Probeklausur Lineare Algebra I

Wintersemester 2016/2017

Dr. Vogel, Universität Heidelberg

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Tragen Sie vor Beginn der Klausur Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein. Für die gesamte Klausur sind ausschließlich dokumentenechte Stifte wie Kugelschreiber oder Füller in den Farben blau und schwarz erlaubt. Darüber hinaus sind keine weiteren Hilfsmittel zulässig.

Die Klausur besteht aus zwei Teilen:

- Der erste Teil besteht aus 20 Multiple-Choice-Aufgaben (Wert: jeweils 1 Punkt). Auf jede Frage gibt es drei Antwortmöglichkeiten, von denen mindestens eine und höchstens drei richtig sind. Kreuzen Sie die richtigen Antworten (und nur diese) an. Nur bei vollständig korrekter Lösung und unmißverständlich angekreuzten Kästchen erhalten Sie einen Punkt, ansonsten gibt es keinen. Wenn Sie versehentlich eine falsche Antwort angekreuzt haben, streichen Sie alle Antwortkästchen der Frage durch und malen Sie daneben neue Kästchen.

- Der zweite Teil besteht aus 4 umfangreicheren Aufgaben (Wert: jeweils 10 Punkte). Alle Rechnungen und Beweisschritte sollen hier ausführlich, klar und logisch nachvollziehbar dargestellt werden. Alle Ergebnisse und Definitionen aus der Vorlesung dürfen dabei als bekannt vorausgesetzt werden. Zur Beantwortung können Sie Vorder- und Rückseite des Blattes verwenden, auf der die Aufgabe gestellt ist. Für den Fall, dass Ihnen der Platz zur Lösung einer Aufgabe nicht ausreicht und für Notizen können Sie die zusätzlichen angehefteten Blätter verwenden. Kreuzen Sie an, zu welcher Aufgabe das zusätzliche Blatt gehört oder ob es sich um ein Schmierblatt handelt, das nicht bewertet werden soll. Sind auch diese aufgebraucht, hält die Klausuraufsicht zusätzliche Notizblätter für Sie bereit. Versehen Sie diese deutlich mit Ihrem Namen, Ihrer Matrikelnummer und der Aufgabennummer und führen Sie Ihre Berechnungen auf diesem fort. Schmierblätter müssen als solche gekennzeichnet werden; sie gehen nicht in die Bewertung ein.

Überprüfen Sie die Seitenanzahl: Die Klausur hat inklusive Deckblatt 8 Aufgabenblätter plus 4 zusätzliche Blätter für Notizen.

Vergewissern Sie sich am Ende der Klausur, dass der Klausurbogen und alle zusätzlichen losen Blätter mit Ihrem Namen und der Matrikelnummer versehen sind. Alle Blätter, auch leere Blätter und Schmierblätter, müssen bei Klausurende abgegeben werden. Sie dürfen keine Blätter mit aus dem Raum nehmen!

Dauer der Klausur: 2 Zeitstunden **Viel Erfolg!**

Aufgabe	Punkte	Korrektor
MC		
A		
B		
C		
D		

1. Teil: Multiple Choice
(jede Frage 1 Punkt)

1. Sei A eine 2×2-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{C}$. Dann gilt:

   □ $\det(A^t) = \det(A)$.

   □ $\det(3A) = 3\det(A)$.

   □ $\det(A^3) = \det(A)^3$.

2. Sei V ein $\mathbb{F}_3$-Vektorraum mit 9 Elementen. Dann gilt:

   □ Jedes System von 5 Vektoren in V ist linear abhängig.

   □ Jedes Erzeugendensystem von V besteht aus mindestens 3 Vektoren.

   □ Jedes linear unabhängige System von 2 Vektoren in V ist eine Basis.

3. Die Abbildung $f\colon \mathrm{M}(2 \times 2, \mathbb{C}) \to \mathrm{M}(2 \times 2, \mathbb{C})$, $A \mapsto A^t$ ist

   □ surjektiv.

   □ bijektiv.

   □ $\mathbb{C}$-linear.

4. Welche der folgenden Matrizen A mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$ hat Zeilenrang 2?

   □ $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

   □ $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

   □ $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

5. Sei $f \in \mathbb{F}_3[t]$ ein Polynom vom Grad 3. Dann gilt:

   □ Ist $a \in \mathbb{F}_3$ eine Nullstelle von f, so gibt es genau ein Polynom $g \in \mathbb{F}_3[t]$ mit $f = g(t-a)$.

   □ f hat genau 3 Nullstellen in $\mathbb{F}_3$.

   □ Ist $f(a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{F}_3$, so ist f das Nullpolynom.

6. Sei p eine Primzahl. Dann gilt:

   □ $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ hat Charakteristik 0.

   □ $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist ein Körper.

   □ $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist ein Integritätsbereich.

7. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und U, W Untervektorräume von V. Dann gilt:

   □ $w + U$ ist ein Untervektorraum von V für alle $w \in W$.

   □ $U + W$ ist ein Untervektorraum von V.

   □ $U \cap W$ ist ein Untervektorraum von U.

8. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine injektive Abbildung. Dann gilt:

- ☐ f ist bijektiv.
- ☐ $f(a+b) = f(a) + f(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.
- ☐ Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und $f(a) = f(b)$, so gilt $a = b$.

9. Sei $A \in \mathrm{M}(2 \times 3, \mathbb{Q})$, $b \in \mathbb{Q}^2$. Dann gilt:

- ☐ Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist ein affiner Unterraum von $\mathbb{Q}^3$.
- ☐ Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}^3$.
- ☐ Es existiert eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{Q}^3$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

10. Sei $M = \{1, 2, 3\}$. Die folgenden Teilmengen von $M \times M$ sind Äquivalenzrelationen auf M:

- ☐ $M \times M$.
- ☐ $\{(1,1), (2,2), (3,3)\}$.
- ☐ $\emptyset$.

11. Sei A eine invertierbare 3×3-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{F}_2$. Dann gilt:

- ☐ Der Zeilenrang von A ist gleich 2.
- ☐ Die Determinante von A ist gleich 1.
- ☐ Es gibt kein $x \in \mathbb{F}_2^3$ mit $Ax = 0$.

12. Welche der folgenden Permutationen in S_3 haben Signum 1?

- ☐ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.
- ☐ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.
- ☐ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

13. Wie viele Untervektorräume hat ein 1-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum V?

- ☐ Unendlich viele.
- ☐ Zwei: $\{0\}$ und V.
- ☐ Einen: V.

14. Seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{Q}$-Vektorräume. Dann gilt:

- ☐ Jede injektive $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $f\colon V \to V$ ist ein Isomorphismus.
- ☐ Es gibt eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $f\colon V \to W$.
- ☐ Jeder surjektive $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $f\colon V \to W$ ist ein Isomorphismus.

15. Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist genau dann ein Untervektorraum von V, wenn

- ☐ $0 \in U$ und für alle $u, v \in U$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $u + \lambda v \in U$.
- ☐ U ist nicht leer und für alle $u, v \in U$, $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $\lambda u + (1 - \lambda)v \in U$.
- ☐ U ist mit der Addition von V eine Gruppe und für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und alle $u \in U$ gilt $\lambda u \in U$.

16. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $a, b, c \in R$. Dann gilt:

☐ Es gibt ein $d \in R$ mit $a \cdot d = d \cdot a = 1$.

☐ $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.

☐ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

17. Sei $(G, *)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element e. Dann gilt stets:

☐ Für alle $g, h \in G$ ist $g * h = h * g$.

☐ Falls $g, h, \ell \in G$ und $g * \ell = h * g$, so gilt $h = \ell$.

☐ Für alle $g \in G$ existiert ein $h \in G$ mit $g * h = e$.

18. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 5 und $W \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann gilt:

☐ Ist $\dim_{\mathbb{R}} V/W = 3$, so ist $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$.

☐ Ist $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) = 10$, so ist $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$.

☐ Ist $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(W, V/W) = 6$, so ist $\dim_{\mathbb{R}} W = 3$.

19. Sei (v_1, v_2, v_3) ein Erzeugendensystem des $\mathbb{C}$-Vektorraums V. Dann gilt:

☐ Jedes System von 3 Vektoren aus V ist linear unabhängig.

☐ Jedes System von 4 Vektoren aus V ist linear abhängig.

☐ Jede Basis von V besteht aus 3 Vektoren aus V.

20. Sei $\leq$ eine Halbordnung auf einer Menge M und $a, b, c \in M$. Dann gilt stets:

☐ Falls $a \leq b$ und $a \leq c$, so gibt es ein $d \in M$ mit $b \leq d$ und $c \leq d$.

☐ Falls $a \leq b$, $b \leq c$ und $c \leq a$, so gilt $b = c$.

☐ Falls $a \leq c$ und $b \leq c$, so gilt $a \leq b$.

2. Teil: Ausführliche Antworten

Aufgabe A.

Sei $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$. Für ein Polynom $p = \sum\limits_{i=0}^{\infty} r_i t^i \in \mathbb{C}[t]$ mit Koeffizienten $r_i \in \mathbb{C}$ (fast alle gleich 0) setzen wir

$$p(A) = r_0 E_n + r_1 A + r_2 A^2 + \cdots + r_k A^k + \ldots,$$

wobei $E_n \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ die Einheitsmatrix bezeichnet. Wir betrachten die Abbildung

$$\mathrm{ev}_A \colon \mathbb{C}[t] \to \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C}), \qquad f \mapsto f(A).$$

(a) Zeigen Sie:

(i) Die Abbildung ev_A ist $\mathbb{C}$-linear.

(ii) Es gilt $\mathrm{ev}_A(pq) = \mathrm{ev}_A(p)\,\mathrm{ev}_A(q)$ für alle $p, q \in \mathbb{C}[t]$.

(iii) Die Abbildung ev_A ist nicht injektiv.

(5P)

(b) Sei χ ein von 0 verschiedenes Polynom vom kleinstmöglichen Grad in $\ker(\mathrm{ev}_A)$. Benutzen Sie den Satz über die Polynomdivision, um zu zeigen, dass

$$\ker(\mathrm{ev}_A) = \{ f\chi \mid f \in \mathbb{C}[t] \}.$$

(5P)

Aufgabe B.
Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$, $W \subseteq V$ ein Untervektorraum der Dimension $m \leq n$ und $f: V \to V$ ein $\mathbb{C}$-linearer Endomorphismus mit $f(W) \subset W$. Zeigen Sie:

(a) Sei $p: V \to V/W$, $v \mapsto v + W$ die Projektionsabbildung. Dann gibt es einen eindeutigen $\mathbb{C}$-linearen Endomorphismus $\bar{f}: V/W \to V/W$ mit $p \circ f = \bar{f} \circ p$. **(5P)**

(b) Sei $k = n - m$. Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass die Darstellungsmatrix von f bezüglich $\mathcal{B}$ die Gestalt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$$

für Matrizen $A \in \mathrm{M}(m \times m, \mathbb{C})$, $B \in \mathrm{M}(m \times k, \mathbb{C})$, $C \in \mathrm{M}(k \times k, \mathbb{C})$ hat, wobei $O \in \mathrm{M}(k \times m, \mathbb{C})$ die Nullmatrix bezeichnet. **(5P)**

Aufgabe C.
Im $\mathbb{R}^4$ seien die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Ferner betrachten wir den $\mathbb{R}$-linearen Endomorphismus $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $x \mapsto Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

(a) Zeigen Sie: Das System (v_1, v_2, v_3) ist $\mathbb{R}$-linear unabhängig. **(5P)**

(b) Sei $W = \mathrm{Lin}(v_1, v_2, v_3)$ und $g\colon W \to V$ die Einschränkung von f auf W. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von g bezüglich der Basis (v_1, v_2, v_3) von W und der Standardbasis von $\mathbb{R}^4$. **(5P)**

Aufgabe D.

(a) Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{4} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{F}_5).$$

(5P)

(b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} t & 3 & 4 \\ 2 & t+2 & 2 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$$

invertierbar? **(5P)**

Bitte ankreuzen:
□ Schmierblatt (keine Bewertung)
□ A.(a) □ A.(b) □ B.(a) □ B.(b) □ C.(a) □ C.(b) □ D.(a) □ D.(b)

Bitte ankreuzen:

□ Schmierblatt (keine Bewertung)

□ A.(a) □ A.(b) □ B.(a) □ B.(b) □ C.(a) □ C.(b) □ D.(a) □ D.(b)

Bitte ankreuzen:

□ Schmierblatt (keine Bewertung)

□ A.(a) □ A.(b) □ B.(a) □ B.(b) □ C.(a) □ C.(b) □ D.(a) □ D.(b)

Bitte ankreuzen:
□ Schmierblatt (keine Bewertung)
□ A.(a) □ A.(b) □ B.(a) □ B.(b) □ C.(a) □ C.(b) □ D.(a) □ D.(b)