

Experimentalphysik II (H.-C. Schulz-Coulon)

Robin Heinemann

28. Juni 2017

Inhaltsverzeichnis

11 Elektrostatik	2
11.1 Elektrische Ladung	2
11.2 Mikroskopische Deutung	3
11.3 Coulombsches Gesetz	3
11.4 elektrisches Feld	4
11.5 Elektrischer Fluss	4
11.6 Elektrische Felder innerhalb von Leitern	7
11.7 Differentielle Form des Gaußschen Gesetzes	7
11.8 Elektrisches Potential	7
11.9 Grundgleichungen der Elektrostatik	8
11.10 Elektrische Felder geladener Felder	9
11.11 Elektrischer Dipol	11
11.12 Kapazität und Kondensator	12
11.13 Kondensator als Energiespeicher	13
11.14 Dielektrika - Elektrostatik in Materie	14
12 Elektrische Gleichströme	16
12.1 Strom und Stromdichte	16
12.2 Elektrischer Widerstand und Ohmsches Gesetz	17
12.3 Elektrische Leistung	19
12.4 Stromkreise - Kirchhoffsche Regeln	19
12.5 Strom und Spannungsquellen	20
12.6 Strom und Spannungsmessung	20
13 Magnetostatik	21
13.1 Magnetfelder und bewegte Ladungen	22
13.2 Grundgleichungen der Magnetostatik	24
13.3 Zwei Anwendungsbeispiele	24
13.4 Biot-Savart-Gesetz	25

14 Materie im Magnetfeld	26
14.1 Magnetisierung und magnetische Erregung	26
14.2 Dia-, Para- und Ferromagnetismus	28
14.3 Feldgleichungen in Materie	30
15 Induktion und elektromagnetische Wechselfelder	30
15.1 Magnetische Induktion	31
15.2 Generatoren	32
15.3 Induktivität und Selbstinduktion	32
15.4 Verschiebungsstrom	33
16 Schaltvorgänge, Wechselstrom und Schwingkreise	35
16.1 Induktivität im Stromkreis (LR-Glied)	35
16.2 Kapazität im Stromkreis (RC-Glied)	36
16.3 R, L, C im Wechselstromkreis	37
16.4 Komplexe Darstellung	39
16.5 RLC-Schwingkreis	41
16.6 Transformator	43
16.7 Elektrische und magnetische Feldenergie	44
17 Elektromagnetische Welle	45
17.1 Mechanische Wellen	45
17.2 Wellengleichung	46
17.3 Wellenpakete, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit	47
17.4 Elektromagnetische Wellengleichung	48
17.5 Struktur elektromagnetischer Wellen	50
17.6 Energietransport elektromagnetischer Welle	51
17.7 Erzeugung elektromagnetischer Wellen	52

11 Elektrostatik

11.1 Elektrische Ladung

- Neue Kraft
- anziehend oder abstoßend
- Konzept der elektrischen Ladung

Experimentelle Erkenntnisse:

- Erzeugung von Ladungen durch Reibung
- Ladungen gleicher Vorzeichen: Abstoßung
- Ladungen ungleicher Vorzeichen: Anziehung

- Ladung kann transportiert werden
- Elektrische Kräfte sind Fernkräfte
- Ladungen sind erhalten

Definition 11.1 Influenz Ladungstrennung durch die (Fern) Wirkung elektrischer Kräfte nennt man Influenz oder elektrostatische Induktion.

11.2 Mikroskopische Deutung

Elektron: negativ

Proton: positiv

Atome elektrische neutral

- Z: Anzahl Protonen / Elektronen
- N: Anzahl Neutronen
- A: Anzahl Neutronen + Protonen

Leiter und Nichtleiter: Unterschiedliche Verfügbarkeit von Ladungsträgern

11.3 Coulombsches Gesetz

Experimentelles Resultat:

$$\vec{F}_C = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Definition 11.2

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

mit $\epsilon_0 = 8.854\,16 \times 10^{-12} \text{ C N}^{-1} \text{ m}^{-2}$

Vergleich: Coulomb vs. Gravitation

$$\vec{F}_G = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$\vec{F}_C = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$\frac{F_C}{F_G} = 227 \times 10^{39}$$

11.4 elektrisches Feld

Definition 11.3 (Elektrisches Feld)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_C(\vec{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = q \vec{E}(\vec{r})$$

Das elektrische Feld hängt nur von der Ladung Q ab, aber nicht von der Testladung q . Es gilt damit:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q \vec{E}(\vec{r})$$

Bedeutung des elektrischen Feldes:

Coulomb-Gesetz beschreibt Fernwirkung.

Aber: Wodurch wird diese Wirkung übertragen?

Geschieht die Übertragung instantan? (nein!)

Feldwirkungstheorie: Elektrische Kraftübertragung über Ausbreitung des elektrischen Feldes, das mit der Probeladung q . Elektrostatik: Fernwirkung- und Feldwirkungstheorie äquivalent.

Elektrodynamik: Feldbegriff essentiell.

Feld einer allgemeinen Ladungsverteilung:

Wichtig: Es gilt das Superpositionsprinzip. Es gilt

$$dQ = \rho(\vec{r}) dV$$

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} \rho(\vec{r}) dV$$

Für diskrete Ladungen:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Die Anwesenheit von Ladungen verändert den Raum. Es entsteht ein Vektorfeld, dessen Stärke und Richtung in jedem Raumpunkt die normierte Kraft $\frac{\vec{F}}{q}$ auf eine Probeladung angibt.

Eigenschaften der Feldlinien

1. Das \vec{E} -Feld zeigt tangential zu den Feldlinien
2. Feldlinien zeigen weg von positiven Ladungen
3. Feldliniendichte entspricht Stärke des Feldes.

11.5 Elektrischer Fluss

Definition 11.4 (Elektrischer Fluss ϕ_E) Maß für die Anzahl der Feldlinien, die Fläche A durchstoßen.

Für geschlossene Oberflächen:

$$Q_{\text{innen}} = 0 \implies \phi_E = 0$$

$$Q_{\text{innen}} > 0 \implies \phi_E > 0$$

$$Q_{\text{innen}} < 0 \implies \phi_E < 0$$

Mathematisch:

- Homogenes Feld, \perp zur Oberfläche $\implies \phi_E = EA$
- Homogenes elektrisches Feld $EA' = EA \cos \theta = \vec{E} \vec{A} = \vec{E} \vec{n} A$

Verallgemeinerung:

$$\Delta \phi_i = \vec{E}_i \vec{n}_i \Delta A_i$$

$$\phi_E = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum \vec{E}_i \vec{n}_i \Delta A$$

$$\phi_A = \int \vec{E} d\vec{A} \quad (\text{Definition von Elektrischem Fluss})$$

Ladung einer Kugel:

$$\begin{aligned} \phi_A &= \int \vec{E} d\vec{A} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \int d\vec{D} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} 4\pi R^2 \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Definition 11.5 (Gauß'sches Gesetz (1. Maxwell-Gleichung))

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{\text{innen}}}{\epsilon_0}$$

Das Gauß'sche Gesetz ist allgemeingültig, da:

$$\begin{aligned} \oint_{A_2} \vec{E} d\vec{A} - \oint_{A_1} \vec{E} d\vec{A} &= 0 \\ \oint_{A_2} \vec{E} d\vec{A} &= \oint_{A_1} \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{\text{innen}}}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Zusammen mit Superpositionsprinzip und homogener Fläche erhält man die Allgemeingültigkeit des Gauß'schen Gesetz.

Herleitung des Coulombschen Gesetz mit Gauß'schen Gesetz:

$$\begin{aligned}\oint \vec{E} d\vec{A} &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ E \oint d\vec{A} &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ E 4\pi R^2 &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ E(R) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R^2}\end{aligned}$$

Beispiel 11.6 (Unendlich langer Draht) Ladungsdichte: $\lambda = Q/L$

$$\vec{E}(\vec{R}) = \vec{E}(R)$$

- Mantelfläche: $\vec{E} \parallel d\vec{A}$
- Deckel: $\vec{E} \perp d\vec{A}$

$$\phi_E = \oint \vec{E} d\vec{A} = \int_{\text{Mantel}} \vec{E} d\vec{A} + \underbrace{\int_{\text{Deckel}} \vec{E} d\vec{A}}_{=0} = E \int_{\text{Mantel}} dA = E 2\pi R L = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\frac{Q}{L}}{2\pi R \varepsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R}$$

Beispiel 11.7 (Unendlich ausgedehnte Flächenladung) Flächenladungsdichte: $\sigma = Q/A$

Symmetrie:

\vec{E} konstant für festen Abstand.

$\vec{E} \parallel \vec{A}$

$$\phi_E = \oint \vec{E} d\vec{A} = \underbrace{\int_{\text{Mantel}} \vec{E} d\vec{A}}_0 + \int_{\text{Deckel}} \vec{E} d\vec{A} = EA_1 + EA_2 = 2EA$$

$$\phi_E = 2EA = \frac{Q}{\varepsilon_0} \implies E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Beispiel 11.8 (Plattenkondensator)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

11.6 Elektrische Felder innerhalb von Leitern

Innerhalb eines Leiters verschwindet das elektrostatische Feld.

Bei einem geladenem, isolierten Leiter sitzen alle Ladungen auf der Oberfläche.

Dazu betrachte Oberfläche, die gerade kleiner als der Leiter ist, dort ist das Elektrische Feld gleich Null, also folgt:

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = 0 = \frac{Q_{\text{innen}}}{\varepsilon_0} \implies Q_{\text{innen}} = 0$$

Leiter mit Hohlraum:

$$\oint_O \vec{E} d\vec{A} = 0 \implies Q = 0$$

11.7 Differentielle Form des Gaußschen Gesetzes

$$\oint_A \vec{E} d\vec{A} = \int_V \text{div } \vec{E} dV$$

$$\text{div } \vec{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z$$

Zur Divergenz:

Schreibweise: $\text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$, $\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ in Anschauung:

$$\begin{aligned} \phi_E &= E_O \Delta A - E_i \Delta A \\ &= \Delta E_x \Delta A \\ &= \frac{\Delta E_x}{\Delta x} \Delta x \Delta A = \underbrace{\partial_x E_x}_{\text{„div“}} \Delta V \end{aligned}$$

$$\int_V \text{div } \vec{E} dV = \oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

Differentielle Form des Gauß Gesetz, 1. Maxwell Gleichung:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ρ : Ladungsdichte.

11.8 Elektrisches Potential

Coulombkraft ist konservativ da radialsymmetrisch.

$$W = E_{\text{pot}}(2) - E_{\text{pot}}(1) = - \int_1^2 \vec{F}_C d\vec{s}$$

$$\vec{F}_C = - \text{grad } E_{\text{pot}}$$

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}(\vec{r}) &= - \int_{\infty}^{+r} \vec{F}_C d\vec{r} = - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{Qq}{r^2} dr \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{r} \end{aligned}$$

(Theorie: Qq/r)

Definition 11.9 (Coulombpotential)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{E_{pot}(\vec{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \varphi(\infty) = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} d\vec{s} \\ \oint \vec{E} d\vec{s} &= 0 \\ \vec{E}(\vec{r}) &= - \text{grad } \varphi(\vec{r})\end{aligned}$$

Allgemeine Ladungsverteilung:

$$\varphi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|} dV$$

Definition 11.10 (Elektrische Spannung)

$$U_{12} = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi_{21} = - \int_1^2 \vec{E} d\vec{s}$$

11.9 Grundgleichungen der Elektrostatik

Integralform:

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \oint \vec{E} d\vec{s} = 0$$

Differentialform:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{rot } \vec{E} = 0$$

Stokes-scher Satz:

$$\oint_C \vec{E} d\vec{s} = \int_A \text{rot } \vec{E} d\vec{A}$$

Zur Rotation:

Schreibweise:

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{E} &= \vec{\nabla} \times \vec{E}, \vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \\ \text{rot } \vec{E} &= (\partial_y E_z - \partial_z E_y, \partial_z E_x - \partial_x E_z, \partial_x E_y - \partial_y E_x)\end{aligned}$$

Anschauung:

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{A} d\vec{s} &= \Delta E_z \Delta z - \Delta E_x \Delta x \\ &= \frac{\Delta E_z}{\Delta x} \Delta x \Delta z - \frac{\Delta E_x}{\Delta z} \Delta z \Delta x \\ &= \underbrace{(\partial_x E_z - \partial_z E_x)}_{\text{rot}} \Delta A\end{aligned}$$

Mathematik:

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{E} &= -\text{rot}(\text{grad } \varphi) = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = 0 \\ \text{div } \vec{E} &= -\text{div}(\text{grad } \varphi) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = -\vec{\nabla}^2 \varphi = -\Delta \varphi \\ &= -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

Definition 11.11 (Poissonsgleichung)

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Zentrale Gleichung der Elektrostatik

Definition 11.12 (Laplacegleichung)

$$\Delta \varphi = 0$$

Eckstein der mathematischen Physik [PTP3]

Realisierung eines Feldes der Form

$$\begin{aligned}\varphi &= ax^2 + by^2 + cz^2 \quad a, b, c > 0 \\ \Delta \varphi &= 2a + 2b + 2c > 0\end{aligned}$$

$2a + 2b + 2c$ ist immer $> 0 \implies$ solches Feld nicht möglich.

11.10 Elektrische Felder geladener Felder

„Einfach“: Berechnung für bekannte Ladungsverteilung.

„Schwierig“: Berechnung in Anwesenheit von Leitern.

Für statische Felder gilt:

im Leiter $\vec{E} = 0$

im Hohlraum $q = 0, \vec{E} = 0$

Oberfläche eines Leiters:

1. $\vec{E} \parallel \vec{A}$
2. $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$\begin{aligned}
 d\phi_E &= \vec{A} d\vec{A} = E dA \\
 &= \frac{dQ}{d\varepsilon_0} \\
 E &= \underbrace{\frac{dQ}{dA}}_{\sigma} \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}
 \end{aligned}$$

3. $\varphi = \text{const.}$ an Leiteroberfläche.

Berechnung von Verteilungen von Ladungen schwierig. Hier nur qualitatives Verständnis.

Kugelladung (Radius R):

Innen: $E = 0, \varphi = \text{const.}$

Außen: $E = 1/(4\pi\varepsilon_0)Q/r^2$

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(\vec{R}) &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\
 \vec{E}(\vec{R}) &= \frac{\vec{\varphi}(R)}{R}
 \end{aligned}$$

$\varphi = \text{const.} \implies$ Erzeugung hoher Felder für kleine R

Beispiel 11.13 (Zwei Kugeln (verbunden)) verbunden $\implies \varphi = \varphi_1 = \varphi_2 \implies Q_1/R_1 = Q_2/R_2$

$$\begin{aligned}
 R_1 &> R_2 \\
 \implies Q_1 &> Q_2 \\
 \sigma_1 &< \sigma_2 \\
 E_1 &< E_2
 \end{aligned}$$

kleiner Krümmungsradius \implies größeres Feld, größere Flächenladungsdichte.

Merke: Scharfe Kanten beziehungsweise kleiner Krümmungsradius bedeutet hohes E-Feld

Beispiel 11.14 (Halbraumleiter mit Ladung)

11.11 Elektrischer Dipol

Beispiel 11.15 (Dipol)

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\left|\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{d}\right|} + \frac{-q}{\left|\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{d}\right|} \right] \\ \varphi(\vec{r}) &= \frac{\vec{p}\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ \vec{p} &= q\vec{d} \\ \vec{E} &= -\text{grad } \varphi \\ E(\vec{r}) &= \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} \quad (\text{Elektrisches Dipolfeld (ohne Beweis)})\end{aligned}$$

Merke: Elektrischer Dipol, $r \gg d$

$$\varphi(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^2} \quad E(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^3}$$

Multipolentwicklung:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \frac{a_0}{r} + \frac{a_1}{r^2} + \frac{a_2}{r^3} + \dots \\ a_0 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \quad a_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \vec{p}\hat{r} \\ \vec{p} &= \int \rho(\vec{r})\vec{r}dQ\end{aligned}$$

Elektrischer Dipol im homogenem Feld:

Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F} = q \cdot \vec{d} \times \frac{1}{q} \vec{F} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Kräfepaar! \implies Ausrichtung im Feld. Potentielle Energie: Drehung eines Dipols im homogenen Feld, das heißt Arbeit wird frei oder wird geleistet. Wähle: $E_{pot} = 0$ für $r = 90^\circ$

$$E_{pot} = -\vec{F}\vec{s} = -\vec{p}\vec{E}$$

Dipol im inhomogenen Feld: das heißt an den beiden Enden des Dipols wirken unterschiedliche Kräfte. \implies Drehmoment + resultierende Kraft. Es gilt:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{d}\frac{d\vec{E}}{d\vec{r}} = \vec{p}\nabla\vec{E} \\ F_x &= \vec{p}\text{grad } E_x \\ F_y &= \vec{p}\text{grad } E_y \\ F_z &= \vec{p}\text{grad } E_z\end{aligned}$$

11.12 Kapazität und Kondensator

Leiter können Ladungen speichern (zum Beispiel: Leidener Flasche, Kondensator, Metallkugel).

Kondensator = Ladungsspeicher (Ladungen werden im Kondensator „kondensiert“, das heißt zusammengedrängt)

Frage: Was ist die Ladungsspeicherfähigkeit oder Kapazität eines Leiters? Dafür betrachte Kugelkonduktoren.

Gespeicherte Ladungsmenge auf einzelner Metallkugel:

$$\Delta\varphi = - \int_{\infty}^R \vec{E} d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \rightarrow Q = 4\pi\epsilon_0 R U$$

($\Delta\varphi = U$). Das heißt gespeicherte Ladung ist proportional zur angelegten Spannung U (Allgemein:

$\varphi(Q) \sim Q$, Superpositionsprinzip). Definiere Ladungsspeicherfähigkeit „pro Volt“

Definition 11.16 (Kapazität)

$$C = \frac{Q}{U} \quad Q = CU$$

$$[C] = 1 \text{ C V}^{-1} = 1 \text{ F}$$

Die Kapazität einer Leiteranordnung hängt von der Geometrie (und vom Material) ab. Kapazität eines Kugelkondensators: $C = 4\pi\epsilon_0 R$ (hier: freistehende Kugel). Einheit Farad ist sehr groß, da 1 C sehr groß ist.

Beispiel 11.17 Kapazität einer Kugel mit $R = 1 \text{ cm} \rightarrow C \approx 1 \times 10^{-12} \text{ F} = 1 \text{ pF}$

Kapazität der Erde mit $R = 7 \times 10^8 \text{ cm} \rightarrow C \approx 7 \times 10^{-4} \text{ F} = 700 \text{ F}$

Trotzdem heute: Superkondensatoren mit Kapazitäten bis zu $1 \times 10^4 \text{ F}$

Referenzpotential $\varphi = 0$ muss aber nicht im Unendlichen liegen. Allgemeiner Kondensator: Zwei Leiter mit Ladungen $+Q$ und $-Q$ (Realisierung durch Erdung) \implies Erhöhung der Kapazität durch Influenz.

Beispiel 11.18 (Kugelkondensator) (siehe Übungen)

Beispiel 11.19 (Plattenkondensator)

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0} \\ \implies U &= \varphi(x_2) - \varphi(x_1) = - \int_{x_1}^{x_2} \vec{E} d\vec{s} \\ &= -E \int_{x_1}^{x_2} ds = -\frac{Q}{\epsilon_0 A} d \\ \implies C &= \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \end{aligned}$$

- A : Fläche der Leiterplatte
- d : Leiterplattenabstand

Kondensatorschaltungen:

Parallelschaltung:

- Gleiche Spannung an allen C_i
- Verschiedene Werte C_i

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 Q &= Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n \\
 \frac{Q}{U} &= \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_2}{U} + \dots + \frac{Q_n}{U} \\
 \Rightarrow C &= C_1 + C_2 + \dots + C_n
 \end{aligned}$$

 \Rightarrow Gesamtkapazität parallelgeschalteter Kondensatoren

$$C_{ges} = \sum_{i=1}^n C_i$$

Reihenschaltung: Es gilt

$$\begin{aligned}
 U &= U_1 + U_2 + \dots + U_n \\
 \frac{Q}{C} &= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} \\
 \Rightarrow \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}
 \end{aligned}$$

 \Rightarrow Gesamtkapazität von in Reihe geschalteter Kondensatoren:

$$\frac{1}{C_{ges}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Kehrwert der Gesamtkapazität ergibt sich als Summe der Kehrwerte der Einzelkapazitäten

11.13 Kondensator als Energiespeicher

Energiedichte des elektrischen Feldes. Aufgeladener Kondensator = Energiespeicher. Frage: Wieviel Energie ist gespeichert? Hierzu betrachten wir einen Plattenkondensator: Ladungstransport von Platte A zu Platte B erfordert Arbeit

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow dW &= U dQ = \frac{Q}{C} dQ \\
 W_C &= \int \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{C} \int Q dQ = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2
 \end{aligned}$$

 \Rightarrow Im Plattenkondensator gespeicherte Energie:

$$E_C = \frac{1}{2} C U^2$$

gilt allgemein für in Kondensator gespeicherte Energie! (Herleitung unabhängig von Geometrie). Für Plattenkondensator gilt weiter:

$$E_C = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{d}U^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0(Ad)\frac{U^2}{d^2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 V E^2$$

Änderung des Blickwinkels: Energie im elektrischen Feld gespeichert \implies Energiedichte $\omega_e = E_C/V$

$$\implies \omega_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Gilt allgemein für alle elektrischen Felder im Vakuum.

11.14 Dielektrika - Elektrostatik in Materie

Beobachtung: Einbringen eines Isolators (Dielektrikum) in einen Kondensator hat großen Einfluß auf die Kapazität. Die Spannung sinkt \implies Kapazität steigt

Definition 11.20 (Permittivität)

$$C_{Diel} = \varepsilon_r C_{Vakuum} = \varepsilon_r C_0$$

auch Dielektrizitätskonstante, relative Dielektrizitätszahl, relative Permittivitätszahl.

Beispiel 11.21 (Plattenkondensator)

$$\begin{aligned} C_{Diel} &= \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d} \\ C_{Vak} \cdot U_{Vak} &= C_{Diel} U_{Diel} \\ \implies \frac{C_{vak}}{C_{Diel}} &= \frac{U_{Diel}}{U_{vak}} = \frac{E_{Diel}}{E_{vak}} = \frac{1}{\varepsilon_r} \\ E_{Diel} &= \frac{1}{\varepsilon_r} E_{vak} \end{aligned}$$

das heißt das Feld im Kondensator mit Dielektrikum reduziert.

Mikroskopische Beschreibung:

Isolator: Es gibt keine freien, beweglichen Ladungsträger. Aber Polarisation, das heißt Ausrichtung von Dipolen.

Kondensator

$$\begin{aligned} C_0 &= \varepsilon_0 \frac{A}{d} \\ C_{Diel.} &= \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d} \\ E_{Diel.} &= \frac{1}{\varepsilon_r} E_{Vakuum} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_r} E_0 \end{aligned}$$

$$\sigma_0 = \frac{Q_0}{A}$$

$$\sigma_p = \frac{Q_p}{A}$$

$$E_{Diel} = E_0 - E_p = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_0 - \sigma_p) = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \sigma_p = \sigma_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma_0 = \sigma_{frei} = \varepsilon_r \sigma_{tot}$$

$$\Rightarrow Q_0 = Q_{frei} = \varepsilon_r Q_{tot}$$

Polarisation mit Dipolmoment $\vec{p}_i = q_i \vec{d}_i$, $[P] = \text{C m}^{-2}$

Definition 11.22

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum \vec{p}_i$$

\vec{P} wächst mit stärkerer Ausrichtung des Dipols an. Und es gilt

$$|\vec{P}| = \frac{Q_p d}{V} = \frac{\sigma_p A d}{V} = \sigma_p$$

\Rightarrow Makroskopische Polarisation = Oberflächenladungsdichte auf Dielektrikum.

$$P = \sigma_p = \sigma_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = \varepsilon_0 E_{vak} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

$$= (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 E_{Diel}.$$

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}_{Diel}.$$

$$\chi = \varepsilon_r - 1$$

Definition 11.23 (Dielektrische Verschiebung)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_{Diel} + \vec{P}$$

$$= \varepsilon_0 \vec{E}_{vak} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_{Diel}.$$

Vakuum:

$$\vec{E}_{Diel} = \vec{E}_{vak} \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_{vak}$$

Dielektrikum

$$\vec{E}_{Diel} = \frac{1}{\varepsilon_r} \vec{E}_{vak} \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_{vak}$$

Allgemein:

$$E_{vak}^{\parallel} = E_{Diel}^{\parallel}, E_{vak}^{\perp} = \varepsilon_r E_{Diel}^{\perp}$$

$$D_{vak}^{\parallel} = \frac{1}{\varepsilon_r} D_{Diel}^{\parallel}, D_{vak}^{\perp} = D_{Diel}^{\perp}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E}_{vak} &= \frac{\rho_{innen}}{\varepsilon_0} \\ \implies \operatorname{div} \vec{D} &= \rho_{frei} \end{aligned}$$

\implies 1. Maxwell Gleichung in Materie

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{frei} \quad \oint \vec{D} d\vec{A} = Q_{frei}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_{frei}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad \oint \vec{D} d\vec{A} = \frac{Q_{frei}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

Elektrische Feldenergie im Dielektrikum

$$W_e = \frac{1}{2} C n^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{Q^2}{C_0}$$

$$\implies \omega_C = \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D}$$

Für gleiches Feld \vec{E} wächst die Energiedichte mit ε_r . Zur Energie des Feldes \vec{E} wird Polarisationsenergie der Dipole addiert.

12 Elektrische Gleichströme

12.1 Strom und Stromdichte

Definition 12.1 (Elektrischer Strom)

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$[I] = \text{C s}^{-1} = \text{A}$$

$$|\vec{j}| = \frac{I}{A} = \frac{dQ}{Adt}$$

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = n q_e \vec{v}_D$$

$$\dots \rho = \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

$$I = \int \vec{j} dA = \frac{dQ}{dt} = \int \dot{\rho} dV$$

12.2 Elektrischer Widerstand und Ohmsches Gesetz

Ladungsfluß entsteht aufgrund einer Potentialdifferenz beziehungsweise eines elektrischen Feldes.

$$U = \varphi_b - \varphi_a = E \Delta l$$

Spannungsänderung

- \implies Änderung Elektrisches Feld
- \implies Änderung der Ladungsträgergeschwindigkeit
- \implies Änderung von Stromdichte und Strom

Definition 12.2 (Differentieller Widerstand)

$$\vartheta = \frac{dU}{dI}$$

$$[S] = \text{A V}^{-1} = \text{S}$$

Definition 12.3 (Differentielle Leitfähigkeit)

$$S = \frac{dI}{dU}$$

$$[\vartheta] = \text{V A}^{-1} =$$

Beobachtung: Elektrischer Leiter: $\vartheta = \text{const.}$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{El}{I} \iff I = \frac{El}{R}$$

$$j = \frac{I}{A} = \frac{l}{RA} E = \sigma E = \eta q_e v_D$$

Satz 12.4 (Ohmsches Gesetz)

$$U = RI$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \eta_E \vec{v}_D$$

mit

$$\sigma = \frac{l}{RA} = S \frac{l}{A} \quad (\text{spezifische Leitfähigkeit})$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = R \frac{A}{l} \quad (\text{spezifischer Widerstand})$$

Für ohmschen Leiter muss $\vec{v}_D \sim \vec{E}$ gelten.

Drude Modell

Bewegung von Elektronen in Leitern. Thermische Bewegung: $v_{th} \approx 1 \times 10^6 - 1 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$.

Bewegung wird gestört durch Stöße mit Gitteratomen. Mittlere Zeit zwischen zwei Wechselwirkungen:

$$\tau = \frac{T}{N} \implies \lambda = \tau v_m$$

T : Messzeit, N : Anzahl der Stöße. Einschalten eines E-Feldes: Beschleunigung der Elektronen entgegen der Richtung des elektrischen Feldes \vec{E}

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m} \\ \implies \vec{v}_D(t) &= \vec{v}_{th} + \frac{q\vec{E}}{m}t \\ \vec{v}_D &= \underbrace{\langle \vec{v}_{th} \rangle}_{=0} + \frac{q\vec{E}}{m} \langle t \rangle = \frac{q}{E} m \tau = \mu \vec{E}\end{aligned}$$

Also gilt für einen ohmschen Leiter:

$$\vec{v}_D = \mu \vec{E}$$

mit μ : Elektronenbeweglichkeit

$$\mu = \frac{q}{\tau} m, [\mu] = \text{m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}$$

Mit

$$\begin{aligned}\vec{j} &= n q_e \vec{v}_D = n q_e \mu \vec{E} \\ \sigma &= n_e \mu = \frac{n q_e^2 \tau}{m}\end{aligned}$$

Beispiel 12.5 (Kupferdraht)

$$A = 1 \text{ mm}^2, I = 1 \text{ A}, j = \frac{I}{A} \implies v_D = 10 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$$

Jedes Atom trägt 1 Elektron bei.

Ohmscher Leiter: $\vartheta = \text{const.}$

$$\frac{d\vartheta}{dI} < 0 \text{ NTC, Heißleiter}$$

$$\frac{d\vartheta}{dI} > 0 \text{ PTC, Kaltleiter}$$

12.3 Elektrische Leistung

Strom I fließt durch Widerstand beziehungsweise Verbraucher, gewonnene kinetische Energie der Elektronen wird durch Stöße in Wärme umgewandelt.

$$W = QU = UIt$$

Definition 12.6 (Leistung)

$$P = UI$$

$$[P] = W = \text{J s}^{-1} = \text{A V}^{-1}$$

Für ohmschen Leiter:

$$P = RI^2 \iff P = \frac{U^2}{R}$$

Anwendungsbeispiel: Hochspannungsleitung. Transport von elektrischer Energie: Verluste durch Wärmeerzeugung in Überlandleitung. Ziel: Minimierung von Leistungsverlusten. Kraftwerk: $P = UI$

Überlandleitung:

- Spannungsabfall: $U_L = R_L I$
- Verlustleistung: $P_L = U_L I = R_L I^2 = U_L^2 / R$

das heißt Spannungsabfall beziehungsweise Verlustleistung klein falls I klein und U groß! \implies Hochspannungsleitung. Verfügbare Leistung: $P_V = P - P_L$

12.4 Stromkreise - Kirchhoffsche Regeln

Haushalt, elektrische Schaltungen, . . . Im Allgemeinen Netzwerke vieler Leiter, Spannungsquellen und Verbraucher. Zur Berechnung von Strömen und Spannungen:

Kirchhoffsche Regeln:

1. Knotenregel: An jedem Knoten gilt $\sum I_k = 0$ (Ladungserhaltung, folgt aus Kontinuitätsgleichung)
2. Maschenregel: Für jede Masche gilt: $\sum U_k = 0$ (Zirkulationsgesetz)

Für ohmsche Widerstände ergibt sich damit:

Reihenschaltung:

$$R = \sum_{i=1}^n R_i$$

Parallelschaltung:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

12.5 Strom und Spannungsquellen

Spannungsquelle mit Innenwiderstand R_i :

$$\begin{aligned} U_{kl} &= U_0 - IR_i \\ &= U_0 \frac{R_a}{R_a + R_i} \end{aligned}$$

\Rightarrow Ideale Spannungsquelle:

$$R_i \approx 0 \quad I \approx \frac{U_0}{R_a}$$

Stromquelle: Versorgung mit konstantem Strom. \Rightarrow hoher Innenwiderstand ($R_i \rightarrow \infty, R_i \gg R_a$)

$$I = \frac{U_0}{R_i + R_a} = \frac{U_0}{R_i} = \text{const.}$$

Technische Realisierung?

Prinzip: Ladungstrennung durch Energiezufuhr \Rightarrow Potentialdifferenz, leitende Verbindung \Rightarrow Stromfluß. Anwendung finden:

- elektrodynamische Generatoren, magnetische Induktion
- Batterien und Akkumulatoren, Ladungstrennung durch chemische Reaktionen
- Solarzellen, Ladungstrennung durch Lichtenergie
- Thermische Stromquellen, Ladungstrennung durch Temperaturabhängigkeit von Kontaktpotentialen.

Galvanische Elemente \Rightarrow Galvani-Spannung: $\Delta\varphi_C \Rightarrow$ Volta-Element

Minuspol: $Zn \rightarrow Zn^{++} + 2e^-$

Pluspol: $2H^+ + 2e^- \rightarrow H_2$

$Zn + H_2SO_4 \rightarrow H_2 + ZnSO_4$

Daniel-Element: Diaphragma, dass nur SO_4 durchlässt verhindert **Vergiftung**.

Thermische Stromquellen. Bei Kontakt zweier Metalle ergibt sich Potentialdifferenz \Rightarrow Kontaktspannung.

Ursache: Unterschiedliche Austrittsarbeit für freie Elektronen. Austrittsarbeit und Kontaktspannung hängen von Temperatur ab.

- Thermoelement
- Peltierkühlung (Umkehrung)

12.6 Strom und Spannungsmessung

Ziel: Strom- und Spannungsmessung ohne Beeinflussung des zu messenden Systems.

Strommessung: Amperemeter in Reihe mit Verbraucher, Amperemeter - $R_i \approx 0$ um zusätzlichen Spannungsabfall aus Messgerät zu minimieren.

Spannungsmessung: Voltmeter parallel zum Verbraucher geschaltet. Voltmeter - $R_i \rightarrow \infty$, um Stromfluss durch Voltmeter zu minimieren.

Messinstrumente:

- Galvanometer
- Digitalvoltmeter (mit Operationsverstärker) (Messbereichserweiterung durch Parallel- und Serienschaltung von Widerständen)

13 Magnetostatik

Neue Kraft zwischen elektrisch neutralen Materialien. (später: Vereinheitlichung von Elektrizität und Magnetismus \Rightarrow Elektromagnetismus) Beobachtungen:

- Zwei Pole: Nord- und Südpol
- Gleichnamige Pole stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an
- Pole lassen sich nicht trennen, keine magnetische Ladungen, keine Monopole
- Magnete richten sich auf der Erde im Nord-Süd-Richtung aus

Traditionell: Definition der magnetischen Feldstärke p in Analogie zur elektrischen Ladung Q . (Realisierung: langer Stabmagnet)

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{p_1 p_2}{r^2} \hat{r}$$

mit $\mu_0 = 4\pi \cdot 1 \times 10^{-7} \text{ V s A}^{-1} \text{ m}$

$$\vec{H} = \lim_{p_2 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{p_2}$$

- $[p] = \text{V s} = \text{Wb}$
- $[H] = \text{A m}^{-1}$

Hieraus folgt die historische Bezeichnung von H als „Magnetfeld“ oder „magnetische Feldstärke“. Aber $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ wichtigere Größe, eigentliches Äquivalent zum E-Feld

Traditionell

H = magnetische Feldstärke

B = magnetische Induktion oder magnetische Flussdichte

Modern

H = magnetische Erregung

B = Magnetfeld oder magnetische Flussdichte

Ebenfalls: In Analogie zum elektrischen Feld: Magnetischer Kraftfluss

$$\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

- $[B] = \text{V s m}^{-2} = \text{T}$
- $[\phi_m] = \text{V s} = \text{Wb}$

13.1 Magnetfelder und bewegte Ladungen

Beobachtungen:

1. Ein Strom durch einen Leiter erzeugt ein Magnetfeld um denselben (Oerstedt, 1777 - 1851)
2. Auf bewegten Ladungen wird in einem Magnetfeld eine Kraft ausgeübt. Offenbar: Streuwirkung beeinflusst Kraftrichtung. (Ampere, 1775-1836)

Experiment:

1. $B \sim I/r$
2. $\vec{F} \sim I(\vec{e} \times \vec{B})$

Konvention:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B}) \quad (\text{Lorentzkraft})$$

\vec{l} : Streurichtung.
mit $\vec{I} = \vec{j}A$:

$$\vec{F} = lA(\vec{j} \times \vec{B}) = lAnq(\vec{v} \times \vec{B})$$

Kraft auf einen einzelnen Ladungsträger:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{Lorentzkraft (ohne E-Feld)})$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{Lorentzkraft (allgemeine Form)})$$

Beispiel 13.1 (Freie Ladung im homogenen B-Feld) Freie Ladung im homogenen B-Feld mit $\vec{R} \perp \vec{B}$. Bewegungsgleichung:

$$m\vec{a} = (\vec{r} \times \vec{B})$$

Da Kraft senkrecht auf Bewegungsrichtung steht folgt eine Kreisbewegung! Also:

$$a = a_{zp} = v\omega = \frac{v^2}{r} = \frac{q}{w}vB$$

$$\omega = \frac{q}{w}B \quad (\text{Zyklotronfrequenz})$$

Beispiel 13.2 (Leiterschleife im homogenen B-Feld) Kräftepaar bewirkt Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F} = \vec{d} \times I(\vec{l} \times \vec{B}) = I(\vec{A} \times \vec{B})$$

Definition 13.3 (Magnetischer Moment)

$$\vec{\mu} := I \vec{A} = I A \vec{n}$$

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Elektrischer Dipol	Magnetischer Dipol
$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$	$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

Durch Vergleich mit elektrischen Dipol: Offenpor erzeugt ein Kreisstrom einen magnetischen Dipol.

Beispiel 13.4 (Hall-Effekt) Ablenkung bewegter Ladungsträger im Festkörper beziehungsweise in Leitern durch ein externes Magnetfeld. Erlaubt Magnetfeldmessung.

Beobachtung: Aufbau eines elektrischen Querfeldes in einem stromdurchflossenen Leiter in einem Magnetfeld. Ursache: Lorentzkraft. Es gilt:

$$F_{el} = F_{mag}$$

$$q \frac{U_H}{b} = qvB$$

$$= \frac{I}{nbd} B$$

mit $\vec{v} \perp \vec{B}$

$$I = jA = jbd = nqvbd$$

$$U_H = \frac{1}{nq} \frac{I}{d} B = R_H \frac{I}{d} B$$

mit $R_H = (nq)^{-1}$, Hallkonstante, n = Ladungsdichte, q = Ladung.

Anwendungen:

- Messungen von Dichte und Vorzeichen der bewegten Ladungsträger in Materialien (zum Beispiel Leiter / Halbleiter)
- Messung magnetischer Felder

$$B \sim \frac{I}{r}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Vs A}^{-1} \text{ m}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} (\hat{l} \times \hat{r})$$

$$\vec{B}_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_2} (\hat{l}_1 \times \hat{r}_{21})$$

$$\vec{F}_{21} = I_2 (\vec{l} \times \vec{B}_{21})$$

$$\vec{r}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r_{21}} \hat{r}_{21}$$

13.2 Grundgleichungen der Magnetostatik

„Wir wissen“: Magnetfeldlinien immer geschlossen

$$\Rightarrow \oint \vec{B} d\vec{A} = 0$$

(Quellenfreiheit des Magnetfeldes)

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

(2. Maxwellsches Gesetz)

Zirkulation des B-Feldes:

Elektrostatik:

$$\int \vec{E} d\vec{s} = U, \oint \vec{E} d\vec{s} = 0$$

B-Feld: (Kreis senkrecht um B-Feldlinie)

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} d\vec{s} &= B \oint ds \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I \end{aligned}$$

Anderer Weg (größerer Kreis)

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} d\vec{s} &= \int_4^1 \vec{B} d\vec{s} + \int_2^3 \vec{B} d\vec{s} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} f_2 2\pi r_1 + \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} f_2 2\pi r_2 \\ &= \mu_0 I (f_1 + f_2) = \mu_0 I \\ \oint \vec{B} d\vec{s} &= \mu_0 \sum_k I_k \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

\Rightarrow Grundgleichungen der Magnetostatik:

$$\begin{aligned} \oint_A \vec{B} d\vec{A} &= 0 & \oint_C \vec{B} d\vec{s} &= \mu_0 I_{\text{innen}} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

13.3 Zwei Anwendungsbeispiele

Beispiel 13.5 (Magnetfeld stromdurchflossener Leiter) Querschnitt: $A = \pi R^2$

$$j = \frac{I}{\pi R^2}$$

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = B(r) 2\pi r$$

$$r \geq R : B(r)2\pi r = \mu_0 I \implies B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$r > R : B(r)2\pi r = \mu_0 j \pi r^2 \implies B(r) = \frac{1}{2} \mu_0 j r = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$

Beispiel 13.6 (Magnetfeld einer langen Spule) N : Anzahl der Windungen, L : Länge, $n = N/L$

Weg C:

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = B_{12}l' - B_{34}l' \stackrel{!}{=} 0 \implies B_{12} = B_{34}$$

Weg C':

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = Bl' = \mu_0 N J l'$$

$$\implies B = \frac{\mu_0 N' L}{l'} = \mu_0 n I$$

$$B_{\text{spule}} = \mu_0 n I$$

13.4 Biot-Savart-Gesetz

Vergleich Elektro- und Magnetostatik

E-Feld einer Linienladung

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

B-Feld eines geraden Leiters

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

Nutze Analogie!

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Ersetzen $\rho \rightarrow \vec{j}, \epsilon_0 \rightarrow 1/\mu_0, \rho(\vec{r} - \vec{r}') \rightarrow \vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}') \implies$ Biot-Savart-Gesetz

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{r}) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Beispiel 13.7 (Leiterschleife) Symmetrie: $B_\perp = 0, B_x = 0, B_y = 0$

$$\begin{aligned} dB_z &= dB \sin \alpha \\ &= dB \frac{R}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{R}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} ds' \\ B_z &= \int dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int ds' \\ &= \frac{\mu_0 R^2}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

In der Mitte des Rings: $z = 0$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Weit weg: $z \gg R$

$$B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3}$$

Allgemeine Lösung für $r \gg R$

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(3 \frac{\vec{\mu} \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{1}{r^3} \vec{\mu} \right)$$

Vergleich mit Elektrischem Dipol ($r \gg d$):

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(3 \frac{\vec{p} \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{1}{r^3} \vec{p} \right)$$

14 Materie im Magnetfeld

14.1 Magnetisierung und magnetische Erregung

Beobachtung: Beeinflussung des B-Feldes durch Materie. Ein Eisenkern der Länge l hat auf einer Querschnittsfläche A (Normalenvektor \vec{n}) viele Kreiströme (magnetische Dipole) I_i mit Fläche A_i .

Auf der Oberfläche des Eisenkern gibt es also einen Strom I_m : molekularer Strom. Für ein infinitesimales Stück des Eisenkerns dl erhält man:

$$I_i = I_m \frac{dl}{l}$$

$$B_{mag} = \mu_0 \frac{I_m}{l}$$

Definition 14.1 (Magnetisierung)

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{\mu}_i$$

mit $\mu := I_i A_i \vec{n}$. (Erinnerung Spule: $B = \mu_0 (NI)/l$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{M} &= \frac{1}{V} \sum_i A_i I_i \vec{n} = \frac{1}{V} A_i \frac{I_m}{l} \vec{n} \int dl \\ &= \frac{1}{V} \frac{I_m}{l} \sum_i A_i \vec{n} l \\ &= \frac{I_m}{l} \vec{n} \end{aligned}$$

Magnetfeld rein aufgrund der Magnetisierung:

$$\vec{B}_{mag} = \mu_0 \vec{M}$$

Jetzt: Eisenkern mit Draht

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$$

\vec{B}_0 : Magnetfeld aufgrund äußerer Ströme

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} d\vec{s} &= \oint_C \vec{B}_0 d\vec{s} + \mu_0 \oint_C \vec{M} d\vec{s} \\ &= \mu_0 NI + \mu_0 \oint_C \vec{M} d\vec{s} \\ &= \mu_0 I_{frei} + \mu_0 I_m \\ \oint (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) d\vec{s} &= \mu_0 I_{frei} \end{aligned}$$

Definition 14.2 (Magnetische Erregung)

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = I_{frei} \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j}_{frei}$$

(2. Maxwellsches Gesetz, Amperesches Durchflutungsgesetz)

Auch: $\text{rot } \vec{M} = \vec{j}_{geb}$, $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{ges}$

14.2 Dia-, Para- und Ferromagnetismus

Experimentelle Beobachtung:

Definition 14.3

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

mit $\mu_0 \vec{B} = \vec{B} = \mu_0 \vec{M}$. Gilt nicht immer!, χ_m : magnetische Suszeptibilität.

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\chi_m + 1) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

$$\mu = \mu_r = \chi_m + 1$$

Bisher: $\chi_m > 0$. Gilt dies immer? \Rightarrow nein!

- $\chi_m > 0, \mu_r > 1$ Paramagnetismus
- $\chi_m < 0, \mu_r < 1$ Diamagnetismus
- $\chi_m \gg 0, \mu_r \gg 1$ Ferromagnetismus
- Dia: $-1 \times 10^{-6} \leq \chi_m \leq -1 \times 10^{-9}$
- Para: $1 \times 10^{-6} \leq \chi_m \leq 1 \times 10^{-9}$
- Ferro: $1 \times 10^2 \leq \chi_m \leq 1 \times 10^5$

Paramagnetismus: Wolfram, Nickel

$$\begin{aligned} E_{pot} &= -\vec{M} \cdot \vec{B} \\ &= -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \\ \vec{F} &= \vec{M} \text{ grad } B \end{aligned}$$

Diamagnetismus: Wismut **Mikroskopische Beschreibung**

$\chi_m < 0 (\mu < 1)$: Diamagnetismus. Induktion eines magnetischen Dipolmoments $r = \text{const.}$. Zwei Atome:

$$\vec{\mu}' = \vec{\mu}'_1 + \vec{\mu}'_2 \neq 0$$

Ursache: Lorentzkraft:

$$\begin{aligned} v'_1 &> v_1 & v'_2 &< v_2 \\ F'_{2p} &> F_{2p} & F'_{2p} &< F_{2p} \\ \mu'_1 &> \mu_1 & \mu'_1 &< \mu_2 \\ \vec{B} &= \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \\ &= (1 + \chi_m) \vec{B}_0 \rightarrow \chi_m < 0 \end{aligned}$$

\implies Alle Stoffe sind diamagnetisch. Aber Möglichkeit der Überlagerung mit Para- beziehungsweise Ferromagnetismus. $\chi_m > 0$: Paramagnetismus

Ausrichtung permanenter magnetischer Dipole mit äußerem B-Feld. Vergleich:

- Elektrische Ausrichtung führt zur Abschwächung
- Magnetostatische Ausrichtung führt zur Verstärkung

Thermische Bewegung wirkt der Ausrichtung entgegen \implies Temperaturabhängigkeit der Magnetisierung: (Curie-Gesetz)

$$\vec{M} = \frac{1}{3} \frac{\mu B_{ext}}{k_B T} \vec{M}_s$$

\vec{M}_s : Sättigungsmagnetismus

$\chi_m \gg 0$ Ferromagnetismus

Paramagnetische Materie mit zusätzlicher Wechselwirkung der magnetischen Dipole miteinander.

Weißsche Bezirke

Ohne Magnetfeld: Statistische Ausrichtung $\vec{M} = 0$

Mit Magnetfeld: Ausrichtung der Bezirke entlang \vec{B}

$$\chi_m \gg 0, M \gg 1 \implies \vec{M} = \mu \vec{M} \gg \vec{H}$$

Ferromagnet:

Beobachtung: Magnetisierung durch B-Feld ist abhängig von „Vorgeschichte“

- „Hinweg“: Koerzitiv Kraft
- „Rückweg“: Remanenz Kraft

Magnetisch hartes Eisen:

- große Remanenz
- große Koerzitiv

Magnetisch weiches Eisen:

- kleine Remanenz
- kleine Koerzitiv

Ferromagnetismus ist Temperaturabhängig

- geht oberhalb T_C verloren
- T_C - kritische Temperatur

Oberhalb von $T_C \implies$ Curie-Weiß Gesetz

$$\chi(T) = \frac{C}{T - T_C}$$

14.3 Feldgleichungen in Materie

Vakuum: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Materie: $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, allgemein: $\mu = \mu(H)$.

Außerdem:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ auch in Materie} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{frei}}$$

Verhalten an Grenzflächen

$$\begin{aligned} H_{\parallel}^{(1)} = H_{\parallel}^{(2)} &\implies \frac{B_{\parallel}^{(1)}}{\mu_1} = \frac{B_{\parallel}^{(2)}}{\mu_2} \\ B_{\perp}^{(1)} = B_{\perp}^{(2)} &\implies \mu_1 H_{\perp}^{(1)} = \mu_2 H_{\perp}^{(2)} \end{aligned}$$

\implies Maxwell-Gleichungen der Elektro- und Magnetostatik

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}_{\text{frei}} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Anwendung: Toroidmagnet mit Luftspalt

Radius des Torus: R , Eisenkern $\implies \mu \gg 1$, N Windungen um Kern mit Strom I , Breite des Luftspaltes: d . \implies Feld im Luftspalt: Ampersches Gesetz:

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = NI = \int_{\text{Eisen}} \vec{H}_{Fe} d\vec{s} + \int_{\text{Luft}} \vec{H}_{Luft} d\vec{s}$$

$$\vec{B}_{Fe} = \vec{B}_{Luft} \implies \mu \vec{H}_{Fe} = \vec{H}_{Luft}$$

$$\begin{aligned} \implies NI &= \oint \vec{H} d\vec{s} = H_{Fe}(2\pi R - d) + H_{Luft}d \\ &= \frac{H_{Luft}}{\mu}(2\pi R - d) + dH_{Luft} \end{aligned}$$

$$H_{Luft} = \frac{NI\mu}{(\mu - 1)d + 2\pi R} \approx \frac{\mu NI}{\mu d + 2\pi R}$$

$$\implies B = \mu_0 H_{Luft} = \frac{\mu_0 \mu NI}{\mu d + 2\pi R}$$

15 Induktion und elektromagnetische Wechselfelder

Bisher: stationäre, das heißt zeitunabhängige Felder

Jetzt:

- zeitabhängige B-Felder \rightarrow magnetische Induktion
- zeitabhängige E-Felder \rightarrow Verschiebungsstrom

15.1 Magnetische Induktion

Beobachtungen

- Bewegte Leiterschleife im Magnetfeld resultiert in Induktion und Spannungsstößen
- Vorzeichen abhängig von Bewegungsrichtung und Richtung des Magnetfelds
- Mehrere Windungen (beziehungsweise größere Fläche) \rightarrow höhere Spannungen
- Drehung Leiterschleife \rightarrow Wechselspannung

$$\int U(t)dt = \Delta\phi_m \quad \text{mit} \quad \phi_m = \int \vec{B} d\vec{A}$$

$$U_{ind} = -\dot{\phi}_m \quad \text{beziehungsweise} \quad U_{ind} = -N\dot{\phi}_m$$

Ursache? \Rightarrow Lorentzkraft

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$dU_{ind} = E_{ind}dl = \frac{F}{q}dl = vBdl$$

$$U_{ind} = \int_1^2 E_{ind}dl = vBl$$

$$U_{ind} = \oint E dl = \int_1^2 E dl + \int_2^1 E dl = vBl$$

Beliebige Schleife

$$\begin{aligned} U_{ind} &= \oint (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} \\ &= \oint \vec{E}_{ind} d\vec{l} \\ &= \oint (d\vec{l} \times \vec{v}) \vec{B} \\ &= - \oint (\vec{v} \times d\vec{l}) \vec{B} \\ &= - \oint \left(\frac{d\vec{s}}{dt} \times d\vec{l} \right) \vec{B} = - \oint \frac{d\vec{A}}{dt} \vec{B} \\ &= - \frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{A} = -\dot{\phi}_m \quad (\text{Für } \vec{B} = \text{const.}) \\ \phi_m &= \int \vec{B} d\vec{A} = B l s \\ \dot{\phi}_m &= B l \dot{s} = B l v \end{aligned}$$

Neu: Induktion durch $\dot{\vec{B}}$. Rein experimentelle Beobachtung

Satz 15.1 (Faradaysches Induktionsgesetz)

$$U_{ind} = \oint E_{ind} d\vec{s} = -\dot{\phi}_m$$

mit $\phi_m = \int \vec{B} d\vec{A}$

Neue grundlegende Eigenschaft: Wichtig: $\text{rot } \vec{E} \neq 0$

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{E} d\vec{s} &= -\dot{\phi}_m = -\frac{d}{dt} \int_O \vec{B} d\vec{A} \\ \Rightarrow \int_O \text{rot } \vec{E} d\vec{A} &= -\frac{d}{dt} \int_O \vec{B} d\vec{A} = -\int_O \dot{\vec{B}} d\vec{A} \quad (\text{Falls } O \text{ beziehungsweise } C \text{ konstant}) \end{aligned}$$

Satz 15.2 (3. Maxwell-Gleichung)

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{E} d\vec{s} &= -\frac{d}{dt} \int_O \vec{B} d\vec{A} && (\text{E-Feld nicht mehr Wirbelfrei}) \\ \text{rot } \vec{E} &= -\dot{\vec{B}} && (\text{Induktion nur in Verbindung mit der Lorentzkraft}) \end{aligned}$$

Satz 15.3 (Lenzsche-Regel) Die durch Induktion entstehende Spannungen, Ströme, Felder und Kräfte wirken der die Induktion hervorruufenden Ursache stets entgegen.

15.2 Generatoren

$$\begin{aligned} \phi_m &= \int \vec{B} d\vec{A} = BA \cos \omega t \\ \dot{\phi}_m &= -U_{ind} = \omega BA \sin \omega t \end{aligned}$$

15.3 Induktivität und Selbstinduktion

Betrachte stromdurchflossene Leiterschleife $B \sim I, \phi_m \sim I$

Definition 15.4 (Induktivität)

$$\phi_m = LI$$

L : Eigenschaft des felderzeugenden Leiters.

Induktivität einer Spule: N Windungen, l Länge, $n = N/l$, Querschnittsfläche A

$$\begin{aligned} B &= \mu\mu_0 n I \\ \phi_m &= NBA = nlBA \\ \phi_m &= \underbrace{\mu\mu_0 n^2 A l}_L I \\ \Rightarrow U_{ind} &= -\dot{\phi}_m = -L\dot{I} \end{aligned}$$

Weitere Beispiele:

- Drahtschleife: $L = \mu_0 R \ln R/r$
- Doppelleitung: $L = \mu_0 l / \pi \ln a/r$
- Koaxialkabel: $L = \mu_0 l / (2\pi) \ln r_a/r_i$

Außerdem: Zeitlich veränderlicher Stromfluß durch eine Leiteranordnung führt zu einer zeitlichen Veränderung des erzeugten B-Feldes \rightarrow Flußänderung \rightarrow Spannungsinduktion.

$$U_{ind} = -\dot{\phi}_m = -L\dot{I}$$

15.4 Verschiebungsstrom

Für zeitlich veränderliche B-Felder:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= 0 \rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \\ \oint \vec{E} d\vec{s} &= 0 \rightarrow \oint \vec{E} d\vec{s} = - \int \dot{\vec{B}} d\vec{A} \end{aligned}$$

Jetzt: Betrachte Ampersches Durchflutungsgesetz

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \iff \oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I$$

Betrachte Leiter durch Kondensator. Dann gilt:

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = B 2\pi r = \mu_0 I \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Aber: Verschiebung des Integrationsweges zwischen die beiden Kondensatorplatten liefert:

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = 0$$

Dies erscheint unmöglich! B-Feld kann im Kondensator nicht abrupt verschwinden. Außerdem:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \int_A \vec{j} d\vec{A}$$

(gilt für alle Flächen mit Randkurve C). Fläche A_1 : Kreisfläche um Leiter, Fläche A_2 : Fläche mit Kondensator \implies

- Fläche A_1 : $B = \mu_0 I / (2\pi r)$
- Fläche A_2 : $B = 0$

\implies offensichtlicher Widerspruch. \implies Etwas fehlt! Berücksichtigung des durch Kondensatoraufladung erzeugten zeitlich sich ändernden elektrischen Feldes. Kontinuitätsgleichung:

$$\text{div } \vec{j} = -\dot{\rho} \iff \oint \vec{j} d\vec{A} = -\frac{dq}{dt}$$

Es gilt:

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = q/\varepsilon_0 \rightarrow \frac{dq}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \oint \vec{E} d\vec{A} = \varepsilon_0 \oint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{A} = \varepsilon_0 \oint \dot{\vec{E}} d\vec{A}$$

Konsistente Beschreibung falls:

- Fläche A_1 : $\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \int_{A_1} \vec{j} d\vec{A}$
- Fläche A_2 : $\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \int_{A_2} \dot{\vec{E}} d\vec{A} = \mu_0 \int_{A_2} \vec{j}_v d\vec{A}$ mit

$$\vec{j}_v = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

„Verschiebungsstrom“

→ Erweiterung des Ampereschen Durchflutungsgesetzes:

Satz 15.5 (Ampere-Maxwell-Gesetz (4. Maxwell-Gleichung für Vakuum))

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \int \vec{j} d\vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{A}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Bemerkung 15.6 Für $j = 0$ gilt: $\text{rot } \vec{B} = 1/c^2 \dot{\vec{E}}$, das heißt elektrische Wechselfelder erzeugen ein magnetisches Wirbelfeld, umgekehrt erzeugen wegen $\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ magnetische Wechselfelder ein elektrisches Wirbelfeld. → elektromagnetische Wellen (siehe unten)

Jetzt: Verschiebungsstrom in Materie

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I_{ges} = \mu_0 I_L + \mu_0 I_M + \mu_0 I_v + \mu_0 I_P$$

- I_L : Leitungsstrom (frei Ströme)
- I_M : Molekularstrom
- I_v : Verschiebungsstrom
- I_P : Polarisationsstrom (nur für nicht-stationäre E-Felder)

Molekularstrom:

$$\oint \vec{M} d\vec{s} = I_M$$

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \oint \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) d\vec{s} = I_L + I_v + I_P = I_L + \varepsilon_0 \int_A \dot{\vec{E}} d\vec{A} + I_P$$

$$= I_L + \varepsilon_0 \int_A \dot{\vec{E}} d\vec{A} + \int_A \vec{j}_P d\vec{A}$$

Polarisationsstrom: Ergibt sich aufgrund des Flusses gebundener Ladungen in Richtung des elektrischen Feldes \rightarrow zeitlich veränderlicher Strom für zeitlich veränderliche E-Felder

$$\begin{aligned}\vec{j}_P &= nq\vec{v} = nq\frac{d\vec{s}}{dt}, d\vec{p} = qd\vec{s}, d\vec{P} = nd\vec{p} \\ \vec{j}_P &= n\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} \iff \vec{j}_P \iff \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \dot{\vec{P}}\end{aligned}$$

Damit

$$\begin{aligned}\oint \vec{H} d\vec{s} &= I_L + \varepsilon_0 \int \dot{\vec{E}} d\vec{A} = I_L + \int \dot{\vec{D}} d\vec{A} \\ \vec{E} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\end{aligned}$$

Satz 15.7 (Ampere-Maxwell-Gesetz in Matrix (4. Maxwellsche Gleichung))

$$\begin{aligned}\oint \vec{H} d\vec{s} &= \int \vec{j} d\vec{A} + \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{A} \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} + \dot{\vec{D}}\end{aligned}$$

16 Schaltvorgänge, Wechselstrom und Schwingkreise

16.1 Induktivität im Stromkreis (LR-Glied)

Einschalten:

$$U_{ind} = -L\dot{I}$$

Außerdem gilt: (Kirchhoffsche Maschenregel)

$$\begin{aligned}U_0 + U_{ind} &= IR \\ U_0 - L\dot{I} &= IR\end{aligned}$$

Man erhält eine inhomogene, lineare Differentialgleichung erster Ordnung, Lösung: allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung + spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung + Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}\implies \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I &= \frac{U_0}{L} \\ \implies I(t) &= \frac{U_0}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}\end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung $I(0) = 0$ folgt:

$$\begin{aligned}I(t) &= \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \\ &= \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \\ \tau &= L/R\end{aligned}$$

Ausschalten:

$$U_{ind} = -L\dot{I}, U_{ind} = IR$$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0$$

Anfangsbedingung: $I(0) = U_0/R$. Damit folgt:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}$$

Spannungsabfall am Widerstand:

$$U(t) = I(t)R = U_0 e^{-t/\tau}$$

Aber: Was passiert beim Öffnen des Schalters tatsächlich? $R_{offen} = \tilde{R} \approx \infty$.

$$U(t) = I(t)\tilde{R} = U_0 \frac{\tilde{R}}{R} e^{-t/\tau}$$

\Rightarrow Riesiger Spannungsstoß für $\tilde{R} \rightarrow \infty \Rightarrow$ Lichtbogen.

16.2 Kapazität im Stromkreis (RC-Glied)

Einschalten:

$$U_C = Q/C, Q = Q(t)$$

Außerdem gilt: $U_0 = IR + Q/C$. Differenzieren:

$$\dot{I}R + \frac{\dot{Q}}{C} = IR + \frac{I}{C} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC}I = 0$$

Anfangsbedingung: $I(0) = U_0/R$. Damit folgt:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/(RC)} = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}$$

$\tau = RC$. Spannung:

$$U_C(t) = U_0 - I(t)R = U_0(1 - e^{-t/\tau})$$

Ausschalten, das heißt Entladung:

$$IR + Q/C = 0 \rightarrow \dot{I}R = -\frac{1}{C}I$$

$$\dot{I} = -\frac{1}{\tau}I$$

Mit $I(0) = -U_0/R$ als Anfangsbedingung folgt:

$$I(t) = -\frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}$$

$$U_C(t) = U_0 e^{-t/\tau}$$

16.3 R, L, C im Wechselstromkreis

Beobachtung: Lämpchen brennen für verschiedene Frequenzen $f = \omega/(2\pi)$ unterschiedlich hell.

1. Widerstand: Lämpchen leuchtet unabhängig von der eingestellten Frequenz immer gleich hell
2. Kapazität:
 - Niedrige Frequenz \rightarrow Lämpchen aus
 - Hohe Frequenz \rightarrow Lämpchen leuchtet
3. Induktivität:
 - Niedrige Frequenz \rightarrow Lämpchen leuchtet
 - Hohe Frequenz \rightarrow Lämpchen aus

\rightarrow Kondensator und Spule verhalten sich wie frequenzabhängige Widerstände. Quantitative Betrachtung:

1. Ohmscher Widerstand:

$$\begin{aligned}
 U_0(t) &= U_0 \cos \omega t \\
 \Rightarrow I(t) &= \frac{1}{R} U(t) \\
 &= \frac{U_0}{R} \cos \omega t \\
 &= I_0 \cos \omega t
 \end{aligned}$$

Leistung:

$$P(t) = U(t)I(t) = I_0 U_0 \cos^2 \omega t$$

\Rightarrow mittlere Leistung

$$\begin{aligned}
 \vec{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \\
 \vec{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T I_0 U_0 \cos^2 \omega t dt = \frac{I_0 U_0}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2} U_0 I_0
 \end{aligned}$$

Definition 16.1 (Wirkleistung)

$$\vec{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0 = U_{eff} I_{eff}$$

$$\text{mit } U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0, I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$$

2. Induktiver Widerstand:

$$\begin{aligned}
 U_s(t) &= U_0 \cos \omega t \\
 U_s(t) + U_{ind} &= 0, U_{ind} = -L \dot{I} \\
 \Rightarrow U_s(t) &= L \dot{I}
 \end{aligned}$$

Interpretation:

$$\int U_0 \cos \omega t dt = U_0 \frac{1}{\omega} \sin \omega t = LI$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t = \frac{U_0}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$U(t) = U_0 \cos \omega t$$

$$I(t) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\omega L}$$

\Rightarrow Strom läuft der Spannung um 90° hinterher, da der Strom nach Anlegen der Spannung U_1 erst allmählich zu fließen beginnt.

3. Kapazitiver Widerstand

$$U_s(t) = U_c, U_c = \frac{Q}{C}, I = \dot{Q}$$

$$Q = CU_s = CU_0 \cos \omega t$$

$$\dot{Q} = I = -\omega CU_0 \sin(\omega t)$$

$$= \omega CU_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$U(t) = U_0 \cos \omega t$$

$$I(t) = I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_0 = \omega CU_0$$

\Rightarrow Strom läuft der Spannung um 90° voraus, da zuerst Ladung auf den Kondensator fließen muss, bevor Spannung an Kondensator abfällt.

Merke:

- Ohmscher Widerstand: $Z_R = R, \varphi = 0^\circ$
- Induktiver Widerstand: $Z_L = \omega L, \varphi = -90^\circ$
- Kapazitiver Widerstand: $Z_C = 1/\omega C, \varphi = 90^\circ$
- Blindleistung Kapazität:

$$\vec{P} = \frac{1}{T} \int_0^T U_c(t) I_c(t) dt = -\frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 \cos \omega t \sin \omega t dt = 0$$

Induktivität:

$$\vec{P} = \frac{1}{T} \int_0^T U_L(t) I_L(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 \underbrace{\cos \omega t \sin \omega t}_{\frac{1}{2} \sin 2\omega t} dt = 0$$

Die sogenannte Blindleistung verschwindet im Mittel, da die Energie zum Aufbau der (elektrischen und magnetischen) Felder wieder in den Generator zurückfließt → Blindstrom. Aber: Auch der Blindstrom macht Drähte warm und die Blindleistung muss temporär zur Verfügung gestellt werden. (Wichtig bei Auslegung von Netzwerken)

16.4 Komplexe Darstellung

Strom und Spannung im Wechselstromkreis:

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 \cos \omega t \\ I(t) &= I_0 \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Übertragung ins Komplexe:

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 e^{i\omega t} \\ I(t) &= I_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = I_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} \\ &= I_0 \cos(\omega t + \varphi) + i I_0 \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Die Verwendung komplexer Zahlen bedeutet rechnerisch eine wesentliche Vereinfachung! Ansonsten äquivalent!

Warum funktioniert das?

Grund → Linearität der auftretenden Differentialgleichungen.

- Homogene Differentialgleichung:

$$\begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \ddot{z} + \gamma \dot{z} + z = 0 \end{cases}$$

Erste Ordnung: $z(t) = a(t) + ib(t)$ sei Lösung → $z^*(t) = a(=) - ib(t)$ ebenfalls Lösung. das heißt: $\Re(z) = 1/2(z + z^*)$ ist auch ein Lösung der homogenen Differentialgleichung. Zweite Ordnung: → es gibt zwei linear unabhängige Lösungen $z(t), z^*(t)$. Also $\Re(z) = 1/2(z + z^*) = a(t)$ und $i\Im(z) = 1/2(z - z^*) = ib(t)$ sind auch unabhängige Lösungen.

- Inhomogene Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \dot{z} = \xi \\ \ddot{z} + \gamma \dot{z} + z = \xi \end{cases}$$

→ zusätzliche partikuläre Lösung.

Erste Ordnung: $\dot{z} = \alpha + i\beta$ → spezielle Lösung: $z(t) = a(t) + ib(t)$, dann $a(t), b(t)$ partikuläre Lösungen des reellen / imaginären Teils.

Zweite Ordnung: analog.

Bei Verwendung komplexer Darstellung: Ohmscher Widerstand

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} = \hat{U} e^{i\omega t}$$

$$I(t) = \frac{U_0}{R} e^{i\omega t} = \hat{I} e^{i\omega t}$$

Induktiver Widerstand:

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} = \hat{U} e^{i\omega t}$$

$$I(t) = \frac{U_0}{\omega L} e^{i(\omega t - \pi/2)} = \frac{U_0}{\omega L} e^{-i\pi/2} e^{i\omega t}$$

$$= \frac{U_0}{i\omega L} e^{i\omega t} = \hat{I} e^{i\omega t}$$

Kapazitiver Widerstand:

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} = \hat{U} e^{i\omega t}$$

$$I(t) = \omega C U_0 e^{i(\omega t + \pi/2)} = \omega C U_0 e^{+i\pi/2} e^{i\omega t}$$

$$= i\omega C U_0 e^{i\omega t} = \hat{I} e^{i\omega t}$$

Offenbar gilt: $\hat{I} = \hat{U} / \hat{z}$, wobei die Phase gegenüber der Spannung im komplexen Widerstand \hat{z} steckt.
 \Rightarrow Wechselstromwiderstände:

$$\hat{Z}_R = R$$

$$\hat{Z}_L = i\omega L = \omega L e^{i\pi/2}$$

$$\hat{Z}_C = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\pi/2}$$

\Rightarrow Ohmsches Gesetz:

$$\hat{U} = \hat{z} \cdot \hat{I}$$

Beispiel 16.2 (RC-Serienschaltung) Kirchhoff: $I_R = I_C = I$, $U_G = U_R + U_C$. Also:

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow U_R = I_0 R e^{i\omega t}$$

$$U_C = I_0 \frac{1}{i\omega C} e^{i\omega t}$$

$$U_G = U_R + U_C = I_0 \left(\underbrace{R + \frac{1}{i\omega C}}_{\text{Impedanz } \hat{z}} \right) e^{i\omega t} = I_0 \underbrace{|\hat{z}| e^{i\varphi}}_{\hat{z}} e^{i\omega t}$$

mit

$$\hat{z} = |\hat{z}| e^{i\varphi}, |\hat{z}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2}, \varphi = \arctan \left(\frac{1}{\omega RC} \right)$$

⇒ Lösung:

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t}$$

$$U(t) = \hat{z} I_0 e^{i\omega t} = I_0 |\hat{z}| [\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)]$$

Beispiel 16.3 (RC-Parallelschaltung) Kirchhoff: $U = U_R = U_C$, $I_G = I_R + I_C$. Also

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow I_R = \frac{U_0}{\hat{z}_R} e^{i\omega t}, I_C = \frac{U_0}{\hat{z}_C} e^{i\omega t}$$

$$I_R = \frac{U_0}{R} e^{i\omega t}, I_C = i\omega C U_0 e^{i\omega t}$$

$$I = I_R + I_C = U_0 \left(\frac{1}{\hat{z}_R} + \frac{1}{\hat{z}_C} \right) e^{i\omega t}$$

$$= U_0 \underbrace{\left(\frac{1}{R} + i\omega C \right)}_{=\frac{1}{\hat{z}}} e^{i\omega t}$$

Die beiden Beispiele zeigen, dass für Impedanzen im Wechselstromkreis offenbar die gleichen Regeln wie für Widerstände im Gleichstromkreis gelten. Damit: Erweiterte Kirchhoffsche Regeln:

$$\sum \hat{I} = 0 \quad (\text{Knotenregel})$$

$$\sum \hat{U} = 0 \quad (\text{Maschenregel})$$

$$\hat{Z} = \sum \hat{z}_i \quad (\text{Reihenschaltung})$$

$$\hat{Z}^{-1} = \sum \hat{z}_i^{-1} \quad (\text{Parallelschaltung})$$

16.5 RLC-Schwingkreis

Ohne Stromquelle:

$$U_{ind} = IR + Q/C$$

$$-L\dot{I} = IR + Q/C$$

$$L\dot{I} + IR + Q/C = 0$$

Ableiten:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0$$

Gedämpfter harmonischer Oszillator:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx &= 0 \\
 \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \\
 \omega_0^2 &= k/m \\
 \gamma &= \beta/(2m) \\
 \gamma &= R/(2L) \\
 \omega_0^2 &= \frac{1}{LC}
 \end{aligned}$$

Ansatz: $ce^{\lambda t}$

$$\begin{aligned}
 I(t) &= C_1 e^{-\gamma t} e^{i\omega_R t} + C_2 e^{-\gamma t} e^{-i\omega_R t} \\
 \omega_R &= \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}
 \end{aligned}$$

3 Fälle:

- $\gamma < \omega_0$: Schwingfall
- $\gamma > \omega_0$: Kriechfall
- $\gamma = \omega_0$: Aperiodischer Grenzfall

Mechanik: $\gamma = \beta/(2m), \omega_0^2 = k/m$

Schwingkreis: $\gamma = R/(2L), \omega_0^2 = 1/(LC)$ Mit Stromquelle:

$$\begin{aligned}
 U_G + U_{ind} &= IR + Q/C \\
 L\dot{I} + IR + Q/C e^{i\omega t} &= U_0 e^{i\omega t} \\
 L\ddot{Q} + \dot{Q}R + Q/C &= U_0 e^{i\omega t}
 \end{aligned}$$

Ableiten:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \omega U_0 e^{i(\omega t + \pi/2)}$$

Ansatz:

$$I(t) = \rho e^{i\varphi} e^{i\Omega t}$$

Einsetzen \rightarrow

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \omega \\
 \rho &= \frac{\omega U_0}{L} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 2\gamma^2 \omega^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \\
 \varphi &= \arctan\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right)
 \end{aligned}$$

Einfacher:

$$\begin{aligned}
 I(t) &= U_0 \frac{1}{\hat{z}} e^{i\omega t}, \hat{z} = \hat{z}_R + \hat{z}_L + \hat{z}_C \\
 I(t) &= \frac{U_0}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} e^{i\omega t} = \frac{U_0}{R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})} e^{i\omega t} \\
 &= (a + ib) e^{i\omega t} = \left(\frac{U_0 R}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} - i \frac{U_0 (\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \right) e^{i\omega t} \\
 &= C e^{i\varphi} e^{i\omega t} \\
 C &= \sqrt{a^2 + b^2} \\
 \tan \varphi &= \frac{b}{a} \\
 C = \rho &= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \\
 \varphi &= \arctan\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2 \gamma}\right) \\
 \varphi &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega^2 \gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)
 \end{aligned}$$

16.6 Transformator

Große Bedeutung in der Wechselstromtechnik. Insbesondere Transformation von Spannungen für Hochspannungsübertragung. Annahme: Magnetische Feldlinien verlaufen vollständig innerhalb des Eisenjochs, das heißt alle Straufelder werden vernachlässigt. Unbelasteter Transformator:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= U_0 \cos \omega t & (\text{Primärseite}) \\
 U_1 + U_{ind,1} &= 0 \\
 U_1 &= -U_{ind,1} = N_1 \dot{\phi}_m
 \end{aligned}$$

Magnetischer Fluß ist auf Primär und Sekundärseite gleich:

$$U_2 = -U_{ind,2} = N_2 \dot{\phi}_m = \frac{N_2}{N_1} U_1 \quad (\text{Sekundärseite})$$

Außerdem gilt bei Vernachlässigung von Leistungsverlusten

$$\begin{aligned}
 P &= U_1 I_1 = U_2 I_2 \\
 \implies I_2 &= \frac{N_1}{N_2} I_1
 \end{aligned}$$

Magnetfeldführung: Braucht großes μ :

$$\begin{aligned}
 B_{\perp, Fe} &= B_{\perp, Lu} \\
 B_{\parallel, Fe} &= \mu B_{\parallel, Lu}
 \end{aligned}$$

Das heißt: B-Feld im Eisen im wesentlichen tangential zur Oberfläche.

Satz 16.4 (Unbelasteter Transformator) Transformatorgleichung für verlustfreien, unbelasteten Transformator

$$U_2 = \frac{N_2}{N_1} U_1 \quad I_2 = \frac{N_1}{N_2} I_1$$

Mögliche Verluste:

- Wirbelströme
- Streufelder

Konplizierter: belasteter Transformator (siehe Literatur, Übungen, Praktikum)

16.7 Elektrische und magnetische Feldenergie

Elektrische und magnetische Feldenergie: Elektrische Leistung im RC-Glied:

$$\begin{aligned} P(t) &= I(t)U(t) = C\dot{U}U \\ &= CU \frac{dU}{dt} \\ \Rightarrow W_{el} &= \int_0^t P(t)dt = \int_0^t CU dU = \frac{1}{2}CU(t)^2 \end{aligned}$$

Elektrische Leistung im LR-Glied:

$$P(t) = I(t)U(t) = L\dot{I}I = LI \frac{dI}{dt} \Rightarrow W_m = \int_0^t P(t)dt = \int_0^t LI dI = \frac{1}{2}LI(t)^2$$

Also:

- $W_{el} = \frac{1}{2}CU^2$ - gespeicherte Energie im Kondensator, elektrische Feldenergie
- $W_m = \frac{1}{2}LI^2$ - gespeicherte Energie in Induktivität, magnetische Feldenergie

Energiedichte des elektrischen Feldes

$$\begin{aligned} W_{el} &= \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 \frac{A}{d} U^2 \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 \frac{A}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 V E^2 \\ \Rightarrow \omega_{el} &= \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}ED \end{aligned}$$

Energiedichte des magnetischen Feldes:

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu\mu_0 \frac{N^2}{l} AI^2 = \frac{1}{2}\mu\mu_0 \frac{A}{l} M^2 l^2 \\ &= \frac{1}{2}\mu\mu_0 V H^2 \\ \omega_m &= \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2 = \frac{1}{2}BH \end{aligned}$$

Allgemein gilt:

$$\omega_{elektrom.} = \frac{1}{2}(\vec{E} \vec{D} + \vec{B} \vec{H})$$

17 Elektromagnetische Welle

17.1 Mechanische Wellen

Eine Welle ist ein Vorgang bei dem sich eine Schwingung vom Ort Ihrer Erregung in Folge von Kopplungen an benachbarte schwingungsfähige Systeme im Raum ausbreitet. Man unterscheidet

- Transversale Wellen → Ausbreitung senkrecht zur Schwingungsrichtung
- Longitudinale Wellen → Ausbreitung entlang der Schwingungsrichtung

Eindimensionale harmonische Welle → harmonische Anregung Bei $t = 0$:

$$y(x) = A \sin(kx), k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Zusätzliche Zeitabhängigkeit:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A \sin(k(x - v_{ph}t)) \\ &= A \sin(kx - kv_{ph}t) \\ &= A \sin(kx - \omega t) \\ v_{ph} &= \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} \end{aligned}$$

Harmonische ebene Welle:

$$y(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t) \quad (1 \text{ dim})$$

$$y(\vec{x}, t) = A \sin(\vec{k} \vec{x} \pm \omega t) \quad (3 \text{ dim})$$

- Wellenzahl: $k = 2\pi/\lambda$, $\vec{\lambda} \parallel$ Ausbreitungsrichtung
- Wellenlänge: $\lambda = 2\pi/k$
- Phasengeschwindigkeit: $v_{ph} = \omega/k$
- Amplitude: A

Wesentliche Eigenschaften:

Superposition und Interferenz:

Superposition \longleftrightarrow Überlagerung von Wellen

$$y(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^n y_i(\vec{k}, t)$$

Überlagerung von Wellen (1 dimensional)

$$\xi_1(x, t) = A \cos(k_1x - \omega_1t)$$

$$\xi_2(x, t) = A \cos(k_2x - \omega_2t)$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A(\cos(k_1x - \omega_1t) + \cos(k_2x - \omega_2t))$$

$$= 2A \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

Jetzt: $k_1 \approx k_2, \omega_1 \approx \omega_2 \implies$ Schwebung mit mittlerer Frequenz als Schwebungsfrequenz.

Satz 17.1 (Fouriertheorem) Jede periodische und aperiodische Funktion kann durch harmonische ebene Wellen dargestellt werden. Fourier-Reihe:

$$f(t) = f(t + T) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

mit

$$a_i = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(i\omega t) dt$$

$$b_i = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(i\omega t) dt$$

aperiodische F : Fourier-Integral:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t) d\omega$$

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

Daher genügt es oft harmonische ebene Wellen zu betrachten.

17.2 Wellengleichung

Wegge \rightarrow Ausbreitung einer Schwingung im Raum. Gesucht: Differentialgleichung die die Ausbreitung von Störungen beschreibt. Sich ausbreitende Störung $\hat{=}$ Wellenpaket.

$$\psi_+(x, t) = f(x - vt)$$

$$\psi_-(x, t) = f(x + vt)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f', \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \pm v f'$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f''$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 f''$$

Klassische Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (1 \text{ dim})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = v^2 \Delta \psi \quad (3 \text{ dim})$$

v^2 : Phasengeschwindigkeit. Eigenschaften:

- lineare Differentialgleichung \rightarrow Superposition und Interferenz
- Ebene Wellen sind Lösung der Wellengleichung
- Auftreten solcher Gleichungen weist auf Wellencharakter der Lösung hin

17.3 Wellenpakete, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Wellenpaket

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \{a(k) \cos kx + b(k) \sin kx\} dk$$

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \{a(k) \cos(k(x - v_{ph}t)) + b(k) \sin(k(x - v_{ph}t))\} dk$$

Jetzt: Übergang ins komplexe:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{i2}$$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \psi(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} a(k) + \frac{1}{2i} b(k) \right\} e^{ik(x - v_{ph}t)} dk + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} a(k) - \frac{1}{2i} b(k) \right\} e^{-ik(x - v_{ph}t)} dk$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty A(k) e^{ik(x - v_{ph}t)} dk$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty A(k) e^{ik(x - v_{ph}t)} dk$$

$$(\omega = |k|v_{ph} > 0)$$

Damit ergibt sich dann allgemein:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty A(k) e^{ik(x - v_{ph}t)} dk$$

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \psi(x, t) e^{-ik(x - v_{ph}t)} dx$$

Phasengeschwindigkeit: $v_{ph} = \omega/k \leftrightarrow$ Ausbreitungsgeschwindigkeit gleicher Phasen. Phasengeschwindigkeit kann aber für unterschiedliche k , das heißt unterschiedliche Wellenlängen $\lambda = 2\pi/k$ unterschiedlich sein \rightarrow Dispersion. Dispersionsrelation:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0) + \dots$$

(Taylorentwicklung). Dispersion führt im Allgemeinen dazu, dass Wellenpakete mit der Zeit auseinanderfließen. Bei schwacher Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge bewegt sich das Wellenpaket ein beträchtliches Stück, bevor es nicht wiederzuerkennen ist. Für Wellenpakete für die $A(k)$ nur in einem schmalen Bereich um k_0 von Null verschieden ist - was für die meisten relevanten Wellenpakete der Fall ist - kann man eine Wellenpaketgeschwindigkeit herleiten:

$$v_{gr} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}$$

\Rightarrow Gruppengeschwindigkeit, Geschwindigkeit des Schwerpunktes eines Wellenpakets:

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$$

Einfaches Beispiel: Schwebung:

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= 2A \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \\ &= 2A \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t) \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \\ \Rightarrow v_{ph} &= \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}, v_{gr} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \end{aligned}$$

17.4 Elektromagnetische Wellengleichung

Maxwell-Gleichung im Vakuum ($\Rightarrow \rho = 0, \vec{j} = 0$):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Ableinet:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \\
 \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) &= -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} \\
 \Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\vec{E}) &= -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\
 \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) &= \underbrace{\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E})}_{=0} - \underbrace{\Delta \vec{E}}_{\Delta \vec{E}} \\
 \Rightarrow \Delta \vec{E} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\
 \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{E}
 \end{aligned}$$

Analog:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = \dots \\
 \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{B}
 \end{aligned}$$

\Rightarrow Wellengleichungen für elektromagnetische Wellen. Im Vakuum:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{E} \\
 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{B}
 \end{aligned}$$

In Materie:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{E} \\
 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{B}
 \end{aligned}$$

mit Lichtgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
 c &= \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} \\
 c_{\text{mat}} &= \sqrt{\frac{1}{\varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{n}
 \end{aligned}$$

17.5 Struktur elektromagnetischer Wellen

Ebene Welle

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \sin(kx - \omega t) \\ kx &= \vec{k} \vec{r} \\ \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \vec{r} - \omega t) \div \vec{E} \stackrel{!}{=} 0 = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{=0} = \frac{\partial E_x}{\partial x} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow E_x &= \text{const.}\end{aligned}$$

Wahl der Randbedingung \rightarrow wähle $E_x = 0$. Fazit: Im Vakuum gibt es kein longitudinalen, sondern nur transversale elektromagnetischer Wellen. Jetzt: Verknüpfung von E - und B -Feld. Ansatz: Linear polarisierte Welle (das heißt \vec{E} , \vec{B} zeigen immer in eine Richtung)

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, t) &= (0, E_y(x, t), 0) \\ E_y(x, t) &= E_0 \sin(kx - \omega t)\end{aligned}$$

Maxwell: $\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$, $\text{rot } \vec{B} = 1/c^2 \dot{\vec{E}}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial t} = -kE_0 \cos(kx - \omega t), \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \\ \frac{1}{c^2} &= -\frac{\partial B_x}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\omega}{c^2} E_0 \cos(kx - \omega t), \frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0 \\ \Rightarrow \vec{B}(x, t) &= (0, 0, B_z(x, t)), B_z(x, t) = \frac{E_0}{c} \sin(kx - \omega t)\end{aligned}$$

\Rightarrow Magnetisches Wechselfeld muss in z-Richtung zeigen falls das elektrische Feld in y-Richtung polarisiert ist. das heißt für elektromagnetische, ebene Wellen im Vakuum gilt:

$$\vec{E} \perp \vec{B}$$

$$\ddot{\vec{E}} = c^2 \Delta \vec{E}$$

$$\ddot{\vec{B}} = c^2 \Delta \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sim (\vec{k} \vec{r} - \omega t) \quad (\text{Ebene Welle})$$

Mit $\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$, $\text{rot } \vec{B} = 1/c^2 \dot{\vec{E}}$

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, t) &= (0, E_y, 0) \\ E_y &= E_0 \sin(kx - \omega t) \\ \vec{B} &= (0, 0, B_z) \\ B_z &= \frac{E_0}{c} \sin(kx - \omega t)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{E} \perp \vec{B}, \vec{E}, \vec{B} \perp \vec{K}, \vec{E}, \vec{B} \text{ in Phase}$$

$$\begin{aligned} |\vec{B}| &= \frac{|\vec{E}|}{c} \\ \vec{B} &= \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E}) \end{aligned}$$

Zirkular polarisierte Welle:

$$[E_{0,x} = E_{0,y}, \varphi = 90^\circ]$$

Elliptisch Polarisierte Welle:

$$[E_{0,x} \neq E_{0,y}, \varphi = 90^\circ]$$

Unpolarisierte Welle:

[keine feste Phasenverschiebung]

Kugelwellen:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\vec{E}_0}{r} \sin(\vec{k} \vec{r} - \omega t) \\ \vec{B} &= \frac{\vec{B}_0}{r} \sin(\vec{k} \vec{r} - \omega t) \end{aligned}$$

17.6 Energietransport elektromagnetische Welle

Energiedichte im Vakuum:

$$\begin{aligned} \omega_{em} &= \frac{1}{2} (\vec{E} \vec{D} + \vec{B} \vec{H}) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \varepsilon_0 E^2(t) \\ \langle \omega_{em} \rangle &= \langle \omega_{em}(t) \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \end{aligned}$$

Energiestromdichte (oder Intensität)

$$\begin{aligned} S &= \frac{\text{Strahlungsleistung}}{\text{Fläche}} = \frac{\text{Energie}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}} \\ &= \text{Energedichte} \cdot \text{Geschwindigkeit} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = \omega_{em} c = \varepsilon_0 c E^2(t) = \varepsilon_0 c^2 E B = \frac{1}{\mu_0} E B = E H$$

Definition 17.2 (Poyntingvektor)

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{E} \times \vec{H}$$

17.7 Erzeugung elektromagnetischer Wellen

Hertzscher Dipol:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ω groß $\rightarrow L, C$ klein

- Spule \rightarrow Draht
- Kondensator \rightarrow Draht

\Rightarrow geraderung: PTP3

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} \left(\dot{\vec{p}} \times \vec{r} + \frac{r}{C} \left(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r} \right) \right)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\vec{p} + \frac{r}{C} \dot{\vec{p}} + 3 \left(\left(\vec{p} + \frac{r}{C} \dot{\vec{p}} \right) \hat{r} \right) \hat{r} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2} \left(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r} \right) \times \vec{r}$$

\Rightarrow Hertzscher Dipol

- Nahfeld: $E \sim 1/r^3, B \sim 1/r^2$
- Fernfeld: $E \sim 1/r, b \sim 1/r$

$\Rightarrow |\vec{S}| \sim EB \sim 1/r^2$

Symmetrie:

- $S = \sigma(r) \cdot \xi(v)$
- $\vec{S} \parallel \vec{r}$
- $\oint \vec{S} d\vec{A} = \text{const.}$

$$\oint \sigma(r) \xi(v) r^2 d\Omega = \sigma(r) r^2 \underbrace{\oint \xi(v) d\Omega}_{\text{konstant}} = C \sigma(r) r^2 \stackrel{!}{=} \text{const.}$$

$\Rightarrow \sigma(r) \sim 1/r^2, S \sim 1/r^2$. Also: Die $1/r$ -Abhängigkeit von E, B-Feld und die $1/r^2$ Abhängigkeit von $|\vec{S}|$ ergeben sich für das Fernfeld aus der Symmetrie und der Erhaltung des Energieflusses.

Außerdem: Fernfeld = reines Wellenfeld im freien Raum. Daher sind \vec{E}, \vec{B} rein transversal, \vec{E}, \vec{B} in Phase. Nahfeld: $r \gg d \Rightarrow \vec{B}, \vec{E}$ phasenverschoben. Vorbemerkung: Hochfrequente Wechselspannung auf einem Leiter führt zu elektromagnetischen Wellen entlang des Leiters, da sich die Oberflächenladung σ nur mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet. (Drahtwelle) \Rightarrow Hertzscher Dipol: Stehende Drahtwellen:

Phasenverschiebung: $\pi/2$

$$I(z, t) = I_0(z) \sin \omega t$$

$$U(z, t) = U_0(z) \cos \omega t$$

Randbedingungen

$$I_0\left(\pm\frac{1}{2}l\right) = 0$$

$$U_0\left(\pm\frac{1}{2}l\right) = U_0$$

$$U_0(0) = 0$$

Daraus folgt

$$I_0(z) = I_0 \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$U_0(z) = U_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$