Analysis II (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

16. Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Metrische und normierte Räume

1.1 Metrische Räume

Definition 1.1 Sei M eine Menge, $d : M \times M \to [0, \infty)$ heißt **Metrik** auf M genau dann wenn $\forall x, y, z \in M$

- (D1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (Definitheit)
- (D2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
- (D3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

Beispiel 1.2 1. Charakterische (diskrete) Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Sei $X = \mathbb{K}^n (\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C})$ mit Metrik

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{n}{2}}$$

(euklidische Metrik)

3. Sei $X = \mathbb{R}^n$. Für $1 \leq \phi \leq \infty$. Sei

$$d_\phi(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^\phi \right)^{\frac{n}{\phi}}$$

   Ist $\phi = \infty$, so definieren wir

$$d_\infty(x,y) = \max_{i-1,\dots,n} |x_i - y_i|$$

4. $X = \mathbb{R}$ mit Metrik

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

5. Der Raum der Folgen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (beziehungsweise $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) kann mit der Metrik

$$d(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k - y_k|}$$

Definition 1.3 Sei M eine Menge mit Metrik d. Wir definieren für $x \in M, \varepsilon > 0$, die offene ε -Kugel um x durch

$$K_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x,y) < \varepsilon\}$$

und eine abgeschlossene Kugel durch

$$K_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x,y) \leq \varepsilon\}$$

$A \subset M$ heißt **Umgebung** von $x \in M \iff \exists \varepsilon : K_\varepsilon(x) \subset A$

Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen

Definition 1.4 Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X,d) ist konvergent gegen einem $x \in X$ genau dann wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 d(x_n, x) < \varepsilon$

Satz 1.5

1. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann ist $A \subseteq X$ abgeschlossen genau dann wenn $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in A mit $x_n \to x \implies x \in A$
2. Seien $(X,d_1), (Y,d_2)$ zwei metrische Räume. Dann ist die Funktion stetig in $x \in X$ genau dann wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x)$.

Definition 1.6 ((Cauchy Folgen und Vollständigkeit)) Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge falls $d(x_n, x_m) \to 0$ für $n,m \to \infty$. Der metrische Raum heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge konvergent ist.

1.2 Normierte Räume

Definition 1.7 Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist ein Paar bestehend aus einem $\mathbb{K}$ -Vektorraum X und einer Abbildung $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ mit

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in X$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in X$

Bemerkung 1. Die Norm $\|\cdot\|$ induziert auf X eine Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$

2. Eine Metrik d auf einem Vektorraum definiert die Norm $\|d(x, 0)\|$ nur dann, wenn

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x, y, z \in X : d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y) \qquad \text{(Homogenität)}$$
$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \qquad \text{(Translationsinvarianz)}$$

Definition 1.8 (Banachraum) Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt vollständig, falls X als metrischer Raum mit der Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ vollständig ist. Ein solcher vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**

Beispiel 1.9 1. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, wobei

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{n}{2}}$$

2. Sei K eine kompakte Menge:

$$C_{\mathbb{K}} := \{ f : K \to \mathbb{K} \mid f \text{ stetig} \}$$

$$\|\cdot\|_\infty = \max_{\lambda \in K} |f(x)|$$

$\left(C_{\mathbb{K}(K)}, \|\cdot\|_\infty \right)$ ist ein Banachraum.

Bemerkung 1. Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{K}^n$ konvergiert, das heißt $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ ist vollständig

2. Jede beschränkte Folge in $\mathbb{K}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge. (Bolzano-Weierstraß Satz gilt in $\mathbb{R}^n$) (Beweis für $\mathbb{R}^n$ zum Beispiel in RR Ana2 Satz 1.1)

Satz 1.10 (Äquivalenz von Normen) Auf dem endlich dimensionalen Vektorraum $\mathbb{K}^n$ sind alle Normen **äquivalent** zur Maximumnorm, das heißt zu jeder Norm $\|\cdot\|$ gibt es positive Konstanten w, M mit denen gilt

$$m \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M \|x\|_\infty, x \in \mathbb{K}^n$$

Beweis Sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm $\forall x \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \left\| e^{(k)} \right\| \leq M \|x\|_\infty$$

mit

$$M := \sum_{k=1}^{n} \left\| e^{(k)} \right\|$$

Wir setzen

$$S_1 := \{x \in \mathbb{K}^m \mid \|x\|_\infty = 1\}, m := \inf\{\|x\|, x \in S_1\} \geq 0$$

Zu zeigen $m > 0$ (dann ergibt sich für $x \neq 0$ wegen $\|x\|_\infty^{-1} x \in S_1$ auch $m \leq \|x\|_\infty^{-1} \|x\| \implies 0 < m\|x\|_\infty \leq \|x\| \quad x \in \mathbb{K}^n$) Sei also angenommen, dass $m = 0$

Dann gibt eine eine Folge $\left(x^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}} \in S_1$ mit $\left\|x^{(k)}\right\| \xrightarrow{k \to \infty} 0$. Da die Folge bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ beschränkt ist, gibt es nach dem B.-W. Satz eine Teilfolge auch von $\left(x^{(k)}\right)$, die bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ gegen ein $x \in \mathbb{K}^n$ konvergiert.

$$|1 - \|x\|_\infty| = \left| \left\| x^{(k)} \right\|_\infty - \|x\|_\infty \right| \leq \left\| x^{(k)} - x \right\|_\infty \to 0 \implies \|x\|_\infty = 1 \implies x \in S_1$$

Anderseits gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} : \|x\| \leq \left\| x - x^{(k)} \right\| + \left\| x^{(k)} \right\| \leq M \left\| x - x^{(k)} \right\|_\infty + \left\| x^{(k)} \right\| \xrightarrow{k \to \infty} \implies x = 0$$

↯zu $x \in S_1$ □

Definition 1.11 Eine Menge $M \subset K^n$ heißt kompakt (folgenkompakt), wenn jede beliebige Folge in M eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert ebenfalls in M enthalten ist.

Beispiel 1.12 Mit Hilfe von dem Satz von B.W. folgt, dass alle abgeschlossene Kugeln im $\mathbb{R}^n$ $(K_r(a), a \in K^n)$ kompakt sind. Ferner ist für beschränkte Mengen M der Rand ∂M kompakt. Jede endliche Menge ist auch kompakt.

1.3 Hilberträume

Definition 1.13 Sei $H\mathbb{K}$ Vektorraum. Ein **Skalarprodukt** auf eine Abbildung

$$(\cdot, \cdot) : H \times H \to \mathbb{K}$$

mit

1. $\forall x, y, z \in H, \lambda \in \mathbb{K} : (z, x + \lambda y) = (z, x) + \lambda(z, y)$
2. $\forall x, y \in H : (x, y) = \overline{(y, x)}$
3. $\forall x \in H : (x, x) \geq 0 \land (x, x) = 0 \iff x = 0$

$(H, (\cdot, \cdot))$ nennt man einen Prähilbertraum.

Bemerkung Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist das Skalarprodukt linear in der zweiten Komponente aber antilinear in der ersten ($(\lambda x, y) = \bar{\lambda}(x, y)$).

Lemma 1.14 (Cauchy-Schwarz Ungleichung) Sei $(H, (\cdot, \cdot))$ Prähilbertraum, dann gilt

$$\forall x, y \in H : |(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

Beweis Da die Ungleichung für $y = 0$ bereits erfüllt ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen $y \neq 0$. Für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$0 \leq (x + \alpha y, x + \alpha y) = (x, x) + \bar{\alpha}(y, x) + \alpha(x, y) + \alpha\bar{\alpha}(y, y)$$

Setze nun $\alpha := -(x, y)(y, y)^{-1}$

$$\begin{aligned}
&= (x, x) - \overline{(x, y)}(y, y)^{-1} - (x, y)(y, y)^{-1}(x, y) - \left|(x, y)^2\right|(y, y)^{-1} \\
&= (x, x) - \underbrace{((y, x)(y, x) + (x, y)(x, y))(y, y)^{-1}}_{>0} - |(x, y)|^2(y, y)^{-1} \\
&\leq (x, x) - |(x, y)|^2(y, y)^{-1} \\
&\iff |(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)
\end{aligned}$$

□

Korollar 1.15 Sei $(H, (\cdot, \cdot))$ ein Prähilbertraum, dann ist $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ eine Norm auf H.

Beweis Es ist nur die Dreiecksungleichung zu beweisen, weil der Rest klar ist. Für $x, y \in H$ gilt

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(x, y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x, y)| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

□

Definition 1.16 Ein Prähilbertraum $(H, (\cdot, \cdot))$ heißt Hilbertraum, falls $(H, \|\cdot\|)$ mit $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ ein Banachraum ist.

Beispiel 1.17

1. $H = \mathbb{R}^n$ versehen mit $\underbrace{(x, y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}_{\text{euklidisches Skalarprodukt}}$ ist ein Hilbertraum

2. $H = \mathbb{C}^n$ mit $\underbrace{(x, y) := \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i}_{\text{euklidisches Skalarprodukt}}$ ist ein Hilbertraum

3. Sei $l^2\mathbb{K} := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{K}, \forall k \in \mathbb{N} \wedge \sum_{i=1}^{\infty}|x_k|^2 < \infty\}$ versehen mit $(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \bar{x}_i y_i$ ist ein Hilbertraum.

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i||y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|_{l^2}\|y\|_{l^2} < \infty$$

Lemma 1.18 (Hölder-Ungleichung) Für das euklidische Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_2$ gilt für beliebige p,q mit $1 < p,q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ die Ungleichung

$$\forall x,y \in \mathbb{K}^n : |(x,y)_2| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Darüber hinaus gilt die Ungleichung auch für $p = 1, q = \infty$

Lemma 1.19 (Young'sche Ungleichung) Tür $p,q \in \mathbb{R}, 1 < p,q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$\forall x,y \in \mathbb{K} : |(x,y)| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}$$

Lemma 1.20 (Minkowski-Ungleichung) Für ein beliebiges $p \in [1,\infty]$ gilt

$$\forall x,y \in \mathbb{K}^n : \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Satz 1.21 (Banachscher Fixpunktsatz) Sei (M,d) ein vollständiger, metrischer Raum und $f : M \to M$ ist eine strenge Kontraktion, das heißt

$$\exists 0 < \alpha < 1 \forall x,y \in M : d(f(x), f(y)) < \alpha d(x,y)$$

Dann existiert ein eindeutiger Fixpunkt von f, das heißt es existiert ein eindeutiges $x^* \in M : f(x^*) = x^*$

Beweis Existenz:
Wähle ein $x_0 \in M$ beliebig, aber fest und definiere dann $x_1 := f(x_0), x_2 := f(x_1), \ldots$. Dann gilt für $n \leq m$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(f(x_{n-1}), f(x_{m-1})) < \alpha d(x_{n-1}, x_{m-1}) \\ &= \alpha d(f(x_{n-2}), f(x_{m-2})) < \cdots < \alpha^n d(x_0, x_{m-n}) \end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\begin{aligned} d(x_0, x_{m-n}) &\leq d(x_0,x_1) + d(x_1,x_2) + \cdots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n}) \\ &\leq d(x_0,x_1) + \alpha d(x_0,x_1) + \cdots + a^{m-n-1} d(x_0,x_1) \\ &= d(x_0,x_1) \sum_{i=0}^{m-n-1} \alpha^i \leq d(x_0,x_1) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \\ &= \frac{d(x_0,x_1)}{1-\alpha} < \infty \\ \implies d(x_n,x_m) &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0,x_1) \end{aligned}$$

Also ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge. Da (M,d) vollständig ist existiert $x^* \in M$, sodass $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x^*$. Zeige, dass x^* Fixpunkt von f ist:

$$\begin{aligned} 0 \le d(x^*, f(x^*)) &\le d(x^*, x_k) + d(x_k, f(x^*)) \\ &\le d(x^*, x_k) + \alpha d(x_{k-1}, x^*) \xrightarrow{k\to\infty} 0 \end{aligned}$$

$\implies f(x^*) = x^*$
Eindeutigkeit: Angenommen $\exists x' \in M, x' \neq x^* : f(x') = x'$:

$$0 < d\big(x^*, x'\big) = d\big(f(x^*), f\big(x'\big)\big) < \alpha d\big(x^*, x'\big) \implies \alpha > 1`$$

□

2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$

Definition 2.1 Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, D \neq \emptyset$, ist stetig in einem $a \in D$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

Bemerkung Es gelten auch im Mehrdimensionalen die Permanenzeigenschaften, das heißt f, g stetig $\implies f + g, f \circ g$ sind stetig.

Satz 2.2 Eine stetige Funktion $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist auf einer kompakten Menge $K \subset D$ beschränkt, das heißt für jede kompakte Menge K existiert eine Konstante M_k, sodass

$$\forall x \in K \|f(x)\| < M_k$$

Beweis Angenommen f wäre auf K unbeschränkt, dann gäbe es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in K$ mit $\|f(x_k)\| > K$. Da K kompakt hat die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $\big(x_{k_j}\big)_{j\in\mathbb{N}}$ für die gilt $x_{k_j} \xrightarrow{j\to\infty} x \in K$. Da f stetig $f\big(x_{k_j}\big) \to f(x)$ und $\|f(x)\| < \infty$, was im Widerspruch steht zu $\|f(x_k)\| \xrightarrow{k\to\infty} \infty$. □

Satz 2.3 Eine stetige Funktion $f : D \subset \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ nimmt auf jeder (nicht leeren) kompakten Menge $K \subset D$ ihr Minimum und Maximum an.

Beweis Nach Satz 2.2 besitzt f eine obere Schranke auf K

$$\mathcal{K} := \sup_{x\in K} f(x)$$

Dazu $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq K$, sodass $f(x_k) \xrightarrow{k\to\infty} \mathcal{K}$. Da K kompakt existiert eine konvergente Teilfolge $\big(x_{k_j}\big)_{j\in\mathbb{N}}$ und ein x_{max}, sodass $x_{k_j} \xrightarrow{j\to\infty} x_{max}$. Da f stetig, gilt $f\big(x_{k_j}\big) \to f(x_{max})$. □

Bemerkung Auf diese Weise lassen sich die Ergebnisse der Stetigkeit aus dem Eindimensionalen ins Mehrdimensionale verallgemeinern.

Im folgenden Teil sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Definition 2.4 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt in einem Punkt $x \in D$ partiell differenzierbar bezüglich der i-ten Koordinatenrichtung, falls der Limes

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_i) - f(x)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) =: \partial_i f(x)$$

existiert. Existieren in allen Punkten $x \in D$ **alle** partiellen Ableitungen, so heißt f partiell differenzierbar. Sind alle partiellen Ableitungen stetig auf D, so heißt f stetig partiell differenzierbar. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt (stetig) partiell differenzierbar, wenn $f_i, i = 1, \ldots, m$ (stetig) partiell differenzierbar.

Bemerkung Die Ableitungsregeln aus dem Eindimensionalen übertragen sich auf partielle Ableitungen.

Beispiel

1. Polynome sind stetig partiell differenzierbar. Sei $p : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto a_{01}x_2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 + a_{21}x_1^2x_2$. Dann ist

$$\frac{\partial p}{\partial x_1}(x_1, x_2) = a_{11}x_2 + 2a_{21}x_1x_2 \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = a_{01} + a_{11}x_1 + 2a_{02}x_2 + a_{21}x_1^2$$

2. $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ist stetig partiell differenzierbar, da

$$\frac{\partial\|\cdot\|}{x_i} = \frac{1}{2}\frac{2x_i}{\left(x_1^2 + \cdots + x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x_i}{\|x\|_2}$$

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1x_2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}$ für $x \neq 0, f(0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \frac{x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2} - 4\frac{x_1^2x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^3}, x \neq 0$$

Für $x = 0$ ist $f(0) = 0$

$$\Longrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(xe_i) - f(0)}{h} = 0$$

Sei $x_\varepsilon(\varepsilon, \varepsilon)$ und damit gilt $\|x_\varepsilon\|_2 \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$

$$f(x_\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{4\varepsilon^4} = \frac{1}{4\varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \infty$$

Satz 2.5 Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ habe in einer Kugelumgebung $K_r(x) \subset D$ eines Punktes $x \in D$ beschränkte partielle Ableitungen, das heißt

$$\sup_{y\in K_r(x)} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \leq M, i = 1, \ldots, n$$

dann ist f stetig in x.

Beweis Es genügt $n = 2$. Für $(y_1, y_2) \in K_r(x)$

$$f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2) - f(x_1, y_2) + f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2)$$

Nach dem 1-D Mittelwertsatz existieren $\xi, \eta \in K_r(x)$, sodass

$$\begin{aligned} |f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2)| &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi, y_2)(y_1 - x_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \eta)(y_2 - x_2) \\ &\leq M(|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|) \end{aligned}$$

□

Höhere partielle Ableitungen definieren sich durch sukzessives Ableiten, das heißt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$$

Beispiel

$$\frac{x_1}{x_2} := \frac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}$$

für $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$. f zweimal partiell differenzierbar, aber

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(0, 0) \neq \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(0, 0)$$

Satz 2.6 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei in einer Umgebung $K_r(x) \subset D$ eines Punktes $x \in D$ zweimal stetig partiell differenzierbar, dann gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(x), i, j = 1, \dots, n$$

Beweis $n = 2$. Sei $A := f(x_1 - h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2 + h_2) + f(x_1, x_2)$.

$$\varphi(x_1) := f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) \implies A = \varphi(x_1 + h_1) - \varphi x_1$$

Mit dem Mittelwertsatz erhalten wir $A = h_1 \varphi'(x_1 + \theta_1 h_1), \theta_1 \in (0, 1)$.

$$\varphi'(x_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2 + h_2) - \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 x_1} f\big(x_1, x_2 + \theta_1' h_2\big), \theta_1' \in (0, 2)$$

Analog verfahre man mit x_2 und erhalte für $\psi(x_2) := f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2)$

$$A = \psi(x_2 - h_2) - \psi(x_2) = h_2 \psi'(x_2 + \theta_2 h_2) = h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f\big(x_1 + \theta_2 h_1, x_2 \theta_2' h_2\big)$$

$$\begin{aligned} &\implies \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f\big(x_1 + \theta_1 h_1, x_2 + \theta_1' h_2\big) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f\big(x_1 + \theta_2 h_1, x_2 + \theta_2' h_2\big) \\ &\xRightarrow{h_1, h_2 \to 0} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1, x_2) \end{aligned}$$

□

Definition 2.7 $f : D \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar.

$$\operatorname{grad} f(x) := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f\right)^T \in \mathbb{R}^n$$

heißt **Gradient** von f in $x \in D$. Man schreibt $\nabla f(x) := \operatorname{grad} f$. $f : D \to \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar.

$$\operatorname{div} f(x) := \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} f_n(x)$$

Es gilt:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f_i =: \Delta f(x)$$

Definition 2.8 $f : D \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar. Die Matrix der ersten partiellen Ableitungen

$$J_f := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,w \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{n \times w}$$

heißt die **Jacobi-Matrix** (manchmal auch **Fundametalmatrix**) von f in x. Im Fall $n = m$ bezeichnet man $\det(J_f)$ als **Jacobideterminante**.

Definition 2.9 $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar. Die Matrix der zweiten Ableitungen

$$H_f(x) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f\right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,w}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

heißt **Hesse-Matrix**.

Definition 2.10 Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$, dann nennen wir f in einem Punkt $x \in D$ (total differenzierbar), wenn die Funktion f in x sich linear approximieren lässt, das heißt es gibt eine lineare Abbildung $Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (Differential) sodass in einer kleinen Umgebung von x gilt:

$$f(x + h) = f(x) + Df(x)h + w(h), h \in \mathbb{R}^n, x + h \in D$$

mit einer Funktion $w : D \to \mathbb{R}^m$, die die Eigenschaft hat

$$\lim_{\substack{x+h \in D \\ \|h\|_2 \to 0}} \frac{\|wh\|_2}{\|h\|_2} = 0$$

alternativ: $w(h) = \wr(\|h\|_2)$

Satz 2.11 Für Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^m$ gilt:

1. Ist f in $x \in D$ differenzierbar, so ist f auch in x partiell differenzierbar und das Differential von f ist gegeben durch die Jacobi-Matrix.

2. Ist f partiell differenzierbar in einer Umgebung von x und sind zusätzlich die partiellen Ableitungen stetig in x, so ist f in x differenzierbar.

Beweis 1. Für differenzierbares f gilt für $i = 1, 2$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_i) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(Df(x)e_i + \frac{w(h)}{h}\right) = Df(x)e_i$$

2. Für ein stetig partiell differenzierbares f gilt mit $h = (h_1, h_2)$:

$$f(x+h) - f(x) = f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1+h_1, x_2) + f(x_1+h_1, x_2) - f(x_1, x_2)$$

Mittelwertsatz

$$\begin{aligned}
&= h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1+h_1, x_2+\theta_2 h_2) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\theta_1 h_1, x_2) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \theta_1, \theta_2 \in (0,1) \\
&= h_2\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) + \omega_2(h_1, h_2)\right) + h_1\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \omega_1(h_1, h_2)\right)
\end{aligned}$$

$$\omega_1(h_1, h_2) := \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\theta_1 h_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \xrightarrow{h_1, h_2 \to 0} 0$$

$$\omega_2(h_1, h_2) := \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1+h_1, x_2+\theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \xrightarrow{h_1, h_2 \to 0} 0$$

Also ist f differenzierbar mit Ableitungen $Df(x) = \nabla f(x)$. □

Bemerkung Es gelten folgende Implikationen: stetig partiell differenzierbar $\Longrightarrow$ (total) differenzierbar $\Longrightarrow$ partiell differenzierbar.

Satz 2.12 Seien $D_f \subset \mathbb{R}^n, Dg \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $g : D_g \to \mathbb{R}^n, f : D_f \to \mathbb{R}^r$. Ist g im Punkt $x \in D_g$ differenzierbar und f in $y = g(x) \in D_f$ differenzierbar, so ist die Komposition $h = f \circ g$ im Punkt x differenzierbar. Es gilt $D_x h(x) = D_y f(g(x)) \cdot D_x g(x)$. Hierbei ist $\cdot$ die Matrixmultiplikation.

Beweis Nach Voraussetzung $x \in D_g$ sodass $g(x) = y \in D_f$. Da sowohl f als auch g differenzierbar

$$
\begin{aligned}
g(x+h_1) &= g(x) + D_x g(x) h_1 + \omega_g(h_1) \\
f(y+h_2) &= f(y) + D_y f(y) h_2 + \omega_f(h_2) \\
\lim_{\substack{x+h_1 \in D_y \\ \|h_1\| \to 0}} \frac{\|\omega_g(h_1)\|}{\|h_1\|} &= 0 \\
\lim_{\substack{y+h_2 \in D_y \\ \|h_2\| \to 0}} \frac{\|\omega_f(h_2)\|}{\|h_2\|} &= 0 \\
(f \circ g)(x+h_1) &= f(g(x+h_1)) = f(y+\eta), \quad \eta := D_x g(x) h_1 + \omega_g(h_1) \\
&= f(y) + D_y f(y) \eta + \omega_f(\eta) \\
&= f(y) + D_y f(y) D_x g(x) h_1 + D_y f(y) \omega_g(h_1) + \omega_f(D_x g(x) h_1 + \omega_g(h_1)) \\
&= (f \circ g)(x) + D_y f(y) D_x g(x) h_1 + \omega_{f \circ g}(h_1) \\
\omega_{f \circ g}(h_1) &:= D_y f(y) \omega_g(h_1) + \omega_f(D_x g(x) h_1 + \omega_g(h_1))
\end{aligned}
$$

Es bleibt zu zeigen $\omega_{f \circ g} = \wr(h_1)$. Nach Voraussetzung gilt $\omega_{f \circ g} \xrightarrow{h_1 \to 0} 0$

□

Lemma 2.13 Sei $A : [a,b] \to \mathbb{R}^{n \times m}$ stetig, dann gilt

$$
\left\| \int 0^1 A(s) \mathrm{d}s \right\|_M \leq \int_0^1 \|A(s)_M \mathrm{d}s\|, \|A\|_M := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}
$$

$\int A = \left(\int a_{ij}\right)_{ij}, \sigma(A) :=$ Menge der Eigenwerte von A

Satz 2.14 Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar mit J_f als Jacobi-Matrix, so gilt

$$
f(x+h) - f(x) = \left(\int_0^1 J_f(x+sh) \mathrm{d}s \right) h
$$

Beweis Definiere $g_j(s) := f_j(x+sh)$, dann ist $g_{j_1} : [0,1] \to \mathbb{R}$, also gilt

$$
f_j(x+sh) - f_j(x) = g_j(1) - g_j(0) = \int_0^1 g_j'(s) \mathrm{d}s = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x+sh) h_i \mathrm{d}s
$$

□

Bemerkung Im Fall $m = 1$ kann man aus dem Mittelwertsatz für Integrale schließen, dass

$$
f(x+h) - f(x) = \int_0^1 J_f(x+sh) h \mathrm{d}s = J_f(x+\tau h) h
$$

$x_1 + h = x_2 \implies h = x_2 - x_1$

Korollar 2.15 Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Ferner sei $x \in D$ mit $K_r(x) \subset D, r > 0$, dann gilt

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leq M\|x - y\|_2, y \in K_r(x), M := \sup_{z \in K_r(x)} \|J_f(z)\|_M$$

das heißt die Abbildung ist in D lokal Lipschitz-stetig.

Beweis Nach Satz 2.14 gilt mit $h = y - x$

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\|_2 = \|f(x+h) - f(x)_2\| &= \left\| \int_0^1 J_f(x+sh)h\mathrm{d}s \right\|_2 \\ &\leq \int_0^1 \|J_f(x+sh)h\|_2 \mathrm{d}s \leq \int_0^1 \|J_f(x+sh)\|_m \|h\|_2 \mathrm{d}s \\ &\leq \underbrace{\sup_{0<s<1} \|J_f(x+sh)\|_2}_{M} \underbrace{\|h\|_2}_{\|y-x\|_2} \end{aligned}$$

□

Bemerkung Korollar 2.16 gilt mit beliebigen von Vektor-Matrix-norm induzierter Norm, siehe Übung 2.1.

Taylor-Entwicklung und Extremwerte in $\mathbb{R}^n$

Definition 2.16 (Multiindex Notation) Ein n-dimensionaler **Multiindex** ist ein Tupel $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mit $\alpha_i \in \mathbb{N}$. Für Multiindizes sind die **Ordnung** $|\alpha|$ und die Fakultät $\alpha!$ definiert durch

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \\ \alpha! &:= \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n! \end{aligned}$$

Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ wird gesetzt

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

Für eine $|\alpha|$ -mal stetig differenzierbare Funktion wird gesetzt

$$\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

Bemerkung Wegen der Stetigkeit der Ableitung ist dieser Ausdruck unabhängig von der Reihenfolge der partiellen Ableitungen. Wir definieren

$$\sum_{|\alpha|=0}^{r} a_\alpha := \sum_{k=0}^{r} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|=k}} a_\alpha$$

Beispiel 2.17 Für $n = 3$ sind die Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ der Ordnung $|\alpha| = 2$ gegeben durch

$$(2,0,0), (0,2,0), (0,0,2), (1,1,0), (1,0,1), (0,0,1)$$

Die zugehörigen partiellen Ableitungen sind

$$\begin{aligned} \partial^\alpha f &= \left(\partial_{x_1}^2 f, \partial_{x_2}^2 f, \partial_{x_3}^2 f, \partial_{x_1}\partial_{x_2} f, \partial_{x_2}\partial_{x_3} f, \partial_{x_2}\partial_{x_3} f\right) \\ \alpha! &= (2,2,2,1,1,1) \end{aligned}$$

Schließlich ist

$$\sum_{|\alpha|=2} \partial^\alpha f = \partial_{x_1}^2 f + \partial_{x_2}^2 f + \partial_{x_3}^2 f + \partial_{x_1}\partial_{x_2} f + \partial_{x_2}\partial_{x_3} f + \partial_{x_2}\partial_{x_3} f$$

Satz 2.18 (Taylor-Formel) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine $(r+1)$ -mal stetig differenziebare Funktion. Dann gilt für jeden Vektor $h \in \mathbb{R}^n$ mit $x + sh \in D, s \in [0,1]$ die Taylor-Formel

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha|<r} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + R_{r+1}^f(x,h)$$

in differentieller Form

$$R_{r+1}^f(x,h) = \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{\partial^\alpha f(x+\theta h)}{\alpha!} h^\alpha, \theta \in (0,1)$$

oder in integraler Form

$$R_{r+1}^f(x,h) = (r+1) \int_0^1 \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{\partial^\alpha f(x+th)}{\alpha!} h^\alpha (1-t)^r \mathrm{d}t$$

Beweis Wir nehmen $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $g(t) := f(x+th)$. g ist $(r+1)$ mal stetig differenzierbar mit der k-ten Ableitung

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f(x+th) h_{i_1} \dots h_{i_k}$$

Wir zeigen des durch Induktion nach k (mit Hilfe von Kettenregel). Für $k = 1$ gilt

$$g'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f h_i$$

Sei die Behauptung als richtig angenommen für $k-1 \geq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
g^{(k)}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g^{(k-1)}(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i_1,\dots,i_{k-1}=1}^{n} \partial_{i_{k-1}} \dots \partial_{i_1} f(x+th) h_1 \dots h_{i_{k-1}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \partial_i \left(\sum_{i_1 \dots i_{k-1}=1}^{n} \partial_{i_{k-1}} \dots \partial_{i_1} f(x+th) h_{i_1} \dots h_{i_{k-1}} \right) h_1 \\
&= \sum_{i_1 \dots i_k=1}^{n} \partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f(x+th) h_{i_1} \dots h_{i_k}
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f(x+th) h_{i_1} \dots h_{i_k} = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f(x+th) h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}$$

(der Index $i \in \{1,\dots,n\}$ kommt genau α_i mal vor und wegen Vertauschbarkeit der Ableitungen). Die Anzahl der k -Tupel $(i_1,\dots,i_k)$ von Zahlen $i_j \in \{1,\dots,n\}$, bei denen die Zahl $i \in \{1,\dots,n\}$ genau α_i -mal vorkommt mit $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$ ist

$$\frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!}$$

(Lemma unten) Wir bekommen

$$\begin{aligned}
g^{(k)}(t) &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f(x+th) h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n} \\
&= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \partial^{\alpha} f(x+th) h^{\alpha}
\end{aligned}$$

Wir wenden die 1-dimensionale Taylor-Formel auf $g(t)$ an. $\exists \theta \in [0,1]$ sodass

$$g(1) = \sum_{k=0}^{r} \frac{g^k(0)}{k!} + \frac{g^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}}{k!} + \frac{1}{r!}\int_0^1 g^{(r+1)}(t)(1-t)^r \mathrm{d}t$$

Man erhält

$$\begin{aligned}
\frac{g^{(k)}(0)}{k!} &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{\partial^{\alpha} f(x)}{\alpha!} h^{\alpha} \\
\frac{g^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!} &= \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{\partial^{\alpha} f(x+\theta h)}{\alpha!} h^{\alpha} \\
\frac{1}{r!}\int_0^1 g^{(r+1)}(t)(1-t)^r \mathrm{d}t &= (r+1)\int_0^1 \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{\partial^{\alpha} f(x+th)}{\alpha!} h^{\alpha}(1-t)^r \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Dies impliziert die Taylor-Formel mit den Restgliedern in differentieller oder integraler Form. □

Lemma 2.19 (2.20) Sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $|\alpha| = k \geq 1$. Dann ist die Anzahl $N_\alpha(k)$ der k-Tupel von Zahlen $i_j = \{1, \dots, n\}$, bei denen die Zahl $i \in \{1, \dots, n\}$ genau α_i -mal vorkommt, bestimmt durch

$$N_\alpha(k) = \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!}$$

Beweis Wir ordnen die Indizes in dem k-Tupel

$$(i_1, \dots, i_k) = \Bigg(\underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{\alpha_2}, \dots, \underbrace{n, \dots, n}_{\alpha_n \text{ mal}} \Bigg)$$

$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$. Die Anzahl der möglichen Permutationen der k Elemente des k-Tupel ist $k!$. Das k-Tupel bleibt unverändert bei Permutationen von gleichen Elementen i. Insgesamt bekommen wir

$$N_\alpha(k) = \frac{k!}{\alpha!}$$

□

Korollar 2.20 (2.21) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : D \to \mathbb{R}$ eine $r + 1$ mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für $x \in D$ und $h \in \mathbb{R}^n$ mit $x + sh \in D$, $s \in [0, 1]$:

$$f(x + h) = \sum_{|\alpha| \leq r+1} \frac{\partial^a f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \omega_{r+1}(x, h)$$

wobei $\omega_{r+1}(x, 0) = 0$ und $\omega_{r+1}(x, h) = \wr\left(\|h\|_2^{r+1} \right)$.
Im Fall $r = 0$ gilt

$$f(x + h) = f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \omega_1(x, h)$$

Im Fall $r = 1$ gilt:

$$f(x + h) = f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \frac{1}{2}(H_f(x)h, h)_2 + \omega_2(x, h)$$

Beweis

$$\begin{aligned} f(x + h) &= \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha| = r+1} \frac{\partial^\alpha f(x + \theta h)}{\alpha!} h^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha| \leq r+1} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha| = r+1} r_\alpha(x, h) h^\alpha \end{aligned}$$

wobei

$$r_\alpha(x, h) := \frac{\partial^\alpha f(x + \theta h) - \partial^\alpha f(x)}{\alpha!}$$

$\lim_{h \to 0} r_\alpha(x, h) = 0$, wegen der Stetigkeit von $\partial^\alpha f$ für $|\alpha| = r + 1$. Wir setzen $\omega_{r+1}(x, h) := \sum_{|\alpha| = r+1} r_\alpha(x, h) h^\alpha$. Es gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{\omega(h)}{\|h\|_2^{r+1}} = 0$$

weil

$$\frac{|h^\alpha|}{\|h\|_2^\alpha} = \frac{|h_1^{\alpha_1}| \cdot \ldots \cdot h_n^{\alpha_n}}{\|h\|_2^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \|h\|_2^{\alpha_n}} \leq 1 \qquad |\alpha| = r+1$$

Für $r = 0$ gilt

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= \sum_{|\alpha|\leq 1} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \omega_1(x,h) \\
&= f(x) + \sum_{|\alpha|=1} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \omega_1(x,h) \\
&= f(x) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(x) h_i + \omega_1(x,h) \\
&= f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \omega_1(x,h)
\end{aligned}$$

Für $r = 1$

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= \sum_{|\alpha|\leq 2} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \omega_2(x,h) \\
&= f(x)(\nabla f(x), h)_2 + \sum_{|\alpha|=2} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \omega_2(x,h) \\
&= f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f(x) h_i h_j + \omega_2(x,h) \\
&= f_1(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \frac{1}{2} (H_f(x)h, h)_2 + \omega_2(x,h) \qquad \square
\end{aligned}$$

Definition 2.21 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $x \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar.

$$F_\infty^f(x+h) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha$$

heißt die Taylor-Reihe von f in x

Korollar 2.22 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : D \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Dann konvergiert die Taylor-Reihe von f und stellt f dar, wenn

$$R_{r+1}^f(x,h) \xrightarrow{r\to\infty} 0 \quad x \in D$$

Hinreichend dafür ist, dass die partielle Ableitung gleichmäßig beschränkt sind:

$$\sup_{|\alpha|\geq 0} \sup_{x\in D} |\partial^\alpha f(x)| < \infty$$

Beweis

$$\left\|R_{r+1}^f(x,h)\right\|_\infty \leq \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{|\partial^\alpha f(x+\theta h)|}{\alpha!}\|h\|_\infty^{|\alpha|} \leq M(f) \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!}\|h\|_\infty^{|\alpha|} \to 0$$

□

Definition 2.23 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hat in einem Punkt $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ ein lokales Extremum, wenn auf einer $K_\sigma(x) \subset \mathbb{R}^n$ (Kugelumgebung) gilt

$$f(x) = \sup_{y\in K_\sigma(x)\cap D} f(y) \quad \text{oder} \quad f(x) = \inf_{y\in K_\sigma(x)\cap D} f(x)$$

Das Extremum heißt strikt, wenn es in $K_\sigma(x) \cap D$ nur in dem Punkt angenommen wird. Das Extremum heißt global, wenn $f(x) = \sup_{y\in D} f(y)$ (oder $\inf_{y\in D}$)

Satz 2.24 (Notwendige Extremalbedingung) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, D offen. Hat f in einem Punkt $\hat{x} \in D$ ein lokales Extremum, so gilt $\nabla f(\vec{x}) = 0$

Beweis Angenommen $f : D \to \mathbb{R}$ hat in $x \in D$ ein lokales Extremum. Wir nehmen $g_i(t) := f\big(\vec{x} + te^{(1)}\big), i = 1, \dots, n, e^{(i)}$ Einheitsvektor in $\mathbb{R}^n$. g_i ist auf einem nichtleeren $(-\delta_i, \delta_i) \subset \mathbb{R}$ definiert und hat lokales Extremum in $t = 0 \implies g_i'(0) = 0$

$$0 = g_i'(0) = \sum_{j=1}^n \partial_j f(\vec{x})\delta_{ij} = \partial_i f(\vec{x}) \quad i = 1, \dots, n \implies \nabla f(\vec{x}) = 0$$

□

Satz 2.25 (Hinreichende Extremalbedingung) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $\nabla f(\vec{x}) = 0$ in einem $\vec{x} \in D$. Ist die Hesse Matrix $H_f(x)$ in $\vec{x}$ **positiv definit** (das heißt alle Eigenwerte positiv), so liegt in $\vec{x}$ ein striktes lokales Minimum. Ist sie negativ definit (das heißt alle Eigenwerte negativ), so liegt in $\vec{x}$ ein striktes lokals Maximum. Ist sie indefinit (hat sowohl positive als auch negative Eigenwerte), so kann in $\vec{x}$ kein lokales Extremum liegen.

Beweis Nach Korollar 2.21 gilt

$$f(x+h) = f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \frac{1}{2}(H_f(x)h, h)_2 + \omega_2(x,h)$$

wobei

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\omega_2(x,h)}{\|h\|_2^2} = 0$$

$$\nabla f(\vec{x}) = 0 \implies f(\vec{x}+h) - f(\vec{x}) = \frac{1}{2}(H_f(\vec{x})h, h)_2 + \omega_2(\vec{x}, h)$$

Ist $H_f(\vec{x})$ positiv definit, so gilt

$$(H_f(\vec{x})h, h)_2 \geq \lambda\|h\|_2^2, h \in \mathbb{R}^n$$

wobei λ der kleinste Eigenwert ist.

$$\implies f(\vec{x}+h) - f(\vec{x}) \geq \frac{1}{2}\lambda\|h\|_2^2 + \omega(\vec{x}, h)$$

Für kleines $\|h\|_2 < \sigma, h \neq 0$ ist

$$|\omega_2(\vec{x}, h)| < \frac{1}{2}\lambda\|h\|_2^2$$

und somit

$$f(\vec{x}+h) - f(\vec{x}) > \frac{1}{2}\lambda\|h\|_2^2 - \frac{1}{2}\lambda\|h\|_2^2 = 0$$

$\implies$ $\vec{x}$ ist ein lokales Maximum. Ist $H_f(\vec{x})$ negativ definit $\implies$ $\vec{x}$ ist ein lokales Maximum (analog).
Ist $H_f(\vec{x})$ indefinit $\implies \exists\lambda_+ > 0$ (mit Eigenvektor z_+) und $\exists\lambda_- < 0$ (mit EV z_-)

$$(H_f(\vec{x})z_+, z_+)_2 = \lambda_+\|z_+\|_2^2 > 0$$
$$(H_f(\vec{x})z_-, z_-)_2 = \lambda_-\|z_-\|_2^2 < 0$$

Für genübend kleines $t > 0$ gilt dann

$$f(\vec{x}+tz_+) - f(\vec{x}) > 0 \qquad f(\vec{x}+tz_-) - f(\vec{x}) < 0$$

$\implies$ kein Extremum in $\vec{x}$ □

Beispiel 2.26 1. $f_1(x) = a + x_1^2 + x_2^2$

$$\nabla f_2(x) = (2x_1, 2x_2) = 0 \iff \vec{x}_1 = 0 \wedge \vec{x}_2 = 0$$

$$H_{f_1}(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit $\implies$ $\vec{x} = 0$ ist Minimum.

2. $f_2(x) = a - x_1^2 - x_2^2$

$$\nabla f_2(x) = (-2x_1, -2x_2) \implies \vec{x} = 0, H_{f_2}(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

negativ definit $\implies$ $\vec{x} = 0$ ist Maximum.

Bemerkung Ist die Hesse Matrix in einer Nullstelle das Gradienten semidefinit (des heißt $\exists\lambda_i = 0$), so lassen sich keine allgemeinen Aussagen über lokale Extrema machen.

2.1 Satz über implizite Funktionen und der Umkehrsatz

Problemstellung: $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Betrachte $F(x,y) = 0$

$$\implies y(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$$

Satz 2.27 (Satz über implizite Funktionen) Sei $U_1 \subseteq \mathbb{R}^n, U_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Menge und $F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m, (x,y) \mapsto F(x,y)$ sei eine stetig differenzierbare Funktion. Sei $(a,b) \in U_1 \times U_2$ mit $F(a,b) = 0$. Die $(m \times n)$ Matrix

$$\frac{\partial F}{\partial y} := \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_j}\right)_{i,j=1,\ldots,m}$$

in (a,b) invertierbar. Dann gibt es offene Mengen $V_1 \subseteq U_1, V_2 \subseteq U_2$, V_1 Umgebung von a, V_2 Umgebung von b sowie eine eindeutige stetig differenzierbare Funktion $\varphi : V_1 \to V_2$ mit $\varphi(a) = b$ und $F(x,\varphi(x)) = 0 \forall x \in V_1$. (Eindeutigkeit: Ist $(x,y) \in V_1 \times V_2$ mit $F(x,y) = 0 \implies y = \varphi(x)$.)

Beweis Ohne beschränkung der Allgemeinheit $(a,b) = (0,0)$. Wir setzen

$$B := \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$$

und betrachten $G : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ durch $G(x,y) := y - B^{-1}F(x,y)$ definiert. G ist stetig differenzierbar, weil F es ist. Dann gilt

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \mathbb{1} - B^{-1}\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$$

mit

$$\frac{\partial G}{\partial y}(0,0) = \mathbb{1} - B^{-1}B = 0$$

Es gilt: $F(x,y) = 0 \iff G(x,y)y$.
Aufgrund der Stetigkeit von $\frac{\partial G}{\partial y}$ gibt es $W_1 \subseteq U_1, W_2 \subseteq U_2$ (jeweils um 0), sodass

$$\left\|\frac{\partial G}{\partial y}\right\|_2 \leq \frac{1}{2} \forall (x,y) \in W_1 \times W_2$$

Wähle $r > 0$, sodass $V_2 := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\|_2 \leq r\} \subseteq W_2$ und da $G(0,0) = 0$ gibt es offene Umgebung $V_1 \subset W_1$, sodass

$$\sup_{x \in V_1} \|G(x,0)\|_2 =: \varepsilon \leq \frac{r}{2}$$

Es gilt für alle $x \in V_1$ und $y, \eta \in V_2$:

$$\|G(x,y) - G(x,y)\| \leq \frac{1}{2}\|y - \eta\|$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \|G(x,y)\| &\leq \|G(x,y) - G(x,0)\| + \|G(x,0)\| \\ &\leq \frac{1}{2}\|y\| + \frac{r}{2} \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \end{aligned}$$

Die Abbildung $y \mapsto G(x,y)$ bildet V_2 in sich selbst ab und ist eine Kontraktion. Also existiert ein eindeutiger Fixpunkt y nach Banachschem Fixpunktsatz sodass $G(x,y) = y$ beziehungsweise $y = \varphi(x), F(x,\varphi(x)) = 0$. Wir setzen

$$A := \{\varphi \in C_b(V_1, \mathbb{R}^m) \mid \|\varphi\|_\infty \leq r\} = \{\varphi \in C_b(V_1, \mathbb{R}^m) \mid \varphi(V_1) \subset V_2\}$$

Definiere $\Phi : A \to A, \varphi \mapsto G(x, \varphi(x))$.

$$\begin{aligned} \|\Phi(\varphi_1) - \Phi(\varphi_2)\|_\infty &= \sup_{x \in V_1} \|G(x, \varphi_1(x)) - G(x, \varphi_2(x))\| \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in V_1} \|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\| \\ &= \frac{1}{2}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty \end{aligned}$$

$\implies$ es existiert ein eindeutiges $\varphi \in C_b(V_1, \mathbb{R}^m)$ mit $\Phi(\varphi) = \varphi \iff G(x, \varphi(x)) = \varphi(x)$. Nach eventueller Verkleinerung von V_1 könne wir annehmen, dass $\frac{\partial F}{\partial y}$ in jedem Punkt $(x, (\varphi(x))), x \in V_1$ invertierbar ist. Wir zeigen de Differenziebarkeit von φ nur in 0.

$$A := \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) \in M(m \times n, \mathbb{R}), \quad B := \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$$

Aus der Differenzierbarkeit von F in $(0,0)$ folgt: $F(x,y) = Ax + By + \omega(x,y)$. Nun gilt $F(x, \varphi(x)) = 0 \forall x \in V_1$, das heißt

$$\varphi(x) = -B^{-1}Ax - B^{-1}\omega(x, \varphi(x))$$

Es muss also gezeigt werden, dass $\omega(x, \varphi(x)) = o(\|(x, \varphi(x))\|)$. Zeige dazu, dass es eine Umgebung $V_1 \subset V_1$ von 0 gibt und eine Konstate $K > 0$, sodass

$$\|\varphi(x)\| \leq K\|x\| \forall x \in V_1' \quad p_1 := \left\|B^{-1}A\right\| \quad c_2 := \left\|B^{-1}\right\|$$

und wegen $\omega(x,y) = o(\|x,y\|)$ gibt es zu $\varepsilon := 1/(2c_2)$ eine Umgebung $V' \subset V_1 \times V_2$ von $0, 0$, sodass

$$\|\omega(x,y)\| = \varepsilon\|(x,y)\| \leq \frac{1}{2c_2}(\|x\| + \|y\|) \forall (x,y) \in V'$$

Wegen der Stetigkeit von φ gibt es eine Nullumgebung $V_1' \subset V_1$, sodass der Graph $\varphi |_{V_1'}$ ganz in V' enthalten ist. Dahit gilt

$$\|\omega(x, \varphi(x))\| \leq \frac{1}{2c_2}(\|x\| + \|\varphi(x)\|)$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \|\varphi(x)\| &\leq c_1\|x\| + c_2\|\omega(x, \varphi(x))\| \\ &leq\left(c_1 + \frac{1}{2}\right)\|x\| + \frac{1}{2}\|\varphi(x)\| \end{aligned}$$

$$\implies \|\varphi(x)\| \leq \underbrace{2\left(c_1 + \frac{1}{2}\right)}_{=:K}\|x\| \qquad \square$$

Beispiel 2.28 $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \implies D_yF = 2y$. Wir können demnach in einer Umgebung von $\left(\hat{x}^2, \hat{y}^2\right), \hat{x}^2 + \hat{y}^2 - 1 = 0$ mit $\hat{y} \neq 0$ eindeutig nach y auflösen und erhalten

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Definition 2.29 (2.27) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ heißt **regulär** in einem Punkt $\hat{x} \in D$, wenn f in einer Umgebung $K_\delta(\hat{x}) \subset D$ von $\hat{x}$ stetig differenzierbar und die Jacobi-Matrix J_f regulär ist. (invertierbar). f heißt regulär in D, wenn f in jedem Punkt regulär ist.

Satz 2.30 (Satz von der Umkehrabbildung) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ regulär in einem Punkt $\hat{x} \in D$. Dann gibt es eine offene Umgebung $V(\hat{x}) \subset D$, die von f bijektiv auf eine offene Umgebung $U(\hat{y}) \subset \mathbb{R}^n$ ($\hat{y} = f(\hat{x})$) abgebildet wird. Die Umkehrabbildung ist ebenfalls regulär in $\hat{y}$. $f^{-1} : U(\hat{y}) \to V(\hat{x})$. Für die Funktionalmatrix und -determinante gilt:

$$J_{f^{-1}}(\hat{y}) = (J_f(\hat{x}))^{-1}, \quad \det J_{f^{-1}}(\hat{y}) = \frac{1}{\det J_f(\hat{x})}$$

Beweis Sei $\hat{x} \in D$ und definiere $\hat{y} := f(\hat{x})$. Betrachte $F : \mathbb{R}^n \times D \to \mathbb{R}^n$, $F(x,y) = y - f(x)$ und offenbar gilt $F(\hat{y}, \hat{x}) = 0$ und $D_xF(y,x) = -J_f(x)$ und damit regulär in $\hat{x}$. Nach dem Satz über implizite Funktionen existieren Umgebungen $U(\hat{y})$ und $U(\hat{x})$, sowie eine eindeutige, stetige differenzierbare Funktion $\varphi : U(\hat{y}) \to U(\hat{x})$ sodass $0 = F(y, \varphi(y)) = y - f(\varphi(y)), y \in U(\hat{y})$. Das bedeutet zu jedem $y \in U(\hat{y})$ kann man genau ein $x = \varphi(y) \in U(\hat{x})$ finden mit $y = f(x)$. Wir setzen

$$V(\hat{x}) := U(\hat{x}) \cap f^{-1}(U(\hat{y})) = \{x \in U(\hat{x}) \mid f(x) \in U(\hat{y})\}$$

$V(\hat{x})$ offen. Fermer wird $V(\hat{x})$ bijktiv von f abgebildet mit zugehörgen Umkehrabbildung $f^{-1} = \varphi$. Wegen $J_{f \circ f^{-1}} = J_{\text{id}} = I$ und der Ketteregel gilt

$$J_f(x) \cdot J_{f^{-1}}(f(x)) = I \implies J_{f^{-1}}(f(x)) = (J_f(x))^{-1} \qquad \square$$

Beispiel 2.31 Transformation der Polarkoordinaten auf kartesische Koordinaten. Polarkoodinaten: $(r, \theta) \to$ kartesische Koordinaten (x_1, x_2).

$$(x_1, x_2) = f(r, \theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta) \qquad f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$J_f(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \quad \det J_f(r,\theta) = r > 0$$

f ist also auf $D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ regulär. Nach dem Satz über Umkherabbildung ist f also überall in D lokal umkehrbar

$$J_{f^{-1}}(x_1, x_2) = J_f(r,\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r^{-1}\sin\theta & r^{-1}\cos\theta \end{pmatrix}$$

Umrechnung in die Variablen $(x_1, x_2) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ liefert

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \cos\theta = \frac{x_1}{r}, \sin\theta = \frac{x_2}{r}$$

$$J_{f^{-1}}(x_1,x_2) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \begin{pmatrix} x_1\sqrt{x_1^2+x_2^2} & x_1\sqrt{x_1^2+x_2^2} \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

Wir haben bekommen die Jacobi-Matrix von f^{-1} ohne f^{-1} explizit zu berechnen. Wir berechnen jetzt die f^{-1} $f : U \to V$ wit $U := \mathbb{R}_+ \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), V := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ ist bijktiv

$$f^{-1}(x_1,x_2)\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2}, \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right)$$

2.2 Extremalaufgaben mit Nebenbedingungen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ differenziebare Funktionen auf einer offenen Meng $D \subset \mathbb{R}^n$. Wir suchen $\hat{x} \in D$, sodass

$$f(\hat{x}) = \inf\{f(x) \mid x \in U(\hat{x}), g(\hat{x}) = 0\}$$

für eine Umgebung $U(\hat{x})$ von $\hat{x}$, oder

$$f(\hat{x}) = \sup\{f(x) \mid x \in U(\hat{x}), g(\hat{x}) = 0\}$$

Satz 2.32 (Lagrange Multiplikatoren) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Ferner sei $\hat{x} \in D$ ein Punkt, in dem f ein lokales Extremum unter der Nebenbegingung $g(\hat{x}) = 0$ hat. Das heißt

$$f(\hat{x}) = \inf_{x \in U \cap Ng} f(x) \qquad \sup_{x \in U \cap Ng} f(x)$$

wobei $Ng := \{x \in D \mid g(x) = 0\}$. Ist dass $\nabla g(\hat{x}) \neq 0$, so gilt es ein $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$

$$\nabla f(\hat{x}) = \hat{\lambda} \nabla g(\hat{x})$$

Der Parameter $\hat{\lambda}$ ist der sogenannte **Lagrange-Multiplikator**.

Beweis Wegen $\nabla g(\hat{x}) \neq 0$ können wir (nach evetueller Umnummerierung der Koordinaten) annehmen, dass $\partial_n g(\hat{x}) \neq 0$

$$\hat{x} := (\hat{x}', \hat{x}_n) \in \mathbb{R}^n, \hat{x}' \in \mathbb{R}^{n-1}$$

Nach dem Impliziten Funktionen Satz existieren für die Gleichung $F(x', x_n) := g(x) = 0$ die Umgebungen $U(\hat{x}') \subset \mathbb{R}^{n-1}$ und $U(\hat{x}_n) \subset \mathbb{R}$ mit $U(\hat{x}') \times U(\hat{x}_n) \subset D$ und eine eindeutige Funktion $\varphi : U(\hat{x}') \to U(\hat{x}_n)$ stetig differenzierbar und sodass

$$F(x', \varphi(x')) = 0 \quad x' \in U(\hat{x})$$

$$Ng \cap (U(\hat{x}_n) \times U(\hat{x})) = \{x \in U(\hat{x}_n) \times U(\hat{x}') : x_n = \varphi(x')\}$$

Mit Hilfe der Kettenregel bekommen wir

$$\partial_i g(\hat{x}) + \partial_n g(\hat{x}) \partial_i \varphi(\hat{x}') = 0 \quad i = 1, \ldots, n-1$$

Da f auf Ng im Punkt $\hat{x}$ ein lokales Extremum hat, hat die Funktion $f(x', \varphi(x'))$ auf $U(\hat{x}')$ ein lokales Extremum.

$$\begin{aligned}
&\implies 0 = \partial_i f(\hat{x}) + \partial_n f(\hat{x}) \partial_i \varphi(\hat{x}) \quad i = 1, \dots, n-1 \\
&\implies \partial_n f(\hat{x}) = \hat{\lambda} \partial_n g(\hat{x}) \qquad \hat{\lambda}_n := \frac{\partial_n f(\hat{x})}{\partial_n g(\hat{x})} \\
&\implies \partial_i f(\hat{x}) = \hat{\lambda} \partial_i g(\hat{x}) \quad i = 1, \dots, n \\
&\implies \nabla f(\hat{x}) = \hat{\lambda} \nabla g(\hat{x})
\end{aligned}$$

□

Bemerkung Jedes lokale Minimum $\vec{x}$ der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(\hat{x}) = 0$ korrespondiert zu einem sogenanntem „stationären Punkt der Lagrange Funktion“

$$\mathcal{L}(x, \lambda) := f(x) - \lambda g(x) \quad (x, \lambda) \in D \times \mathbb{R}$$

$$\nabla_{x,\lambda} \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} \nabla_x f(\hat{x}) - \hat{\lambda} \nabla_x g(\hat{x}) \\ g(\hat{x}) \end{pmatrix} = 0$$

Beispiel 2.33 $f(x) := (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^2, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wir suchen das Maximum von f auf der Sphäre $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ das heißt

$$g(x) := \|x\|_2 - 1 = \sum_{i=1}^{n} x_1^2 - 1$$

Nebenbedingung: $g(x) = 0$. $s \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\implies$ f nimmt auf S_1 sein Maximum und Minimum an.

$$|_{x \in S_1} \; f(x) = 0 \qquad \max_{x \in S_1} f(x) > 0$$

Ferner $\nabla g(x) = 2x \neq 0$ auf S_1. Nach dem Satz 2.30 sind die Extremalpunkte die Lösungen $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ vom Gleichungssystem

$$\partial_i f(x) = \lambda \partial_i g(x) \quad i = 1, \dots, n$$

$$\implies 2(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^2 = 2\lambda x_i$$

$$\implies (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^2 = \lambda x_i^2 \quad i = 1, \dots, n$$

Weil $x_i \neq 0$ im Maximum $\implies$ $\lambda \neq 0$

$$\implies \sum_{i=1}^{n} (x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^2 = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \lambda$$

$$\implies n(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)^2 = \lambda$$

$$\implies x_i^2 = \frac{1}{n} \quad i = 1, \dots, n$$