Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2016/17

Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Dr. D. Vogel
Dr. M. Witte

Blatt 7
Abgabetermin: Donnerstag, 08.12.2016, 9.30 Uhr

Aufgabe 1. *(Lineare Unabhängigkeit und Erzeugendensysteme im $\mathbb{R}^3$.)* Im $\mathbb{R}^3$ betrachte man die vier Vektoren $v_1 = (0,1,2), v_2 = (2,1,0), v_3 = (1,1,1), v_4 = (1,0,0)$. Bestimmen Sie in jedem der folgenden zwei Fälle, ob das gegebene System von Vektoren im $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig (bzw. ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$, eine Basis des $\mathbb{R}^3$) ist.

(a) (v_1, v_2, v_3),

(b) (v_1, v_2, v_4).

Aufgabe 2. *(Lineare Unabhängigkeit und Erzeugendensysteme unter Zerlegungen in direkte Summen.)* Sei K ein Körper und $\ell, m, n \in \mathbb{N}$. Für $k = 1, \ldots, \ell$, $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$ seien $v_{i,k}, w_{j,k} \in K$. Wir betrachten für $k = 1, \ldots, \ell$ die Vektoren

$$v_k \coloneqq (v_{1,k}, \ldots, v_{m,k}) \in K^m, \qquad w_k \coloneqq (w_{1,k}, \ldots, w_{n,k}) \in K^n,$$
$$u_k \coloneqq (v_{1,k}, \ldots, v_{m,k}, w_{1,k}, \ldots, w_{n,k}) \in K^{m+n}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Die Famile $(v_1, \ldots, v_\ell)$ in K^m ist genau dann linear unabhängig, wenn die Familie $(u_1, \ldots, u_\ell)$ in K^{m+n} linear unabhängig ist.

(b) Wenn die Familie $(v_1, \ldots, v_\ell)$ linear abhängig ist, so ist die Familie $(u_1, \ldots, u_\ell)$ linear abhängig.

(c) Wenn $(v_1, \ldots, v_\ell)$ kein Erzeugensystem von K^m ist, so ist $(u_1, \ldots, u_\ell)$ kein Erzeugendensystem von K^{m+n}.

Aufgabe 3. *(Charakterisierung von Basen)* Sei K ein Körper, I eine Menge und $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in einem K-Vektorraum V. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind (dies verallgemeinert Satz 9.3 aus der Vorlesung):

(a) $(v_i)_{i \in I}$ ist eine Basis von V,

(b) $(v_i)_{i \in I}$ ist ein Erzeugendensystem von V und für jede echte Teilmenge $J \subsetneq I$ ist $(v_i)_{i \in J}$ kein Erzeugendensystem von V.

(c) Zu jedem $v \in V$ gibt es eine eindeutig bestimmte Familie $(\lambda_i)_{i \in I}$ von Elementen von K, so dass $\lambda_i = 0$ für fast alle i und $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$.

(d) $(v_i)_{i \in I}$ ist linear unabhängig und für jede Menge J, die I als echte Teilmenge enthält, ist jede Familie von Vektoren $(w_i)_{i \in J}$ in V mit $v_i = w_i$ für $i \in I$ linear abhängig.

Aufgabe 4. *(Umordnung von Basen)* Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, I eine Menge, $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und $\phi\colon J \to I$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

(a) $(v_{\phi(j)})_{j \in J}$ ist genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn ϕ surjektiv ist.

(b) $(v_{\phi(j)})_{j \in J}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn ϕ injektiv ist.

(c) $(v_{\phi(j)})_{j \in J}$ ist genau dann eine Basis, wenn ϕ bijektiv ist.

Zusatzaufgabe 5. *(Basen von* $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, K)$*.)* Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass der K-Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, K)$ der K-wertigen Folgen keine abzählbare Basis besitzt. Mit anderen Worten: Es gibt keine durch $\mathbb{N}$ indizierte Familie $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Vektoren in $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, K)$, die eine Basis ist.