Analysis II (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

30. April 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Metrische und normierte Räume

1.1 Metrische Räume

Definition 1.1 Sei M eine Menge, $d : M \times M \to [0, \infty)$ heißt **Metrik** auf M genau dann wenn $\forall x, y, z \in M$

- (D1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (Definitheit)
- (D2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
- (D3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

Beispiel 1.2 1. Charakterische (diskrete) Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Sei $X = \mathbb{K}^n (\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C})$ mit Metrik

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{n}{2}}$$

(euklidische Metrik)

3. Sei $X = \mathbb{R}^n$. Für $1 \leq \phi \leq \infty$. Sei

$$d_\phi(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^\phi\right)^{\frac{n}{\phi}}$$

Ist $\phi = \infty$, so definieren wir

$$d_\infty(x,y) = \max_{i-1,\dots,n} |x_i - y_i|$$

4. $X = \mathbb{R}$ mit Metrik

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

5. Der Raum der Folgen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (beziehungsweise $\mathbb{R}^\mathbb{N}$) kann mit der Metrik

$$d(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k - y_k|}$$

Definition 1.3 Sei M eine Menge mit Metrik d. Wir definieren für $x \in M, \varepsilon > 0$, die offene ε -Kugel um x durch

$$K_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x,y) < \varepsilon\}$$

und eine abgeschlossene Kugel durch

$$K_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x,y) \leq \varepsilon\}$$

$A \subset M$ heißt **Umgebung** von $x \in M \iff \exists \varepsilon : K_\varepsilon(x) \subset A$

Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen

Definition 1.4 Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X,d) ist konvergent gegen einem $x \in X$ genau dann wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 d(x_n, x) < \varepsilon$

Satz 1.5

1. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann ist $A \subseteq X$ abgeschlossen genau dann wenn $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in A mit $x_n \to x \implies x \in A$
2. Seien $(X,d_1), (Y,d_2)$ zwei metrische Räume. Dann ist die Funktion stetig in $x \in X$ genau dann wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x)$.

Definition 1.6 ((Cauchy Folgen und Vollständigkeit)) Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge falls $d(x_n, x_m) \to 0$ für $n,m \to \infty$. Der metrische Raum heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge konvergent ist.

1.2 Normierte Räume

Definition 1.7 Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist ein Paar bestehend aus einem $\mathbb{K}$ -Vektorraum X und einer Abbildung $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ mit

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in X$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in X$

Bemerkung 1. Die Norm $\|\cdot\|$ induziert auf X eine Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$

2. Eine Metrik d auf einem Vektorraum definiert die Norm $\|d(x, 0)\|$ nur dann, wenn

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x, y, z \in X : d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y) \qquad \text{(Homogenität)}$$
$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \qquad \text{(Translationsinvarianz)}$$

Definition 1.8 (Banachraum) Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt vollständig, falls X als metrischer Raum mit der Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ vollständig ist. Ein solcher vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**

Beispiel 1.9 1. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, wobei

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{n}{2}}$$

2. Sei K eine kompakte Menge:

$$C_{\mathbb{K}} := \{f : K \to \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\}$$

$$\|\cdot\|_\infty = \max_{\lambda \in K} |f(x)|$$

$\left(C_{\mathbb{K}(K)}, \|\cdot\|_\infty\right)$ ist ein Banachraum.

Bemerkung 1. Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{K}^n$ konvergiert, das heißt $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ ist vollständig

2. Jede beschränkte Folge in $\mathbb{K}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge. (Bolzano-Weierstraß Satz gilt in $\mathbb{R}^n$) (Beweis für $\mathbb{R}^n$ zum Beispiel in RR Ana2 Satz 1.1)

Satz 1.10 (Äquivalenz von Normen) Auf dem endlich dimensionalen Vektorraum $\mathbb{K}^n$ sind alle Normen **äquivalent** zur Maximumnorm, das heißt zu jeder Norm $\|\cdot\|$ gibt es positive Konstanten w, M mit denen gilt

$$m\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M\|x\|_\infty, x \in \mathbb{K}^n$$

Beweis Sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm $\forall x \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \left\| e^{(k)} \right\| \leq M \|x\|_\infty$$

mit

$$M := \sum_{k=1}^{n} \left\| e^{(k)} \right\|$$

Wir setzen

$$S_1 := \{x \in \mathbb{K}^m \mid \|x\|_\infty = 1\}, m := \inf\{\|x\|, x \in S_1\} \geq 0$$

Zu zeigen $m > 0$ (dann ergibt sich für $x \neq 0$ wegen $\|x\|_\infty^{-1} x \in S_1$ auch $m \leq \|x\|_\infty^{-1} \|x\| \implies 0 < m\|x\|_\infty \leq \|x\| \quad x \in \mathbb{K}^n$) Sei also angenommen, dass $m = 0$

Dann gibt eine eine Folge $\left(x^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}} \in S_1$ mit $\left\|x^{(k)}\right\| \xrightarrow{k \to \infty} 0$. Da die Folge bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ beschränkt ist, gibt es nach dem B.-W. Satz eine Teilfolge auch von $\left(x^{(k)}\right)$, die bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ gegen ein $x \in \mathbb{K}^n$ konvergiert.

$$|1 - \|x\|_\infty| = \left| \left\| x^{(k)} \right\|_\infty - \|x\|_\infty \right| \leq \left\| x^{(k)} - x \right\|_\infty \to 0 \implies \|x\|_\infty = 1 \implies x \in S_1$$

Anderseits gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} : \|x\| \leq \left\| x - x^{(k)} \right\| + \left\| x^{(k)} \right\| \leq M \left\| x - x^{(k)} \right\|_\infty + \left\| x^{(k)} \right\| \xrightarrow{k \to \infty} \implies x = 0$$

↯zu $x \in S_1$ □

Definition 1.11 Eine Menge $M \subset K^n$ heißt kompakt (folgenkompakt), wenn jede beliebige Folge in M eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert ebenfalls in M enthalten ist.

Beispiel 1.12 Mit Hilfe von dem Satz von B.W. folgt, dass alle abgeschlossene Kugeln im $\mathbb{R}^n$ $(K_r(a), a \in K^n)$ kompakt sind. Ferner ist für beschränkte Mengen M der Rand ∂M kompakt. Jede endliche Menge ist auch kompakt.

1.3 Hilberträume

Definition 1.13 Sei $H\mathbb{K}$ Vektorraum. Ein **Skalarprodukt** auf eine Abbildung

$$(\cdot, \cdot) : H \times H \to \mathbb{K}$$

mit

1. $\forall x, y, z \in H, \lambda \in \mathbb{K} : (z, x + \lambda y) = (z, x) + \lambda(z, y)$
2. $\forall x, y \in H : (x, y) = \overline{(y, x)}$
3. $\forall x \in H : (x, x) \geq 0 \wedge (x, x) = 0 \iff x = 0$

$(H, (\cdot,\cdot))$ nennt man einen Prähilbertraum.

Bemerkung Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist das Skalarprodukt linear in der zweiten Komponente aber antilinear in der ersten ($(\lambda x, y) = \bar{\lambda}(x, y)$).

Lemma 1.14 (Cauchy-Schwarz Ungleichung) Sei $(H, (\cdot,\cdot))$ Prähilbertraum, dann gilt

$$\forall x, y \in H : |(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

Beweis Da die Ungleichung für $y = 0$ bereits erfüllt ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen $y \neq 0$. Für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$0 \leq (x + \alpha y, x + \alpha y) = (x, x) + \bar{\alpha}(y, x) + \alpha(x, y) + \alpha\bar{\alpha}(y, y)$$

Setze nun $\alpha := -(x, y)(y, y)^{-1}$

$$\begin{aligned}
&= (x, x) - \overline{(x, y)}(y, y)^{-1} - (x, y)(y, y)^{-1}(x, y) - \left|(x, y)^2\right|(y, y)^{-1} \\
&= (x, x) - \underbrace{((y, x)(y, x) + (x, y)(x, y))(y, y)^{-1}}_{>0} - |(x, y)|^2(y, y)^{-1} \\
&\leq (x, x) - |(x, y)|^2(y, y)^{-1} \\
&\iff |(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)
\end{aligned}$$

□

Korollar 1.15 Sei $(H, (\cdot,\cdot))$ ein Prähilbertraum, dann ist $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ eine Norm auf H.

Beweis Es ist nur die Dreiecksungleichung zu beweisen, weil der Rest klar ist. Für $x, y \in H$ gilt

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(x, y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x, y)| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

□

Definition 1.16 Ein Prähilbertraum $(H, (\cdot,\cdot))$ heißt Hilbertraum, falls $(H, \|\cdot\|)$ mit $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ ein Banachraum ist.

Beispiel 1.17

1. $H = \mathbb{R}^n$ versehen mit $\underbrace{(x, y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}_{\text{euklidisches Skalarprodukt}}$ ist ein Hilbertraum

2. $H = \mathbb{C}^n$ mit $\underbrace{(x, y) := \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i}_{\text{euklidisches Skalarprodukt}}$ ist ein Hilbertraum

3. Sei $l^2\mathbb{K} := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{K}, \forall k \in \mathbb{N} \wedge \sum_{i=1}^{\infty}|x_k|^2 < \infty\}$ versehen mit $(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \bar{x}_i y_i$ ist ein Hilbertraum.

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i||y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|_{l^2}\|y\|_{l^2} < \infty$$

Lemma 1.18 (Hölder-Ungleichung) Für das euklidische Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_2$ gilt für beliebige p, q mit $1 < p, q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ die Ungleichung

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n : |(x,y)_2| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Darüber hinaus gilt die Ungleichung auch für $p = 1, q = \infty$

Lemma 1.19 (Young'sche Ungleichung) Tür $p, q \in \mathbb{R}, 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{K} : |(x,y)| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}$$

Lemma 1.20 (Minkowski-Ungleichung) Für ein beliebiges $p \in [1, \infty]$ gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n : \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Satz 1.21 (Banachscher Fixpunktsatz) Sei (M, d) ein vollständiger, metrischer Raum und $f : M \to M$ ist eine strenge Kontraktion, das heißt

$$\exists 0 < \alpha < 1 \forall x, y \in M : d(f(x), f(y)) < \alpha d(x, y)$$

Dann existiert ein eindeutiger Fixpunkt von f, das heißt es existiert ein eindeutiges $x^* \in M : f(x^*) = x^*$

Beweis Existenz:
Wähle ein $x_0 \in M$ beliebig, aber fest und definiere dann $x_1 := f(x_0), x_2 := f(x_1), \ldots$. Dann gilt für $n \leq m$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(f(x_{n-1}), f(x_{m-1})) < \alpha d(x_{n-1}, x_{m-1}) \\ &= \alpha d(f(x_{n-2}), f(x_{m-2})) < \cdots < \alpha^n d(x_0, x_{m-n}) \end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\begin{aligned} d(x_0, x_{m-n}) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n}) \\ &\leq d(x_0, x_1) + \alpha d(x_0, x_1) + \cdots + a^{m-n-1} d(x_0, x_1) \\ &= d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{m-n-1} \alpha^i \leq d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \\ &= \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \alpha} < \infty \\ \implies d(x_n, x_m) &\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Also ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge. Da (M,d) vollständig ist existiert $x^* \in M$, sodass $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x^*$. Zeige, dass x^* Fixpunkt von f ist:

$$\begin{aligned} 0 \le d(x^*, f(x^*)) &\le d(x^*, x_k) + d(x_k, f(x^*)) \\ &\le d(x^*, x_k) + \alpha d(x_{k-1}, x^*) \xrightarrow{k\to\infty} 0 \end{aligned}$$

$\implies f(x^*) = x^*$
Eindeutigkeit: Angenommen $\exists x' \in M, x' \neq x^* : f(x') = x'$:

$$0 < d\big(x^*, x'\big) = d\big(f(x^*), f\big(x'\big)\big) < \alpha d\big(x^*, x'\big) \implies \alpha > 1`$$ □

2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

Definition 2.1 Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, D \neq \emptyset$, ist stetig in einem $a \in D$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

Bemerkung Es gelten auch im Mehrdimensionalen die Permanenzeigenschaften, das heißt f, g stetig $\implies f + g, f \circ g$ sind stetig.

Satz 2.2 Eine stetige Funktion $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist auf einer kompakten Menge $K \subset D$ beschränkt, das heißt für jede kompakte Menge K existiert eine Konstante M_k, sodass

$$\forall x \in K \|f(x)\| < M_k$$

Beweis Angenommen f wäre auf K unbeschränkt, dann gäbe es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in K$ mit $\|f(x_k)\| > K$. Da K kompakt hat die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $\big(x_{k_j}\big)_{j\in\mathbb{N}}$ für die gilt $x_{k_j} \xrightarrow{j\to\infty} x \in K$. Da f stetig $f\big(x_{k_j}\big) \to f(x)$ und $\|f(x)\| < \infty$, was im Widerspruch steht zu $\|f(x_k)\| \xrightarrow{k\to\infty} \infty$. □

Satz 2.3 Eine stetige Funktion $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ nimmt auf jeder (nicht leeren) kompakten Menge $K \subset D$ ihr Minimum und Maximum an.

Beweis Nach Satz 2.2 besitzt f eine obere Schranke auf K

$$\mathcal{K} := \sup_{x\in K} f(x)$$

Dazu $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq K$, sodass $f(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} \mathcal{K}$. Da K kompakt existiert eine konvergente Teilfolge $\big(x_{k_j}\big)_{j\in\mathbb{N}}$ und ein x_{max}, sodass $x_{k_j} \xrightarrow{j\to\infty} x_{max}$. Da f stetig, gilt $f\big(x_{k_j}\big) \to f(x_{max})$. □

Bemerkung Auf diese Weise lassen sich die Ergebnisse der Stetigkeit aus dem Eindimensionalen ins Mehrdimensionale verallgemeinern.

Im folgenden Teil sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Definition 2.4 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt in einem Punkt $x \in D$ partiell differenzierbar bezüglich der i-ten Koordinatenrichtung, falls der Limes

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_i) - f(x)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) =: \partial_i f(x)$$

existiert. Existieren in allen Punkten $x \in D$ **alle** partiellen Ableitungen, so heißt f partiell differenzierbar. Sind alle partiellen Ableitungen stetig auf D, so heißt f stetig partiell differenzierbar. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt (stetig) partiell differenzierbar, wenn $f_i, i = 1, \ldots, m$ (stetig) partiell differenzierbar.

Bemerkung Die Ableitungsregeln aus dem Eindimensionalen übertragen sich auf partielle Ableitungen.

Beispiel

1. Polynome sind stetig partiell differenzierbar. Sei $p : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto a_{01}x_2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 + a_{21}x_1^2x_2$. Dann ist

$$\frac{\partial p}{\partial x_1}(x_1, x_2) = a_{11}x_2 + 2a_{21}x_1x_2 \qquad \frac{\partial p}{\partial x_2} = a_{01} + a_{11}x_1 + 2a_{02}x_2 + a_{21}x_1^2$$

2. $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ist stetig partiell differenzierbar, da

$$\frac{\partial\|\cdot\|}{x_i} = \frac{1}{2}\frac{2x_i}{\left(x_1^2 + \cdots + x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x_i}{\|x\|_2}$$

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1x_2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}$ für $x \neq 0, f(0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \frac{x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2} - 4\frac{x_1^2x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^3}, x \neq 0$$

Für $x = 0$ ist $f(0) = 0$

$$\Longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(xe_i) - f(0)}{h} = 0$$

Sei $x_\varepsilon(\varepsilon, \varepsilon)$ und damit gilt $\|x_\varepsilon\|_2 \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$

$$f(x_\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{4\varepsilon^4} = \frac{1}{4\varepsilon_2} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \infty$$

Satz 2.5 Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ habe in einer Kugelumgebung $K_r(x) \subset D$ eines Punktes $x \in D$ beschränkte partielle Ableitungen, das heißt

$$\sup_{y\in K_r(x)} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \leq M, i = 1, \ldots, n$$

dann ist f stetig in x.

Beweis Es genügt $n = 2$. Für $(y_1, y_2) \in K_r(x)$

$$f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2) - f(x_1, y_2) + f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2)$$

Nach dem 1-D Mittelwertsatz existieren $\xi, \eta \in K_r(x)$, sodass

$$\begin{aligned} |f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2)| &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi, y_2)(y_1 - x_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \eta)(y_2 - x_2) \\ &\leq M(|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|) \end{aligned}$$ □

Höhere partielle Ableitungen definieren sich durch sukzessives Ableiten, das heißt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$$

Beispiel

$$\frac{x_1}{x_2} := \frac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}$$

für $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$. f zweimal partiell diff'bar, aber

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(0, 0) \neq \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(0, 0)$$

Satz 2.6 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei in einer Umgebung $K_r(x) \subset D$ eines Punktes $x \in D$ zweimal stetig partiell differenzierbar, dann gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(x), i, j = 1, \dots, n$$

Beweis $n = 2$. Sei $A := f(x_1 - h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2 + h_2) + f(x_1, x_2)$.

$$\varphi(x_1) := f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) \implies A = \varphi(x_1 + h_1) - \varphi x_1$$

Mit dem Mittelwertsatz erhalten wir $A = h_1 \varphi'(x_1 + \theta_1 h_1), \theta_1 \in (0, 1)$.

$$\varphi'(x_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2 + h_2) - \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 x_1} f\big(x_1, x_2 + \theta_1' h_2\big), \theta_1' \in (0, 2)$$

Analog verfahre man mit x_2 und erhalte für $\psi(x_2) := f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2)$

$$A = \psi(x_2 - h_2) - \psi(x_2) = h_2 \psi'(x_2 + \theta_2 h_2) = h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f\big(x_1 + \theta_2 h_1, x_2 \theta_2' h_2\big)$$

$$\begin{aligned} &\implies \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f\big(x_1 + \theta_1 h_1, x_2 + \theta_1' h_2\big) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f\big(x_1 + \theta_2 h_1, x_2 + \theta_2' h_2\big) \\ &\xRightarrow{h_1, h_2 \to 0} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1, x_2) \end{aligned}$$ □

Definition 2.7 $f : D \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar.

$$\operatorname{grad} f(x) := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f\right)^T \in \mathbb{R}^n$$

heißt **Gradient** von f in $x \in D$. Man schreibt $\nabla f(x) := \operatorname{grad} f$. $f : D \to \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar.

$$\operatorname{div} f(x) := \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} f_n$$

Es gilt:

$$\div \operatorname{grad} f(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f_i =: \Delta f(x)$$

Definition 2.8 $f : D \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar. Die Matrix der ersten partiellen Ableitungen

$$J_f := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,w \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{n \times w}$$

heißt die **Jacobi-Matrix** (manchmal auch F*undametalmatrix*) von f in x. Im Fall $n = m$ bezeichnet man $\det(J_f)$ als **Jacobideterminante**.

Definition 2.9 $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar. Die Matrix der zweiten Ableitungen

$$H_f(x) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,w}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

heißt **Hesse-Matrix**.

Definition 2.10 Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$, dann nennen wir f in einem Punkt $x \in D$ (total differenzierbar), wenn die Funktion f in x sich linear approximieren lässt, das heißt es gibt eine lineare Abbildung $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (Differential) sodass in einer kleinen Umgebung von x gilt:

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + w(h), h \in \mathbb{R}^n, x+h \in D$$

mit einer Funktion $w : D \to \mathbb{R}^m$, die die Eigenschaft hat

$$\lim_{\substack{x+h \in D \\ \|h\|_2 \to 0}} \frac{\|wh\|_2}{\|h\|_2} = 0$$

alternativ: $w(h) = \wr(\|h\|_2)$

Satz 2.11 Für Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^m$ gilt:

1. Ist f in $x \in D$ differenzierbar, so ist f auch in x partiell differenzierbar und das Differential von f ist gegeben durch die Jacobi-Matrix.

2. Ist f partiell differenzierbar in einer Umgebung von x und sind zusätzlich die partiellen Ableitungen stetig in x, so ist f in x differenzierbar.

Beweis 1. Für differenzierbares f gilt für $i = 1, 2$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_i) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(Df(x)e_i + \frac{w(h)}{h}\right) = Df(x)e_i$$

2. Für ein stetig partiell differenzierbares f gilt mit $h = (h_1, h_2)$:

$$f(x+h) - f(x) = f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1+h_1, x_2) + f(x_1+h_1, x_2) - f(x_1, x_2)$$

Mittelwertsatz

$$\begin{aligned}
&= h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1+h_1, x_2+\theta_2 h_2) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\theta_1 h_1, x_2) \\
&\hspace{20em} \theta_1, \theta_2 \in (0,1) \\
&= h_2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) + \omega_2(h_1, h_2)\right) + h_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \omega_1(h_1, h_2)\right)
\end{aligned}$$

$$\omega_1(h_1, h_2) := \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\theta_1 h_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \xrightarrow{h_1, h_2 \to 0} 0$$

$$\omega_2(h_1, h_2) := \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1+h_1, x_2+\theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \xrightarrow{h_1, h_2 \to 0} 0$$

Also ist f differenzierbar mit Ableitungen $Df(x) = \nabla f(x)$. □

Bemerkung Es gelten folgende Implikationen: stetig partiell differenzierbar $\Longrightarrow$ (total) differenzierbar $\Longrightarrow$ partiell differenzierbar.

Satz 2.12 Seien $D_f \subset \mathbb{R}^n, Dg \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $g : D_g \to \mathbb{R}^n, f : D_f \to \mathbb{R}^r$. Ist g im Punkt $x \in D_g$ differenzierbar und f in $y = g(x) \in D_f$ differenzierbar, so ist die Komposition $h = f \circ g$ im Punkt x differenzierbar. Es gilt $D_x h(x) = D_y f(g(x)) \cdot D_x g(x)$. Hierbei ist $\cdot$ die Matrixmultiplikation.

Beweis Nach Voraussetzung $x \in D_g$ sodass $g(x) = y \in D_f$. Da sowohl f als auch g differenzierbar

$$g(x+h_1) = g(x) + D_x g(x) h_1 + \omega_g(h_1)$$
$$f(y+h_2) = f(y) + D_y f(y) h_2 + \omega_f(h_2)$$
$$\lim_{\substack{x+h_1 \in D_y \\ \|h_1\| \to 0}} \frac{\|\omega_g(h_1)\|}{\|h_1\|} = 0$$
$$\lim_{\substack{y+h_2 \in D_y \\ \|h_2\| \to 0}} \frac{\|\omega_f(h_2)\|}{\|h_2\|} = 0$$
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x+h_1) &= f(g(x+h_1)) = f(y+\eta), \quad \eta := D_x g(x) h_1 + \omega_g(h_1) \\ &= f(y) + D_y f(y)\eta + \omega_f(\eta) \\ &= f(y) + D_y f(y) D_x g(x) h_1 + D_y f(y) \omega_g(h_1) + \omega_f(D_x g(x) h_1 + \omega_g(h_1)) \\ &= (f \circ g)(x) + D_y f(y) D_x g(x) h_1 + \omega_{f\circ g}(h_1) \\ \omega_{f\circ g}(h_1) &:= D_y f(y) \omega_g(h_1) + \omega_f(D_x g(x) h_1 + \omega_g(h_1))\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen $\omega_{f\circ g} = \wr(h_1)$. Nach Voraussetzung gilt $\omega_{f\circ g} \xrightarrow{h_1 \to 0} 0$

□

Lemma 2.13 Sei $A : [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times m}$ stetig, dann gilt

$$\left\| \int 0^1 A(s)\mathrm{d}s \right\|_M \leq \int_0^1 \|A(s)_M \mathrm{d}s\|, \|A\|_M := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$$

$\int A = \left(\int a_{ij}\right)_{ij}, \sigma(A) :=$ Menge der Eigenwerte von A

Satz 2.14 Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar mit J_f als Jacobi-Matrix, so gilt

$$f(x+h) - f(x) = \left(\int_0^1 J_f(x+sh)\mathrm{d}s\right)h$$

Beweis Definiere $g_j(s) := f_j(x+sh)$, dann ist $g_{j_1} : [0,1] \to \mathbb{R}$, also gilt

$$f_j(x+sh) - f_j(x) = g_j(1) - g_j(0) = \int_0^1 g_j'(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x+sh)h_i \mathrm{d}s$$

□

Bemerkung Im Fall $m = 1$ kann man aus dem Mittelwertsatz für Integrale schließen, dass

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 J_f(x+sh)h\mathrm{d}s = J_f(x+\tau h)h$$

$x_1 + h = x_2 \implies h = x_2 - x_1$

Korollar 2.15 Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Ferner sei $x \in D$ mit $K_r(x) \subset D, r > 0$, dann gilt

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leq M\|x-y\|_2, y \in K_r(x), M := \sup_{z \in K_r(x)} \|J_f(z)\|_M$$