

## 1 Mengen und Zahlen

Quantoren, Mengen (operationen), Äquivalenzrelationen, Abbildungen

$f: X \rightarrow Y$  heißt

injektiv, wenn  $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

surjektiv, wenn  $f(X) = Y \iff \forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$

bijektiv, wenn surjektiv und injektiv  $\iff \exists! g : Y \rightarrow X, g \circ f = \text{id}_X, f \circ g = \text{id}_Y$

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  injektiv/surjektiv  $\implies g \circ f$  injektiv/surjektiv.

$g \circ f$  injektiv  $\implies f$  injektiv

Natürliche Zahlen:

Peano-Axiome

**vollständige Induktion**

Körper  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ , Ordnungsrelationen

Abzählbarkeit:  $n \in \mathbb{N}, A_n := \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\} = \{1, \dots, n\}$

Menge  $M$  heißt

endlich, wenn es ein  $n \in \mathbb{N}$  und eine bijektive Abbildung  $f: M \rightarrow A_n$  gibt.

abzählbar unendlich, wenn es eine bijektive Abbildung  $f: M \rightarrow \mathbb{N}$  gibt.

$(\mathbb{N}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ , kartesisches Produkt abzählbarer Mengen, abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen) überabzählbar, wenn sie weder endlich noch abzählbar ist.

$(\mathbb{R}$ , Menge der Folgen mit Werten in  $\{0, 1\}$ ) höchstens abzählbar, wenn sie abzählbar oder endlich ist

Schranken:  $M$  Menge,  $A \subseteq M$ , dann heißt  $S \in M$

obere Schranke, wenn  $\forall x \in A : x \leq S$

untere Schranke, wenn  $\forall x \in A : x \geq S$

Supremum von  $A$ , wenn für alle oberen Schranken  $S'$  von  $A$  gilt  $S' \geq S$

Infimum von  $A$ , wenn für alle unteren Schranken  $S'$  von  $A$  gilt  $S' \leq S$

Axiome der reellen Zahlen: Körper, geordnet, Einbettung von  $\mathbb{N}$

Vollständigkeit: Jede nach oben beschränkte Teilmenge hat ein Supremum.

Archimedisches Prinzip:  $\forall x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : x \leq n$

$M \subseteq \mathbb{R}$  beschränkt:

$S$  (obere Schranke) ist Supremum  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : S - \varepsilon \leq x$

$S$  (untere Schranke) ist Infimum  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : S + \varepsilon \geq x$

$\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$  beschränkt, sodass  $A \subseteq B$ , dann  $\sup A \leq \sup B$

Monotonie:

$f: A \rightarrow B$  heißt (streng) monoton wachsend, wenn  $x \leq y \implies f(x) \leq (<) f(y)$

$f: A \rightarrow B$  heißt (streng) monoton fallend, wenn  $x \leq y \implies f(x) \geq (>) f(y)$

Betrag:  $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

Signum:  $\text{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}, x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, |x + y| \leq |x| + |y|, ||x| - |y|| \leq$

$|x - y|, |x - y| \leq \varepsilon \iff x - \varepsilon \leq y \leq x + \varepsilon$

Fakultät/Binomialkoeffizient:  $k, n \in \mathbb{N}_0$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Binomialsatz:  $\forall n \in \mathbb{N}_0, x, y \in \mathbb{R}$  gilt:

$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

Bernoulli-Ungleichung: Für  $x \geq -1, n \in \mathbb{N}$  gilt

$(1 + x)^n \geq 1 + nx$

Intervalle:  $D \subseteq \mathbb{R}$  heißt Intervall, wenn es für  $x, y \in D$  mit  $x \leq y$  für alle  $z \in \mathbb{R}$  mit  $x \leq z \leq y$  gilt  $z \in D$

(beschränkt) offene Intervalle  $(a, b), a, b \in \mathbb{R}$

(beschränkt) abgeschlossene Intervalle  $[a, b], a, b \in \mathbb{R}$

Halbgeraden

$(a, \infty), (-\infty, b), [a, \infty), (-\infty, b], a, b \in \mathbb{R}$

reelle Gerade  $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Komplexe Zahlen: definiere auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$+: (x_1, y_1), (x_2, y_2) \mapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$\cdot: (x_1, y_1), (x_2, y_2) \mapsto (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$

$\mathbb{C} := (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$  ist Körper mit Lösungen der Gleichung

$(x, y) \cdot (x, y) + (1, 0) = (0, 0)$  der Form  $\pm i := (0, \pm 1)$

Schreibweise:  $z \in \mathbb{C}, z = x + iy$

$x = \Re(z), y = \Im(z), \mathbb{R}$  ist eingebetteter Unterkörper

$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = 0\}$

$|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+, z \mapsto \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$

$\bar{\cdot}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z} := \Re(z) - i\Im(z)$

$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Es existiert keine Ordnungsrelation auf  $\mathbb{C}$ , die die Körperstruktur respektiert. ( $0 < i^2 < i^2 + 1 = 0^2$ )

Fundamentalsatz der Algebra:

Jedes Polynom  $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{C}$  hat eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$

**2 Folgen und Reihen**

(reelle) Folge ist Abbildung  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$a(n) =: a_n, a =: (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen den Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$ , wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  existiert, sodass

$|a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq N_\varepsilon$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt Cauchy-Folge, wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  existiert, sodass

$|a_n - a_m| \leq \varepsilon \forall m \geq n \geq N_\varepsilon$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert  $\iff (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Cauchy-Folge.

$a$  heißt Häufungswert der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wenn für alle  $\varepsilon > 0$  unendlich viele Folgenglieder im Intervall  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  liegen.

jeder Grenzwert ist auch ein Häufungswert (aber nicht notwendig umgekehrt)

Grenzwerte sind eindeutig (Häufungswerte aber nicht notwendig).

$M \subseteq \mathbb{R}$ ,  $a$  Häufungspunkt von  $M$ , wenn für alle  $\varepsilon > 0$  unendlich viele  $x \in M$  im Intervall  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge,  $M := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , dann  $a$  Häufungswert der Folge  $\iff a$  Häufungspunkt der Menge, **aber** nicht notwendig umgekehrt,  $(a_n := 1 \forall n \in \mathbb{N})$

Eigenschaften des Grenzwerts

Eindeutigkeit: sind  $a, a'$  Grenzwert der Folge

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , dann gilt  $a = a'$

Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte, monoton wachsende Folge  $M := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , dann  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sup M$

Ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte, monoton fallende Folge  $M := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , dann  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf M$

Stabilität: Sind  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergente Folgen mit Grenzwert  $a, b$ , dann

$(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$

$(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \cdot b$

$|a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a|$

$b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}, b \neq 0 : a_n/b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a/b$

Ist  $a = b, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge mit  $a_n \leq c_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$ , dann  $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a = b$

$\exists \gamma \in (0, 1) : |b_{n+1}| \leq \gamma |b_n| \forall n \in \mathbb{N} \implies b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$1/n, 1/n^2, 1/n^3, \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

geometrische Folge,  $|q| < 1$

$a_n = cq^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\sum_{k=0}^n cq^k = c \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - q}$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}$

$|x| > 1 : \frac{x^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \frac{n!}{n^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Bolzano-Weierstraß: Sei  $A \subseteq \mathbb{R}$ , dann sind folgende Aussagen äquivalent:

$A$  ist beschränkt und abgeschlossen.

jede Folge in  $A$  hat einen Häufungswert in  $A$ .

jede Folge in  $A$  hat eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert  $A$ .

Jede Folge hat eine monotone Teilfolge.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow$  Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Folge der Partialsummen  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

Konvergenzkriterien:

Notwendig:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Nullfolge

Cauchy:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > m \geq N_\varepsilon :$

$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon$

Leibnitz:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  alternierend und  $|a_n|$  ist monoton fallend und  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Außerdem

$\left| \sum_{k=m}^{\infty} a_k \right| \leq |a_m| \forall m \in \mathbb{N}$

Absolute Konvergenz:  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent

Majorante: Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  (absolut) konvergent und gilt

$|a_k| \leq b_k$  für fast alle  $k \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut konvergent.

Minorante: Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergent und gilt  $b_k \leq |a_k|$

für fast alle  $k \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergent.

Wurzelkriterium: wenn es  $q \in (0, 1)$  mit  $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \forall k \implies$  absolute Konvergenz  $\sum a_k$

(alternativ:  $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$  Konvergenz,  $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \implies$  Divergenz)

Quotientenkriterium: wenn es  $g \in (0, 1)$  gibt mit  $|a_{n+1}/a_n| \leq g < 1 \implies$  absolute Konvergenz  $\sum a_k$

(alternativ:  $\limsup |a_{k-1}/a_k| < 1$ )

Cauchy'scher Verdichtungssatz: Reihe  $\sum a_k, a_k \geq 0, a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ , dann gilt

$\sum a_k \iff \sum 2^k a_{2^k}$

Teleskopreihe  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Nullfolge  $\implies$

$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_1$

oder auch

$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_1 - S \iff \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k-1}) = S$

Umordnungssatz: Ist  $\sum a_n$  absolut konvergent, dann gilt  $\forall \tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  (bijektiv) ist auch  $\sum a_{\tau(n)}$  absolut konvergent mit dem gleichen Grenzwert.

Potenzreihen:  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ . Entwicklungspunkt  $x_0$ .

Potenzreihe konvergieren absolut  $\forall x \in \mathbb{C}$  mit

$|x - x_0| < \rho := \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$

(mit der Konvention  $1/\infty = 0, \frac{1}{0} = \infty$ )

$\rho$  heißt Konvergenzradius.

**3 Stetige Funktionen**

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt stetig in  $x_0 \in D$  wenn für alle Folgen in  $D$  mit  $x_n \xrightarrow{x \rightarrow x_0} x_0$  gilt

$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$

$f$  heißt stetig auf  $D$ , wenn  $f$  in allen Punkten von  $D$  stetig ist.

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$  hat in  $x_0 \in \bar{D}$  einen Grenzwert, wenn für alle Folgen in  $D$  mit  $x_n \xrightarrow{x \rightarrow x_0} x_0$  gilt

$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ , schreibe  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$

einseitiger Grenzwert:

$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) := \lim_{x \rightarrow x_0} f|_{\{x > x_0\}}(x)$

$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) := \lim_{x \rightarrow x_0} f|_{\{x < x_0\}}(x)$

Asymptotik:  $f: D \rightarrow \mathbb{R}, D$  unbeschränkt.

$f$  hat Grenzwert  $a$  in  $\infty$ , wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists c \in \mathbb{R} : |f(x) - a| < \varepsilon \forall x > c$

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \pm \infty$ , wenn  $\forall c \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : f(x) > c, < -c \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (D \setminus \{x_0\})$

Stetigkeit ist stabil gegenüber punktwisen Summen, Produkt, Quotient ( $\neq 0$ ) und Komposition, das heißt

$f, g$  stetig  $\implies f + g, f \cdot g, (f/g) (g \neq 0), g \circ f$  stetig.

$(f + g)(x) = f(x) + g(x), (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$

$\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium:  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig in  $x_0 \in D$ ,  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{\varepsilon, x_0} > 0 : \forall x \in D :$

$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$   
 gleichmäßige Stetigkeit: Eine stetige Funktion  $f$  heißt gleichmäßig stetig, wenn  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x, y \in D : |x - y| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$   
 Lipschitz-Stetigkeit:  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt Lipschitzstetig, wenn es  $L > 0$ , sodass  $\forall x, y \in D$  gilt  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$   
 Lipschitz-stetig  $\implies$  gleichmäßig stetig  $\implies$  stetig.  
 Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit:  
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig  $\implies f$  ist gleichmäßig stetig auf  $[a, b]$  Abbildungseigenschaften stetiger Funktionen:

Satz vom Extremum: Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $D$  beschränkt und abgeschlossen. Dann existieren  $x_{\min}, x_{\max}$ , sodass  $\sup_{x \in D} f(x) = f(x_{\max})$   $\inf_{x \in D} f(x) = f(x_{\min})$   
 Zwischenwertsatz: Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann gibt es zu  $y \in [f(a), f(b)]$  ein  $\xi \in (a, b)$ , sodass  $f(\xi) = y$  (stärker:  $\forall y \in [\min f, \max f]$ )  
 Monotonie:  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist genau dann injektiv, wenn sie streng monoton ist.  
 Funktionsfolgen:  $n \in \mathbb{N}, f_n : D \rightarrow \mathbb{N}$   
 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert punktweise, wenn für alle  $x \in D$  die Zahlenfolge  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen Grenzfunktion  $f : f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ . (sprich:  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq N_{\varepsilon, x}$ )  
 gleichmäßige Konvergenz:  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt gleichmäßig konvergent auf  $D$  gegen die Grenzfunktion  $f$ , wenn  $\forall \varepsilon > 0$   
 $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq N_\varepsilon \forall x \in D$   
 $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f$ , dann ist auch  $f$  stetig.  
 Funktionenräume:  $\mathcal{C}([a, b]) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$   
 $\mathbb{R}$ -Vektorraum (in der Regel unendlich dimensional)  
 $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}_+, f \mapsto \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$   
 Norm, normierter Raum  $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$   
 $\forall x, y \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ :  
 $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Konvergenzbegriff in Norm:  $f_n \rightarrow f$  bezüglich  $\|\cdot\|_\infty \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \forall n \geq N$  Satz von Arzela-Ascoli:  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}([a, b])$  Folge von gleichmäßig beschränkten (das heißt  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$ ) und gleichgradig stetig (das heißt  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall n \in \mathbb{N} : \sup_{|x-y| < \delta} |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ ) dann gibt es eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in  $\mathcal{C}([a, b])$  bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$   
**4 Differentialrechnung**  
 $f : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D$ , definiere  
 $D_h f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$   
 $f$  heißt differenzierbar in  $x_0$ , wenn für jede Nullfolge  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Folge der Differenzenquotienten  $(D_{h_n} f(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_{h_n} f(x_0)$  heißt Ableitung von  $f$  im Punkt

$x_0, f'(x_0)$ .  
 Alternativ:  $\exists L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + r(x - x_0)$  mit  $r(x - x_0)/(x - x_0) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0, f'(x_0) = L$   
 $f$  differenzierbar in  $x_0 \implies f$  stetig in  $x_0$ .  
 $f$  ist differenzierbar auf  $D$ , wenn  $f$  in jedem Punkt differenzierbar ist.  
 Fasse  $f'$  als Funktion  $f' : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$   
 $f$  heißt stetig differenzierbar, wenn  $f'$  stetig ist.  
 $n$ -te Ableitung:  $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0), f^{(0)} = f$ .  
 $f$  heißt glatt, wenn  $f^{(n)}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  existiert.  
 Stabilität:  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D$   
 Linearität:  $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$   
 Produktregel:  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$   
 hat  $g$  keine Nullstelle, so gilt:  
 Quotientenregel:  $(f/g)'(x_0) = (f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0))/g^2(x_0)$   
 Kettenregel:  $f : D \rightarrow D', g : D' \rightarrow \mathbb{R}$  beide differenzierbar in  $x_0 \in D, f(x_0) \in D'$ . dann ist  $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$  Satz von der inversen Funktion:  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, injektiv,  $D$  abgeschlossen,  $f$  differenzierbar in  $x_0 \in D, f : D \rightarrow f(D)$  bijektiv  $\implies \exists f^{-1} : f(D) \rightarrow D$  und es gilt  $(f^{-1})'(f(x_0)) = 1/f'(x_0)$   
 Extremwertheorie:  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  hat in  $x_0 \in D$  ein globales Extremum wenn gilt:  
 $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in D$  (Maximum)  
 $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in D$  (Minimum)  
 $f$  hat ein lokales Extremum, wenn obige Bedingungen auf einer  $\delta$ -Umgebung von  $x_0$  zutreffen.  
 Satz von Extremum: (notwendige Bedingung)  
 $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar hat lokales Extremum in  $x_0 \in (a, b)$ , dann gilt  $f'(x_0) = 0$   
 1. Mittelwertsatz: Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und differenzierbar in  $(a, b)$ , dann gibt es  $x \in (a, b)$ , sodass

$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$   
 Hinreichende Bedingung: Sei  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar mit  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) \neq 0$ , dann folgt  $f$  hat in  $x_0$  ein lokales Extremum. (Maximum für  $<$ , Minimum für  $>$ )  
 Taylorentwicklung:  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -mal stetig differenzierbar  
 $t_n(x_0, x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$   
 $n$ -te Taylorpolynom mit Entwicklungsstelle  $x_0$ .  
 $f$   $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar, dann gibt es zu jedem  $x \in (a, b)$  ein  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x$ , sodass  
 $f(x) - t_n(x_0, x) = R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$   
 $f$  glatt  $\implies$   
 $t_\infty(x_0, x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$   
 $f$  ist analytisch in  $x_0$ , wenn es in  $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$  eine Umgebung gibt, sodass  $f(x) = t_\infty(x_0, x)$  Regel von L'Hospital:  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  sodass  $g'(x) \neq 0$

und der Grenzwert  $f'(x)/g'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c \in \mathbb{R}$ , dann gilt:  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \in \{-\infty, 0, \infty\} \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$   
 Differentiation und Limes:  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Folge stetig differenzierbarer Funktionen auf beschränkten Intervallen mit punktweisen Grenzwert  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$  und gilt  $f'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^*$  gleichmäßig, dann gilt  $f$  ist differenzierbar mit  $f'(x) = f^*(x)$   
**5 Integration**  
 Zerlegung:  $[a, b], Z := \{x_0, \dots, x_n\}, x_0 = a, x_n = b, x_0 < x_1 < \dots < x_n$ .  
 Feinheit:  $h := \max_{k=1, \dots, n} |x_k - x_{k-1}|$   
 Zerlegung äquidistant:  $\iff h$  konstant in  $k$ .  
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, Z$  Zerlegung,  $I_k = [x_{k-1}, x_k]$

Obersumme:  $\bar{S}_Z f(x) := \sum_{k=1}^n \sup_{x \in I_k} f(x) (x_k - x_{k-1})$   
 Untersumme:  $\underline{S}_Z f(x) := \sum_{k=1}^n \inf_{x \in I_k} f(x) (x_k - x_{k-1})$   
 Oberintegral:  $\int_a^b f(x) dx := \inf_{Z \in \mathcal{Z}(a, b)} \bar{S}_Z f(x)$   
 Unterintegral:  $\int_a^b f(x) dx := \sup_{Z \in \mathcal{Z}(a, b)} \underline{S}_Z f(x)$   
 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$   
 $f$  heißt Riemann-integrierbar, wenn  
 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$   
 $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists Z \in \mathcal{Z}(a, b) |\bar{S}_Z f(x) - \underline{S}_Z f(x)| < \varepsilon$   
 Riemannsche Summe:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, Z$  Zerlegung,  $\xi_k \in I_k$   
 $RS_Z(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1})$

Sei  $f$  beschränkt.  $f$  ist Riemann-integrierbar  $\iff \forall (Z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{Z}(a, b)$  mit  $h_n \rightarrow 0$  die zugehörigen Riemannschen Summen konvergieren und den gleichen Grenzwert haben.  
 stetige Funktionen sind integrierbar.  
 monotone Funktionen sind integrierbar.  
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, dann auch für jedes  $[c, d] \subseteq [a, b]$  und es gilt für  $c \in [a, b]$ :  
 $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$   
 Ferner ist das Integral linear, das heißt  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :  
 $\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$   
 Monoton:  $g(x) \geq f(x) \forall x \in [a, b] \implies$ :  
 $\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$   
 Standardabschätzung:  $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b] \implies$ :  
 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

Definitheit:  $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b], \int_a^b f(x) dx = 0 \implies f(x) = 0$   
 Mittelwertsatz:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar ohne Voraussetzungen, dann gibt es  $\xi \in [a, b]$  mit  
 $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$  Stammfunktion:  
 $F, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, F$  differenzierbar heißt Stammfunktion von  $f$ , wenn gilt:  $F' = f$ .  
 Fundamentalsatz der Analysis:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig  $\implies$ :  
 $F(x) = \int_a^x f(x) dx$  ist eine Stammfunktion von  $f$ .  
 Ist  $F$  Stammfunktion von  $f$ , dann gilt:  
 $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$   
 Partielle Integration:  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, dann gilt:  
 $\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$   
 Substitution:  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  stetig differenzierbar, dann gilt:  
 $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$