt)

2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon \mathrm{d}\lambda^n = 1 \forall \varepsilon > 0$

3. $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)} |\phi_\varepsilon| \mathrm{d}\lambda^n \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0 \forall r > 0$

Ein Glättungskern ist eine nicht-negative Funktion $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\phi\|_{L^1} = 1$.

Bemerkung Aus jedem Glättungskern $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ erhält man durch

$$\phi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \phi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)$$

eine appoximative Identität. Standard-Glättungskern

$$x \mapsto \begin{cases} \exp\Big(\frac{1}{|x|^2 - 1}\Big) & |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lemma 2.20 (2.20) Sei $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ eine approximative Identität und $f \in L^p(\mathbb{R}^n), p \in [1, \infty)$. Dann gilt

$$\|f * \phi_\varepsilon - f\|_{L^p} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

Beweis Sei $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$. Wir nehmen ein δ.
$|f(x-y) - f(x)| \xrightarrow{|y| \searrow 0} 0$ gleichmäßig in x aufgrund von gleichmäßiger Stetigkeit (nach dem Satz von Heine). Weiterhin, aufgrund des kompakten Trägers für $|y| < r$ (r hinreichend klein)

$$\begin{aligned}
\|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_{L^p} &= \left(\int_{B_r(\operatorname{supp} f)} |f(x-y) f(x)|^p \mathrm{d}\lambda^n\right)^{1/p} \\
B_r(E) &:= \bigcup_{\xi \in E} B_r(\xi) \\
\|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_{L^p} &\leq \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_{L^\infty} \left(\int_{B_r(\operatorname{supp} f)} 1^p \mathrm{d}\lambda^n(x)\right)^{1/p} \qquad \leq \frac{\delta}{2 \sup_{\varepsilon > 0} \|\phi_\varepsilon\|_{L^1}}
\end{aligned}$$

(für r hinreichend klein). Mit Minkowski Ungleichung:

$$\begin{aligned}
(f * \phi_\varepsilon)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon(y)(f(x-y) - f(x)) \mathrm{d}\lambda^n(y) \\
\|(f * \phi_\varepsilon) - f\|_{L^p} &\leq \left\| \int_{B_r(0)} \phi_\varepsilon(y)(f(\cdot - y) - f(\cdot)) \mathrm{d}\lambda^n(y) \right\|_{L^p} + \left\| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} \phi_\varepsilon(y)(f(\cdot - y) - f(\cdot)) \mathrm{d}\lambda^n(y) \right\|_{L^p} \\
&\leq \int_{B_r(0)} |\phi_\varepsilon(y)| \underbrace{\|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_{L^p}}_{\leq \frac{\delta}{2 \sup \|\phi_\varepsilon\|_{L^1}}} \mathrm{d}\lambda^n(y) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} |\phi_\varepsilon(y)| \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_{L^p} \mathrm{d}\lambda^n(y) \\
&\leq \frac{\delta}{2} + \underbrace{2\|f\|_{L^p} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} |\phi_\varepsilon(y)| \mathrm{d}\lambda^n(y)}_{\leq \frac{\delta}{2} \text{ für hinreichend kleine } \varepsilon > 0}
\end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung für $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ gezeigt. Da $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$ sind (Satz 2.16), wählen wir für ein $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f_k - f\|_{L^p} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

$$\begin{aligned}\implies \|f*\phi_\varepsilon - f\|_{L^p} &\leq \overbrace{\|f*\phi_\varepsilon - f_k*\phi_\varepsilon\|_{L^p}}^{\|(f-f_k)*\phi_\varepsilon\|} + \underbrace{\|f_k*\phi_\varepsilon - f_k\|_{L^p}}_{\varepsilon\to0\nearrow 0 \text{ für festes } k} + \underbrace{\|f_k - f\|_{L^p}}_{\xrightarrow{k\to\infty}0} \\ &\leq \underbrace{\|f-f_k\|_{L^p}}_{\xrightarrow{k\to\infty}0}\underbrace{\|\phi_\varepsilon\|_{L^1}}_{\leq M}\end{aligned}$$

Wir nehmen k hinreichend groß und dann ε hinreichend klein. □

Satz 2.21 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann liegt die Menge $C_c^\infty(\Omega)$ aller glatten Funktionen mit kompakten Träger dicht in $L^p(\Omega)$ für $p \in [1,\infty)$.

Beweis Nach dem Satz 2.16 genügt es zu zeigen, dass $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ ist. (denn wir können $f\big|_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} = 0$ setzen). Wir wählen einen Glättungskern $\phi \implies f*\phi_\varepsilon$ kompakter Träger und $C^\infty \implies$ mit Lemma 2.18.3 und aus Satz 2.20 folgt die Behauptung. □

3 Fourier-Transformation

Definition 3.1 Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definieren wir

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\langle p,x\rangle} f(x)\mathrm{d}\lambda^n(x) \qquad p \in \mathbb{R}^n$$

mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$: Skalarprodukt.
$\mathcal{F}: f \to \hat{f}$ heißt Fourier-Transformation. $\mathcal{F}$ ist eine lineare Abbildung die beschränkt ist. Eine lineare Abbildung $A: X \to Y, X, Y$-normierte Räume, heißt beschränkt falls $\exists C > 0,$ sodass $\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X$

$$\|A\| := \sup_{\|x\|_X} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \leq C$$

Mit C_b^0 bezeichnen wir den Raum der stetigen und beschränkten Funktionen. (also $C_b^0 = C^0 \cap L^\infty$)

Lemma 3.2 Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ ist eine beschränkte Abbildung $L^1(\mathbb{R}) \to C_b^0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\left\|\hat{f}\right\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\|f\|_{L^1}$$

„=" für f nichtnegativ.

Beweis Die Abschätzung aus der Definition. Stetigkeit von $\hat{f}$: Wir wählen eine Folge $(p_k)_{k\in N} \subset \mathbb{R}^n, p_k \to p$ für $k \to \infty$. Wegen

$$\left|e^{-i\langle p,x\rangle}\right| = 1$$

ist $|f|$ eine Majorante. Ausdem Satz über dominierte Konvergenz folgt die Behauptung. Ist $f \geq 0$

$$\begin{aligned}\implies \|f\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} |f|\mathrm{d}\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle 0,x\rangle} f(x)\mathrm{d}\lambda^n(x) \\ &= (2\pi)^{n/2}\hat{f}(0) \leq (2\pi)^{n/2}\left\|\hat{f}\right\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}\end{aligned}$$

□

Lemma 3.3 Für $g, g \in L^1(\mathbb{R}^n), a, p \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0$ gilt

1. $\widehat{f(\cdot + a)}(p) = e^{-i\langle a,p\rangle}\hat{f}(p)$
2. $\widehat{e^{-i\langle\cdot,a\rangle}f}(p) = \hat{f}(p-a)$
3. $\widehat{f(\lambda\cdot)}(p) = \frac{1}{\lambda^n}\hat{f}\left(\frac{p}{\lambda}\right)$
4. $\widehat{f(-\cdot)}(p) = \hat{f}(-p)$
5. $\hat{f}g, f\hat{g} \in L^1$ mit
$$\int \hat{f}g = \int f\hat{g}$$