

Mathematischer Vorkurs

Robin Heinemann

December 9, 2017

Contents

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Messwert und Maßeinheit | 4 |
| 1.1 | Beispiel | 4 |
| 1.2 | Bezeichnungen | 4 |
| 1.3 | Maßeinheiten | 5 |
| 1.3.1 | Beispiel: | 5 |
| 1.3.2 | SI-Einheiten | 5 |
| 1.4 | Natürliches Einheitensystem der Teilchenphysik | 6 |
| 1.4.1 | Grundlage | 6 |
| 1.4.2 | natürliches Einheitensystem | 6 |
| 1.5 | Endliche Messgenauigkeit | 6 |
| 2 | Zeichen und Zahlen | 7 |
| 2.1 | Symbole | 7 |
| 2.1.1 | Summenzeichen | 7 |
| 2.1.2 | Produktzeichen | 9 |
| 2.1.3 | Fakultätszeichen | 9 |
| 2.2 | Zahlen | 9 |
| 2.2.1 | Rassengesetze für reelle Zahlen | 9 |
| 2.2.2 | Satz des Pythagoras | 10 |
| 2.2.3 | binomische Formeln: | 10 |
| 2.2.4 | Pascalsches Dreieck | 11 |
| 2.2.5 | Beweisprinzip der Vollständigen Induktion | 11 |
| 2.2.6 | Quadratische Ergänzung | 11 |
| 3 | Folgen und Reihen | 11 |
| 3.1 | Folge | 11 |
| 3.1.1 | Definition | 11 |
| 3.1.2 | Beispiele | 12 |
| 3.1.3 | Frage | 12 |
| 3.1.4 | Beschränktheit | 12 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.1.5 | Monotonie | 13 |
| 3.1.6 | Konvergenz | 13 |
| 3.2 | Reihen (unendliche Reihen) | 13 |
| 3.2.1 | Bemerkung | 14 |
| 3.2.2 | Rechenregeln für konvergente Reihen | 14 |
| 3.2.3 | Beispiel | 14 |
| 3.2.4 | Absolute Konvergenz | 14 |
| 4 | TODO what was done after this? (Funktionen? (only?)) | 15 |
| 5 | Funktionen | 15 |
| 5.1 | Normal-Hyperbel | 15 |
| 5.1.1 | Physik-Beispiel | 15 |
| 5.2 | kubische Parabel | 15 |
| 5.2.1 | Physik-Beispiel | 15 |
| 5.2.2 | Verallgemeinerung | 15 |
| 5.3 | $y = ax^{-2}$ | 15 |
| 5.3.1 | Physik-Beispiel | 15 |
| 5.4 | Symmetrieeigenschaften der Potenzfunktionen | 15 |
| 5.5 | Potenzfunktionen als "Bausteine" in zusammengesetzten Funktionen . . . | 16 |
| 5.6 | Rationale Funktionen | 16 |
| 5.6.1 | Beispiel | 16 |
| 5.7 | Trigonometrische Funktionen | 16 |
| 5.7.1 | TODO Table Formula? | 16 |
| 5.7.2 | TODO Veranschaulichung am Einheitskreis | 16 |
| 5.7.3 | Tangens/Cotangens | 17 |
| 5.7.4 | Additionstheoreme | 17 |
| 5.8 | Exponentialfunktionen | 17 |
| 5.8.1 | Rechenregeln | 17 |
| 5.8.2 | Beispiel radioaktiver Zerfall | 17 |
| 5.9 | Kosinus hyperbolicus | 17 |
| 5.10 | Sinus hyperbolicus | 18 |
| 5.11 | Tangens hyperbolicus | 18 |
| 5.12 | Cotangens hyperbolicus | 18 |
| 5.13 | Wurzelfunktion | 18 |
| 5.13.1 | Beispiel | 18 |
| 6 | Funktionen mit Ecken und Sprüngen | 18 |
| 6.1 | Betragsfunktion | 18 |
| 6.2 | Heavyside-Stufenfunktion | 18 |
| 6.2.1 | TODO Graphik | 19 |
| 6.2.2 | Beispiel | 19 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 6.3 | "symmetrischer Kasten" der Breite $2a$ und der Höhe $\frac{1}{2a}$ (Dirak Delta Funktion) | 19 |
| 6.3.1 | TODO Graphik | 19 |
| 7 | Verkettung von Funktionen | 19 |
| 7.1 | Beispiel | 19 |
| 7.2 | Spiegelsymmetrie (Spiegelung an der y-Achse, d.h. $x \rightarrow -x$) | 19 |
| 7.2.1 | Beispiel | 20 |
| 7.2.2 | Zerlegung | 20 |
| 8 | Eigenschaften von Funktionen | 20 |
| 8.1 | Beschränktheit | 20 |
| 8.1.1 | Beispiel | 21 |
| 8.2 | Monotonie | 21 |
| 8.2.1 | Beispiel | 21 |
| 9 | Umkehrfunktion | 21 |
| 9.1 | Graph der Umkehrfunktion | 21 |
| 9.1.1 | Beispiel $y = x^2$ | 21 |
| 9.1.2 | Graphisch | 22 |
| 10 | what after this? | 22 |
| 11 | Integral und Differenzialrechnung | 22 |
| 11.1 | Die Kunst des Integrierens | 22 |
| 11.2 | Ableiten über Umkehrfunktion | 22 |
| 11.3 | Integrationsregeln | 22 |
| 11.3.1 | Lineare Zerlegung | 22 |
| 11.3.2 | Substitutionsregel | 23 |
| 11.3.3 | Partielle Integration | 23 |
| 11.3.4 | Weitere Integrationstricks | 25 |
| 11.4 | Uneigentliche Integrale | 25 |
| 11.4.1 | Unendliches Integralintervall | 25 |
| 11.5 | Cauchy Hauptwert | 25 |
| 11.5.1 | Unbeschränkter Integrand | 26 |
| 11.6 | Integralfunktionen | 26 |
| 11.7 | Gamma-Funktion | 26 |
| 11.7.1 | Definition | 26 |
| 12 | Vektoren | 27 |
| 12.1 | \mathbb{R}^3 | 27 |
| 12.1.1 | Orthonormal | 27 |
| 12.2 | Skalarprodukt und Kronecker-Symbol | 27 |
| 12.2.1 | Motivation: mechanische Arbeit | 27 |
| 12.2.2 | Definition | 27 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 12.2.3 | Spezialfälle | 27 |
| 12.2.4 | Betrag: | 27 |
| 12.2.5 | Eigenschaften | 27 |
| 12.2.6 | Orthonormalbasis der kartesischen Koordinatensystem | 28 |
| 12.2.7 | Kronecker Symbol | 28 |
| 12.2.8 | Komponentendarstellung des Skalarprodukts | 28 |
| 13 | Matrizen | 28 |
| 13.1 | Determinante | 28 |
| 13.2 | Homogenes Gleichungssystem | 28 |
| 13.3 | Levi Civita Symbol | 29 |
| 13.4 | Vektorprodukt / Kreuzprodukt | 29 |
| 13.5 | Spatprodukt | 29 |
| 13.6 | Geschachteltes Vektorprodukt | 29 |
| 13.6.1 | Beweis | 29 |
| 14 | misc | 30 |

1 Messwert und Maßeinheit

Zu jeder phys. Größe gehören Messwert und Maßeinheit, d.h. Zahlenwert · Einheit

1.1 Beispiel

Geschw. $v = \text{km s}^{-1}$

1.2 Bezeichnungen

| Abkürzung | Bedeutung |
|-----------|------------------|
| t | time |
| m | mass |
| v | velocity |
| a | acceleration |
| F | Force |
| E | Energy |
| T | Temperature |
| p | momentum |
| I | electric current |
| V | potential |

Wenn das lateinische Alphabet nicht ausreicht: griechische Buchstaben

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \Delta, \Gamma, \epsilon, \zeta, \eta, \Theta, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \Xi, \pi, \rho, \sigma, \tau, \phi, \chi, \psi, \omega, \Omega$

1.3 Maßeinheiten

Maßeinheiten werden über Maßstäbe definiert.

1.3.1 Beispiel:

1 m = Strecke, die das Licht in $\frac{1}{299792458}$ s zurücklegt.

1.3.2 SI-Einheiten

Internationaler Standard (außer die bösen Amerikaner :D)

| Größe | Einheit | Symbol |
|--------------------|-----------|--------|
| Länge | Meter | m |
| Zeit | Sekunden | s |
| Masse | Kilogramm | kg |
| elektrischer Strom | Ampere | A |
| Temperatur | Kelvin | K |
| Lichtstärke | Candela | cd |
| ebener Winkel | Radian | rad |
| Raumwinkel | Steradian | sr |
| Stoffmenge | Mol | mol |

Radian Kreisumfang $U = 2\pi r$ Bogenmaß $b = \phi r$
Umrechnung in Winkelgrad

$$2\pi \text{ rad} \stackrel{\wedge}{=} 360^\circ$$

$$\frac{\text{Winkel in Radian}}{2\pi} = \frac{\text{Winkel in Grad}}{360}$$

Steradian

$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$

Abgeleitete Einheiten

| Größe | Einheit | Symbol | Äquivalent |
|-------------------------|---------|----------|----------------------|
| Frequenz | Hertz | Hz | 1/s |
| Kraft | Newton | N | kg m s ⁻² |
| Energie | Joule | J | N m |
| Leistung | Watt | W | J s ⁻¹ |
| Druck | Pascal | Pa | N m ⁻² |
| elektrischer Ladung | Coulomb | C | A s |
| elektrisches Potenzial | Volt | V | J C ⁻¹ |
| elektrischer Widerstand | Ohm | Ω | V A ⁻¹ |
| Kapazität | Farad | F | C N ⁻¹ |
| magn. Fluss | Weber | Wb | V s ⁻¹ |

Präfix / Größenordnungen

| Präfix | $\log\{10\}$ | Abkürzung |
|--------|--------------|-----------|
| Dezi | -1 | d |
| Zenti | -2 | c |
| Milli | -3 | m |
| Mikro | -6 | μ |
| Nano | -9 | n |
| Piko | -12 | p |
| Femto | -15 | f |
| Atto | -18 | a |
| Zepta | -21 | z |
| Yokto | -24 | y |
| Deka | 1 | D |
| Hekto | 2 | h |
| Kilo | 3 | k |
| Mega | 6 | M |
| Giga | 9 | G |
| Tera | 12 | T |
| Peta | 15 | P |
| Exa | 18 | E |
| Zetta | 21 | Z |
| Yotta | 24 | Y |

1.4 Natürliches Einheitensystem der Teilchenphysik

1.4.1 Grundlage

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 6.5822 \times 10^{-22} \text{ MeV s}$$

$$\text{betrachte } \frac{\hbar c}{\text{MeV m}} = 197.33 \times 10^{-15}$$

1.4.2 natürliches Einheitensystem

$\hbar = c = 1$ In diesem Fall ist $1/\text{MeV} = 197.44 \text{ fm}$ In diesem Einheitensystem ist die Einheit von $[Energie] = [Masse] = [Länge]^{-1} = [Zeit]^{-1}$

1.5 Endliche Messgenauigkeit

z.B. Plancksches Wirkungsquantum

$$\hbar = 1.05457168(18) \times 10^{-34} \text{ J s}$$

Das bedeutet, dass der Wert von \hbar mit einer Wahrscheinlichkeit von 68 % zwischen den beiden Schranken liegt

$$1.05457150 \times 10^{-34} \text{ J s} \leq \hbar \leq 1.05457186 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

2 Zeichen und Zahlen

2.1 Symbole

| Zeichen | Bedeutung |
|---------|--|
| + | plus |
| · | mal |
| = | gleich |
| < | ist kleiner als |
| > | ist größer als |
| ∠ | Windel zwischen |
| − | minus |
| / | geteilt |
| ≠ | ungleich |
| ≤ | kleiner gleich |
| ≥ | größer gleich |
| ≈ | ungefähr gleich |
| ± | plus oder minus |
| ⊥ | steht senkrecht auf |
| ≡ | ist identisch gleich |
| ≪ | ist klein gegen |
| ≫ | ist groß gegen |
| ∞ | größer als jede Zahl |
| → ∞ | eine Größe wächst über alle Grenzen \ Limes |
| ∑ | Summe |
| ∈ | Element von |
| ⊆ | ist Untermenge von oder gleich |
| ∪ | Vereinigungsmenge |
| ∃ | es existiert ein |
| ⇒ | daraus folgt, ist hinreichende Bedingung für |
| ⇐ | gilt wenn, ist notwendige Bedingung für |
| ∃! | es existiert genau ein |
| ∉ | kein Element von |
| := | ist definiert durch |
| ∅ | Nullmenge |
| ∀ | für alle |

2.1.1 Summenzeichen

Beispiel

1.

$$\sum_{n=1}^3 a_n = a_1 + a_2 + a_3$$

2. Summe der ersten m natürlichen Zahlen

$$\sum_{n=1}^m n = 1 + 2 + \dots + (m-1) + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

1. Summe der ersten m Quadrate der natürlichen Zahlen

$$\sum_{n=1}^m n^2 = 1 + 4 + \dots + (m-1)^2 + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

1. Summe der ersten m Potenzen einer Zahl ($q \neq 1$)

$$\sum_{n=0}^m q^n = 1 + q + \dots + q^{m-1} + q^m = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}$$

sog. *geometrische Summe*

- Beweis

$$s_m = 1 + \dots + q^m$$

$$qs_m = q + \dots + q^{m+1}$$

$$s_m - qs_m = s_m(1 - q) = 1 - q^{m+1}$$

Rechenregeln

- 1.

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=m}^n a_j$$

- 2.

$$c \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^n ca_k$$

- 3.

$$\sum_{k=m}^n a_k \pm \sum_{j=m}^n nb_k = \sum_{k=m}^n (a_k \pm b_k)$$

- 4.

$$\sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=n+1}^p a_k = \sum_{k=m}^p a_k$$

- 5.

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} = \sum_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p}$$

- 6.

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^m b_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i b_j$$

falls $n = m$

$$\sum_{i,j=1}^n a_i b_j$$

2.1.2 Produktzeichen

Beispiel

$$\prod_{n=1}^3 a_n = a_1 a_2 a_3$$

2.1.3 Fakultätszeichen

$$m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-1) \cdot m = \prod_{n=1}^m n$$
$$0! = 1$$

2.2 Zahlen

Erinnerung natürliche Zahlen $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots$ ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup 0 \cup -a \mid a \in \mathbb{N}$ rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \frac{b}{a} \mid a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{Z}$ reelle Zahlen $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \text{unendliche Dezimalbrüche}$
Die reellen Zahlen lassen sich umkehrbar eindeutig auf die Zahlengerade abbilden, d.h. jedem Punkt entspricht genau eine reelle Zahl und umgekehrt

2.2.1 Rassengesetze für reelle Zahlen

Addition

- Assoziativität $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Kommutativität $a + b = b + a$
- neutrales Element $a + 0 = a$
- Existenz des Negatives $a + x = b$ hat immer genau eine Lösung: $x = b - a$ für $0 - a$ schreibe wir $-a$

Multiplikation:

- Assoziativität $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Kommutativität $a \cdot b = b \cdot a$
- neutrales Element $a \cdot 1 = a$
- Inverses $a \cdot x = b$ hat für jedes $a \neq 0$ genau eine Lösung $x = \frac{b}{a}$ für $\frac{1}{a}$ schreiben wir a^{-1}
- Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Ordnung der reellen Zahlen Die kleiner-Beziehung $a < b$, oder auch $b > a$ hat folgende Eigenschaften:

- Trichotomie: Es gilt immer genau eine Beziehung $a < b$, $a = b$ $a > b$
- Transitivität: Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$

Beispiele, Folgerungen

Rechenregeln für Potenzen $b^n := b \cdot b \cdot \dots \cdot b$ $n \in \mathbb{N}$ Faktoren

$$b^0 := 1$$

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

$$b^n \cdot b^m = b^{n+m}$$

$$(b^n)^m = b^{n \cdot m}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Betrag einer reellen Zahl

$$|a| := \begin{cases} a & a \leq 0 \\ -a & a > 0 \end{cases}$$

Eigenschaften

$$|a| \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$|a| = 0$$

nur für $a = 0$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Dreiecksungleichung

2.2.2 Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

2.2.3 binomische Formeln:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Allgemein:

$$(a \pm b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} (\pm)^k$$

(Klammer) Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2.2.4 Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{c}n = 0 \quad 1 \\n = 1 \quad 1 \quad 1 \\n = 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\n = 3 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\n = 4 \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\n = 5 \quad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\end{array}$$

2.2.5 Beweisprinzip der Vollständigen Induktion

Beispiel Für alle $n \in \mathbb{N}$ soll die Summe der ersten n Quadratzahlen bewiesen werden

$$A(n) := \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

1. Induktionsanfang $A(1) = 1$ ✓
2. Induktionsschritt Falls $A(k)$ richtig ist, wird gezeigt, dass auch $A(k+1)$ richtig ist

$$\begin{aligned}A(k+1) &= \underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + k^2}_{A(k)} + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\&= \frac{1}{6}(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1)) \\&= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \\&= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)\end{aligned}$$

2.2.6 Quadratische Ergänzung

$$\begin{aligned}x^2 + ax + b &= 0 \\x_{1,2} &= -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\end{aligned}$$

3 Folgen und Reihen

3.1 Folge

3.1.1 Definition

Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuweist.

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

3.1.2 Beispiele

- die natürlichen Zahlen selbst

$$n_{n \in \mathbb{N}} = (1, 2, 3, \dots)$$

- alternierende Folge

$$((-1)^{n+1})_{n \in \mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, \dots)$$

- harmonische Folge

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$$

- inverse Fakultäten

$$\left(\frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \dots)$$

- Folge echter Brüche

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right)$$

- geometrische Folge

$$(q^n)_{n \in \mathbb{N}} = (q, q^2, q^3, \dots)$$

charakteristische Eigenschaft der geometrischen Folge $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ q heißt Quotient der Folge allgemeines Bildungsgesetz $a_n = a_1 q^{n-1}$

- Folge der Ungeraden Zahlen (arithmetische Folge)

$$(1 + (n-1) \cdot 2)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 3, 5, 7, \dots)$$

$a_{n+1} - a_n = d$ d heißt Differenz der Folge allgemeines Bildungsgesetz $a_n = a_1 + (n-1)d$

- "zusammengesetzte Folgen" (hier Exponentialfolge)

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(2, \frac{3^2}{2}, \frac{4^2}{3}, \dots\right)$$

3.1.3 Frage

Kann man etwas über das Verhalten von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \rightarrow \infty$ aussagen, ohne tatsächlich "die Reise ins Unendliche" anzutreten?

3.1.4 Beschränktheit

Eine Folge heißt nach oben beschränkt, wenn es eine obere Schranke B für die Glieder der Folge gibt: $a_n \leq B$, d.h. $\exists B : a_n \leq B \forall n \in \mathbb{N}$ Nach unten beschränkt: $\exists A : A \geq a_n \forall n \in \mathbb{N}$

3.1.5 Monotonie

- Eine Folge heißt monoton steigend, wenn aufeinanderfolgende Glieder mit wachsender Nummer immer größer werden: $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton steigend $a_n < a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- monoton fallend $a_n \geq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton fallend $a_n > a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

3.1.6 Konvergenz

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen a oder hat den Grenzwert a , wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a - a_n| < \epsilon \forall n > N(\epsilon)$ Wir schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Beispiel

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{\sqrt{n}}) = 1$

Grenzwertfreie Konvergenzkriterien

- jede monoton wachsend, nach oben beschränkte Folge ist konvergent, entsprechend ist jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge konvergent
- Cauchy-Kriterium: Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a_m| < \epsilon \forall n, m > N(\epsilon)$$

Für harmonische Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$

$$|a_n - a_m| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| = |\frac{m-n}{mn}| < |\frac{m}{mn}| = \frac{1}{n} < \epsilon \text{ für } n > N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$$

3.2 Reihen (unendliche Reihen)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, Die Folge

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k, n \in \mathbb{N}$$

der Partialsumme heißt (unendliche) Reihe und wird oft mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet Konvergiert die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so wird ihr Grenzwert ebenfalls mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet

3.2.1 Bemerkung

Ergebnisse für Folgen gelten auch für Reihen

3.2.2 Rechenregeln für konvergente Reihen

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ zwei konvergente Reihen und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind auch die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + b_k, \sum_{k=1}^{\infty} a_k - b_k, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$$

konvergent und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Bemerkung: Für das Produkt zweier unendlicher Reihen gilt i.A. keine so einfache Formel

3.2.3 Beispiel

geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^m q^n \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \text{ für } q < 1, q \neq 0$$

3.2.4 Absolute Konvergenz

Eine Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

heißt absolut konvergent, wenn die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert. Absolut konvergente Reihen können ohne Änderung der Grenzwertes umgeordnet werden, d.h. jede ihrer Umordnungen konvergiert wieder und zwar immer gegen den gleichen Grenzwert.

4 TODO what was done after this? (Funktionen? (only?))

5 Funktionen

5.1 Normal-Hyperbel

$$y = \frac{1}{x} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

5.1.1 Physik-Beispiel

- Boyle-Mariottesches Gesetz
- Druck p eines idealen Gases in einem Volumen V bei konstanter Temperatur und Gasmenge: $p = \frac{\text{cons}}{V}$

5.2 kubische Parabel

$$y = ax^3$$

5.2.1 Physik-Beispiel

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

5.2.2 Verallgemeinerung

$$y = ax^n \quad n \in \mathbb{N}$$

5.3 $y = ax^{-2}$

5.3.1 Physik-Beispiel

Coulomb Gesetz der Elektrostatik

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

5.4 Symmetrieeigenschaften der Potenzfunktionen

$$y = f(x) = x^n$$

- gerade n : f ist symmetrisch, d.h. $f(-x) = f(x)$
- ungerade n : f ist antisymmetrisch, d.h. $f(-x) = -f(x)$

5.5 Potenzfunktionen als "Bausteine" in zusammengesetzten Funktionen

Polynom m-ten Grades

$$y = P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m = \sum_{k=0}^m a_k x^k$$

5.6 Rationale Funktionen

$$y = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q_n(x) \neq 0\}$$

$P_m(x)$ Polynom m-ten Grades, $Q_n(x)$ n-ten Grades

5.6.1 Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

"Lorentz-Verteilung beschreibt die Linienbreite einer Spektrallinie"

5.7 Trigonometrische Funktionen

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \sin \beta$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \cot \beta = \frac{1}{\cot \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

| α | $\sin \alpha$ | $\cos \alpha$ | $\tan \alpha$ |
|----------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 30° | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| 45° | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 |
| 60° | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |
| 90° | 1 | 0 | $\rightarrow \infty$ |

5.7.1 TODO Table Formula?

5.7.2 TODO Veranschaulichung am Einheitskreis

$\sin \alpha = y$ Periodische Erweiterung auf $\alpha < 0$, $\alpha > \frac{\pi}{2}$

Periodische Funktion:

$$\sin x + 2\pi = \sin x \quad \text{Periode: } 2\pi$$

$$\cos x + 2\pi = \cos x \quad \text{Periode: } 2\pi$$

Beispiel

$$\sin x + \pi = -\sin x$$

$$\cos x + \pi = -\cos x$$

$$\cos x = \sin \frac{\pi}{2} - x$$

TODO Graphik

5.7.3 Tangens/Cotangens

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

TODO Graphik

5.7.4 Additionstheoreme

$$\sin \alpha \pm \beta = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha \pm \beta = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

5.8 Exponentialfunktionen

$$y = f(x) = b^x \quad b > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

5.8.1 Rechenregeln

$$b^x b^y = b^{x+y} \quad (b^x)^y = b^{xy}$$

natürliche Exponentialfunktion mit Zahl e als Basis

$$y = f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

5.8.2 Beispiel radioaktiver Zerfall

$$N(t) = N(0)e^{\frac{-t}{\tau}}$$

5.9 Kosinus hyperbolicus

$$y = \cosh x := \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

5.10 Sinus hyperbolicus

$$y = \sinh x := \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

Es gilt:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

5.11 Tangens hyperbolicus

$$y = \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

5.12 Cotangens hyperbolicus

$$y = \coth x := \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

5.13 Wurzelfunktion

Umkehrfunktion der Potenzfunktionen

$$y = f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{Z}$$

Wurzelfunktion:

$$y = f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

n gerade: vor der Umkehrung ist die Einschränkung des Definitionsbereichs auf $x \geq 0$ notwendig

5.13.1 Beispiel

$$y = f(x) = x^2 + 1 \quad x \geq 0$$

Umkehrfunktion:

$$y = \sqrt{x - 1}$$

6 Funktionen mit Ecken und Sprüngen

6.1 Betragsfunktion

$$y = |x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

6.2 Heavyside-Stufenfunktion

$$y = \Theta(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

6.2.1 TODO Graphik

6.2.2 Beispiel

$$y = \Theta(x)\Theta(-x + a)$$

TODO Graphik

6.3 "symmetrischer Kasten" der Breite $2a$ und der Höhe $\frac{1}{2a}$ (Dirak Delta Funktion)

$$\Theta_a(x) := \frac{\Theta(x+a)\Theta(-x+a)}{2a}$$
$$\lim_{a \rightarrow 0} \Theta_a = \text{"(Dirak) } \delta\text{-Funktion"}$$

6.3.1 TODO Graphik

7 Verkettung von Funktionen

Seien

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$$

mit $w_g \subseteq D_f$, dann ist die Funktion $f \circ g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \quad \forall x \in D_g$$

7.1 Beispiel

$$z = g(x) = 1 + x^2 \quad W_g : z \geq 1$$

$$y = f(z) = \frac{1}{z} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

also $W_g \subset D_f$, sodass

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

7.2 Spiegelsymmetrie (Spiegelung an der y-Achse, d.h. $x \rightarrow -x$)

Eine Funktion $f(x)$ heißt

- gerade(symmetrisch) wenn $f(-x) = f(x)$
- ungerade (antisymmetrisch) wenn $f(-x) = -f(x)$

7.2.1 Beispiel

gerade Funktionen

- $f(x) = x^{2n} \quad n \in \mathbb{N}$
- $f(x) = \cos x$
- $f(x) = |x|$

ungerade Funktionen

- $f(x) = x^{2n+1}$
- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \sin(x)$

keins von beidem

- $f(x) = sx + c$

7.2.2 Zerlegung

Jede Funktion lässt sich in einen geraden und ungeraden Anteil zerlegen

- gerader Anteil:

$$f_+(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)) = f_+(-x)$$

- ungerader Anteil:

$$f_-(x) = \frac{1}{2} (f(x) - f(-x)) = -f_-(-x)$$

- check:

$$f_+(x) + f_-(x) = f(x) \quad \checkmark$$

8 Eigenschaften von Funktionen

8.1 Beschränktheit

f heißt nach oben beschränkt im Intervall $[a, b]$, wenn es eine obere Schranke gibt, d.h.

$$\exists B \in \mathbb{R} : f(x) \leq B \quad \forall x \in [a, b]$$

analog: nach unten beschränkt

$$\exists A \in \mathbb{R} : f(x) \geq A \quad \forall x \in [a, b]$$

8.1.1 Beispiel

$f(x) = x^2$ durch $A = 0$ nach unten beschränkt
 $f(x) = \Theta(x)$ $B = 1$, $A = 0$

8.2 Monotonie

Eine Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ heißt monoton steigend im Intervall $[a, b] \subseteq D_f$, wenn aus $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$ stets folgt $f(x_1) \leq f(x_2)$. Gilt sogar $f(x_1) < f(x_2)$ so heißt f streng monoton steigend im Intervall $[a, b]$. Analog heißt f monoton (streng monoton) fallend, wenn stets folgt $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

8.2.1 Beispiel

$f(x) = x^3$ streng monoton steigend

9 Umkehrfunktion

Sei $f : D_f \rightarrow W_f$ eineindeutig (bijektiv), dann kann man die Gleichung $y = f(x)$ eindeutig nach x auflösen

$$x = f^{-1}(y) := g(y) \quad D_g = W_f, \quad W_g = D_f$$

$$f^{-1} = g : W_f \rightarrow D_f$$

Die ursprüngliche Abbildung $y = f(x)$ und die Umkehrabbildung $x = f^{-1}(y) = g(y)$ heben sich in ihrer Wirkung auf

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

9.1 Graph der Umkehrfunktion

1. Gegebenenfalls Einschränkung von D_f , sodass eine bijektive Funktion vorliegt
2. Auflösen der Gleichung $y = f(x) \implies x = f^{-1}(y)$
3. Umbenennung der Variablen: die unabhängige Variable y wird wieder x genannt, die abhängige wieder y : $y = f^{-1}(x)$

9.1.1 Beispiel $y = x^2$

1. Einschränkung D_f auf $x \geq 0$
2. $y = x^2, x \geq 0 \iff x = \sqrt{y}$
3. Umbenennung: $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

9.1.2 Graphisch

Spiegelung an $y = x$

10 what after this?

11 Integral und Differenzialrechnung

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Hauptsatz:

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

| $F(x) = \int f(x) dx$ | $f(x)$ | Bemerkungen |
|-----------------------|------------|----------------------------|
| const | 0 | |
| x^r | rx^{r-1} | $r \in \mathbb{R}$ |
| $\frac{x^{r+1}}{r+1}$ | x^r | $-1 \neq r \in \mathbb{R}$ |

11.1 Die Kunst des Integrierens

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_a^b$$

11.2 Ableiten über Umkehrfunktion

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

11.3 Integrationsregeln

11.3.1 Lineare Zerlegung

$$\int_{a_1}^{a_2} cf(x) + bg(x) dx = c \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + b \int_{a_1}^{a_2} g(x) dx$$

Beispiel

$$F = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^2 dx = \int_0^1 1 - 2x^2 + x^4 dx = \int_0^1 1 dx - 2 \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x^4 dx = \frac{8}{15}$$

11.3.2 Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

merke: $\frac{g(x)}{dx} dx = g'(x)dx = dy$

$$y = g(x), \quad \frac{dy}{dx} = g'(x), \quad dy = g'(x)dx$$

Beweis F sei die Stammfunktion zu f , $F' = f$

$$(F(g(t)))' = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = F(g(t)) \Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F(x) \Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

Beispiel

•

$$\int_1^5 \sqrt{2x+1}dx = \int_1^9 \sqrt{y} \frac{1}{2}dy = \frac{26}{3}$$

$$y = 2x + 1 \quad y' = g'(x) = \frac{dy}{dx} = g'(x) = 2 \implies dy = 2dx \implies \frac{1}{2}dy = dx$$

•

$$\int_0^b te^{-\alpha t^2} dt = -\frac{1}{2\alpha} \int_0^{-\alpha b^2} e^y dy = -\frac{1}{2\alpha} (e^{-\alpha b^2} - 1)$$

$$y = g(t) = -\alpha t^2 \implies \frac{dy}{dt} = -2\alpha t \implies dy = -2\alpha t dt \implies dt = -\frac{1}{2\alpha t} dy$$

•

$$\int_0^T \cos \omega t dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega T} dy$$

•

$$\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{1}{y} dy = \ln |y| \Big|_{g(a)}^{g(b)}$$

•

$$\int \frac{dx}{ax \pm b} = \frac{1}{a} \ln |ax \pm b| + c$$

•

$$\int_a^b g^n(x)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} y^n dy$$

11.3.3 Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Beweis

$$F(x) = f(x)g(x) \implies F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

$$f(x)g(x) \Big|_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

$$f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Beispiel

•

$$\int_a^b x \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b x dx$$

•

$$\int 1 \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

•

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x$$

Kreisfläche

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\int_a^b \sqrt{1 - x^2} dx = \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} \cos t \cos t dt = \frac{1}{2}(\arcsin b + b\sqrt{1 - b^2} - \arcsin a - a\sqrt{1 - a^2})$$

$$x = \sin t \implies t = \arcsin x, \quad \frac{dx}{dt} = \cos t, \quad dx = \cos t dt$$

$$\int \cos t \cos t = \sin t \cos t + \int \sin^2 t dt = \sin t \cos t + \int 1 - \cos^2 t dt = \frac{\sin t \cos t + t}{2}$$

In Polarkoordinaten

$$y = \sin t$$

$$x = \cos t$$

$$dx = -\sin t dt$$

$$dA = y dx = -\sin^2 t dt$$

$$A = \int_0^\pi \sin^2 t = \frac{\pi}{2}$$

Zerlegung

$$\begin{aligned} dA &= 2\pi r dr \\ \int dA &= \int_0^R 2\pi r dr = 2\pi \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^R = \pi R^2 \end{aligned}$$

11.3.4 Weitere Integrationstricks

Partialbruchzerlegung \implies Integration rationaler Funktionen

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{1-x^2} \text{ mit } \{-1, 1\} \notin [a, b] \\ 1-x^2 &= (1-x)(1+x) \\ \frac{1}{1-x^2} &= \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x} = \frac{\alpha(1+x) + \beta(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{\alpha + \beta + x(\alpha - \beta)}{1-x^2} \implies \alpha = \beta \frac{1}{2} \\ \int_a^b \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \left(\int_a^b \frac{1}{1-x} + \int_a^b \frac{1}{1+x} \right) \end{aligned}$$

11.4 Uneigentliche Integrale

11.4.1 Unendliches Integralintervall

Definition Sei $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Intervall $[a, R)$, $a < R < \infty$ (Riemann-)integrierbar ist. Falls der Grenzwert $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$ existiert setzt man

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$$

Beispiel

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{1}{s-1} & s > 1 \\ \infty & s \leq 1 \end{cases}$$

11.5 Cauchy Hauptwert

$$P \int_{-\infty}^\infty f(x) dx := \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c f(x) dx$$

P := "principal Value"

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty x^{2n-1} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^c x^{2n-1} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b x^{2n-1} dx = \infty \\ P \int_{-\infty}^\infty x^{2n-1} dx &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c x^{2n-1} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} \underbrace{(c^{2n} - (-c)^{2n})}_{=0} \right) = 0 \end{aligned}$$

11.5.1 Unbeschränkter Integrand

Situation: Integrand wird an einer Stelle $x_0 \in [a, b]$ unbeschränkt

Definition Sei $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[a + \eta, b]$, $0 < \eta < b - a$ (Riemann-)integrierbar ist. Falls der Grenzwert $\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{a+\eta}^b f(x) dx$ existiert, heißt das Integral $\int_a^b f(x) dx$ konvergent

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{a+\eta}^b f(x) dx$$

Beispiel

$$\int_0^b \frac{1}{x^{1-\epsilon}} dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\eta}^b \frac{1}{x^{1-\epsilon}} dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (b^{\epsilon} - \eta^{\epsilon}) = \frac{1}{\epsilon} b^{\epsilon}$$

Principal value

$$P \int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_a^{x_0-\eta} f(x) dx + \int_{x_0+\eta}^b f(x) dx$$

11.6 Integralfunktionen

$$\ln x = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

$$\arctan x = \int_0^y \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx$$

Elliptisches Integral

11.7 Gamma-Funktion

11.7.1 Definition

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Satz: Es gilt $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(m+1) = m! \forall n \in \mathbb{N}$, $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1$$

$$\Gamma(x+1) = \int_{\epsilon}^R t^x e^{-t} dt = \underbrace{t^x e^{-t} \Big|_{\epsilon}^R}_{R \rightarrow \infty} + x \int_{\epsilon}^R t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$f(t) = -e^{-t} \iff f'(t) = e^{-t}$$

$$g(t) = t^x \implies x t^{x-1} = g'(t)$$

12 Vektoren

12.1 \mathbb{R}^3

12.1.1 Orthonormal

Länge eins, senkrecht aufeinander und sie bilden eine Basis, also jeder Vektor hat genau eine Darstellung:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \sum_{k=1}^3 a_k \vec{e}_k = \underbrace{\sum_{k=1}^3 a_k \vec{e}_k}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

12.2 Skalarprodukt und Kronecker-Symbol

12.2.1 Motivation: mechanische Arbeit

12.2.2 Definition

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

12.2.3 Spezialfälle

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \implies \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$$

\vec{a} und \vec{b} antiparallel:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \implies \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

12.2.4 Betrag:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}|^2 = a^2$$

12.2.5 Eigenschaften

- Kommutativgesetz

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$

- Homogenität

$$\langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \lambda \vec{b} \rangle$$

- Distributivgesetz

$$\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$$

-

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0 \quad \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \iff \vec{a} = 0$$

12.2.6 Orthonormalbasis der kartesischen Koordinatensystem

Basisvektoren $\vec{e}_k, k = 1, 2, 3$ Orthogonalität $\langle \vec{e}_k, \vec{e}_l \rangle = 0 \quad l \neq k$ Für $k = l$: $\langle \vec{e}_k, \vec{e}_k \rangle = \cos(0) = 1$ Orthonormalität

12.2.7 Kronecker Symbol

$$\delta_{kl} := \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

Entspricht Komponenten der Einheitsmatrix Symmetrie gegen Vertauschung der Indizes
 $\delta_{kl} = \delta_{lk}$ Spur:

$$\delta_{kk} = \underbrace{\sum_{k=1}^3 \delta_{kk}}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}} = 3$$

12.2.8 Komponentendarstellung des Skalarprodukts

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^3 a_k \vec{e}_k = \underbrace{a_k \vec{e}_k}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

$$\vec{b} = \sum_{k=1}^3 b_k \vec{e}_k = \underbrace{b_k \vec{e}_k}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \left(\sum_{k=1}^3 a_k \vec{e}_k \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^3 b_l \vec{e}_l \right) = \sum_{k,l=1}^3 a_k b_l \underbrace{\langle \vec{e}_k, \vec{e}_l \rangle}_{=\delta_{kl}} = \sum_{k=1}^3 a_k b_k$$

13 Matrizen

13.1 Determinante

$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)})$ Summe über alle Permutationen von S_n , Vorzeichen der Permutation ist positiv, wenn eine gerade Anzahl an Vertauschungen notwendig ist, und entsprechend negativ bei einer ungeraden Anzahl.

13.2 Homogenes Gleichungssystem

$$A\vec{x} = 0 \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + x_3 a_{23} & = & 0 \\ \underbrace{a_{31}}_{\vec{a}_1} & \underbrace{a_{32}}_{\vec{a}_2} & \underbrace{a_{33}}_{\vec{a}_3} & 0 \end{matrix}$$

sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear unabhängig, dann gibt es nur die Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$
 Nichttriviale Lösung nur wenn $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear abhängig $\implies \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sodass z.B.
 $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2 + \mu \vec{a}_3$ Wenn $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear unabhängig, dann $\det A = 0$.

13.3 Levi Civita Symbol

$$\varepsilon_{ijk\dots} = \begin{cases} +1, & \text{falls } (i, j, k, \dots) \text{ eine gerade Permutation von } (1, 2, 3, \dots) \text{ ist,} \\ -1, & \text{falls } (i, j, k, \dots) \text{ eine ungerade Permutation von } (1, 2, 3, \dots) \text{ ist,} \\ 0, & \text{wenn mindestens zwei Indizes gleich sind.} \end{cases} \quad (1)$$

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \prod_{1 \leq p < q \leq n} \frac{i_p - i_q}{p - q} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{k,l,m} = \delta_{k1}(\delta_{l2}\delta_{m3} - \delta_{l3}\delta_{m2}) + \delta_{k2}(\delta_{l3}\delta_{m1} - \delta_{l1}\delta_{m3}) + \delta_{k3}(\delta_{l1}\delta_{m2} - \delta_{l2}\delta_{m1}) \quad (3)$$

13.4 Vektorprodukt / Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$= \vec{e}_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad (6)$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3, \quad (7)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k$$

13.5 Spatprodukt

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c}| = \text{Volumen eines Spats}$$

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \vec{a} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \vec{c}$$

13.6 Geschachteltes Vektorprodukt

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{v}) = (\vec{a} \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \vec{b}) \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \vec{b})$$

13.6.1 Beweis

$$\vec{a} = (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times (\varepsilon_{ijk} b_i c_j \vec{e}_k) = \varepsilon_{pqm} a_p \varepsilon_{ijk} b_i c_j \vec{e}_m$$

14 misc

- mathe für physiker vs. analysis
- klausuren gebündelt
- auslandssemester