

Übungszettel 4

Robin Heinemann

January 20, 2017

Aufgabe 4.1

Herleitung des Newtonverfahren für Kubikwurzeln

Es ist gegeben

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} - \frac{f(x^{(t)})}{f'(x^{(t)})}$$

im Fall der Kubikwurzeln gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - y \\ f(x^*) &= 0 \\ x^* &= \sqrt[3]{y} \end{aligned}$$

Damit erhält man für $x^{(t+1)}$:

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} - \frac{x^{(t)3} - y}{3x^{(t)2}} = \frac{2x^{(t)3} + y}{3x^{(t)2}}$$

Als Abbruchbedingung könnte man wählen:

$$|x^{(t)3} - y| \leq \varepsilon$$

Für ein kleines ε zum Beispiel ist $\varepsilon = 10^{-15}y$ für double sinnvoll, denn diese sind nur auf genau 16 Nachkommastellen genau, also könnte eine höhere Genauigkeit mit trivialen Methoden gar nicht erreicht werden

Aufgabe 4.2b

Herleitung von n ist Quadratzahl $\implies (n \bmod 4) \in \{0, 1\}$ n Quadratzahl $\implies \exists a \in \mathbb{N} : a^2 = n$

$$n \bmod 4 = (a \cdot a) \bmod 4 = ((a \bmod 4)(a \bmod 4)) \bmod 4$$

Für $a \bmod 4$ gibt es 4 verschiedene Fälle:

$$1. \ a \bmod 4 = 0 \implies \underbrace{((a \bmod 4)(a \bmod 4))}_{=0} \bmod 4 = 0$$

$$2. \ a \bmod 4 = 1 \implies \underbrace{((a \bmod 4)(a \bmod 4))}_{=1} \bmod 4 = 1$$

$$3. \ a \bmod 4 = 2 \implies \underbrace{((a \bmod 4)(a \bmod 4))}_{=4} \bmod 4 = 0$$

$$4. \ a \bmod 4 = 3 \implies \underbrace{((a \bmod 4)(a \bmod 4))}_{=9} \bmod 4 = 1$$

$$\implies n \text{ Quadratzahl} \implies (n \bmod 4) \in \{0, 1\}$$