Lineare Algebra II (Vogel)

Robin Heinemann

28. April 2017

Inhaltsverzeichnis

18 Eigenwerte

In diesem Abschnitt sei $n \in \mathbb{N}$, V ein K-VR und $\varphi \in \operatorname{End}_K(V)$.
Frage: V endlichdim. Existiet eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V, sodass $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ eine Diagonalmatrix ist, das heißt

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$?
Für $i = 1, \dots, n$ wäre dann $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$

Definition 18.1 $\lambda \in K, v \in V$

- λ heißt Eigenwert von $\varphi \overset{\text{Def}}{\iff} \exists v \in V, v \neq 0 : \varphi(v) = \lambda v$
- v heißt Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \overset{\text{Def}}{\iff} v \neq 0 \land \varphi(v) = \lambda v$
- φ heißt diagonalisierbar $\overset{\text{Def}}{\iff} V$ besitzt eine Basis aus EV von φ

(Falls V endlichdimensional, ist die äquivalent zu: Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

)
Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisiebarkeit einer Matrix $A \in M(n \times n, K)$ sind über den Endomorphismus $\tilde{A} : K^n \to K^n$ definiet.

Bemerkung 18.2 $A \in M(n \times n, K)$. Dann sind äquivalent:

1. A ist diagonalisiebar.
2. Es gibt eine Basis von K^n aus Eigenvektoren von A
3. Es gibt ein $S \in \mathrm{GL}(n, K), \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$
4. A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix

In diesem Fall steht in den Spalten von S^{-1} eine Basis des K^n aus EU von A, und für jede Matrix $A \in M(n \times n, K)$ mit der Eigenschaft, dass die Spalten von S^{-1} eine Basis des K^n aus EV von A bilden, dann ist SAS^{-1} eine Diagonalmatrix (mit den EW auf der Diagonalen.)

Beweis Äquivalenz: \ 1. $\iff$ 2. Definition, 2. $\iff$ 3. aus Basiswechselsatz (16.6), 3. $\iff$ 4. aus Definition Ähnlichkeit (16.12)

Zusatz: Sei $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies A(S^{-1}e_j) = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j$.

Wegen $S^{-1} \in \mathrm{GL}(n, K)$ ist $S^{-1}e_j \neq 0$, das heißt S^{-1} ist EV von A zum EW λ_j

Wegen $S^{-1} \in \mathrm{GL}(n, K)$ ist $(S^{-1}e_1, \dots, S^{-1}e_n)$ eine Basis des K^n aus EV von A.

Sei $S \in \mathrm{GL}(n, K)$, das heißt die Spalten von S^{-1} eine Basis des K^n aus EV von A bilden, das heißt für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ ist $AS^{-1}e_j = \lambda_j S^{-1} e_j$ für ein $\lambda_j \in K$.

$$\implies AS^{-1}e_j = S^{-1}\lambda_j e_j = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j \implies SAS^{-1}e_j = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j, j = 1, \dots, n$$

$$\implies SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ □

Beispiel 18.3
$K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$

1. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ Es ist $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, das heißt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist EV von φ zum EW 1.

   $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, also ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ EV von φ zum EW -1. Somit: $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^2$ aus EV von φ, das heißt φ ist diagonalisierbar.

   In Termen von Matrizen: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist diagonalisiebar, und mit $S =$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ist dann ist $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Achtung: Das φ diagonalisiebar ist, heißt nicht, dass jeder Vektor aus $V = \mathbb{R}^2$ ein EV von φ ist, zum Beispiel ist $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ (= Drehung um $\frac{\pi}{2}$). hat keinen EW. Beweig dafür: später.

Ziel: Suche Kriterien für Diagonalisiebarkeit.

Bemerkung 18.4 $v_1, \dots, v_m$ EV von φ zu paarweise verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$. Dann ist $(v_1, \dots, v_m)$ linear unabhängig, insbesondere ist $m \leq \dim V$. Insbesondere gilt: ist V endlichdimesional, dann hat φ höchstens $\dim(v)$ Eigenwerte.

Beweis per Induktion nach m:
IA: $m = 1 : v_1 \neq 0$, da v_1 EV $\implies (v_1)$ linear unabhängig.
IS: sei $m \geq 2$, und die Aussage für $m - 1$ bewiesen.
Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ mit $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m = 0$. Außerdem: $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_1 v_m = 0$

$$\begin{aligned} \implies \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \dots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1)v_m &= 0 \\ \alpha_2 \lambda_2 - \lambda_1 = \dots = \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1) &= 0 \\ \implies \alpha_2 = \dots = \alpha_m &= 0 \\ \implies \alpha_1 v_1 = 0 \implies \alpha_1 = 0 \implies (v_1, \dots, v_w) &\text{ linear unabhängig} \end{aligned}$$ □

Folgerung 18.5 V endlichdemensional, φ hage n paarweise verschiedene EW, wobei $n = \dim V$ Dann ist φ diagonalisiebar.

Beweis Für $i = 1, \dots, n$ sei v_i ein EV von φ zum EW $\lambda_i \implies (v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig, wegen $n = \dim V$ ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V aus EV von φ □

Definition 18.6 $\lambda \in K$
$\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ heißt der Eigenraum von φ bezüglich λ.
$\mu_{geo}(\varphi, \lambda) := \dim \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda)$ heißt die geometrische Vielfachheit von λ.
Für $A \in M(n \times n, K)$ setzen vir $\mathrm{Eig}(A, \lambda) := \mathrm{Eig}\big(\tilde{A}, \lambda\big), \mu_{geo}(A, \lambda) := \mu_{geo}\big(\tilde{A}, \lambda\big)$.

Bemerkung 18.7 $\lambda \in K$. Dann gilt:

1. $\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda)$ ist ein UVR von V.
2. λ ist EW von $\varphi \iff \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\}$.
3. $\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) \quad \{0\}$ ist die Menge der zu λ gehörenden EV von φ.

4. $\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) = \ker(\lambda \mathrm{id}_V - \varphi)$, insbesondere ist $\mathrm{Eig}(A, \lambda) = \ker(\lambda E_m - \varphi) = \mathrm{Lös}(\lambda E_n - A, 0)$ für $A \in M(n \times n, K)$

5. Sind $\lambda_1, \lambda_2 \in Kmit \lambda_1 \neq \lambda_2$, dann $\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_1) \cap \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_2) = \{0\}$

Beweis 4. Es ist $v \in \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) \iff \varphi(v) = \lambda v \iff \lambda v - \varphi(v) = 0 \iff (\lambda \mathrm{id}_V - \varphi)(v) = 0 \iff v \in \ker(\lambda \mathrm{id}_V - \varphi)$ Es ist $\mathrm{Eig}(A, \lambda) = \ker\left(\lambda \mathrm{id}_{K^n} - \tilde{A}\right) = \ker\left(\widetilde{\lambda E_n - A}\right) = \ker(\lambda E_n - A) = \mathrm{Lös}(\lambda E_n - A, 0)$

1. aus 4.

2. λ EW von $\varphi \Leftrightarrow \exists v \in V, v \neq 0$ mit $\varphi(v) = \lambda v \Leftrightarrow \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\}$.

3. klar.

5. Sei $\lambda_1 \neq \lambda_2, v \in \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_1) \cap \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_2) \Rightarrow \lambda_1 v = \varphi(v) = \lambda_2 v \Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v = 0 \Rightarrow v = 0$ □

Bemerkung 18.8 V endlichdimesional, $\lambda \in K$. Dann sind äquivalent:

1. λ ist EW von φ

2. $\det(\lambda \mathrm{id}_V - \varphi) = 0$

Beweis 1. $\Leftrightarrow \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\} \Rightarrow \ker(\lambda \mathrm{id}_V - \varphi) \neq \{0\} \Rightarrow \lambda \mathrm{id}_V - \varphi$ nicht injektiv $\Rightarrow$ $\lambda \mathrm{id}_V - \varphi$ kein Isomorphismus $\Rightarrow \det(\lambda \mathrm{id}_V - \varphi) = 0$. □

Definition 18.9 K Körper, $A = \left(a_{ij}\right) \in M(n \times n, K)$

$$\chi_A^{char} := \det(tE_n - A) = \det \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ -a_{n1} & \dots & & t - a_{nn} \end{pmatrix} \in K[t]$$

heißt das *charakteristische Polynom von A.

Anmerkung Hiefür nötig: Determinanten von Matrizen mit Einträgen in einem kommutativen Ring.
In manchen Büchern $\chi_A^{char} = \det(A - tE_n)$ (schlecht)

Beispiel 18.10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$$
$$\Rightarrow A\chi_a^{char} = \det \begin{pmatrix} t - 1 & -1 \\ -3 & t - 4 \end{pmatrix} = (t-1)(t-4) - 6 = t^2 - 5t - 2$$

Bemerkung 18.11 $A, B \in M(n \times n, K), A \approx B$.
Dann ist $\chi_A^{char} = \chi_B^{char}$.

Beweis $A \approx B \Rightarrow \exists S \in \mathrm{GL}(n, K) : B = SAS^{-1}$

$$\Rightarrow tE_n - B = tE_n - SAS^{-1} = SS^{-1}tE_n - SAS^{-1} = StE_nS_{-1} - SAS^{-1}1 = S(tE_n - A)S^{-1}$$

$$\Rightarrow \chi_B^{char} = \det(tE_n - B) = \det(S(tE_n - A)S^{-1}) = \det(S)\det(tE_n - A)\det(S^{-1}) =$$

$$\underbrace{\det(S)\det(S)^{-1}}_{=1}\det(tE_n - A) = \chi_A^{char} \qquad \square$$

Definition 18.12 V endlichdim, $n = \dim V$, $\mathcal{B}$ Basis von V, $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$

$$\chi_\varphi^{char} := \chi_A^{char} = \det(tE_n - A) \in K[t]$$

heißt das charakteristische Polynom von φ.

Anmerkung χ_φ^{char} ist wohldefiniert, dann: Ist $\mathcal{B}'$ eine weitere Basis von V, $A' = M_{\mathcal{B}'}\varphi$, dann ist $A \approx A'$ und deshalb nach 18.11: $\chi_A^{char} = \chi_{A'}^{char}$.

Satz 18.13 V endlichdimensional, $n = \dim V$. Dann gilt:

1. χ_φ^{char} ist ein normiertes Polynom von Grad n:

$$\chi_\varphi^{char} = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \cdots + c_0$$

mit $c_0 = (-1)^n \det \varphi$, $c_{n-1} = -^{(\varphi)}$ (vgl. Übung zur Spur)

2. Die Nullstellet von χ_φ^{char} sind genau die EW von φ:

$$\lambda \in K \text{ ist EW von } \varphi \Leftrightarrow \chi_\varphi^{char}\lambda = 0$$

Beweis Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V, $A := M_{\mathcal{B}}(\varphi) \in M(n \times n, K)$

1.

$$\chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det\underbrace{(tE_n - A)}_{=:B=(B_{ij})} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) B_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot B_{n,\sigma(n)}$$

$$= (t - a_{11} \cdot \dots \cdot (t - a_{nn})) + \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n \ \{\mathrm{id}\}} \mathrm{sgn}(\sigma) B_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot B_{n,\sigma(n)}}_{:=g}$$

Für $\sigma \in S_n \ \{\mathrm{id}\}$ treten in $B_{1,\sigma(1)}, \dots, B_{n,\sigma(n)}$ höchstens $n-2$ Diagonalelemente auf, also $\deg(g) \leq n - 2$.

$$\Rightarrow \chi_\varphi^{char} = t^n - (a_{11} + \dots + a_{nn})t^{n-1} + \text{ Terme kleineren Grades}$$

insbesondere:

$$c_{n-1} = -(a_{11} + \dots + a_{nn}) = -^{A} = -^{\varphi}$$

Es ist

$$c_0 = \chi_\varphi^{char}(0) = (\det(tE_n - A))(0) = \det(0E_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

2. Aus $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ folgt $\lambda E_n - A = M_{\mathcal{B}}(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi)$. Also:

$$\begin{aligned}\chi_\varphi^{char}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\det(tE_n - A))(\lambda) = 0 \Rightarrow \det(\lambda E_n - A) = 0 \Leftrightarrow \det(M_{\mathcal{B}}(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi)) = 0 \\ \Rightarrow \det(\lambda \operatorname{id}_V - \varphi) = 0 \Leftrightarrow \lambda \text{ ist EW von } \varphi\end{aligned}$$ $\square$

Definition 18.14 $\lambda \in K$

$$\mu_{alg}(\varphi, \lambda) := \mu\big(\chi_\varphi^{char}, \lambda\big)$$

heißt die **algebraische Vielfachheit**

Beispiel 18.15

1. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Es ist $\chi_\varphi^{char} = \chi_\varphi^{char} = \det\begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{pmatrix} =$
   $t^2 - 1 = (t-1)(t+1) \in \mathbb{R}[t]$ □ EW von $\varphi : 1, -1$.
   Es ist $\mu_{alg}(\varphi, 1) = 1, \mu_{alg}(\varphi, -1) = 1$

   $$\operatorname{Eig}(\varphi, 1) = \operatorname{Eig}(A, 1) = \text{Lös}(E_2 - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

   also $\mu_{geo}(\varphi, 1) = \dim \operatorname{Eig}(\varphi, 1) = 1$

   $$\operatorname{Eig}(\varphi, -1) = \operatorname{Eig}(A, -1) = \text{Lös}((-1) \cdot E_2 - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, 0\right) = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

   also $\mu_{geo}(\varphi, -1) = 1$.

2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Es ist $\chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det\begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} =$
   $t^2 + 1, \chi_\varphi^{char}$ hat keine NS in $\mathbb{R} \Rightarrow \varphi$ hat keine EW.

3. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Es ist $\chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det\begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix} =$
   $(t-1)^2 \Rightarrow 1$ ist einziger EW von φ, es ist $\mu_{alg}(\varphi, 1) = 2$

   $$\operatorname{Eig}(\varphi, 1) = \operatorname{Eig}(A, 1) = \text{Lös}(1E_2 - A, 0)\ \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

   $\Rightarrow \mu_{geo}(\varphi, 1) = 1. \Rightarrow \varphi$ ist nicht diagonalisierbar.

Satz 18.16 V endlichdimensional, $n = \dim V$

1. Ist φ diagonalisierbar, dann ist $\chi_\varphi^{char} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, nicht notwendig verschieden, das heißt χ_φ^{char} zerfällt in Linearfaktoren.

2. Ist $\chi_\varphi^{char} = (t-\lambda_1)\cdot \dots \cdot (t-\lambda_n)$ mit paarweise verschiedene $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, dann ist φ diagonalisierbar.

Beweis 1. Sei φ diagonalisierbar $\to V$ besitzt Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ aus EV zu EW $\lambda_i \in K$.

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_\varphi^{char} = \det \begin{pmatrix} t-\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t-\lambda_n \end{pmatrix} = (t-\lambda_1)\cdot \dots \cdot (t-\lambda_n)$$

2. Aus $\chi_\varphi^{char} = (t-\lambda_1)\cdot \dots \cdot (t-\lambda_n)$ wit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ paarweise verschieden $\Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind paarweise verschiedene EW von $\varphi \Rightarrow \varphi$ diagonalisierbar. $\square$

Bemerkung 18.17 V endlichdimensional, $n = \dim V$, λ EW von φ. Dann gilt:

$$1 \le \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \le \mu_{alg}(\varphi, \lambda)$$

Beweis Sei $(v_1, \dots, v_s)$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda) \Rightarrow s = \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \ge 1$, da λ EW von φ. Nach Basiserweiterungssatz $\exists v_{s+1}, \dots, v_n \in V$, sodass $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n)$ eine Basis von V ist.

$$\Rightarrow A := A_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & A' \end{array}\right), A' \in M((n-s)\times(n-s), K)$$

$$\Rightarrow \chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} = \det \left(\begin{array}{ccc|c} t-\lambda & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & t-\lambda & \\ \hline & 0 & & tE_{n-s} - A' \end{array}\right) = (t-\lambda)^s \det(tE_{n-s} - A') = (t-\lambda)^s \chi_{A'}^{char}$$

$$\Rightarrow \mu_{geo}(\varphi, \lambda) = s \le \mu\big(\chi_\varphi^{char}, \lambda\big) = \mu_{alg}(\varphi, \lambda)$$ $\square$

Bemerkung 18.18 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ paarweise verschiedene EW von φ. Dann gilt:

$$\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \mathrm{Eig}\big(\varphi, \lambda_j\big) = \{0\} \forall i \in \{1, \dots, r\}$$

Beweis Sei $i \in \{1, \dots, r\}$. Annahme: $\exists v_i \in \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{r} \mathrm{Eig}\big(\varphi, \lambda_j\big) : v_i \neq 0$.

$$\Rightarrow \exists v_j \in \mathrm{Eig}\big(\varphi, \lambda_j\big), j = 1, \dots, r, j \neq i : v_i = v_1 + \dots + v_{i-1} + v_{i+1} + \dots + v_r$$

Setze $J := \{j \in \{1, \dots r\}, j \neq i \mid v_j \neq 0\} = \{j_1, \dots, j_s\}$

$\Rightarrow v_i = v_{j_1} + \dots + v_{j_s} \Rightarrow v_{j_1} + \dots + v_{j_s} + (-1)v_i = 0 \Rightarrow \big(v_{j_1}, \dots, v_{j_s}, v_i\big)$ linear abhängig ↯

$\square$

Satz 18.19 V endlichdimensional. Dann sind äquivalent:

1. φ diagonalisierbar
2. χ_φ^{char} zerfällt in Linearfaktoren und $\mu_{alg}(\varphi, \lambda) = \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \forall$ EW von φ.
3. Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen EW von φ, dann ist

$$V = \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_k)$$

In diesem Fall erhält man eine Basis von V aus EV von φ, indem man Basen von $\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_i), i = 1, \dots, k$ zusammenfügt.

Beweis 1. $\Rightarrow$ 2. Sei φ diagonalisierbar. $\Rightarrow \exists$ Basis $\mathcal{B}$ von V aus EV von φ. Wir ordnen die EV in $\mathcal{B}$ den verschiedenen EW von φ zu und gelangen so zu Familien $\mathcal{B}_i := \left(v_1^{(i)}, \dots, v_{s_i}^{(i)}\right)$ von linear unabhängigen im $\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda), i = 1, \dots, k$

a) Behauptung: $\mathcal{B}_i$ ist eine Basis von $\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_i)$, denn gezeigt: $\mathcal{B}_i$ ist ein ES von $\mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_i)$. Sei $v \in \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_i) \leq V$

$$\Rightarrow \exists \lambda^{(j)} \in K : v = \sum_{j=1}^{k} \left(\lambda_1^{(j)} v_1^{(j)} + \dots + \lambda_{s_j}^{(j)} v_{s_j}^{(j)}\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{v - \left(\lambda_1^{(i)} v_1^{(i)} + \dots + \lambda_{s_i}^{(i)} v_{s_i}^{(i)}\right)}_{\in \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_i)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \left(\lambda_1^{(j)} v_1^{(j)} + \dots + \lambda_{s_j}^{(j)} v_{s_j}^{(j)}\right) \in \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_j)$$

$$\Rightarrow v = \lambda_1^{(i)} v_1^{(i)} + \dots + \lambda_{s_i}^{(i)} v_{s_i}^{(i)}$$

a) Nach 1. ist

$$\mu_{geo}(\varphi, \lambda_1) + \dots + \mu_{geo}(\varphi, \lambda_k) = s_1 + \dots + s_k = \dim V$$

χ_φ^{char} zerfällt nach 18.16 in Linearfaktoren, somit

$$\mu_{alg}(\varphi, \lambda_1) + \dots + \mu_{alg}(\varphi, \lambda_k) = \deg\left(\chi_\varphi^{char}\right) = \dim V$$

Wegen $\mu_{geo}(\varphi, \lambda_i) \leq \mu_{alg}(\varphi, \lambda_i)$ für $i = 1, \dots, k$ folgt: $\mu_{geo}(\varphi, \lambda_i) = \mu_{alg}(\varphi, \lambda_i)$ für $i = 1, \dots, k$.

2. $\Rightarrow$ 3. Es gelte 2. Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen EW von φ. Wir setzen $W := \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_1) + \dots + \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_k)$. Wegen 18.18 ist

$$W = \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_k)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \dim W &= \dim \mathrm{Eig}(\chi, \lambda_1) + \dots + \dim \mathrm{Eig}(\varphi, \lambda_k) \\
&= \mu_{geo}(\chi, \lambda_1) + \dots + \mu_{geo}(\varphi, \lambda_k) \\
&= \mu_{alg}(\chi, \lambda_1) + \dots + \mu_{alg}(\varphi, \lambda_k) = \deg\left(\chi_\varphi^{char}\right) \\
&= \dim V
\end{aligned}$$

$\Rightarrow W = V$

3. $\Rightarrow$ 1. Es gelte 3. Sei $\mathcal{B} = \left(v_1^{(i)}, \dots, v_{s_i}^{(i)}\right)$ eine Basis von Eig $\varphi, \lambda_i \Rightarrow \mathcal{B} := \left(v_1^{(1)}, \dots, v_{s_1}^{(1)}, \dots, v_1^{(k)}, v_{s_r}^{(k)}\right)$ ist eine Basis von V aus EV von $\varphi \Rightarrow \varphi$ diagonalisierbar. $\square$

Anmerkung In der Praxis ist es in der Regel schwierig festzustellen, ob χ_φ^{char} in Linearfaktoren zerfällt oder die NS von χ_φ^{char} zu bestimmen. Für Polynome von Grad ≥ 5 existiert keine Lösungsformel zur Bestimmung der NS. (Algebra 1 Vorlesung), die NS müssen numerisch bestimmt werden.

Beispiel 18.20

1. In 18.15.3 ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist $\chi_A^{char} = (t-1)^2, \mu_{geo}(A, 1) = 1 < \mu_{alg}(A, 1) = 2 \Rightarrow A$ nicht diagonalisierbar.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$

$$\chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t-2 & 1 & 1 \\ 6 & t-1 & -1 \\ -3 & 1 & t+2 \end{pmatrix} = t^3 - t^2 - 5t - 3 = (t+1)^2(t-3)$$

EW von $A: -1, 3, \mu_{alg} = (A, -1) = 2, \mu_a lg(A, 3) = 1$

$$\text{Eig}(A, -1) = \text{Lös}(-E_n - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

$\mu_{geo}(A, -1) = 2 = \mu_{alg}(A, -1)$.

$$\text{Eig}(A, 3) = \text{Lös}(3E_n - A, 0) = Ls\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$\mu_{geo}(A, 3) = 1 = \mu_{alg}(A, 3)$. Also ist A diagonalisierbar, $\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus EV von A,

$$M_{\mathcal{B}}(\tilde{A}) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$$

Mit

$$S := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}, SAS^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$$

Anmerkung Ist $f = a_m t^m + \dots + a_1 t + a_0 \in K[t]$, dann können wir in f:

- Endomorphismen $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ einsetzen durch die Reget

$$f(\varphi) := a_m \varphi^m + \dots + a_1 \varphi + a_0 \,\mathrm{id}_V \in \mathrm{End}_K(V)$$

wobei $\varphi^k := \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{\text{k-mal}}$

- Matrizen $A \in M(n \times n, K)$ einsetzen durch die Regel

$$f(A) := a_m A^m + \dots + a_1 A + a_0 E_n \in M(n \times n, K)$$

Für $f, g \in K[t], \varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ ist $f(\varphi) \circ g(\varphi) = (fg)(\varphi) = (gf)(\varphi) = g(\varphi) \circ f(\varphi)$, analog für Matrizen.

Satz 18.21 (Satz von Cayley-Hamilton) V endlichdimensional. Dann gilt: $\chi_\varphi^{char}(\varphi) = 0$. Insbesondere gilt für alle $A \in M(n \times n, K) : \chi_A^{char}(A) = 0$.

Beweis 1. Es genügt zu zeigen, dass $\chi_A^{char} = 0$ für alle $A \in M(n \times n, K)$, denn:
Ist $\varphi \in \mathrm{End}_K(V), \mathcal{B}$ Basis von $V, A = A_{\mathcal{B}}, \chi_\varphi^{char} = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0 = \chi_A^{char} \in K[t]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 = \chi_A^{char}(A) &= A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0 E_n = M_{\mathcal{B}}(\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \dots + a_0 \,\mathrm{id}_V) \\ &= M_{\mathcal{B}}\big(\chi_\varphi^{char}(\varphi)\big) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \chi_\varphi^{char}(\varphi) = 0$$

2. Sei $A \in M(n \times n, K)$. Wri setzen $D := (tE_n - A)^\# \in M(n \times n, K[t])$

$$\Rightarrow D(tE_n - A) = \det(tE_n - A)E_n = \chi_A^{char} E_n$$

Sei $D = \sum_{i=0}^{n-1} D_i t^i$ mit $D_i \in M(n \times n, K), \chi_A^{char} = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ mit $a_i \in K$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i E_n t^i &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i\right) E_n = \chi_A^{char} E_n = D(tE_n = A) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} D_i t^i\right)(tE_n - A) = \sum_{i=0}^{n-1} D_i t^{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} D_i A t^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} (D_{i-1} - D_i A) t^i \qquad \text{(mit } D_{-1} := 0, D_n := 0) \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert: $a_i A_n = D_{i-1} - D_i A$ für $i = 0, \dots, n$

$$\begin{aligned} \chi_A^{char} &= \sum_{i=0}^{n} a_i A_i = \sum_{i=0}^{n} (a_i E_n) A^i = \sum_{i=0}^{n} (D_{i-1} - D_i A) A^i \\ &= (D_{-1} - D_0 A) + (D_0 - D_1 A)A + \dots + (D_{n-1} - D_n A)A^n \\ &= D_{-1} - D_n A^{n+1} = 0 \end{aligned}$$

□

Anmerkung Der „Beweis“

$$\chi_A(A) = (\det(tE_n - A))(A) = \det(AE_n - A) = \det(A - A) = \det(0) = 0$$

funktioniert nicht, denn:

$$\underbrace{\underbrace{(\det(tE_n - A))}_{\in K[t]}(A)}_{\in M(n \times n, K)} \quad \underbrace{\det\underbrace{(AE_n - A)}_{\in M(n \times n, K)}}_{\in K}$$

Satz+Definition 18.22 V endlichdimetional, $I := \{f \in K[t] \mid f(\varphi) = 0\}$. Dann gilt:

1. Es gibt ein eindeutig bestimmtes, normiertes Polynom $\chi_\varphi^{min} \in K[t]$, sodass

$$I = \chi_\varphi^{min} K[t] := \{\chi_\varphi^{min} q \mid q \in K[t]\}$$

   χ_φ^{min} heißt das **Minimalpolynom** von φ. χ_φ^{min} ist ads eindeutig bestimmte normierte Polynom kleinsten Grades mit $f(\varphi) = 0$.

2. $\chi_\varphi^{mit} \mid \chi_\varphi^{char}$, das heißt $\exists q \in K[t] : \chi_\varphi^{char} = q \cdot \chi_\varphi^{min}$

Analog konstruiert man für $A \in M(n \times n, K)$, das Minimalpolynom χ_A^{min}. Es ist $\chi_A^{min} = \chi_{\tilde{A}}^{min}$.

Beweis 1. Existenz: Wegen Satz von Cayley-Hamilton ist $\chi_\varphi^{char}(\varphi) = 0$. Somit ist $\chi_\varphi^{char} \in I$, insbesondere $I \neq \emptyset$.
$\deg(f) \mid f \in I, f \neq 0$ ist eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}_0$, hat somit ein minimales Element. $\Rightarrow \exists g \in I, g \neq 0 : \deg(g)$ minimal in $I \quad \{0\}$ ist. Wir setzen

$$\chi_\varphi^{min} := \frac{1}{l(g)} g \Rightarrow \chi_\varphi^{min} \text{normiert}$$

und es ist

$$\chi_\varphi^{min}(\varphi) = \frac{1}{l(g)} g g(\varphi) = 0$$

das heißt $\chi_\varphi^{min} \in I$.
Behauptung: $I = \chi_\varphi^{min} K[t]$, denn:
„$\supseteq$“ Für $q \in K[t]$ ist $\big(\chi_\varphi^{min} q\big)(\varphi) = \underbrace{\chi_\varphi^{min}(\varphi)}_{=0} \cdot g(\varphi) = 0$, das heißt $\chi_\varphi^{min} q \in I$.
„$\subseteq$“ Sei $f \in I \Rightarrow \exists q, r \in K[t] : f = q\chi_\varphi^{min} + r, \deg(r) < \deg\big(\chi_\varphi^{min}\big)$

$$\Rightarrow 0 = f(\varphi) = \big(q\chi_\varphi^{min}\varphi + r\big)(\varphi) = q(\varphi) \cdot \chi_\varphi^{min}(\varphi) + r(\varphi) = r(\varphi) \Rightarrow r \in I$$

Wegen $\deg(r) < \deg\big(\chi_\varphi^{min}\big)$ und der Minimalität des Grades von χ_φ^{min} in $I \quad \{0\}$ folgt $r = 0 \Rightarrow f = q\chi_\varphi^{min}$
Eindeutigkeit: Sei $\chi \in K[t]$ ein weiteres Polynom mit $I = \chi K[t] = \chi_\varphi^{min} K[t]$

$$\Rightarrow \chi = \chi \cdot 1 \in I = \chi_\varphi^{min} K[t] \Rightarrow \exists q \in K[t] : \chi = \chi_\varphi^{min} q$$

Analog $\exists p \in K[t] : \chi_\varphi^{min} = \chi p$

$$\Rightarrow \chi_\varphi^{min} = \chi p = \chi_\varphi^{min} qp \Rightarrow pq = 1 \Rightarrow p, q \in K^*$$

Wegen χ, χ_φ^{min} normiert folgt $p = q = 1$, also $\chi = \chi_\varphi^{min}$

2. Wegen $\chi_\varphi^{char}(\varphi) = 0$ nach Satz von Cayley-Hamilton folgt $\chi_\varphi^{char} \in I$.

$$\Rightarrow \exists q \in K[t] : \chi_\varphi^{char} = q\chi_\varphi^{min}$$

das heißt $\chi_\varphi^{min} \mid \chi_\varphi^{char}$ □

Bemerkung 18.23 V endlichdimensionay, $\lambda \in K$. Dann gilt:

$$\chi_\varphi^{char}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \chi_\varphi^{min}(\lambda) = 0$$

Insbesondere haben χ_φ^{char} und χ_φ^{min} dieselben NS.

Beweis „ $\Longleftarrow$ “ Sei $\chi_\varphi^{min}(\lambda) = 0$. Nach 18.22 $\exists q \in K[t]$ mit $\chi_\varphi^{char} = q\chi_\varphi^{min}$

$$\Rightarrow \chi_\varphi^{char}(\lambda) = q(\lambda)\underbrace{\chi_\varphi^{min}(\lambda)} = 0$$

„$\Rightarrow$“ Sei $\chi_\varphi^{char}(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$ ist EW von φ, sei $v \in V$ EV zum EW λ. Sei $\chi_\varphi^{min} = t^r + a_{r-1}t^{r-1} + \dots + a_1 t + a_0$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 0 = \big(\chi_\varphi^{min}(\varphi)\big)(v) &= (\varphi^r + a_{r-1}\varphi^{r-1} + \dots + a_1\varphi + a_0 \operatorname{id}_V)(v) \\ &= \lambda^r v + a_{r-1}\lambda^{r-1}v + \dots + a_1\lambda v + a_0 v \\ &= \underbrace{(\lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)}_{=\chi_\varphi^{min}(\lambda)} v\end{aligned}$$

$\Rightarrow \chi_\varphi^{min}(\lambda) = 0.$ □

Beweis Beweis der Behauptung per Induktion nach $n := \dim V$
IA: $n = 1$ klar
IS: Sei $n > 1$, die Behauptung sei für $1, \dots, n-1$ gezeigt.

1. Behauptung: $V = \ker(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \oplus \operatorname{im}(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)$, denn: Nach 7.6 $\exists v, s \in K[t]$ mit

$$(t - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r) = q(t - \lambda_1) + s, \deg(s) < \deg(t - \lambda_1) = 1$$

das heißt s ist konstantes Polynom. Wegen

$$s(\lambda_1) = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (\lambda_1 - \lambda_r) - q(\lambda_1)\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_1)}_{=0} \neq 0$$

das heißt $s \in K^*$. Einsetzen von φ liefert:

$$(\varphi - \lambda_2 \operatorname{id}_V) \circ \dots \circ (\varphi - \lambda_r \operatorname{id}_V) = q(\varphi) \circ (\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) + s \operatorname{id}_V$$

$\Rightarrow \forall v \in V$ ist

$$\begin{aligned} sv &= (\varphi - \lambda_2 \operatorname{id}_V) \circ \dots \circ (\varphi - \lambda_r \operatorname{id}_V)(v) - q(\varphi) \circ (\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)(v) \\ \Rightarrow v &= \frac{1}{s} \underbrace{(\varphi - \lambda_2 \operatorname{id}_V) \circ \dots \circ (\varphi - \lambda_r \operatorname{id}_V)(v)}_{=:u} - \underbrace{q(\varphi) \circ (\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)(v)}_{=:w} \end{aligned}$$

$$(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)(u) = \frac{1}{s}(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \circ \dots \circ (\varphi - \lambda_r \operatorname{id}_V)(v) = \frac{1}{s} \underbrace{\chi_\varphi^{min}(\varphi)}_{=0}(v) = 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow n \in \ker(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \\ w &= \frac{1}{s} q(\varphi) \circ (\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)(v) = \frac{1}{s}((\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \circ q(\varphi))(v) \in \operatorname{im}(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \\ \Rightarrow V &= \ker(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) + \operatorname{im}(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \end{aligned}$$

Nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen ist

$$\dim \ker(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) + \dim \operatorname{im}(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) = \dim V$$

$\Rightarrow$ Summe ist direkt $\Rightarrow$ Behauptung.

2. Wir setzen $W := \operatorname{im}(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)$, dann ist

$$V = \ker(\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \oplus W = \underbrace{\operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1)}_{\neq 0} \oplus W$$

$\Rightarrow \dim W < \dim V$. Es gilt:

$$\begin{aligned} &\varphi \circ (\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) = \varphi \circ \varphi - \lambda_1 \varphi = (\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V) \circ \varphi \\ &\qquad \Rightarrow \varphi(W) = \varphi((\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)(V)) = (\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)(\varphi(V)) \leq (\varphi - \lambda_1 \operatorname{id}_V)(V) = W \end{aligned}$$

Wir betrachten die Abbildung $\psi := \varphi\big|_W^W : W \to W$. Sei $\chi_\varphi^{min} = t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0$.
$\Rightarrow \forall w \in W$ ist

$$\begin{aligned} \chi_\varphi^{min}(\psi)(w) &= (\psi_n + a_{n-1}\psi_{n-1} + \dots + a_0 \operatorname{id}_V)(w) \\ &= \psi^n(w) + a_{n-1}\psi^{n-1}(w) + \dots + a_0 w \\ &= \varphi_n(w) + a_{n-1}\varphi^{n-1}(w) + \dots + a_0 w \\ &= (\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \dots + a_0 \operatorname{id}_V)(w) \\ &= \underbrace{\left(\chi_\varphi^{min}(\varphi)\right)}_{=0}(w) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \chi_\varphi^{min} \psi = 0 \Rightarrow \chi_\psi^{min} \mid \chi_\varphi^{min} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_r)$$

$\Rightarrow \chi_\psi^{min}$ zerfällt in Linearfaktoren und besitzt nur einfache Nullstellen. $\Rightarrow \psi$ diagonalisierbar, das heißt es existiert eine Basis von W aus EV zu $\psi = \varphi\big|_W^W$. Wegen $V = \operatorname{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus W$ existiert nach 11.8 eine Basis von V aus EV zu φ, das heißt φ ist diagonalisierbar. $\square$

Beispiel 18.24

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$. Es ist $\chi_A^{min} = (t+1)^2(t-3) \Rightarrow A$ ist nicht diagonalisierbar.
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$. Es ist $\chi_A^{min} = (t+1)(t-3) \Rightarrow A$ ist diagonalisierbar.

19 Dualraum

In diesem Abschnitt sei V ein K Vektorraum.

Definition 19.1 (Dualraum)

$$V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K) = \{\varphi : V \to K \mid \varphi \text{ linear}\}$$

heißt der **Dualraum** von V, die Elemente aus V^* heißen **Linearformen** auf V.

Beispiel 19.2

1. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^n, \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_1$ ist eine Linearform aut $\mathbb{R}^n$.
2. $K = \mathbb{R}, V = \mathcal{C}[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$

$$\varphi : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

   ist eine Linearform auf $\mathcal{C}[0,1]$

Bemerkung+Definition 19.3 V endlichdimensional $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V. Wir definieren für $i = 1, \dots, n$ die linear Abbildung

$$v_i^* : V \to V, v_j \mapsto \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & 1 \neq j \end{cases}$$

Dann ist $\mathcal{B}^* := (v_1^*, \dots, v_n^*)$ ist eine Basis von V^*, die **duale Basis** zu $\mathcal{B}$.

Beweis

1. $\mathcal{B}^*$ ist linear unabhängig: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K, \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^* = 0. \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ist

$$0 = \underbrace{\lambda_1 v_1^*(v_i)}_{=0} + \dots + \underbrace{\lambda_{i-1} v_{i-1}^*(v_i)}_{=0} + \underbrace{\lambda_i v_i^*(v_i)}_{=1} + \underbrace{\lambda_{i+1} v_{i+1}^*(v_i)}_{=0} + \dots + \underbrace{\lambda_n v_n^*}_{=0} = \lambda_i$$

2. $\mathcal{B}^*$ ist ES von V^*: Sei $\varphi \in V^*$. Setze $\lambda_i := \varphi(v_i)$ für $i = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow (\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*)(v_i) = \lambda_i = \varphi(v_i), i = 1, \dots, n$$
$$\Rightarrow \varphi = \lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^*$$

□

Anmerkung Ist V unendlichdimesional mit Basis $(v_i)_{i\in I}$, dann ist $(v_i^*)_{i\in I}$ (analog definiert) linear unabhängig, aber kein ES von V.

Notation:
Elemete des K^n schreiben wir im Folgenden als Spaltenvektoren. Ist $\varphi \in (K^n)^* = \mathrm{Hom}_K(K^n, K)$, dann existiert nach LA1 ein eindeutig bestimmtes $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \in M(1 \times n, K)$ mit

$$\varphi = \tilde{A} : K^n \to K, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Es ist $A = M_{(e_1)}^{(e_1,\dots,e_n)}(\varphi)$. Dementsprechende schreiben wir Elemente von $(K^n)^*$ als Zeilenvektoren.

Beispiel 19.4

1. $V = K^n, \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \Rightarrow \mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ duale Basis zu $\mathcal{B}$ mit

$$e_i^* = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

   Für die Abbildung aus 19.2.1 gilt $\varphi = e_1^* = (1, \dots, 0)$.

2. $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (v_1, v_2)$

printf(„enrtext“text