Analysis I (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

5. Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Webseite www.biostruct.uni-heidelberg.de/Analysis1.php Klausurzulassung: 50% Klausur 18.2.2017 9-12Uhr

2 Mengen und Zahlen

2.1 Logische Regeln und Zeichen

2.1.1 Quantoren

$\forall\, x$	für alle x
$\exists x$	es gibt (mindestens) ein x
$\exists! x$	es gibt genau ein x

2.1.2 Hinreichend und Notwendig

- $A \implies B$: wenn A gilt, gilt auch B, A ist **hinreichend** für B, daraus folgt: B ist **notwendig** für A, Ungültigkeit von B impliziert die Ungültigkeit von A ($\neg B \implies \neg A$)
- $A \iff B$: A gilt, genau dann, wenn B gilt

2.1.3 Beweistypen

Direkter Schluss $A \implies B$

Beispiel m gerade Zahl $\implies m^2$ gerade Zahl

1. Beweis m gerade $\implies \exists n \in \mathbb{N}$ sodass $m = 2n \implies m^2 = 4n^2 = 2k,$ wobei $k = 2n^2 \in \mathbb{N}\square$

Beweis der Transponierten (der Kontraposition) Zum Beweis $A \implies B$ zeigt man $\neg B \implies \neg A$ $(A \implies B) \iff (\neg B) \implies (\neg A)$

Beispiel Sei $m \in \mathbb{N}$, dann gilt m^2 gerade $\implies m$ gerade

1. Beweis Wir zeigen: m ist ungerade $\implies m^2$ ungerade

   $\exists n \in \mathbb{N} : m = 2n{+}1 \implies m^2 = (2n+1)^2 = 2k{+}1, k = 2n^2{+}2n \in \mathbb{N} \implies m^2$ ungerade$\square$

Indirekter Schluss (Beweis durch Widerspruch) Man nimmt an, dass $A \implies B$ nicht gilt, das heißt $A \wedge \neg B$ und zeigt, dass dann für eine Aussage C gelten muss $C \implies \neg C$, also ein Widerspruch

Beispiel $\nexists q \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$

1. Beweis Wir nehmen an, dass $\exists a \in \mathbb{Q} : a^2 = 2$ Dann folgt: $\exists b, c \in \mathbb{Z}$ teilerfremd (ohne Einschränkung, denn sonst kürzen soweit wie möglich) mit $a = \frac{b}{c}$ Falls

   $$a^2 = 2 \implies \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 2 = \frac{b^2}{c^2} = 2 \implies b^2 = 2c^2 \implies b^2 \text{ gerade} \implies b \text{ ist gerade (schon gezeigt)}$$

$$\implies \exists d \in \mathbb{N} \text{ sodass } b = 2d \implies b^2 = 4d^2$$

Außerdem $b^2 = 2c^2 \implies 2c^2 = 4d^2 \implies c^2 = 2d^2 \implies c$ ist auch gerade. Also müssen b und c beide gerade sein, also nicht teilerfremd, damit haben wir einen Widerspruch hergeleitet □

2.1.4 Summenzeichen und Produktzeichen

Summenzeichen Wir definieren für $m > 0$

$$\sum_{k=m}^{m} a_k := a_m + \ldots + a_n$$

falls $n \geq m$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0$$

falls $n < m$ (sogenannten leere Summe)

Produktzeichen

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} a_m \cdot \ldots \cdot a_n & \text{falls } n \geq m \\ 1 & \text{falls } n < m \text{ (sog. leeres Produkt)} \end{cases}$$

2.2 Mengen

2.2.1 Definition

(Georg Cantor 1885) Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohl unterschiedenen Objekten (welche die Elemente von M genannt werden), zu einem Ganzen M dadurch ist charakterisiert, dass von jedem vorliegendem Objekt x feststeht, ab gilt

- $x \in M$ (x Element von M)
- x ¬∈ M (x kein Element von M)

$$M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

$$M = \{x \mid A(x)\} \rightarrow \text{ eine Menge } M \text{für die } x \in M \iff A(x)$$

2.2.2 Mengenrelationen

- Mengeninklusion $A \subseteq M$ (A ist eine Teilmenge von M)

  $$\forall\, x : (x \in A \implies x \in M)$$

  zum Beispiel $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$

- $$A = B \iff \forall\, x : (x \in A \iff x \in B)$$

- $$A \subset M \text{ (strikte Teilmenge)} \iff A \subset M \wedge A \neq M$$

- $$\emptyset : \text{ leere Menge } \nexists x : x \in \emptyset$$

Wir setzen fest, dass $\emptyset$ eine Teilmenge jeder Menge ist. Zum Beispiel

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$$

- Durchschnitt
$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

- Vereinigung
$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

- Differenz (auch Komplement von B in A)

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} := C_a B \text{ (auch } B^c\text{)}$$

2.2.3 Potenzmenge

Potenzmenge A
$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

Alle Teilmengen von A

Beispiel

$$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \emptyset\}$$

2.2.4 Familien von Mengen

Sei I eine Indexmenge, $I \subseteq \mathbb{N}$, $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen A

Durchschnitt von A

$$\cap_{i \in I} = \{x \mid \forall_{i \in I}\, x \in A_i\}$$

Vereinigung

$$\cup_{i \in I} = \{x \mid \exists i \in I : x \in A_i\}$$

2.2.5 Rechenregeln

A, B, C, D seien Mengen

- $\emptyset \subseteq A$
- $A \subseteq A$ Reflexivität
- $A \subseteq B, B \subseteq C \implies A \subseteq C$ Transitivität
- $A \cap B = B \cap A \setminus A \cup B = B \cup A$ Kommutativität
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \setminus (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ Assoziativität
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \setminus A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Eigenschaften der Komplementbildung:
  Seien $A, B \subseteq D(C_D A := D \setminus A)$, dann gilt

$$C_D(C_D A) = A$$

$$C_D(A \cap B) = C_D A \cup C_D B$$
$$C_D(A \cup B) = C_D A \cap C_D B$$

  - Beweis:

$$x \in C_D(A \cap B) \iff x \in D \wedge (x \notin (A \cap B)) \iff x \in D \wedge (x \notin A \vee x \notin B)$$
$$\iff (x \in D \wedge x \notin A) \vee (x \in D \wedge x \notin B)$$
$$\iff (x \in D \setminus A) \vee (x \in D \setminus B) \iff x \in D \setminus (A \cup B) \square$$

  - Bemerkung: Komplement kann man auch mit A^c bezeichnen

2.2.6 geordneter Tupel

Sei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (nicht notwendig verschiedene) Objekte. Ein geordneter n-Tupel

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \iff x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$$

Beachte:

$$\{x_1, \ldots, x_n\} = \{y_i, \ldots, y_n\} \not\Longrightarrow x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$$

2.2.7 Kartesisches Produkt

Seien

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_j \in A_j j \in \mathbb{N}, j \leq n\}$$

Beispiel

- $$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$
- R^n n-dimensionaler Raum von reellen Zahlen

2.2.8 Äquivalenzrelation

Eine Äquivalenzrelation auf eine Menge A ist eine Beziehung zwischen ihren Elementen (Bezeichnung: $a \sim b$), sodass

- Für jede zwei $a, b \in A$ gilt entweder $a \sim b \vee a \not\sim b$
- $a \sim a$ Reflexivität
- $a \sim b \implies b \sim a$ Symmetrie
- $a \sim b, b \sim c \implies a \sim c$ Transitivität

Mit Hilfe einer Äquivalenzrelation lassen sich die Elemente einer Menge in so genannte Äquivalenzklassen einordnen: $[a] : \{b \in A \mid b \sim a\}$

2.3 Relationen und Abbildungen

2.3.1 Relationen

Unter einer **Relation** verstehen wir eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$ wobei X, Y Mengen sind. Für $x \in X$ definieren wir, das **Bild** von x unter R

$$R(X) := \{y \in Y \mid (x, y) \in R\}$$

und **Definitionsbereiche** von R (bezüglich X)

$$D(R) := \{x \in X \mid R(x) \neq \emptyset\}$$

2.3.2 Graph der Abbildung

$R \subseteq X \times Y$ heißt Graph der Abbildung (Funktion)

$$f : X \to Y \iff D(R) = X, \forall x \in X : R(x) = \{f(x)\}$$

also enthält $R(x)$ genau ein Element.
X heißt Definitionsbereich von f
Y heißt Werte- oder Bildbereich von f (Bild)
$x \in X$ heißt Argument
$f(x) \in Y$ heißt Wert von f an der Stelle x

Beispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x^2$ dann ist der Graph von $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = x^2\}$

Bemerkung

$$M^*(x) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x = y^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = \sqrt{x} \vee y = -\sqrt{x}\}$$

Ist kein Graph einer Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denn $M^*(x) = \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}, x \geq 0\}$ f heißt

- surjektiv, wenn gilt $f(X) = Y$
- injektiv, $\forall\, x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$
- bijektiv, wenn f surjektiv und injektiv ist

2.3.3 Umkehrabbildung

Sei die Abbildung $f : X \to Y$ bijektiv. Dann definieren wir die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ durch $y \to x \in X$, eindeutig bestimmt durch $y = f(x)$

Bemerkung

$$(x,y) \in \text{ Graph } f \iff (y,x) \in \text{ Graph } f^{-1}$$

2.3.4 Komposition

Seien $f : X \to Y, g : Y \to Z$ Abbildungen. Die Komposition von g und f

$$g \circ f : X \to Z \text{ ist durch } x \to g(f(x)) \text{ definiert}$$

2.3.5 Identitäts Abbildung

Für jede Menge X definieren wir die identische Abbildung

$$I_d(A) = I_A : A \to A, \text{ durch } x \to x$$

Beispiel

- $$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = S^1$$

  $$S^{n-1} := \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1\}$$

  $(n-1)$ dimensionale sphere in $\mathbb{R}^n$

- Seien X, Y Mengen, $M \subseteq X \times Y, f : M \to X \setminus f$ heißt Projektion, f surjektiv

  $$f(M) = \{x \mid \exists y \in Y : (x,y) \in M\} = X$$

2.3.6 Homomorphe Abbildungen

Existieren auf Mengen X und Y mit gewissen Operationen $\oplus_x$ bzw. $\oplus_y$ (zum Beispiel Addition, Ordnungsrelation), so heißt die Abbildung $f : X \to Y$ homomorph (strukturerhaltend), wenn gilt $\forall\, x_1, x_2 \in X f(x_1 \oplus_x x_2) = f(x_1) \oplus_y f(x_2)$ Eine bijektive Homomorphie heißt Isomorphismus, beziehungsweise $X \approx Y$ (äquivalent, isomorph)

2.4 Natürliche Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\},\ \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

2.4.1 Peanosche Axiomensystem der natürlichen Zahlen

1. Die Zahl 1 ist eine natürliche Zahl $1 \in \mathbb{N}$
2. Zu jeder natürlichen Zahl n, gibt es genau einen „Nachfolger“ $n'(=: n + 1)$
3. Die Zahl 1 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl
4. $n' = m' \implies n = m$
5. Enthält eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ die Zahl 1 und von jedem $n \in m$ auch den Nachfolger n' ist $M = \mathbb{N}$

Bemerkung:
Mit Hilfe der Axiome lassen sich auf $\mathbb{N}$ Addition (+), Multiplikation ($\cdot$) und Ordnung ($\leq$) einführen.
Wir definieren:
$1' = 2, 2' = 3, \ldots n + 1 := m'\ n + m' := (n + m)';\ n \cdot m' := nm + n$ Man kann zeigen, dass jede Menge, welche die Peano Axiome erfüllt isomorph bezüglich Multiplikation und Addition zu $\mathbb{N}$ ist Wir definieren $n < m \iff \exists x \in \mathbb{N} : x + m = m$

2.4.2 Vollständige Induktion

Induktionsprinzip Es seien die folgende Schritte vollzogen:

1. Induktionsverankerung (Induktionsanfang): Die Aussage $A(1)$ gilt
2. Induktionsschluss: Ist für ein $n \in \mathbb{N}$ $A(n)$ gültig, so folgt auch die Gültigkeit von $A(n + 1)$

Dann sind alle Aussagen $A(n), n \in \mathbb{N}$ gültig.

Beweis: Wir definieren die Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N},\ M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(N)$ ist gültig$\}$ Die Induktionsverankerung besagt, dass $1 \in M$ und die Induktionsannahme $n \in M \implies n + 1 \in M$. Folglich ist nach dem 5. Axiom von Peano $M = \mathbb{N}$ $\square$

Beispiel 1 Zu Beweisen:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Beweis

1. Induktionsverankerung: $1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$
2. Annahme: $A(n)$ gültig für $n \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   Zu zeigen $A(n+1) : 1^2 + \ldots + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$

$$1^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{6}n + n + 1\right)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\big(2n^2 + 7n + 6\big) = \frac{1}{6}(n+1)(2n+3)(n+2)\square$$

Beispiel 2 Definition von Potenzen

$$x^0 := 1$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} x^n := x^{n-1}x$$

(iterative (rekursive) Definition)
Auf $\mathbb{N}$ sind diese elementaren Operationen erklärt:

- Addition $a + b$
- Multiplikation $a \cdot b$
- (unter gewissen Voraussetzungen):
  - Subtraktion $a - b$
  - Division $\frac{a}{b}$

$\mathbb{N}$ ist bezüglich „$-$“ oder „$/$“ nicht vollständig, das heißt $n + x = m$ ist nicht lösbar in $\mathbb{N}$ Erweiterungen:

- Ganze Zahlen $\mathbb{Z} := \{0; \pm, n \in \mathbb{N}\}$
  Negative Zahl $(-n)$ ist definiert durch $n + (-n) = 0$
- Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ $(bx = y)$

Man sagt, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ einen Körper bildet.

2.4.3 Definition Körper

$\mathbb{K}$ sei eine Menge auf der Addition und Multiplikation sei. $\mathbb{K}$ heißt ein Körper, wenn die folgende Axiome erfüllt sind:

- Addition: $(\mathbb{K}, +)$ ist eine kommutative Gruppe, das heißt $\forall\, a, b, c \in \mathbb{K}$:
  1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ Assoziativität
  2. $a + b = b + a$ Kommutativität
  3. $\exists! 0 \in \mathbb{K} : a + 0 = a$ Existenz des Nullelement

4. $\exists x \in \mathbb{K} : a + x = 0$ Existenz des Negativen

- Multiplikation: $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe, das heißt $\forall\, a, b, c \in \mathbb{K}$
  1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ Assoziativität
  2. $a \cdot b = b \cdot a$ Kommutativität
  3. $\exists! 1 \in \mathbb{K} : a \cdot 1 = a$ Existenz des Einselement
  4. Für $a \neq 0, \exists! y \in \mathbb{K} : a \cdot y = 1$ Inverse

- Verträglichkeit
  1. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ Distributivität

Satz $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper. Definieren auf $\mathbb{Q}$ eine Ordnung „$\leq$“ durch

$$x \leq y \iff \exists m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N} : y - x = \frac{m}{n}$$

dann ist auch diese Ordnung mit der Addition und Multiplikation in $\mathbb{Q}$ in folgendem Sinne verträglich (Axiom M0):

- $a \leq b \implies a + c \leq b + c$
- $0 \leq a \wedge 0 \leq b \implies 0 \leq a \cdot b$

Bemerkung

$$\{a \in \mathbb{Q} : a = \frac{r}{s}, r \in \mathbb{N}_0, s \in \mathbb{N}\} =: \mathbb{Q}_+ (\mathbb{Q}_{\geq 0})$$

2.5 Abzählbarkeit

2.5.1 Abzählbarkeit von Mengen

Sei A eine Menge

- A heißt endlich mit $|A| = n$ Elementen ist äquivalent zu

$$|A| = \begin{cases} A = \emptyset & n = 0 \\ \exists f : A \to \{1, \ldots, n\} & f \text{ bijektiv}, n < \infty \end{cases}$$

- A heißt abzählbar unendlich genau dann wenn

$$\exists f : A \to \mathbb{N} \text{ bijektiv}$$

- A heißt über abzählbar genau dann wenn: A ist weder endlich oder abzählbar unendlich

Beispiel $\mathbb{Z}$ ist abzählbar unendlich

Beweis Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$$z \mapsto \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ -2z-1 & x < 0 \end{cases}$$

- Surjektivität: zu zeigen $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$
  Offenbar $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{N}$. Wir zeigen $\mathbb{N} \subseteq f(\mathbb{Z})$. Sei $n \in \mathbb{N}$, finde $z \in \mathbb{Z}$ mit $f(z) = n$. Man unterscheide:
  - n gerade $\to$ Wähle $z = \frac{n}{2}$
  - n ungerade $\to z = -\frac{n+1}{2}$
- Injektivität: Sei $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ und $f(z_1) = f(z_2)$
  ohne Beschränkung der Allgemeinheit $z_1 \leq z_2$. Entweder $z_1, z_2 \geq 0$ oder $z_1, z_2 < 0$, denn sonst währe $f(z_1)$ ungerade und $f(z_1)$ gerade **Widerspruch**. Falls
  - $z_1, z-2 \geq 0 \implies 2z_1 = f(z_1) = f(z_2) = 2z_2 \implies z_1 = z_2$
  - $z_1, z-2 < 0 \implies -2z_1 - 1 = f(z_1) = f(z_2) = -2z_2 - 1 \implies z_1 = z_2$ □

Beispiel

- $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar unendlich
- $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich
- $\mathbb{R}$ über abzählbar

Abzählbarkeit von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$(1,1) \to (1,2) \to (2,1) \to (2,2) \to (1,3) \to (2,3) \to (3,2) \to (3,1)$$

Korollar 1.30 $M_1, M_2, \ldots, M_n$ abzählbar $\implies M_1 \times \ldots \times M_n$ abzählbar.

Beweis Durch vollständige Induktion $M_1 \times (M_2 \times \ldots \times M_n) \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$

Satz Die Menge aller Folgen $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ ist über abzählbar. (Zum Beispiel: $1, 0, 0, 0, \ldots, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{k-te Stelle}}}{1}, \ldots, 0, \ldots$)

Beweis M ist unendlich, denn die Folgen $f_k : 0, , \ldots, 0, 1, 0, \ldots$ sind paarweise verschieden. Angenommen M wäre abzählbar. Sei $f_1, f_2, \ldots$ eine Abzählung mit $f_k = (z_{kn n \in \mathbb{N}})$.

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & \\ 0 & 1 & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \end{matrix}$$

f : 0010 Man setze $f = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$z_n := \begin{cases} 1 & z_{nn} = 0 \\ 0 & z_{nn} = 1 \end{cases}$$

Dann $f \in M$, aber $f \neq f_k \,\forall\, k \in \mathbb{N}$. Also ist M nicht abzählbar. („Cantorsches Diagonalverfahren“).

2.6 Ordnung

2.6.1 Definition

Sei A eine Menge. Relation $R \subseteq A \times A$ heißt Teilordnung (Halbordnung) auf A, wenn $\forall\, y, x, z \in A$ gilt:

1. $x \leq x$ (Reflexivität)
2. $x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$ (Symmetrie)
3. $x \leq y \wedge y \leq z \implies x \leq z$ (Transitivität)

Wenn außerdem noch $\forall\, x, y \in A$ gilt:

4. $x \leq y \vee y \leq x$ (Vergleichbarkeit je zweier Elemente)

so heißt R (totale) Ordnung auf A. $(A, \leq)$ heißt teilweise beziehungsweise (total) geordnete Menge.

Beispiel

1. $(\mathbb{Q}, \leq)$ mit der üblichen Ordnung ist eine total geordnete Menge
2. Wir definieren auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A eine Teilordnung „$\leq$“:
$$B \leq C \iff B \subseteq C \,\forall\, B, C \in \mathcal{P}(A)$$
Beweis: 1. - 3. sind trivial, 4. geht nicht (keine Totalordnung). Wähle $B, C \in \mathcal{P}(a), B, C \neq \emptyset, B \cap C = \emptyset$. Dann gilt weder $B \subseteq C$ noch $C \subseteq B$ □
3. Sei $F := \{f \mid f : A \to \mathbb{R}\}$ für eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$. Wir definieren $f \leq g \iff \forall\, x \in A : f(x) \leq g(x)$
(1.) - (3.) trivial, 4. gilt nicht. Falls A mehr als ein Element hat, gibt es eine Funktion, die nicht miteinander verglichen werden können.

2.7 Maximum und Minimum einer Menge

2.7.1 Definition

Sei $(A, \leq)$ eine teilweise geordnete Menge, $a \in A$
Maximum:

$$a = \max A \iff \forall\, x \in A : x \leq a$$

Minimum:

$$a = \max A \iff \forall\, x \in A : a \leq x$$

2.7.2 Bemerkung

Durch die Aussagen ist a eindeutig bestimmt, denn seien:

$$a_1, a_2 \in A : \forall\, x \in A \begin{cases} x \le a_1 \\ x \le a_2 \end{cases} \implies \begin{cases} a_2 \le a_1 \\ a_1 \le a_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{Symmetrie}} a_1 = a_2$$

2.8 Schranken

Sei $(A, \le)$ eine (total geordnete) Menge, $B \subseteq A$

1. $S \in A$ heißt obere Schranke zu $B \iff \forall\, x \in B : x \le S$
   $S \in A$ heißt untere Schranke zu $B \iff \forall\, x \in B : S \le x$
2. $\bar{S}(B) := \{S \in A \mid S$ S ist untere Schranke zu $B\}$
   $\underline{S}(B) := \{S \in A \mid S$ S ist obere Schranke zu $B\}$
3. Existiert $g := \min \underline{S}(B)$ beziehungsweise $g := \max \bar{S}$ so sagen wir:
   $g = \sup B$ (kleinste obere Schranke, <u>Supremum</u>, obere „Grenze" von B in A) $g = \inf B$ (größte obere Schranke, <u>Infimum</u>, untere „Grenze" von B in A)

2.8.1 Bemerkung

1. Existiert $\max B = \bar{b}$, so folgt $\sup B = \bar{b}$, denn $\bar{b} \in \underline{S}(B)$ nach Definition.

   $$s \in \underline{S}(B) \implies \bar{b} \le s, \text{ da } \bar{b} \in B$$

   Ebenso gilt: $\exists \min B = \underline{b} \implies \inf B = \underline{b}$

2.8.2 Beispiel

1. $B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}, A = \mathbb{R}, \ \left(1, \frac{1}{2}, \ldots\right)$
   - Es gilt $1 \in B, \forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{n} \le 1$, daher folgt $\max B = \sup B = 1$
   - Sei $s \le 0$, dann gilt $\forall\, n \in \mathbb{N} : s \le \frac{1}{n}$, also $s \in \bar{S}(B)$
     Sei $s > 0 \implies s > \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{s}$, also $s \notin \bar{S}(B)$
     Es folgt $\bar{S}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid s \le 0\}$ insbesondere $0 \in \bar{S}(B)$
     Ferner gilt $\forall\, s \in \bar{S}(B) : s \le 0 \implies \underline{0} = \max \bar{S}(B) = \inf B$
2. $A = \mathbb{Q}, B = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \le x \wedge x^2 \le 2\}$. Es gilt $0 = \min B = \inf B$, aber $\sup B$ existiert nicht in $\mathbb{Q}$

2.9 Reelle Zahlen

$x^2 = 2$ hat keine Lösungen in $\mathbb{Q}$. Allerdings können wir $\sqrt{2}$ „beliebig gut" durch $y \in \mathbb{Q}$ approximieren, das heißt $\forall\, \varepsilon > 0 \exists y \in \mathbb{Q} : 2 - \varepsilon \le y^2 \le 2 + \varepsilon$ Das motiviert die folgende Vorstellung:

1. $\mathbb{Q}$ ist „unvollständig"
2. $\mathbb{Q}$ ist „dicht" in $\mathbb{R}$

2.9.1 Vollständigkeitsaxiom (Archimedes)

Jede nach oben (unten) beschränkte Teilmenge hat ein Supremum oder Infimum.

2.9.2 Axiomatischer Standpunkt

Es gibt eine Menge $\mathbb{R}$ (genannt Menge der reellen Zahlen) mit Addition, Multiplikation, Ordnung, die die Definition eines Körper und das Vollständigkeitsaxiom erfüllt und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ mit „$\leq$" eine Ordnung bildet.

2.9.3 Bemerkung

1. Bis auf Isomorphie gibt es höchstens ein solches $\mathbb{R}$, das heißt $\tilde{\mathbb{R}}$ ein weiteres System der reellen Zahlen ist, dann $\exists$ bijektive Abbildung $f : \mathbb{R} \to \tilde{\mathbb{R}}$ die bezüglich Addition, Multiplikation, Ordnung eine Homomorphie ist.

$$\begin{gathered} \forall\, x, y \in \mathbb{R} : \\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(xy) = f(x)f(y) \\ x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \end{gathered}$$

2. $\mathbb{N}$ (und damit auch $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$) lassen sich durch injektive Homomorphismus $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ einbetten

$$\begin{gathered} g\big(\tilde{0}_{\in\mathbb{N}}\big) = 0_{\in\mathbb{R}} \\ g(\tilde{n}_{\in\mathbb{N}} + 1) = g(n_{\in\mathbb{R}}) + 1 \\ g(1_{\in\mathbb{N}}) = 1_{\in\mathbb{R}} \end{gathered}$$

2.9.4 Konstruktiver Standpunkt

Wir können $\mathbb{R}$ ausgehend von $\mathbb{Q}$ konstruieren.

Methode der Abschnitte Jede reelle Zahl wird charakterisiert durch ein „rechts offenes, unbeschränktes Intervall", dessen „rechte Grenze" die Zahl erstellt.

$$\mathbb{R} := \{A \subseteq \mathbb{Q} \begin{cases} A \neq \emptyset \\ x \in A, y \leq x \implies y \in A \\ \forall\, x \in A \exists y \in A, x < y \end{cases}$$

Methode der Cauchy-Folgen Jede reelle Zahl wird charakterisiert als „Grenzwert" eine Klasse äquivalenter „Cauchy Folgen" aus $\mathbb{Q}$ (später)

2.9.5 Definition 1.37

- $$x \in \mathbb{R} \text{ heißt } \begin{cases} \text{positiv} & 0 < x \\ \text{nicht negativ} & 0 \leq x \\ \text{negativ} & x < 0 \\ \text{nicht positiv} & x \geq 0 \end{cases}$$

- Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird definiert durch $|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

- Die Vorzeichen- oder Signumfunktion

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{sgn} x = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

2.9.6 Satz 1.38

1. $|xy| = |x||y|$
2. $|x + y| \leq |x| + |y|$
   Beweis:

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2 && (1) \\ &\leq |x|^2 + 2|xy| + |y|^2 = |x|^2 + 2|x||y| + \left|y^2\right| && (2) \\ &= (|x| + |y|)^2 \implies |x+y| \leq ||x| + |y|| = |x| + |y| && \square \end{aligned}$$

3. $|x + y| = |x| + |y| \iff xy \geq 0$

2.9.7 Satz 1.39

1. $||x| - |y|| \leq |x - y|$
   Beweis:

$$\begin{aligned} |x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| &\implies |x| - |y| \leq |x - y| && (3) \\ |y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| &\implies |y| - |x| \leq |x - y| && (4) \\ ||x| - |y|| = \max\{|x| - |y|, |y| - |x|\} \leq |x - y| & && \square \end{aligned}$$

2. $$|x - y| \leq \varepsilon \iff \begin{cases} x - \varepsilon \leq y \leq x + \varepsilon \\ y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon \end{cases}$$

Beweis:

$$|x-y| = \max\{x-y, y-x\} \le \varepsilon \iff \begin{cases} x-y \le \varepsilon \\ y-x \le \varepsilon \end{cases} \iff \begin{cases} x \le y+\varepsilon \\ y-x \le \varepsilon \end{cases} \iff y-\varepsilon \le x \le y+\varepsilon \tag{5}$$

Vertausche x und $y \implies x-\varepsilon \le x+\varepsilon$ □

2.9.8 Definition 1.40

Sei $a, b \in \mathbb{R}, a \le b$

- $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$ abgeschlossenes Intervall
- $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} =]a,b[$ offenes Intervall
- $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$ rechts-halboffenes Intervall
- $(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$ links-halboffenes Intervall
- $\varepsilon > 0, I_\varepsilon(x) := (x-\varepsilon, x+\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |x-y| < \varepsilon = B_\varepsilon(x)(\text{Kugel})\}$

2.9.9 Lemma 1.41

Es gilt $y \in I_\varepsilon(x) \implies \exists \delta > 0 : I_\delta(y) \subseteq I_\varepsilon(x)$

Beweis Sei $y \in I_\varepsilon(x) \implies |x-y| < \varepsilon \iff \varepsilon - |x-y| > 0$ Wähle $0 < \delta < \varepsilon - |x-y|$. Es ist nun zu zeigen $I_\delta(y) \subseteq I_\varepsilon(x)$, das heißt $z \in I_\delta(y) \implies z \in I_\varepsilon(x)$. Es gilt

$$z \in I_\delta(y) \implies |z-y| < \delta \tag{6}$$

$$\implies |z-x| = |z-y+y-x| \le |z-y| + |y-x| \le \delta + |x-y| < \varepsilon \tag{7}$$

$$\implies z \in I_\varepsilon(x)$$ □

2.9.10 Definition 1.42

A, B seien geordnete Mengen, $f : A \to B$ heißt:

- monoton $\begin{cases} \text{wachsend} & x \le y \implies f(x) \le f(y) \\ \text{fallend} & x \le y \implies f(x) \le f(y) \end{cases}$
- streng monoton $\begin{cases} \text{wachsend} & x < y \implies f(x) < f(y) \\ \text{fallend} & x < y \implies f(x) > f(y) \end{cases}$

Beispiel 1.43 $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}, x \mapsto x^n$ ist streng monoton wachsend $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Beweis Induktion + Axiom M0 □

2.9.11 Lemma 1.44

Sei $M, N \subseteq \mathbb{R}, f : M \to N$ streng monoton und bijektiv. Dann ist f^{-1} streng monoton.

Beweis Wir betrachten den Fall f streng monoton wachsend. Seien $y_1, y_2 \in N, y_1 < y_2, x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$.
Behauptung $x_1 < x_2$ (sonst wäre $x_1 \geq x_2$).
Falls $x_1 > x_2 \xRightarrow{\text{streng monoton}} f(x_2) > f(x_2)$ **Widerspruch** zu $y_1 < y_2$
Falls $x_1 = x_2 \implies y_1 = y_2$ **Widerspruch** zur Annahme $y_1 < y_2$ □

2.9.12 Definition 1.45 Produktzeichen

Für $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ definieren wir $a^n := \prod_{j=1}^{n} a$ und für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}$ $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$.

2.9.13 Satz 1.46

Es gilt $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ (beziehungsweise $\mathbb{R} \setminus \{0\}$),$n, m \in \mathbb{N}_0$ (beziehungsweise $\mathbb{Z}$)

1. $a^n a^m = a^{n+m}$
2. $(a^n)^m = a^{nm}$
3. $(ab)^m = a^m b^m$

Beweis Zunächst f+r $n, m \in \mathbb{N}_0$ durch Induktion nach n, dann für $n, m \in \mathbb{Z}$ (mit Hilfe der Definition von a^{-n})

2.9.14 Definition 1.47

Sei $n, k \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{n}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j}$$

2.9.15 Lemma 1.48

Sei $k, n \in \mathbb{N}_0$

1. $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$
   $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$ für $k \leq n$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ für $1 \leq k \leq n$

2.9.16 Satz 1.49

$\forall\, n \in \mathbb{N}_0, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

Beweis Induktion:

- Induktionsanfang: $n = 0, (x+y)^0 = 1, \binom{0}{j} x^0 y^0 = 1$ nach Definition
- Induktionsschritt $n \to n+1$:

  $(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n$

  mit der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
&= (x+y) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j+1} y^j + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^{j+1} \\
&= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} x^{n+1-j} y^j + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} x^{n-i+1} y^i}_{\text{Substitution } i := j+1} + \binom{n}{n} y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} \right)}_{\binom{n+1}{j} \text{nach Lemma 1.48}} x^{n+1-j} y^j + y^{n+1} \\
&= \sum j = 0^{n+1} \binom{n+1}{j} x^{n+1-j} y^j
\end{aligned}$$

□

2.9.17 Folgerung 1.50

1. $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$
2. $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$

Beweis: Setze in Binomische Formel $x = 1, y = 1$ beziehungsweise $y = -1$ □

2.9.18 Lemma 1.51

Sei $m \in R$ nach oben (beziehungsweise nach unten) beschränkt
Dann gilt

1. $s = \sup M \iff \forall\, \varepsilon > 0 \exists x \in M : s - \varepsilon < x (\geq s)$
2. $l = \inf M \iff \forall\, \varepsilon > 0 \exists x \in M : (l \leq) x < l + \varepsilon$

Beweis Wir beweisen 1.
$s \neq \sup M \iff s$ ist nicht die kleinste obere Schranke von $m \iff$ es gibt eine kleinere obere Schranke $s' = s - \varepsilon$ von $M \iff$ nicht $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x > s - \varepsilon$ □

2.9.19 Lemma 1.52

$\mathbb{N}$ ist unbeschränkt in $\mathbb{R}$

Beweis sonst $\exists x = \sup \mathbb{N}$ (nach Vollständigkeits Axiom), x kleinste obere Schranke $\xrightarrow{\text{[[Lemma 1.51]]}}$ $\varepsilon = \frac{1}{2} \exists m_o \in \mathbb{N} : x - \frac{1}{2} < m_0 \implies m_0 + 1 \in \mathbb{N}, m_0 + 1 > x + \frac{1}{2} > x \implies x$ ist nicht die obere Schranke von $\mathbb{N}$ □

2.9.20 Lemma 1.53 (Bernoullische Ungleichung)

$$\forall x \in [-1, \infty), n \in \mathbb{N}_0 : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Beweis Beweis durch Induktion:

- **IA**: $n = 0$ klar
- **IS**:

$$\begin{aligned} n \to n+1 : (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n (1+x) && (8)\\ &\geq (1+nx)(1+x) = 1 + nx^2 + (n+1)x && (9)\\ &\geq 1 + (n+1)x \text{ da } x^2 \geq 0 \end{aligned}$$ □

2.9.21 Folgerung 1.54

1. Sei $y \in (1, \infty)$. Dann gilt $\forall c > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 y^n \in (c, \infty)$ („Konvergenz" von y^n gegen 0)
2. Sei $y \in (-1, 1)$. Dann gilt $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : y^n \in I_\varepsilon(0)$ („Konvergenz" y^n gegen 0)

Beweis

1. Für $x = y - 1 > 0$ gilt dann nach 2.9.20

$$\underbrace{(1+x)}_{y}{}^n \geq 1 + nx \implies y^n > nx$$

Nach 2.9.19 existiert für $c > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{c}{x} \implies$

$$\forall n \geq n_0 : y^n > nx \geq n_0 x \geq \frac{c}{x} x = c \implies \forall n \geq n_0 : y^n \in (c, \infty)$$

2. Für $x = \frac{1}{|y|} > 1 \xRightarrow{\text{nach [[1541]] mit } c=\frac{1}{\varepsilon}}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : x^n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\implies \frac{1}{|y^n|} > \frac{1}{\varepsilon} \implies |y^n| < \varepsilon \square$$

2.9.22 Satz 1.55 (Existenz der m-ten Wurzel)

$$\forall m \in \mathbb{N}, a \in [a, \infty) \text{ gilt } \exists! x \in [0, \infty) : x^m = a$$

Beweis (Skizze 1, 2) Wir geben ein Iterationsverfahren

$$p_3(x) = m$$

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, a_3 > 0$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a > 0, m \geq 2$, x muss die Gleichung $x^m - a = 0$ lösen, das heißt Nullstelle der Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^m - a$ suchen. Diese approximieren wir nach dem **Newton Verfahren**
x_0 sodass $x_0^m - a \geq 0$

$$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \impliedby \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}} = f'(x_n)$$

$$x_{n+1} := \underbrace{x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{F(x_n)} = x_n - \frac{x_n^m - a}{m x_n^{m-1}}$$

$$= x_n \left(1 - \frac{1}{m}\left(1 - \frac{a}{x_n^m}\right)\right)$$

Hoffnung: $x_n \to x^*$ Sei $x_0^m > a$. Wir zeigen

1. $x_n > 0$
2. $x_n^m \geq a$
3. $x_{n+1} \leq x_n$

Beweis:

1. Induktion
2. Induktion
   - $n = 0, x_0^m \geq \implies x_0 > 0$, da $a > 0, x_0 \geq 0$

- $n \to n+1$

$$x_n > 0, x_n^m \geq a \implies x_{n+1} = x_n\left(1 - \frac{1}{m}\left(1 - \frac{a}{x_n^m}\right)\right) \geq 0$$

weil

$$x_{n+1}^n = \underbrace{x_n^m}_{\geq 0}\left(1 - \frac{1}{m}\left(1 - \frac{a}{x_n^m}\right)\right)^m \underbrace{\geq}_{\text{Bernoulli}} x_n^m\left(1 - \frac{1}{m}\left(1 - \frac{a}{x_n^m}\right)\right) = 0$$

$\implies x_{n+1} > 0$, da $a > 0$

3. Nach 2:
$$x_n^m \geq a \implies 0 \leq 1 - \frac{1}{m}\left(1 - \frac{1}{x_n^m}\right) \leq 1$$
Nach 1:
$$x_m > 0 \implies x_{n+1} = x_n\left(1 - \frac{1}{m}\left(1 - \frac{a}{x_n^m}\right)\right) < x_n$$
Wegen 1 ist $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ nach unten beschränkt $\implies$
$$x := \inf M \text{ existiert}$$
Wir wollen zeigen, dass $x^m = a$. Es gilt
$$x \leq x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{m}\right)x_n + \frac{1}{m}\frac{a}{x_n^{m-1}}$$
$$\leq \left(1 - \frac{1}{m}\right)x_n + \frac{a}{m}\sup\{\frac{1}{x_n^{m-1} \mid x \in \mathbb{N}_0}\}$$
4. Es gilt nach nach 2
$$a \leq \inf\{x_n^m \mid n \in \mathbb{N}_0\} = (\inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}_0\})^m = x^m$$
und damit $x > 0$
Ferner gilt
$$y = \sup\{\frac{1}{x_n^{m-1}} \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \inf\{x_n^{m-1} \mid x \in \mathbb{N}_0\}^{-1}$$
mit 2.9.23
$$= \left(\frac{1}{\inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}}\right)^{m-1} = \frac{1}{x^{m-1}} \implies ay \leq \frac{a}{x^{m-1}}$$
5. Von oben wissen wir, dass $x \leq ay$
$$\implies x \leq ay \leq \frac{a}{x^{m-1}} \implies x^m \leq a$$

Aus 4 und 5 folgt $x^m = a$ $\square$

2.9.23 Lemma 1.56

1. Seien für $n \in \mathbb{N}_0 : y_n > 0$ und $\inf\{x_n \mid x \in \mathbb{N}_0\} > 0$
   Dann gilt
   $$\sup\{\frac{1}{y_n} \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \frac{1}{\inf\{y_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}}$$
2. Seien für $n \in \mathbb{N}_0, y_n > 0, k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:
   $$\inf\{y_n^k \mid n \in \mathbb{N}_0\} = (\inf\{y_n \mid n \in \mathbb{N}_0\})^k$$

(ohne Beweis)

3 Komplexe Zahlen

Motivation: $x^2 + 1 = 0$ nicht lösbar in $\mathbb{R}$
Wir betrachten die Menge der Paare $\{x, y\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf denen die Addition und Multiplikation wie folgt definiert ist:

- (KA) $\{x_1, y_1\} + \{x_2, y_2\} = \{x_1 + x_2, y_2 + y_2\}$
- (KM) $\{x_1, y_1\} \cdot \{x_2, y_2\} = \{x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1\}$

3.1 Komplexer Zahlenkörper

1. Die Menge der Paare $z = \{x, y\} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Addition 3 und Multiplikation 3 bildet den Körper $\mathbb{C}$ der **komplexen Zahlen** mit den neutralen Elementen $\{0, 0\}$ und $\{1, 0\}$
2. Die Gleichung $z^2 + \{1, 0\} = \{0, 0\}$ hat in $\mathbb{C}$ zwei Lösungen, welche mit $\imath := \{0, \pm 1\}$ bezeichnet werden
3. Der Körper $\mathbb{R}$ ist mit der Abbildung $x \in \mathbb{R} : x \mapsto \{x, 0\} \in \mathbb{C}$ isomorph zu einem Unterkörper von $\mathbb{C}$

3.1.1 Beweis

1. Die Gültigkeit des Kommutativitäts-, Assoziativs-, und Distributivitätsgesetzes verifiziert man durch Nachrechnen.
   Neutrale Elemente: Wir lösen die Gleichung $a + z = \{0, 0\}$ für beliebige gegebene $a \in \mathbb{C}, a = \{a_1, a_2\}$
   $$\implies z = \{-a_1, -a_2\}$$
   $$a \cdot z = \{1, 0\}$$
   $$z = \frac{1}{a} := \{\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, -\frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2}\}, \text{ weil } a \cdot \frac{1}{a}$$
   $$\text{weil } a\frac{1}{a} = \{a_1\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{a_1a_2}{a_1^2 + a_2^2} - \frac{a_2a_1}{a_1^2 + a_2^2}\}$$

2. $i := \{0,1\}$ hat die Eigenschaft

$$1+\imath^2 = \{1,0\} + \{0^2-1^2,0\} = \{0,0\} \implies 1+\imath^2 = 0$$

   Ähnlich $1+(-\imath)^2 = 0$

3. Die Zuordnung $x \in \mathbb{R} : x \mapsto \{x,0\} \in \mathbb{C}$ bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf eine Untermenge von $\mathbb{C}$ ab, welche bezüglich der komplexen Addition und Multiplikation wieder ein Körper ist □

3.2 Notation

$z = \{x,y\} =: x + \imath y,\ x,y \in \mathbb{R}$

- x ist Realteil $x = \Re z$
- y ist Imaginärteil $x = \Im z$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + \imath y_1) + (x_2 + \imath y_2) = \underbrace{x_1 + x_2}_{\Re(z_1+z_2)} + \imath \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\Im(z_1+z_2)}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + \imath y_1)(x_1 + \imath y_2) = x_1x_2 + \imath y_1 x_2 + \imath y_2 x_1 + (\imath y_1)(\imath y_2) = \underbrace{x_1x_2 - y_1y_2}_{\Re(z_1z_2)} + \imath \underbrace{(x_1y_2 + y_1x_2)}_{\Im(z_1,z_2)}$$

3.3 TODO Graphische Darstellung

3.4 Bemerkung

Die reellen Zahlen sind durch $\Im z = 0$ charakterisiert.

$$z_1 = z_2 \implies x_1 + \imath y_i = x_2 + \imath y_2 \iff x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

3.5 Korollar 1.59

Jede quadratische Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0,\ p,q \in \mathbb{R}$$

besitzt in $\mathbb{C}$ genau zwei Lösungen

$$z_{1,2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q} & p^2 \geq 4q \\ -\frac{1}{2} \pm \imath\frac{1}{2}\sqrt{|p^2-4q|} & p^2-4q < 0 \end{cases}$$

3.6 Fundamentalsatz der Algebra

Jede algebraische Gleichung der Form

$$z^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i = 0$$

hat in $\mathbb{C}$ mindestens eine Lösung. Beweis $\rightarrow$ Funktionstheorie

3.7 Betrag

Für komplexe Zahlen lässt sich ein Absolutbetrag definieren

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Damit:

$$x = \qquad r\cos\alpha \tag{10}$$
$$y = \qquad r\sin\alpha \tag{11}$$
$$z = \qquad x + \imath y = r(\cos\alpha + \imath\sin\alpha) \tag{12}$$
$$\tag{13}$$

3.8 Konjugation

Zu einem $z = x + \imath y \in \mathbb{C}$ definieren wir eine konjugierte komplexe Zahl

$$\bar{z} = x - \imath y \in \mathbb{C}$$

Dann gilt

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$$

Aus der Definition:

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 * z_2} = \overline{z_1} * \overline{z_2}$
- $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$
- $y = \frac{z-\bar{z}}{2\imath}$

4 Folgen

Eine Folge von reellen Zahlen wird gegeben durch eine Abbildung

$$\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, n \mapsto x_n$$

Wir bezeichnen die Folge auch mit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

Topologische Struktur auf Mengen.

- Abstände in $\mathbb{R}^1$ Betrag $|x - y| \xrightarrow{\text{Verallgemeinerung}}$ Norm / Metrik
- Umgebung in $\mathbb{R}^1$ ε -Intervall $\xrightarrow{\text{Verallgemeinerung}}$ Kugel Umgebung

Wir betrachten Folgen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$ (oder $\mathbb{C}$)

4.1 Definition 2.1 Konvergenz

Wir sagen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) gegen den Grenzwert (oder Limes) $a \in \mathbb{K}$ konvergiert

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \left(a = \lim_{n\to\infty} a_n\right)$$

wenn für beliebiges $\varepsilon > 0$ von einem $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ an gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon, n \geq n_\varepsilon$$

$$\iff \forall\, \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_\varepsilon a_n \in I_\varepsilon(a)$$

4.2 Folgerung 2.2

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende beziehungsweise fallende Folge reeller Zahlen $M = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und sei nach oben beziehungsweise unten beschränkt. Dann gilt

$$a_n \to \sup M, a_n \to \inf M$$

Beweis $\to$ Übungen

4.3 Definition 2.3 Cauchy Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge wenn:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,\forall\, n, m \geq n_\varepsilon : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

(Cauchy Kriterium)

4.4 Definition 2.4 Teilfolge

Eine Teilfolge einer gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Auswahl $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, wobei a_{n_k} auch die Glieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind

Beispiel 4.1 (Beispiel 2.5)

$$a_n = \frac{1}{m}$$

ist eine Cauchy-Folge. Für ein $\varepsilon > 0$ wählen wir n_ε so dass $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. Für beliebiges $n \geq m > N$

$$|a_m - a_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \frac{n-m}{mn} \leq \frac{n}{mn} = \frac{1}{m} < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon\square$$

Satz 4.2 (Jede Cauchy-Folge ist beschränkt)

Beweis Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Angenommen, die Folge ist nicht beschränkt. Dann gibt es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$|a_{n_k}| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$$

Aus dieser Teilfolge kann man eine weitere Teilfolge

$$\left(a_{n_{k_l}}\right)_{l\in\mathbb{N}}$$

extrahieren

$$\left|a_{n_{k_{i+1}}}\right| > 2\left|a_{n_{k_l}}\right| \quad l \in \mathbb{N}$$

Dann gilt

$$\left|a_{n_{k_{i+1}}} - a_{n_{k_l}}\right| \geq \left|a_{n_{k_{i+1}}}\right| - \left|a_{n_{k_l}}\right| > \left|a_{n_{k_l}}\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$$

im Widerspruch zur Cauchy-Folgen Eigenschaft. □

Satz 4.3 (Jede konvergente Folge ist Cauchy-Folge)

Beweis

$$\begin{aligned} a_n \xrightarrow[k\to\infty]{} a &\implies \forall\, \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall\, n \geq n_\varepsilon : |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\implies \forall\, n, m \in n_\varepsilon : |a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

□

Lemma 4.4 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) welche gegen $a \in \mathbb{K}$ und $\tilde{a} \in \mathbb{K}$ konvergiert. Dann ist $a = \tilde{a}$.

Beweis Beweis durch Widerspruch.
Falls $|a - \tilde{a}| > 0$, dann

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall\, n \geq n_\varepsilon \varepsilon = |a - \tilde{a}|, |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und ein m_ε, sodass

$$\left|a_n - \tilde{a} < \frac{\varepsilon}{2}\right| \forall\, n \geq m_\varepsilon$$

Dann für $n \geq \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$:

$$|a - \tilde{a}| \leq |a - a_n| + |a_n - \tilde{a}| < \varepsilon`$$

Widerspruch $\implies a = \tilde{a}$ □

Bemerkung 4.5 Die Mengen Abständen heißen *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in M konvergiert

Definition 4.6 (Häufungwert, Häufungspunkt) Ein $a \in \mathbb{K}$ heißt Häufungswert einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$, wenn es zu beliebigen $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenelemente a_n gibt mit $|a - a_n| < \varepsilon$

Ein $a \in \mathbb{K}$ heißt Häufungspunkt einer Teilmenge M von $\mathbb{K}$, wenn $\forall\, \varepsilon > 0$ existieren unendlich viele $x \in M$, sodass $|a - x| < \varepsilon$

Beispiel 4.7

1. $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$
   - divergente Folge
   - besitzt 2 Häufungswerte $a^{(1)} = 1, a^{(2)} = -1$
2. Wir nehmen $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a, b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ und definieren eine neue Folge c_n sodass

$$\begin{aligned} c_{2n} &:= b_n, n \in \mathbb{N} \\ c_{2n+1} &:= a_n, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

   $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat 2 Häufungswerte a und b

Bemerkung 4.8 Nach 4.4 hat die konvergente Folge 1 Häufungswert

Lemma 4.9 (2.11) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ und a ein Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann konvergiert $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

Beweis Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir wählen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sodass

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \,\forall\, n, m > n_\varepsilon \text{ (aus Cauchy-Folge)}$$

und $m_\varepsilon > n_\varepsilon$ mit

$$|a - a_{m_\varepsilon}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ (Häufungswert)}$$

Dann folgt

$$\forall\, n > m_\varepsilon : |a - a_n| \le |a - a_{m_\varepsilon}| + |a_{m_\varepsilon} - a_n| < \varepsilon \implies a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

□

Satz 4.10 A abgeschlossen $\iff$ (a Häufungspunkt von $A \implies a \in A$) A abgeschlossen in M $\iff M \setminus A =: CA$ offen

Beweis ($\impliedby$):
Sei jeder Häufungspunkt von A in A $x \in CA (= \mathbb{R} \setminus A) \implies x$ kein Häufungspunkt von $A, x \notin A$

$$\implies \varepsilon : I_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset \implies \exists \varepsilon > 0 : I_\varepsilon \subseteq CA$$

$\implies CA$ offen $\implies A$ abgeschlossen
($\implies$):
Sei A abgeschlossen, also CA offen, ist Häufungspunkt $x \notin A$ das heißt $x \in CA$, so gilt

$$\exists \varepsilon > 0 : I_\varepsilon \subseteq CA \implies I_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset ↯$$

Widerspruch zur Definition von Häufungspunkt $\implies$ jeder Häufungspunkt von A ist in A □

Lemma 4.11 (2.14) Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ besitzt eine monotone Teilfolge

Beweis Sei $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall\, k \geq n, a_n \geq a_k\}$

- Fall 1: B unendlich. Wir zählen $B \subseteq \mathbb{N}$ monoton wachsend

$$\begin{aligned} n_0 &= \min B \\ n_{k+1} &= \min\{n \in B, n > n_k\} \end{aligned}$$

  Dann ist die Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend

- Fall 2: B ist endlich oder leer

$$\implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0 : n \notin B$$

  das heißt

$$\exists k \leq n : a_n < a_k$$

  Damit können wir definieren

$$n_{k+1} = \min\{k \geq n_k : a_{n_k} < a_k\}$$

  und die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend □

Beispiel 4.12 1. $a_n = (-1)^n\left(1 + \frac{1}{n+1}\right), \quad B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ monoton fallend

2. $a_n = (-1)^n n$, $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monotone Teilfolge

Satz 4.13 (Satz von Bolzano Weierstrass) Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ (gilt in $\mathbb{R}^n$!) Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. A ist beschränkt abgeschlossen
2. Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus A hat einen Häufungswert in A
3. Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus A besitzt eine in A konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$

Beweis Wir zeigen 3 $\implies$ 2 $\implies$ 1 $\implies$ 3
3 $\implies$ 2:
Sei $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ a ist auch der Häufungswert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2 $\implies$ 1:

1. Beschränktheit: Angenommen dies ist falsch. Dann

$$\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A : |a_n - a| \geq n \,\forall\, n \in \mathbb{N}\; (a \in A)$$

   Nach Voraussetzungen hat jede diese Folge einen Häufungspunkt $x \in A$ und es gilt

$$|x - a| \geq |a_n - a| - |a_n - x| \geq n - |x - a_n|$$

   Dabei gilt $|x - a_n| < 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ (aus Häufungswert)

$$\implies |x - a| \geq n - 1$$

   Für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$`

2. Abgeschlossenheit: Wir nutzen Satz 4.10 Zu zeigen: wenn a Häufungspunkt von $A \implies a \in A$ Für
$$I_{\frac{1}{n}}(a) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \frac{1}{n}\}$$
gilt
$$I_{\frac{1}{n}}(a) \cap A \neq \emptyset \implies \exists a_n \in A : |a_n - a| < \frac{1}{n}$$
Die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \to a$, da $\frac{1}{n} \to 0$ Nach Voraussetzung hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Häufungswert $\tilde{a} \in A$. Wir zeigen $a = \tilde{a}$ Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
$$\begin{aligned}
&\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq n_\varepsilon && \text{(Aus } a_n \to a\text{)}\\
&\exists m_\varepsilon \geq n_\varepsilon : |\tilde{a} - a_{m_\varepsilon}| < \frac{\varepsilon}{2} && \text{(Aus Häufungswert)}\\
&\implies |a - \tilde{a}| \leq |a - a_{m_\varepsilon}| + |a_{m_\varepsilon}| < \varepsilon\\
&\implies |a - \tilde{a}| = 0\\
&\implies \tilde{a} = a \in A
\end{aligned}$$

$1 \implies 3$:
Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in A, $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine monotone Teilfolge (nach 4.11), (a_{n_k}) ist beschränkt, da A beschränkt ist $\implies (a_{n_k})$ ist konvergent (4.2)
Wir müssen zeigen, dass
$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n_k} \in A$$

Angenommen $a \notin A \implies a \in \mathcal{C}A, \mathcal{C}A$ ist offen
$$\implies \exists I_\varepsilon(a) \subseteq \mathcal{C}A \implies I_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$$
Nun ist aber mit geeigneten $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$
$$\forall n \geq n_\varepsilon : a_{n_k} \in I_\varepsilon(a) : a_{n_k} \in A \implies a_{n_k} \in I_\varepsilon(a) \cap A \text{ `}$$
□

Bemerkung 4.14 • Erweiterung zu $\mathbb{R}^n$ möglich

- Ein Raum heißt folgenkompakt, wenn jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge hat
  - Nach B-W Satz ist $\mathbb{R}(\mathbb{R}^n)$ folgenkompakt
- In $\mathbb{R}$ alle Cauchy-Folgen konvergieren
  - Cauchy Folge in $\mathbb{R} \implies$ beschränkt und Wertemenge ist abgeschlossen $\xRightarrow{B-W Satz}$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat einen Häufungswert in $A \overset{4.9}{\implies}$ konvergiert gegen $a \in A$

4.5 Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen

Satz 4.15 Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{K}(\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C})$

$$b_0 \neq 0 \,\forall\, n \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

Dann gilt:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$

Satz 4.16 (2.15) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Dann gilt

1. $a_n \leq b_n \,\forall\, n \in \mathbb{N} \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
2. $|a_n| \leq b_n \,\forall\, n \in \mathbb{N} \implies |\lim\limits_{n\to\infty a_n}| \leq \lim b_n$

Beweis 1. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben

$$\exists n_\varepsilon : \forall\, n \geq n_\varepsilon : b_n \leq \lim_{k\to\infty} b_n + \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$\lim_{k\to\infty} a_k \leq a_n + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\implies \lim_{k\to\infty} a_k \leq a_n + \frac{\varepsilon}{2} \leq b_n + \frac{\varepsilon}{2} \leq \lim_{k\to\infty} b_k + \varepsilon \,\forall\, \varepsilon > 0$$
$$\implies \lim_{\to\infty} a_k \leq \lim_{k\to\infty} b_k$$

2. Wir wählen $a_n = |a_n|$ und müssen noch zeigen

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to\infty}\right| a_n \text{ (Übung)}$$

□

4.6 Geometrische Folge

Die geometrische Folge ist definiert durch

$$a_n = cq^n$$

Lemma 4.17 (2.16) $\forall\, q \in \mathbb{R}, |q| < 1$ konvergiert die geometrische Folge $a_n = cq^n$ gegen Null.

Beweis Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Annahme ist $|q| < 1 \implies |q|^{-1} > 1$, somit $|q|^{-1} = 1 + x$ für ein $x > 0$.

Zu zeigen: $|cq^n - 0| < \varepsilon$ für genug große n, das heißt

$$c\left(\frac{1}{1+x}\right)^n < \varepsilon \iff \frac{c}{\varepsilon} < (1+x)^n$$

Das Archimedisches Axiom garantiert die Existenz von $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} n_0 &> \frac{c}{x\varepsilon} - \frac{1}{x} = \frac{c - \varepsilon}{x\varepsilon} \\ \forall\, n \geq n_0 : \frac{c}{\varepsilon} &= \left(\frac{c}{x\varepsilon} - \frac{1}{x}x + 1 < n_0 x + 1 \leq nx + 1\right) \end{aligned}$$

daraus folgt aus der Bernoulli Ungleichung

$$\frac{c}{\varepsilon} < (1+x)^n \implies cq^n \to 0 \qquad \square$$

Folgerung 4.18 (2.17) Die geometrische Reihe

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \sum_{i=0}^{n} q^i$$

konvergiert für $|q| < 1$ und $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$

Beweis

zu Beweisen mit Induktion

$$\begin{aligned} (1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^n) &= 1 + q^{n+1} \\ \implies S_n - \frac{1}{1-q} &= \frac{1-q^{n+1}-1}{1-q} = -\frac{q^{n+1}}{1-q} \\ \left|S_n - \frac{1}{1-q}\right| &= c|q|^n < \varepsilon\, \forall\, n \geq n_\varepsilon \end{aligned}$$

$c = |\frac{1}{1-q}|$

$$s_n \to \frac{1}{1-q} \qquad \square$$

Beispiel 4.19 (2.18)

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^n}{n!} \leq \lim\limits_{n\to\infty} cq^n$ mit $|q| < 1$
2. $a_n = \sqrt{n}\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) = \sqrt{n}\frac{n+1-1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} + \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{1+1_n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$
3. $a_n = \sqrt[m]{x}, x$ gegeben, $\xrightarrow{n\to\infty} 1$ Übungen
4. $a_n = \sqrt[n]{m} \xrightarrow{n\to\infty} 1$
5. $a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$
   - $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend
   - beschränkt: $a_n < 3\,\forall\, n \in \mathbb{N}$
   - $\implies (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, Limes ist sogenannten Zahl e
6. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert: $a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ Fibonacci Folge

4.7 Umgebung

Definition 4.20 (2.19) $A \subseteq \mathbb{K}$ heißt Umgebung von $a \in \mathbb{K} \iff \exists\, \varepsilon > 0 I_\varepsilon(a) \subseteq A$

Folgerung 4.21 (2.20) Aus der Definition folgt

1. Sei $U_i, i \in I$ Umgebung von a, so ist $\bigcup\limits_{i\in I} U_i$ Umgebung von a
2. Sind $U_1, \dots, U_n$ Umgebung von a, so ist auch $U_1 \cap \dots U_n$ Umgebung von a
3. $\forall$ Umgebung von a : $\exists$ Umgebung von a, sodass $\forall\, y \in V, U$ Umgebung von y ist

Beweis 1. Für irgendein

$$i_0 \in I\, \exists\, \varepsilon > 0 : I_\varepsilon(a) \subseteq U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$$

2. Es gilt nach Voraussetzung $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n > 0$ mit $I_{\varepsilon_i}(a) \subseteq U_i$ für $i = 1, \dots, n$. Folglich gilt für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} > 0,\ I_\varepsilon(a) \subseteq U_i(\forall\, i = 1, \dots, n) \implies I_\varepsilon(a) \subseteq U_1 \cap \dots U_n$
3. Nach Voraussetzung gibt es für eine Umgebung U von a ein $\varepsilon > 0$ mit $I_\varepsilon(a) \subseteq U$
$V := I_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \subseteq U$ ist ebenfalls Umgebung von a und $\forall\, y \in V$ gilt

$$I_{\frac{\varepsilon}{2}} \subseteq I_\varepsilon(x) \subseteq U, \text{ denn } \underbrace{|y-z|}_{z\in I_{\frac{\varepsilon}{2}}} < \frac{\varepsilon}{2} \implies |x-z| \leq |x-y| + |x-z| < \varepsilon$$

□

Definition 4.22 (2.21)

1. $A \subseteq \mathbb{K}$ ist offen $\iff \forall\, a \in A$ ist A die Umgebung von a
(in $\mathbb{R}\,\forall\, a \in A\, \exists\, \varepsilon > 0 I_\varepsilon(a) \subseteq A$) Für Intervalle (a, b) haben wir schon gezeigt, dass sie offen sind

2. $A \subseteq \mathbb{K}$ heißt abgeschlossen $\iff C_{\mathbb{K}}A$ offen

3. Abschließung von A:

$$\bar{A} := \{a \in \mathbb{K} \mid a \in A \vee a \text{ Häufungspunkt von } A\}$$

4. Rand von A:

$$\partial A := \{a \in \mathbb{K} \mid \forall \text{ Umgebung } U \text{ von } a : A \cap U \neq \emptyset \wedge CA \cap U \neq \emptyset\}$$

Beispiel 4.23 (2.22)

$$\begin{aligned} A &= (a, b] \\ \bar{A} &= [a, b] \\ \partial A &= \{a, b\} \\ \forall \varepsilon > 0 I_\varepsilon(a) \cap (a, b] &\neq \emptyset \\ I_\varepsilon(a) \cap \mathbb{R} \setminus (a, b] &\neq \emptyset \end{aligned}$$

Sei $A = \mathbb{Q}$, dann $\bar{A} = \mathbb{R}$, $\partial A = \mathbb{R}$ denn in jedem ε -Intervall um eine rationale Zahl gibt es sowohl rationale als auch irrationale Zahlen

Bemerkung 4.24

- Die Grenzwerte und Häufungswerte kann man auch in ganz

$$\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{\infty\} =: \hat{\mathbb{R}}$$

mit einer neuen Definition von Abstand:

$$(x, y) := |\xi(x) - |\xi(y)||$$

$$\xi(x) := \begin{cases} \frac{|x|}{1+|x|} & x \in \mathbb{R} \\ \pm 1 & x = \pm\infty \end{cases}$$

- $\hat{\mathbb{R}}$ ist folgenkompakt
- Algebraische Operationen in $\hat{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} x + \infty := \infty + x &:= \infty \,\forall x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ x - \infty := -\infty + x &:= -\infty \,\forall x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ x \cdot \infty := \infty \cdot x &:= \begin{cases} \infty & \forall x \in \hat{\mathbb{R}}, x > 0 \\ -\infty & \forall x \in \hat{\mathbb{R}}, x < 0 \end{cases} \\ \frac{1}{\infty} = \frac{1}{-\infty} &=: 0 \end{aligned}$$

Sinnlos wäre:

$$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0 \cdot (-\infty), \frac{\infty}{\infty}, \ldots$$

- Damit könne wir die Rechenregeln auch für Folgen in $\hat{\mathbb{R}}$ formulieren
- In $\hat{\mathbb{R}}$ hat jede Folge einen Häufungswert

Definition 4.25 (2.23) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge von reellen Zahlen, $\emptyset \neq H \subseteq \hat{\mathbb{R}}$ die Menge der Häufungswerte von (a_n) in $\hat{\mathbb{R}}$.
Dann sei:

$$\overline{\lim} a_n := \lim_{n\to\infty} \inf a_n := \inf H \qquad \text{(Limes inferior)}$$
$$\underline{\lim} a_n := \lim_{n\to\infty} \sup a_n := \inf H \qquad \text{(Limes superior)}$$

Bemerkung 4.26

1. Definition 4.25 kann man auch für $\mathbb{R}$ formulieren
2.

$$a = \lim_{n\to\infty} \inf a_n \iff \forall\, \varepsilon \begin{cases} (1)\{n \mid |a - a_n| < \varepsilon\} \text{ ist unendlich (weil } a \text{ Häufungswert ist)} \\ (2)\{n \mid a_n < a - \varepsilon\} \text{ ist endlich (} a \text{ ist kleinste Häufungswert)} \end{cases}$$

Beispiel 4.27 (2.24)

$$\begin{aligned} a_n &= n + (-1)^n n \\ a_{2n+1} = 0 \,\forall\, n &\implies 0 \text{ ist Häufungswert} \\ a_{2n} = 4n \to \infty &\implies \infty \text{ ist Häufungswert} \end{aligned}$$

also gilt

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \infty$$

Bemerkung 4.28

- $a_n \to a$ in $\hat{\mathbb{R}} \iff \lim_{n\to\infty} \inf a_n = a = \lim_{n\to\infty} \sup a_n$
- $\lim_{n\to\infty} \inf a_n + \lim_{n\to\infty} \inf b_n \leq \lim_{n\to\infty} \inf(a_n + b_n)$
- $\lim_{n\to\infty} \inf a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \inf b_n \leq \lim_{n\to\infty} \inf(a_n \cdot b_n)$ für $a_n, b_n > 0$
- $\lim_{n\to\infty} \sup a_n + \lim_{n\to\infty} \sup b_n \geq \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n)$ (zum Beispiel betrachte $a_n = n^2, b_n = \frac{1}{n}$)

5 Reihen (Unendliche Summen)

Definition 5.1 (2.19) Eine Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

(**unendliche Summe**) konvergiert, wenn die Folge ihrer **Partialsummen** konvergiert

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \xrightarrow{n\to\infty} S_\infty < \infty$$

Beispiel 5.2

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

2. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} -1 & n \text{ ungerade} \\ 0 & n \text{ gerade} \end{cases}$ S_n $(= -1, 0, -1, 0, \ldots)$ konvergiert nicht

3. $S_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} z^j = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ Für $|z| < 1$ konvergiert $S_n \to \dfrac{1}{1-z} \implies \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} z^j = \frac{1}{1-z}$

4. Harmonische Reihe: Seien $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, Behauptung $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, also divergent

Beweis (Beweis von 4.)

$$S_{2^{n+1}} = \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}}}_{2^j \text{ Summanden}} \frac{1}{2^{j+1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} 2^j \frac{1}{2^{j+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$ □

Satz 5.3 Seien $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, $\alpha \in \mathbb{R}$, dann sind auch die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k), \sum_{k=0}^{\infty} \alpha a_k$$

konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Beweis Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen □

5.1 Konvergenzkriterien

Cauchy Kriterium für Partialsummen besagt, dass eine Reihe genau dann konvergent ist, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > m \geq n_\varepsilon : |s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

Lemma 5.4 (2.28 Reihenkonvergenz) Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kann nur dann konvergent sein, wenn ihre Partialsummen beschränkt sind und ihre Glieder eine Nullfolge bilden

Beweis Sei $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s_\infty - s_\infty = 0$$

Die Beschränktheit der Partialsummen folgt notwendig aus der Beschränktheit konvergenter Folgen.□

Satz 5.5 (2.29) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Dann $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1}) = a_1$

Beweis

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=2}^{n+1} a_k = a_1 - a_{n+1} \implies |s_n - a_1| = |a_{n+1}| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

□

Beispiel 5.6 (2.30)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{k}}_{a_k} - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{a_{n+1}} \right) = a_1 = \frac{1}{2}$$

Definition 5.7 (2.31) Eine Reihe $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{R}$ heißt alternierend, wenn ihre Elemente alternierende Vorzeichen haben, das heißt $a_n \cdot a_{n+1} \leq 0$

Satz 5.8 (2.32)

1. Eine alternierende Reihe $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent, wenn die Absolutbeträge ihrer Glieder eine monoton fallende Nullfolge bilden
2. Für die Reihenreste gilt dabei die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} a_k \right| \leq |a_m|$$

Beweis 1. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_1 > 0$. Dann ist $a_{2n-1} + a_{2n} \geq 0, a_{2n} + a_{2n+1} \geq 0$ Und folglich

$$s_{2n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2n} + a_{2n+1} \leq s_{2n-1} \leq \ldots \leq s_3 \leq s_1$$
$$s_{2n} = (a_1) + (a_2 + a_4) + \ldots + \left(\underbrace{a_{2n-1} + a_{2n}}_{\geq 0}\right) \geq s_{2n-2} \geq \ldots \geq s_2$$

Ferner gilt

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \geq 0$$

und somit

$$s_2 \leq \ldots \leq s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq \ldots \leq s_1$$

(S_{2n}) monoton wachsend, s_{2n+1} monoton fallend, beide beschränkt

$$\implies s_{2n} \xrightarrow{n\to\infty} s_*, \implies s_{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} s^*$$
$$s_{sn} \leq s_* \leq s^* \leq s_{2n+1}$$

da (a_n) Nullfolge

$$|s_{2n+1} - s_{2n}| = |a_{2n+1}| \to 0$$
$$s_* = s^* = s_\infty$$

2. Aus 1. folgt $m = 2n + 1$

$$0 \leq s_\infty - s_{2n} = \sum_{k=2n+1}^{\infty} a_k = s_\infty - s_{2n+1} + a_{2n+1} \leq a_{2n+1}$$

und sonst

$$\left|\sum_{k=2n+1}^{\infty} a_k\right| \leq |a_{2n+1}|$$

Analog im Fall $m = 2n$ □

Beispiel 5.9 (2.33) 1. $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ konvergiert nach dem Leibniz Kriterium

$$\left|\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \frac{1}{k} \to 0 \text{ monoton}$$

2. Die Leibniz Reihe $s_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ konvergiert nach Leibniz Kriterium

Bemerkung 5.10 (Monotonie ist wichtig)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ mit } a_{2k} := -\frac{1}{2^k}, a_{2k-1} := \frac{1}{k}$$

ist divergent:

- $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0$, aber
- $1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 1$

Definition 5.11 (2.34) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, genau dann wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist

Satz 5.12 (2.35) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent in $\mathbb{R}$. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

Beweis Mit Cauchy Kriterium:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$$

aus der absoluten Konvergenz □

Satz 5.13 (2.36 Umordnungssatz) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe in $\mathbb{R}$. Dann gilt für jede bijektive Abbildung $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Beweis Ranacher für spezifische Umordnung □

Beispiel 5.14 (2.37) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ konvergent (aber nicht absolut)

Behauptung: $\exists$ Umordnung τ, sodass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\tau(k)-1}}{\tau(k)}$ divergiert Beachte

$$\frac{1}{2^j+1} + \frac{1}{2^j+3} + \ldots + \frac{2\cdot 2^j - 1}{\leq} 2^{j-1} \frac{1}{2^{j+1}} = \frac{1}{4}$$

$\implies$ Die Umordnung

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{6}+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)-\frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}}+\ldots+\underbrace{\left(\frac{1}{2^j+1}+\frac{1}{2^j+3}+\ldots+\frac{1}{2^{j+1}-1}\right)-\frac{1}{2^k+2}}_{>\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}}$$

konvergiert nicht

Satz 5.15 (2.38 Cauchyprodukt für Reihen) Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ absolut konvergente Reihen (in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Sei $c_m = \sum_{k=1}^{m} a_k b_{m-k}$. Dann konvergiert

$$\sum_{m=1}^{\infty} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right)$$

(ohne Beweis)

Satz 5.16 (2.39 Vergleichskriterium) Gegeben seien zwei Reihen $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tilde{s}_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k$

1. Gilt für fast alle $k \in \mathbb{N}$ mit einer Konstante $\alpha > 0 \quad |a_k| \leq \alpha \tilde{a}_k$
   (für fast alle $n \in \mathbb{N} :=$ Für alle $n \in \mathbb{N}$ außer endlich viele)
   so ist $\tilde{s}_\infty$ eine **Majorante** von s_∞ und aus der absoluten Konvergenz von $\tilde{s}_\infty$ folgt auch die von s_∞, absolute Divergenz von s_∞ impliziert die absolute Divergenz von $\tilde{s}_\infty$

Beweis ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Voraussetzungen $\forall\, k \in \mathbb{N}$ gelten

1. Ist $\tilde{s}_\infty$ konvergent

   $$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \alpha \sum_{k=1}^{n} |\tilde{a}_k| \leq \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_k, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

   $\Longrightarrow \quad S_n$ sind beschränkt, S_∞ absolut konvergent Umgekehrt folgt aus Divergenz von $\tilde{S}_\infty$ auch $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \to \infty \implies \tilde{S}_\infty$ auch Divergent

2. Aus Voraussetzung

   $$\left|\frac{a_{k+1}}{\tilde{a}_{k+1}}\right| \leq \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\left|\frac{a_k}{\tilde{a}_{k+1}}\right| \leq \left|\frac{\tilde{a}_{k+1}}{\tilde{a}_k}\right|\left|\frac{a_k}{\tilde{a}_{k+1}}\right| = \left|\frac{a_k}{\tilde{a}_k}\right| \leq \ldots \leq \left|\frac{a_1}{\tilde{a}_1}\right| =: \alpha$$

   $\Longrightarrow \quad |a_{k+1}| \leq \alpha |a_k|$. Aus 1. folgt die Aussage □

Korollar 5.17 (2.34 Wurzelkriterium) Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, wenn es ein $g \in (0,1)$ gibt, mit dem für f.a. (fast alle) $k \in \ltimes$ gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q \leq 1$, beziehungsweise $\lim_{k\to\infty} \sup \sqrt{|a_k|} < 1$
Wenn für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ gilt $\sqrt[k]{|a_k|} > 1$, beziehungsweise $|a_k| > 1$, so ist die Reihe absolut divergent.

Beweis Nach Voraussetzung $|a_k| \leq q^k$, das heißt die konvergierende geometrische Reihe $\tilde{s}_\infty$ mit $q \in (0,1)$ ist Majorante für s_∞ □

Korollar 5.18 (2.41 Quotientenkriterium) Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, wenn es ein $q \in (0,1)$ gibt mit dem für f.a. $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q < 1, \text{ bzw. } \lim_{k\to\infty} \sup\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$$

Wenn für fast alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$, so ist die Reihe absolut divergent

Beweis Vergleich mit

$$\tilde{s}_\infty \sum_{k=1}^{\infty} q^k$$

□

Beispiel 5.19 (2.42)

1. $s_\infty \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, z \in \mathbb{C}$
   Quotientenkriterium:
   $$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}\frac{k!}{z^k}\right| = \left|\frac{z}{k+1}\right|$$
   Sei $k \geq 2|z| \implies \left|\frac{z}{k+1}\right| \leq \frac{1}{2} \implies s_\infty$ absolut konvergent.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$
   $$\left|\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}\frac{k^k}{k!}\right| = \left|\frac{k}{k+1}\right|^k = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \leq \frac{1}{1+k\frac{1}{k}} = \frac{1}{2}$$
   $\implies s_\infty$ absolut konvergent

Bemerkung 5.20 1. Falls $q = 1 \implies$ die Kriterien geben keine Entscheidung, zum Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \vee \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{k}{k+1}\right| \to 1$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \to 1$$

2. Für die Divergenz ist es wichtig, dass $\exists\, n_0 \,\forall\, n \geq n_0 a_n > 0$, Wir nehmen

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & n = 2^k \\ 2\left(2^{-k}\right)^2 & n-1 = 2^k \\ 0 \end{cases}$$

$\sum a_n$ konvergiert, aber $\lim_{a_n \neq 0} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$

Lemma 5.21 (2.43 Cauchy Verdichtungssatz) Eine Reihe $s_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, mit $a_k \in \mathbb{R}_+$, die monoton fallende Nullfolge bilden hat dasselbe Konvergenzverhalten wie die verdichtete Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$$

Beweis Wir setzen $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\tilde{s}_n := \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$
Für $n < 2^{k+1}$

$$S_n = a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + \left(a_{2^k} + \ldots + a_{k^{k+1}-1}\right) \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k} = \tilde{s}_n$$

$\implies$ Konvergenz von $\tilde{s}_k$ impliziert Konvergenz von S_n
Falls die verdichtete Reihe divergent ist, so folgt aus der für $n \geq 2^{k+1}$ gültigen Beziehung

$$\begin{aligned} s_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \ldots + a_8) + \ldots + \left(a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}\right) \\ &\geq a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \ldots + 2^k a_{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2}\tilde{S}_{k+1} \end{aligned}$$

auch die Divergenz von S_n □

5.2 Potenzreihe

$$S_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

mit den Koeffizienten $c_k \in \mathbb{K}$, Zentrum $x_0 \in \mathbb{K}$ und Argument $x \in \mathbb{K}$

- Die geometrische Reihe ist ein Spezialfall der allgemeinen Potenzreihe
- Unendlicher Dezimalbruch

$$0, d_1, d_2, d_3, \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} d_k 10^{-k}, d_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$$

Satz 5.22 (2.44 Potenzreihen) Eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$ konvergiert absolut $\forall\, x \in \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft

$$|x-x_0| < \rho := \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|c_k|}}$$

Für $|x-x_0| > \rho$ ist sie divergent

Beweis Für $x \neq x_0$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{\left|c_k|x-x_0|^k\right|} = |x-x_0| \lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{|x-x_0|}{\rho} = \begin{cases} <1 & |x-x_0| < \rho \\ >1 & |x-x_0| > \rho \end{cases}$$

□

Bemerkung 5.23 Falls $\rho = \infty$, konvergiert die Reihe $\forall\, x \in \mathbb{K}$
Falls $\rho = 0$, konvergiert die Reihe für kein $x \neq x_0$

- Die Konvergenzgrenze ρ ist die größt mögliche und wird **Konvergenzradius** der Reihe bezeichnet
- Für $\lim\sup \sqrt[k]{|c_k|} = \infty$ konvergiert die Reihe für kein $x \neq x_0$ und wir setzen $\rho 0$
- Falls $\lim\sup \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \implies \rho = \infty$

5.3 Exponentialreihe

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

ist eine Potenzreihe. Ihr Konvergenzradius

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$$

Satz 5.24 (2.45) Der Wert der exp Reihe für $x = 1$ ist die Eulersche Zahl e

$$\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e$$

Diese ist irrational

Beweis In Übung 6.2 gezeigt

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Angenommen $e = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}, q > 1$. Betrachte Abschätzung, für die Restgliederdarstellung von e:

$$\begin{aligned}
s_{n+m} - s_n &= \left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{(m+n)!}\right) - \left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \ldots + \frac{1}{(m+n)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^{m-1}}\right) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{(n+1)^k}
\end{aligned}$$

für $x = \frac{1}{(n+1)}$ erhält man

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1-x^m}{1-x} \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+1}{n}
\end{aligned}$$

Da dies für alle $m \in \mathbb{N}$, folgt

$$0 < e - s_n \leq \frac{1}{n!n} \implies 0 < en! - s_n n! \leq \frac{1}{n}$$ □

6 Stetige Abbildungen

6.1 Grenzwert einer Funktion, Stetigkeit

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x -}{x}$$

und wollen diese auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen, das heißt:
Wir suchen ein $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f} \mid \mathbb{R} \setminus \{0\} = f$ und einen Wert $\tilde{f}(0) \in \mathbb{R}$

Allgemeiner überprüft man für Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ die Fortsetzbarkeit auf den Abschluss $\bar{D} \subseteq \mathbb{K}$, wobei

$$\begin{aligned}
\bar{D} &= \{x \in \mathbb{K} \mid x \in D \vee \text{ oder } x \text{ ist HP von D}\} \\
&= \{x \in \mathbb{K} \mid \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D \wedge x = \lim_{n \to 0} x_n\}
\end{aligned}$$

(analog zur Plenarübung)

Definition 6.1 (3.1) Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ hat im Punkt $x_0 \in \bar{D}$ einen Grenzwert $a \in \mathbb{K}$, wenn alle Folgen $(x_n)_{n \int \mathbb{N}} \subseteq D$ gilt:

$$x_n \to x_0 (n \to \infty) \implies f(x_n) \to a (n \to \infty)$$

Wir schreiben kurz: $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$

Bemerkung 6.2

- Falls der Grenzwert existiert, ist er eindeutig.
- Ist $T \subseteq D \subseteq \mathbb{R}, T \neq \emptyset, f : D \to \mathbb{R}, x_{\in}\bar{T}$, dann verstehen wir unter

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in T}} f(x)$$

den Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f \mid T$, falls er existiert.

- Spezialfälle:

$$T_> := \{x \in D \mid x > x_0\} : f\left(x_0^+\right) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in T_>}} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

(rechtsseitiger Grenzwert)

$$T_< := \{x \in D \mid x < x_0\} : f\left(x_0^-\right) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in T_<}} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

(linksseitiger Grenzwert)

- Existiert $\lim_{x \to x_0} f(x), x_0 \in \bar{T} \subseteq \bar{D}$, dann gilt

$$\lim_{x \to x_0 x \in T} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

- Es gelten die üblichen Rechenregeln für Grenzwerte $(x, \cdot, :)$

Beispiel 6.3 (3.2)

1. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto \frac{x}{|x|}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \wedge \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

Also existiert $\lim_{x \to 0} f(x)$ nicht

2. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$
Es gilt $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$, denn für $|x| \leq 1, x \neq 0$ gilt

$$|f(x) - 1| = \left|\frac{e^x - 1 - x}{x}\right| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}\right| \leq |x| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^{k-2}}{k!} \leq |x| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} = |x| \underbrace{(e - 2)}_{>0}$$

Für Nullfolgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [-1, 1] \setminus \{0\}$ folgt $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 1$ Das heißt f besitzt eine Fortsetzung

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Definition 6.4 (3.3 Asymptotisches Verhalten) Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ nach oben (nach unten) unbeschränkt. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat für $x \to +\infty (x \to -\infty)$ einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists y \in \mathbb{R} : |f(x) - a| < \varepsilon \, \forall x \in D, x > y (x < y)$$

Schreibweise: $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$, oder $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$

Sei $x_0 \in \bar{D}$. Die Funktion f divergiert bestimmt gegen $+\infty(-\infty) : \iff \forall K \in \mathbb{R}_+ \, \exists \delta > 0 : f(x) > K (f(x) < -K) \, \forall x \in I_\delta(x_0) \cap (D \setminus \{x_0\})$
Schreibweise: $f(x) \to +\infty (f(x) \to -\infty)$ für $x \to x_0$

Beispiel 6.5 (3.4) 1. $f : \mathbb{R} \setminus \{1\}, x \mapsto \frac{1}{x-1}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$$

wir schreiben kurz $\lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

2. $\forall\, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} x^k e^x, \text{ denn } e^x = \exp(x) \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}, x \geq 0$$

$$\implies \frac{x^k}{e^x} \leq \frac{(k+1)!}{x} \to 0(x\to\infty)$$

$$x^k e^x = \frac{(-1)^k |x|^k}{e^{|x|}}, x < 0$$

Definition 6.6 (3.5) Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ heißt stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn gilt: Für alle Folgen $x_n \to x_0(n \to \infty) \implies f(x_n) \to f(x_0)(n \to \infty)$ Andernfalls heißt sie unstetig in $x_0 \in D$. f heißt stetig (auf ganz D), wenn sie in jedem $x_0 \in D$ stetig ist. (*insert Symbolbild hier*)

Lemma 6.7 (3.5) 1. Ist $f : D \to \mathbb{K}$ stetig, dann ist auch $f \mid T$ stetig, $T \subseteq D$

2. Ist $f : D \to \mathbb{K}$ stetig, so auch $\Re(f) : D \to \mathbb{R}$, $\Im(f) : D \to \mathbb{R}$, $|f| : D \to \mathbb{R}_+$ stetig (auf ganz D)

3. Sind $f, g : D \to \mathbb{K}$ stetig, so auch $f + g, f \cdot g : D \to \mathbb{K}$

4. Ist $f : D \to f(D) \subseteq \mathbb{K}, g : f(D) \to \mathbb{K}$ stetig in x_0, beziehungsweise in $f(x_0) =: y_0$ so auch $f \circ f : D \to \mathbb{K}$ stetig in $x_0 \in D$:

Beweis 1. Siehe Bemerkung zu Grenzwerte

2. Für $z = a + \imath b$ gilt $||a| - |b|| \leq |a - b|$ sowie $|z|^2 = a^2 + b^2 \geq a^2 \geq b^2$

3. Siehe Bemerkung zu Grenzwerte

4. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, dann folgt aus Stetigkeit von f : $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$
$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)(n \to \infty)$ □

Lemma 6.8 (3.7 ε/δ Kriterium) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ ist in $x_0 \in D$ genau dann stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gibt, sodass Für alle $x \in D$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Beweis ($\Longleftarrow$): Gilt das ε/δ Kriterium, so ist f auch in x_0 offensichtlich stetig
($\Longrightarrow$): Sei also f stetig in x_0. Angenommen, dass ε/δ -Kriterium gälte nicht, das heißt es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass $\forall\, \delta > 0$ ein $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ gibt. Widerspruch zu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

□

Korollar 6.9 (3.8) Sei $f : D \to \mathbb{K}$ stetig in $x_0 \in D$ mit $f(x_0) \neq 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(x) \neq 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(x) \neq 0\, \forall\, x \in I_\sigma(x_0) \cap D$. Insbesondere ist $\frac{1}{f} : D \to \mathbb{K}$ stetig in $x_0 \in D$

Beweis Setze $\varepsilon := |f(x_0)| > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, sodass $\forall\, x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ folgt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (aus Stetigkeit von f), das heißt für $x \in I_\sigma(x_0) \cap D$ gilt

$$|f(x)| \geq |f(x_0)| - |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon - \varepsilon = 0$$

Insbesondere sind Folgen $x_n \to x_0$ wohldefiniert und die Aussage resultiert aus den Rechenregeln für Folgen □

Beispiel 6.10 (3.9)

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$
2. Konstante Funktionen $f(x) = c\, \forall\, x \in \mathbb{R}$ sind stetig auf $\mathbb{R}$
3. Seien $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$, Dann heißt

   $$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

   Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$ und ist stetig (wegen 1. und 2. und Lemma 3.6)
4. Seien p, q Polynome, dann heißt

   $$f : \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

   rationale Funktion und ist stetig nach 3. und Korollar 3.8
5. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1 + 3x^2}$ ist stetig nach 3., Lemma 3.6 und Übung 5.1
6. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \mapsto e^x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, denn für $x \neq x_0$ ist

   $$e^x = e^{x_0} e^{x - x_0} = e^{x_0} \left(1 + \underbrace{(x - x_0)}_{\to 0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{\underbrace{(x - x_0)}_{1}} \right)$$

   (nach Beispiel 3.2)

7. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Definition 6.11 (3.10 Gleichmäßige Stetigkeit) Eine Abbildung $f : D \to \mathbb{K}$ heißt **gleichmäßig stetig** auf D, wenn $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) < 0 : \forall\, x, y \in D : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Bemerkung 6.12 Gleichmäßige Stetigkeit heißt, dass die δ gleichmäßig für alle Punkte $x \in D$ gewählt werden kann.

Beispiel 6.13 (3.11)

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$$

1. f ist gleichmäßig stetig auf $A = \mathbb{R} \setminus (-a, a), a > 0$
2. f ist **nicht** gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Beweis

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{|xy|} |x - y|$$

also $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \iff |x - y| < |xy|\varepsilon$

1. Für $x, y \in \mathbb{R} \setminus (-a, a)$ gilt $|xy| \geq a^2$, also $|x - y| < \varepsilon a^2 := \delta \implies |x - y| < \varepsilon|xy|$. Daher $\forall\, \varepsilon > 0\, \forall\, x, y \in A : |x - y| < \delta := \varepsilon a^2 \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
2. Dagegen können wir $\forall\, \delta > 0, x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ finden wir $|x - y| < \delta$, aber $|f(x) - f(y)| \geq 1 \iff |x - y| \geq |xy|$
   Sei $\delta > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{\delta}{n} < 1$. Nun gilt für

$$\begin{aligned} |x - y| &= \frac{\delta}{2n} \\ |xy| &< (|x - y| + |x|)|x| \end{aligned}$$

   für $|x| < \frac{\delta}{2n}$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\delta}{2n} + |x| \right) |x| < \frac{\delta^2}{2n^2} \\ &= \frac{\delta}{n} |x - y| \leq |x - y|, \text{ da } \frac{\delta}{n} \leq 1 \end{aligned}$$

□

Definition 6.14 (3.12 Lipschitz Stetigkeit) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ heißt Lipschitz stetig (kurz L-stetig) auf D, wenn $\exists\, L > 0$ (so genannte Lipschitz Konstante), sodass

$$f(x) - f(y) \leq L|x - y|\, \forall\, x, y \in D$$

Bemerkung 6.15 Menge von stetigen Funktionen $\supset$ Menge von gleichmäßig stetigen Funktionen $\supset$ Menge von Lipschitz-stetigen Funktionen

Definition 6.16 (3.13 Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit, Satz von Heine für folgenkompakte metrische Räu Eine auf einer beschränkten, abgeschlossenen (das heißt kompakten) Teilmenge $D \subseteq \mathbb{K}$ stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

Beweis Angenommen f ist nicht gleichmäßig stetig. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $\forall\, n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, y_n \in D$ existieren mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}, |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$
Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt die beschränkte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to x \in D$. Wegen $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ ist auch $\lim_{k \to \infty} y_{n_k} = y = x$ Aus der Stetigkeit von f folgt, dass

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \to |f(x) - f(y)| = 0`$$

□

Bemerkung 6.17

1. Wichtigkeit von Annahmen
   - Abgeschlossenheit: $f(x) = x^{-1}$ für $x \in [-A, A] \setminus \{0\}$ Stetig, aber nicht gleichmäßig Stetig
   - Beschränktheit: $f(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$ für $x = m$ und $y = x + \frac{1}{n}$ gilt

     $$|x - y| \to 0, \text{ aber } |f(x) - f(y)| = \left|x^2 - y^2\right| = |(x - y)(x + y)| = 2 + \frac{1}{n} \to 2$$

2. Lipschitz-Stetigkeit von $f(x) = x^2$

   $$|f(x) - f(y)| = |(x - y)(x + y)| \leq L|xy|$$

   wenn D beschränkt $D = [-A, A] \implies |x + y| \leq 2A \implies L = 2A \implies$ Lipschitz-Stetigkeit, aber wenn $D = R \implies$ gibt keine $L < \infty$

3. Lipschitz-Stetigkeit impliziert gleichmäßige Stetigkeit, aber nicht umgekehrt. Zum Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0, A]$ ist gleichmäßig stetig nach Satz 3.13, aber nicht Lipschitz-stetig in 0.

   $$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq L|x - y|$$
   $$\left|\frac{y - x}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}\right| > n|x - y|$$

   $\implies \nexists\, L > 0$

Bemerkung 6.18 Stetigkeit kann interpretiert werden als „lokale Approximation" durch Konstanten, das heißt Funktion f nach der Stelle x_0 durch eine Konstante $f(x_0)$ approximiert werden kann und die Fehler der Approximation $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

6.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 6.19 (3.14 Satz von Beschränktheit) Eine auf einer beschränkten, abgeschlossenen Teilmenge $D \subset \mathbb{K}$ stetige Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ ist beschränkt, $\exists\, K > 0 : \sup_{x\in D}|f(x)| \leq K$

Beweis Angenommen das eine stetige $f(x)$ nicht beschränkt auf D ist. Dann gibt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in D$ mit $|f(x_n)| > n$
Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt (da D beschränkt). Nach dem B.-W. Satz $\exists\, x_{m_k} \to x \in D$ (weil D abgeschlossen ist). Aus der Stetigkeit von f

$$|f(n_k)| \xrightarrow{x\to\infty} |f(x)| < \infty\grave{}$$

Widerspruch zur Annahme $f(x_m) \to \infty$ □

Satz 6.20 (3.15 Satz von Extremum) Eine auf einer beschränkten, abgeschlossenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{K}$ stetige reellwertigen Funktion $f : D \to \mathbb{K}$ besitzt dort ein Maximum und ein Minimum, das heißt:

$$\exists\, x_{min}, x_{max} \in D : \sup_{x\in D} f(x) = f(x_{max}) \wedge \inf_{x\in D} f(x) = f(x_{min})$$

Beweis

$$\exists\, K < \infty : K = \sup_{x\in D} < \infty$$

$\exists$ eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D : f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} K$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und in D abgeschlossen

$$\implies \exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{K}} \in D : x_{n_k} \to x \in D$$

Aus $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} f(x) \implies f(x) = K$
Analog für untere Grenze. □

Definition 6.21 (3.16 Zwischenwertsatz) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine reelle stetige Funktion. Dann gibt es zu jeder $y \in [f(a), f(b)]$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(c) = y$

Beweis Betrachte die (nicht leere, beschränkte) Menge

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq y\}$$

Entweder ist dann $\sup A = b$ (und dann $c = b$) oder es gibt per Definition ein $x \in [a, b]$ mit $x > c \implies x \notin A \implies f(x) > y$ In beiden Fällen folgt $f(c) \leq y$

- Falls $c = b \implies y = f(c) = f(b) \implies f(c) \geq y$
- Falls $c < b \implies$ Aus Stetigkeit von f, eine monoton fallende Folge von Punkten aus A existiert, welche gegen $\sup A$ konvergiert

Aus Stetigkeit und Definition von A folgt $f(c) \leq y$. Beide zusammen genommen ergibt $f(c) = y$□

Bemerkung 6.22 Die Eigenschaften von stetigen Funktionen lassen sich zusammen formulieren: Für eine auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall definierte stetige Funktion ist der Bildbereich wieder ein abgeschlossenes Intervall

Lemma 6.23 (3.17 Treppenapproximation) Jede auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ definierte $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ lässt sich beliebig gut durch Treppenfunktion einschließen. das heißt

$$\forall\,\varepsilon>0\,\exists\text{ Treppenfunktion }\bar{\phi}_\varepsilon,\underline{\phi}_\varepsilon$$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit zu selben endlichen Zerlegung von $[a,b]$ mit den Eigenschaften $\forall\,x\in[a,b]$

- $\underline{\phi}_\varepsilon\le f(x)\le\bar{\phi}_\varepsilon(x)$
- $\left|\underline{\phi}_\varepsilon(x)-\bar{\phi}_\varepsilon(x)\right|<\varepsilon$

Zerlegung: ist mit Teilpunkten $a\le x_k\le b, k=0,\dots,N<\infty$ (endliche Zerlegung) $(a=x_0\le x_1\le\dots\le x_N=b)$ Treppenfunktion ist konstant auf Intervalle $[x_1,x_{i+1}), 0\le 1\le N-1$

Beweis Aus dem Satz von gleichmäßiger Stetigkeit ist f auf $[a,b]$ gleichmäßig Stetig

$$\implies\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,\delta_\varepsilon>0:\forall\,x\in[a,b],|x-y|<\delta_\varepsilon\implies|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

Sei $n\in\mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{a-b}{n}<\delta\varepsilon$. Mit den Teilpunkten

$$x_k.=a+k\frac{b-a}{n},k=0,\dots,n$$

erhalten wir eine äquidistante Zerlegung von $[a,b]$

$$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b,|x_k-x_{k-a}|<\delta_\varepsilon$$

Dann definieren wir

$$\bar{\phi}_\varepsilon(x):=\sup\{f(x)\mid x_{k-1}\le x<x_k\}$$
$$\underline{\phi}_\varepsilon(x):=\inf\{f(x)\mid x_{k-1}\le x<x_k\}$$

Nach Konstruktion gemäß $\underline{\phi}_\varepsilon(x)\le f(x)\le\bar{\phi}_\varepsilon(x)\,\forall\,x\in[a,b]$
Nach dem Satz von Extremum $\forall[x_1,\dots,x_k]\,\exists\,\bar{\xi}_k,\underline{\xi}_k$ sodass

$$f\left(\bar{\xi}_k\right)=\sup\{f(x)\mid x_{k-1}\le x\le x_k\}f\left(\underline{\xi}_k\right)=\inf\{f(x)\mid x_{k-1}\le x\le x_k\}$$

Nach Wahlfreiheit von δ_ε gilt

$$\left|\underline{\phi}_\varepsilon(x)-\bar{\phi}_\varepsilon(x)\right|=\left|f\left(\underline{\xi}_k\right)-f\left(\bar{\xi}_k\right)\right|\le\left|f\left(\underline{\xi}_k\right)-f(x)\right|+\left|f(x)-f\left(\bar{\xi}_k\right)\right|\underset{\downarrow}{<}\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon$$

aus gleichmäßiger Stetigkeit

$\square$

6.3 Konvergenz von Funktionen

Definition 6.24 (3.18) Seien $f_n : D \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ Funktionen mit einem gemeinsamen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$. Wir nennen die folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **punktweise** Konvergenz gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn für jedes $x \in D$ gilt $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$

Beispiel 6.25 (3.19)

1.
$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

   Hier ist $f_n(x)$ stetig und $f(x)$ stetig.

2. $f_n(x) = 1 - x^n, x \in [0,1] \subseteq \mathbb{R}$
$$\begin{array}{ccc} f_n(x) & \xrightarrow{n\to\infty} & f(x) := \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{stetig} & & \text{nicht stetig} \end{array}$$

Definition 6.26 (3.19 Gleichmäßige Konvergenz) Eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ heißt **gleichmäßig konvergent** gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq n_\varepsilon \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \,\forall\, x \in D$$

Satz 6.27 (3.20 Satz von der gleichmäßigen Konvergenz) Konvergiert eine Folge stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$, so ist auch die Grenzfunktion f stetig.

Beweis Seien $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu zeigen:

$$\exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \forall\, x \in D |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\exists\, x \in \mathbb{N} \,\forall\, x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

Aus Stetigkeit von f_n:

$$\exists\, \delta_\varepsilon > 0 \,\forall\, x \in D : |x - x_0| < \delta_\varepsilon \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

$$\implies \forall\, x \in D |f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\frac{1}{3}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{<\frac{1}{3}} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{<\frac{1}{3}} < \varepsilon$$

das heißt f ist stetig. $\square$

6.4 Reellwertige stetige Funktionen

Definition 6.28 (3.21)

$$C(\mathbb{K}) := \{f : \mathbb{K} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig auf } \mathbb{K}\}$$

ist der Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{K}$

Bemerkung 6.29 Seien $f, g \in C(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $f + g$, $f \cdot g$, λf wieder eine Funktion aus $C(\mathbb{K})$. $C(\mathbb{K})$ bildet dann einen Ring.

Definition 6.30 (3.22) Seien $f, g : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$.

$$\max_{x\in\mathbb{K}}(f,g)(x) := \max_{x\in\mathbb{K}}(f(x), g(x)) \min_{x\in\mathbb{K}}(f,g)(x) \qquad := \min_{x\in\mathbb{K}}(f(x), g(x))$$

Satz 6.31 (3.23) $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ sind in $C(\mathbb{K})$ für $f, g \in C(\mathbb{K})$

Beweis Es genügt, dass mit f auch $|f|$ (als Komposition stetige Abbildung) stetig ist, denn

$$\begin{aligned} \max(f,g) &= \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g| \\ \min(f,g) &= -\max(-f,-g) \end{aligned}$$

□

Wir betrachten jetzt $C\left(\underbrace{[a,b]}_{\mathbb{K}}\right)$ und definieren

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Definition 6.32 (3.24) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper (mit dem Betrag $|\ |$), Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

$$\|\ \| : V \to \mathbb{R}$$

heißt eine **Norm** auch $V \iff$:

- (N1) $\forall\, x \in V : \|x\| \geq 0 \wedge (\|x\| = 0 \iff x = 0)$
- (N2) $\forall\, x \in V : \alpha \in \mathbb{K} \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- (N3) $\forall\, x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$(V, \|\ \|)$ heißt normierter Vektorraum.
$C([a, b])$ ist ein Vektorraum. Die Normeigenschaften von $\|\ \|_\infty$ als Abbildung von $C([a, b])$ nach $[0, \infty)$ folgt direkt aus den Eigenschaften des Absolutbetrags

$$\|f\|_\infty \implies f(x) = 0\, \forall\, x \in [a,b] \qquad \text{(Definitheit)}$$
$$\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|_\infty, \alpha \in \mathbb{R} \qquad \text{(Homogenität)}$$
$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|(\|g)_\infty \qquad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

Wir definieren sogenannte Normkonvergenz

$$f_n \xrightarrow{n\to\infty} f \text{ in Norm} \iff \|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Für $\|\ \|_\infty$ Konvergenz in Norm ist die gleichmäßige Konvergenz.

Lemma 6.33 (3.25) Für eine Funktionsfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C([a,b])$ ist die gleichmäßige Konvergenz gegen eine Grenzfunktion. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichbedeutend mit $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Beweis aus Definition. □

Definition 6.34 (3.26 Cauchy Folge von Funktionen) Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C([a,b])$ heißt Cauchy-Folge, wenn

$$\forall\,\varepsilon\,\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : n, m \geq n_\varepsilon \implies \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

Lemma 6.35 (3.27) Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C([a,b])$ welche gegen eine Grenzfunktion $f \in C([a,b])$ konvergiert ist Cauchy-Folge.

Beweis analog wie Beweis für Zahlenfolgen □

Satz 6.36 (3.28 Satz von der Vollständigkeit) $(C([a,b], \|\ \|_\infty))$ ist vollständig bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz, das heißt jede Cauchy-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C([a,b])$ besitzt ein Limes $f \in C([a,b])$

Beweis Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C([a,b])$ eine Cauchy-Folge. Dann ist für jedes feste $x \in [a,b]$ $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge von Zahlen und besitzt einen (eindeutig bestimmten) Limes $f(x) \in \mathbb{R}$.
Wir wollen zeigen, dass diese Konvergenz gleichmäßig ist. Angenommen $f_n \to f$ nicht gleichmäßig $\implies \exists\,\varepsilon > 0$ und $\forall\, n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_n \in [a,b]$ sodass $|f_n(x_n) - f(x_n)| > \varepsilon$. Die Punktfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge (nach Bolzano-Weierstrass Satz, $[a,b]$ beschränkt und abgeschlossen). Wegen der Cauchy-Folgen Eigenschaft

$$\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : m \geq n_\varepsilon \implies \|f_{n_\varepsilon} - f_n\|_\infty < \frac{1}{2}\varepsilon$$

Wegen der Konvergenz $f_m(x_{n_\varepsilon}) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_{n_\varepsilon})$:

$$\exists\, m_\varepsilon \geq n_\varepsilon : |f_{m_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon}) - f(x_{n_\varepsilon})| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\implies |f_{n_\varepsilon} - f(x_{n_\varepsilon})| \leq |f_{n_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon}) - f_{m_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon})| + |f_{m_\varepsilon}(x_{n_\varepsilon}) - f(x_{n_\varepsilon})| < \varepsilon$$

$\implies f_n \to f$ gleichmäßig und im Widerspruch zur Annahme. $\implies f \in C([a,b])$ (aus Satz 3.20) □

Bemerkung 6.37 Vollständige normierte Räume werden Banach Räume genannt. $C([a,b])$ ist also ein Banach Raum.

Satz 6.38 (3.29 Satz von Arzela-Ascoli) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen in $C([a,b])$ welche **gleichmäßig beschränkt** und **gleichgradig stetig** sind. das heißt

1. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$
2. $\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,\delta_\varepsilon > 0\,\forall\,n \in \mathbb{N}: \max\limits_{\substack{x,y\in[a,b]\\|x-y|\le\delta_\varepsilon}} |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$

Dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ welche gegen ein $f \in C([a,b])$ konvergiert, das heißt

$$\|f_{n_k} - f\|_\infty \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Annahmen: $f_n \in C([a,b])$,

- gleichmäßig beschränkt: $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_\infty < \infty$
- gleichmäßig stetig:

$$\forall\,\varepsilon\,\exists\,\delta_\varepsilon > 0\,\forall\,n \in \mathbb{N} \max_{\substack{x,y\in[a,b]\\|x-y|\le\delta_\varepsilon}} |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

Aussage: $\exists$ eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, sodass $f_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} f \in C([a,b])$

Beweis Sei $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge der rationalen Punkte in $[a,b]$. Für jedes r_k, nach Voraussetzung $\sup_{n\in\mathbb{N}}|f_n(r_k)| < \infty$

$$\begin{array}{ccccl} f_{n_1^{(1)}}, & f_{n_2^{(1)}}, & \dots, & f_{n_k^{(1)}} & \text{konvergiert in } r_1 \\ f_{n_1^{(2)}}, & f_{n_2^{(2)}}, & \dots, & f_{n_k^{(2)}} & \text{konvergiert auch in } r_2 \\ f_{n_1^{(3)}}, & f_{n_2^{(3)}}, & \dots, & f_{n_k^{(3)}} & \text{konvergiert auch in } r_2 \\ f_{n_1^{(k)}}, & f_{n_2^{(k)}}, & \dots, & f_{n_k^{(k)}} & \text{konvergiert auch in } r_k \end{array}$$

Diagonalfolge

Nach sukzessiver Anwendung des Bolzano-Weierstrass Satz bekommen wir eine Folge von Teilfolgen. Die Folgen $\left(f_{n_j^{(k)}}(r_k)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ sind konvergent, $\left(n_j^{(k+1)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ ist Teilfolge von $\left(n_j^{(k)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$. $\left(f_{n_j^{(k)}}(r_l)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ ist konvergent für $l = 1, \dots, k$. Für die Diagonalfolge $\left(f_{n_k^{(k)}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist dann $\left(f_{n_k^{(k)}}(r_j)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent für alle $j \in \mathbb{N}$. Noch zu zeigen: Gleichmäßige Konvergenz von dieser Diagonalfolge in allen $x \in [a,b]$. Wir bezeichnen jetzt die Diagonalfolge mit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (erst für alle rationale r_k).
Für jedes $r_k \in [a,b]$ gibt es ein $n_\varepsilon(r_k) \in \mathbb{N}$, sodass

$$|f_n(r_k) - f_m(r_k)| < \frac{1}{3}\varepsilon\,\forall\,n,m \ge n_\varepsilon(r_k)$$

Die gleichmäßige Stetigkeit impliziert, dass

$$\exists\,\delta_\varepsilon : x,y \in [a,b], |x-y| < \delta_\varepsilon \implies \sup_{n\in\mathbb{N}}|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Wir unterteilen $[a,b]$ in $i_k = [x_{k-1}, x_k], k = 1, \dots, n$ mit $a < x_0 < \dots < x_n = b$

$$\max_{1 \le k \le n} |x_k - x_{k-1}| \le \delta$$

Aus jedem I_k wählen wir ein $r_k \in \mathbb{Q}$. $\forall\, x \in I_k$ gilt dann für $n, m \ge n_\varepsilon := \max\{n_\varepsilon(r_1), \dots, n_\varepsilon(r_n)\}$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \left| \underbrace{f_n(x) - f_n(r_k)}_{<\frac{1}{3}\varepsilon} \right| + \left| \underbrace{f_n(r_k) - f_m(r_k)}_{<\frac{1}{3}\varepsilon} \right| + \left| \underbrace{f_m(r_k) - f_m(x)}_{\frac{1}{3}\varepsilon} \right| < \varepsilon$$

$\implies$ für $n, m \ge n_\varepsilon$ gilt $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \implies (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge im Banachraum $C([a,b]) \implies f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ für $f \in C([a,b])$ $\square$

7 Differentiation

Definition 7.1 (4.1 Differenzenquotient) Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$, definieren wir in einem Punkt $x_0 \in D$ einen **Differenzenquotient** durch $D_n f(x_0) := \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, wobei $x_0 + h \in D$

Definition 7.2 (4.2 Ableitung) $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar** im Punkt $x_0 \in D$ mit **Ableitung** $f'(x_0)$, wenn für jede Nullfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_0 + h_n \in D$, die Folge $(D_{h_n} f(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert zu $f'(x_0)$

Bemerkung 7.3 $f'(x)$ ist eindeutig.

Beweis Für zwei Nullfolge $h_n, \tilde{h}_n$, sodass:

$$\lim_{n\to\infty} D_{h_n} f(x_0) = a, \lim_{n\to\infty} D_{\tilde{h}_n} f(x_0) = \tilde{a}$$

fassen wir eine Nullfolge $\{h_1, \tilde{h}_1, h_2, \tilde{h}_2, \dots\}$ zusammen. Der zugehörige Differenzenquotient konvergiert $\implies a = \tilde{a}$ $\square$

Notation:

$$f'(x_0) =: \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$$
$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x\in D\\ x\to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definition 7.4 (4.3) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar auf D, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist. Sie heißt stetig differenzierbar, wenn die Ableitung f' auf D eine stetige Funktion ist.

Bemerkung 7.5 Im Falle eines Randpunktes behalten wir einseitige Stetigkeit. $D = [a,b]$:

- für $x_0 = a, x \downarrow a :\iff x > a \wedge x \to a$
- für $x_0 = b, x \uparrow b :\iff x < b \wedge x \to b$

Satz 7.6 (4.4) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in einem $x_0 \in D$ genau dann differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0)$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta_\varepsilon > 0 : x_0 + h \in D, |h| < \delta_\varepsilon \implies \left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

Beweis Beweis aus der Definition des Grenzwertes. □

Satz 7.7 (4.5) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in einem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar, wenn es eine Konstante gibt, $x \in \mathbb{R}$, sodass

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \omega(x), x \in D$$

mit einer Funktion $\omega : D \to \mathbb{R}$, sodass

$$\lim_{\substack{x \in D \\ x \to x_0}} \omega(x) = 0$$

Diese Konstante $c = f'(x_0)$

Beweis Sei f in x differenzierbar und $\omega(x) := f(x) - f(x_0)(x - x_0)$. Dann folgt aus der Differenzierbarkeit von f

$$\frac{\omega(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

Sei umgekehrt $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \omega(x)$ mit $\lim_{x \to x_0} \frac{\omega(x)}{x \to x_0} = 0$ Dann gilt:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - c = \frac{\omega(x)}{x - x_0} \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

das heißt f ist in x_0 differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0)$ □

Bemerkung 7.8 Der Satz besagt, dass affin-lineare Funktion (Gerade) $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ approximiert die differenzierbare Funktion in $x_0 \in D$. Der Graph von g ist die Tangente an dem Graphen von f in $(x_0, f(x_0))$

Lemma 7.9 (4.6) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar ist dort stetig.

Beweis

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \omega(x) \Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \to x_0} f(x_0)$$ □

Bemerkung 7.10 Man kann die n-te Ableitung rekursiv definieren.

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x) = f^{(n)}(x), n \geq 3$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = f^{(2)}(x) = f''(x)$$

Beispiel 7.11 (4.7) $f(x) = |x|$ ist nicht in $x_0 = 0$ differenzierbar. Um dies zu sehen, betrachten wir eine Nullfolge

$$h_n = (-1)^n \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$$

und

$$\frac{f(h_n) - f(0)}{h_n} = \frac{|h_n|}{h_n} = (-1)^n$$

nicht konvergent. $inx_0 \neq 0$ ist $f(x) = |x|$ differenzierbar

Lemma 7.12 (4.8) Für $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar gelten die folgenden Rechenregeln:

1. Linearkombination ist differenzierbar $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g', \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
3. $g(x) \neq 0$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Beweis 1. Aus den Eigenschaften von konvergenten Zahlenfolgen

2. Aus Definition:
$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)(g(x) - g(x_0)) + (g(x) - f(x_0))g(x)}{x - x_0} \\ &= f(x_0)g'(x_0) + f'(x)g(x)\end{aligned}$$

3. Erst $f \equiv 1$
$$\begin{aligned}(\frac{1}{g})'(x) &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) \frac{1}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)} \frac{1}{x - x_0} \\ &= \lim -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}\end{aligned}$$

$$(\frac{f}{g})'(x_0) = \left(f\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'g - fg'}{g^2}(x)$$ □

Lemma 7.13 (4.9) Sei $f : D \to B \subseteq \mathbb{B}$ eine auf einem abgeschlossenen Definitionsbereich stetige und invertierbare Funktion mit Inverse $f^{-1} : B \to D$. Ist f in einem $x_0 \in D$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$, so ist auch F^{-1} in einem $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'\left(y_0 = \frac{1}{f'(x_0)}, y_0 = f(x_0)\right)$$

Beweis Für $y_n = f(x_n), y_0 = f(x_0)$ mit $y_n \neq y_0$ und $y_n \xrightarrow{n\to\infty} y_0$. Aus Stetigkeit von f^{-1} gilt auch $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ und $x_n \neq x_0$. Aus der Differenzierbarkeit von f in einem x_0 folgt:

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \left(\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right)^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} \left(f'(x_0)\right)^{-1}$$

Dies impliziert, dass f^{-1} im Punkt $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar ist mit der Ableitung $\frac{1}{f'(x_0)}$ □

Beispiel 7.14 (4.10)

1. $\ln'(y) : f^{-1}(y) = \ln y, f(x) = e^x \implies \ln'(y) = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$
2. Umkehrfunktion des Sinus

$$\begin{aligned} y &= \sin(x), x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ x &= \arcsin(y), y \in (-1, 1) = D \\ \arcsin'(y) &= \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \end{aligned}$$

Lemma 7.15 (4.11 Kettenregel) Seien $g : D_g \to \mathbb{R}, f : D_f \to D_g \subseteq \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Die Funktion f sei in $x_0 \in D_f$ differenzierbar und $giny_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist die zusammengesetzte Funktion $g(f(x_0)) =: (g \circ f)(x_0)$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x) \text{ (Kettenregel)}$$

Beweis

Wir definieren eine Funktion $\Delta g : D_g \to \mathbb{R}$ durch

$$\Delta g(y) := \begin{cases} \frac{g(y) - f(y_0)}{y - y_0} & y \neq y_0 \\ g'(y) & y = y_0 \end{cases}$$

Da g in y_0 differenzierbar ist gilt

$$\lim_{y \to y_0} \Delta g(y) = g'(y_0)$$

Ferner gilt für $y \in D_g$:

$$g(y) - g(y_0) = \Delta g(y)(y - y_0)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta g(f(x))(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \Delta g(f(x)) \lim_{x - x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0)\end{aligned}$$

□

Beispiel 7.16 (4.12) 1. $g(x) = f(ax + b), a, b \in \mathbb{R} \implies g'(x) = af'(ax + b)$

2. $x^\alpha = e^{\alpha \ln x} = f(g(x)) = f(g(x)), f(y) := e^y, g(x) := \alpha \ln(x)$

$$(x^\alpha)' = f'(g(x))g'(x) = e^{\alpha \ln x} \alpha x^{-1} = \alpha x^{\alpha - 1}$$

7.1 Mittelwertsätze und Extremalbedingungen

Definition 7.17 (4.13) Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat in einem Punkt $x_0 \in D$ ein **globales Extremum** (Minimum oder Maximum), wenn gilt

$$f(x_0) \leq f(x), x \in D \vee f(x_0) \geq f(x) \, \forall \, x \in D$$

Es handelt sich um ein **lokales Extremum** (Minimum oder Maximum), wenn auf einer δ -Umgebung von x_0 (das heißt $U_\delta(x_0) = \{x \in D \mid |x - x_0| < \delta\}$) gilt $f(x_0) \geq f(x) \, \forall \, x \in U_\delta(x_0) \vee f(x_0) \leq f(x) \, \forall \, x \in U_\delta(x_0)$ Ein Extremum (globales oder lokales) heißt strikt, wenn es das isolierteste Punkt in D beziehungsweise in $U_\delta(x_0)$ ist, das heißt $f(x_0) > f(x) \vee f(x_0) < f(x)$

Satz 7.18 (4.14 Satz von Extremum) Besitz eine auf einem Intervall $I = (a, b)$ differenzierbare Funktion ein lokales Extremum $x_0 \in I$, so gilt dort notwendig $f'(x_0) = 0$

Beweis Habe f in x_0 ein Minimum. Dann gilt für eine $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $h_n > 0, x_0 + h_n \in U_\delta(x_0)$

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \geq 0$$

für eine Nullfolge $(h_n)_n \in \mathbb{N}$ mit $h_n < 0, x_0 + h_n \in U_\delta(x_0)$

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \leq 0$$

Im Limes $h_n \to 0$ bekommen wir

$$f'(x_0) \leq 0 \leq f'(x_0) \implies f'(x_0) = 0$$

(Analog für Maximum) □

Bemerkung 7.19 Eine stetige Funktion besitzt auf einem abgeschlossenem Intervall $[a, b]$ ein Minimum. Dieses kann in einem Randpunkt ($x_0 = a$ oder $x_0 = b$) liegen, das heißt es ist nicht notwendig, das $f'(x_0) = 0$

Satz 7.20 (4.15 Satz von Rolle) Wenn eine im Intervall $[a, b]$ stetige Funktion, in (a, b) differenzierbar ist und $f(a) = f(b)$, so existiert ein $c \in (a, b)$, sodass $f'(c) = 0$

Beweis
- Stetige Funktion auf $[a, b]$ nimmt ihr Maximum und Minimum
- Wenn f ist konstant $\implies f'(x) = 0$
- Wen f nicht konstant $\implies \exists\, x_0 \in (a, b) : f(x_0) > f(a) = f(b) \lor f(x_0) < f(a) = f(b)$

$\implies$ das Maximum oder Minimum ist in einem $x_0 \in (a, b)$ angenommen $\implies f'(x_0) = 0$ □

Satz 7.21 (4.16 1. Mittelwertsatz) Ist f stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in (a, b), so $\exists\, c \in (a, b)$: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Beweis Wir definieren Funktion

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

- g ist stetig in $[a, b]$, differenzierbar in (a, b)
- $g(a) = f(a) = g(b)$, Satz von Rolle liefert, dass $\exists\, c \in (a, b) : g'(c) = 0$

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \implies f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Korollar 7.22 (4.17) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ mindestens zweimal differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a, b)$. Dann hat f im Fall $f''(x_0) > 0$ in x_0 ein striktes lokales Minimum und im Fall $f''(x_0) < 0$ ein striktes lokales Maximum.

Beweis Sei f zweimal differenzierbar mit $f''(x_0) > 0$ Wegen

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$$

gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, sodass f+r $0 < |x - x_0| < \varepsilon$ gilt

$$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$$

mit $f'(x_0) = 0$ folgt damit

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ f'(x) &< 0 \quad x \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \end{aligned}$$

$\implies f$ ist streng monoton fallend in $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ und streng monoton wachsend in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, das heißt f hat in x_0 ein striktes lokales Maximum (Analog im Fall $f''(x_0) < 0$) □

Bemerkung 7.23 Es ist keine notwendige Bedingung zum Beispiel $f(x) = x^4$ hat lokales Minimum $x_0 = 0$, aber $f''(x_0) = 0$

Definition 7.24 (4.18) Sei I ein offenes Intervall $f : I \to \mathbb{R}$ heißt

- (streng) konvex $\iff \forall \lambda \in (0,1), x, y \in I : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \underset{\text{streng}}{\underset{\downarrow}{(<)}} \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$
- (streng) konkav $\iff \forall \lambda \in (0,1), x, y \in I : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \underset{\text{streng}}{\underset{\downarrow}{(>)}} \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

Beispiel 7.25 (4.19) exp ist eine (streng) konvexe Funktion Für $\lambda \in (0,1), x < y$ gilt:

$$\begin{aligned}
\exp(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \exp(x + (1-\lambda)(y-x)) = \exp(x)\exp((1-\lambda)(y-x)) \\
&= \exp(x)\left(\underbrace{\lambda + 1 - \lambda}_{=1} + \sum_{j=1}^{\infty}(1-\lambda)^j \frac{(y-x)^j}{j'}\right) \\
&= \lambda\exp(x) + (1-\lambda)\exp(x)\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty}\underbrace{(1-\lambda)^{j-1}}_{<1}\right)\frac{(y-x)^j}{j'} \\
&< \lambda\exp(x) + (1-\lambda)\exp(x)\exp(y-x) = \lambda\exp(x) + (1-\lambda)\exp(y)
\end{aligned}$$

Korollar 7.26 (4.20) Sei I offen, $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Falls $f''(x) \ge 0 \,\forall x \in I$, so ist f konvex.

Beweis $f'' > 0 \implies f'$ monoton ist wachsend. Für $x = y$ ist $f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $x < y, x, y \in I, \lambda \in (0,1)$. Wir setzen $x_\lambda := \lambda x + (1-\lambda)y$ Nach dem Mittelwertsatz $\exists\, \xi \in (x, x_\lambda)$ und $\eta \in (x_\lambda, y)$ mit

$$\frac{f(x_\lambda) - f(x)}{x_\lambda - x} \underset{\text{Mittelwertsatz}}{\underset{\downarrow}{==}} f'(\xi) \overset{\text{aus Monotonität}}{\overset{\uparrow}{\le}} f''(\eta) \underset{\text{Mittelwertsatz}}{\underset{\downarrow}{=}} \frac{f(y) - f(x_\lambda)}{y - x_\lambda}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
x_\lambda - x &= \lambda x + (1-\lambda)y - x = (1-\lambda)(y-x) \\
y - x_\lambda &= y - \lambda x - (1-\lambda)y = \lambda(y-x)
\end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$\frac{f(x_\lambda)-f(x)}{1-\lambda} \leq \frac{(f(y)-f(x_\lambda))}{(y-x_\lambda)}\frac{(x_\lambda - x)}{1-\lambda} = (f(y)-f(x_\lambda))\frac{(1-\lambda)(y-x)}{\lambda(y-x)(1-\lambda)} = \frac{f(y)-f(x_\lambda)}{\lambda}$$

$$\implies f(x_\lambda) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

$$\implies f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \implies f \text{ ist konvex}$$

□

Satz 7.27 (4.21 2. Mittelwertsatz (verallgemeinert)) Sind die Funktion f und g in $[a,b]$ stetig und in (a,b) differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a,b)$, so gibt es ein $c \in (a,b)$ sodass

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Beweis Wegen $g'(x) \neq 0$ bekommen wir $g(a) \neq g(b)$ (wegen Satz von Rolle). Weiter

$$\exists\, c \in (a,b) : \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c) \neq 0$$

Wir definieren auf $[a,b]$ die Funktion

$$F(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c)$$

Wir verifizieren $\underline{F(a)} = f(a) = \underline{F(b)}$. Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $c \in (a,b)$ mit $F'(c) = 0$, das heißt

$$0 = F'(c) = f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c)$$

wegen $g'(c) \neq 0$:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

□

7.1.1 Anwendung von MW Satz 2

Satz 7.28 (4.22 Regeln von L'Hospital) Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}, I = (a,b)$ sodass $g'(x) \neq 0 \,\forall\, x \in I$ und

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: c \in \mathbb{R}$$

Dann gelten die Folgenden Regeln:

1. Im Fall

   $$\lim_{x\downarrow a} f(x) = \lim_{x \downarrow a} g(x) = 0$$

   ist $g(x) \neq 0$ in I und es gilt

   $$\lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

2. Im Fall $f(x) \to \pm\infty, g(x) \to \pm\infty$ für $x \downarrow a$ ist $g(x) \neq 0$ für $a < xyx_* \leq b$ und

$$\lim x \downarrow a \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

Beweis 1. Wir fassen f und g als Funktion auf, die in a stetig sind $f(a) = g(a) = 0$. Wegen $g'(x) \neq 0$ kann g keine weitere Nullstelle von g in I geben, das heißt $g(x) \neq 0$ in I. Satz 4.21 $\Longrightarrow$

$$\forall x \in I \,\exists \xi \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$\Longrightarrow$ für $x \to a$ auch $\xi \to a$ und

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \downarrow a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

2. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Voraussetzung ist $g'(x) \neq 0$ in (a, b).

Wir wählen ein $\delta > 0$ mit $a + \delta \leq x_*$, sodass

$$\forall x \in (a, a + \delta) : f(x) \neq 0 \wedge g(x) \neq 0 \wedge \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - c \right| < \varepsilon$$

Für beliebiges $x, y \in (a, a + \delta)$ mit $f(x) \neq f(y)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \frac{g(x) - g(y)}{f(x) - f(y)} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \underbrace{\frac{\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) g(x)}{\left(1 - \frac{f(y)}{f(y)}\right) f(x)}}_{x \downarrow a \to 1} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\Longrightarrow \exists \delta_* > 0 : \forall x \in n(a, a + \delta_*) : \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} \right| < \varepsilon$$

Für ein x sodass $a < x < \underbrace{a + \min\{\delta, \delta_*\}}_{x_*}$ bekommen wir

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - c \right| < 2\varepsilon$$

□

Beispiel 7.29 (4.23) $I = (0, 1), f(x) = \ln(x), g(x) = x - 1, f'(x) = \frac{1}{x}, g'(x) = 1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1, \lim_{x \uparrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x \uparrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

Bemerkung 7.30 Analoge Aussagen gelten auch für $x \to \pm\infty$. Wir nehmen $y := \frac{1}{x} \to 0$ und

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \to 0\pm} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{g\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{\lambda \to \pm\infty} \frac{f'(\lambda)}{g'(\lambda)}$$

Bemerkung 7.31 Bei der Anwendung der Regeln von L'Hospital ist zunächst zu prüfen, ob die Limes von $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ überhaupt existiert. zum Beispiel

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} = \lim_{x\downarrow} \frac{x}{\sin x} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

aber

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\cos x} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x} = -\lim_{x\downarrow 0} \cos\frac{1}{x}$$

der existiert nicht

Bemerkung 7.32 Die L'Hospital Regeln kann man auch anwenden in dem Fall

$$f(x) \to 0, g(x) \to \infty \text{ für } \lim_{x\downarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x\downarrow} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

Auch für $0^0, \infty^0, 0^\infty$

Beispiel 7.33 (4.24)

1. $\lim_{x\downarrow 0} x^x$ Wir logarithmieren und erhalten

$$\lim_{x\downarrow 0} x\ln x = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

und

$$\lim_{x\downarrow 0} x^x = \lim_{x\downarrow 0} e^{x\ln x} = e^0 = 1$$

2. $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{e^{\frac{1}{x-1}\ln x}}, \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\ln x = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1 \implies \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e^1 = e$

7.2 Taylor Entwicklung

Wir kennen

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad e^{x-x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(x-x_0)^k$$

Wir wollen untersuchen unter welchen Bedingungen solche Potenzreihe für eine Funktion möglich ist und wie man diese aus der Funktion bestimmen kann. Wir haben schon in Übung für die Darstellung für Polynome gezeigt:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

p -Polynom. Wie ist das bei allgemeinen Funktionen

Definition 7.34 (4.25) Für $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, f n-mal stetig differenzierbar definieren wir das n-te Taylor Polynom für ein $x_0 \in (x,b)$

$$f_n(x_0,x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Wir studieren dann den Fehler der Approximation

Satz 7.35 (4.26) Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar und $t_n(x_0,\cdot)$ ihr n-tes Taylor Polynom um ein $x_0 \in n(a,b)$. Dann gibt es zu jeden $x \in (a,b)$ ein ξ zwischen x und x_0, so dass gilt

$$f(x) = t_n(x_0,x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

mit dem sogenannten lagrangesche Restglied.

Beweis Wir bemerken, dass $t(x_0,x_0) = f(x_0)$ und definieren das Restglied

$$R_{n+1}(y,x) := f(x) - t_n(y,x)$$

Für festes x ist die Funktion von y. Weil $f(n+1)$ stetig differenzierbar ist, ist $R_{n+1}(y,x)$ mindestens einmal nach y differenzierbar.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}R_{n+1}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(f(x) - t_n(y,x)) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(y)}{k!}(x-y)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!}(x-y)^{k-1} = -\frac{f^{(n+1)}(g)}{n!}(x-$$

Wir wenden jetzt 2. Mittelwertsatz für $f(y) := R_{n+1}(y,x), g(y) := (x-y)^{n+1}$ an.

$$\begin{aligned} &R_{n+1}(x,x) = f(x) - t_n(x,x) = 0 \\ &\frac{R_{n+1}(y,x)}{(x-y)^{n+1}} = \frac{R_{n+1}(x,y) - R_{n+1}(y,x)}{(x-x)^{n+1} - (x-y)^{n+1}} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}R_{n+1}(\xi,x)}{-(n+1)(x-\xi)^n} \end{aligned}$$

mit $\xi \in (a,b)$ zwischen x und y. Mit der obigen Identität für $y = \xi$ ergibt sich

$$\frac{R_{n+1}(y,x)}{(x-y)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

und folgt die Aussage. □

Definition 7.36 (4.27)

1. $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ heißt glatt (oder C^∞ -Funktion) wenn sie beliebig oft differenzierbar ist, das heißt $\forall\, k \in \mathbb{N}$ ihre k-te Ableitung $f^{(k)}$ existiert
2. Die Taylorreihe von f und ein $x_0 \in (a,b)$ ist dann definiert durch

$$t_\infty(x_0,x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

3. Konvergiert die Taylorreihe von f und $x_0 \,\forall\, x$ in einer Umgebung von x_0 und gilt $f(x) = t_\infty(x_0, x)$, so heißt f (reell) analytisch in x_0

Satz 7.37 (4.28 Taylor-Entwicklung) Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit gleichmäßig beschrankter Ableitung und

$$\sup_{x\in(a,b)} \left| f^{(n)}(x) \right| \le M < \infty \,\forall\, n \in \mathbb{N}$$

Dann ist f auf (a,b) analytisch, also $\forall\, x, y_0 \in (a,b)$ konvergiert die Taylorreihe von f und es gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Beweis Aus der Restglieddarstellung folgt mit Hilfe der Voraussetzung

$$|f(x) - t_{x_0,x}| \le \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \le \frac{M}{(n+1)!}|b - a|^{n+1}$$

Zu beliebigen $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass $\forall\, n \ge n_\varepsilon$ gilt:

$$\frac{M}{(n+1)!}(b - a)^{n+1} < \varepsilon$$

was die Behauptung impliziert. □

Bemerkung 7.38 Eine glatte Funktion muss nicht analytisch sein. Zum Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-x^{-x^2}\right) & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$\implies$ f stetig auf $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 2x^{-3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$f''(x) = 4x^{-6} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 6x^{-4} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = p_n\left(x^{-1}\right) \exp\left(\frac{1}{x^2}\right), n \ge 1$$

wobei p_n ein Polynom ist. Die Ableitungen sind stetig in $x \ne 0$. Wir setzen

$$y = x^{-2}$$

Es gilt

$$\frac{y^k}{e^y} \xrightarrow{y \to 0} 0, k \in \mathbb{N}$$

$\implies$ die Ableitung sich stetig in $x_0 = 0$ durch die Null vorstehen lassen, weil

$$f^{(n)}(x) \xrightarrow{x \to 0} 0 n \in \mathbb{N} \implies f \in C^\infty(\mathbb{R})$$

aber

$$\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)(x-0)^k = 0$$

konvergiert $\forall\, x$, aber stellt die Funktion f außer $x = 0$ nicht dar.

Bemerkung 7.39 Es gibt auch Funktionen, deren Taylorreihen außer in $x = x_0$ nicht konvergieren

7.3 Bemerkung zu Stetigkeit

stetige Funktion $\supset$ gleichmäßig stetig Funktion $\supset$ Lipschitz stetige Funktionen $\supset$ differenzierbare Funktion mit gleichmäßig beschränkten Ableitung (auf beschränkter Menge) $\supset$ stetig differenzierbare Funktionen

- $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig in $(0, 1)$
- $\sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz stetig
- $f(x) = x^2, f'(x) = 2x, x \in \mathbb{R} \nexists M : |f'(x)| < M \,\forall\, x \in \mathbb{R}$
- $|f(x) - f(y)| \leq |(x-y)(x+y)| \leq K|x-y|$
- $f(x) = x^2 x \in (a, b), f'(x) = x, |f'(x)| < \max|2a, 2b|$
- es gibt Funktionen, die differenzierbar und eine gleichmäßig beschränkte Ableitung haben, aber nicht stetig differenzierbar sind (Beispiel: UB10)

7.4 Anwendung von Taylor-Entwicklung

Korollar 7.40 (4.29) Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine n -mal $(n \geq 2)$ stetig differenzierbare Funktion mit

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{n-1}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

für ein $x_0 \in (a, b)$ Ist n gerade, so hat f in x_0 ein striktes lokales Minimum oder Maximum (je nachdem ob $f^{(n)}(x_0) > 0$ oder $f^{(n)}(x_0) < 0$ ist). Ist n ungerade, so hat f in x_0 einen Wendepunkt.

Beweis Ist f n -mal differenzierbar in (a, b) und gilt die Bedingung, so folgt mit der Taylor-Entwicklung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$$

mit einem $\xi \in (a,b)$ zwischen x und x_0. Die Funktion

$$\Delta_n(x) := \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}, x \neq x_0$$

konvergiert für $x \to x_0$ nach

$$\Delta_n(x) \to \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Folglich kann die Funktion Δ_n zu einer auf (a,b) stetigen Funktion fortgesetzt werden. Für diese gilt

$$f(x)-f(x_0) = \Delta_n(x)(x-x_0)^n, \Delta_n(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Falls $\Delta_n(x_0) > 0$, existiert wegen der Stetigkeit von Δ_n eine ε -Umgebung, $\varepsilon > 0$, von x_0, in der $\Delta_n > 0$. Auf dieser ε -Umgebung gilt daher für gerades n:

$$f(x)-f(x_0) = \underbrace{\Delta_n(x)}_{>0}(x-x_0)^n \implies f(x) > f(x_0)$$

$\implies f(x_0)$ ist ein lokales Minimum. Analog argumentieren wir für $\Delta_n(x_0) < 0$. Für ungerades n dagegen

$$f(x)-f(x_0) = \underbrace{\Delta_n(x)}_{>0}(x-x_0)^n \begin{cases} >0 & x > x_0 \\ <0 & x < x_0 \end{cases}$$

$\implies f(x_0)$ ist kein lokales Extremum $\square$

Beispiel 7.41 (4.30)

1. Exponentialfunktion besitzt um x_0 die Taylor-Entwicklung

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x), R_{n+1}(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

stimmt mit der Potenzreihe Darstellung überein.

2. $\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + R_{2n+3}(x), R_{2n+3}(x) = \frac{\sin^{(2n+3)}(\xi)}{(2n+3)!}x^{2n+3} = \frac{(-1)^{2n+1}\cos(\xi)}{(2n+3)!}x^{2n+3}$

3. $f(x) = \ln(1+x), x_0 = 0$

$$\ln^{(k)}(1+x)\,|_{x=0} = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}\,|_{x=0} = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

Dann für $-1 < x \leq 1$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln^{(k)}(1)}{k!}x^k + r_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + R_{n+1}, R_{n+1} = \frac{\ln^{(n)}(1+\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(-1)^k}{(n+1)(2+\xi)^r}$$

Für festes $x, \xi \in (-1,1)$ ist $|R_{n+1}(x)| \leq \frac{c(x)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Die Reihe konvergiert für $x \in (-1,]$ (absolut nur für $x \in (-1,1)$). Zum Beispiel:

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

und wir bekommen Limes der alternierenden harmonischen Reihe.

7.5 Differentiation und Grenzprozesse

$$\sum_{k=1}^{\infty} a(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a(x)$$

Motivation: Frage:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a(x)\right) \overset{?}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} a(x)$$

Bemerkung 7.42 (Pathologische Beispiele)

1. Eine gleichmäßig konvergente Folge differenzierbarer Funktionen mit dicht differenzierbarem Limes

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n} & |x| \leq \frac{1}{n} \\ |x| & |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

   - f_n sind differenzierbar
   - $f_n \xrightarrow{x\to\infty} |x|$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig und nicht differenzierbar

2. $f_n(x) := \frac{\sin(n^2 x)}{n}$
   - f_n differenzierbar
   - $f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, Limes Funktion $f(x) \equiv 0$
   - $f_n'(x) = n \cos n^2 x$ ist in $x = m\pi, m \in \mathbb{R}$ divergent $\implies f_n'(x) \not\to f'(x)$

3. $f_n(x) := x - \frac{x^n}{n}$
   - f_n differenzierbar
   - $f_n \to f, f(x) = x$ gleichmäßig auf $[0,1]$, aber $f_n'(x) = 1 - x^{n-1}$ in $x = 1$, $f_n'(1) = 0$ nicht gegen $f'(x) = 1$ konvergent

Satz 7.43 (Stabilität der Differenzierbarkeit) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen auf einem beschränktem Intervall, welche Punktweise gegen ein Funktion f konvergiert. Ist die Folge der Ableitungen $(f_n)'_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen einen f^*, so ist auch f differenzierbar und es gilt

$$f' = f^* \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

Beweis Sei $x_0 \in I$ und

$$\Delta(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x \neq x_0 \\ f^*(x_0) & x = x_0 \end{cases}$$

Falls $f_{(x_0)} = f^*(x_0) \iff \Delta(x)$ ist stetig in $x = x_0$. Für $x \in i \setminus \{x_0\}$ konvergiert

$$\Delta_n(x) := \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{n\to\infty} \Delta(x)$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $\xi_n \in I$, zwischen x und x_0, sodass

$$f_n'(\xi_n) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = \Delta_n(x)$$

Folglich ist

$$\Delta(x) - \Delta(x_0) = \Delta x - \Delta_n(x) + f_n'(\xi_n) - f^*(x)$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\delta > 0$, sodass $\forall\, n \geq n_0$ und $x \in U_\sigma(x_0)$ gilt

$$\left|f_n'(x) - f^*(x_0)\right| \leq \left|f_n'(x) - f^*(x)\right| + |f^*(x) - f^*(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Mit $x \in U_\sigma(x_0)$ gilt

$$\xi_n \in U_\sigma(x_0), \forall\, x \in U_\sigma(x_0) \setminus \{x_0\}\, \exists\, n_1(x) \geq n_0 : \forall\, n \geq n_1(x) : |\Delta(x) - \Delta_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Für beliebige $x \in U_\sigma(x_0) \setminus \{x_0\}$ folgt dann, dass für $x \geq n_1(x)$

$$\Delta(x) - \Delta(x_0) \leq |\Delta(x) - \Delta_n(x)| + \left|f_n'(\xi_n) - f\right| < \varepsilon \implies \Delta(x) \xrightarrow{x\to x_0} \Delta(x_0) \qquad \square$$

8 Integration

Auf analytischer Seite kann die Integration als inverser Prozess zur Differentiation angesehen werden. Geometrisch kann man für einfache Klasse von Funktionen (etwa stetige Funktionen), das (bestimmte) Integral einer (positiven) Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ interpretieren als den Flächeninhalt zwischen der reellen Achse und dem Funktionsgraph (*insert Symbolbild here*)

8.1 Das Riemannsche Integral

Wir betrachten ein beschränktes Intervall $I = [a, b]$ und eine (endliche) **Zerlegung** Z von

$$I, Z = \{x_0, \ldots, x_n\}, a := x_0 < x_1 < \ldots < x_n =: b$$

Wir bezeichnen

$$h := \max_{k=1,\ldots,n} |x_k - x_{k-1}|$$

als die **Feinheit der Zerlegung**. Die Menge aller solcher Zerlegungen sei mit $\mathcal{Z}(a,b)$ bezeichnet eine Verfeinerung

$$\tilde{Z} = \{\tilde{x}_0, \ldots, \tilde{x}_m\} \in \mathcal{Z}(a,b)$$

mit $m \geq n$ von $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ enthält die Zerlegungspunkte von Z (und möglichst noch weitere). Es gilt

$$\tilde{h} = \max_{k=1,\ldots,m} |\tilde{x}_k - \tilde{x}_{k-1}| \leq h$$

Für zwei Zerlegungen $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(a,b)$ besteht eine gemeinsame Verfeinerung Z_{12} und $h_{12} \leq \min\{h_1, h_2\}$. Eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit

$$|x_k - x_{k-1}| = h \,\forall\, k = 1, \ldots, n$$

heißt **äquidistant**.

Definition 8.1 (5.1 Ober- und Untersumme) Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ und $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ eine Zerlegung mit $Z = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Wir setzen $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ für $k = 1, \ldots, n$. Damit definieren wir die Obersumme der Funktion f bezüglich der Zerlegung Z mittels

$$\bar{S}_Z f(x) := \sum_{k=1}^{n} \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)(x_k - x_{k-1})$$

Völlig analog setzen wir die Untersumme von f bezüglich Z:

$$\underline{S}_Z f(x) := \sum_{k=1}^{n} \inf_{x \in I_k} f(x)(x_k - x_{k-1})$$

Definition 8.2 (5.2 Ober und Unterintegral) Wir definieren das **Oberintegral** f auf I als

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x := \inf_{Z \in \mathcal{Z}(a,b)} \bar{S}_Z f(x)$$

Analog definieren wir das **Unterintegral** von f auf I

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x := \sup_{Z \in \mathcal{Z}(a,b)} \underline{S}_Z f(x)$$

Lemma 8.3 (5.3)

1. Für eine beschränkte Funktion $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ existieren das Oberintegral und das Unterintegral
2. Sei (Z_n) eine Folge von Zerlegungen aus $Z_n \in \mathcal{Z}(a,b), n \in \mathbb{N}$. Sei h_n die Feinheit von Z_n mit $h_n \to 0$ für $n \to \infty$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_{Z_n} = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_{Z_n}$$

Beweis 1. Sei $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ eine beliebige Zerlegung. $\underline{S}_Z$ und $\bar{S}_Z$ sind beschränkt, da

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x)(b-a) \leq \underline{S}_Z \leq \bar{S}_Z \leq \sup_{x\in[a,b]} f(x)(b-a)$$

Die Existenz des Ober- und Unterintegrals folgt aus Existenz von Supremum und Infimum beschränkter Zahlenmengen

2. Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus $\mathcal{Z}(a,b)$ mit $h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Nach Definition von Supremum und Infimum gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, Z_\varepsilon, Z^\varepsilon \in \mathcal{Z}(a,b) : \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \leq \underline{S}_{Z_\varepsilon}(f) + \frac{\varepsilon}{2} \wedge \bar{S}_{Z^\varepsilon}(f) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}$$

Da nun Z_ε und Z^ε nur endlich viele Unterteilungspunkte haben und $h_n \to 0$ gilt, kann $n \in \mathbb{N}$ so groß gewählt werden, dass die Teilintervalle von Z_n die Zerlegungspunkte von $Z^\varepsilon, Z_\varepsilon$ enthalten und insgesamt eine Länge $L < \frac{\varepsilon}{2M}$ mit

$$M = \sup_{x\in I} |f(x)|$$

haben. dann gilt

$$\underline{S}_{Z_\varepsilon}(f) \leq \underline{S}_{Z_n}(f) + \frac{\varepsilon}{2} \wedge \bar{S}_{z_n}(f) \leq \bar{S}_{Z^\varepsilon}(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

und daraus folgt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x \leq \underline{S}_{Z_n}(f) + \varepsilon$$
$$\bar{S}_{Z_n}(f) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x + \varepsilon$$

Dies impliziert wegen der Beliebigkeit der Wahl von ε die Behauptung. □

Definition 8.4 (5.4 Riemann Integral) Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Sind Ober- und Unterintegral gleich, so heißt der gemeinsame Wert das (bestimmte) Riemann Integral von f über I

$$\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$$

Beispiel 8.5 (5.5) Nicht alle beschränkten Funktionen sind Riemann-integrierbar.

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} x \mapsto \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

Auf jeder Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(0,1)$

$$\underline{S}_Z(f) = 0 < 1 = \bar{S}_Z(f)$$

Satz 8.6 (5.6 Riemannsches Integrabilitätskriterium) Eine beschränkte Funktion $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann über I Riemann-integrierbar, wenn es zu beliebigen $\varepsilon > 0$ ein Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ gibt, sodass für die zugehörige Ober- und Untersummen gilt

$$\left|\bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)\right| < \varepsilon$$

Definition 8.7 (5.7 Riemannsche Summe) Für eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ wird die mit einem Punkten $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ gebildete Summe

$$\mathrm{RS}_z(f) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

als eine Riemannsche Summe von f bezeichnet.

Satz 8.8 (5.9) Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn für jede Folge von Zerlegungen $Z_n \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit $h_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ alle zugehörigen Riemann-Summen konvergieren und denselben Limes haben

$$\mathrm{RS}_{Z_n}(f) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Beweis Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. $\forall\, Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit Feinheit h gilt offenbar

$$\underline{S}_Z(f) \leq \mathrm{RS}_Z(f) \leq \bar{S}_Z(f)$$

Aus

$$\left|\underline{S}_Z(f) - \bar{S}_Z(f)\right| \xrightarrow{h\to 0} 0$$

folgt die Konvergenz der Riemann-Summe. Seien alle Riemann-Summen von f konvergent gegen den selben Limes.

$$\forall\, \bar{S}_Z(f), \underline{S}_Z(f), Z \in \mathcal{Z}(a,b)\, \exists\, \overline{\mathrm{RS}}_Z(f), \underline{\mathrm{RS}}_Z(f) : \forall\, \varepsilon > 0 : \underline{\mathrm{RS}}_Z(f) - \varepsilon \leq \underline{S}_Z(f) \leq \bar{S}_Z(f) \leq \overline{\mathrm{RS}}_Z(f) + \varepsilon$$

Aus Konvergenz (für $h \to 0$) alle Riemann-Summen gegen denselben Limes und aus der Beliebigkeit von ε folgt

$$\left|\underline{S}_Z(f) - \bar{S}_Z(f)\right| \xrightarrow{h\to 0} 0$$

□

Satz 8.9 (5.9) Eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

Beweis Auf dem kompakten (beschränkten und abgeschlossenen) Intervall ist f gleichmäßig stetig.

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \forall\, x, \tilde{x} \in I : |x - \tilde{x}| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon$$

$\forall$ Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}$ mit der Feinheit $h < \delta_\varepsilon$ gilt

$$\left|\bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left| \sup_{x\in I_k} f(x) - \inf_{x\in I_k} f(x) \right| (x_k - x_{k-1}) \leq \varepsilon(b-a)$$

Dies impliziert die Existenz des Riemann-Integral von f □

Satz 8.10 (5.10) Eine (beschränkte) monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.

Beweis Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei f monoton steigend. Dann gilt $f(a) \leq f(x) \leq f(b) \,\forall\, x \in I$. $\forall$ Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit Feinheit h gilt:

$$\bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))(x_k - x_{k-1}) \leq h(f(b) - f(a))$$

Für beliebige $\varepsilon > 0 \,\exists\, h_\varepsilon > 0$ sodass für $h \leq h_\varepsilon$ gilt

$$\left|\bar{S}_Z(f) - \underline{S}_Z(f)\right| < \varepsilon$$

□

Satz 8.11 (5.11 Zusammengesetzte Integrale)

1. Eine (beschränkte) Riemann-integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist auch über jedem Teilintervall $[\tilde{a}, \tilde{b}] \in [a,b]$ Riemann-integrierbar. Insbesondere gilt für $c \in (a,b)$
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$
2. Ist eine (beschränkte) Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ für $c \in (a,b)$ über den Teilintervallen $[a,c]$ und $[c,b]$ Riemann-integrierbar, so ist sie auch über $[a,b]$ Riemann-integrierbar und es gilt 1.

Beweis

1. Seien $Z_n \in \mathcal{Z}(a,b)$ mit Feinheit $h_n \to 0$ und $\mathrm{RS}_{z_n}(f)$ zugehörige Riemann-Summen, sodass
$$\mathrm{RS}_{Z_n}(f) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
Wir zeigen Integrierbarkeit von f über $\left(\tilde{a}, \tilde{b}\right)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass Z_n die Punkte $\{\tilde{a}, \tilde{b}\}$ als Teilungspunkte enthalten. Wir betrachten zwei beliebige Folge $\tilde{Z}_n^{(1)}, \tilde{Z}_n^{(2)} \in \mathcal{Z}\left(\tilde{a}, \tilde{b}\right)$ mit Feinheiten $\tilde{h}_n^{(1)}, \tilde{h}_n^{(2)} \to 0$ und irgendwelche zugehörigen Riemann-Summen $\mathrm{RS}_{\tilde{Z}_n^{(1)}}(f), \mathrm{RS}_{\tilde{Z}_n^{(2)}}(f)$. $\tilde{Z}_n^{(1)}, \tilde{Z}_n^{(2)}$ lassen sich erweitern zu $Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}$ auf $[a,b]$ (durch Verwendung von gleichen Teilungspunkten aus $[a,\tilde{a}] \cup [\tilde{b}, b]$). Wir bekommen zugehörige $\mathrm{RS}_{Z_n^{(1)}}, \mathrm{RS}_{Z_n^{(2)}}(f)$. Nach Konstruktion gilt
$$\left|\mathrm{RS}_{\tilde{Z}_n^{(1)}}(f) - \mathrm{RS}_{\tilde{Z}_n^{(2)}}(f)\right| = \left|\mathrm{RS}_{Z_n^{(1)}}(f) - \mathrm{RS}_{Z_n^{(2)}}(f)\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$
Hieraus folgt, dass jede Folge von Riemann-Summen $\mathrm{RS}_{\tilde{Z}_n}(f)$ zu Zerlegung $Z_n \in \mathcal{Z}\left(\tilde{a}, \tilde{b}\right)$ mit $\tilde{h} \to 0$ Cauchy Folge ist und dass alle solche Folgen gegen den selben Limes konvergieren, also f ist über $[\tilde{a}, \tilde{b}]$ Riemann-integrierbar.

   Sei $c \in (a,b) \implies f$ ist Riemann-integrierbar über $[a,c]$ und $[c,b]$. Da jedes Paar $\mathrm{RS}_{Z^{(1)}}(f)$ und $\mathrm{RS}_{Z^{(2)}}(f)$ zu einer $\mathrm{RS}_Z(f)$ über $[a,b]$ erweitert werden kann bekommen wir durch

Grenzübergang $h \to 0$

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0} \mathrm{RS}_{Z^{(1)}}(f) + \lim_{h\to 0} \mathrm{RS}_{Z^{(2)}}(f)$$
$$= \lim_{h\to 0}(\mathrm{RS}_{Z^{(1)}} + \mathrm{RS}_{Z^{(2)}}(f)) = \lim_{h\to 0} \mathrm{RS}_Z(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

2. Sei f über $[a,c]$ beziehungsweise $[c,b]$ integrierbar. Die Konvergenz

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \mathrm{RS}_{Z^{(1)}}(f) = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x \\
&\lim_{h\to 0} \mathrm{RS}_{Z^{(2)}}(f) = \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \implies \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \quad = \lim_{h\to 0} \mathrm{RS}_{Z^{(1)}}(f) + \lim_{h\to 0} \mathrm{RS}_{Z^{(2)}}(f) \\
&\qquad = \lim_{h\to 0}(\mathrm{RS}_{Z^{(1)}}(f) + \mathrm{RS}_{Z^{(2)}}(f)) = \lim_{h\to 0} \mathrm{RS}_Z(f) \\
&\qquad =: \int_a^b f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

□

Definition 8.12 (5.12 Linearität des Riemann-Integrals) Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ (beschränkt) Riemann-integrierbar, so ist auch jede Linearkombination

$$\alpha f + \beta g, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

über I Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Beweis Wegen der Integrierbarkeit von f und g existieren $\mathrm{RS}_Z(f)$ und $\mathrm{RS}_Z(g)$ mit Feinheiten $h \to 0$, sodass

$$\lim_{h\to 0} \mathrm{RS}_Z(f) = \int_y^b f(x)\mathrm{d}x$$

und ähnlich für g, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden kann, dass $Z \in \mathcal{Z}(a,b)$ sowie die Anwendungspunkte $\xi_k \in [x_{k-1,x_k}]$ für beide Riemann-Summen die selben sind. Dann ist für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auch

$$\mathrm{RS}_Z(\alpha f + \beta g) := \mathrm{RS}_Z(\alpha f) + \mathrm{RS}_Z(\beta g) = \alpha\, \mathrm{RS}_Z(f) + \beta\, \mathrm{RS}_Z(g)$$

Riemann-Summe für $\alpha f + \beta g$ Es gilt

$$\begin{aligned}
\alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x) &= \alpha \lim_{h\to 0} \mathrm{RS}_Z(f) + \beta \lim_{h\to 0} \mathrm{RS}_Z(g) \\
&= \lim_{h\to 0} \mathrm{RS}_Z(\alpha f + \beta g) \\
&= \int_a^b (\alpha f + \beta g)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

□

Satz 8.13 (5.13 Monotonie des Riemann-Integrals) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ (beschränkt) Riemann-integrierbare Funktion mit $g(x) \geq f(x) \,\forall\, x \in [a, b]$. Dann gilt auch

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

(ohne Beweis)

Korollar 8.14 (5.14) Für eine (beschränkte) Riemann-integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $m \leq f(x) \leq M$, dann gilt

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

Korollar 8.15 (5.15) Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ (beschränkt) Riemann-integrierbar. Dann gilt

1. Die Funktion $f_+ := \max\{f, 0\}, f_- := \min\{f, 0\}$ sind Riemann-integrierbar
2. $|f|$ ist Riemann-integrierbar und es gilt
$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$
3. $\forall\, p \in [1, \infty]$ ist $|f|^p$ Riemann-integrierbar
4. Das Produkt fg ist Riemann-integrierbar

Beweis

1. $\forall\, Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ gilt
$$\begin{aligned} 0 &\leq \bar{S}_Z(f_+) - \underset{\sim}{S}_Z(f_+) \leq \bar{S}_Z(f) - \underset{\sim}{S}_Z(f) \\ 0 &\leq \bar{S}_Z(f_-) - \underset{\sim}{S}_Z(f_-) \leq \bar{S}_Z(f) - \underset{\sim}{S}_Z(f) \end{aligned}$$
das hei0t mit f sind auch f_+ und f_- Riemann-integrierbar
2. $|f| = f_+ - f_- \implies |f|$ ist Riemann-integrierbar als linear Kombination von f_+ und f_-
$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)\mathrm{d}x|$$
folgt aus Monotonie des Riemann-Integrals, weil $f \leq |f|, -f \leq |f|$
3. Sei $M := \sup\limits_{x \in [a,b]} |f|$, $\dfrac{|f|}{M}$ ist Riemann-integrierbar. Wir brauchen also nur die Aussage für $0 < f \leq 1$. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes folgt für $0 \leq x < y \leq 1$
$$y^p - x^p = p\xi\xi^{p-1}, x < \xi < y$$
$\forall\, Z \in \mathcal{Z}(a, b)$ gilt daher
$$\bar{S}_Z(|f|^p) - \underset{\sim}{S}_Z(|f|^p) \leq p\big(\bar{S}_Z(|f|) - \underset{\sim}{S}_Z(|f|)\big)$$
das heißt mit $|f|$ ist auch $|f|^p$ integrierbar

4. Wegen $fg = \frac{1}{4}\Big((f+g)^2 - (f-g)^2\Big)$ folgt die Riemann-Integrierbarkeit von fg mit Hilfe von 3. $\square$

Bemerkung 8.16 Im Allgemeinen

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \neq \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)$$

Beispiel 8.17 $f \equiv 1$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \neq \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right) = (b-a)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

für $b - a \neq 1$

Korollar 8.18 (5.16 Definitheit des Riemann-Integral) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) \geq 0$ für $x \in [a,b]$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0 \iff f \equiv 0$$

Beweis Angenommen $f \not\equiv 0$, das heißt

$$\exists\, x_0 \in [a,b] : f(x_0) > 0$$

Dann, aus Stetigkeit von f gibt es ein $I_\varepsilon := [x_0, x_0 + \varepsilon]$ sodass

$$f(x) \geq \delta > 0\, \forall\, x \in I_\varepsilon$$

Da jede Zerlegung Z von i mit hinreichend kleiner Feinheit h ein Teilintervall $I_k \subseteq I_\varepsilon$ beinhaltet, gilt für die zugehörigen Summen

$$0 < \delta(x_k - x_{k-1}) \leq \inf_{x \in I_k} f(x)(x_k - x_{k-1}) \leq \underline{S}_Z(f) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \lightning$$

$\square$

Bemerkung 8.19 Wir haben Riemann-Integral definiert für $a < b$. Für $b \geq a$ definieren wir

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \quad \int_a^a f(x)\mathrm{d}x := 0$$

Satz 8.20 (5.17 Mittelwertsatz für Integrale) Es seien $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und g habe in I keinen Vorzeichenwechsel. Dann gibt es eine Zwischenstelle $\xi[a,b]$ sodass

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Beweis Es folgt aus dem Zwischenwertsatz für stetig Funktionen: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit behalten wir den Fall $g \geq 0$ Aus Stetigkeit von f folgt:

$$\exists\, m := \min_{x \in I} f(x), M := \max_{x \in I} f(x)$$

Damit, wegen $g \geq 0$

$$m \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq M \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Wir nehmen eine lineare Funktion mit $t \in [0,1]$

$$l(g). = (m(1-t) + Mt) \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$\implies \exists\, \mu \in [m, M]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = \mu \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

und dann (Stetigkeit von f) $\exists\, \xi \in [a,b]$, sodass $\mu = f(\xi)$ □

Korollar 8.21 (5.18) Sei $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann $\exists\, \xi \in I$ sodass

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

Seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit

$$m \leq f(x) \leq M\, \forall\, x \in I$$

und g Riemann-integrierbar mit $g \geq 0$, Dann gilt

$$m \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq M \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Beispiel 8.22 (5.19 (Notwendigkeit von Voraussetzungen))

1. Stetigkeit von f. Wir nehmen

$$f : [0,2] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

   f ist unstetig und $\forall\, \xi \in [0,2]$

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 1 \neq f(\xi)(2-0)$$

2. Positivität von g: Für

$$f(x) := x$$
$$g(x) := \begin{cases} -1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

   $\forall\, \xi \in [0,2]$ gilt

$$\int_0^2 f(x)g(x)\mathrm{d}x = -\int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_1^2 x\mathrm{d}x = 1 \neq f(\xi) \int_0^2 g(x)\mathrm{d}x = 0$$

Definition 8.23 (5.20) Eine Funktion $F : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **unbestimmtes Integral** (oder Stammfunktion) einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, wenn sie differenzierbar ist und

$$F'(x) = f(x) \,\forall\, x \in I$$

Wir schreiben

$$F = \int f(x)\mathrm{d}x$$

Satz 8.24 (5.21 Fundamentalsatz der Analysis)

1. Für eine stetige Funktion $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ ist das unbestimmte Integral

   $$F(x) := \int_a^x f(y)\mathrm{d}y, x \in [a, b]$$

   aufgefasst als Funktion der Oberen Grenze x eine Stammfunktion von f. Jede weitere Stammfunktion von f unterscheidet sich von F durch eine Konstante

2. Ist umgekehrt die Funktion $F : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktion einer stetigen Funktion f, so gilt

   $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b := F(b) - F(a)$$

Beweis 1. Wir betrachten Differenzenquotienten von $F(x)$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(y\mathrm{d}y) - \int_a^x f(y)\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\mathrm{d}y$$

Nach Mittelwertsatz gilt mit einem $\xi_h \in [x, x+h]$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi_h)$$

Für $h \to 0$, konvergiert $\xi_h \to x$, sodass $F'(x) = f(x)$ (aus Stetigkeit von f). Sei G eine weitere Stammfunktion von f. Dann gilt

$$0 = F' - G' = (F - G)'$$

das heißt $F - G$ ist konstant.

2. Sei F eine Stammfunktion von f, das heißt $F'(x) = f(x)$. Mit der Funktion

   $$G(x) := \int_a^x f(y)\mathrm{d}y, G(a) = 0$$

   ist $F - G$ konstant (aus 1.). Deshalb

   $$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

□

Bemerkung 8.25 Integration und Differenzierung sind zueinander inverse Prozesse

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(y)\mathrm{d}y = f(x)$$
$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)\mathrm{d}y$$

Die Regeln für die Differenzierung liefern

1. $\int y^\alpha \mathrm{d}y = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
2. $\int a^y \mathrm{d}y = \int e^{y\ln a}\mathrm{d}y = \frac{e^{x\ln a}}{\ln a} = \frac{a^x}{\ln a}$
3. $\int \sin y\mathrm{d}y = -\cos x$
   $\int \cos y\mathrm{d}y = \sin x$
4. $\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \ln|x|$

Lemma 8.26 (5.21 Partielle Integration) Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = (fg)(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

Beweis

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$fg\Big|^b = \int_b^a f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x \qquad \square$$

Beispiel 8.27 (5.23)

$$\int_a^b xe^x\mathrm{d}x = xe^x\Big|_a^b - \int_a^b e^x\mathrm{d}x = e^b(b-1) - e^a(a-1)$$

$$\int_a^b \ln(x)\mathrm{d}x = x\ln(x)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{x}x\mathrm{d}x = b\ln b - a\ln a - (b-a)$$

Satz 8.28 (5.24 Substitutionsregel) Seien $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\phi : [a,b] \to I$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$\int_a^b f(\phi(y))\phi'(y)\mathrm{d}y = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\mathrm{d}x$$

(sogenannte Substitutionsregel)

Beweis Sei $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Die Komposition $F \circ \phi : [a, b] \to \mathbb{R}$. ist stetig differenzierbar, und nach der Kettenregel

$$(F \circ \phi)'(y) = F'(\phi(y))\phi'(y) = f(\phi(y))\phi'(y)$$

Aufgrund des Fundamentalsatzes gilt

$$\int_a^b f(\phi(y))\phi'(y)\mathrm{d}y = \int_a^b (F \circ \phi)'(y)\mathrm{d}y = F \circ \phi(y)\Big|_a^b = (F \circ \phi)(b) - (F \circ \phi)(a) = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)}$$

$\square$

8.2 Uneigentliche Integrale

Wir wollen das Konzept des (bestimmten) Riemann-Integrals für Funktionen auf unbeschränkten Intervallen mit Singularitäten ausdehnen. Solche Integrale werden **uneigentlich** genannt.

8.2.1 Uneigentliche Integrale auf beschränkten Intervallen

Wir nennen eine Funktion auf deinem endlichen, halboffenen Intervall $(a, b]$ „integrierbar", wenn sie auf jedem abgeschlossenen Teilintervall $[a', b] \subset (a, b]$ Riemann-integrierbar ist.

Satz 8.29 (5.25 Uneigentliches Riemann-Integral 1) Sei $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ eine auf dem halboffenen Intervall $(a, b]$ aber nicht auf dem Abschluss $[a, b]$ integrierbare Funktion. Existiert für jede Folge von Punkten $a_n \in (a, b]$ der Limes

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x := \lim_{a_n \downarrow a} \int_{a_n}^b f(x)\mathrm{d}x$$

so ist dieser unabhängig von der Wahl der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und heißt das „uneigentliche Integral" von f über $[a, b]$

Beweis Ist $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine zweite Folge mit

$$\lim_{a'_n \downarrow a} \int_{a'_n}^b f(x)\mathrm{d}x = A'$$

so konvergieren gemäß Voraussetzung auch die Integrale zu der zusammengesetzten Folge $\{a_1, a'_1, \ldots, a_n, a'_n, \ldots\}$ gegen den Limes A''. Da aber Teilfolgen gegen denselben Limes konvergieren wie die Gesamtfolge muss $A'' = A'$ sein. Also konvergieren alle Integralfolgen gegen den selben Limes $\square$

Lemma 8.30 (5.26) Sei $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ auf $(a, b]$ aber nicht auf $[a, b]$ integrierbar. Existiert dann das uneigentliche Integral von $|f|$ über $[a, b]$, so existiert auch das uneigentliche Integral von f über $[a, b]$ und

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

Beweis Für $\varepsilon > 0, \varepsilon < b-a$ schreiben wir

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{|x| + f(x)}{2}\mathrm{d}x - \frac{a+\varepsilon}{b}\frac{|f(x)| - f(x)}{2}\mathrm{d}x$$

Die Integrale rechts sind für $\varepsilon \to 0$ nach Voraussetzung gleichmäßig beschränkt und wegen der Nichtnegativität des Integranden jeweils monoton wachsend.

$$\left|\int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{|f(x)| + f(x)}{2}\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{|f(x)| - f(x)}{2}\mathrm{d}x\right| \leq 2\int_{a+\varepsilon}^{b} |f(x)|\mathrm{d}x \leq 2\int_{a}^{b} |f(x)|\mathrm{d}x$$

Folglich konvergieren die Integrale für $\varepsilon \to 0$. Damit hat das linke Integral für $\varepsilon \to 0$ einen Limes, das heißt f besitzt ein uneigentliches Integral □

Bemerkung 8.31 Die Umkehrung der letzten Aussage ist nicht richtig (wie bei Reihen).

Beispiel 8.32 (5.27 (nicht existierendes uneigentliches Integral))

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \ln(b-a) - \ln(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \infty$$

das heißt das Uneigentliche Integral über $[a, b]$ existiert nicht.
Im Fall $\mu \neq 1$ gilt

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^{\mu}} = \frac{1}{1-\mu}\frac{1}{(x-a)^{\mu-1}}\Big|_{a+\varepsilon}^{b} = \frac{1}{1-\mu}\left(\frac{1}{(b-a)^{\mu-1}} - \frac{1}{(-\varepsilon)^{\mu-1}}\right)$$

Für $0 < \mu < 1 \wedge \mu \geq 1$ existiert das uneigentliche Integral nicht.

8.2.2 Uneigentliche Integrale auf unbeschränkten Intervallen

Wir nennen einen Funktion auf $[a, \infty)$ **lokal integrierbar**, wenn sie auf jedem abgeschlossenem Teilintervall $[a, \tilde{b}] \subset [a, \infty)$ Riemann-integrierbar ist.

Satz 8.33 (5.28 Uneigentliches Riemann-Integrale 2) Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ eine lokal integrierbare Funktion. Existiert für jede Folge $b_n \in [a, \infty)$ der Limes

$$\lim_{b_n \to \infty} \int_{a}^{b_n} f(x)\mathrm{d}x =: \int_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

so ist dieser unabhängig von der Wahl der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und heißt das uneigentliche Integral von f über $[a, \infty)$

Beweis Analog wie Beweis von Satz 5.25 □

Lemma 8.34 (5.29) Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Existiert das uneigentliche Integral von $|f|$ über $[a, \infty)$, so existiert auch das uneigentliche Integral von f über $[a, \infty)$ und

$$\left|\int_{a}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_{a}^{\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$$

Beweis Analog zu Satz 5.26 □

Satz 8.35 (5.30 Konvergenzkriterium für uneigentliche Integrale) Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ in $[a, \infty)$ integrierbar mit

$$\sup_{x \geq a} \left| \int_a^x f(x) \mathrm{d}\xi \right| = \mu < \infty$$

Ferner sei $g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und monoton gegen Null fallend. Dann existiert das uneigentliche Integral

$$\int_a^\infty f(x) g(x) \mathrm{d}x = \lim_{x \to \infty} \int_a^x f(\xi) g(\xi) \mathrm{d}\xi$$

Beweis Mit f und g ist auch das Produkt fg in $[a, \infty)$ lokal integrierbar.

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) \mathrm{d}\xi$$

ist die Stammfunktion von f. Für $a < x < \infty$ erhalten wir durch partielle Integration

$$\int_a^x f(\xi) g(\xi) \mathrm{d}\xi = F(\xi) g(\xi) \Big|_a^x - \int_a^b F(\xi) g'(\xi) \mathrm{d}\xi$$

Sei $\varepsilon < 0$ beliebig. Dann gibt es ein $\beta_\varepsilon > a$, sodass

$$g(x) < \frac{\varepsilon}{2\mu}, x \geq \beta_\varepsilon$$

Für beliebige $\beta \geq \alpha \geq \beta_\varepsilon$ folgt damit wegen $g' \leq 0$

$$\left| \int_\alpha^\beta F(\xi) g'(\xi) \mathrm{d}\xi \right| \leq \mu \int_\alpha^\beta \left| g'(\xi) \right| \mathrm{d}\xi = -\mu \int_\alpha^\beta g'(\xi) \mathrm{d}\xi = -\mu g(\xi) \Big|_\alpha^\beta \leq \varepsilon$$

$$\int_a^x F(\xi) g'(\xi) \mathrm{d}\xi$$

für $x \to \infty$ hat einen Limes nach dem Cauchy-Kriterium

$$\lim_{x \to \infty} \int_a^x f(\xi) g(\xi) \mathrm{d}\xi = \underbrace{\lim_{x \to \infty} F(x) g(x)}_{=0} - \underbrace{F(a)}_{=0} g(a) - \int_a^\infty F(\xi) g'(\xi) \mathrm{d}\xi < \infty$$

liefert die Behauptung □

Satz 8.36 (5.31) Es sei $f : [n_0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige, positive, monoton fallende Funktion. Dann gilt

$$\sum_{k=n_0}^\infty f(k) < \infty \iff \int_{n_0}^\infty f(x) \mathrm{d}x < \infty$$

Beweis ($\implies$): Aus Monotonie von f gilt $\forall\, n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$

$$\int_{n_0}^{n+1} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=n_0}^{n} \int_{k}^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \le \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \le \underbrace{\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k)}_{<\infty} \implies \int_{n_0}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x < \infty$$

($\impliedby$): Für alle $n \ge n_0$

$$\sum_{k=n_0}^{n} f(k) = f(n_0) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \le f(n_0+1) \le f(n_0) + \sum_{k=n_0}^{n-1} \int_{k}^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \le \int_{n_0}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x < \infty$$

□

Beispiel 8.37 (5.32)

1. Es gilt

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2(x)} = -\frac{1}{\ln(x)} \implies \int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} = \frac{1}{\ln(2)}$$

$f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$ ist auf $[2,\infty)$ positiv und monoton fallend $\implies$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln^2 k} < \infty$$

2. Aus dem Satz 5.30 folgt die Existenz von Integralen

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, \int_0^\infty \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$$

mit $f(x) := \sin x, g(x) := \frac{1}{x}$ (beziehungsweise $f(x) := \cos x$). Ebenso bekommen wir Existenz von

$$\int_2^\infty \frac{\sin x}{\ln x}\mathrm{d}x, \int_2^\infty \frac{\sin x}{\ln(\ln(x))}\mathrm{d}x$$

8.3 Kurvenlänge

8.4 Integration und Grenzprozesse

Frage:

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \stackrel{?}{=} \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$$

Pathologisches Beispiel:

$$f_n(x) := nxe^{-nx^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-nx^2}\Big|_0^1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-n} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Satz 8.38 (3.34 Gleichmäßige Konvergenz) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger (und Riemann-integrierbarer) Funktionen $f_n : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiere gleichmäßig gegen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$. Dann ist die Grenzfunktion ebenfalls stetig (und Riemann-integrierbar), und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$$

Satz 8.39 (5.35) Für eine Folge stetiger Funktionen $f_k : I \to \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$, konvergiere die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

auf dem Intervall $I = [a,b]$ gleichmäßig. Dann stellt die Reihe eine integrierbare Funktion dar, und

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x$$

Beweis Aus Stetigkeit von f_k sind auch alle Partialsummen stetig und damit integrierbar. Gleichmäßige Konvergenz der Partialsummen impliziert, dass die Reihe eine stetige Funktion und damit integrierbar ist. Es gilt

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x + \int_a^b \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\mathrm{d}x$$

Gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\Longrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall \, n \geq n_\varepsilon : \left| \int_a^b \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b \varepsilon \mathrm{d}x = \varepsilon(b-a)$$

$$\Longrightarrow \left| \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\mathrm{d}x \right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

□

Satz 8.40 (5.36) Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k$$

habe den Konvergenzradius $\rho > 0$, sie stellt also auf dem Intervall $I = (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ eine stetig Funktion dar. Deren Stammfunktion erhält man durch gliedweise Integration und diese hat denselben Konvergenzradius ρ

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} c_k (y-x_0)^k \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1} + c$$

Beweis Sei $|x - x_0| \leq R < \rho$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Gleichmäßige Konvergenz der Reihe auf dem Intervall $[x_0 - R, x_0 + R]$ impliziert $\forall\, n \geq n_\varepsilon \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| R^k < \varepsilon$$

Ferner,

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{\infty} c_k (y - x_0) \mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} c_k (y - x_0) \mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (x - x_0)^{k+1}$$

□

Bemerkung 8.41 Der Satz 5.34 gilt auch für Folgen von uneigentlichen Integralen auf beschränkten Intervallen. Bei uneigentlichen Integralen auf unbeschränkten Gebieten reicht die gleichmäßige Konvergenz der Folge im allgemeinen nicht. zum Beispiel:

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} & 0 \leq x \leq n \\ 0 & x > n \end{cases}$$

$f_n \xrightarrow{\text{gleichmäßig}} 0$ auf $I = [0, \infty)$, aber

$$\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = 0 \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x = \mathrm{d}x = 1)$$

Satz 8.42 (5.37 Monotone Konvergenz) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von auf dem Intervall $I = [a, b)$ oder $I = [a, \infty)$ (uneigentlich) integrierbaren Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$ konvergiere punktweise gegen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$. Ist die Grenzfunktion f ebenfalls (uneigentlich) integrierbar und sind Funktionen f_n gleichmäßig beschränkt durch eine auf I (uneigentlich) integrierbare Funktion $g : I \to \mathbb{R}$, das heißt

$$|f_n|(x) \leq g(x), x \in I$$

so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) \mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx$$

Beweis in Analysis 3.

Definition 8.43 (5.38 Nullmenge) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt Nullmenge (Lebesgue Nullmenge) wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ höchstens abzählbar unendlich viele Intervalle $I_1, \imath_2, \ldots$ gibt sodass

$$M \subseteq \bigcup_k I_k \qquad \sum_k |I_k| \leq \varepsilon$$

Mann nennt das System der Intervalle I_k eine **abzählbare** (offene oder abgeschlossene) **Überdeckung** der Menge M. Eine Funktion $f : [a, b]$ besitzt eine Eigenschaft (zum Beispiel stetig) **fast überall**, wenn die Menge der Punkte, in deren sie diese Eigenschaft nicht besitzt eine Nullmenge ist.

Lemma 8.44 (5.39) 1. Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge

2. Endliche und abzählbare Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind Nullmengen

3. Die Vereinigung abwählbar vieler Nullmengen ist wieder einer Nullmenge

Beweis 1. Sei M eine Nullmenge $\implies M \subset \bigcup_k I_k$ und $\sum_k |I_k| < \varepsilon$

$$N \subset M \implies N \subset M \subset \bigcup_k I_k \wedge \sum_k |I_k| < \varepsilon$$

2. Sei $M \subset \mathbb{R}$ endlich oder abzählbar. $\forall \varepsilon > 0$ ist jedes $x_k \in M$ Mittelpunkt eines Intervalls

$$I_k = [x_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, x_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}]$$

Es gilt

$$M \subset \bigcup_k I_k \text{ mit } \sum_k |I_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} - 1 \right) = \varepsilon \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \right) = \varepsilon$$

3. Seien $\{M_k\}$ höchstens abzählbare Nullmengen. Für $\varepsilon > 0$ kann man jedes M_k durch höchstens abzählbar viele Intervalle (I_{kl}) überdecken sodass

$$\sum_l |I_{kl}| \leq 2^{-k} \varepsilon$$

Dann überdecken alle Mengen $(I_{kl})^{\infty}$ auch die Vereinigung

$$\bigcup_k M_k$$

und es gilt

$$\sum_{k,l} |I_{kl}| = \sum_k \left(\sum_l |I_{kl}| \right) \leq \sum_k \frac{\varepsilon}{2^k} \leq \varepsilon$$

□

Satz 8.45 (5.40 Satz von Lebesgue) Eine Funktion $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ genau dann wenn sie auf $[a, b]$ beschränkt und fast überall stetig ist (ohne Beweis).

Bemerkung 8.46 Dieser Satz charakterisiert das Riemann-integral vollständig. Wichtig ist die Zulässigkeit von abzählbar vielen unstetigen Stellen.