Analysis I (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

13. Januar 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Webseite www.biostruct.uni-heidelberg.de/Analysis1.php Klausurzulassung: 50% Klausur 18.2.2017 9-12Uhr

2 Mengen und Zahlen

2.1 Logische Regeln und Zeichen

2.1.1 Quantoren

$$\begin{array}{ll} \forall x & \text{für alle } x \\ \exists x & \text{es gibt (mindestens) ein } x \\ \exists! x & \text{es gibt genau ein } x \end{array}$$

2.1.2 Hinreichend und Notwendig

- $A \implies B$: wenn A gilt, gilt auch B, A ist **hinreichend** für B, daraus folgt: B ist **notwendig** für A, Ungültigkeit von B impliziert die Ungültigkeit von A ($\neg B \implies \neg A$)
- $A \iff B$: A gilt, genau dann, wenn B gilt

2.1.3 Beweistypen

Direkter Schluss $A \implies B$

Beispiel m gerade Zahl $\implies m^2$ gerade Zahl

1. Beweis m gerade $\implies \exists n \in \mathbb{N}$ sodass $m = 2n \implies m^2 = 4n^2 = 2k,$ wobei $k = 2n^2 \in \mathbb{N}\square$

Beweis der Transponierten (der Kontraposition) Zum Beweis $A \implies B$ zeigt man $\neg B \implies \neg A$ $(A \implies B) \iff (\neg B) \implies (\neg A)$

Beispiel Sei $m \in \mathbb{N}$, dann gilt m^2 gerade $\implies m$ gerade

1. Beweis Wir zeigen: m ist ungerade $\implies m^2$ ungerade

   $\exists n \in \mathbb{N}: \ m = 2n{+}1 \implies m^2 = (2n+1)^2 = 2k{+}1, k = 2n^2{+}2n \in \mathbb{N} \implies m^2$ ungerade$\square$

Indirekter Schluss (Beweis durch Widerspruch) Man nimmt an, dass $A \implies B$ nicht gilt, das heißt $A \wedge \neg B$ und zeigt, dass dann für eine Aussage C gelten muss $C \implies \neg C$, also ein Widerspruch

Beispiel $\nexists q \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$

1. Beweis Wir nehmen an, dass $\exists a \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$ Dann folgt: $\exists b, c \in \mathbb{Z}$ teilerfremd (ohne Einschränkung, denn sonst kürzen soweit wie möglich) mit $a = \frac{b}{c}$ Falls

   $$a^2 = 2 \implies \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 2 = \frac{b^2}{c^2} = 2 \implies b^2 = 2c^2 \implies b^2 \text{ gerade } \implies b \text{ ist gerade (schon gezeigt)}$$

   $$\implies \exists d \in \mathbb{N} \text{ sodass } b = 2d \implies b^2 = 4d^2$$

   Außerdem $b^2 = 2c^2 \implies 2c^2 = 4d^2 \implies c^2 = 2d^2 \implies c$ ist auch gerade. Also müssen b und c beide gerade sein, also nicht teilerfremd, damit haben wir einen Widerspruch hergeleitet $\square$

2.1.4 Summenzeichen und Produktzeichen

Summenzeichen Wir definieren für $m > 0$

$$\sum_{k=m}^{m} a_k := a_m + \ldots + a_n$$

falls $n \geq m$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0$$

falls $n < m$ (sogenannten leere Summe)

Produktzeichen

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} a_m \cdot ... \cdot a_n & \text{falls } n \geq m \\ 1 & \text{falls } n < m \text{ (sog. leeres Produkt)} \end{cases}$$

2.2 Mengen

2.2.1 Definition

(Georg Cantor 1885) Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohl unterschiedenen Objekten (welche die Elemente von M genannt werden), zu einem Ganzen M dadurch ist charakterisiert, dass von jedem vorliegendem Objekt x feststeht, ab gilt

- $x \in M$ (x Element von M)
- x ¬∈ M (x kein Element von M)

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$M = \{x \mid A(x)\} \rightarrow \text{ eine Menge } M \text{für die } x \in \ M \iff A(x)$$

2.2.2 Mengenrelationen

- Mengeninklusion $A \subseteq M$ (A ist eine Teilmenge von M)

  $$\forall x : (x \in A \implies x \in M)$$

  ,zum Beispiel $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

- $$A = B \iff \forall x : (x \in A \iff x \in B)$$

- $$A \subset M \text{ (strikte Teilmenge) } \iff A \subset M \wedge A \neq M$$

- $$\emptyset : \text{ leere Menge } \ \nexists x : x \in \emptyset$$

  . Wir setzen fest, dass $\emptyset$ eine Teilmenge jeder Menge ist. Zum Beispiel

  $$\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$$

- Durchschnitt

  $$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

- Vereinigung

  $$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

- Differenz (auch Komplement von B in A)

  $$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} := C_a B \text{ (auch } B^c)$$

2.2.3 Potenzmenge

Potenzmenge A

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

Alle Teilmengen von A

Beispiel

$$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\{1\},\{2\},\{1,2\},\emptyset\}$$

2.2.4 Familien von Mengen

Sei I eine Indexmenge, $I \subseteq \mathbb{N}, (A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen A

Durchschnitt von A

$$\cap_{i\in I} = \{x \mid \forall_{i\in I}\, x \in A_i\}$$

Vereinigung

$$\cup_{i\in I} = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$$

2.2.5 Rechenregeln

A, B, C, D seien Mengen

- $\emptyset \subseteq A$
- $A \subseteq A$ — Reflexivität
- $A \subseteq B, B \subseteq C \implies A \subseteq C$ — Transitivität
- $A \cap B = B \cap A \setminus A \cup B = B \cup A$ — Kommutativität
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \setminus (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ — Assoziativität
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \setminus A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Eigenschaften der Komplementbildung:
  Seien $A, B \subseteq D(C_D A := D \setminus A)$, dann gilt

$$C_D(C_D A) = A$$
$$C_D(A \cap B) = C_D A \cup C_D B$$
$$C_D(A \cup B) = C_D A \cap C_D B$$

  - Beweis:

$$x \in C_D(A \cap B) \iff x \in D \wedge (x \notin (A \cap B)) \iff x \in D \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$$
$$\iff (x \in D \wedge x \notin A) \vee (x \in D \wedge x \notin B)$$
$$\iff (x \in D \setminus A) \vee (x \in D \setminus B) \iff x \in D \setminus (A \cup B) \; \square$$

  - Bemerkung: Komplement kann man auch mit A^c bezeichnen

2.2.6 geordneter Tupel

Sei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (nicht notwendig verschiedene) Objekte. Ein geordneter n-Tupel

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \iff x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$$

Beachte:

$$\{x_1, \ldots, x_n\} = \{y_i, \ldots, y_n\} \not\Longrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$$

2.2.7 Kartesisches Produkt

Seien

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_j \in A_j j \in \mathbb{N}, j \leq n\}$$

Beispiel

- $$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$
- R^n n-dimensionaler Raum von reellen Zahlen

2.2.8 Äquivalenzrelation

Eine Äquivalenzrelation auf eine Menge A ist eine Beziehung zwischen ihren Elementen (Bezeichnung: $a \sim b$), sodass

- Für jede zwei $a, b \in A$ gilt entweder $a \sim b \vee a \not\sim b$
- $a \sim a$ Reflexivität
- $a \sim b \implies b \sim a$ Symmetrie
- $a \sim b, b \sim c \implies a \sim c$ Transitivität

Mit Hilfe einer Äquivalenzrelation lassen sich die Elemente einer Menge in so genannte Äquivalenzklassen einordnen: $[a] : \{b \in A \mid b \sim a\}$

2.3 Relationen und Abbildungen

2.3.1 Relationen

Unter einer **Relation** verstehen wir eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$ wobei X, Y Mengen sind. Für $x \in X$ definieren wir, das **Bild** von x unter R

$$R(X) := \{y \in Y \mid (x, y) \in R\}$$

und *Definitionsbereiche von R (bezüglich X)

$$D(R) := \{x \in X \mid R(x) \neq \emptyset\}$$

2.3.2 Graph der Abbildung

$R \subseteq X \times Y$ heißt Graph der Abbildung (Funktion)

$$f : X \to Y \iff D(R) = X, \forall\, x \in X : R(x) = \{f(x)\}$$

also enthält $R(x)$ genau ein Element.
X heißt Definitionsbereich von f
Y heißt Werte- oder Bildbereich von f (Bild)
$x \in X$ heißt Argument
$f(x) \in Y$ heißt Wert von f an der Stelle x

Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x^2$ dann ist der Graph von $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x^2\}$

Bemerkung

$$M^*(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = \sqrt{x} \vee y = -\sqrt{x}\}$$

Ist kein Graph einer Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denn $M^*(x) = \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}, x \geq 0\}$ f heißt

- surjektiv, wenn gilt $f(X) = Y$
- injektiv, $\forall\, x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
- bijektiv, wenn f surjektiv und injektiv ist

2.3.3 Umkehrabbildung

Sei die Abbildung $f : X \to Y$ bijektiv. Dann definieren wir die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ durch $y \to x \in X$, eindeutig bestimmt durch $y = f(x)$

Bemerkung

$$(x, y) \in \text{ Graph } f \iff (y, x) \in \text{ Graph } f^{-1}$$

2.3.4 Komposition

Seien $f : X \to Y, g : Y \to Z$ Abbildungen. Die Komposition von g und f

$$g \circ f : X \to Z \text{ ist durch } x \to g(f(x)) \text{ definiert}$$

2.3.5 Identitäts Abbildung

Für jede Menge X definieren wir die identische Abbildung

$$I_d(A) = I_A : A \to A, \text{ durch } x \to x$$

Beispiel

-
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = S^1$$
$$S^{n-1} := \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$$
$(n-1)$ dimensionale sphere in $\mathbb{R}^n$

- Seien X, Y Mengen, $M \subseteq X \times Y, f : M \to X \setminus f$ heißt Projektion, f surjektiv
$$f(M) = \{x \mid \exists y \in Y : (x,y) \in M\} = X$$

2.3.6 Homomorphe Abbildungen

Existieren auf Mengen X und Y mit gewissen Operationen $\oplus_x$ bzw. $\oplus_y$ (zum Beispiel Addition, Ordnungsrelation), so heißt die Abbildung $f : X \to Y$ homomorph (strukturerhaltend), wenn gilt $\forall\, x_1, x_2 \in X f(x_1 \oplus_x x_2) = f(x_1) \oplus_y f(x_2)$ Eine bijektive Homomorphie heißt Isomorphisumus, beziehungsweise $X \approx Y$ (äquivalent, isomorph)

2.4 Natürliche Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\},\ \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

2.4.1 Peanosche Axiomensystem der natürlichen Zahlen

1. Die Zahl 1 ist eine natürliche Zahl $1 \in \mathbb{N}$
2. Zu jeder natürlichen Zahl n, gibt es genau einen „Nachfolger“ $n'(=: n+1)$
3. Die Zahl 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl
4. $n' = m' \implies n = m$
5. Enthält eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ die Zahl 1 und von jedem $n \in m$ auch den Nachfolger n' ist $M = \mathbb{N}$

Bemerkung:
Mit Hilfe der Axiome lassen sich auf $\mathbb{N}$ Addition $(+)$, Multiplikation $(\cdot)$ und Ordnung $(\leq)$ einführen. Wir definieren:
$1' = 2, 2' = 3, \dots\ n + 1 := m'\ n + m' := (n+m)';\ n \cdot m' := nm + n$ Man kann zeigen, dass jede Menge, welche die Peano Axiome erfüllt isomorph bezüglich Multiplikation und Addition zu $\mathbb{N}$ ist Wir definieren $n < m \iff \exists x \in \mathbb{N} : x + m = m$

2.4.2 Vollständige Induktion

Induktionsprinzip Es seien die folgende Schritte vollzogen:

1. Induktionsverankerung (Induktionsanfang): Die Aussage $A(1)$ gilt
2. Induktionsschluss: Ist für ein $n \in \mathbb{N}$ $A(n)$ gültig, so folgt auch die Gültigkeit von $A(n+1)$

Dann sind alle Aussagen $A(n), n \in \mathbb{N}$ gültig.

Beweis: Wir definieren die Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N},\ M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(N) \text{ ist gültig}\}$ Die Induktionsverankerung besagt, dass $1 \in M$ und die Induktionsannahme $n \in M \implies n+1 \in M$. Folglich ist nach dem 5. Axiom von Peano $M = \mathbb{N}$ $\square$

Beispiel 1 Zu Beweisen:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Beweis

1. Induktionsverankerung: $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$
2. Annahme: $A(n)$ gültig für $n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   Zu zeigen $A(n+1) : 1^2 + \ldots + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$

   $$1^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{6}n + n + 1\right)$$

   $$= \frac{1}{6}(n+1)\big(2n^2 + 7n + 6\big) = \frac{1}{6}(n+1)(2n+3)(n+2)\square$$

Beispiel 2 Definition von Potenzen

$$x^0 := 1$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} x^n := x^{n-1}x$$

(iterative (rekursive) Definition)
Auf $\mathbb{N}$ sind diese elementaren Operationen erklärt:

- Addition $a + b$
- Multiplikation $a \cdot b$
- (unter gewissen Voraussetzungen):
  - Subtraktion $a - b$

- Division $\frac{a}{b}$

$\mathbb{N}$ ist bezüglich „−“ oder „/“ nicht vollständig, das heißt $n + x = m$ ist nicht lösbar in $\mathbb{N}$
Erweiterungen:

- Ganze Zahlen $\mathbb{Z} := \{0; \pm, n \in \mathbb{N}\}$
  Negative Zahl $(-n)$ ist definiert durch $n + (-n) = 0$
- Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ $(bx = y)$

Man sagt, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ einen Körper bildet.

2.4.3 Definition Körper

$\mathbb{K}$ sei eine Menge auf der Addition und Multiplikation sei. $\mathbb{K}$ heißt ein Körper, wenn die folgende Axiome erfüllt sind:

- Addition: $(\mathbb{K}, +)$ ist eine kommutative Gruppe, das heißt $\forall\, a, b, c \in \mathbb{K}$:
  1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ — Assoziativität
  2. $a + b = b + a$ — Kommutativität
  3. $\exists! 0 \in \mathbb{K} : a + 0 = a$ — Existenz des Nullelement
  4. $\exists x \in \mathbb{K} : a + x = 0$ — Existenz des Negativen
- Multiplikation: $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe, das heißt $\forall\, a, b, c \in \mathbb{K}$
  1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ — Assoziativität
  2. $a \cdot b = b \cdot a$ — Kommutativität
  3. $\exists! 1 \in \mathbb{K} : a \cdot 1 = a$ — Existenz des Einselement
  4. Für $a \neq 0, \exists! y \in \mathbb{K} : a \cdot y = 1$ — Inverse
- Verträglichkeit
  1. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ — Distributivität

Satz $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper. Definieren auf $\mathbb{Q}$ eine Ordnung „$\leq$“ durch

$$x \leq y \iff \exists m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N} : y - x = \frac{m}{n}$$

dann ist auch diese Ordnung mit der Addition und Multiplikation in $\mathbb{Q}$ in folgendem Sinne verträglich (Axiom M0):

- $a \leq b \implies a + c \leq b + c$
- $0 \leq a \wedge 0 \leq b \implies 0 \leq a \cdot b$

Bemerkung

$$\{a \in \mathbb{Q} : a = \frac{r}{s}, r \in \mathbb{N}_0, s \in \mathbb{N}\} =: \mathbb{Q}_+ (\mathbb{Q}_{\geq 0})$$

2.5 Abzählbarkeit

2.5.1 Abzählbarkeit von Mengen

Sei A eine Menge

- A heißt endlich mit $|A| = n$ Elementen ist äquivalent zu

$$|A| = \begin{cases} A = \emptyset & n = 0 \\ \exists f : A \to \{1, \dots, n\} & f \text{ bijektiv}, n < \infty \end{cases}$$

- A heißt abzählbar unendlich genau dann wenn

$$\exists f : A \to \mathbb{N} \text{ bijektiv}$$

- A heißt über abzählbar genau dann wenn: A ist weder endlich oder abzählbar unendlich

Beispiel $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich

Beweis Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$$z \mapsto \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ -2z - 1 & x < 0 \end{cases}$$

- Surjektivität: zu zeigen $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$
  Offenbar $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{N}$. Wir zeigen $\mathbb{N} \subseteq f(\mathbb{Z})$. Sei $n \in \mathbb{N}$, finde $z \in \mathbb{Z}$ mit $f(z) = n$. Man unterscheide:
  - n gerade $\to$ Wähle $z = \frac{n}{2}$
  - n ungerade $\to$ $z = -\frac{n+1}{2}$
- Injektivität: Sei $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ und $f(z_1) = f(z_2)$
  ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z_1 \leq z_2$. Entweder $z_1, z_2 \geq 0$ oder $z_1, z_2 < 0$, denn sonst währe $f(z_1)$ ungerade und $f(z_1)$ gerade **Widerspruch**. Falls
  - $z_1, z - 2 \geq 0 \implies 2z_1 = f(z_1) = f(z_2) = 2z_2 \implies z_1 = z_2$
  - $z_1, z - 2 < 0 \implies -2z_1 - 1 = f(z_1) = f(z_2) = -2z_2 - 1 \implies z_1 = z_2$ $\square$

Beispiel

- $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar unendlich
- $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich
- $\mathbb{R}$ über abzählbar

Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$(1,1) \to (1,2) \to (2,1) \to (2,2) \to (1,3) \to (2,3) \to (3,2) \to (3,1)$$

Korollar 1.30 $M_1, M_2, \ldots, M_n$ abzählbar $\implies M_1 \times \ldots \times M_n$ abzählbar.

Beweis Durch vollständige Induktion $M_1 \times (M_2 \times \ldots \times M_n) \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$

Satz Die Menge aller Folgen $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ ist über abzählbar. (Zum Beispiel: $1, 0, 0, 0, \ldots, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{k-te Stelle}}}{1}, \ldots, 0, \ldots$)

Beweis M ist unendlich, denn die Folgen $f_k : 0, , \ldots, 0, 1, 0, \ldots$ sind paarweise verschieden. Angenommen M wäre abzählbar. Sei $f_1, f_2, \ldots$ eine Abzählung mit $f_k = (z_{kn n\in\mathbb{N}})$.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & \\ 0 & 1 & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \end{array}$$

$f : 0010$ Man setze $f = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$z_n := \begin{cases} 1 & z_{nn} = 0 \\ 0 & z_{nn} = 1 \end{cases}$$

Dann $f \in M$, aber $f \neq f_k \, \forall \, k \in \mathbb{N}$. Also ist M nicht abzählbar. („Cantorsches Diagonalverfahren").

2.6 Ordnung

2.6.1 Definition

Sei A eine Menge. Relation $R \subseteq A \times A$ heißt Teilordnung (Halbordnung) auf A, wenn $\forall \, y, x, z \in A$ gilt:

1. $x \leq x$ (Reflexivität)
2. $x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$ (Symmetrie)
3. $x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$ (Transitivität)

Wenn außerdem noch $\forall \, x, y \in A$ gilt:

4. $x \leq y \vee y \leq x$ (Vergleichbarkeit je zweier Elemente)

so heißt R (totale) Ordnung auf A. $(A, \leq)$ heißt teilweise beziehungsweise (total) geordnete Menge.

Beispiel

1. $(\mathbb{Q}, \leq)$ mit der üblichen Ordnung ist eine total geordnete Menge

2. Wir definieren auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A eine Teilordnung „$\leq$“:

$$B \leq C \iff B \subseteq C \,\forall\, B, C \in \mathcal{P}(A)$$

   Beweis: 1. - 3. sind trivial, 4. geht nicht (keine Totalordnung). Wähle $B, C \in \mathcal{P}(a), B, C \neq \emptyset, B \cap C = \emptyset$. Dann gilt weder $B \subseteq C$ noch $C \subseteq B$ $\square$

3. Sei $F := \{f \mid f : A \to \mathbb{R}\}$ für eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$. Wir definieren $f \leq g \iff \forall\, x \in A : f(x) \leq g(x)$
   (1.) - (3.) trivial, 4. gilt nicht. Falls A mehr als ein Element hat, gibt es eine Funktion, die nicht miteinander verglichen werden können.

2.7 Maximum und Minimum einer Menge

2.7.1 Definition

Sei $(A, \leq)$ eine teilweise geordnete Menge, $a \in A$
Maximum:

$$a = \max A \iff \forall\, x \in A : x \leq a$$

Minimum:

$$a = \max A \iff \forall\, x \in A : a \leq x$$

2.7.2 Bemerkung

Durch die Aussagen ist a eindeutig bestimmt, denn seien:

$$a_1, a_2 \in A : \forall\, x \in A \begin{cases} x \leq a_1 \\ x \leq a_2 \end{cases} \implies \begin{cases} a_2 \leq a_1 \\ a_1 \leq a_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{Symmetrie}} a_1 = a_2$$

2.8 Schranken

Sei $(A, \leq)$ eine (total geordnete) Menge, $B \subseteq A$

1. $S \in A$ heißt obere Schranke zu $B \iff \forall\, x \in B : x \leq S$
   $S \in A$ heißt untere Schranke zu $B \iff \forall\, x \in B : S \leq x$

2. $\bar{S}(B) := \{S \in A \mid S$ S ist untere Schranke zu $B\}$
   $\underline{S}(B) := \{S \in A \mid S$ S ist obere Schranke zu $B\}$

3. Existiert $g := \min \underline{S}(B)$ beziehungsweise $g := \max \bar{S}$ so sagen wir:
   $g = \sup B$ (kleinste obere Schranke, <u>Supremum</u>, obere „Grenze“ von B in A) $g = \inf B$ (größte obere Schranke, <u>Infimum</u>, untere „Grenze“ von B in A)

2.8.1 Bemerkung

1. Existiert $\max B = \bar{b}$, so folgt $\sup B = \bar{b}$, denn $\bar{b} \in \underset{\sim}{S}(B)$ nach Definition.

$$s \in \underset{\sim}{S}(B) \implies \bar{b} \leq s, \text{ da } \bar{b} \in B$$

Ebenso gilt: $\exists \min B = \underline{b} \implies \inf B = \underline{b}$

2.8.2 Beispiel

1. $B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}, A = \mathbb{R}, \ \left(1, \frac{1}{2}, \ldots\right)$
   - Es gilt $1 \in B, \forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{n} \leq 1$, daher folgt $\max B = \sup B = 1$
   - Sei $s \leq 0$, dann gilt $\forall n \in \mathbb{N} : s \leq \frac{1}{n}$, also $s \in \bar{S}(B)$
     Sei $s > 0 \implies s > \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{s}$, also $s \notin \bar{S}(B)$
     Es folgt $\bar{S}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid s \leq 0\}$ insbesondere $0 \in \bar{S}(B)$
     Ferner gilt $\forall s \in \bar{S}(B) : s \leq 0 \implies \underline{0} = \max \bar{S}(B) = \inf B$

2. $A = \mathbb{Q}, B = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \wedge x^2 \leq 2\}$. Es gilt $0 = \min B = \inf B$, aber $\sup B$ existiert nicht in $\mathbb{Q}$

2.9 Reelle Zahlen

$x^2 = 2$ hat keine Lösungen in $\mathbb{Q}$. Allerdings können wir $\sqrt{2}$ „beliebig gut" durch $y \in \mathbb{Q}$ approximieren, das heißt $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in \mathbb{Q} : 2 - \varepsilon \leq y^2 \leq 2 + \varepsilon$ Das motiviert die folgende Vorstellung:

1. $\mathbb{Q}$ ist „unvollständig"

2. $\mathbb{Q}$ ist „dicht" in $\mathbb{R}$

2.9.1 Vollständigkeitsaxiom (Archimedes)

Jede nach oben (unten) beschränkte Teilmenge hat ein Supremum oder Infimum.

2.9.2 Axiomatischer Standpunkt

Es gibt eine Menge $\mathbb{R}$ (genannt Menge der reellen Zahlen) mit Addition, Multiplikation, Ordnung, die die Definition eines Körper und das Vollständigkeitsaxiom erfüllt und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit „$\leq$" eine Ordnung bildet.

2.9.3 Bemerkung

1. Bis auf Isomorphie gibt es höchstens ein solches $\mathbb{R}$, das heißt $\tilde{\mathbb{R}}$ ein weiteres System der reellen Zahlen ist, dann $\exists$ bijektive Abbildung $f : \mathbb{R} \to \tilde{\mathbb{R}}$ die bezüglich Addition, Multiplikation, Ordnung eine Homomorphie ist.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} :$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(xy) = f(x)f(y)$$
$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

2. $\mathbb{N}$ (und damit auch $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$) lassen sich durch injektive Homomorphismus $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ einbetten
$$g(\tilde{0}_{\in\mathbb{N}}) = 0_{\in\mathbb{R}}$$
$$g(\tilde{n}_{\in\mathbb{N}} + 1) = g(n_{\in\mathbb{R}}) + 1$$
$$g(1_{\in\mathbb{N}}) = 1_{\in\mathbb{R}}$$

2.9.4 Konstruktiver Standpunkt

Wir können $\mathbb{R}$ ausgehend von $\mathbb{Q}$ konstruieren.

Methode der Abschnitte Jede reelle Zahl wird charakterisiert durch ein „rechts offenes, unbeschränktes Intervall“, dessen „rechte Grenze“ die Zahl erstellt.

$$\mathbb{R} := \{A \subseteq \mathbb{Q} \begin{cases} A \neq \emptyset \\ x \in A, y \leq x \implies y \in A \\ \forall x \in A \exists y \in A, x < y \end{cases}$$

Methode der Cauchy-Folgen Jede reelle Zahl wird charakterisiert als „Grenzwert“ eine Klasse äquivalenter „Cauchy Folgen“ aus $\mathbb{Q}$ (später)

2.9.5 Definition 1.37

- $$x \in \mathbb{R} \text{ heißt } \begin{cases} \text{positiv} & 0 < x \\ \text{nicht negativ} & 0 \leq x \\ \text{negativ} & x < 0 \\ \text{nicht positiv} & x \geq 0 \end{cases}$$

- Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird definiert durch $|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

- Die Vorzeichen- oder Signumfunktion

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{sgn} x = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

2.9.6 Satz 1.38

1. $|xy| = |x||y|$
2. $|x+y| \leq |x| + |y|$
   Beweis:

$$\begin{aligned} |x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2 && (1)\\ \leq |x|^2 + 2|xy| + |y|^2 = |x|^2 + 2|x||y| + \left|y^2\right| && (2)\\ = (|x|+|y|)^2 \implies |x+y| \leq ||x|+|y|| = |x| + |y| && \square \end{aligned}$$

3. $|x+y| = |x| + |y| \iff xy \geq 0$

2.9.7 Satz 1.39

1. $||x| - |y|| \leq |x - y|$
   Beweis:

$$\begin{aligned} |x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y| \implies |x| - |y| \leq |x-y| && (3)\\ |y| = |y-x+x| \leq |y-x| + |x| \implies |y| - |x| \leq |x-y| && (4)\\ ||x|-|y|| = \max\{|x|-|y|, |y|-|x|\} \leq |x-y| && \square \end{aligned}$$

2.
$$|x-y| \leq \varepsilon \iff \begin{cases} x - \varepsilon \leq y \leq x + \varepsilon \\ y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon \end{cases}$$

   Beweis:

$$|x-y| = \max\{x-y, y-x\} \leq \varepsilon \iff \begin{cases} x-y \leq \varepsilon \\ y-x \leq \varepsilon \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq y+\varepsilon \\ y-x \leq \varepsilon \end{cases} \iff y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon \quad (5)$$

   Vertausche x und $y \implies x - \varepsilon \leq x + \varepsilon$ $\square$

2.9.8 Definition 1.40

Sei $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$

- $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall
- $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} =]a,b[$ offenes Intervall
- $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ rechts-halboffenes Intervall
- $(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ links-halboffenes Intervall
- $\varepsilon > 0, I_\varepsilon(x) := (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |x-y| < \varepsilon = B_\varepsilon(x)(\text{Kugel})\}$

2.9.9 Lemma 1.41

Es gilt $y \in I_\varepsilon(x) \implies \exists \delta > 0 : I_\delta(y) \subseteq I_\varepsilon(x)$

Beweis Sei $y \in I_\varepsilon(x) \implies |x-y| < \varepsilon \iff \varepsilon - |x-y| > 0$ Wähle $0 < \delta < \varepsilon - |x-y|$. Es ist nun zu zeigen $I_\delta(y) \subseteq I_\varepsilon(x)$, das heißt $z \in I_\delta(y) \implies z \in I_\varepsilon(x)$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
& z \in I_\delta(y) \implies |z-y| < \delta && (6)\\
\implies & |z-x| = |z-y+y-x| \leq |z-y| + |y-x| \leq \delta + |x-y| < \varepsilon && (7)\\
\implies & z \in I_\varepsilon(x) && \square
\end{aligned}
$$

2.9.10 Definition 1.42

A, B seien geordnete Mengen, $f : A \to B$ heißt:

- monoton $\begin{cases} \text{wachsend} & x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \\ \text{fallend} & x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \end{cases}$
- streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend} & x < y \implies f(x) < f(y) \\ \text{fallend} & x < y \implies f(x) > f(y) \end{cases}$

Beispiel 1.43 $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, x \mapsto x^n$ ist streng monoton wachsend $\forall n \in \mathbb{N}$

Beweis Induktion + Axiom M0 $\square$

2.9.11 Lemma 1.44

Sei $M, N \subseteq \mathbb{R}, f : M \to N$ streng monoton und bijektiv. Dann ist f^{-1} streng monoton.

Beweis Wir betrachten den Fall f streng monoton wachsend. Seien $y_1, y_2 \in N, y_1 < y_2, x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$.
Behauptung $x_1 < x_2$ (sonst wäre $x_1 \geq x_2$).
Falls $x_1 > x_2 \xRightarrow{\text{streng monoton}} f(x_2) > f(x_2)$ **Widerspruch** zu $y_1 < y_2$
Falls $x_1 = x_2 \implies y_1 = y_2$ **Widerspruch** zur Annahme $y_1 < y_2$ $\square$

2.9.12 Definition 1.45 Produktzeichen

Für $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ definieren wir $a^n := \prod_{j=1}^n a$ und für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}$ $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$.

2.9.13 Satz 1.46

Es gilt $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (beziehungsweise $\mathbb{R} \setminus \{0\}$),$n, m \in \mathbb{N}_0$ (beziehungsweise $\mathbb{Z}$)

1. $a^n a^m = a^{n+m}$

2. $(a^n)^m = a^{nm}$

3. $(ab)^m = a^m b^m$

Beweis Zunächst f+r $n, m \in \mathbb{N}_0$ durch Induktion nach n, dann für $n, m \in \mathbb{Z}$ (mit Hilfe der Definition von a^{-n})

2.9.14 Definition 1.47

Sei $n, k \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{n}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j}$$

2.9.15 Lemma 1.48

Sei $k, n \in \mathbb{N}_0$

1. $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$
   $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$ für $k \leq n$

2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ für $1 \leq k \leq n$

2.9.16 Satz 1.49

$\forall\, n \in \mathbb{N}_0, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

Beweis Induktion:

- Induktionsanfang: $n = 0, (x+y)^0 = 1, \binom{0}{j} x^0 y^0 = 1$ nach Definition

- Induktionsschritt $n \to n+1:$

  $$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n$$

mit der Induktionsvoraussetzung

$$
\begin{aligned}
&= (x+y)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^j \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j+1}y^j + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}y^{j+1} \\
&= \binom{n}{0}x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}x^{n+1-j}y^j + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}x^{n-i+1}y^i}_{\text{Substitution } i:=j+1} + \binom{n}{n}y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}\underbrace{\left(\binom{n}{j}+\binom{n}{j-1}\right)}_{\binom{n+1}{j}\text{nach Lemma 1.48}}x^{n+1-j}y^j + y^{n+1} \\
&= \sum j = 0^{n+1}\binom{n+1}{j}x^{n+1-j}y^j
\end{aligned}
$$
$\square$

2.9.17 Folgerung 1.50

1. $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} = 2^n$

2. $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$

Beweis: Setze in Binomische Formel $x = 1, y = 1$ beziehungsweise $y = -1$ $\square$

2.9.18 Lemma 1.51

Sei $m \in R$ nach oben (beziehungsweise nach unten) beschränkt
Dann gilt

1. $s = \sup M \iff \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : s - \varepsilon < x (\geq s)$

2. $l = \inf M \iff \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : (l \leq) x < l + \varepsilon$

Beweis Wir beweisen 1.
$s \neq \sup M \iff s$ ist nicht die kleinste obere Schranke von $m \iff$ es gibt eine kleinere obere Schranke $s' = s - \varepsilon$ von $M \iff$ nicht $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x > s - \varepsilon$ $\square$

2.9.19 Lemma 1.52

$\mathbb{N}$ ist unbeschränkt in $\mathbb{R}$

Beweis sonst $\exists x = \sup \mathbb{N}$ (nach Vollständigkeits Axiom), x kleinste obere Schranke $\xRightarrow{[[\text{Lemma 1.51}]]} \varepsilon = \frac{1}{2} \exists m_o \in \mathbb{N} : x - \frac{1}{2} < m_0 \implies m_0 + 1 \in \mathbb{N}, m_0 + 1 > x + \frac{1}{2} > x \implies x$ ist nicht die obere Schranke von $\mathbb{N}$ $\square$

2.9.20 Lemma 1.53 (Bernoullische Ungleichung)

$$\forall\, x \in [-1, \infty), n \in \mathbb{N}_0 : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Beweis Beweis durch Induktion:

- **IA**: $n = 0$ klar
- **IS**:

$$\begin{aligned} n \to n+1 : (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) && (8) \\ &\geq (1+nx)(1+x) = 1 + nx^2 + (n+1)x && (9) \\ &\geq 1 + (n+1)x \text{ da } x^2 \geq 0 && \square \end{aligned}$$

2.9.21 Folgerung 1.54

1. Sei $y \in (1, \infty)$. Dann gilt $\forall\, c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_0 y^n \in (c, \infty)$ („Konvergenz“ von y^n gegen 0)
2. Sei $y \in (-1, 1)$. Dann gilt $\forall\, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall\, n \geq n_0 : y^n \in I_\varepsilon(0)$ („Konvergenz“ y^n gegen 0)

Beweis

1. Für $x = y - 1 > 0$ gilt dann nach 2.9.20

$$\underbrace{(1+x)^n}_{y} \geq 1 + nx \implies y^n > nx$$

Nach 2.9.19 existiert für $c > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{c}{x} \implies$

$$\forall\, n \geq n_0 : y^n > nx \geq n_0 x \geq \frac{c}{x} x = c \implies \forall\, n \geq n_0 : y^n \in (c, \infty)$$

2. Für $x = \frac{1}{|y|} > 1 \xRightarrow{\text{nach [[1541]] mit } c = \frac{1}{\varepsilon}}$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall\, n \geq n_0 : x^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\implies \frac{1}{|y^n|} > \frac{1}{\varepsilon} \implies |y^n| < \varepsilon \square$$

2.9.22 Satz 1.55 (Existenz der m-ten Wurzel)

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, a \in [a, \infty) \text{ gilt } \exists! x \in [0, \infty) : x^m = a$$

Beweis (Skizze 1, 2) Wir geben ein Iterationsverfahren

$$p_3(x) = m$$

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, a_3 > 0$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a > 0, m \geq 2$, x muss die Gleichung $x^m - a = 0$ lösen, das heißt Nullstelle der Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^m - a$ suchen. Diese approximieren wir nach dem **Newton Verfahren**
x_0 sodass $x_0^m - a \geq 0$

$$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \impliedby \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} = f'(x_n)$$

$$x_{n+1} := \underbrace{x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{F(x_n)} = x_n - \frac{x_n^m - a}{m x_n^{m-1}}$$

$$= x_n\left(1 - \frac{1}{m}\left(1 - \frac{a}{x_n^m}\right)\right)$$

Hoffnung: $x_n \to x^*$ Sei $x_0^m > a$. Wir zeigen

1. $x_n > 0$
2. $x_n^m \geq a$
3. $x_{n+1} \leq x_n$

Beweis:

1. Induktion
2. Induktion
   - $n = 0, x_0^m \geq \implies x_0 > 0$, da $a > 0, x_0 \geq 0$
   - $n \to n + 1$

   $$x_n > 0, x_n^m \geq a \implies x_{n+1} = x_n\left(1 - \frac{1}{m}\left(1 - \frac{a}{x_n^m}\right)\right) \geq 0$$

   weil

   $$x_{n+1}^n = \underbrace{x_n^m}_{\geq 0}\left(1 - \frac{1}{m}\left(1 - \frac{a}{x_n^m}\right)\right)^m \underbrace{\geq}_{\text{Bernoulli}} x_n^m\left(1 - \frac{1}{m}\left(1 - \frac{a}{x_n^m}\right)\right) = 0$$

   $\implies x_{n+1} > 0$, da $a > 0$

3. Nach 2:
$$x_n^m \geq a \implies 0 \leq 1 - \frac{1}{m}\left(1 - \frac{1}{x_n^m}\right) \leq 1$$
Nach 1:
$$x_m > 0 \implies x_{n+1} = x_n\left(1 - \frac{1}{m}\left(1 - \frac{a}{x_n^m}\right)\right) < x_n$$
Wegen 1 ist $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ nach unten beschränkt $\implies$
$$x := \inf M \text{ existiert}$$
Wir wollen zeigen, dass $x^m = a$. Es gilt
$$x \leq x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)x_n + \frac{1}{m}\frac{a}{x_n^{m-1}}$$
$$\leq \left(1 - \frac{1}{m}\right)x_n + \frac{a}{m}\sup\{\frac{1}{x_n^{m-1} \mid x \in \mathbb{N}_0}\}$$
4. Es gilt nach nach 2
$$a \leq \inf\{x_n^m \mid n \in \mathbb{N}_0\} = (\inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}_0\})^m = x^m$$
und damit $x > 0$
Ferner gilt
$$y = \sup\{\frac{1}{x_n^{m-1}} \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \inf\{x_n^{m-1} \mid x \in \mathbb{N}_0\}^{-1}$$
mit 2.9.23
$$= \left(\frac{1}{\inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}}\right)^{m-1} = \frac{1}{x^{m-1}} \implies ay \leq \frac{a}{x^{m-1}}$$
5. Von oben wissen wir, dass $x \leq ay$
$$\implies x \leq ay \leq \frac{a}{x^{m-1}} \implies x^m \leq a$$

Aus 4 und 5 folgt $x^m = a$ □

2.9.23 Lemma 1.56

1. Seien für $n \in \mathbb{N}_0 : y_n > 0$ und $\inf\{x_n \mid x \in \mathbb{N}_0\} > 0$
Dann gilt
$$\sup\{\frac{1}{y_n} \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \frac{1}{\inf\{y_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}}$$
2. Seien für $n \in \mathbb{N}_0, y_n > 0, k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:
$$\inf\{y_n^k \mid n \in \mathbb{N}_0\} = (\inf\{y_n \mid n \in \mathbb{N}_0\})^k$$

(ohne Beweis)

3 Komplexe Zahlen

Motivation: $x^2 + 1 = 0$ nicht lösbar in $\mathbb{R}$
Wir betrachten die Menge der Paare $\{x, y\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf denen die Addition und Multiplikation wie folgt definiert ist:

- (KA) $\{x_1, y_1\} + \{x_2, y_2\} = \{x_1 + x_2, y_2 + y_2\}$
- (KM) $\{x_1, y_1\} \cdot \{x_2, y_2\} = \{x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1\}$

3.1 Komplexer Zahlenkörper

1. Die Menge der Paare $z = \{x, y\} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Addition 3 und Multiplikation 3 bildet den Körper $\mathbb{C}$ der **komplexen Zahlen** mit den neutralen Elementen $\{0, 0\}$ und $\{1, 0\}$
2. Die Gleichung $z^2 + \{1, 0\} = \{0, 0\}$ hat in $\mathbb{C}$ zwei Lösungen, welche mit $\imath := \{0, \pm 1\}$ bezeichnet werden
3. Der Körper $\mathbb{R}$ ist mit der Abbildung $x \in \mathbb{R} : x \mapsto \{x, 0\} \in \mathbb{C}$ isomorph zu einem Unterkörper von $\mathbb{C}$

3.1.1 Beweis

1. Die Gültigkeit des Kommutativitäts-, Assoziativs-, und Distributivitätsgesetzes verifiziert man durch Nachrechnen.
   Neutrale Elemente: Wir lösen die Gleichung $a + z = \{0, 0\}$ für beliebige gegebene $a \in \mathbb{C}, a = \{a_1, a_2\}$

$$\implies z = \{-a_1, -a_2\}$$

$$a \cdot z = \{1, 0\}$$

$$z = \frac{1}{a} := \{\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, -\frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2}\}, \text{ weil } a \cdot \frac{1}{a}$$

$$\text{weil } a\frac{1}{a} = \{a_1 \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} - \frac{a_2 a_1}{a_1^2 + a_2^2}\}$$

2. $i := \{0, 1\}$ hat die Eigenschaft

$$1 + \imath^2 = \{1, 0\} + \{0^2 - 1^2, 0\} = \{0, 0\} \implies 1 + \imath^2 = 0$$

   Ähnlich $1 + (-\imath)^2 = 0$

3. Die Zuordnung $x \in \mathbb{R} : x \mapsto \{x, 0\} \in \mathbb{C}$ bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf eine Untermenge von $\mathbb{C}$ ab, welche bezüglich der komplexen Addition und Multiplikation wieder ein Körper ist $\square$

3.2 Notation

$z = \{x, y\} =: x + \imath y,\ \ x, y \in \mathbb{R}$

- x ist Realteil $x = \Re z$
- y ist Imaginärteil $x = \Im z$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + \imath y_1) + (x_2 + \imath y_2) = \underbrace{x_1 + x_2}_{\Re(z_1+z_2)} + \imath \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\Im(z_1+z_2)}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + \imath y_1)(x_1 + \imath y_2) = x_1 x_2 + \imath y_1 x_2 + \imath y_2 x_1 + (\imath y_1)(\imath y_2) = \underbrace{x_1 x_2 - y_1 y_2}_{\Re(z_1 z_2)} + \imath \underbrace{(x_1 y_2 + y_1 x_2)}_{\Im(z_1, z_2)}$$

3.3 **TODO** Graphische Darstellung

3.4 Bemerkung

Die reellen Zahlen sind durch $\Im z = 0$ charakterisiert.

$$z_1 = z_2 \implies x_1 + \imath y_i = x_2 + \imath y_2 \iff x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

3.5 Korollar 1.59

Jede quadratische Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0,\ \ p, q \in \mathbb{R}$$

besitzt in $\mathbb{C}$ genau zwei Lösungen

$$z_{1,2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q} & p^2 \geq 4q \\ -\frac{1}{2} \pm \imath\frac{1}{2}\sqrt{|p^2 - 4q|} & p^2 - 4q < 0 \end{cases}$$

3.6 Fundamentalsatz der Algebra

Jede algebraische Gleichung der Form

$$z^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i = 0$$

hat in $\mathbb{C}$ mindestens eine Lösung. Beweis $\rightarrow$ Funktionstheorie

3.7 Betrag

Für komplexe Zahlen lässt sich ein Absolutbetrag definieren

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Damit:

$$x = \qquad r\cos\alpha y = \qquad r\sin\alpha z = \qquad x + \imath y = r(\cos\alpha + \imath\sin\alpha) \tag{10}$$

3.8 Konjugation

Zu einem $z = x + \imath y \in \mathbb{C}$ definieren wir eine konjugierte komplexe Zahl

$$\bar{z} = x - \imath y \in \mathbb{C}$$

Dann gilt

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$$

Aus der Definition:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 * z_2} = \overline{z_1} * \overline{z_2}$
- $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$
- $y = \frac{z-\bar{z}}{2\imath}$

4 Folgen

Eine Folge von reellen Zahlen wird gegeben durch eine Abbildung

$$\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, n \mapsto x_n$$

Wir bezeichnen die Folge auch mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$
Topologische Struktur auf Mengen.

- Abstände in $\mathbb{R}^1$ Betrag $|x - y| \xrightarrow{\text{Verallgemeinerung}}$ Norm / Metrik
- Umgebung in $\mathbb{R}^1$ \$ε\$-Intervall $\xrightarrow{\text{Verallgemeinerung}}$ Kugel Umgebung

Wir betrachten Folgen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$ (oder $\mathbb{C}$)

4.1 Definition 2.1 Konvergenz

Wir sagen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) gegen den Grenzwert (oder Limes) $a \in \mathbb{K}$ konvergiert

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \left(a = \lim_{n\to\infty} a_n\right)$$

wenn für beliebiges $\varepsilon > 0$ von einem $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ an gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon, n \geq n_\varepsilon$$

$$\iff \forall\,\varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_\varepsilon a_n \in I_\varepsilon(a)$$

4.2 Folgerung 2.2

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende beziehungsweise fallende Folge reeller Zahlen $M = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und sei nach oben beziehungsweise unten beschränkt. Dann gilt

$$a_n \to \sup M, a_n \to \inf M$$

Beweis → Übungen

4.3 Definition 2.3 Cauchy Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge wenn:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

(Cauchy Kriterium)

4.4 Definition 2.4 Teilfolge

Eine Teilfolge einer gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Auswahl $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, wobei a_{n_k} auch die Glieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind

Beispiel 1 Beispiel 2.5.

$$a_n = \frac{1}{m}$$

ist eine Cauchy-Folge. Für ein $\varepsilon > 0$ wählen wir n_ε so dass $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. Für beliebiges $n \geq m > N$

$$|a_m - a_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \frac{n-m}{mn} \leq \frac{n}{mn} = \frac{1}{m} < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon\Box$$

Satz 1 Jede Cauchy-Folge ist beschränkt**.**

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Angenommen, die Folge ist nicht beschränkt. Dann gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$|a_{n_k}| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$$

Aus dieser Teilfolge kann man eine weitere Teilfolge

$$\left(a_{n_{k_l}}\right)_{l\in\mathbb{N}}$$

extrahieren

$$\left|a_{n_{k_{i+1}}}\right| > 2\left|a_{n_{k_l}}\right| \quad l \in \mathbb{N}$$

Dann gilt

$$\left|a_{n_{k_{i+1}}} - a_{n_{k_l}}\right| \geq \left|a_{n_{k_{i+1}}}\right| - \left|a_{n_{k_l}}\right| > \left|a_{n_{k_l}}\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$$

im Widerspruch zur Cauchy-Folgen Eigenschaft. $\Box$

Satz 2 Jede konvergente Folge ist Cauchy-Folge**.**

Beweis.

$$
\begin{aligned}
a_n \xrightarrow[k\to\infty]{} a &\implies \forall\, \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,\forall\, n \geq n_\varepsilon : |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \\
&\implies \forall\, n, m \in n_\varepsilon : |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
$$

□

Lemma 1. *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$*) welche gegen* $a \in \mathbb{K}$ *und* $\tilde{a} \in \mathbb{K}$ *konvergiert. Dann ist* $a = \tilde{a}$*.*

Beweis. Beweis durch Widerspruch.
Falls $|a - \tilde{a}| > 0$, dann

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,\forall\, n \geq n_\varepsilon \varepsilon = |a - \tilde{a}|, |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und ein m_ε, sodass

$$\left| a_n - \tilde{a} < \frac{\varepsilon}{2} \right| \forall\, n \geq m_\varepsilon$$

Dann für $n \geq \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$:

$$|a - \tilde{a}| \leq |a - a_n| + |a_n - \tilde{a}| < \varepsilon`$$

Widerspruch $\implies$ $a = \tilde{a}$ □

Bemerkung 1. Die Mengen Abständen heißen *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in M konvergiert

Definition 1 Häufungwert, Häufungspunkt**.** Ein $a \in \mathbb{K}$ heißt Häufungswert einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$, wenn es zu beliebigen $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenelemente a_n gibt mit $|a - a_n| < \varepsilon$

Ein $a \in \mathbb{K}$ heißt Häufungspunkt einer Teilmenge M von $\mathbb{K}$, wenn $\forall\, \varepsilon > 0$ existieren unendlich viele $x \in M$, sodass $|a - x| < \varepsilon$

Beispiel 2.

1. $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$
   - divergente Folge
   - besitzt 2 Häufungswerte $a^{(1)} = 1, a^{(2)} = -1$
2. Wir nehmen $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a, b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ und definieren eine neue Folge c_n sodass

$$
\begin{aligned}
c_{2n} &:= b_n, n \in \mathbb{N} \\
c_{2n+1} &:= a_n, n \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

   $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat 2 Häufungswerte a und b

Bemerkung 2. Nach 1 hat die konvergente Folge 1 Häufungswert

Lemma 2 2.11. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ und a ein Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann konvergiert $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir wählen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sodass

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \,\forall\, n, m > n_\varepsilon \text{ (aus Cauchy-Folge)}$$

und $m_\varepsilon > n_\varepsilon$ mit

$$|a - a_{m_\varepsilon}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ (Häufungswert)}$$

Dann folgt

$$\forall\, n > m_\varepsilon : |a - a_n| \leq |a - a_{m_\varepsilon}| + |a_{m_\varepsilon} - a_n| < \varepsilon \implies a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$ □

Satz 3. *A abgeschlossen $\iff$ (a Häufungspunkt von $A \implies a \in A$) A abgeschlossen in $M \iff M \setminus A =: CA$ offen*

Beweis. ($\impliedby$):
Sei jeder Häufungspunkt von A in A $x \in CA (= \mathbb{R} \setminus A) \implies x$ kein Häufungspunkt von $A, x \notin A$

$$\implies \varepsilon : I_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset \implies \exists \varepsilon > 0 : I_\varepsilon \subseteq CA$$

$\implies CA$ offen $\implies A$ abgeschlossen
($\implies$):
Sei A abgeschlossen, also CA offen, ist Häufungspunkt $x \notin A$ das heißt $x \in CA$, so gilt

$$\exists \varepsilon > 0 : I_\varepsilon \subseteq CA \implies I_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset \text{lightning}$$

Widerspruch zur Definition von Häufungspunkt $\implies$ jeder Häufungspunkt von A ist in A □

Lemma 3 2.14. *Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ besitzt eine monotone Teilfolge*

Beweis. Sei $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall\, k \geq n, a_n \geq a_k\}$

- Fall 1: B unendlich. Wir zählen $B \subseteq \mathbb{N}$ monoton wachsend

$$n_0 = \min B$$
$$n_{k+1} = \min\{n \in B, n > n_k\}$$

Dann ist die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend

- Fall 2: B ist endlich oder leer

  $$\Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : n \notin B$$

  das heißt

  $$\exists k \leq n : a_n < a_k$$

  Damit können wir definieren

  $$n_{k+1} = \min\{k \geq n_k : a_{n_k} < a_k\}$$

  und die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend

$\square$

Beispiel 3. 1. $a_n = (-1)^n\left(1 + \frac{1}{n+1}\right), \quad B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ monoton fallend

2. $a_n = (-1)^n n, (a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monotone Teilfolge

Satz 4 Satz von Bolzano Weierstrass**.** *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ (gilt in $\mathbb{R}^n$!) Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *A ist beschränkt abgeschlossen*
2. *Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus A hat einen Häufungswert in A*
3. *Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus A besitzt eine in A konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$*

Beweis. Wir zeigen $3 \implies 2 \implies 1 \implies 3$
$3 \implies 2$:
Sei $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ a ist auch der Häufungswert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$2 \implies 1$:

1. Beschränktheit: Angenommen dies ist falsch. Dann

   $$\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A : |a_n - a| \geq n \, \forall n \in \mathbb{N} \; (a \in A)$$

   Nach Voraussetzungen hat jede diese Folge einen Häufungspunkt $x \in A$ und es gilt

   $$|x - a| \geq |a_n - a| - |a_n - x| \geq n - |x - a_n|$$

   Dabei gilt $|x - a_n| < 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ (aus Häufungswert)

   $$\implies |x - a| \geq n - 1$$

   Für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$`

2. Abgeschlossenheit: Wir nutzen Satz 3 Zu zeigen: wenn a Häufungspunkt von $A \implies a \in A$ Für
$$I_{\frac{1}{n}}(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \frac{1}{n}\}$$
gilt
$$I_{\frac{1}{n}}(a) \cap A \neq \emptyset \implies \exists a_n \in A : |a_n - a| < \frac{1}{n}$$
Die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \to a$, da $\frac{1}{n} \to 0$ Nach Voraussetzung hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungswert $\tilde{a} \in A$. Wir zeigen $a = \tilde{a}$ Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
$$\begin{aligned}
&\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq n_\varepsilon && \text{(Aus } a_n \to a\text{)}\\
&\exists m_\varepsilon \geq n_\varepsilon : |\tilde{a} - a_{m_\varepsilon}| < \frac{\varepsilon}{2} && \text{(Aus Häufungswert)}\\
&\implies |a - \tilde{a}| \leq |a - a_{m_\varepsilon}| + |a_{m_\varepsilon}| < \varepsilon\\
&\implies |a - \tilde{a}| = 0\\
&\implies \tilde{a} = a \in A
\end{aligned}$$

$1 \implies 3$:
Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine monotone Teilfolge (nach 3), (a_{n_k}) ist beschränkt, da A beschränkt ist $\implies (a_{n_k})$ ist konvergent (4.2)
Wir müssen zeigen, dass
$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n_k} \in A$$

Angenommen $a \notin A \implies a \in \mathcal{C}A, \mathcal{C}A$ ist offen
$$\implies \exists I_\varepsilon(a) \subseteq \mathcal{C}A \implies I_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$$
Nun ist aber mit geeigneten $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$
$$\forall n \geq n_\varepsilon : a_{n_k} \in I_\varepsilon(a) : a_{n_k} \in A \implies a_{n_k} \in I_\varepsilon(a) \cap A \text{ `} \qquad \square$$

Bemerkung 3.
- Erweiterung zu $\mathbb{R}^n$ möglich
- Ein Raum heißt folgenkompakt, wenn jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge hat
  - Nach B-W Satz ist $\mathbb{R}(\mathbb{R}^n)$ folgenkompakt
- In $\mathbb{R}$ alle Cauchy-Folgen konvergieren
  - Cauchy Folge in $\mathbb{R} \implies$ beschränkt und Wertemenge ist abgeschlossen $\xRightarrow{B-W Satz} (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat einen Häufungswert in $A \overset{2}{\Rightarrow}$ konvergiert gegen $a \in A$

4.5 Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen

Satz 5. *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente Folgen in* $\mathbb{K}(\mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C})$

$$b_0 \neq 0 \,\forall\, n \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

Dann gilt:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$

Satz 6 2.15. *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente Folgen in* $\mathbb{R}$*. Dann gilt*

1. $a_n \leq b_n \,\forall\, n \in \mathbb{N} \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
2. $|a_n| \leq b_n \,\forall\, n \in \mathbb{N} \implies |\lim\limits_{n\to\infty a_n}| \leq \lim b_n$

Beweis. 1. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben

$$\exists n_\varepsilon : \forall\, n \geq n_\varepsilon : b_n \leq \lim_{k\to\infty} b_n + \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$\lim_{k\to\infty} a_k \leq a_n + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies \lim_{k\to\infty} a_k \leq a_n + \frac{\varepsilon}{2} \leq b_n + \frac{\varepsilon}{2} \leq \lim_{k\to\infty} b_k + \varepsilon \,\forall\, \varepsilon > 0$$

$$\implies \lim_{\to\infty} a_k \leq \lim_{k\to\infty} b_k$$

2. Wir wählen $a_n = |a_n|$ und müssen noch zeigen

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to\infty}\right| a_n \qquad \text{(Übung)}$$

$\square$

4.6 Geometrische Folge

Die geometrische Folge ist definiert durch

$$a_n = cq^n$$

Lemma 4 2.16. $\forall\, q \in \mathbb{R}, |q| < 1$ *konvergiert die geometrische Folge* $a_n = cq^n$ *gegen Null.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Annahme ist $|q| < 1 \implies |q|^{-1} > 1$, somit $|q|^{-1} = 1+x$ für ein $x > 0$.

Zu zeigen: $|cq^n - 0| < \varepsilon$ für genug große n, das heißt

$$c\left(\frac{1}{1+x}\right)^n < \varepsilon \iff \frac{c}{\varepsilon} < (1+x)^n$$

Das Archimedisches Axiom garantiert die Existenz von $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$n_0 > \frac{c}{x\varepsilon} - \frac{1}{x} = \frac{c-\varepsilon}{x\varepsilon}$$
$$\forall\, n \geq n_0 : \frac{c}{\varepsilon} = \left(\frac{c}{x\varepsilon} - \frac{1}{x}x + 1 < n_0 x + 1 \leq nx + 1\right)$$

daraus folgt aus der Bernoulli Ungleichung

$$\frac{c}{\varepsilon} < (1+x)^n \implies cq^n \to 0$$ □

Folgerung 1 2.17. Die geometrische Reihe

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \sum_{i=0}^{n} q^i$$

konvergiert für $|q| < 1$ und $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$

Beweis.

zu Beweisen mit Induktion

$$(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^n) = 1 + q^{n+1}$$
$$\implies S_n - \frac{1}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}-1}{1-q} = -\frac{q^{n+1}}{1-q}$$
$$\left|S_n - \frac{1}{1-q}\right| = c|q|^n < \varepsilon\, \forall\, n \geq n_\varepsilon$$

$c = |\frac{1}{1-q}|$

$$s_n \to \frac{1}{1-q}$$ □

Beispiel 4 2.18.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n}{n!} \leq \lim\limits_{n\to\infty} cq^n$ mit $|q| < 1$

2. $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n}\frac{n+1-1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} + \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{1+1_n}+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$

3. $a_n = \sqrt[m]{x}$, x gegeben, $\xrightarrow{n\to\infty} 1$ Übungen

4. $a_n = \sqrt[n]{m} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

5. $a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$
   - $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend
   - beschränkt: $a_n < 3\,\forall\, n \in \mathbb{N}$
   - $\implies (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, Limes ist sogenannten Zahl e

6. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert: $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ Fibonacci Folge

4.7 Umgebung

Definition 2 2.19. $A \subseteq \mathbb{K}$ heißt Umgebung von $a \in \mathbb{K} \iff \exists\, \varepsilon > 0 I_\varepsilon(a) \subseteq A$

Folgerung 2 2.20. Aus der Definition folgt

1. Sei $U_i, i \in I$ Umgebung von a, so ist $\bigcup\limits_{i\in I} U_i$ Umgebung von a
2. Sind $U_1, \dots, U_n$ Umgebung von a, so ist auch $U_1 \cap \dots U_n$ Umgebung von a
3. $\forall$ Umgebung von a : $\exists$ Umgebung von a, sodass $\forall\, y \in V, U$ Umgebung von y ist

Beweis. 1. Für irgendein

$$i_0 \in I\, \exists\, \varepsilon > 0 : I_\varepsilon(a) \subseteq U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$

2. Es gilt nach Voraussetzung $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n > 0$ mit $I_{\varepsilon_i}(a) \subseteq U_i$ für $i = 1, \dots, n$. Folglich gilt für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} > 0,\ I_\varepsilon(a) \subseteq U_i(\forall\, i = 1, \dots, n) \implies I_\varepsilon(a) \subseteq U_1 \cap \dots U_n$

3. Nach Voraussetzung gibt es für eine Umgebung U von a ein $\varepsilon > 0$ mit $I_\varepsilon(a) \subseteq U$ $V := I_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \subseteq U$ ist ebenfalls Umgebung von a und $\forall\, y \in V$ gilt

$$I_{\frac{\varepsilon}{2}} \subseteq I_\varepsilon(x) \subseteq U, \text{ denn } \underbrace{|y - z|}_{z\in I_{\frac{\varepsilon}{2}}} < \frac{\varepsilon}{2} \implies |x - z| \leq |x - y| + |x - z| < \varepsilon$$

□

Definition 3 2.21.

1. $A \subseteq \mathbb{K}$ ist offen $\iff \forall\, a \in A$ ist A die Umgebung von a
   (in $\mathbb{R}\,\forall\, a \in A\, \exists\, \varepsilon > 0 I_\varepsilon(a) \subseteq A$) Für Intervalle (a, b) haben wir schon gezeigt, dass sie offen sind

2. $A \subseteq \mathbb{K}$ heißt abgeschlossen $\iff$ $C_{\mathbb{K}}A$ offen

3. Abschließung von A:

$$\bar{A} := \{a \in \mathbb{K} \mid a \in A \vee a \text{ Häufungspunkt von } A\}$$

4. Rand von A:

$$\partial A := \{a \in \mathbb{K} \mid \forall \text{ Umgebung } U \text{ von } a : A \cap U \neq \emptyset \wedge CA \cap U \neq \emptyset\}$$

Beispiel 5 2.22.

$$\begin{aligned} A &= (a, b] \\ \bar{A} &= [a, b] \\ \partial A &= \{a, b\} \\ \forall \varepsilon > 0 I_\varepsilon(a) \cap (a, b] \neq \emptyset \\ I_\varepsilon(a) \cap \mathbb{R} \setminus (a, b] \neq \emptyset \end{aligned}$$

Sei $A = \mathbb{Q}$, dann $\bar{A} = \mathbb{R}$, $\partial A = \mathbb{R}$ denn in jedem \$$\varepsilon$\$-Intervall um eine rationale Zahl gibt es sowohl rationale als auch irrationale Zahlen

Bemerkung 4.

- Die Grenzwerte und Häufungswerte kann man auch in ganz

$$\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{\infty\} =: \hat{\mathbb{R}}$$

  mit einer neuen Definition von Abstand:

$$(x, y) := |\xi(x) - |\xi(y)||$$

$$\xi(x) := \begin{cases} \frac{|x|}{1+|x|} & x \in \mathbb{R} \\ \pm 1 & x = \pm\infty \end{cases}$$

- $\hat{\mathbb{R}}$ ist folgenkompakt

- Algebraische Operationen in $\hat{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} x + \infty := \infty + x := \infty \, \forall x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ x - \infty := -\infty + x := -\infty \, \forall x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ x \cdot \infty := \infty \cdot x := \begin{cases} \infty & \forall x \in \hat{\mathbb{R}}, x > 0 \\ -\infty & \forall x \in \hat{\mathbb{R}}, x < 0 \end{cases} \\ \frac{1}{\infty} = \frac{1}{-\infty} =: 0 \end{aligned}$$

  Sinnlos wäre:

$$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0 \cdot (-\infty), \frac{\infty}{\infty}, \ldots$$

- Damit könne wir die Rechenregeln auch für Folgen in $\hat{\mathbb{R}}$ formulieren
- In $\hat{\mathbb{R}}$ hat jede Folge einen Häufungswert

Definition 4 2.23**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge von reellen Zahlen, $\emptyset \neq H \subseteq \hat{\mathbb{R}}$ die Menge der Häufungswerte von (a_n) in $\hat{\mathbb{R}}$.
Dann sei:

$$\overline{\lim} a_n := \lim_{n\to\infty} \inf a_n := \inf H \qquad \text{(Limes inferior)}$$
$$\underline{\lim} a_n := \lim_{n\to\infty} \sup a_n := \inf H \qquad \text{(Limes superior)}$$

Bemerkung 5.

1. Definition 4 kann man auch für $\mathbb{R}$ formulieren
2. $$a = \lim_{n\to\infty} \inf a_n \iff \forall \varepsilon \begin{cases} (1)\{n \mid |a - a_n| < \varepsilon\} \text{ ist unendlich (weil } a \text{ Häufungswert ist)} \\ (2)\{n \mid a_n < a - \varepsilon\} \text{ ist endlich (} a \text{ ist kleinste Häufungswert)} \end{cases}$$

Beispiel 6 2.24.

$$\begin{aligned} a_n &= n + (-1)^n n \\ a_{2n+1} = 0 \,\forall\, n &\implies 0 \text{ ist Häufungswert} \\ a_{2n} = 4n \to \infty &\implies \infty \text{ ist Häufungswert} \end{aligned}$$

also gilt

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \infty$$

Bemerkung 6.

- $a_n \to a$ in $\hat{\mathbb{R}} \iff \lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n + \lim\limits_{n\to\infty} \inf b_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf (a_n + b_n)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \inf b_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf (a_n \cdot b_n)$ für $a_n, b_n > 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n + \lim\limits_{n\to\infty} \sup b_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$ (zum Beispiel betrachte $a_n = n^2, b_n = \frac{1}{n}$)

5 Reihen (Unendliche Summen)

Definition 5 2.19**.** Eine Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

(**unendliche Summe**) konvergiert, wenn die Folge ihrer **Partialsummen** konvergiert

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \xrightarrow{n\to\infty} S_\infty < \infty$$

Beispiel 7.

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$
2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} -1 & n \text{ ungerade} \\ 0 & n \text{ gerade} \end{cases}$ S_n $(= -1, 0, -1, 0, \dots)$ konvergiert nicht
3. $S_n = \sum_{j=0}^{n} z^j = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ Für $|z| < 1$ konvergiert $S_n \to \frac{1}{1-z} \implies \sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1-z}$
4. Harmonische Reihe: Seien $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, Behauptung $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, also divergent

Beweis von 4.

$$S_{2^{n+1}} = \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}}}_{2^j \text{ Summanden}} \frac{1}{2^{j+1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} 2^j \frac{1}{2^{j+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

□

Satz 7. *Seien* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *konvergente Reihen,* $\alpha \in \mathbb{R}$*, dann sind auch die Reihen*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k), \sum_{k=0}^{\infty} \alpha a_k$$

konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Beweis. Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen □

5.1 Konvergenzkriterien

Cauchy Kriterium für Partialsummen besagt, dass eine Reihe genau dann konvergent ist, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > m \geq n_\varepsilon : |s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

Lemma 5 2.28 Reihenkonvergenz. *Eine Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *kann nur dann konvergent sein, wenn ihre Partialsummen beschränkt sind und ihre Glieder eine Nullfolge bilden*

Beweis. Sei $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} s_n$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s_\infty - s_\infty = 0$$

Die Beschränktheit der Partialsummen folgt notwendig aus der Beschränktheit konvergenter Folgen. □

Satz 8 2.29. *Sei* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge. Dann* $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1}) = a_1$

Beweis.

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=2}^{n+1} a_k = a_1 - a_{n+1} \implies |s_n - a_1| = |a_{n+1}| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

□

Beispiel 8 2.30.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{k}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{a_{n+1}} \right) = a_1 = \frac{1}{2}$$

Definition 6 2.31. Eine Reihe $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{R}$ heißt alternierend, wenn ihre Elemente alternierende Vorzeichen haben, das heißt $a_n \cdot a_{n+1} \leq 0$

Satz 9 2.32.

1. *Eine alternierende Reihe* $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *ist konvergent, wenn die Absolutbeträge ihrer Glieder eine monoton fallende Nullfolge bilden*
2. *Für die Reihenreste gilt dabei die Abschätzung*

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} a_k \right| \leq |a_m|$$

Beweis. 1. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_1 > 0$. Dann ist $a_{2n-1} + a_{2n} \geq 0, a_{2n} + a_{2n+1} \geq 0$ Und folglich

$$s_{2n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2n} + a_{2n+1} \leq s_{2n-1} \leq \ldots \leq s_3 \leq s_1$$

$$s_{2n} = (a_1) + (a_2 + a_4) + \ldots + \left(\underbrace{a_{2n-1} + a_{2n}}_{\geq 0} \right) \geq s_{2n-2} \geq \ldots \geq s_2$$

Ferner gilt

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \geq 0$$

und somit

$$s_2 \leq \ldots \leq s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq \ldots \leq s_1$$

(S_{2n}) monoton wachsend, s_{2n+1} monoton fallend, beide beschränkt

$$\implies s_{2n} \xrightarrow{n \to \infty} s_*, \implies s_{2n+1} \xrightarrow{n \to \infty} s^*$$
$$s_{sn} \leq s_* \leq s^* \leq s_{2n+1}$$

da (a_n) Nullfolge

$$|s_{2n+1} - s_{2n}| = |a_{2n+1}| \to 0$$
$$s_* = s^* = s_\infty$$

2. Aus 1. folgt $m = 2n + 1$

$$0 \leq s_\infty - s_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{\infty} a_k = s_\infty - s_{2n+1} + a_{2n+1} \leq a_{2n+1}$$

und sonst

$$\left| \sum_{k=2n+1}^{\infty} a_k \right| \leq |a_{2n+1}|$$

Analog im Fall $m = 2n$

□

Beispiel 9 2.33. 1. $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ konvergiert nach dem Leibniz Kriterium

$$\left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \frac{1}{k} \to 0 \text{ monoton}$$

2. Die Leibniz Reihe $s_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ konvergiert nach Leibniz Kriterium

Bemerkung 7 Monotonie ist wichtig.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ mit } a_{2k} := -\frac{1}{2^k}, a_{2k-1} := \frac{1}{k}$$

ist divergent:

- $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0$, aber
- $1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 1$

Definition 7 2.34. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, genau dann wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist

Satz 10 2.35. *Sei* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *konvergent in* $\mathbb{R}$. *Dann ist* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent*

Beweis. Mit Cauchy Kriterium:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

aus der absoluten Konvergenz □

Satz 11 2.36 Umordnungssatz**.** *Sei* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine absolut konvergente Reihe in* $\mathbb{R}$. *Dann gilt für jede bijektive Abbildung* $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Beweis. Ranacher für spezifische Umordnung □

Beispiel 10 2.37. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ konvergent (aber nicht absolut)

Behauptung: $\exists$ Umordnung τ, sodass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\tau(k)-1}}{\tau(k)}$ divergiert Beachte

$$\frac{1}{2^j+1} + \frac{1}{2^j+3} + \ldots + \frac{2 \cdot 2^j - 1}{\leq} 2^{j-1} \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{4}$$

$\implies$ Die Umordnung

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{6}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)-\frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}}+\ldots+\underbrace{\left(\frac{1}{2^j+1}+\frac{1}{2^j+3}+\ldots+\frac{1}{2^{j+1}-1}\right)-\frac{1}{2^k+2}}_{>\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}}$$

konvergiert nicht

Satz 12 2.38 Cauchyprodukt für Reihen. *Seien* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *absolut konvergente Reihen (in* $\mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$*). Sei* $c_m = \sum_{k=1}^{m} a_k b_{m-k}$*. Dann konvergiert*

$$\sum_{m=1}^{\infty} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right)$$

(ohne Beweis)

Satz 13 2.39 Vergleichskriterium. *Gegeben seien zwei Reihen* $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tilde{s}_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k$

1. *Gilt für fast alle* $k \in \mathbb{N}$ *mit einer Konstante* $\alpha > 0 \quad |a_k| \leq \alpha \tilde{a}_k$
   (für fast alle $n \in \mathbb{N} :=$ *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *außer endlich viele)*
   so ist $\tilde{s}_\infty$ *eine* ***Majorante*** *von* s_∞ *und aus der absoluten Konvergenz von* $\tilde{s}_\infty$ *folgt auch die von* s_∞*, absolute Divergenz von* s_∞ *impliziert die absolute Divergenz von* $\tilde{s}_\infty$

Beweis. ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Voraussetzungen $\forall\, k \in \mathbb{N}$ gelten

1. Ist $\tilde{s}_\infty$ konvergent

$$\implies \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \alpha \sum_{k=1}^{n} |\tilde{a}_k| \leq \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

   $\implies S_n$ sind beschränkt, S_∞ absolut konvergent Umgekehrt folgt aus Divergenz von $\tilde{S}_\infty$ auch $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \to \infty \implies \tilde{S}_\infty$ auch Divergent

2. Aus Voraussetzung

$$\left|\frac{a_{k+1}}{\tilde{a}_{k+1}}\right| \leq \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\left|\frac{a_k}{\tilde{a}_{k+1}}\right| \leq \left|\frac{\tilde{a}_{k+1}}{\tilde{a}_k}\right|\left|\frac{a_k}{\tilde{a}_{k+1}}\right| = \left|\frac{a_k}{\tilde{a}_k}\right| \leq \ldots \leq \left|\frac{a_1}{\tilde{a}_1}\right| =: \alpha$$

   $\implies |a_{k+1}| \leq \alpha |a_k|$. Aus 1. folgt die Aussage

□

Korollar 1 2.34 Wurzelkriterium. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, wenn es ein $g \in (0,1)$ gibt, mit dem für f.a. (fast alle) $k \in \ltimes$ gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q \leq 1$, beziehungsweise $\lim_{k\to\infty} \sup \sqrt{|a_k|} < 1$
Wenn für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ gilt $\sqrt[k]{|a_k|} > 1$, beziehungsweise $|a_k| > 1$, so ist die Reihe absolut divergent.

Beweis. Nach Voraussetzung $|a_k| \leq q^k$, das heißt die konvergierende geometrische Reihe $\tilde{s}_\infty$ mit $q \in (0,1)$ ist Majorante für s_∞ $\square$

Korollar 2 2.41 Quotientenkriterium. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, wenn es ein $q \in (0,1)$ gibt mit dem für f.a. $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1, \text{ bzw. } \lim_{k\to\infty} \sup\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$$

Wenn für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$, so ist die Reihe absolut divergent

Beweis. Vergleich mit

$$\tilde{s}_\infty \sum_{k=1}^{\infty} q^k$$

$\square$

Beispiel 11 2.42.

1. $s_\infty \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, z \in \mathbb{C}$
   Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}\frac{k!}{z^k}\right| = \left|\frac{z}{k+1}\right|$$

   Sei $k \geq 2|z| \implies \left|\frac{z}{k+1}\right| \leq \frac{1}{2} \implies s_\infty$ absolut konvergent.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

$$\left|\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}\frac{k^k}{k!}\right| = \left|\frac{k}{k+1}\right|^k = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \leq \frac{1}{1+k\frac{1}{k}} = \frac{1}{2}$$

   $\implies s_\infty$ absolut konvergent

Bemerkung 8. 1. Falls $q = 1 \implies$ die Kriterien geben keine Entscheidung, zum Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \vee \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{k}{k+1}\right| \to 1$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \to 1$$

2. Für die Divergenz ist es wichtig, dass $\exists\, n_0 \,\forall\, n \geq n_0 a_n > 0$, Wir nehmen

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & n = 2^k \\ 2\left(2^{-k}\right)^2 & n - 1 = 2^k \\ 0 & \end{cases}$$

$\sum a_n$ konvergiert, aber $\lim_{a_n \neq 0} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$

Lemma 6 2.43 Cauchy Verdichtungssatz**.** *Eine Reihe* $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$*, mit* $a_k \in \mathbb{R}_+$*, die monoton fallende Nullfolge bilden hat dasselbe Konvergenzverhalten wie die verdichtete Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$$

Beweis. Wir setzen $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k, \tilde{s}_n := \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$
Für $n < 2^{k+1}$

$$S_n = a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + \left(a_{2^k} + \ldots + a_{k^{k+1}-1}\right) \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k} = \tilde{s}_n$$

$\implies$ Konvergenz von $\tilde{s}_k$ impliziert Konvergenz von S_n
Falls die verdichtete Reihe divergent ist, so folgt aus der für $n \geq 2^{k+1}$ gültigen Beziehung

$$\begin{aligned} s_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \ldots + a_8) + \ldots + \left(a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}\right) \\ &\geq a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \ldots + 2^k a_{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2}\tilde{S}_{k+1} \end{aligned}$$

auch die Divergenz von S_n □

5.2 Potenzreihe

$$S_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

mit den Koeffizienten $c_k \in \mathbb{K}$, Zentrum $x_0 \in \mathbb{K}$ und Argument $x \in \mathbb{K}$

- Die geometrische Reihe ist ein Spezialfall der allgemeinen Potenzreihe
- Unendlicher Dezimalbruch

$$0, d_1, d_2, d_3, \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} d_k 10^{-k}, d_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$$

Satz 14 2.44 Potenzreihen. *Eine Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ *konvergiert absolut* $\forall\, x \in \mathbb{K}$ *mit der Eigenschaft*

$$|x-x_0| < \rho := \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|c_k|}}$$

Für $|x-x_0| > \rho$ *ist sie divergent*

Beweis. Für $x \neq x_0$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{\left|c_k|x-x_0|^k\right|} = |x-x_0| \lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{|x-x_0|}{\rho} = \begin{cases} < 1 & |x-x_0| < \rho \\ > 1 & |x-x_0| > \rho \end{cases}$$

$\square$

Bemerkung 9. Falls $\rho = \infty$, konvergiert die Reihe $\forall\, x \in \mathbb{K}$
Falls $\rho = 0$, konvergiert die Reihe für kein $x \neq x_0$

- Die Konvergenzgrenze ρ ist die größt mögliche und wird **Konvergenzradius** der Reihe bezeichnet
- Für $\lim\sup \sqrt[k]{|c_k|} = \infty$ konvergiert die Reihe für kein $x \neq x_0$ und wir setzen $\rho 0$
- Falls $\lim\sup \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \implies \rho = \infty$

5.3 Exponentialreihe

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

ist eine Potenzreihe. Ihr Konvergenzradius

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

Satz 15 2.45. *Der Wert der* exp *Reihe für* $x = 1$ *ist die Eulersche Zahl* e

$$\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e$$

Diese ist irrational

Beweis. In Übung 6.2 gezeigt

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Angenommen $e = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}, q > 1$. Betrachte Abschätzung, für die Restgliederdarstellung von e:

$$\begin{aligned}
s_{n+m} - s_n &= \left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{(m+n)!}\right) - \left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \ldots + \frac{1}{(m+n)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^{m-1}}\right) = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{(n+1)^k}
\end{aligned}$$

für $x = \frac{1}{(n+1)}$ erhält man

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n+1)!}\frac{1-x^m}{1-x} \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+1}{n}
\end{aligned}$$

Da dies für alle $m \in \mathbb{N}$, folgt

$$0 < e - s_n \leq \frac{1}{n!n} \implies 0 < en! - s_n n! \leq \frac{1}{n}$$

□

6 Stetige Abbildungen

6.1 Grenzwert einer Funktion, Stetigkeit

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x -}{x}$$

und wollen diese auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen, das heißt Wir suchen ein $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f} \mid \mathbb{R} \setminus \{0\} = f$ und einen Wert $\tilde{f}(0) \in \mathbb{R}$

Allgemeiner überprüft man für Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ die Fortsetzbarkeit auf den Abschluss $\bar{D} \subseteq \mathbb{K}$, wobei

$$\begin{aligned}
\bar{D} &= \{x \in \mathbb{K} \mid x \in D \vee \text{ oder } x \text{ ist HP von D}\} \\
&= \{x \in \mathbb{K} \mid \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D \wedge x = \lim_{n\to 0} x_n\}
\end{aligned}$$

(analog zur Plenarübung)

Definition 8 3.1. Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ hat im Punkt $x_0 \in \bar{D}$ einen Grenzwert $a \in \mathbb{K}$, wenn alle Folgen $(x_n)_{n \int \mathbb{N}} \subseteq D$ gilt:

$$x_n \to x_0 (n \to \infty) \implies f(x_n) \to a(n \to \infty)$$

Wir schreiben kurz: $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$

Bemerkung 10.

- Falls der Grenzwert existiert, ist er eindeutig.
- Ist $T \subseteq D \subseteq \mathbb{R}, T \neq \emptyset, f : D \to \mathbb{R}, x_\in \bar{T}$, dann verstehen wir unter
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in T}} f(x)$$
den Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f \mid T$, falls er existiert.
- Spezialfälle:
$$T_> := \{x \in D \mid x > x_0\} : f\bigl(x_0^+\bigr) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in T_>}} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$
(rechtsseitiger Grenzwert)
$$T_< := \{x \in D \mid x < x_0\} : f\bigl(x_0^-\bigr) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in T_<}} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$
(linksseitiger Grenzwert)
- Existiert $\lim_{x \to x_0} f(x), x_0 \in \bar{T} \subseteq \bar{D}$, dann gilt
$$\lim_{x \to x_0 x \in T} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$
- Es gelten die üblichen Rechenregeln für Grenzwerte $(x, \cdot, :)$

Beispiel 12 3.2.

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto \frac{x}{|x|}$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \wedge \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$
Also existiert $\lim_{x \to 0} f(x)$ nicht
2. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$
Es gilt $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$, denn für $|x| \leq 1, x \neq 0$ gilt
$$|f(x) - 1| = \left|\frac{e^x - 1 - x}{x}\right| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}\right| \leq |x| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^{k-2}}{k!} \leq |x| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} = |x| \underbrace{(e-2)}_{>0}$$
Für Nullfolgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [-1, 1] \setminus \{0\}$ folgt $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 1$ Das heißt f besitzt eine Fortsetzung
$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Definition 9 3.3 Asymptotisches Verhalten**.** Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ nach oben (nach unten) unbeschränkt. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat für $x \to +\infty (x \to -\infty)$ einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn gilt:
$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists y \in \mathbb{R} : |f(x) - a| < \varepsilon \, \forall x \in D, x > y (x < y)$$
Schreibweise: $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$, oder $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$

Sei $x_0 \in \bar{D}$. Die Funktion f divergiert bestimmt gegen $+\infty(-\infty) : \iff \forall K \in \mathbb{R}_+ \, \exists \delta > 0 : f(x) > K (f(x) < -K) \, \forall x \in I_\delta(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$
Schreibweise: $f(x) \to +\infty (f(x) \to -\infty)$ für $x \to x_0$

Beispiel 13 3.4. 1. $f : \mathbb{R} \setminus \{1\}, x \mapsto \frac{1}{x-1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$$

wir schreiben kurz $\lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

2. $\forall\, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} x^k e^x, \text{ denn } e^x = \exp(x) \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}, x \geq 0$$

$$\implies \frac{x^k}{e^x} \leq \frac{(k+1)!}{x} \to 0(x \to \infty)$$

$$x^k e^x = \frac{(-1)^k |x|^k}{e^{|x|}}, x < 0$$

Definition 10 3.5. Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn gilt: Für alle Folgen $x_n \to x_0(n \to \infty) \implies f(x_n) \to f(x_0)(n \to \infty)$ Andernfalls heißt sie unstetig in $x_0 \in D$. f heißt stetig (auf ganz D), wenn sie in jedem $x_0 \in D$ stetig ist. (*insert Symbolbild hier*)

Lemma 7 3.5. *1. Ist $f : D \to \mathbb{K}$ stetig, dann ist auch $f \mid T$ stetig, $T \subseteq D$*

2. Ist $f : D \to \mathbb{K}$ stetig, so auch $\Re(f) : D \to \mathbb{R}$, $\Im(f) : D \to \mathbb{R}$, $|f| : D \to \mathbb{R}_+$ stetig (auf ganz D)

3. Sind $f, g : D \to \mathbb{K}$ stetig, so auch $f + g, f \cdot g : D \to \mathbb{K}$

4. Ist $f : D \to f(D) \subseteq \mathbb{K}, g : f(D) \to \mathbb{K}$ stetig in x_0, beziehungsweise in $f(x_0) =: y_0$ so auch $f \circ f : D \to \mathbb{K}$ stetig in $x_0 \in D$:

Beweis. 1. Siehe Bemerkung zu Grenzwerte

2. Für $z = a + \imath b$ gilt $||a| - |b|| \leq |a - b|$ sowie $|z|^2 = a^2 + b^2 \geq a^2 \geq b^2$

3. Siehe Bemerkung zu Grenzwerte

4. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, dann folgt aus Stetigkeit von f : $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$
$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)(n \to \infty)$

□

Lemma 8 3.7 ε/δ Kriterium. *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ ist in $x_0 \in D$ genau dann stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt, sodass Für alle $x \in D$ gilt:*

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Beweis. ($\Longleftarrow$): Gilt das ε/δ Kriterium, so ist f auch in x_0 offensichtlich stetig
($\Longrightarrow$): Sei also f stetig in x_0. Angenommen, dass \$$\varepsilon/\ \delta$\$-Kriterium gälte nicht, das heißt es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass $\forall\,\delta > 0$ ein $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ gibt. Widerspruch zu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

□

Korollar 3 3.8. Sei $f : D \to \mathbb{K}$ stetig in $x_0 \in D$ mit $f(x_0) \neq 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(x) \neq 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(x) \neq 0\,\forall\, x \in I_\sigma(x_0) \cap D$. Insbesondere ist $\frac{1}{f} : D \to \mathbb{K}$ stetig in $x_0 \in D$

Beweis. Setze $\varepsilon := |f(x_0)| > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass $\forall\, x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ folgt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (aus Stetigkeit von f), das heißt für $x \in I_\sigma(x_0) \cap D$ gilt

$$|f(x)| \geq |f(x_0)| - |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon - \varepsilon = 0$$

Insbesondere sind Folgen $x_n \to x_0$ wohldefiniert und die Aussage resultiert aus den Rechenregeln für Folgen □

Beispiel 14 3.9.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$
2. Konstante Funktionen $f(x) = c\,\forall\, x \in \mathbb{R}$ sind stetig auf $\mathbb{R}$
3. Seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$, Dann heißt

   $$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

   Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ und ist stetig (wegen 1. und 2. und Lemma 3.6)
4. Seien p, q Polynome, dann heißt

   $$f : \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

   rationale Funktion und ist stetig nach 3. und Korollar 3.8
5. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1 + 3x^2}$ ist stetig nach 3., Lemma 3.6 und Übung 5.1
6. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto e^x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, denn für $x \neq x_0$ ist

   $$e^x = e^{x_0} e^{x - x_0} = e^{x_0} \left(1 + \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{\underbrace{(x - x_0)}_{1}} \right)$$

   (nach Beispiel 3.2)

7. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Definition 11 3.10 Gleichmäßige Stetigkeit**.** Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{K}$ heißt **gleichmäßig stetig** auf D, wenn $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta = \delta(\varepsilon) < 0 : \forall \, x, y \in D : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Bemerkung 11. Gleichmäßige Stetigkeit heißt, dass die δ gleichmäßig für alle Punkte $x \in D$ gewählt werden kann.

Beispiel 15 3.11.

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$$

1. f ist gleichmäßig stetig auf $A = \mathbb{R} \setminus (-a, a), a > 0$

2. f ist **nicht** gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Beweis.

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{|xy|} |x - y|$$

also $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \iff |x - y| < |xy|\varepsilon$

1. Für $x, y \in \mathbb{R} \setminus (-a, a)$ gilt $|xy| \geq a^2$, also $|x - y| < \varepsilon a^2 := \delta \implies |x - y| < \varepsilon |xy|$. Daher $\forall \, \varepsilon > 0 \, \forall \, x, y \in A : |x - y| < \delta := \varepsilon a^2 \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

2. Dagegen können wir $\forall \, \delta > 0, x, y \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ finden wir $|x - y| < \delta$, aber $|f(x) - f(y)| \geq 1 \iff |x - y| \geq |xy|$
   Sei $\delta > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{\delta}{n} < 1$. Nun gilt für

   $$|x - y| = \frac{\delta}{2n}$$
   $$|xy| < (|x - y| + |x|)|x|$$

   für $|x| < \frac{\delta}{2n}$

   $$= \left(\frac{\delta}{2n} + |x| \right) |x| < \frac{\delta^2}{2n^2}$$
   $$= \frac{\delta}{n} |x - y| \leq |x - y|, \text{ da } \frac{\delta}{n} \leq 1$$

□

Definition 12 3.12 Lipschitz Stetigkeit**.** Eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ heißt Lipschitz stetig (kurz L-stetig) auf D, wenn $\exists \, L > 0$ (so genannte Lipschitz Konstante), sodass

$$f(x) - f(y) \leq L|x - y| \, \forall \, x, y \in D$$

Bemerkung 12. Menge von stetigen Funktionen $\supset$ Menge von gleichmäßig stetigen Funktionen $\supset$ Menge von Lipschitz-stetigen Funktionen

Definition 13 3.13 Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit, Satz von Heine für folgenkompakte metrische Räume**.** Eine auf einer beschränkten, abgeschlossenen (das heißt kompakten) Teilmenge $D \subseteq \mathbb{K}$ stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

Beweis. Angenommen f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $\forall\, n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, y_n \in D$ existieren mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$
Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt die beschränkte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to x \in D$. Wegen $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ ist auch $\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y = x$ Aus der Stetigkeit von f folgt, dass

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to |f(x) - f(y)| = 0`$$

$\square$

Bemerkung 13.

1. Wichtigkeit von Annahmen
   - Abgeschlossenheit: $f(x) = x^{-1}$ für $x \in [-A, A] \setminus \{0\}$ Stetig, aber nicht gleichmäßig Stetig
   - Beschränktheit: $f(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$
     für $x = m$ und $y = x + \frac{1}{n}$ gilt
     $$|x - y| \to 0, \text{ aber } |f(x) - f(y)| = \left|x^2 - y^2\right| = |(x-y)(x+y)| = 2 + \frac{1}{n} \to 2$$
2. Lipschitz-Stetigkeit von $f(x) = x^2$
   $$|f(x) - f(y)| = |(x-y)(x+y)| \leq L|xy|$$
   wenn D beschränkt $D = [-A, A] \implies |x + y| \leq 2A \implies L = 2A \implies$ Lipschitz-Stetigkeit, aber wenn $D = R \implies$ gibt keine $L < \infty$
3. Lipschitz-Stetigkeit impliziert gleichmäßige Stetigkeit, aber nicht umgekehrt. Zum Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0, A]$ ist gleichmäßig stetig nach Satz 3.13, aber nicht Lipschitz-stetig in 0.
   $$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq L|x - y|$$
   $$\left|\frac{y - x}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}\right| > n|x - y|$$
   $\implies \nexists\, L > 0$

Bemerkung 14. Stetigkeit kann interpretiert werden als „lokale Approximation“ durch Konstanten, das heißt Funktion f nach der Stelle x_0 durch eine Konstante $f(x_0)$ approximiert werden kann und die Fehler der Approximation $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

6.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 16 3.14 Satz von Beschränktheit**.** *Eine auf einer beschränkten, abgeschlossenen Teilmenge $D \subset \mathbb{K}$ stetige Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ ist beschränkt, $\exists\, K > 0 : \sup_{x \in D} |f(x)| \leq K$*

Beweis. Angenommen das eine stetige $f(x)$ nicht beschränkt auf D ist. Dann gibt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ mit $|f(x_n)| > n$
Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt (da D beschränkt). Nach dem B.-W. Satz $\exists\, x_{m_k} \to x \in D$ (weil D abgeschlossen ist). Aus der Stetigkeit von f

$$|f(n_k)| \xrightarrow{x \to \infty} |f(x)| < \infty`$$

Widerspruch zur Annahme $f(x_m) \to \infty$ □

Satz 17 3.15 Satz von Extremum**.** *Eine auf einer beschränkten, abgeschlossenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{K}$ stetige reellwertigen Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ besitzt dort ein Maximum und ein Minimum, das heißt:*

$$\exists\, x_{min}, x_{max} \in D : \sup_{x \in D} f(x) = f(x_{max}) \wedge \inf_{x \in D} f(x) = f(x_{min})$$

Beweis.

$$\exists\, K < \infty : K = \sup_{x \in D} < \infty$$

$\exists$ eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D : f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} K$. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt und in D abgeschlossen

$$\implies \exists (x_{n_k})_{k \in \mathbb{K}} \in D : x_{n_k} \to x \in D$$

Aus $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \to \infty} f(x) \implies f(x) = K$
Analog für untere Grenze. □

Definition 14 3.16 Zwischenwertsatz**.** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine reelle stetige Funktion. Dann gibt es zu jeder $y \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(c) = y$

Beweis. Betrachte die (nicht leere, beschränkte) Menge

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq y\}$$

Entweder ist dann $\sup A = b$ (und dann $c = b$) oder es gibt per Definition ein $x \in [a, b]$ mit $x > c \implies x \notin A \implies f(x) > y$ In beiden Fällen folgt $f(c) \leq y$

- Falls $c = b \implies y = f(c) = f(b) \implies f(c) \geq y$
- Falls $c < b \implies$ Aus Stetigkeit von f, eine monoton fallende Folge von Punkten aus A existiert, welche gegen $\sup A$ konvergiert

Aus Stetigkeit und Definition von A folgt $f(c) \leq y$. Beide zusammen genommen ergibt $f(c) = y$ □

Bemerkung 15. Die Eigenschaften von stetigen Funktionen lassen sich zusammen formulieren: Für eine auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall definierte stetige Funktion ist der Bildbereich wieder ein abgeschlossenes Intervall

Lemma 9 3.17 Treppenapproximation**.** *Jede auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall* $[a, b]$ *definierte* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *lässt sich beliebig gut durch Treppenfunktion einschließen. das heißt*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists \text{ Treppenfunktion } \bar{\phi}_\varepsilon, \phi_\varepsilon$$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit zu selben endlichen Zerlegung von $[a, b]$ *mit den Eigenschaften* $\forall\, x \in [a, b]$

- $\phi_\varepsilon \leq f(x) \leq \bar{\phi}_\varepsilon(x)$
- $\left|\phi_\varepsilon(x) - \bar{\phi}_\varepsilon(x)\right| < \varepsilon$

Zerlegung: ist mit Teilpunkten $a \leq x_k \leq b, k = 0, \ldots, N < \infty$ *(endliche Zerlegung)* $(a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_N = b)$
Treppenfunktion ist konstant auf Intervalle $[x_1, x_{i+1}), 0 \leq 1 \leq N - 1$

Beweis. Aus dem Satz von gleichmäßiger Stetigkeit ist f auf $[a, b]$ gleichmäßig Stetig

$$\implies \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \forall\, x \in [a, b], |x - y| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{a-b}{n} < \delta\varepsilon$. Mit den Teilpunkten

$$x_k. = a + k\frac{b-a}{n}, k = 0, \ldots, n$$

erhalten wir eine äquidistante Zerlegung von $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, |x_k - x_{k-a}| < \delta_\varepsilon$$

Dann definieren wir

$$\bar{\phi}_\varepsilon(x) := \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x < x_k\}$$
$$\phi_\varepsilon(x) := \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x < x_k\}$$

Nach Konstruktion gemäß $\phi_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \bar{\phi}_\varepsilon(x)\, \forall\, x \in [a, b]$
Nach dem Satz von Extremum $\forall [x_1, \ldots, x_k]\, \exists\, \bar{\xi}_k, \xi_k$ sodass

$$f(\bar{\xi_k}) = \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\} f(\xi_k) = \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

Nach Wahlfreiheit von δ_ε gilt

$$\left|\phi_\varepsilon(x) - \bar{\phi}_\varepsilon(x)\right| = \left|f(\xi_k) - f(\bar{\xi_k})\right| \leq |f(\xi_k) - f(x)| + \left|f(x) - f(\bar{\xi_k})\right| \underset{\downarrow}{<} \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

aus gleichmäßiger Stetigkeit

□

6.3 Konvergenz von Funktionen

Definition 15 3.18**.** Seien $f_n : D \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ Funktionen mit einem gemeinsamen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$. Wir nennen die folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **punktweise** konvergenz gegener eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn für jedes $x \in D$ gilt $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$

Beispiel 16 3.19.

1.
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

   Hier ist $f_n(x)$ stetig und $f(x)$ stetig.

2. $f_n(x) = 1 - x^n, x \in [0,1] \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} f_n(x) & \xrightarrow{n\to\infty} & f(x) := \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{stetig} & & \text{nicht stetig} \end{array}$$

Definition 16 3.19 Gleichmäßige Konvergenz**.** Eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ heißt **gleichmäßig konvergent** gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \ge n_\varepsilon \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \,\forall\, x \in D$$

Satz 18 3.20 Satz von der gleichmäßigen Konvergenz**.** *Konvergiert eine Folge stetiger Funkitonen $f_n : D \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$, so ist auch die Grenzfunktion f stetig.*

Beweis. Seien $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu zeigen:

$$\exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \forall\, x \in D |x - x_0| < \delta_eps \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\exists\, x \in \mathbb{N} \,\forall\, x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

Aus Stetigkeit von f_n:

$$\exists\, \delta_\varepsilon > 0 Forall x \in D : |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

$$\implies \forall\, x \in D |f(x) - f(x_0)| \le \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\frac{1}{3}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{<\frac{1}{3}} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{<\frac{1}{3}} < \varepsilon$$

das heißt f ist stetig. □

6.4 Reellwertige stetige Funktionen

Definition 17 3.21.

$$C(\mathbb{K}) := \{f : \mathbb{K} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig auf } \mathbb{K}\}$$

ist der Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{K}$

Bemerkung 16. Seien $f, g \in C(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $f + g, f \cdot g, \lambda f$ wieder eine Funktion aus $C(\mathbb{K})$. $C(\mathbb{K})$ bildet dann einen Ring.

Definition 18 3.22. Seien $f, g : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$.

$$\max_{x\in\mathbb{K}}(f,g)(x) := \max_{x\in\mathbb{K}}(f(x), g(x)) \min_{x\in\mathbb{K}}(f,g)(x) \qquad := \min_{x\in\mathbb{K}}(f(x), g(x))$$

Satz 19 3.23. $\max(f, g)$ *und* $\min(f, g)$ *sind in* $C(\mathbb{K})$ *für* $f, g \in C(\mathbb{K})$

Beweis. Es genügt, dass mit f auch $|f|$ (als Komposition stetige Abbildung) stetig ist, denn

$$\begin{aligned} \max(f,g) &= \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g| \\ \min(f,g) &= -\max(-f,-g) \end{aligned}$$

□

Wir betrachten jetzt $C\left(\underbrace{[a,b]}_{\mathbb{K}}\right)$ und definieren

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Definition 19 3.24. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper (mit dem Betrag $|\,|$), Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

$$\|\,\| : V \to \mathbb{R}$$

heißt eine **Norm** auch $V \iff$:

- (N1) $\forall\, x \in V : \|x\| \geq 0 \wedge (\|x\| = 0 \iff x = 0)$
- (N2) $\forall\, x \in V : \alpha \in \mathbb{K} \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
- (N3) $\forall\, x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$(V, \|\,\|)$ heißt normierter Vektorraum.
$C([a, b])$ ist ein Vektorraum. Die Normeigenschaften von $\|\,\|_\infty$ als Abbildung von $C([a, b])$ nach $[0, \infty)$ folgt direkt aus den Eigenschaften des Absolutbetrags

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &\implies f(x) = 0\,\forall\, x \in [a,b] && \text{(Definitheit)} \\ \|\alpha f\| &= |\alpha|\|f\|_\infty, \alpha \in \mathbb{R} && \text{(Homogenität)} \\ \|f+g\|_\infty &\leq \|f\|_\infty + \|(\|g)_\infty && \text{(Dreiecksungleichung)} \end{aligned}$$

Wir definieren sogenannte Normkonvergenz

$$f_n \xrightarrow{n\to\infty} f \text{ in Norm} \iff \|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Für $\| \|_\infty$ Konvergenz in Norm ist die gleichmäßige Konvergenz.

Lemma 10 3.25. *Für eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C([a,b])$ ist die gleichmäßige Konvergenz gegen eine Grenzfunktion. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichbedeutend mit $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$*

Beweis. aus Definition. □

Definition 20 3.26 Cauchy Folge von Funktionen**.** Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C([a,b])$ heißt Cauchy-Folge, wenn

$$\forall\, \varepsilon\, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : n, m \geq n_\varepsilon \implies \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

Lemma 11 3.27. *Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C([a,b])$ welche gegen eine Grenzfunktion $f \in C([a,b])$ konvergiert ist Cauchy-Folge.*

Beweis. analog wie Beweis für Zahlenfolgen □

Satz 20 3.28 Satz von der Vollständigkeit**.** *$(C([a,b], \| \|_\infty))$ ist vollständig bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz, das heißt jede Cauchy-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C([a,b])$ besitzt ein Limes $f \in C([a,b])$*

Beweis. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C([a,b])$ eine Cauchy-Folge. Dann ist für jedes feste $x \in [a,b]$ $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von Zahlen und besitzt einen (eindeutig bestimmten) Limes $f(x) \in \mathbb{R}$. Wir wollen zeigen, dass diese Konvergenz gleichmäßig ist. Angenommen $f_n \to f$ nicht gleichmäßig
$\implies$ $\exists\, \varepsilon > 0$ und $\forall\, n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n \in [a,b]$ sodass $|f_n(x_n) - f(x_n)| > \varepsilon$. Die Punktfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge (nach Bolzano-Weierstrass Satz, $[a,b]$ beschränkt und abgeschlossen). Wegen der Cauchy-Folgen Eigenschaft

$$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : m \geq n_\varepsilon \implies \|f_{n_\varepsilon} - f_n\|_\infty < \frac{1}{2}\varepsilon$$

Wegen der Konvergenz $f_m(x_{n_\varepsilon}) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_{n_\varepsilon})$:

$$\exists\, m_\varepsilon \geq n_\varepsilon : |f_{m_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon}) - f(x_{n_\varepsilon})| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\implies |f_{n_\varepsilon} - f(x_{n_\varepsilon})| \leq |f_{n_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon}) - f_{m_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon})| + |f_{m_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon}) - f(x_{n_\varepsilon})| < \varepsilon$$

$\implies$ $f_n \to f$ gleichmäßig und im Wiederspruch zur Annahme. $\implies$ $f \in C([a,b])$ (aus Satz 3.20) □

Bemerkung 17. Vollständige normierte Räume werden Banach Räume genannt. $C([a,b])$ ist also ein Banach Raum.

Satz 21 3.29 Satz von Arzela-Ascoli. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $C([a,b])$ welche **gleichmäßig beschränkt** und **gleichmäßig stetig** sind. das heißt*

1. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$
2. $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta_\varepsilon > 0\, \forall\, n \in \mathbb{N} : \max\limits_{\substack{x,y\in[a,b]\\ |x-a|\le\delta_\varepsilon}} |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$

Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ welche gegen ein $f \in C([a,b])$ konvergiert, das heißt

$$\|f_{n_k} - f\|_\infty \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Annahmen: $f_n \in C([a,b])$,

- *gleichmäßig beschränkt:* $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_\infty < \infty$
- *gleichmäßig stetig:*

$$\forall\, \varepsilon\, \exists\, \delta_\varepsilon > 0\, \forall\, n \in \mathbb{N} \max_{\substack{x,y\in[a,b]\\ |x-y|\le\delta_\varepsilon}} |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

Aussage: $\exists$ eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sodass $f_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} f \in C([a,b])$

Beweis. Sei $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge der rationalen Punkte in $[a,b]$. Für jedes r_k, nach Voraussetzung $\sup_{n\in\mathbb{N}}|f_n(r_k)| < \infty$

$$\begin{array}{ccccc} f_{n_1^{(1)}}, & f_{n_2^{(1)}}, & \dots, & f_{n_k^{(1)}} & \text{konvergiert in } r_1 \\ f_{n_1^{(2)}}, & colorredf_{n_2^{(2)}}, & \dots, & f_{n_k^{(2)}} & \text{konvergiert auch in } r_2 \\ f_{n_1^{(3)}}, & f_{n_2^{(3)}}, & \dots, & f_{n_k^{(3)}} & \text{konvergiert auch in } r_2 \\ f_{n_1^{(k)}}, & f_{n_2^{(k)}}, & \dots, & colorredf_{n_k^{(k)}} & \text{konvergiert auch in } r_k \end{array}$$

colorredDiagonalfolge
Nach sukzessiver Anwendung des Bolzano-Weierstrass Satz bekommen wir eine Folge von Teilfolgen. Die Folgen $\left(f_{n_j^{(k)}}(r_k)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ sind konvergent, $\left(n_j^{(k+1)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ ist Teilfolge von $\left(n_j^{(k)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$. $\left(f_{n_j^{(k)}}(r_l)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ ist konvergent für $l = 1,\dots,k$. Für die Diagnoalfolge $\left(f_{n_k^{(k)}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist dann $\left(f_{n_k^{(k)}}(r_j)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent für alle $j \in \mathbb{N}$. Noch zu zeigen: Gleichmäßige konvergenz von dieser Diagonalfolge in allen $x \in [a,b]$. Wir bezeichnen jetzt die Diagonalfolge mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (erst für alle rationale r_k).
Für jedes $r_k \in [a,b]$ gibt es ein $n_\varepsilon(r_k) \in \mathbb{N}$, sodass

$$|f_n(r_k) - f_m(r_k)| < \frac{1}{3}\varepsilon\, \forall\, n,m \ge n_\varepsilon(r_k)$$

Die gleichmäßige Stetigkeit impliziert, dass

$$\exists\, \delta_\varepsilon : x, y \in [a,b], |x-y| < \delta_\varepsilon \implies \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Wir unterteilen $[a,b]$ in $i_k = [x_{k-1}, x_k], k = 1, \ldots, n$ mit $a < x_0 < \ldots < x_n = b$

$$\max_{1\le k\le n} |x_k - x_{k-1}| \le \delta$$

Aus jedem I_k wählen wir ein $r_k \in \mathbb{Q}$. $\forall\, x \in I_k$ gilt dann für $n, m \ge n_\varepsilon := \max\{n_\varepsilon(r_1), \ldots, n_\varepsilon(r_n)\}$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \left| \underbrace{f_n(x) - f_n(r_k)}_{<\frac{1}{3}\varepsilon} \right| + \left| \underbrace{f_n(r_k) - f_m(r_k)}_{<\frac{1}{3}\varepsilon} \right| + \left| \underbrace{f_m(r_k) - f_m(x)}_{\frac{1}{3}\varepsilon} \right| < \varepsilon$$

$\implies$ für $n, m \ge n_\varepsilon$ gilt $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \implies (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge im Banachraum $C([a,b]) \implies f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ für $f \in C([a,b])$ □

7 Differentiation

Definition 21 4.1 Differenzquotienten**.** Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$, definieren wir in einem Punkt $x_0 \in D$ einen **Differenzquotienten** durch $D_n f(x_0) := \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, wobei $x_0 + h \in D$

Definition 22 4.2 Ableitung**.** $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar** im Punkt $x_0 \in D$ mit **Ableitung** $f'(x_0)$, wenn für jede Nullfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_0 + h_n \in D$, die Folge $(D_{h_n} f(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert zu $f'(x_0)$

Bemerkung 18. $f'(x)$ ist eindeutig.

Beweis. Für zwei Nulfolge $h_n, \tilde{h}_n$, sodass:

$$\lim_{n\to\infty} D_{h_n} f(x_0) = a, \lim_{n\to\infty} D_{\tilde{h}_n} f(x_0) = \tilde{a}$$

fassen wir eine Nullfolge $\{h_1, \tilde{h}_1, h_2, \tilde{h}_2, \ldots\}$ zusammen. Der zugeörige Differenzquotient konvergiert $\implies a = \tilde{a}$ □

Notation:

$$f'(x_0) =: \frac{\mathrm{d}f}{dx}(x_0)$$
$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x\in D \\ x\to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definition 23 4.3**.** Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar auf D, wenn sie in edem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist. Sie heißt stetig differenzierbar, wenn die Ableitung f' auf D eine stetige Funktion ist.

Bemerkung 19. Im Falle eines Randpunktes behalten wir einseite Stetigkeit. $D = [a, b]$:

- für $x_0 = a, x \downarrow a :\iff x > a \wedge x \to a$
- für $x_0 = b, x \uparrow b :\iff x < b \wedge x \to b$

Satz 22 4.4. *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in einem $x_0 \in D$ genau dann differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0)$, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta_\varepsilon > 0 : x_0 + h \in D, |h| < \delta_\varepsilon \implies \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

Beweis. Beweis aus der Definition des Grenzwerts. □

Satz 23 4.5. *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in einem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar, wenn es eine Konstante gibt, $x \in \mathbb{R}$, sodass*

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \omega(x), x \in D$$

mit einer Funktion $\omega : D \to \mathbb{R}$, sodass

$$\lim_{\substack{x \in D \\ x \to x_0}} = 0$$

Diese Konstante $c = f'(x_0)$

Beweis. Sei f in x differenzierbar und $\omega(x) := f(x) - f(x_0)(x - x_0)$. Dann aus differenzierbarkeit von f

$$\frac{\omega(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

Sei umgekehrt $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \omega(x)$ mit $\lim_{x \to x_0} \frac{\omega(x)}{x \to x_0} = 0$ Dann gilt:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - c = \frac{\omega(x)}{x - x_0} \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

das heißt f ist in x_0 differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0)$ □

Bemerkung 20. Der Satz besagt, dass affin-lineare Funktion (Gerade) $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ approximiert die differenzierbare Funktion in $x_0 \in D$. Der Graph von g ist die tangenta an dem Graphen von f in $(x_0, f(x_0))$

Lemma 12 4.6. *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar ist dort stetig.*

Beweis.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \omega(x) \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \to x_0} f(x_0)$$

□

Bemerkung 21. Man kann die n-te Ableitung rekursiv definieren.

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x) = f^{(n)}(x), n \geq 3$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = f^{(2)}(x) = f''(x)$$

Beispiel 17 4.7. $f(x) = |x|$ ist nicht in $x_0 = 0$ differenzierbar. Um dies zu sehen, betrachten wir eine Nullfolge

$$h_n = (-1)^n \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$$

und

$$\frac{f(h_n) - f(0)}{h_n} = \frac{|h_n|}{h_n} = (-1)^n$$

nicht konvergent. $in x_0 \neq 0$ ist $f(x) = |x|$ differenzierbar

Lemma 13 4.8. *Für $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar gelten die folgenden Rechenregeln:*

1. *Linearkombination ist differenzierbar $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g', \alpha, \beta \in \mathbb{R}$*
2. *$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$*
3. *$g(x) \neq 0$*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Beweis. 1. Aus den Eigenschaften von konvergenten Zahlenfolgen

2. Aus Definition:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)(g(x) - g(x_0)) + (g(x) - f(x_0))g(x)}{x - x_0} \\ &= f(x_0)g'(x_0) + f'(x)g(x)\end{aligned}$$

3. Erst $f \equiv 1$

$$\begin{aligned}(\frac{1}{g})'(x) &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) \frac{1}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)} \frac{1}{x - x_0} \\ &= \lim -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}\end{aligned}$$

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \left(f \frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'g - fg'}{g^2}(x)$$

□

Lemma 14 4.9. *Sei $f : D \to B \subseteq \mathbb{B}$ eine auf einem abgeschlossenen Definitionsbereich stetige und invertierbare Funktion mit Inverse $f^{-1} : B \to D$. Ist f in einem $x_0 \in D$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$, so ist auch F^{-1} in einem $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt*

$$(f^{-1})'\left(y_0 = \frac{1}{f'(x_0)}, y_0 = f(x_0)\right)$$

Beweis. Für $y_n = f(x_n), y_0 = f(x_0)$ mit $y_n \neq y_0$ und $y_n \xrightarrow{n\to\infty} y_0$. Aus Stetigkeit von f^{-1} gilt auch $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ und $x_n \neq x_0$. Aus der Differenzierbarkeit von f in einem x_0 folgt:

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right)^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} \left(f'(x_0)\right)^{-1}$$

Dies impliziert, dass f^{-1} im Punkt $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar ist mit der Ableitung $\frac{1}{f'/x_0}$ □

Beispiel 18 4.10.

1. $\ln'(y) : f^{-1}(y) = \ln y, f(x) = e^x \implies \ln'(y) = \dfrac{1}{(e^x)'} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{y}$

2. Umkehrfunktion des Sinus

$$y = \sin x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = \arcsin y, y \in (-1, 1) = D$$

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Lemma 15 4.11 Kettenregel. *Seien $g : D_g \to \mathbb{R}, f : D_f \to D_g \subseteq \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Die Funktion f sei in $x_0 \in D_f$ differenzierbar und $g in y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist die zusammengesetzte Funktion $g(f(x_0)) =: (g \circ f)(x_0)$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x) \tag{Kettenregel}$$

Beweis.

Wir definieren eine Funktion $\Delta g : D_g \to \mathbb{R}$ durch

$$\Delta g(y) := \begin{cases} \frac{g(y) - f(y_0)}{y - y_0} & y \neq y_0 \\ g'(y) & y = y_0 \end{cases}$$

Da g in y_0 differenzierbar ist gilt

$$\lim_{y \to y_0} \Delta g(y) = g'(y_0)$$

Ferner gilt für $y \in D_g$:

$$g(y) - g(y_0) = \Delta g(y)(y - y_0)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta g(f(x))(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \Delta g(f(x)) \lim_{x - x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0)\end{aligned}$$

□

Beispiel 19 4.12. 1. $g(x) = f(ax + b), a, b \in \mathbb{R} \implies g'(x) = af'(ax + b)$

2. $x^\alpha = e^{\alpha \ln x} = f(g(x)) = f(g(x)), f(y) := e^y, g(x) := \alpha \ln(x)$

$$(x^\alpha)' = f'(g(x))g'(x) = e^{\alpha \ln x} \alpha x^{-1} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

7.1 Mittelwertsätze und Extremalbedingungen

Definition 24 4.13. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat in einem Punkt $x_0 \in D$ ein **globales Extremum** (Minimum oder Maximum), wenn gilt

$$f(x_0) \leq f(x), x \in D \vee f(x_0) \geq f(x) \forall x \in D$$

Es handelt sich um ein **lokales Extremeum** (Minimum oder Moaximum), wenn auf einer \$δ\$-Umgebung von x_0 (das heißt $U_\delta(x_0) = \{x \in D \mid |x - x_0| < \delta\}$) gilt $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in U_\delta(x_0) \vee f(x_0) \leq f(x) \forall x \in U_\delta(x_0)$ Ein Extremum (globales oder lokales) heißt strikt, wenn es das isolierteste PUnkt in D beziehungsweise in $U_\delta(x_0)$ ist, as heißt $f(x_0) > f(x) \vee f(x_0) < f(x)$

Satz 24 4.14 Satz von Extremum**.** *Besitz eine auf einem Intervall $I = (a, b)$ differenzierbare Funktion ein lokales Extremum $x_0 \in I$, so gilt dort notwendig $f'(x_0) = 0$*

Beweis. Habe f in x_0 ein Minimum. Dann gilt für eine $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $h_n > 0, x_0 + h_n \in U_\delta(x_0)$

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \geq 0$$

für eine Nullfolge $(h_n)_n \in \mathbb{N}$ mit $h_n < 0, x_0 + h_n \in U_\delta(x_0)$

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \leq 0$$

Im Limes $h_n \to 0$ bekommen wir

$$f'(x_0) \leq 0 \leq f'(x_0) \implies f'(x_0) = 0$$

(Analog für Maximum) □

Bemerkung 22. Eine stetige Funktion besitzt auf einem abgeschlossenem Interball $[a, b]$ ein Minimum. Dieses kann in einem Randpunkt ($x_0 = aveex_0 = b$) liegen, das heißt es ist nicht notwendig, das $f'(x_0) = 0$

Satz 25 4.15 Satz von Rolle**.** *Wenn eine im Interball $[a, b]$ stetige Funktion, in (a, b) differenzierbar ist und $f(a) = f(b)$, so existiert ein $c \in (a, b)$, sodass $f'(c) = 0$*

Beweis.

- Stetige Funktion auf $[a, b]$ nimmt ihr Maximum und Minimum
- Wenn f ist konstant $\implies f'(x) = 0$
- Wen f nicht konstant $\implies \exists\, x_0 \in (a, b) : f(x_0) > f(a) = f(b) \vee f(x_0) < f(a) = f(b)$

$\implies$ das Maximum oder Minimum ist in einem $x_0 \in (a, b)$ angenommen $\implies f'(x_0) = 0$ □

Satz 26 4.16 1. Mittelwertsatz**.** *Ist f stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b), so* $\exists\, c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Beweis. Wir definieren Funktion

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

- g ist stetig in $[a, b]$, differenzierbar in (a, b)
- $g(a) = f(a) = g(b)$, Satz von Rolle liefert, dass $\exists\, c \in (a, b) : g'(c) = 0$

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ □

Korollar 4 4.17*.* Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ mindestens zweimal differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$für ein $x_0 \in (a, b)$. Dann hat f im Fall $f''(x_0) > 0$ in x_0 ein striktes lokales Minimum und im Fall $f''(x_0) < 0$ ein striktes lokales Maximum.

Beweis. Sei f zweimal differenzierbar mit $f''(x_0) > 0$ Wegen

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$$

gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, sodass f+r $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ gilt

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$$

mit $f'(x_0) = 0$ folgt damit

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 \quad & x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ f'(x) < 0 \quad & x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \end{aligned}$$

$\implies f$ ist streng monoton fallend in $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ und streng monoton wachsend in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, das heißt f hat in x_0 ein striktes lokales Maximum (Analog im Fall $f''(x_0) < 0$) □

Bemerkung 23. Es ist keine notwendige Bedingung zum Beispiel $f(x) = x^4$ hat lokales Minimum $x_0 = 0$, aber $f''(x_0) = 0$

Definition 25 4.18**.** Sei I ein offenes Intervall $f : I \to \mathbb{R}$ heißt

- (streng) konvex $\iff \forall\, \lambda \in (0,1), x, y \in I : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \left(\underset{\text{streng}}{\overset{<}{\downarrow}}\right) \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$
- (streng) konkab $\iff \forall\, \lambda \in (0,1), x, y \in I : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \left(\underset{\text{streng}}{\overset{>}{\downarrow}}\right) \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

Beispiel 20 4.19*.* exp ist eine (streng) konvexe Funktion Für $\lambda \in (0,1), x < y$ gilt:

$$\begin{aligned}
\exp(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \exp(x + (1-\lambda)(y-x)) = \exp(x)\exp((1-\lambda)(y-x)) \\
&= \exp(x)\left(\underbrace{\lambda + 1 - \lambda}_{=1} + \sum_{j=1}^{\infty}(1-\lambda)^j \frac{(y-x)^j}{j'}\right) \\
&= \lambda \exp(x) + (1-\lambda)\exp(x)\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty}\underbrace{(1-\lambda)^{j-1}}_{<1}\right)\frac{(y-x)^j}{j'} \\
&< \lambda \exp(x) + (1-\lambda)\exp(x)\exp(y-x) = \lambda\exp(x) + (1-\lambda)\exp(y)
\end{aligned}$$

Korollar 5 4.20*.* Sei I offen, $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Falls $f''(x) \geq 0 \,\forall\, x \in I$, so ist f konvex.

Beweis. $f'' > 0 \implies f'$ monoton ist wachsend. Für $x = y$ ist $f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $x < y, x, y \in I, \lambda \in (0,1)$. Wir setzen $x_\lambda := \lambda x + (1-\lambda)y$ Nach dem Mittelwertsatz $\exists\, \xi \in (x, x_\lambda)$ und $\eta \in (x_\lambda, y)$ mit

$$\frac{f(x_\lambda) - f(x)}{x_\lambda - x} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Mittelwertsatz}}}{==} f'(\xi) \overset{\substack{\text{aus Monotonität} \\ \uparrow}}{\leq} f''(\eta) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Mittelwertsatz}}}{=} \frac{f(y) - f(x_\lambda)}{y - x_\lambda}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
x_\lambda - x &= \lambda x + (1-\lambda)y - x = (1-\lambda)(y-x) \\
y - x_\lambda &= y - \lambda x - (1-\lambda)y = \lambda(y-x)
\end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$\frac{f(x_\lambda) - f(x)}{1-\lambda} \leq \frac{(f(y) - f(x_\lambda))}{(y - x_\lambda)} \frac{(x_\lambda - x)}{1-\lambda} = (f(y) - f(x_\lambda)) \frac{(1-\lambda)(y-x)}{\lambda(y-x)(1-\lambda)} = \frac{f(y) - f(x_\lambda)}{\lambda}$$
$$\implies f(x_\lambda) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$
$$\implies f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \implies f \text{ ist konvex} \qquad \square$$

Satz 27 2. Mittelwertsatz (verallgemeinert). *Sind die Funktion f und g in $[a,b]$ stetig und in (a,b) differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a,b)$, so gibt es ein $c \in (a,b)$ sodass*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Beweis. Wegen $g'(x) \neq 0$ bekommen wir $g(a) \neq g(b)$ (wegen Satz von Rolle). Weiter

$$\exists\, c \in (a,b) : \frac{g(b) - g(a)}{b-a} = g'(c) \neq 0$$

Wir definieren auf $[a,b]$ die Funktion

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c)$$

Wir verifizieren $\underline{F(a)} = f(a) = \underline{F(b)}$. Nach dem Setz von Rolle gibt es ein $c \in (a,b)$ mit $F'(c) = 0$, das heißt

$$0 = F'(c) = f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c)$$

wegen $g'(c) \neq 0$:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \qquad \square$$

7.2 Anwendung von MW Satz 2

Satz 28 Regeln von L'Hospital. *Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}, I = (a,b)$ sodass $g'(x) \neq 0 \,\forall\, xI$ und*

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: c \in \mathbb{R}$$

Dann gelten die Folgenden Regeln:

1. *Im Fall*

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} g(x) = 0$$

ist $g(x) \neq 0$ in I und es gilt

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

2. Im Fall $f(x) \to \pm\infty, g(x) \to \pm\infty$ für $x \downarrow a$ ist $g(x) \neq 0$ für $a < xyx_* \leq b$ und

$$\lim x \downarrow a \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

Beweis. 1. Wir fassen f und g als Funktion auf, die in a stetigs sind $f(a) = g(a) = 0$. Wegen $g'(x) \neq 0$ kann g keine weitere Nullstelle von g in I geben, das heißt $g(x) \neq 0$ in I. Satz 4.21 $\implies$

$$\forall\, x \in I\, \exists\, \xi \in (a,x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$\implies$ für $x \to a$ auch $\xi \to a$ und

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \downarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

2. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Vorraussetzung ist $g'(x) \neq 0$ in (a,b).

Wir wählen ein $\delta > 0$ mit $a + \delta \leq x_*$, sodass

$$\forall\, x \in (a, a+\delta) : f(x) \neq 0 \wedge g(x) \neq 0 \wedge \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - c \right| < \varepsilon$$

Für beliebigs $x, y \in (a, a+\delta)$ mit $f(x) \neq f(y)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \frac{g(x)-g(y)}{f(x)-f(y)} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \underbrace{\frac{\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) g(x)}{\left(1 - \frac{f(y)}{f(y)}\right) f(x)}}_{x \downarrow a \to 1} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\implies \exists\, \delta_* > 0 : \forall\, x n (a, a+\delta_*) : \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \right| < \varepsilon$$

Für ein x sodass $a < x < \underbrace{a + \min\{\delta, \delta_*\}}_{x_*}$ bekommen wir

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| < 2\varepsilon$$

□

Beispiel 21 4.23. $I = (0,1), f(x) = \ln(x), g(x) = x - 1, f'(x) = \frac{1}{x}, g'(x) = 1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1, \lim_{x \uparrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \uparrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

Bemerkung 24. Analoge Aussagen gelten auch für $x \to \pm\infty$. Wir nehmen $y := \frac{1}{x} \to 0$ und

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to 0\pm} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{\lambda \to \pm\infty} \frac{f'(\lambda)}{g'(\lambda)}$$

Bemerkung 25. Bei der Anwendung der Regeln von L'Hospital ist zunächst zu prüfen, ob die Limes von $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ überhaupt existiert. zum Beispiel

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}=\lim_{x\downarrow}\frac{x}{\sin x}x\sin\frac{1}{x}=0$$

aber

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x}=\lim_{x\downarrow 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}=-\lim_{x\downarrow 0}\cos\frac{1}{x}$$

der existiert nicht

Bemerkung 26. Die L'Hospital Regeln kann man auch anwenden in dem Fall

$$f(x)\to 0, g(x)\to\infty \text{ für } \lim_{x\downarrow a}f(x)g(x)=\lim_{x\downarrow}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

Auch für $0^0, \infty^0, 0^\infty$

Beispiel 22 4.24.

1. $\lim_{x\downarrow 0}x^x$ Wir logarithmieren und erhalten

$$\lim_{x\downarrow 0}x\ln x=\lim_{x\downarrow 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\downarrow 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$$

   und

$$\lim_{x\downarrow 0}x^x=\lim_{x\downarrow 0}e^{x\ln x}=e^0=1$$

2. $\lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{e^{\frac{1}{x-1}\ln x}}, \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\ln x=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1 \implies \lim_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}=e^1=e$