

Experimentalphysik II (Schulz-Coulon)

Robin Heinemann

24. Oktober 2017

Inhaltsverzeichnis

11 Elektrostatik	2
11.1 Elektrische Ladung	2
11.2 Mikroskopische Deutung	3
11.3 Coulombsches Gesetz	3
11.4 elektrisches Feld	4
11.5 Elektrischer Fluss	4
11.6 Elektrische Felder innerhalb von Leitern	6
11.7 Differentielle Form des Gaußschen Gesetzes	6
11.8 Elektrisches Potential	7
11.9 Grundgleichungen der Elektrostatik	7
11.10 Elektrische Felder geladener Felder	9
11.11 Elektrischer Dipol	10
11.12 Kapazität und Kondensator	10
11.13 Kondensator als Energiespeicher	12
11.14 Dielektrika - Elektrostatik in Materie	12
12 Elektrische Gleichströme	14
12.1 Strom und Stromdichte	14
12.2 Elektrischer Widerstand und Ohmsches Gesetz	15
12.3 Elektrische Leistung	16
12.4 Stromkreise - Kirchhoffsche Regeln	17
12.5 Strom und Spannungsquellen	17
12.6 Strom und Spannungsmessung	18
13 Magnetostatik	18
13.1 Magnetfelder und bewegte Ladungen	19
13.2 Grundgleichungen der Magnetostatik	21
13.3 Zwei Anwendungsbeispiele	21
13.4 Biot-Savart-Gesetz	22
14 Materie im Magnetfeld	23
14.1 Magnetisierung und magnetische Erregung	23
14.2 Dia-, Para- und Ferromagnetismus	24
14.3 Feldgleichungen in Materie	26
15 Induktion und elektromagnetische Wechselfelder	27

15.1	Magnetische Induktion	27
15.2	Generatoren	28
15.3	Induktivität und Selbstinduktion	29
15.4	Verschiebungsstrom	29
16	Schaltvorgänge, Wechselstrom und Schwingkreise	31
16.1	Induktivität im Stromkreis (LR-Glied)	31
16.2	Kapazität im Stromkreis (RC-Glied)	32
16.3	R, L, C im Wechselstromkreis	32
16.4	Komplexe Darstellung	34
16.5	RLC-Schwingkreis	36
16.6	Transformator	38
16.7	Elektrische und magnetische Feldenergie	39
17	Elektromagnetische Welle	40
17.1	Mechanische Wellen	40
17.2	Wellengleichung	41
17.3	Wellenpakete, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit	42
17.4	Elektromagnetische Wellengleichung	43
17.5	Struktur elektromagnetischer Wellen	44
17.6	Energietransport elektromagnetischer Welle	45
17.7	Erzeugung elektromagnetischer Wellen	45
17.8	Elektromagnetisches Spektrum	47
18	Natur des Lichts und Wellenoptik	47
18.1	Beugung und Interferenz	47
18.2	Reflexion und Brechung	51
18.3	Fermatsches Prinzip	51
18.4	Polarisation und Fresnelsche Formeln	52
18.5	Dispersion und Prismenwirkung	54
19	Optische Abbildungen	54
19.1	Dünne Linsen, Linsengleichung	54
19.2	Einfache Anwendung des Linsegesetzes	55
19.3	Dicke Linsen	55
19.4	Linsenfehler	55
19.5	Optische Instrumente	56
20	Spezielle Relativitätstheorie	56

11 Elektrostatik

11.1 Elektrische Ladung

- Neue Kraft
- anziehend oder abstoßend
- Konzept der elektrischen Ladung

Experimentelle Erkenntnisse:

- Erzeugung von Ladungen durch Reibung
- Ladungen gleicher Vorzeichen: Abstoßung
- Ladungen ungleicher Vorzeichen: Anziehung
- Ladung kann transportiert werden
- Elektrische Kräfte sind Fernkräfte
- Ladungen sind erhalten

Definition 11.1 Influenz Ladungstrennung durch die (Fern) Wirkung elektrischer Kräfte nennt man Influenz oder elektrostatische Induktion.

11.2 Mikroskopische Deutung

Elektron: negativ

Proton: positiv

Atome elektrisch neutral

- Z: Anzahl Protonen / Elektronen
- N: Anzahl Neutronen
- A: Anzahl Neutronen + Protonen

Leiter und Nichtleiter: Unterschiedliche Verfügbarkeit von Ladungsträgern

11.3 Coulombsches Gesetz

Experimentelles Resultat:

$$\vec{F}_C = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Definition 11.2

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

mit $\epsilon_0 = 8.85416 \times 10^{-12} \text{ C N}^{-1} \text{ m}^{-2}$

Vergleich: Coulomb vs. Gravitation

$$\vec{F}_G = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$\vec{F}_C = K \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$\frac{F_C}{F_G} = 227 \times 10^{39}$$

11.4 elektrisches Feld

Definition 11.3 (Elektrisches Feld)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_C(\vec{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = q \vec{E}(\vec{r})$$

Das elektrische Feld hängt nur von der Ladung Q ab, aber nicht von der Testladung q . Es gilt damit:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q \vec{E}(\vec{r})$$

Bedeutung des elektrischen Feldes:

Coulomb-Gesetz beschreibt Fernwirkung.

Aber: Wodurch wird diese Wirkung übertragen?

Geschieht die Übertragung instantan? (nein!)

Feldwirkungstheorie: Elektrische Kraftübertragung über Ausbreitung des elektrischen Feldes, das mit der Probeladung q . Elektrostatik: Fernwirkung- und Feldwirkungstheorie äquivalent.

Elektrodynamik: Feldbegriff essentiell.

Feld einer allgemeinen Ladungsverteilung:

Wichtig: Es gilt das Superpositionsprinzip. Es gilt

$$dQ = \rho(\vec{r}) dV$$

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} \rho(\vec{r}) dV$$

Für diskrete Ladungen:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Die Anwesenheit von Ladungen verändern den Raum. Es entsteht ein Vektorfeld, dessen Stärke und Richtung in jedem Raumpunkt die normierte Kraft $\frac{\vec{F}}{q}$ auf eine Probeladung angibt.

Eigenschaften der Feldlinien

1. Das \vec{E} -Feld zeigt tangential zu den Feldlinien
2. Feldlinien zeigen weg von positiven Ladungen
3. Feldliniendichte entspricht Stärke des Feldes.

11.5 Elektrischer Fluss

Definition 11.4 (Elektrischer Fluss ϕ_E) Maß für die Anzahl der Feldlinien, die Fläche A durchstoßen.

Für geschlossene Oberflächen:

$$Q_{\text{innen}} = 0 \implies \phi_E = 0$$

$$Q_{\text{innen}} > 0 \implies \phi_E > 0$$

$$Q_{\text{innen}} < 0 \implies \phi_E < 0$$

Mathematisch:

- Homogenes Feld, \perp zur Oberfläche $\implies \phi E = EA$
- Homogenes elektrisches Feld $EA' = EA \cos \theta = \vec{E} \vec{A} = \vec{E} \vec{n} A$

Verallgemeinerung:

$$\begin{aligned}\Delta \phi_i &= \vec{E}_i \vec{n}_i \Delta A_i \\ \phi_E &= \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \sum \vec{E}_i \vec{n}_i \Delta A \\ \phi_A &= \int \vec{E} d\vec{A} \quad (\text{Definition von Elektrischem Fluss})\end{aligned}$$

Ladung einer Kugel:

$$\begin{aligned}\phi_A &= \int \vec{E} d\vec{A} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \int d\vec{A} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} 4\pi R^2 \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

Definition 11.5 (Gauß'sches Gesetz (1. Maxwell-Gleichung))

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{\text{innen}}}{\epsilon_0}$$

Das Gauß'sche Gesetz ist allgemeingültig, da:

$$\begin{aligned}\oint_{A_2} \vec{E} d\vec{A} - \oint_{A_1} \vec{E} d\vec{A} &= 0 \\ \oint_{A_2} \vec{E} d\vec{A} &= \oint_{A_1} \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{\text{innen}}}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

Zusammen mit Superpositionsprinzip und homogener Fläche erhält man die Allgemeingültigkeit des Gauß'schen Gesetz.

Herleitung des Coulombschen Gesetz mit Gauß'schen Gesetz:

$$\begin{aligned}\oint \vec{E} d\vec{A} &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ E \oint d\vec{A} &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ E 4\pi R^2 &= \frac{Q}{\epsilon_0} \\ E(R) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2}\end{aligned}$$

Beispiel 11.6 (Unendlich langer Draht) Ladungsdichte: $\lambda = Q/L$

$$\vec{E}(\vec{R}) = \vec{E}(R)$$

- Mantelfläche: $\vec{E} \parallel d\vec{A}$
- Deckel: $\vec{E} \perp d\vec{A}$

$$\phi_E = \oint \vec{E} d\vec{A} = \int_{\text{Mantel}} \vec{E} d\vec{A} + \underbrace{\int_{\text{Deckel}} \vec{E} d\vec{A}}_{=0} = E \int_{\text{Mantel}} dA = E 2\pi R L = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\frac{Q}{L}}{2\pi R \epsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \frac{1}{R}$$

Beispiel 11.7 (Unendlich ausgedehnte Flächenladung) Flächenladungsdichte: $\sigma = Q/A$

Symmetrie:

\vec{E} konstant für festen Abstand.

$\vec{E} \parallel \vec{A}$

$$\phi_E = \oint \vec{E} d\vec{A} = \underbrace{\int_{\text{Mantel}} \vec{E} d\vec{A}}_0 + \int_{\text{Deckel}} \vec{E} d\vec{A} = EA_1 + EA_2 = 2EA$$

$$\phi_E = 2EA = \frac{Q}{\epsilon_0} \implies E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Beispiel 11.8 (Plattenkondensator)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

11.6 Elektrische Felder innerhalb von Leitern

Innerhalb eines Leiters verschwindet das elektrostatische Feld.

Bei einem geladenem, isolierten Leiter sitzen alle Ladungen auf der Oberfläche.

Dazu betrachte Oberfläche, die gerade kleiner als der Leiter ist, dort ist das Elektrische Feld gleich Null, also folgt:

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = 0 = \frac{Q_{\text{innen}}}{\epsilon_0} \implies Q_{\text{innen}} = 0$$

Leiter mit Hohlraum:

$$\oint_O \vec{E} d\vec{A} = 0 \implies Q = 0$$

11.7 Differentielle Form des Gaußschen Gesetzes

$$\oint_A \vec{E} d\vec{A} = \int_V \text{div } \vec{E} dV$$

$$\text{div } \vec{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z$$

Zur Divergenz:

Schreibweise: $\text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$, $\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ in Anschauung:

$$\begin{aligned} \phi_E &= E_O \Delta A - E_i \Delta A \\ &= \Delta E_x \Delta A \\ &= \frac{\Delta E_x}{\Delta x} \Delta x \Delta A = \underbrace{\partial_x E_x}_{\text{„div“}} \Delta V \end{aligned}$$

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

Differentielle Form des Gauß Gesetz, 1. Maxwell Gleichung:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ρ : Ladungsdichte.

11.8 Elektrisches Potential

Coulombkraft ist konservativ da radialsymmetrisch.

$$\begin{aligned} W &= E_{pot}(2) - E_{pot}(1) = - \int_1^2 \vec{F}_C d\vec{s} \\ \vec{F}_C &= - \operatorname{grad} E_{pot} \\ E_{pot}(\vec{r}) &= - \int_{\infty}^{+r} \vec{F}_C d\vec{r} = - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{Qq}{r^2} dr \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qq}{r} \end{aligned} \quad (\text{Theorie: } Qq/r)$$

Definition 11.9 (Coulombpotential)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{E_{pot}(\vec{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}, \varphi(\infty) = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) = - \int \vec{E} d\vec{s} \\ \oint \vec{E} d\vec{s} &= 0 \\ \vec{E}(\vec{r}) &= - \operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) \end{aligned}$$

Allgemeine Ladungsverteilung:

$$\varphi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|} dV$$

Definition 11.10 (Elektrische Spannung)

$$U_{12} = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi_{21} = - \int_1^2 \vec{E} d\vec{s}$$

11.9 Grundgleichungen der Elektrostatik

Integralform:

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \oint \vec{E} d\vec{s} = 0$$

Differentialform:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

Stokes-scher Satz:

$$\oint_C \vec{E} d\vec{s} = \int_A \operatorname{rot} \vec{E} d\vec{A}$$

Zur Rotation:

Schreibweise:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E}, \quad \vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = (\partial_y E_z - \partial_z E_y, \partial_z E_x - \partial_x E_z, \partial_x E_y - \partial_y E_x)$$

Anschauung:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{A} d\vec{s} &= \Delta E_z \Delta z - \Delta E_x \Delta x \\ &= \frac{\Delta E_z}{\Delta x} \Delta x \Delta z - \frac{\Delta E_x}{\Delta z} \Delta z \Delta x \\ &= \underbrace{(\partial_x E_z - \partial_z E_x)}_{\operatorname{rot}} \Delta A \end{aligned}$$

Mathematik:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} &= -\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) = -\vec{\nabla}^2 \varphi = -\Delta \varphi \\ &= -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Definition 11.11 (Poissongleichung)

$$\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Zentrale Gleichung der Elektrostatik

Definition 11.12 (Laplacegleichung)

$$\Delta \varphi = 0$$

Eckstein der mathematischen Physik [PTP3]

Realisierung eines Feldes der Form

$$\begin{aligned} \varphi &= ax^2 + by^2 + cz^2 \quad a, b, c > 0 \\ \Delta \varphi &= 2a + 2b + 2c > 0 \end{aligned}$$

$2a + 2b + 2c$ ist immer $> 0 \implies$ solches Feld nicht möglich.

11.10 Elektrische Felder geladener Felder

„Einfach“: Berechnung für bekannte Ladungsverteilung.

„Schwierig“: Berechnung in Anwesenheit von Leitern.

Für statische Felder gilt:

im Leiter $\vec{E} = 0$

im Hohlraum $q = 0$, $\vec{E} = 0$

Oberfläche eines Leiters:

$$1. \vec{E} \parallel \vec{A}$$

$$2. \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{aligned} d\phi_E &= \vec{A} d\vec{A} = E dA \\ &= \frac{dQ}{d\varepsilon_0} \\ E &= \underbrace{\frac{dQ}{dA}}_{\sigma} \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

$$3. \varphi = \text{const. an Leiteroberfläche.}$$

Berechnung von Verteilungen von Ladungen schwierig. Hier nur qualitatives Verständnis.

Kugelladung (Radius R):

Innen: $E = 0$, $\varphi = \text{const.}$

Außen: $E = 1/(4\pi\varepsilon_0)Q/r^2$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{R}) &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ \vec{E}(\vec{R}) &= \frac{\vec{\phi}(R)}{R} \end{aligned}$$

$\varphi = \text{const.} \implies$ Erzeugung hoher Felder für kleine R

Beispiel 11.13 (Zwei Kugeln (verbunden)) verbunden $\implies \varphi = \varphi_1 = \varphi_2 \implies Q_1/R_1 = Q_2/R_2$

$$\begin{aligned} R_1 &> R_2 \\ \implies Q_1 &> Q_2 \\ \sigma_1 &< \sigma_2 \\ E_1 &< E_2 \end{aligned}$$

kleiner Krümmungsradius \implies größeres Feld, größere Flächenladungsdichte.

Merke: Scharfe Kanten beziehungsweise kleiner Krümmungsradius bedeutet hohes E-Feld

Beispiel 11.14 (Halbraumleiter mit Ladung)

11.11 Elektrischer Dipol

Beispiel 11.15 (Dipol)

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\left|\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{d}\right|} + \frac{-q}{\left|\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{d}\right|} \right] \\ \varphi(\vec{r}) &= \frac{\vec{p}\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \\ \vec{p} &= q\vec{d} \\ \vec{E} &= -\text{grad } \varphi \\ E(\vec{r}) &= \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} \quad (\text{Elektrisches Dipolfeld (ohne Beweis)})\end{aligned}$$

Merke: Elektrischer Dipol, $r \gg d$

$$\varphi(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^2} \quad E(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^3}$$

Multipolentwicklung:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \frac{a_0}{r} + \frac{a_1}{r^2} + \frac{a_2}{r^3} + \dots \\ a_0 &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \quad a_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \vec{p}\hat{r} \\ \vec{p} &= \int \rho(\vec{r})\vec{r}dQ\end{aligned}$$

Elektrischer Dipol im homogenem Feld:

Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F} = q \cdot \vec{d} \times \frac{1}{q} \vec{F} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Kräftepaar! \implies Ausrichtung im Feld. Potentielle Energie: Drehung eines Dipols im homogenen Feld, das heißt Arbeit wird frei oder wird geleistet. Wähle: $E_{pot} = 0$ für $r = 90^\circ$

$$E_{pot} = -\vec{F}\vec{s} = -\vec{p}\vec{E}$$

Dipol im inhomogenen Feld: das heißt an den beiden Enden des Dipols wirken unterschiedliche Kräfte. \implies Drehmoment + resultierende Kraft. Es gilt:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{d}\frac{d\vec{E}}{d\vec{r}} = \vec{p}\nabla\vec{E} \\ F_x &= \vec{p}\text{grad } E_x \\ F_y &= \vec{p}\text{grad } E_y \\ F_z &= \vec{p}\text{grad } E_z\end{aligned}$$

11.12 Kapazität und Kondensator

Leiter können Ladungen speichern (zum Beispiel: Leidener Flasche, Kondensator, Metallkugel).

Kondensator = Ladungsspeicher (Ladungen werden im Kondensator „kondensiert“, das heißt zusammengedrängt)

Frage: Was ist die Ladungsspeicherfähigkeit oder Kapazität eines Leiters? Dafür betrachte Kugelkondensator. Gespeicherte Ladungsmenge auf einzelner Metallkugel:

$$\Delta\varphi = - \int_{\infty}^R \vec{E} d\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \rightarrow Q = 4\pi\epsilon_0 R U$$

($\Delta\varphi = U$). Das heißt gespeicherte Ladung ist proportional zur angelegten Spannung U (Allgemein: $\varphi(Q) \sim Q$, Superpositionsprinzip). Definiere Ladungsspeicherfähigkeit „pro Volt“

Definition 11.16 (Kapazität)

$$C = \frac{Q}{U} \quad Q = CU$$

$$[C] = 1 \text{ C V}^{-1} = 1 \text{ F}$$

Die Kapazität einer Leiteranordnung hängt von der Geometrie (und vom Material) ab. Kapazität eines Kugelkondensators: $4\pi\epsilon_0 R$ (hier: freistehende Kugel). Einheit Farad ist sehr groß, da 1 C sehr groß ist.

Beispiel 11.17 Kapazität einer Kugel mit $R = 1 \text{ cm} \rightarrow C \approx 1 \times 10^{-12} \text{ F} = 1 \text{ pF}$

Kapazität der Erde mit $R = 7 \times 10^8 \text{ cm} \rightarrow C \approx 7 \times 10^{-4} \text{ F} = 700 \mu\text{F}$

Trotzdem heute: Superkondensatoren mit Kapazitäten bis zu $1 \times 10^4 \text{ F}$

Referenzpotential $\varphi = 0$ muss aber nicht im Unendlichen liegen. Allgemeiner Kondensator: Zwei Leiter mit Ladungen $+Q$ und $-Q$ (Realisierung durch Erdung) \Rightarrow Erhöhung der Kapazität durch Influenz.

Beispiel 11.18 (Kugelkondensator) (siehe Übungen)

Beispiel 11.19 (Plattenkondensator)

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0} \\ \Rightarrow U &= \varphi(x_2) - \varphi(x_1) = - \int_{x_1}^{x_2} \vec{E} d\vec{s} \\ &= -E \int_{x_1}^{x_2} ds = -\frac{Q}{\epsilon_0 A} d \\ \Rightarrow C &= \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \end{aligned}$$

- A : Fläche der Leiterplatte
- d : Leiterplattenabstand

Kondensatorschaltungen:

Parallelschaltung:

- Gleiche Spannung an allen C_i
- Verschiedene Werte C_i

Es gilt:

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n \\ \frac{Q}{U} &= \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_2}{U} + \dots + \frac{Q_n}{U} \\ \Rightarrow C &= C_1 + C_2 + \dots + C_n \end{aligned}$$

⇒ Gesamtkapazität parallelgeschalteter Kondensatoren

$$C_{ges} = \sum_{i=1}^n C_i$$

Reihenschaltung: Es gilt

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + \dots + U_n \\ \frac{Q}{C} &= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} \\ \Rightarrow \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \end{aligned}$$

⇒ Gesamtkapazität von in Reihe geschalteter Kondensatoren:

$$\frac{1}{C_{ges}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Kehrwert der Gesamtkapazität ergibt sich als Summe der Kehrwerte der Einzelkapazitäten

11.13 Kondensator als Energiespeicher

Energiedichte des elektrischen Feldes. Aufgeladener Kondensator = Energiespeicher. Frage: Wie viel Energie ist gespeichert? Hierzu betrachten wir einen Plattenkondensator: Ladungstransport von Platte A zu Platte B erfordert Arbeit

$$\begin{aligned} \Rightarrow dW &= U dQ = \frac{Q}{C} dQ \\ W_C &= \int \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{C} \int Q dQ = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2 \end{aligned}$$

⇒ Im Plattenkondensator gespeicherte Energie:

$$E_C = \frac{1}{2} C U^2$$

gilt allgemein für in Kondensator gespeicherte Energie! (Herleitung unabhängig von Geometrie). Für Plattenkondensator gilt weiter:

$$E_C = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} U^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 (A d) \frac{U^2}{d^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 V E^2$$

Änderung des Blickwinkels: Energie im elektrischen Feld gespeichert ⇒ Energiedichte $\omega_e = E_C/V$

$$\Rightarrow \omega_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Gilt allgemein für alle elektrischen Felder im Vakuum.

11.14 Dielektrika - Elektrostatik in Materie

Beobachtung: Einbringen eines Isolators (Dielektrikum) in einen Kondensator hat großen Einfluss auf die Kapazität. Die Spannung sinkt ⇒ Kapazität steigt

Definition 11.20 (Permittivität)

$$C_{Diel} = \epsilon_r C_{Vakuum} = \epsilon_r C_0$$

auch Dielektrizitätskonstante, relative Dielektrizitätszahl, relative Permittivitätszahl.

Beispiel 11.21 (Plattenkondensator)

$$\begin{aligned}
C_{Diel} &= \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d} \\
C_{Vak} \cdot U_{Vak} &= C_{Diel} U_{Diel} \\
\Rightarrow \frac{C_{vak}}{C_{Diel}} &= \frac{U_{Diel}}{U_{vak}} = \frac{E_{Diel}}{E_{vak}} = \frac{1}{\varepsilon_r} \\
E_{Diel} &= \frac{1}{\varepsilon_r} E_{vak}
\end{aligned}$$

das heißt das Feld im Kondensator mit Dielektrikum reduziert.

Mikroskopische Beschreibung:

Isolator: Es gibt keine freien, beweglichen Ladungsträger. Aber Polarisation, das heißt Ausrichtung von Dipolen.
Kondensator

$$\begin{aligned}
C_0 &= \varepsilon_0 \frac{A}{d} \\
C_{Diel.} &= \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d} \\
E_{Diel.} &= \frac{1}{\varepsilon_r} E_{\text{Vakuum}} \\
&= \frac{1}{\varepsilon_r} E_0 \\
\sigma_0 &= \frac{Q_0}{A} \\
\sigma_p &= \frac{Q_p}{A} \\
E_{Diel} = E_0 - E_p &= \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\sigma_0 - \sigma_p) = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \\
\Rightarrow \sigma_p &= \sigma_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right) \\
\Rightarrow \sigma_0 &= \sigma_{frei} = \varepsilon_r \sigma_{tot} \\
\Rightarrow Q_0 &= Q_{frei} = \varepsilon_r Q_{tot}
\end{aligned}$$

Polarisation mit Dipolmoment $\vec{p}_i = q_i \vec{d}_i$, $[P] = \text{C m}^{-2}$

Definition 11.22

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum \vec{p}_i$$

\vec{P} wächst mit stärkerer Ausrichtung des Dipols an. Und es gilt

$$|\vec{P}| = \frac{Q_p d}{V} = \frac{\sigma_p A d}{V} = \sigma_p$$

\Rightarrow Makroskopische Polarisation = Oberflächenladungsdichte auf Dielektrikum.

$$\begin{aligned}
P &= \sigma_p = \sigma_0 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right) = \varepsilon_0 E_{vak} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right) \\
&= (\varepsilon_r - 1) \varepsilon_0 E_{Diel.} \\
\vec{P} &= \chi \varepsilon_0 \vec{E}_{Diel.} \\
\chi &= \varepsilon_r - 1
\end{aligned}$$

Definition 11.23 (Dielektrische Verschiebung)

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E}_{Diel.} + \vec{P} \\ &= \varepsilon_0 \vec{E}_{vak} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}_{Diel.}\end{aligned}$$

Vakuum:

$$\vec{E}_{Diel} = \vec{E}_{vak} \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_{vak}$$

Dielektrikum

$$\vec{E}_{Diel} = \frac{1}{\varepsilon_r} \vec{E}_{vak} \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}_{vak}$$

Allgemein:

$$\begin{aligned}E_{vak}^{\parallel} &= E_{Diel}^{\parallel}, E_{vak}^{\perp} = \varepsilon_r E_{Diel}^{\perp} \\ D_{vak}^{\parallel} &= \frac{1}{\varepsilon_r} D_{Diel}^{\parallel}, D_{vak}^{\perp} = D_{Diel}^{\perp}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E}_{vak} &= \frac{\rho_{innen}}{\varepsilon_0} \\ \implies \operatorname{div} \vec{D} &= \rho_{frei}\end{aligned}$$

\implies 1. Maxwell Gleichung in Materie

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{D} &= \rho_{frei} \quad \oint \vec{D} d\vec{A} = Q_{frei} \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho_{frei}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad \oint \vec{D} d\vec{A} = \frac{Q_{frei}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}\end{aligned}$$

Elektrische Feldenergie im Dielektrikum

$$\begin{aligned}W_e &= \frac{1}{2} C n^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{Q^2}{C_0} \\ \implies \omega_C &= \frac{1}{2} \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D}\end{aligned}$$

Für gleiches Feld \vec{E} wächst die Energiedichte mit ε_r . Zur Energie des Feldes \vec{E} wird Polarisationsenergie der Dipole addiert.

12 Elektrische Gleichströme**12.1 Strom und Stromdichte****Definition 12.1 (Elektrischer Strom)**

$$\begin{aligned}I &= \frac{dQ}{dt} \\ [I] &= \text{C s}^{-1} = \text{A} \\ |\vec{j}| &= \frac{I}{A} = \frac{dQ}{A dt} \\ \vec{j} &= \rho \vec{v} = n q_e \vec{v}_D \\ \dots \rho &= \div \vec{j} = 0 \\ I &= \int \vec{j} dA = \frac{dQ}{dt} = \int \dot{\rho} dV\end{aligned}$$

12.2 Elektrischer Widerstand und Ohmsches Gesetz

Ladungsfluss entsteht aufgrund einer Potentialdifferenz beziehungsweise eines elektrischen Feldes.

$$U = \varphi_b - \varphi_a = E \Delta l$$

Spannungsänderung

- \implies Änderung Elektrisches Feld
- \implies Änderung der Ladungsträgergeschwindigkeit
- \implies Änderung von Stromdichte und Strom

Definition 12.2 (Differentieller Widerstand)

$$\vartheta = \frac{dU}{dI}$$

$$[S] = \text{A V}^{-1} = \text{S}$$

Definition 12.3 (Differenzielle Leitfähigkeit)

$$S = \frac{dI}{dU}$$

$$[\vartheta] = \text{V A}^{-1} =$$

Beobachtung: Elektrischer Leiter: $\vartheta = \text{const.}$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{El}{I} \iff I = \frac{El}{R}$$

$$j = \frac{I}{A} = \frac{l}{RA} E = \sigma E = \eta q_e v_D$$

Satz 12.4 (Ohmsches Gesetz)

$$U = RI$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \eta_E \vec{v}_D$$

mit

$$\sigma = \frac{l}{RA} = S \frac{l}{A} \quad (\text{spezifische Leitfähigkeit})$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = R \frac{A}{l} \quad (\text{spezifischer Widerstand})$$

Für ohmschen Leiter muss $\vec{v}_D \sim \vec{E}$ gelten.

Drude Modell

Bewegung von Elektronen in Leitern. Thermische Bewegung: $v_{th} \approx 1 \times 10^6 - 1 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$. Bewegung wird gestört durch Stöße mit Gitteratomen. Mittlere Zeit zwischen zwei Wechselwirkungen:

$$\tau = \frac{T}{N} \implies \lambda = \tau v_m$$

T : Messzeit, N : Anzahl der Stöße. Einschalten eines E-Feldes: Beschleunigung der Elektronen entgegen der Richtung des elektrischen Feldes \vec{E}

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m} \\ \Rightarrow \vec{v}_D(t) &= \vec{v}_{th} + \frac{q\vec{E}}{m}t \\ \vec{v}_D &= \underbrace{\langle \vec{v}_{th} \rangle}_{=0} + \frac{q\vec{E}}{m}\langle t \rangle = \frac{q}{E}m\tau = \mu\vec{E}\end{aligned}$$

Also gilt für einen ohmschen Leiter:

$$\vec{v}_D = \mu\vec{E}$$

mit μ : Elektronenbeweglichkeit

$$\mu = \frac{q}{\tau}m, [\mu] = \text{m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}$$

Mit

$$\begin{aligned}\vec{j} &= nq_e\vec{v}_D = nq_e\mu\vec{E} \\ \sigma &= n_e\mu = \frac{nq_e^2\tau}{m}\end{aligned}$$

Beispiel 12.5 (Kupferdraht)

$$A = 1 \text{ mm}^2, I = 1 \text{ A}, j = \frac{I}{A} \Rightarrow v_D = 10 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-1}$$

Jedes Atom trägt 1 Elektron bei.

Ohmscher Leiter: $\vartheta = \text{const.}$

$$\begin{aligned}\frac{d\vartheta}{dI} &< 0 \text{ NTC, Heißleiter} \\ \frac{d\vartheta}{dI} &> 0 \text{ PTC, Kaltleiter}\end{aligned}$$

12.3 Elektrische Leistung

Strom I fließt durch Widerstand beziehungsweise Verbraucher, gewonnene kinetische Energie der Elektronen wird durch Stöße in Wärme umgewandelt.

$$W = QU = UIt$$

Definition 12.6 (Leistung)

$$P = UI$$

$$[P] = W = \text{J s}^{-1} = \text{A V}^{-1}$$

Für ohmschen Leiter:

$$P = RI^2 \iff P = \frac{U^2}{R}$$

Anwendungsbeispiel: Hochspannungsleitung. Transport von elektrischer Energie: Verluste durch Wärmeerzeugung in Überlandleitung. Ziel: Minimierung von Leistungsverlusten. Kraftwerk: $F = UI$
Überlandleitung:

- Spannungsabfall: $U_L = R_L I$
- Verlustleistung: $P_L = U_L I = R_L I^2 = U_L^2 / R$

das heißt Spannungsabfall beziehungsweise Verlustleistung klein falls I klein und U groß! \implies Hochspannungsleitung.
Verfügbare Leistung: $P_V = P - P_L$

12.4 Stromkreise - Kirchhoffsche Regeln

Haushalt, elektrische Schaltungen, . . . Im Allgemeinen Netzwerke vieler Leiter, Spannungsquellen und Verbraucher.
Zur Berechnung von Strömen und Spannungen:

Kirchhoffsche Regeln:

1. Knotenregel: An jedem Knoten gilt $\sum I_k = 0$ (Ladungserhaltung, folgt aus Kontinuitätsgleichung)
2. Maschenregel: Für jede Masche gilt: $\sum U_k = 0$ (Zirkulationsgesetz)

Für ohmsche Widerstände ergibt sich damit:

Reihenschaltung:

$$R = \sum_{i=1}^n R_i$$

Parallelschaltung:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

12.5 Strom und Spannungsquellen

Spannungsquelle mit Innenwiderstand R_i :

$$\begin{aligned} U_{kl} &= U_0 - I R_i \\ &= U_0 \frac{R_a}{R_a + R_i} \end{aligned}$$

\implies Ideale Spannungsquelle:

$$R_i \approx 0 \quad I \approx \frac{U_0}{R_a}$$

Stromquelle: Versorgung mit konstantem Strom. \implies hoher Innenwiderstand ($R_i \rightarrow \infty, R_i \gg R_a$)

$$I = \frac{U_0}{R_i + R_a} = \frac{U_0}{R_i} = \text{const.}$$

Technische Realisierung?

Prinzip: Ladungstrennung durch Energiezufuhr \implies Potentialdifferenz, leitende Verbindung \implies Stromfluss.

Anwendung finden:

- elektrodynamische Generatoren, magnetische Induktion
- Batterien und Akkumulatoren, Ladungstrennung durch chemische Reaktionen
- Solarzellen, Ladungstrennung durch Lichtenergie
- Thermische Stromquellen, Ladungstrennung durch Temperaturabhängigkeit von Kontaktpotentialen.

Galvanische Elemente \implies Galvani-Spannung: $\Delta\varphi_C \implies$ Volta-Element

Minuspol: $Zn \rightarrow Zn^{++} + 2e^-$

Pluspol: $2H^+ + 2e^- \rightarrow H_2$

$Zn + H_2SO_4 \rightarrow H_2 + ZnSO_4$

Daniel-Element: Diaphragma, dass nur SO_4 durchlässt verhindert **Vergiftung**.

Thermische Stromquellen. Bei Kontakt zweier Metalle ergibt sich Potentialdifferenz \implies Kontaktspannung.

Ursache: Unterschiedliche Austrittsarbeit für freie Elektronen. Austrittsarbeit und Kontaktspannung hängen von Temperatur ab.

- Thermoelement
- Peltierkühlung (Umkehrung)

12.6 Strom und Spannungsmessung

Ziel: Strom- und Spannungsmessung ohne Beeinflussung des zu messenden Systems.

Strommessung: Amperemeter in Reihe mit Verbraucher, Amperemeter - $R_i \approx 0$ um zusätzlichen Spannungsabfall aus Messgerät zu minimieren.

Spannungsmessung: Voltmeter parallel zum Verbraucher geschaltet. Voltmeter - $R_i \rightarrow \infty$, um Stromfluss durch Voltmeter zu minimieren.

Messinstrumente:

- Galvanometer
- Digitalvoltmeter (mit Operationsverstärker) (Messbereichserweiterung durch Parallel- und Serienschaltung von Widerständen)

13 Magnetostatik

Neue Kraft zwischen elektisch neutralen Materialien. (später: Vereinheitlichung von Elektrizität und Magnetismus \implies Elektromagnetismus) Beobachtungen:

- Zwei Pole: Nord- und Südpol
- Gleichnamige Pole stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an
- Pole lassen sich nicht trennen, keine magnetische Ladungen, keine Monopole
- Magnete richten sich auf der Erde im Nord-Süd-Richtung aus

Traditionell: Definition der magnetischen Feldstärke p in Analogie zur elektrischen Ladung Q . (Realisierung: langer Stabmagnet)

$$\implies \vec{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{p_1 p_2}{r^2} \hat{r}$$

mit $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ V s A}^{-1} \text{ m}$

$$\vec{H} = \lim_{p_2 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{p_2}$$

- $[p] = \text{V s} = \text{Wb}$
- $[H] = \text{A m}^{-1}$

Hieraus folgt die historische Bezeichnung von H als „Magnetfeld“ oder „magnetische Feldstärke“. Aber $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ wichtigere Größe, eigentliches Äquivalent zum E-Feld

Traditionell

 H = magnetische Feldstärke B = magnetische Induktion oder magnetische Flussdichte

Modern

 H = magnetische Erregung B = Magnetfeld oder magnetische Flussdichte

Ebenfalls: In Analogie zum elektrischen Feld: Magnetischer Kraftfluss

$$\phi_m = \int \vec{B} d\vec{A}$$

$$\bullet [B] = \text{Vs m}^{-2} = \text{T}$$

$$\bullet [\phi_m] = \text{Vs} = \text{Wb}$$

13.1 Magnetfelder und bewegte Ladungen

Beobachtungen:

1. Ein Strom durch einen Leiter erzeugt ein Magnetfeld um denselben (Oerstedt, 1777 - 1851)
2. Auf bewegten Ladungen wird in einem Magnetfeld eine Kraft ausgeübt. Offenbar: Streuwirkung beeinflusst Kraftrichtung. (Ampere, 1775-1836)

Experiment:

$$1. B \sim I/r$$

$$2. \vec{F} \sim I(\vec{e} \times \vec{B})$$

Konvention:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B}) \quad (\text{Lorentzkraft})$$

 \vec{l} : Streurichtung.mit $\vec{I} = \vec{j}A$:

$$\vec{F} = lA(\vec{j} \times \vec{B}) = lAnq(\vec{v} \times \vec{B})$$

Kraft auf einen einzelnen Ladungsträger:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{Lorentzkraft (ohne E-Feld)})$$

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{Lorentzkraft (allgemeine Form)})$$

Beispiel 13.1 (Freie Ladung im homogenen B-Feld) Freie Ladung im homogenen B-Feld mit $\vec{R} \perp \vec{B}$. Bewegungsgleichung:

$$m\vec{a} = (\vec{r} \times \vec{B})$$

Da Kraft senkrecht auf Bewegungsrichtung steht folgt eine Kreisbewegung! Also:

$$a = a_{zp} = v\omega = \frac{v^2}{r} = \frac{q}{w}vB$$

$$\omega = \frac{q}{w}B \quad (\text{Zyklotronfrequenz})$$

Beispiel 13.2 (Leiterschleife im homogenen B-Feld) Kräftepaar bewirkt Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F} = \vec{d} \times I(\vec{l} \times \vec{B}) = I(\vec{A} \times \vec{B})$$

Definition 13.3 (Magnetischer Moment)

$$\vec{\mu} := I \vec{A} = I A \vec{n}$$

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Elektrischer Dipol	Magnetischer Dipol
$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$	$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

Durch Vergleich mit elektrischen Dipol: Offener Leiter erzeugt ein Kreisstrom einen magnetischen Dipol.

Beispiel 13.4 (Hall-Effekt) Ablenkung bewegter Ladungsträger im Festkörper beziehungsweise in Leitern durch ein externes Magnetfeld. Erlaubt Magnetfeldmessung.

Beobachtung: Aufbau eines elektrischen Querschnittes in einem stromdurchflossenen Leiter in einem Magnetfeld.

Ursache: Lorentzkraft. Es gilt:

$$F_{el} = F_{mag}$$

$$q \frac{U_H}{b} = qvB$$

$$= \frac{I}{nbd} B$$

mit $\vec{v} \perp \vec{B}$

$$I = jA = jbd = nqvbd$$

$$U_H = \frac{1}{nq} \frac{I}{d} B = R_H \frac{I}{d} B$$

mit $R_H = (nq)^{-1}$, Hallkonstante, n = Ladungsdichte, q = Ladung.

Anwendungen:

- Messungen von Dichte und Vorzeichen der bewegten Ladungsträger in Materialien (zum Beispiel Leiter / Halbleiter)
- Messung magnetischer Felder

$$B \sim \frac{I}{r}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Vs A}^{-1} \text{ m}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} (\hat{l} \times \hat{r})$$

$$\vec{B}_{21} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_2} (\hat{l}_1 \times \hat{r}_{21})$$

$$\vec{F}_{21} = I_2 (\vec{l} \times \vec{B}_{21})$$

$$\vec{r}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r_{21}} \hat{r}_{21}$$

13.2 Grundgleichungen der Magnetostatik

„Wir wissen“: Magnetfeldlinien immer geschlossen

$$\Rightarrow \oint \vec{B} d\vec{A} = 0$$

(Quellenfreiheit des Magnetfeldes)

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

(2. Maxwellsches Gesetz)

Zirkulation des B-Feldes:

Elektrostatik:

$$\int \vec{E} d\vec{s} = U, \oint \vec{E} d\vec{s} = 0$$

B-Feld: (Kreis senkrecht um B-Feldlinie)

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} d\vec{s} &= B \oint ds \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I \end{aligned}$$

Anderer Weg (größerer Kreis)

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} d\vec{s} &= \int_4^1 \vec{B} d\vec{s} + \int_2^3 \vec{B} d\vec{s} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} f_2 2\pi r_1 + \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} f_2 2\pi r_2 \\ &= \mu_0 I (f_1 + f_2) = \mu_0 I \\ \oint \vec{B} d\vec{s} &= \mu_0 \sum_k I_k \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

\Rightarrow Grundgleichungen der Magnetostatik:

$$\begin{aligned} \oint_A \vec{B} d\vec{A} &= 0 & \oint_C \vec{B} d\vec{s} &= \mu_0 I_{\text{innen}} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} \end{aligned}$$

13.3 Zwei Anwendungsbeispiele

Beispiel 13.5 (Magnetfeld stromdurchflossener Leiter) Querschnitt: $A = \pi R^2$

$$j = \frac{I}{\pi R^2}$$

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = B(r) 2\pi r$$

$$r \geq R : B(r) 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$r < R : B(r) 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2 \Rightarrow B(r) = \frac{1}{2} \mu_0 j r = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$

Beispiel 13.6 (Magnetfeld einer langen Spule) N : Anzahl der Windungen, L : Länge, $n = N/L$ Weg C:

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = B_{12}l' - B_{34}l' \stackrel{!}{=} 0 \implies B_{12} = B_{34}$$

Weg C':

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} d\vec{s} &= Bl' = \mu_0 N I \\ \implies B &= \frac{\mu_0 N' L}{l'} = \mu_0 n I \\ B_{spule} &= \mu_0 n I \end{aligned}$$

13.4 Biot-Savart-Gesetz

Vergleich Elektro- und Magnetostatik

E-Feld einer Linienladung

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

B-Feld eines geraden Leiters

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

Nutze Analogie!

$$\begin{aligned} d\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \end{aligned}$$

Ersetzen $\rho \rightarrow \vec{j}, \epsilon_0 \rightarrow 1/\mu_0, \rho(\vec{r} - \vec{r}') \rightarrow \vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}') \implies$ Biot-Savart-Gesetz

$$\begin{aligned} d\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{r}) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \\ \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}) \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \\ B(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{aligned}$$

Beispiel 13.7 (Leiterschleife) Symmetrie: $B_\perp = 0, B_x = 0, B_y = 0$

$$\begin{aligned}
 dB_z &= dB \sin \alpha \\
 &= dB \frac{R}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\
 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{R}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} ds' \\
 B_z &= \int dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \int ds' \\
 &= \frac{\mu_0 R^2}{2(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}
 \end{aligned}$$

In der Mitte des Rings: $z = 0$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Weit weg: $z \gg R$

$$B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3}$$

Allgemeine Lösung für $r \gg R$

$$B(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(3 \frac{\vec{\mu} \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{1}{r^3} \vec{\mu} \right)$$

Vergleich mit Elektrischem Dipol ($r \gg d$):

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(3 \frac{\vec{p} \vec{r}}{r^5} \vec{r} - \frac{1}{r^3} \vec{p} \right)$$

14 Materie im Magnetfeld

14.1 Magnetisierung und magnetische Erregung

Beobachtung: Beeinflussung des B-Feldes durch Materie. Ein Eisenkern der Länge l hat auf einer Querschnittsfläche A (Normalenvektor \vec{n}) viele Kreiströme (magnetische Dipole) I_i mit Fläche A_i . Auf der Oberfläche des Eisenkerns gibt es also einen Strom I_m : molekularer Strom. Für ein infinitesimales Stück des Eisenkerns dl erhält man:

$$\begin{aligned}
 I_i &= I_m \frac{dl}{l} \\
 B_{mag} &= \mu_0 \frac{I_m}{l}
 \end{aligned}$$

Definition 14.1 (Magnetisierung)

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{\mu}_i$$

mit $\mu := I_i A_i \vec{n}$. (Erinnerung Spule: $B = \mu_0 (NI)/l$)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{M} &= \frac{1}{V} \sum_i A_i I_i \vec{n} = \frac{1}{V} A_i \frac{I_m}{l} \vec{n} \int dl \\
&= \frac{1}{V} \frac{I_m}{l} \sum_i A_i \vec{n} l \\
&= \frac{I_m}{l} \vec{n}
\end{aligned}$$

Magnetfeld rein aufgrund der Magnetisierung:

$$\vec{B}_{mag} = \mu_0 \vec{M}$$

Jetzt: Eisenkern mit Draht

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$$

\vec{B}_0 : Magnetfeld aufgrund äußerer Ströme

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{B} d\vec{s} &= \oint_C \vec{B}_0 d\vec{s} + \mu_0 \oint_C \vec{M} d\vec{s} \\
&= \mu_0 N I + \mu_0 \oint_C \vec{M} d\vec{s} \\
&= \mu_0 I_{frei} + \mu_0 I_m \\
\oint (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) d\vec{s} &= \mu_0 I_{frei}
\end{aligned}$$

Definition 14.2 (Magnetische Erregung)

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} & \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \\
\oint \vec{H} d\vec{s} &= I_{frei} & \text{rot } \vec{H} &= \vec{j}_{frei}
\end{aligned}$$

(2. Maxwellsches Gesetz, Amperesches Durchflutungsgesetz)

Auch: $\text{rot } \vec{M} = \vec{j}_{geb}$, $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{ges}$

14.2 Dia-, Para- und Ferromagnetismus

Experimentelle Beobachtung:

Definition 14.3

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

mit $\mu_0 \vec{B} = \vec{B} = \mu_0 \vec{M}$. Gilt nicht immer!, χ_m : magnetische Suszeptibilität.

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) & &= \mu_0 (\chi_m + 1) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \\
\vec{B} &= \mu \mu_0 \vec{H} \\
\mu &= \mu_r = \chi_m + 1
\end{aligned}$$

Bisher: $\chi_n > 0$. Gilt dies immer? \Rightarrow nein!

- $\chi_m > 0, \mu_r > 1$ Paramagnetismus
- $\chi_m < 0, \mu_r < 1$ Diamagnetismus
- $\chi_m \gg 0, \mu_r \gg 1$ Ferromagnetismus
- Dia: $-1 \times 10^{-6} \leq \chi_m \leq -1 \times 10^{-9}$
- Para: $1 \times 10^{-6} \leq \chi_m \leq 1 \times 10^{-9}$
- Ferro: $1 \times 10^2 \leq \chi_m \leq 1 \times 10^5$

Paramagnetismus: Wolfram, Nickel

$$\begin{aligned}
 E_{pot} &= -\vec{M} \cdot \vec{B} \\
 &= -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \\
 \vec{F} &= \vec{M} \operatorname{grad} B
 \end{aligned}$$

Diamagnetismus: Wismut **Mikroskopische Beschreibung**

$\chi_m < 0 (\mu < 1)$: Diamagnetismus. Induktion eines magnetischen Dipolmoments $r = \text{const.}$ Zwei Atome:

$$\vec{\mu}' = \vec{\mu}'_1 + \vec{\mu}'_2 \neq 0$$

Ursache: Lorentzkraft:

$$\begin{aligned}
 v'_1 &> v_1 & v'_2 &< v_2 \\
 F'_2 p &> F_2 p & F'_2 p &< F_2 p \\
 \mu'_1 &> \mu_1 & \mu'_1 &< \mu_2 \\
 \vec{B} &= \mu_0 \mu \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \\
 &= (1 + \chi_m) \vec{B}_0 \rightarrow \chi_m < 0
 \end{aligned}$$

\Rightarrow Alle Stoffe sind diamagnetisch. Aber Möglichkeit der Überlagerung mit Para- beziehungsweise Ferromagnetismus.

$\chi_m > 0$: Paramagnetismus

Ausrichtung permanenter magnetischer Dipole mit äußerem B-Feld. Vergleich:

- Elektrische Ausrichtung führt zur Abschwächung
- Magnetostatische Ausrichtung führt zur Verstärkung

Thermische Bewegung wirkt der Ausrichtung entgegen \Rightarrow Temperaturabhängigkeit der Magnetisierung: (Curie-Gesetz)

$$\vec{M} = \frac{1}{3} \frac{\mu B_{ext}}{k_B T} \vec{M}_s$$

\vec{M}_s : Sättigungsmagnetismus

$\chi_m \gg 0$ Ferromagnetismus

Paramagnetische Materie mit zusätzlicher Wechselwirkung der magnetischen Dipole miteinander.

Weißsche Bezirke

Ohne Magnetfeld: Statistische Ausrichtung $\vec{M} = 0$

Mit Magnetfeld: Ausrichtung der Bezirke entlang \vec{B}

$$\chi_m \gg 0, M \gg 1 \Rightarrow \vec{M} = \mu \vec{M} \gg \vec{H}$$

Ferromagnet:

Beobachtung: Magnetisierung durch B-Feld ist abhängig von „Vorgeschichte“

- „Hinweg“: Koerzitiv Kraft
- „Rückweg“: Remanenz Kraft

Magnetisch hartes Eisen:

- große Remanenz
- große Koerzitiv

Magnetisch weiches Eisen:

- kleine Remanenz
- kleine Koerzitiv

Ferromagnetismus ist Temperaturabhängig

- geht oberhalb T_C verloren
- T_C - kritische Temperatur

Oberhalb von $T_C \Rightarrow$ Curie-Weiß Gesetz

$$\chi(T) = \frac{C}{T - T_C}$$

14.3 Feldgleichungen in Materie

Vakuum: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Materie: $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$, allgemein: $\mu = \mu(H)$.

Außerdem:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ auch in Materie} \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{frei}}$$

Verhalten an Grenzflächen

$$\begin{aligned} H_{\parallel}^{(1)} &= H_{\parallel}^{(2)} \Rightarrow \frac{B_{\parallel}^{(1)}}{\mu_1} = \frac{B_{\parallel}^{(2)}}{\mu_2} \\ B_{\perp}^{(1)} &= B_{\perp}^{(2)} \Rightarrow \mu_1 H_{\perp}^{(1)} = \mu_2 H_{\perp}^{(2)} \end{aligned}$$

\Rightarrow Maxwell-Gleichungen der Elektro- und Magnetostatik

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j}_{\text{frei}} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

Anwendung: Toroidmagnet mit Luftspalt

Radius des Torus: R , Eisenkern $\Rightarrow \mu \gg 1$, N Windungen um Kern mit Strom I , Breite des Luftspaltes: d .

\Rightarrow Feld im Luftspalt: Ampersches Gesetz:

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = NI = \int_{\text{Eisen}} \vec{H}_{\text{Fe}} d\vec{s} + \int_{\text{Luft}} \vec{H}_{\text{Luft}} d\vec{s}$$

$$\begin{aligned}
\vec{B}_{Fe} = \vec{B}_{Luft} &\implies \mu \vec{H}_{Fe} = \vec{H}_{Luft} \\
\implies NI &= \oint \vec{H} d\vec{s} = H_{Fe}(2\pi R - d) + H_{Luft}d \\
&= \frac{H_{Luft}}{\mu}(2\pi R - d) + dH_{Luft} \\
H_{Luft} &= \frac{NI\mu}{(\mu - 1)d + 2\pi R} \approx \frac{\mu NI}{\mu d + 2\pi R} \\
\implies B &= \mu_0 H_{Luft} = \frac{\mu_0 \mu NI}{\mu d + 2\pi R}
\end{aligned}$$

15 Induktion und elektromagnetische Wechselfelder

Bisher: stationäre, das heißt zeitunabhängige Felder

Jetzt:

- zeitabhängige B-Felder \rightarrow magnetische Induktion
- zeitabhängige E-Felder \rightarrow Verschiebungsstrom

15.1 Magnetische Induktion

Beobachtungen

- Bewegte Leiterschleife im Magnetfeld resultiert in Induktion und Spannungsstößen
- Vorzeichen abhängig von Bewegungsrichtung und Richtung des Magnetfelds
- Mehrere Windungen (beziehungsweise größere Fläche) \rightarrow höhere Spannungen
- Drehung Leiterschleife \rightarrow Wechselspannung

$$\int U(t) dt = \Delta\phi_m \quad \text{mit} \quad \phi_m = \int \vec{B} d\vec{A}$$

$$U_{ind} = -\dot{\phi}_m \quad \text{beziehungsweise} \quad U_{ind} = -N\dot{\phi}_m$$

Ursache? \implies Lorentzkraft

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$dU_{ind} = E_{ind} dl = \frac{F}{q} dl = vB dl$$

$$U_{ind} = \int_1^2 E_{ind} dl = vBl$$

$$U_{ind} = \oint E dl = \int_1^2 E dl + \int_2^1 E dl = vBl$$

Beliebige Schleife

$$\begin{aligned}
 U_{ind} &= \oint (\vec{v} \times \vec{B}) d\vec{l} \\
 &= \oint \vec{E}_{ind} d\vec{l} \\
 &= \oint (d\vec{l} \times \vec{v}) \vec{B} \\
 &= - \oint (\vec{v} \times d\vec{l}) \vec{B} \\
 &= - \oint \left(\frac{d\vec{s}}{dt} \times d\vec{l} \right) \vec{B} = - \oint \frac{d\vec{A}}{dt} \vec{B} \\
 &= - \frac{d}{dt} \int \vec{B} d\vec{A} = -\dot{\phi}_m \quad (\text{Für } \vec{B} = \text{const.}) \\
 \phi_m &= \int \vec{B} d\vec{A} = B l s \\
 \dot{\phi}_m &= B l \dot{s} = B l v
 \end{aligned}$$

Neu: Induktion durch $\dot{\vec{B}}$. Rein experimentelle Beobachtung

Satz 15.1 (Faradaysches Induktionsgesetz)

$$U_{ind} = \oint E_{ind} d\vec{s} = -\dot{\phi}_m$$

mit $\phi_m = \int \vec{B} d\vec{A}$

Neue grundlegende Eigenschaft: Wichtig: $\text{rot } \vec{E} \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \oint_C \vec{E} d\vec{s} &= -\dot{\phi}_m = -\frac{d}{dt} \int_O \vec{B} d\vec{A} \\
 \Rightarrow \int_O \text{rot } \vec{E} d\vec{A} &= -\frac{d}{dt} \int_O \vec{B} d\vec{A} = - \int_O \dot{\vec{B}} d\vec{A} \quad (\text{Falls } O \text{ beziehungsweise } C \text{ konstant})
 \end{aligned}$$

Satz 15.2 (3. Maxwell-Gleichung)

$$\begin{aligned}
 \oint_C \vec{E} d\vec{s} &= -\frac{d}{dt} \int_O \vec{B} d\vec{A} \quad (\text{E-Feld nicht mehr Wirbelfrei}) \\
 \text{rot } \vec{E} &= -\dot{\vec{B}} \quad (\text{Induktion nur in Verbindung mit der Lorentzkraft})
 \end{aligned}$$

Satz 15.3 (Lenzsche-Regel) Die durch Induktion entstehende Spannungen, Ströme, Felder und Kräfte wirken der die Induktion hervorruhenden Ursache stets entgegen.

15.2 Generatoren

$$\begin{aligned}
 \phi_m &= \int \vec{B} d\vec{A} = B A \cos \omega t \\
 \dot{\phi}_m &= -U_{ind} = \omega B A \sin \omega t
 \end{aligned}$$

15.3 Induktivität und Selbstinduktion

Betrachte stromdurchflossene Leiterschleife $B \sim I, \phi_m \sim I$

Definition 15.4 (Induktivität)

$$\phi_m = LI$$

L : Eigenschaft des felderzeugenden Leiters.

Induktivität einer Spule: N Windungen, l Länge, $n = N/l$, Querschnittsfläche A

$$\begin{aligned} B &= \mu\mu_0 n I \\ \phi_m &= NBA = nlBA \\ \phi_m &= \underbrace{\mu\mu_0 n^2 A l}_L I \\ \implies U_{ind} &= -\dot{\phi}_m = -L\dot{I} \end{aligned}$$

Weitere Beispiele:

- Drahtschleife: $L = \mu_0 R \ln R/r$
- Doppelleitung: $L = \mu_0 l / \pi \ln a/r$
- Koaxialkabel: $L = \mu_0 l / (2\pi) \ln r_a/r_i$

Außerdem: Zeitlich veränderlicher Stromfluß durch eine Leiteranordnung führt zu einer zeitlichen Veränderung des erzeugten B-Feldes \rightarrow Flußänderung \rightarrow Spannungsinduktion.

$$U_{ind} = -\dot{\phi}_m = -L\dot{I}$$

15.4 Verschiebungsstrom

Für zeitlich veränderliche B-Felder:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= 0 \rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \\ \oint \vec{E} d\vec{s} &= 0 \rightarrow \oint \vec{E} d\vec{s} = - \int \dot{\vec{B}} d\vec{A} \end{aligned}$$

Jetzt: Betrachte Ampersches Durchflutungsgesetz

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \iff \oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I$$

Betrachte Leiter durch Kondensator. Dann gilt:

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = B 2\pi r = \mu_0 I \rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Aber: Verschiebung des Integrationsweges zwischen die beiden Kondensatorplatten liefert:

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = 0$$

Dies erscheint unmöglich! B-Feld kann im Kondensator nicht abrupt verschwinden. Außerdem:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \int_A \vec{j} d\vec{A}$$

(gilt für alle Flächen mit Randkurve C). Fläche A_1 : Kreisfläche um Leiter, Fläche A_2 : Fläche mit Kondensator
 \implies

- Fläche A_1 : $B = \mu_0 I / (2\pi r)$
- Fläche A_2 : $B = 0$

\Rightarrow offensichtlicher Widerspruch. \Rightarrow Etwas fehlt! Berücksichtigung des durch Kondensatoraufladung erzeugten zeitlich sich ändernden elektrischen Feldes. Kontinuitätsgleichung:

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\dot{\rho} \iff \oint \vec{j} d\vec{A} = -\frac{dq}{dt}$$

Es gilt:

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = q/\epsilon_0 \rightarrow \frac{dq}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint \vec{E} d\vec{A} = \epsilon_0 \oint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{A} = \epsilon_0 \oint \dot{\vec{E}} d\vec{A}$$

Konsistente Beschreibung falls:

- Fläche A_1 : $\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \int_{A_1} \vec{j} d\vec{A}$
- Fläche A_2 : $\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \int_{A_2} \dot{\vec{E}} d\vec{A} = \mu_0 \int_{A_2} \vec{j}_v d\vec{A}$ mit

$$\vec{j}_v = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

„Verschiebungsstrom“

\rightarrow Erweiterung des Ampereschen Durchflutungsgesetzes:

Satz 15.5 (Ampere-Maxwell-Gesetz (4. Maxwell-Gleichung für Vakuum))

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \int \vec{j} d\vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{A}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Bemerkung 15.6 Für $j = 0$ gilt: $\operatorname{rot} \vec{B} = 1/c^2 \dot{\vec{E}}$, das heißt elektrische Wechselfelder erzeugen ein magnetisches Wirbelfeld, umgekehrt erzeugen wegen $\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ magnetische Wechselfelder ein elektrisches Wirbelfeld. \rightarrow elektromagnetische Wellen (siehe unten)

Jetzt: Verschiebungsstrom in Materie

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I_{ges} = \mu_0 I_L + \mu_0 I_M + \mu_0 I_v + \mu_0 I_P$$

- I_L : Leitungsstrom (frei Ströme)
- I_M : Molekularstrom
- I_v : Verschiebungsstrom
- I_P : Polarisationsstrom (nur für nicht-stationäre E-Felder)

Molekularstrom:

$$\oint \vec{M} d\vec{s} = I_M$$

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \oint \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) d\vec{s} = I_L + I_v + I_P = I_L + \epsilon_0 \int_A \dot{\vec{E}} d\vec{A} + I_P$$

$$= I_L + \epsilon_0 \int_A \dot{\vec{E}} d\vec{A} + \int \vec{j}_P d\vec{A}$$

Polarisationsstrom: Ergibt sich aufgrund des Flusses gebundener Ladungen in Richtung des elektrischen Feldes
 → zeitlich veränderlicher Strom für zeitlich veränderliche E-Felder

$$\vec{j}_P = nq\vec{v} = nq\frac{d\vec{s}}{dt}, d\vec{p} = qd\vec{s}, d\vec{P} = nd\vec{p}$$

$$\vec{j}_P = n\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} \iff \vec{j}_P \iff \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \dot{\vec{P}}$$

Damit

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = I_L + \epsilon_0 \int \dot{\vec{E}} d\vec{A} = I_L + \int \dot{\vec{D}} d\vec{A}$$

$$\vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Satz 15.7 (Ampere-Maxwell-Gesetz in Matrice (4. Maxwellsche Gleichung))

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \int \vec{j} d\vec{A} + \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{A}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$$

16 Schaltvorgänge, Wechselstrom und Schwingkreise

16.1 Induktivität im Stromkreis (LR-Glied)

Einschalten:

$$U_{ind} = -L\dot{I}$$

Außerdem gilt: (Kirchhoffsche Maschenregel)

$$U_0 + U_{ind} = IR$$

$$U_0 - L\dot{I} = IR$$

Man erhält eine inhomogene, lineare Differentialgleichung erster Ordnung, Lösung: allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung + spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung + Anfangsbedingungen

$$\implies \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{U_0}{L}$$

$$\implies I(t) = \frac{U_0}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

Mit der Anfangsbedingung $I(0) = 0$ folgt:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

$$= \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$\tau = L/R$$

Ausschalten:

$$U_{ind} = -L\dot{I}, U_{ind} = IR$$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0$$

Anfangsbedingung: $I(0) = U_0/R$. Damit folgt:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}$$

Spannungsabfall am Widerstand:

$$U(t) = I(t)R = U_0 e^{-t/\tau}$$

Aber: Was passiert beim Öffnen des Schalters tatsächlich? $R_{\text{offen}} = \tilde{R} \approx \infty$.

$$U(t) = I(t)\tilde{R} = U_0 \frac{\tilde{R}}{R} e^{-t/\tau}$$

\Rightarrow Riesiger Spannungsstoß für $\tilde{R} \rightarrow \infty \Rightarrow$ Lichtbogen.

16.2 Kapazität im Stromkreis (RC-Glied)

Einschalten:

$$U_C = Q/C, Q = Q(t)$$

Außerdem gilt: $U_0 = IR + Q/C$. Differenzieren:

$$\dot{I}R + \frac{\dot{Q}}{C} = IR + \frac{I}{C} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC}I = 0$$

Anfangsbedingung: $I(0) = U_0/R$. Damit folgt:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/(RC)} = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}$$

$\tau = RC$. Spannung:

$$U_C(t) = U_0 - I(t)R = U_0(1 - e^{-t/\tau})$$

Ausschalten, das heißt Entladung:

$$IR + Q/C = 0 \rightarrow \dot{I}R = -\frac{1}{C}I$$

$$\dot{I} = -\frac{1}{\tau}I$$

Mit $I(0) = -U_0/R$ als Anfangsbedingung folgt:

$$I(t) = -\frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}$$

$$U_C(t) = U_0 e^{-t/\tau}$$

16.3 R, L, C im Wechselstromkreis

Beobachtung: Lämpchen brennen für verschiedene Frequenzen $f = \omega/(2\pi)$ unterschiedlich hell.

1. Widerstand: Lämpchen leuchtet unabhängig von der eingestellten Frequenz immer gleich hell
2. Kapazität:
 - Niedrige Frequenz \rightarrow Lämpchen aus

- Hohe Frequenz \rightarrow Lämpchen leuchtet

3. Induktivität:

- Niedrige Frequenz \rightarrow Lämpchen leuchtet
- Hohe Frequenz \rightarrow Lämpchen aus

\rightarrow Kondensator und Spule verhalten sich wie frequenzabhängige Widerstände. Quantitative Betrachtung:

1. Ohmscher Widerstand:

$$\begin{aligned} U_0(t) &= U_0 \cos \omega t \\ \Rightarrow I(t) &= \frac{1}{R} U(t) \\ &= \frac{U_0}{R} \cos \omega t \\ &= I_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

Leistung:

$$P(t) = U(t)I(t) = I_0 U_0 \cos^2 \omega t$$

\Rightarrow mittlere Leistung

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \\ \vec{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T I_0 U_0 \cos^2 \omega t dt = \frac{I_0 U_0}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2} U_0 I_0 \end{aligned}$$

Definition 16.1 (Wirkleistung)

$$\vec{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0 = U_{eff} I_{eff}$$

mit $U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0$, $I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$

2. Induktiver Widerstand:

$$\begin{aligned} U_s(t) &= U_0 \cos \omega t \\ U_s(t) + U_{ind} &= 0, U_{ind} = -L\dot{I} \\ \Rightarrow U_s(t) &= L\dot{I} \end{aligned}$$

Interpretation:

$$\begin{aligned} \int U_0 \cos \omega t dt &= U_0 \frac{1}{\omega} \sin \omega t = LI \\ \Rightarrow I(t) &= \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t = \frac{U_0}{\omega L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 \cos \omega t \\ I(t) &= I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ I_0 &= \frac{U_0}{\omega L} \end{aligned}$$

\Rightarrow Strom läuft der Spannung um 90° hinterher, da der Strom nach Anlegen der Spannung U_1 erst allmählich zu fließen beginnt.

3. Kapazitiver Widerstand

$$\begin{aligned}
 U_s(t) &= U_c, U_c = \frac{Q}{C}, I = \dot{Q} \\
 Q &= CU_s = CU_0 \cos \omega t \\
 \dot{Q} &= I = -\omega CU_0 \sin(\omega t) \\
 &= \omega CU_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\
 U(t) &= U_0 \cos \omega t \\
 I(t) &= I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\
 I_0 &= \omega CU_0
 \end{aligned}$$

\Rightarrow Strom läuft der Spannung um 90° voraus, da zuerst Ladung auf den Kondensator fließen muss, bevor Spannung an Kondensator abfällt.

Merke:

- Ohmscher Widerstand: $Z_R = R, \varphi = 0^\circ$
- Induktiver Widerstand: $Z_L = \omega L, \varphi = -90^\circ$
- Kapazitiver Widerstand: $Z_C = 1/\omega C, \varphi = 90^\circ$
- Blindleistung Kapazität:

$$\vec{P} = \frac{1}{T} \int_0^T U_c(t) I_c(t) dt = -\frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 \cos \omega t \sin \omega t dt = 0$$

Induktivität:

$$\vec{P} = \frac{1}{T} \int_0^T U_L(t) I_L(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 \underbrace{\cos \omega t \sin \omega t}_{\frac{1}{2} \sin 2\omega t} dt = 0$$

Die sogenannte Blindleistung verschwindet im Mittel, da die Energie zum Aufbau der (elektrischen und magnetischen) Felder wieder in den Generator zurückfließt \rightarrow Blindstrom. Aber: Auch der Blindstrom macht Drähte warm und die Blindleistung muss temporär zur Verfügung gestellt werden. (Wichtig bei Auslegung von Netzwerken)

16.4 Komplexe Darstellung

Strom und Spannung im Wechselstromkreis:

$$\begin{aligned}
 U(t) &= U_0 \cos \omega t \\
 I(t) &= I_0 \cos(\omega t + \varphi)
 \end{aligned}$$

Übertragung ins Komplexe:

$$\begin{aligned}
 U(t) &= U_0 e^{i\omega t} \\
 I(t) &= I_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = I_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} \\
 &= I_0 \cos(\omega t + \varphi) + i I_0 \sin(\omega t + \varphi)
 \end{aligned}$$

Die Verwendung komplexer Zahlen bedeutet rechnerisch eine wesentliche Vereinfachung! Ansonsten äquivalent! Warum funktioniert das?

Grund \rightarrow Linearität der auftretenden Differentialgleichungen.

- Homogene Differentialgleichung:

$$\begin{cases} \dot{z} = 0 \\ \ddot{z} + \gamma\dot{z} + z = 0 \end{cases}$$

Erste Ordnung: $z(t) = a(t) + ib(t)$ sei Lösung $\rightarrow z^*(t) = a(t) - ib(t)$ ebenfalls Lösung, das heißt: $\Re(z) = 1/2(z + z^*)$ ist auch eine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Zweite Ordnung: \rightarrow es gibt zwei linear unabhängige Lösungen $z(t), z^*(t)$. Also $\Re(z) = 1/2(z + z^*) = a(t)$ und $i\Im(z) = 1/2(z - z^*) = ib(t)$ sind auch unabhängige Lösungen.

- Inhomogene Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} \dot{z} = \xi \\ \ddot{z} + \gamma\dot{z} + z = \xi \end{cases}$$

\rightarrow zusätzliche partikuläre Lösung.

Erste Ordnung: $\dot{z} = \alpha + i\beta \rightarrow$ spezielle Lösung: $z(t) = a(t) + ib(t)$, dann $a(t), b(t)$ partikuläre Lösungen des reellen / imaginären Teils.

Zweite Ordnung: analog.

Bei Verwendung komplexer Darstellung: Ohmscher Widerstand

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} = \hat{U} e^{i\omega t}$$

$$I(t) = \frac{U_0}{R} e^{i\omega t} = \hat{I} e^{i\omega t}$$

Induktiver Widerstand:

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} = \hat{U} e^{i\omega t}$$

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{U_0}{\omega L} e^{i(\omega t - \pi/2)} = \frac{U_0}{\omega L} e^{-i\pi/2} e^{i\omega t} \\ &= \frac{U_0}{i\omega L} e^{i\omega t} = \hat{I} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Kapazitiver Widerstand:

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} = \hat{U} e^{i\omega t}$$

$$\begin{aligned} I(t) &= \omega C U_0 e^{i(\omega t + \pi/2)} = \omega C U_0 e^{+i\pi/2} e^{i\omega t} \\ &= i\omega C U_0 e^{i\omega t} = \hat{I} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Offenbar gilt: $\hat{I} = \hat{U} / \hat{Z}$, wobei die Phase gegenüber der Spannung im komplexen Widerstand \hat{Z} steckt. \Rightarrow Wechselstromwiderstände:

$$\hat{Z}_R = R$$

$$\hat{Z}_L = i\omega L = \omega L e^{i\pi/2}$$

$$\hat{Z}_C = \frac{1}{i\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\pi/2}$$

\Rightarrow Ohmsches Gesetz:

$$\hat{U} = \hat{Z} \cdot \hat{I}$$

Beispiel 16.2 (RC-Serienschaltung) Kirchhoff: $I_R = I_C = I, U_G = U_R + U_C$. Also:

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 e^{i\omega t} \\ \Rightarrow U_R &= I_0 R e^{i\omega t} \\ U_C &= I_0 \frac{1}{i\omega C} e^{i\omega t} \\ U_G = U_R + U_C &= I_0 \left(\underbrace{R + \frac{1}{i\omega C}}_{\text{Impedanz } \hat{z}} \right) e^{i\omega t} = I_0 \underbrace{|\hat{z}| e^{i\varphi}}_{\hat{z}} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

mit

$$\hat{z} = |\hat{z}| e^{i\varphi}, |\hat{z}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2}, \varphi = \arctan\left(\frac{1}{\omega RC} \right)$$

\Rightarrow Lösung:

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 e^{i\omega t} \\ U(t) &= \hat{z} I_0 e^{i\omega t} = I_0 |\hat{z}| [\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)] \end{aligned}$$

Beispiel 16.3 (RC-Parallelschaltung) Kirchhoff: $U = U_R = U_C, I_G = I_R + I_C$. Also

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 e^{i\omega t} \\ \Rightarrow I_R &= \frac{U_0}{\hat{z}_R} e^{i\omega t}, I_C = \frac{U_0}{\hat{z}_C} e^{i\omega t} \\ I_R &= \frac{U_0}{R} e^{i\omega t}, I_C = i\omega C U_0 e^{i\omega t} \\ I = I_R + I_C &= U_0 \left(\frac{1}{\hat{z}_R} + \frac{1}{\hat{z}_C} \right) e^{i\omega t} \\ &= U_0 \underbrace{\left(\frac{1}{R} + i\omega C \right)}_{=\frac{1}{\hat{z}}} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Die beiden Beispiele zeigen, dass für Impedanzen im Wechselstromkreis offenbar die gleichen Regeln wie für Widerstände im Gleichstromkreis gelten. Damit: Erweiterte Kirchhoffsche Regeln:

$$\sum \hat{I} = 0 \quad (\text{Knotenregel})$$

$$\sum \hat{U} = 0 \quad (\text{Maschenregel})$$

$$\hat{Z} = \sum \hat{z}_i \quad (\text{Reihenschaltung})$$

$$\hat{Z}^{-1} = \sum \hat{z}_i^{-1} \quad (\text{Parallelschaltung})$$

16.5 RLC-Schwingkreis

Ohne Stromquelle:

$$\begin{aligned} U_{ind} &= IR + Q/C \\ -L\dot{I} &= IR + Q/C \\ L\dot{I} + IR + Q/C &= 0 \end{aligned}$$

Ableiten:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0$$

Gedämpfter harmonischer Oszillator:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx &= 0 \\ \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \\ \omega_0^2 &= k/m \\ \gamma &= \beta/(2m) \\ \gamma &= R/(2L) \\ \omega_0^2 &= \frac{1}{LC} \end{aligned}$$

Ansatz: $ce^{\lambda t}$

$$\begin{aligned} I(t) &= C_1 e^{-\gamma t} e^{i\omega_R t} + C_2 e^{-\gamma t} e^{-i\omega_R t} \\ \omega_R &= \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \end{aligned}$$

3 Fälle:

- $\gamma < \omega_0$: Schwingfall
- $\gamma > \omega_0$: Kriechfall
- $\gamma = \omega_0$: Aperiodischer Grenzfall

Mechanik: $\gamma = \beta/(2m), \omega_0^2 = k/m$

Schwingkreis: $\gamma = R/(2L), \omega_0^2 = 1/(LC)$ Mit Stromquelle:

$$\begin{aligned} U_G + U_{ind} &= IR + Q/C \\ L\dot{I} + IR + Q/C e^{i\omega t} &= U_0 e^{i\omega t} \\ L\ddot{Q} + \dot{Q}R + Q/C &= U_0 e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Ableiten:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \omega U_0 e^{i(\omega t + \pi/2)}$$

Ansatz:

$$I(t) = \rho e^{i\varphi} e^{i\Omega t}$$

Einsetzen \rightarrow

$$\begin{aligned} \Omega &= \omega \\ \rho &= \frac{\omega U_0}{L} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 2\gamma^2 \omega^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right) \end{aligned}$$

Einfacher:

$$\begin{aligned}
 I(t) &= U_0 \frac{1}{\hat{z}} e^{i\omega t}, \hat{z} = \hat{z}_R + \hat{z}_L + \hat{z}_C \\
 I(t) &= \frac{U_0}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} e^{i\omega t} = \frac{U_0}{R + i(\omega L - \frac{1}{\omega C})} e^{i\omega t} \\
 &= (a + ib) e^{i\omega t} = \left(\frac{U_0 R}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} - i \frac{U_0 (\omega L - \frac{1}{\omega C})}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \right) e^{i\omega t} \\
 &= C e^{i\varphi} e^{i\omega t} \\
 C &= \sqrt{a^2 + b^2} \\
 \tan \varphi &= \frac{b}{a} \\
 C = \rho &= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \\
 \varphi &= \arctan\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega^2 \gamma}\right) \\
 \varphi &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega^2 \gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)
 \end{aligned}$$

16.6 Transformator

Große Bedeutung in der Wechselstromtechnik. Insbesondere Transformation von Spannungen für Hochspannungsübertragung.
Annahme: Magnetische Feldlinien verlaufen vollständig innerhalb des Eisenjochs, das heißt alle Streufelder werden vernachlässigt. Unbelasteter Transformator:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= U_0 \cos \omega t & (\text{Primärseite}) \\
 U_1 + U_{ind,1} &= 0 \\
 U_1 &= -U_{ind,1} = N_1 \dot{\phi}_m
 \end{aligned}$$

Magnetischer Fluss ist auf Primär und Sekundärseite gleich:

$$U_2 = -U_{ind,2} = N_2 \dot{\phi}_m = \frac{N_2}{N_1} U_1 \quad (\text{Sekundärseite})$$

Außerdem gilt bei Vernachlässigung von Leistungsverlusten

$$\begin{aligned}
 P &= U_1 I_1 = U_2 I_2 \\
 \implies I_2 &= \frac{N_1}{N_2} I_1
 \end{aligned}$$

Magnetfeldführung: Braucht großes μ :

$$\begin{aligned}
 B_{\perp, Fe} &= B_{\perp, Lu} \\
 B_{\parallel, Fe} &= \mu B_{\parallel, Lu}
 \end{aligned}$$

Das heißt: B-Feld im Eisen im wesentlichen tangential zur Oberfläche.

Satz 16.4 (Unbelasteter Transformator) Transformatorgleichung für verlustfreien, unbelasteten Transformator

$$U_2 = \frac{N_2}{N_1} U_1 \quad I_2 = \frac{N_1}{N_2} I_1$$

Mögliche Verluste:

- Wirbelströme
- Streufelder

Komplizierter: belasteter Transformator (siehe Literatur, Übungen, Praktikum)

16.7 Elektrische und magnetische Feldenergie

Elektrische und magnetische Feldenergie: Elektrische Leistung im RC-Glied:

$$\begin{aligned} P(t) &= I(t)U(t) = C\dot{U}U \\ &= CU \frac{dU}{dt} \\ \Rightarrow W_{el} &= \int_0^t P(t)dt = \int_0^t CU dU = \frac{1}{2}CU(t)^2 \end{aligned}$$

Elektrische Leistung im LR-Glied:

$$P(t) = I(t)U(t) = L\dot{I}I = LI \frac{dI}{dt} \Rightarrow W_m = \int_0^t P(t)dt = \int_0^t LI dI = \frac{1}{2}LI(t)^2$$

Also:

- $W_{el} = \frac{1}{2}CU^2$ - gespeicherte Energie im Kondensator, elektrische Feldenergie
- $W_m = \frac{1}{2}LI^2$ - gespeicherte Energie in Induktivität, magnetische Feldenergie

Energiedichte des elektrischen Feldes

$$\begin{aligned} W_{el} &= \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\epsilon\epsilon_0 \frac{A}{d}U^2 \\ &= \frac{1}{2}\epsilon\epsilon_0 \frac{A}{d}E^2 d^2 = \frac{1}{2}\epsilon\epsilon_0 V E^2 \\ \Rightarrow \omega_{el} &= \frac{1}{2}\epsilon\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}ED \end{aligned}$$

Energiedichte des magnetischen Feldes:

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\mu\mu_0 \frac{N^2}{l} AI^2 = \frac{1}{2}\mu\mu_0 \frac{A}{l} M^2 l^2 \\ &= \frac{1}{2}\mu\mu_0 V H^2 \\ \omega_m &= \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2 = \frac{1}{2}BH \end{aligned}$$

Allgemein gilt:

$$\omega_{elektrom.} = \frac{1}{2}(\vec{E} \vec{D} + \vec{B} \vec{H})$$

17 Elektromagnetische Welle

17.1 Mechanische Wellen

Eine Welle ist ein Vorgang bei dem sich eine Schwingung vom Ort ihrer Erregung in Folge von Kopplungen an benachbarte schwingungsfähige Systeme im Raum ausbreitet. Man unterscheidet

- Transversale Wellen → Ausbreitung senkrecht zur Schwingungsrichtung
- Longitudinale Wellen → Ausbreitung entlang der Schwingungsrichtung

Eindimensionale harmonische Welle → harmonische Anregung Bei $t = 0$:

$$y(x) = A \sin(kx), k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Zusätzliche Zeitabhängigkeit:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= A \sin(k(x - v_{ph}t)) \\ &= A \sin(kx - kv_{ph}t) \\ &= A \sin(kx - \omega t) \\ v_{ph} &= \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} \end{aligned}$$

Harmonische ebene Welle:

$$y(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t) \quad (1 \text{ dim})$$

$$y(\vec{x}, t) = A \sin(\vec{k} \vec{x} \pm \omega t) \quad (3 \text{ dim})$$

- Wellenzahl: $k = 2\pi/\lambda$, $\vec{\lambda} \parallel$ Ausbreitungsrichtung
- Wellenlänge: $\lambda = 2\pi/k$
- Phasengeschwindigkeit: $v_{ph} = \omega/k$
- Amplitude: A

Wesentliche Eigenschaften:

Superposition und Interferenz:

Superposition \longleftrightarrow Überlagerung von Wellen

$$y(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^n y_i(\vec{k}, t)$$

Überlagerung von Wellen (1 dimensional)

$$\begin{aligned} \xi_1(x, t) &= A \cos(k_1x - \omega_1t) \\ \xi_2(x, t) &= A \cos(k_2x - \omega_2t) \\ \xi &= \xi_1 + \xi_2 = A(\cos(k_1x - \omega_1t) + \cos(k_2x - \omega_2t)) \\ &= 2A \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \end{aligned}$$

Jetzt: $k_1 \approx k_2, \omega_1 \approx \omega_2 \implies$ Schwebung mit mittlerer Frequenz als Schwebungsfrequenz.

Satz 17.1 (Fouriertheorem) Jede periodische und aperiodische Funktion kann durch harmonische ebene Wellen dargestellt werden. Fourier-Reihe:

$$f(t) = f(t + T) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

mit

$$a_i = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(i\omega t) dt$$

$$b_i = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(i\omega t) dt$$

aperiodische F : Fourier-Integral:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} a(\omega) \cos(\omega t) + b(\omega) \sin(\omega t) d\omega$$

$$a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

$$b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

Daher genügt es oft harmonische ebene Wellen zu betrachten.

17.2 Wellengleichung

Welle \rightarrow Ausbreitung einer Schwingung im Raum. Gesucht: Differentialgleichung die die Ausbreitung von Störungen beschreibt. Sich ausbreitende Störung $\hat{=}$ Wellenpaket.

$$\psi_+(x, t) = f(x - vt)$$

$$\psi_-(x, t) = f(x + vt)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = f', \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \pm v f'$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = f''$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t^2} = v^2 f''$$

Klassische Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (1 \text{ dim})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = v^2 \Delta \psi \quad (3 \text{ dim})$$

v^2 : Phasengeschwindigkeit. Eigenschaften:

- lineare Differentialgleichung \rightarrow Superposition und Interferenz
- Ebene Wellen sind Lösung der Wellengleichung
- Auftreten solcher Gleichungen weist auf Wellencharakter der Lösung hin

17.3 Wellenpakete, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Wellenpaket

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \{a(k) \cos kx + b(k) \sin kx\} dk \\ \psi(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \{a(k) \cos(k(x - v_{ph}t)) + b(k) \sin(k(x - v_{ph}t))\} dk\end{aligned}$$

Jetzt: Übergang ins komplexe:

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin \varphi &= \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{i2} \\ e^{i\varphi} &= \cos \varphi + i \sin \varphi \\ \Rightarrow \psi(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2}a(k) + \frac{1}{2i}b(k) \right\} e^{ik(x-v_{ph}t)} dk + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2}a(k) - \frac{1}{2i}b(k) \right\} e^{-ik(x-v_{ph}t)} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty A(k) e^{ik(x-v_{ph}t)} dk + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\pi A^*(k) e^{-ik(x-v_{ph}t)} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty A(k) e^{i(kx-\omega t)} dk + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 A(k) e^{i(kx-\omega t)} dk \quad (\omega = |k|v_{ph} > 0)\end{aligned}$$

Damit ergibt sich dann allgemein:

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty A(k) e^{ikx-\omega t} dk \\ A(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \psi(x, 0) e^{i(kx)} dx\end{aligned}$$

Phasengeschwindigkeit: $v_{ph} = \omega/k \leftrightarrow$ Ausbreitungsgeschwindigkeit gleicher Phasen. Phasengeschwindigkeit kann aber für unterschiedliche k , das heißt unterschiedliche Wellenlängen $\lambda = 2\pi/k$ unterschiedlich sein \rightarrow Dispersion. Dispersionsrelation:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0) + \dots$$

(Taylorentwicklung). Dispersion führt im Allgemeinen dazu, dass Wellenpakete mit der Zeit auseinander fließen. Bei schwacher Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge bewegt sich das Wellenpaket ein beträchtliches Stück, bevor es nicht wieder zuerkennen ist. Für Wellenpakete für die $A(k)$ nur in einem schmalen Bereich um k_0 von Null verschieden ist - was für die meisten relevanten Wellenpakete der Fall ist - kann man eine Wellenpaketgeschwindigkeit herleiten:

$$v_{gr} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}$$

\Rightarrow Gruppengeschwindigkeit, Geschwindigkeit des Schwerpunktes eines Wellenpakets:

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$$

Einfaches Beispiel: Schwebung:

$$\begin{aligned}\xi(x, t) &= 2A \cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \\ &= 2A \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t) \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \\ \Rightarrow v_{ph} &= \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}, v_{gr} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}\end{aligned}$$

17.4 Elektromagnetische Wellengleichung

Maxwell-Gleichung im Vakuum ($\Rightarrow \rho = 0, \vec{j} = 0$):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & \operatorname{rot} \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Ableiten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) &= -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} \\ \Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\vec{E}) &= -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) &= \underbrace{\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E})}_{=0} - \underbrace{\Delta \vec{E}}_{\Delta \vec{E}} \\ \Rightarrow \Delta \vec{E} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{E} \end{aligned}$$

Analog:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = \dots \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{B} \end{aligned}$$

\Rightarrow Wellengleichungen für elektromagnetische Wellen. Im Vakuum:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{E} \\ \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{B} \end{aligned}$$

In Materie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{E} \\ \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0} \Delta \vec{B} \end{aligned}$$

mit Lichtgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} \\ c_{\text{mat}} &= \sqrt{\frac{1}{\varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{n} \end{aligned}$$

17.5 Struktur elektromagnetischer Wellen

Ebene Welle

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \sin(kx - \omega t) \\ kx &= \vec{k} \vec{r} \\ \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \vec{r} - \omega t) \div \vec{E} \stackrel{!}{=} 0 = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{=0} = \frac{\partial E_x}{\partial x} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow E_x &= \text{const.}\end{aligned}$$

Wahl der Randbedingung \rightarrow wähle $E_x = 0$. Fazit: Im Vakuum gibt es keine longitudinalen, sondern nur transversale elektromagnetische Wellen. Jetzt: Verknüpfung von E - und B -Feld. Ansatz: Linear polarisierte Welle (das heißt \vec{E} , \vec{B} zeigen immer in eine Richtung)

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, t) &= (0, E_y(x, t), 0) \\ E_y(x, t) &= E_0 \sin(kx - \omega t)\end{aligned}$$

Maxwell: $\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$, $\text{rot } \vec{B} = 1/c^2 \dot{\vec{E}}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial t} = -kE_0 \cos(kx - \omega t), \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0 \\ \frac{1}{c^2} &= -\frac{\partial B_x}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\omega}{c^2} E_0 \cos(kx - \omega t), \frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0 \\ \Rightarrow \vec{B}(x, t) &= (0, 0, B_z(x, t)), B_z(x, t) = \frac{E_0}{c} \sin(kx - \omega t)\end{aligned}$$

\Rightarrow Magnetisches Wechselfeld muss in z-Richtung zeigen falls das elektrische Feld in y-Richtung polarisiert ist. das heißt für elektromagnetische, ebene Wellen im Vakuum gilt:

$$\vec{E} \perp \vec{B}$$

$$\ddot{\vec{E}} = c^2 \Delta \vec{E}$$

$$\ddot{\vec{B}} = c^2 \Delta \vec{B}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sim (\vec{k} \vec{r} - \omega t) \quad (\text{Ebene Welle})$$

Mit $\text{rot } \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$, $\text{rot } \vec{B} = 1/c^2 \dot{\vec{E}}$

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, t) &= (0, E_y, 0) \\ E_y &= E_0 \sin(kx - \omega t) \\ \vec{B} &= (0, 0, B_z) \\ B_z &= \frac{E_0}{c} \sin(kx - \omega t)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \vec{E} \perp \vec{B}$, \vec{E} , $\vec{B} \perp \vec{K}$, \vec{E} , \vec{B} in Phase

$$\begin{aligned}|\vec{B}| &= \frac{|\vec{E}|}{c} \\ \vec{B} &= \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E})\end{aligned}$$

Zirkular polarisierte Welle:

$$[E_{0,x} = E_{0,y}, \varphi = 90^\circ]$$

Elliptisch Polarisierter Welle:

$$[E_{0,x} \neq E_{0,y}, \varphi = 90^\circ]$$

Unpolarisierte Welle:

[keine feste Phasenverschiebung]

Kugelwellen:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{r} \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{B}_0}{r} \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

17.6 Energietransport elektromagnetischer Welle

Energiedichte im Vakuum:

$$\omega_{em} = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \varepsilon_0 E^2(t)$$

$$\langle \omega_{em} \rangle = \langle \omega_{em}(t) \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2$$

Energiestromdichte (oder Intensität)

$$S = \frac{\text{Strahlungsleistung}}{\text{Fläche}} = \frac{\text{Energie}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}}$$

$$= \text{Energiedichte} \cdot \text{Geschwindigkeit}$$

$$\Rightarrow S = \omega_{em} c = \varepsilon_0 c E^2(t) = \varepsilon_0 c^2 EB = \frac{1}{\mu_0} EB = EH$$

Definition 17.2 (Poyntingvektor)

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{E} \times \vec{H}$$

17.7 Erzeugung elektromagnetischer Wellen

Hertzscher Dipol:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ω groß $\rightarrow L, C$ klein

- Spule \rightarrow Draht
- Kondensator \rightarrow Draht

\Rightarrow geraderung: PTP3

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3} \left(\dot{\vec{p}} \times \vec{r} + \frac{r}{C} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}) \right)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \left(\vec{p} + \frac{r}{C} \dot{\vec{p}} + 3 \left(\left(\vec{p} + \frac{r}{C} \dot{\vec{p}} \right) \hat{r} \right) \hat{r} \right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^2} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}) \times \vec{r}$$

\Rightarrow Hertzscher Dipol

- Nahfeld: $E \sim 1/r^3, B \sim 1/r^2, E, B$ phasenverschoben, $\varphi = 90^\circ$
- Fernfeld: $E \sim 1/r, B \sim 1/r, \vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{k}, \varphi = 0^\circ$

$$\Rightarrow |\vec{S}| \sim EB \sim 1/r^2$$

Symmetrie:

- $S = \sigma(r) \cdot \xi(\theta)$
- $\vec{S} \parallel \vec{r}$
- $\oint \vec{S} d\vec{A} = \text{const.}$

$$\oint \sigma(r) \xi(\theta) r^2 d\Omega = \sigma(r) r^2 \underbrace{\oint \xi(\theta) d\Omega}_{\text{konstant}} = C \sigma(r) r^2 \stackrel{!}{=} \text{const.}$$

$\Rightarrow \sigma(r) \sim 1/r^2, S \sim 1/r^2$. Also: Die $1/r$ -Abhängigkeit von E, B-Feld und die $1/r^2$ Abhängigkeit von $|\vec{S}|$ ergeben sich für das Fernfeld aus der Symmetrie und der Erhaltung des Energieflusses. Außerdem: Fernfeld = reines Wellenfeld im freien Raum. Daher sind \vec{E}, \vec{B} rein transversal, \vec{E}, \vec{B} in Phase. Nahfeld: $r \gg d \Rightarrow \vec{B}, \vec{E}$ phasenverschoben. Vorbemerkung: Hochfrequente Wechselspannung auf einem Leiter führt zu elektromagnetischen Wellen entlang des Leiters, da sich die Oberflächenladung σ nur mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet. (Drahtwelle) \Rightarrow Hertzscher Dipol: Stehende Drahtwellen:

Phasenverschiebung: $\pi/2$

$$I(z, t) = I_0(z) \sin \omega t$$

$$U(z, t) = U_0(z) \cos \omega t$$

Randbedingungen

$$I_0\left(\pm \frac{l}{2}\right) = 0$$

$$U_0\left(\pm \frac{l}{2}\right) = U_0$$

$$U_0(0) = 0$$

Daraus folgt

$$I_0(z) = I_0 \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$U_0(z) = U_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

Abstrahlungscharakteristik::

$|\vec{S}| = \sigma(r) \cdot \xi(\theta) \sim EB$ (Fernfeld) $\Rightarrow \xi(\theta) = ?, \sigma(r) \sim 1/r^2$. Fernfeld:

$$\vec{E} \sim \frac{1}{r^3} (\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}) \times \vec{r} = -\frac{1}{r^2} (\ddot{\vec{p}} r^2 - \vec{r}(\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{r}))$$

in Kugelkoordinaten mit $\hat{p} = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$ folgt

$$\begin{aligned} &= \frac{|\ddot{\vec{p}}|}{r} \cdot (\hat{r} \cos \theta - \hat{p}) \\ &= \frac{\ddot{\vec{p}}}{r} \sin \theta \vec{e}_r \\ |\vec{S}| &\sim \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \sim |\vec{E}|^2, S = c\varepsilon_0 E^2 \end{aligned}$$

\Rightarrow Strahlungsgleichung des Hertzschen Dipols:

$$S(r, \theta) = \frac{p_0^2 \omega^4 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3 \tau^2} \sin^2(\omega t - kr)$$

17.8 Elektromagnetisches Spektrum

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

$$\begin{aligned} \nu = 100 \text{ MHz} &\rightarrow \lambda \sim 3 \text{ m} \\ \nu = 10 \text{ GHz} &\rightarrow \lambda \sim 3 \text{ cm} \\ \nu = 1 \times 10^{14} \text{ Hz} &\rightarrow \lambda \sim 3 \mu\text{m} \\ \nu = 1 \times 10^{15} \text{ Hz} &\rightarrow \lambda \sim 300 \text{ nm} \end{aligned}$$

- Radiowellen
- Mikrowellen
- Infrarotstrahlung
- Licht
- Röntgenstrahlung
- Gammastrahlung

Quantenphysik: Elektromagnetische Strahlung $\hat{=}$ Photonen $\gamma \rightarrow E_\gamma = h\nu$, h : Plancksches Wirkungsquantum
 $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}$

18 Natur des Lichts und Wellenoptik

Wellencharakter \rightarrow Interferenz und Beugung, insbesondere zum Beispiel Poissonscher Fleck.

18.1 Beugung und Interferenz

Beugung: Ableitung von Wellen an einem Hindernis.

Interferenz: Konstruktive und destruktive Überlagerung von Wellen.

Beruhet auf: Superposition und Prinzip von Huygens. Prinzip von Hulgens: Jeder Punkt einer Wellenfront ist Ausgangspunkt einer neuen (Elementar)Welle. Lage der Wellenfront ergibt sich durch Überlagerung (Superposition)

sämtlicher Elementarwellen. Beachte: Elementarwellen haben Kugel-/Kreisform \implies auch rücklaufende Welle. Betrachte Einzelspalt mit Breite a . \implies Erste Nullstelle:

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{a}{2} \sin \theta, \lambda = a \sin \theta$$

Weitere Nullstellen:

$$a \sin \theta = m\lambda, m \in \mathbb{N}$$

Intensitätsverteilung: Betrachte $N \rightarrow \infty$ Schwingen in Einzelspalt von Breite a . Abstand zwischen zwei Schwingern: $d = a/N \rightarrow 0$. Einzelschwingung: Amplitude A_0 . Phasenverschiebung zwischen zwei Schwingern:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

Vorwärtsrichtung: $\theta = 0^\circ \implies A = A_{max} = NA_0$ Richtung $\theta \neq 0$

$$A_1 = A_0 \cos \omega t$$

$$A_2 = A_0 \cos(\omega t + \delta)$$

$$A_3 = A_0 \cos(\omega t + 2\delta)$$

$$\vdots$$

Betrachte Kreisbogen, damit

$$\sim \frac{1}{2}\phi = \frac{A}{2r} \rightarrow A = 2r \sin \frac{1}{2}\phi$$

$$r = \phi A_{max} \rightarrow \phi = \frac{A_{max}}{r}$$

$$A = 2 \frac{A_{max}}{\phi} \sin \frac{1}{2}\phi$$

$$\frac{A}{A_{max}} = \frac{\sin \frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi}$$

$$\implies \frac{I}{I_0} = \frac{A^2}{A_{max}^2} = \left(\frac{\sin \frac{1}{2}\phi}{\frac{1}{2}\phi} \right)^2$$

$$\phi = N\delta = Nd \frac{\pi}{\lambda} \sin \theta$$

\implies Intensitätsverteilung für Beugung im Einzelspalt

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta} \right)^2 = I_0 \mathcal{I}(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta} \right)^2$$

Doppelspalt: Zuerst: unendlich dünne Spaltteile, Abstand d

- Interferenzminima: $d \sin \theta = (m + \frac{1}{2})\lambda, m = 0, 1, \dots$
- Interferenzmaxima: $d \sin \theta = m\lambda, m = 0, 1, \dots$

- Intensitätsverteilung:

$$E_1 = A_0 \sin \omega t$$

$$E_2 = A_0 \sin (\omega t + \delta)$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

$$E = E_1 + E_2 = 2A_0 \cos \frac{1}{2}\delta \sin \left(\omega t + \frac{1}{2}\delta \right)$$

mit

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right) \sin \left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right)$$

$$I \sim E^2$$

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{1}{2}\delta$$

$$I_0 \sim A_0^2$$

$$\delta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

Jetzt: Doppelspalt mit Spaltbreite a .

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{1}{2}\delta \left(\frac{\sin \left(\frac{1}{2}\phi \right)}{\frac{1}{2}\phi} \right)^2$$

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin \theta$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

Fraunhofer Beugung: Annahmen:

- Abstand L groß gegen Abstand Objekt / Spalt
- Huygensches Prinzip
- Einfallende ebene Welle
- Kohärenz

Definition 18.1 (Kohärenzlänge) Maximale Wellenlängen / Laufzeitunterschiede, die zwei Teilwellen haben dürfen, um stabil zu interferieren.

Definition 18.2 (Kohärenzzeit) Mittleres Zeitintervall, in der sich die Phase einer Teilwelle um maximal 2π ändert.

Fraunhofer Beugung \rightarrow Erzeugung von Kugelwellen ausgehend von jedem Punkt im Objektspalt

$$E \sim \frac{A_0}{r} e^{i(kr - \omega t)} \sim \frac{A_0}{r} e^{ik(\sqrt{L^2 + x'^2} + \Delta(x))} e^{-i\omega t}$$

Einzelspalt:

$$E(x, t) = A(x) e^{-i\omega t}$$

Gangunterschied: $\Delta(x) = x \sin \theta = x = x'/L$ Phasendifferenz:

$$\begin{aligned}\delta(x) &= k\Delta(x) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta(x) = \frac{2\pi}{\lambda}x\frac{x'}{L} \\ &= kx\frac{x'}{L}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(\theta, t) &\sim \int_{-\infty}^{\infty} A(x)e^{i\delta(x)}e^{-i\omega t}dx \\ &= e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} A(x)e^{ikx\frac{x'}{L}}dx \\ &= e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} A(x)e^{iKx}dx \quad K = k\frac{x'}{L} = k \sin \theta\end{aligned}$$

Fraunhofer-Beugung: Im Fernfeld ist die Winkelverteilung der Amplitude die Fouriertransformation der Amplitudenverteilung in der Bildebene

$$E(\theta, t) \sim e^{-i\omega t} \int A(x)e^{iKx}dx$$

mit $K = k \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta$

Damit berechne Einzelspalt (Breite a von $-a/2$ nach $a/2$):

$$\begin{aligned}F(K) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(x)e^{iKx}dx \\ &= \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{iKx}dx = \frac{1}{aK} [e^{iKx}]_{-a/2}^{a/2} \\ &= \frac{2}{Ka} \frac{e^{iK\frac{a}{2}} - e^{-iK\frac{a}{2}}}{2i} = \frac{2}{Ka} \sin\left(K\frac{a}{2}\right) \\ F(k) &\sim E(\theta, t) \sim \frac{\sin\left(K\frac{a}{2}\right)}{K\frac{a}{2}} \\ I(\theta) &= I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta} \right)^2\end{aligned}$$

mit

$$I \sim E^2, K = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta = k \sin \theta$$

Doppelspalt, zentriert um Null, Abstand der Spaltmittelpunkte ist d , Spaltgröße ist a .

$$\begin{aligned}F(K) &= 2 \cos\left(K\frac{a}{2}\right) \frac{\sin\left(K\frac{a}{2}\right)}{K\frac{a}{2}} \\ I(\theta) &= 4I_0 \cos^2\left(K\frac{a}{2}\right) \left(\frac{\sin\left(K\frac{a}{2}\right)}{K\frac{a}{2}} \right)^2 \\ K &= k \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta\end{aligned}$$

Gitter mit m Spalte:

$$I(\theta) \sim \left(\frac{\sin(mK\frac{a}{2})}{\sin(K\frac{a}{2})} \right)^2 \left(\frac{\sin(K\frac{a}{2})}{K\frac{a}{2}} \right)^2$$

Hauptmaxima: $\sin \theta = n \frac{\lambda}{d}$

Auflösungsvermögen: $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \leq nm$

18.2 Reflexion und Brechung

Reflexion: Einfallswinkel = Ausfallswinkel, Beobachtung! Ergibt sich aus Huygenschem Prinzip. Einfallende Wellenfront AP trifft reflektierende Oberfläche zuerst im Punkt A . Die von dort ausgehende Kugelwelle bildet zusammen mit den von A' und A'' ausgehenden Wellen zum Zeitpunkt t die Wellenfront der reflektierten Welle BQ . ABP und ABQ kongruent $\rightarrow \theta_r = \theta_i$. Brechung: Lichtlaufzeiten in Medium größer, Verringerung der Lichtgeschwindigkeit in Materie.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu\epsilon_0\mu_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{n_0}{n}$$

n : Brechzahl. Damit verändert sich im Medium auch die Wellenlänge, da die Atome das Licht mit gleicher Frequenz absorbieren und abstrahlen. Es gilt:

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}, \omega = 2\pi\nu \implies c = \nu\lambda$$

Das heißt für $c \downarrow \implies \lambda \downarrow$ für $\nu = \text{const.}$. Wellenlänge nimmt ebenfalls ab! Brechungsgesetz mit Huygenschen Prinzip: Die einfallende Wellenfront AP trifft die Grenzfläche zuerst im Punkt A . Die von dort ausgehende Kugelwelle breitet sich im Medium 2 mit $c_2 < c_1$ aus und trifft im Punkt Q ein, wenn die einlaufende Wellenfront Punkt B erreicht. Die neue Wellenfront BQ verläuft demnach nicht parallel zu AP und man erhält:

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 &= \frac{c_1 t}{AB} \\ \sin \theta_2 &= \frac{c_2 t}{AB} \\ \implies \frac{c_1}{c_2} &= \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \end{aligned}$$

mit $c_i = c/n_i$. Gesetz von Snellius:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Totalreflexion \implies Übergang vom Licht von einem optisch dichteren in optisch dünneres Medium. Kritischer Winkel:

$$\sin \theta_k = \frac{n_1}{n_2}, n_1 < n_2$$

18.3 Fermatsches Prinzip

Der Weg, den das Licht beschreibt wenn es sich von einem Punkt zu einem anderen bewegt ist stets so, dass die Zeit, die das Licht für das Zurücklegen des Weges braucht, ein (lokales) Minimum aufweist. Licht wählt den kürzesten optischen Weg: $s' = ns$.

Reflexion: \implies Spiegelung ist Minimum \implies Einfallswinkel = Ausfallswinkel.

Brechung:

$$t = \frac{l_1}{c_1} + \frac{l_2}{c_2} = \frac{n_1 l_1}{c} + \frac{n_2 l_2}{c}$$

Minimum:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \left(n_1 \frac{\partial l_1}{\partial x} + n_2 \frac{dl_2}{dx} \right)$$

mit $l_1^2 = a^2 + x^2, l_2 = b^2 + (d-x)^2$

$$\begin{aligned} \frac{dl_1}{dx} &= \frac{1}{2l_1} 2x = \frac{x}{l_1} & \frac{dl_2}{dx} &= \frac{d-x}{l_2} \\ n_1 \frac{x}{l_1} - \frac{d-x}{l_2} &= 0 & \sin \theta_1 &= \frac{x}{l_1}, \sin \theta_2 = \frac{d-x}{l_2} \\ && \implies n_1 \sin \theta_1 &= n_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

18.4 Polarisation und Fresnelsche Formeln

Elektromagnetische Wellen sind transversal, das heißt Schwingungsebene steht senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung. Möglichkeit der Polarisation::

- linear polarisierte EM-Welle
- zirkular / elliptische polarisierte EM-Welle

Erzeugung von Polarisation: Absorption, Streuung, Reflexion und Doppelbrechung.

Polarisation durch Absorption: Polarisation durch die Absorption einer Schwingungsrichtung mit Hilfe dichromatischer Kristalle oder polarisierender Folie aus langkettigen, ausgerichteten Kohlenwasserstoffmolekülen. (Absorption des E-Felder entlang der Moleküle). Gesetz von Malus (Intensität von polarisiertem Licht nach einem weiterem Polarisationsfilter):

$$I = I_0 \cos^2 \theta$$

Polarisation durch Streuung. Streuung: Absorption + Wiederabstrahlung. Elektromagnetische Wellen:

- Rayleigh-Streuung (Himmelblau, ω^4)
- Raman-Streuung
- Mie-Streuung

Gestreutes Licht ist je nach Streurichtung unterschiedlich polarisiert, Ausbildung eines Winkelabhängigen Polarisationsmusters (zum Beispiel Polarisationsmuster am Himmel wird von Bienen zur Orientierung genutzt).

Polarisation durch Reflexion: Reflexion beziehungsweise Transmission an dielektrischer Grenzfläche

- transmittierter und reflektierter Strahl sind (teilweise) polarisiert, Polarisationsgrad abhängig vom Einfallswinkel α .
- Für $\alpha = \theta_{Br}, \theta_{Br}$: Brewsterwinkel. Vollständige Polarisation des reflektierten Strahls in Richtung senkrecht zur Einfallsebene.

Fresnelsche Formeln:

Reflexion des senkrecht zur Einfallsrichtung polarisierten Strahls

$$R_{\perp}(\alpha, \beta) = \left(\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\alpha + \beta} \right)^2$$

Reflexion des parallel zur Einfallsrichtung polarisierten Strahls

$$R_{\parallel}(\alpha, \beta) = \left(\frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \right)^2$$

Transmission des senkrecht zur Einfallsrichtung polarisierten Strahls

$$T_{\perp}(\alpha, \beta) = \left(\frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \right)^2$$

Transmission des parallel zur Einfallsrichtung polarisierten Strahls

$$T_{\parallel}(\alpha, \beta) = \left(\frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \right)^2$$

$$R_{\perp} + T_{\perp} = 1$$

$$R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1$$

Bemerkung 18.3 Herleitung der Fresnelschen Formeln mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen beziehungsweise den aus diesen folgenden Statigkeitsbedingungen für das E- und das D-Feld an Grenzflächen sowie dem Brechungsgesetz unter Beachtung der Energieerhaltung der Lichtströme an der Grenzfläche (siehe Demtröder).

Aus de Fresnel-Formeln folgt: $R_{\parallel} = 0$ für $\alpha + \beta = 90^\circ$, das heißt der Brewsterwinkel θ_{Br} ist der Winkel, bei dem reflektierter und gebrochener Strahl senkrecht aufeinander stehen. Es folgt:

$$n_1 \sin \theta_{Br} = n_2 \sin \theta_2 = n_2 \sin(90^\circ - \theta_{Br}) = n_2 \cos \theta_{Br}$$

\Rightarrow Gesetz von Brewster:

$$\tan \theta_{Br} = \frac{n_2}{n_1}$$

Qualitative, anschauliche Erklärung für das Gesetz von Brewster: Sei das E-Feld in der Einfallsebene, also parallel (\parallel) polarisiert. Dann schwingen auch die von ihm erzeugten atomaren Dipole \vec{p} in dieser Ebene. Die (koherente) Abstrahlung dieser Dipole ist aber für das Zustandekommen der reflektierten Welle verantwortlich. Ist $\alpha = \theta_{Br}$ beziehungsweise $\alpha + \beta = 90^\circ$ so zeigen die Dipole in Richtung des reflektierten Strahls; ein Dipol emittiert aber nicht in diese Richtung. Für $\alpha = \theta_{Br}$ (Brewsterwinkel) \Rightarrow vollständige Polarisation des reflektierten Strahls. Für $\alpha, \beta \rightarrow 0$ gilt $\sin \alpha \approx \alpha$, $\sin \beta \approx \beta$ und $\alpha/\beta \approx n_2/n_1$. Damit lässt sich der Reflexionsgrad bei senkrechten Einfall herleiten:

$$R_{\parallel} = R_{\perp} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$$

das heißt der Reflexionsgrad ist für beide Komponenten gleich, wie man es aus Symmetriegründen auch erwartet.

Bemerkung 18.4 Aufgrund der (teilweisen) Polarisation von reflektiertem Licht schützen Sonnenbrillen mit Gläsern aus polarisierendem Material besonders gut vor zu grellem Licht. Zum Beispiel Reflektion an Wasseroberfläche \rightarrow horizontale Polarisation, das heißt Sonnenbrillen haben vertikale Transmissionsachse.

Polarisation durch Doppelbrechung.

Wichtiger Effekt. Auftreten in optischen anisotropen Materialien (zum Beispiel Kalkspat CaCO_3), das heißt Materialien bei denen sich das Licht in verschiedenen Richtungen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ausbreitet. Lichtgeschwindigkeit im Medium c_{med} abhängig von

- Polarisation
- Ausbreitungsrichtung

\Rightarrow Phänomen der Doppelbrechung. Ausgezeichnete optische Achse.

- Parallel zur optischen Achse

$$\Rightarrow c_{med} = c/n_0$$

n_0 : normaler Brechungsindex

- Senkrecht zur optischen Achse \perp Polarisation $\Rightarrow c_0 = c/n_0$ ordentliches Verhalten
 $\parallel \Rightarrow c_{ao} = c/n_{ao}$ außerordentliches Verhalten
mit $c_0 \neq c_{ao}$

\Rightarrow 3 Fälle:

1. Lichteinfall parallel zur optischen Achse. \Rightarrow normale Lichtausbreitung beider Polarisationsrichtung
2. Lichteinfall senkrecht zur optischen Achse. Unterschiedlich polarisierte Teilstrahlen breiten sich mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aus (\Rightarrow Phasenverschiebung)
3. Lichteinfall unter einem von Null verschiedenen Winkel. \Rightarrow Aufspaltung des einfallenden Lichtes in ordentlichen und außerordentlichen Strahl

Doppelbrechende Kristalle erlauben Erzeugung definierter Gangunterschiede ($\lambda/4$, $\lambda/2$ -Plättchen) (Einfall senkrecht zur optischen Achse)

18.5 Dispersion und Prismenwirkung

Dispersion: Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Wellenzahl k beziehungsweise der Wellenlänge λ . Snellius: $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$. \rightarrow Aufspaltung des Lichts in Farben bei Brechung an Grenzfläche (zum Beispiel Prisma). (Wichtige Anwendung: Prismenspektrograph).

19 Optische Abbildungen

Sehr breites Thema mit einer Fülle von Instrumenten. Zum Beispiel moderne bildgebende Methoden wie Hologramme, Ultraschall, Tomographie. Hier nur einige Grundprinzipien.

19.1 Dünne Linsen, Linsengleichung

das heißt: Linsendicke vernachlässigbar, schwache Krümmung, alle Lichtbündel achsennah, kleine Öffnungswinkel, $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$.

Linsenwirkung beruht auf Brechung an gekrümmten Grenzflächen zwischen optisch dichteren und optisch dünneren Medien. Fokussierend und Defokussierend. Wichtige Begrifflichkeiten

- Optische Achse
- Brennpunkt
- Brennweite f
- Brennebene
- Gegenstand
- Bildpunkt, virtuelles Bild

Linsengleichung: Betrachte dünne Linse, d vernachlässigbar. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} &= \frac{\alpha}{\beta} = n \\ \frac{\sin \delta}{\sin \gamma} &= \frac{\delta}{\sigma} = n \end{aligned} \quad (\text{Snellius})$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} \alpha &= \varepsilon + \xi \\ \delta &= \eta + \kappa \\ \beta + \gamma &= \eta + \xi \\ \Rightarrow \frac{\alpha}{n} + \frac{\delta}{n} &= \eta + \xi \end{aligned}$$

Einsetzen von α und δ liefert:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}(\varepsilon + \xi + \eta + \kappa) &= \eta + \xi \\ \Rightarrow \frac{1}{n} \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{b} \right) &= \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \\ \Rightarrow \frac{1}{g} + \frac{1}{b} &= \underbrace{(n-1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}_f \\ \Rightarrow \frac{1}{g} + \frac{1}{b} &= \frac{1}{f} \end{aligned} \quad (\text{Linsengleichung})$$

mit

$$f = \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_1 + r_2)} \quad (\text{Brennweite})$$

Diese Gleichung lässt sich mit einiger Mühe auch für achsennahe Gegenstands- und Bildpunkte herleiten → Existenz Bildebene. Damit folgt dann auch:

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

Ähnliche Abbildung. Folgt mit Hilfe des Strahlensatzes.

Bemerkung 19.1 Linsengleichung gilt auch für sphärische Spiegel, hier liegen dann Bild und Gegenstand auf der gleichen Seite

19.2 Einfache Anwendung des Linsegesetzes

Bekannt: Brennpunkte F_1, F_2 im Abstand f . Geometrische Konstruktion:

- Parallelstrahl → Brennstrahl
- Zentralstrahl → Zentralstrahl
- Brennstrahl → Parallelstrahl

Für $g \geq f$: reelles Bild.

Für $g < f$: virtuelles Bild.

Virtuelles Bild kann nicht direkt auf Schirm dargestellt werden. Aber: Virtuelles Bild kann von Auge (= 2. Linse) sehr wohl auf die Netzhaut als reelles Bild fokussiert werden. Bildrekonstruktion für zwei Linsen mit virtuellem Zwischenbild. (hier konkave und konvexe Linse)

1. Rekonstruktion des virtuellen Bildes für (konkave) Linse 1 (Hauptebeine H).
2. Rekonstruktion des reellen Bildes mit Hilfe des virtuellen Bildes als Gegenstand und (konvexer) Linse 2 (Hauptebeine H')

19.3 Dicke Linsen

Dicke der Linse nicht vernachlässigbar, das heißt $d \approx r_1, r_2$ (r_1, r_2 : Krümmungsradius). Gültigkeit des Linsengesetzes bleibt bestehen, wenn dicke Linse als ein (Linsen) System mit zwei Hauptebenen betrachtet wird. Auch dann gilt:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

mit $f = f(r_1, r_2, n, d)$, $H_1 = H_1(r_2, f, d)$, $H_2 = H_2(r_1, f, d)$. Bildrekonstruktion mittels fiktiver Strahlen, die nur an den jeweiligen Hauptebenen gebrochen werden.

19.4 Linsenfehler

- Sphärische Aberration. Von optischer Achse weiter entfernte Strahlen werden stärker gebrochen; Abhilfe: asphärische Linsen.
- Chromatische Aberration. Unterschiedliche Fokussierung aufgrund der Dispersion. Abhilfe: achromatische Linsen
- Astigmatismus. Schärfefehler für schräg einfallende Strahlenbündel

19.5 Optische Instrumente

- Mikroskop
- Spektrograph
- Auge
- Fernrohr
- Interferometer

20 Spezielle Relativitätstheorie

In Inertialsystemen gelten die Newtonschen Gesetze. Klassisches Relativitätsprinzip: Alle relativ zu einem Inertialsystem gleichförmig bewegten Bezugssysteme sind ebenfalls Inertialsysteme und im Rahmen der Newtonschen Mechanik gleichwertig. \Rightarrow Galilei Transformationen

$$\begin{aligned}
 x' &= x - ut \\
 y' &= y \\
 z' &= z \\
 t &= t' \\
 \Rightarrow \Delta x' &= \Delta x \\
 \Delta y' &= \Delta y \\
 \Delta z' &= \Delta z \\
 \Delta t' &= \Delta t \\
 \frac{dx'}{dt'} &= \frac{dx}{dt} - \frac{d}{dt}(ut) \\
 v' &= v - u
 \end{aligned}$$

Raum und Zeit sind absolut. Es gibt keine absoluten Geschwindigkeiten.