

Analysis II (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

5. Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Metrische und normierte Räume	1
1.1	Metrische Räume	1
1.2	Normierte Räume	3
1.3	Hilberträume	4
2	Stetigkeit und Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^n	7

1 Metrische und normierte Räume

1.1 Metrische Räume

Definition 1.1 Sei M eine Menge, $d : M \times M \rightarrow [0, \infty)$ heißt **Metrik** auf M genau dann wenn $\forall x, y, z \in M$

- (D1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (Definitheit)
- (D2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
- (D3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

Beispiel 1.2 1. Charakterische (diskrete) Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Sei $X = \mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C}) mit Metrik

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{n}{2}}$$

(euklidische Metrik)

3. Sei $X = \mathbb{R}^n$. Für $1 \leq \phi \leq \infty$. Sei

$$d_\phi(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^\phi \right)^{\frac{n}{\phi}}$$

Ist $\phi = \infty$, so definieren wir

$$d_\infty(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i - y_i|$$

4. $X = \mathbb{R}$ mit Metrik

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

5. Der Raum der Folgen $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (beziehungsweise $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) kann mit der Metrik

$$d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

Definition 1.3 Sei M eine Menge mit Metrik d . Wir definieren für $x \in M, \varepsilon > 0$, die offene ε -Kugel um x durch

$$K_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

und eine abgeschlossene Kugel durch

$$K_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

$A \subset M$ heißt **Umgebung** von $x \in M \iff \exists \varepsilon : K_\varepsilon(x) \subset A$

Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen

Definition 1.4 Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) ist konvergent gegen einem $x \in X$ genau dann wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 d(x_n, x) < \varepsilon$

Satz 1.5 1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist $A \subseteq X$ abgeschlossen genau dann wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in A mit $x_n \rightarrow x \implies x \in A$

2. Seien $(X, d_1), (Y, d_2)$ zwei metrische Räume. Dann ist die Funktion stetig in $x \in X$ genau dann wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_n \rightarrow x \implies f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Definition 1.6 ((Cauchy Folgen und Vollständigkeit)) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge falls $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ für $n, m \rightarrow \infty$. Der metrische Raum heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge konvergent ist.

1.2 Normierte Räume

Definition 1.7 Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist ein Paar bestehend aus einem \mathbb{K} -Vektorraum X und einer Abbildung $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ mit

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in X$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in X$

Bemerkung 1. Die Norm $\|\cdot\|$ induziert auf X eine Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$

2. Eine Metrik d auf einem Vektorraum definiert die Norm $\|d(x, 0)\|$ nur dann, wenn

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x, y, z \in X : d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y) \quad (\text{Homogenität})$$

$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \quad (\text{Translationsinvarianz})$$

Definition 1.8 (Banachraum) Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt vollständig, falls X als metrischer Raum mit der Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ vollständig ist. Ein solcher vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**

Beispiel 1.9 1. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, wobei

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{n}{2}}$$

2. Sei K eine kompakte Menge:

$$C_{\mathbb{K}} := \{f : K \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\}$$

$$\|\cdot\|_{\infty} = \max_{x \in K} |f(x)|$$

$(C_{\mathbb{K}(K)}, \|\cdot\|_{\infty})$ ist ein Banachraum.

Bemerkung 1. Jede Cauchy-Folge in \mathbb{K}^n konvergiert, das heißt $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ ist vollständig

2. Jede beschränkte Folge in \mathbb{K}^n besitzt eine konvergente Teilfolge. (Bolzano-Weierstraß Satz gilt in \mathbb{R}^n) (Beweis für \mathbb{R}^n zum Beispiel in RR Ana2 Satz 1.1)

Satz 1.10 (Äquivalenz von Normen) Auf dem endlich dimensionalen Vektorraum \mathbb{K}^n sind alle Normen **äquivalent** zur Maximumnorm, das heißt zu jeder Norm $\|\cdot\|$ gibt es positive Konstanten w, M mit denen gilt

$$m\|x\|_{\infty} \leq \|x\| \leq M\|x\|_{\infty}, x \in \mathbb{K}^n$$

Beweis Sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm $\forall x \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^n |x_k| \|e^{(k)}\| \leq M \|x\|_\infty$$

mit

$$M := \sum_{k=1}^n \|e^{(k)}\|$$

Wir setzen

$$S_1 := \{x \in \mathbb{K}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}, m := \inf\{\|x\|, x \in S_1\} \geq 0$$

Zu zeigen $m > 0$ (dann ergibt sich für $x \neq 0$ wegen $\|x\|_\infty^{-1}x \in S_1$ auch $m \leq \|x\|_\infty^{-1}\|x\| \implies 0 < m\|x\|_\infty \leq \|x\| \quad x \in \mathbb{K}^n$) Sei also angenommen, dass $m = 0$

Dann gibt eine Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \in S_1$ mit $\|x^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$. Da die Folge bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ beschränkt ist, gibt es nach dem B.-W. Satz eine Teilfolge auch von $(x^{(k)})$, die bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ gegen ein $x \in \mathbb{K}^n$ konvergiert.

$$|1 - \|x\|_\infty| = \left| \|x^{(k)}\|_\infty - \|x\|_\infty \right| \leq \|x^{(k)} - x\|_\infty \rightarrow 0 \implies \|x\|_\infty = 1 \implies x \in S_1$$

Andererseits gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} : \|x\| \leq \|x - x^{(k)}\| + \|x^{(k)}\| \leq M \|x - x^{(k)}\|_\infty + \|x^{(k)}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \implies x = 0$$

↳ zu $x \in S_1$

□

Definition 1.11 Eine Menge $M \subset K^n$ heißt kompakt (folgenkompakt), wenn jede beliebige Folge in M eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert ebenfalls in M enthalten ist.

Beispiel 1.12 Mit Hilfe von dem Satz von B.W. folgt, dass alle abgeschlossene Kugeln im \mathbb{R}^n ($K_r(a)$, $a \in K^n$) kompakt sind. Ferner ist für beschränkte Mengen M der Rand ∂M kompakt. Jede endliche Menge ist auch kompakt.

1.3 Hilberträume

Definition 1.13 Sei H \mathbb{K} Vektorraum. Ein **Skalarprodukt** auf eine Abbildung

$$(\cdot, \cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$$

mit

1. $\forall x, y, z \in H, \lambda \in \mathbb{K} : (z, x + \lambda y) = (z, x) + \lambda(z, y)$
2. $\forall x, y \in H : (x, y) = \overline{(y, x)}$
3. $\forall x \in H : (x, x) \geq 0 \wedge (x, x) = 0 \iff x = 0$

$(H, (\cdot, \cdot))$ nennt man einen Prähilbertraum.

Bemerkung Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist das Skalarprodukt linear in der zweiten Komponente aber antilinear in der ersten ($(\lambda x, y) = \bar{\lambda}(x, y)$).

Lemma 1.14 (Cauchy-Schwarz Ungleichung) Sei $(H, (\cdot, \cdot))$ Prähilbertraum, dann gilt

$$\forall x, y \in H : |(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

Beweis Da die Ungleichung für $y = 0$ bereits erfüllt ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen $y \neq 0$. Für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{K}$ gilt

$$0 \leq (x + \alpha y, x + \alpha y) = (x, x) + \bar{\alpha}(y, x) + \alpha(x, y) + \alpha\bar{\alpha}(y, y)$$

Setze nun $\alpha := -(x, y)(y, y)^{-1}$

$$\begin{aligned} &= (x, x) - \overline{(x, y)}(y, y)^{-1} - (x, y)(y, y)^{-1}(x, y) - |(x, y)|^2(y, y)^{-1} \\ &= (x, x) - \underbrace{((y, x)(y, x) + (x, y)(x, y))(y, y)^{-1}}_{>0} - |(x, y)|^2(y, y)^{-1} \\ &\leq (x, x) - |(x, y)|^2(y, y)^{-1} \\ &\iff |(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y) \end{aligned}$$

□

Korollar 1.15 Sei $(H, (\cdot, \cdot))$ ein Prähilbertraum, dann ist $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ eine Norm auf H .

Beweis Es ist nur die Dreiecksungleichung zu beweisen, weil der Rest klar ist. Für $x, y \in H$ gilt

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(x, y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x, y)| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

□

Definition 1.16 Ein Prähilbertraum $(H, (\cdot, \cdot))$ heißt Hilbertraum, falls $(H, \|\cdot\|)$ mit $\|x\| := \sqrt{(x, x)}$ ein Banachraum ist.

Beispiel 1.17 1. $H = \mathbb{R}^n$ versehen mit $(x, y) := \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i y_i}_{\text{euklidisches Skalarprodukt}}$ ist ein Hilbertraum

2. $H = \mathbb{C}^n$ mit $(x, y) := \underbrace{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i}_{\text{euklidisches Skalarprodukt}}$ ist ein Hilbertraum

3. Sei $l^2\mathbb{K} := \{(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{K}, \forall k \in \mathbb{N} \wedge \sum_{i=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}$ versehen mit $(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \bar{x}_i y_i$ ist ein Hilbertraum.

$$\sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|_{l^2} \|y\|_{l^2} < \infty$$

Lemma 1.18 (Hölder-Ungleichung) Für das euklidische Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_2$ gilt für beliebige p, q mit $1 < p, q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ die Ungleichung

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n : |(x, y)_2| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Darüber hinaus gilt die Ungleichung auch für $p = 1, q = \infty$

Lemma 1.19 (Young'sche Ungleichung) Für $p, q \in \mathbb{R}, 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{K} : |(x, y)| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}$$

Lemma 1.20 (Minkowski-Ungleichung) Für ein beliebiges $p \in [1, \infty]$ gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{K}^n : \|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Satz 1.21 (Banachscher Fixpunktsatz) Sei (M, d) ein vollständiger, metrischer Raum und $f : M \rightarrow M$ ist eine strenge Kontraktion, das heißt

$$\exists 0 < \alpha < 1 \forall x, y \in M : d(f(x), f(y)) < \alpha d(x, y)$$

Dann existiert ein eindeutiger Fixpunkt von f , das heißt es existiert ein eindeutiges $x^* \in M : f(x^*) = x^*$

Beweis Existenz:

Wähle ein $x_0 \in M$ beliebig, aber fest und definiere dann $x_1 := f(x_0), x_2 := f(x_1), \dots$ Dann gilt für $n \leq m$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(f(x_{n-1}), f(x_{m-1})) < \alpha d(x_{n-1}, x_{m-1}) \\ &= \alpha d(f(x_{n-2}), f(x_{m-2})) < \dots < \alpha^n d(x_0, x_{m-n}) \end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\begin{aligned} d(x_0, x_{m-n}) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{m-n-1}, x_{m-n}) \\ &\leq d(x_0, x_1) + \alpha d(x_0, x_1) + \dots + \alpha^{m-n-1} d(x_0, x_1) \\ &= d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{m-n-1} \alpha^i \leq d(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \\ &= \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \alpha} < \infty \\ \implies d(x_n, x_m) &\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Also ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge. Da (M, d) vollständig ist existiert $x^* \in M$, sodass $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^*$. Zeige, dass x^* Fixpunkt von f ist:

$$\begin{aligned} 0 \leq d(x^*, f(x^*)) &\leq d(x^*, x_k) + d(x_k, f(x^*)) \\ &\leq d(x^*, x_k) + \alpha d(x_{k-1}, x^*) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\implies f(x^*) = x^*$$

Eindeutigkeit: Angenommen $\exists x' \in M, x' \neq x^* : f(x') = x'$:

$$0 < d(x^*, x') = d(f(x^*), f(x')) < \alpha d(x^*, x') \implies \alpha > 1 \quad \square$$

2 Stetigkeit und Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^n

Definition 2.1 Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, D \neq \emptyset$, ist stetig in einem $a \in D$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : \|x - a\| < \delta \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

Bemerkung Es gelten auch im Mehrdimensionalen die Permanenzeigenschaften, das heißt f, g stetig $\implies f + g, f \circ g$ sind stetig.

Satz 2.2 Eine stetige Funktion $f : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ ist auf einer kompakten Menge $K \subset D$ beschränkt, das heißt für jede kompakte Menge K existiert eine Konstante M_K , sodass

$$\forall x \in K \|f(x)\| < M_K$$

Beweis Angenommen f wäre auf K unbeschränkt, dann gäbe es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in K$ mit $\|f(x_k)\| > k$. Da K kompakt hat die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ für die gilt $x_{k_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x \in K$. Da f stetig $f(x_{k_j}) \rightarrow f(x)$ und $\|f(x)\| < \infty$, was im Widerspruch steht zu $\|f(x_k)\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$. \square

Satz 2.3 Eine stetige Funktion $f : D \subset \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt auf jeder (nicht leeren) kompakten Menge $K \subset D$ ihr Minimum und Maximum an.

Beweis Nach Satz 2.2 besitzt f eine obere Schranke auf K

$$\mathcal{K} := \sup_{x \in K} f(x)$$

Dazu $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq K$, sodass $f(x_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathcal{K}$. Da K kompakt existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ und ein x_{max} , sodass $x_{k_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} x_{max}$. Da f stetig, gilt $f(x_{k_j}) \rightarrow f(x_{max})$. \square

Bemerkung Auf diese Weise lassen sich die Ergebnisse der Stetigkeit aus dem Eindimensionalen ins Mehrdimensionale verallgemeinern.

Im folgenden Teil sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Definition 2.4 Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in einem Punkt $x \in D$ partiell differenzierbar bezüglich der i -ten Koordinatenrichtung, falls der Limes

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) =: \partial_i f(x)$$

existiert. Existieren in allen Punkten $x \in D$ **alle** partiellen Ableitungen, so heißt f partiell differenzierbar. Sind alle partiellen Ableitungen stetig auf D , so heißt f stetig partiell differenzierbar. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt (stetig) partiell differenzierbar, wenn $f_i, i = 1, \dots, m$ (stetig) partiell differenzierbar.

Bemerkung Die Ableitungsregeln aus dem Eindimensionalen übertragen sich auf partielle Ableitungen.

Beispiel 1. Polynome sind stetig partiell differenzierbar. Sei $p : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto a_{01}x_2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 + a_{21}x_1^2x_2$. Dann ist

$$\frac{\partial p}{\partial x_1}(x_1, x_2) = a_{11}x_2 + 2a_{21}x_1x_2 \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = a_{01} + a_{11}x_1 + 2a_{02}x_2 + a_{21}x_1^2$$

2. $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig partiell differenzierbar, da

$$\frac{\partial \|\cdot\|}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{2x_i}{(x_1^2 + \dots + x_k^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x_i}{\|x\|_2}$$

3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$ für $x \neq 0, f(0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} - 4 \frac{x_1^2 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^3}, x \neq 0$$

Für $x = 0$ ist $f(0) = 0$

$$\implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(xe_i) - f(0)}{h} = 0$$

Sei $x_\varepsilon(\varepsilon, \varepsilon)$ und damit gilt $\|x_\varepsilon\|_2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$

$$f(x_\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{4\varepsilon^4} = \frac{1}{4\varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty$$

Satz 2.5 Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ habe in einer Kugelumgebung $K_r(x) \subset D$ eines Punktes $x \in D$ beschränkte partielle Ableitungen, das heißt

$$\sup_{y \in K_r(x)} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \leq M, i = 1, \dots, n$$

dann ist f stetig in x .

Beweis Es genügt $n = 2$. Für $(y_1, y_2) \in K_r(x)$

$$f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2) = f(y_1, y_2) - f(x_1, y_2) + f(x_1, y_2) - f(x_1, x_2)$$

Nach dem 1-D Mittelwertsatz existieren $\xi, \eta \in K_r(x)$, sodass

$$\begin{aligned} |f(y_1, y_2) - f(x_1, x_2)| &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi, y_2)(y_1 - x_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \eta)(y_2 - x_2) \\ &\leq M(|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|) \end{aligned} \quad \square$$

Höhere partielle Ableitungen definieren sich durch sukzessives Ableiten, das heißt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}$$

Beispiel

$$\frac{x_1}{x_2} := \frac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}$$

für $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$. f zweimal partiell diff'bar, aber

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(0, 0) \neq \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(0, 0)$$

Satz 2.6 Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei in einer Umgebung $K_r(x) \subset D$ eines Punktes $x \in D$ zweimal stetig partiell differenzierbar, dann gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(x), i, j = 1, \dots, n$$

Beweis $n = 2$. Sei $A := f(x_1 - h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2 + h_2) + f(x_1, x_2)$.

$$\varphi(x_1) := f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) \implies A = \varphi(x_1 + h_1) - \varphi(x_1)$$

Mit dem Mittelwertsatz erhalten wir $A = h_1 \varphi'(x_1 + \theta_1 h_1)$, $\theta_1 \in (0, 1)$.

$$\varphi'(x_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2 + h_2) - \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(x_1, x_2 + \theta'_1 h_2), \theta'_1 \in (0, 2)$$

Analog verfähre man mit x_2 und erhalte für $\psi(x_2) := f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2)$

$$A = \psi(x_2 - h_2) - \psi(x_2) = h_2 \psi'(x_2 + \theta_2 h_2) = h_1 h_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1 + \theta_2 h_1, x_2 + \theta'_2 h_2)$$

$$\implies \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(x_1 + \theta_1 h_1, x_2 + \theta'_1 h_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1 + \theta_2 h_1, x_2 + \theta'_2 h_2)$$

$$\xrightarrow{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(x_1, x_2) \quad \square$$

Definition 2.7 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar.

$$\text{grad } f(x) := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f \right)^T \in \mathbb{R}^n$$

heißt **Gradient** von f in $x \in D$. Man schreibt $\nabla f(x) := \text{grad } f$. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar.

$$\text{div } f(x) := \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} f_n$$

Es gilt:

$$\Delta f(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f_i =: \Delta f(x)$$

Definition 2.8 $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar. Die Matrix der ersten partiellen Ableitungen

$$J_f := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

heißt die **Jacobi-Matrix** (manchmal auch Fundamentalmatrix*) von f in x . Im Fall $n = m$ bezeichnet man $\det(J_f)$ als **Jacobideterminante**.

Definition 2.9 $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ zweimal partiell differenzierbar. Die Matrix der zweiten Ableitungen

$$H_f(x) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

heißt **Hesse-Matrix**.

Definition 2.10 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, dann nennen wir f in einem Punkt $x \in D$ (total differenzierbar), wenn die Funktion f in x sich linear approximieren lässt, das heißt es gibt eine lineare Abbildung $Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (Differential) sodass in einer kleinen Umgebung von x gilt:

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)h + w(h), h \in \mathbb{R}^n, x+h \in D$$

mit einer Funktion $w : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, die die Eigenschaft hat

$$\lim_{\substack{x+h \in D \\ \|h\|_2 \rightarrow 0}} \frac{\|w(h)\|_2}{\|h\|_2} = 0$$

alternativ: $w(h) = o(\|h\|_2)$

Satz 2.11 Für Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ gilt:

1. Ist f in $x \in D$ differenzierbar, so ist f auch in x partiell differenzierbar und das Differential von f ist gegeben durch die Jacobi-Matrix.

2. Ist f partiell differenzierbar in einer Umgebung von x und sind zusätzlich die partiellen Ableitungen stetig in x , so ist f in x differenzierbar.

Beweis 1. Für differenzierbares f gilt für $i = 1, 2$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(Df(x)e_i + \frac{w(h)}{h} \right) = Df(x)e_i$$

2. Für ein stetig partiell differenzierbares f gilt mit $h = (h_1, h_2)$:

$$f(x + h) - f(x) = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) + f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2)$$

Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} &= h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + h_1, x_2 + \theta_2 h_2) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta_1 h_1, x_2) \\ &\quad \theta_1, \theta_2 \in (0, 1) \\ &= h_2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) + \omega_2(h_1, h_2) \right) + h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \omega_1(h_1, h_2) \right) \\ \omega_1(h_1, h_2) &:= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta_1 h_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \xrightarrow{h_1, h_2 \rightarrow 0} 0 \\ \omega_2(h_1, h_2) &:= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + h_1, x_2 + \theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \xrightarrow{h_1, h_2 \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Also ist f differenzierbar mit Ableitungen $Df(x) = \nabla f(x)$. □

Bemerkung Es gelten folgende Implikationen: stetig partiell differenzierbar \implies (total) differenzierbar \implies partiell differenzierbar.

Satz 2.12 Seien $D_f \subset \mathbb{R}^n, D_g \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}^n, f : D_f \rightarrow \mathbb{R}^r$. Ist g im Punkt $x \in D_g$ differenzierbar und f in $y = g(x) \in D_f$ differenzierbar, so ist die Komposition $h = f \circ g$ im Punkt x differenzierbar. Es gilt $D_x h(x) = D_y f(g(x)) \cdot D_x g(x)$. Hierbei ist \cdot die Matrixmultiplikation.

Beweis Nach Voraussetzung $x \in D_g$ sodass $g(x) = y \in D_f$. Da sowohl f als auch g differenzierbar

$$\begin{aligned}
 g(x + h_1) &= g(x) + D_x g(x)h_1 + \omega_g(h_1) \\
 f(y + h_2) &= f(y) + D_y f(y)h_2 + \omega_f(h_2) \\
 \lim_{\substack{x+h_1 \in D_g \\ \|h_1\| \rightarrow 0}} \frac{\|\omega_g(h_1)\|}{\|h_1\|} &= 0 \\
 \lim_{\substack{y+h_2 \in D_f \\ \|h_2\| \rightarrow 0}} \frac{\|\omega_f(h_2)\|}{\|h_2\|} &= 0 \\
 (f \circ g)(x + h_1) &= f(g(x + h_1)) = f(y + \eta), \quad \eta := D_x g(x)h_1 + \omega_g(h_1) \\
 &= f(y) + D_y f(y)\eta + \omega_f(\eta) \\
 &= f(y) + D_y f(y)D_x g(x)h_1 + D_y f(y)\omega_g(h_1) + \omega_f(D_x g(x)h_1 + \omega_g(h_1)) \\
 &= (f \circ g)(x) + D_y f(y)D_x g(x)h_1 + \omega_{f \circ g}(h_1) \\
 \omega_{f \circ g}(h_1) &:= D_y f(y)\omega_g(h_1) + \omega_f(D_x g(x)h_1 + \omega_g(h_1))
 \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen $\omega_{f \circ g} = o(h_1)$. Nach Voraussetzung gilt $\omega_{f \circ g} \xrightarrow{h_1 \rightarrow 0} 0$

□

Lemma 2.13 Sei $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ stetig, dann gilt

$$\left\| \int_0^1 A(s) ds \right\|_M \leq \int_0^1 \|A(s)\|_M ds, \quad \|A\|_M := \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$$

$\int A = (\int a_{ij})_{ij}, \sigma(A) := \text{Menge der Eigenwerte von } A$

Satz 2.14 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar mit J_f als Jacobi-Matrix, so gilt

$$f(x + h) - f(x) = \left(\int_0^1 J_f(x + sh) ds \right) h$$

Beweis Definiere $g_j(s) := f_j(x + sh)$, dann ist $g_{j1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, also gilt

$$f_j(x + sh) - f_j(x) = g_j(1) - g_j(0) = \int_0^1 g'_j(s) ds = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x + sh) h_i ds$$

□

Bemerkung Im Fall $m = 1$ kann man aus dem Mittelwertsatz für Integrale schließen, dass

$$f(x + h) - f(x) = \int_0^1 J_f(x + sh) h ds = J_f(x + \tau h) h$$

$$x_1 + h = x_2 \implies h = x_2 - x_1$$

Korollar 2.15 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Ferner sei $x \in D$ mit $K_r(x) \subset D, r > 0$, dann gilt

$$\|f(x) - f(y)\|_2 \leq M\|x - y\|_2, y \in K_r(x), M := \sup_{z \in K_r(x)} \|J_f(z)\|_M$$

das heißt die Abbildung ist in D lokal Lipschitz-stetig.

Beweis Nach Satz 2.14 gilt mit $h = y - x$

$$\begin{aligned} \|f(y) - f(x)\|_2 &= \|f(x + h) - f(x)\|_2 = \left\| \int_0^1 J_f(x + sh) h ds \right\|_2 \\ &\leq \int_0^1 \|J_f(x + sh) h\|_2 ds \leq \int_0^1 \|J_f(x + sh)\|_m \|h\|_2 ds \\ &\leq \underbrace{\sup_{0 < s < 1} \|J_f(x + sh)\|_2}_M \underbrace{\|h\|_2}_{\|y-x\|_2} \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung Korollar 2.16 gilt mit beliebigen von Vektor-Matrix-norm induzierter Norm, siehe Übung 2.1.

Taylor-Entwicklung und Extremwerte in \mathbb{R}^n

Definition 2.16 (Multiindex Notation) Ein n -dimensionaler **Multiindex** ist ein Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $\alpha_i \in \mathbb{N}$. Für Multiindizes sind die **Ordnung** $|\alpha|$ und die Fakultät $\alpha!$ definiert durch

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \\ \alpha! &:= \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n! \end{aligned}$$

Für $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ wird gesetzt

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

Für eine $|\alpha|$ -mal stetig differenzierbare Funktion wird gesetzt

$$\partial^\alpha f := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Bemerkung Wegen der Stetigkeit der Ableitung ist dieser Ausdruck unabhängig von der Reihenfolge der partiellen Ableitungen. Wir definieren

$$\sum_{|\alpha|=0}^r a_\alpha := \sum_{k=0}^r \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|=k}} a_\alpha$$

Beispiel 2.17 Für $n = 3$ sind die Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ der Ordnung $|\alpha| = 2$ gegeben durch

$$(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)$$

Die zugehörigen partiellen Ableitungen sind

$$\begin{aligned}\partial^\alpha f &= (\partial_{x_1}^2 f, \partial_{x_2}^2 f, \partial_{x_3}^2 f, \partial_{x_1} \partial_{x_2} f, \partial_{x_2} \partial_{x_3} f, \partial_{x_1} \partial_{x_3} f) \\ \alpha! &= (2, 2, 2, 1, 1, 1)\end{aligned}$$

Schließlich ist

$$\sum_{|\alpha|=2} \partial^\alpha f = \partial_{x_1}^2 f + \partial_{x_2}^2 f + \partial_{x_3}^2 f + \partial_{x_1} \partial_{x_2} f + \partial_{x_2} \partial_{x_3} f + \partial_{x_1} \partial_{x_3} f$$

Satz 2.18 (Taylor-Formel) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(r+1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für jeden Vektor $h \in \mathbb{R}^n$ mit $x + sh \in D$, $s \in [0, 1]$ die Taylor-Formel

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + R_{r+1}^f(x, h)$$

in differentieller Form

$$R_{r+1}^f(x, h) = \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{\partial^\alpha f(x + \theta h)}{\alpha!} h^\alpha, \theta \in (0, 1)$$

oder in integraler Form

$$R_{r+1}^f(x, h) = (r+1) \int_0^1 \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{\partial^\alpha f(x + th)}{\alpha!} h^\alpha (1-t)^r dt$$

Beweis Wir nehmen $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(t) := f(x + th)$. g ist $(r+1)$ mal stetig differenzierbar mit der k -ten Ableitung

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f(x + th) h_{i_1} \dots h_{i_k}$$

Wir zeigen dies durch Induktion nach k (mit Hilfe von Kettenregel). Für $k = 1$ gilt

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n) = \sum_{i=1}^n \partial_i f h_i$$

Sei die Behauptung als richtig angenommen für $k - 1 \geq 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g^{(k)}(t) &= \frac{d}{dt} g^{(k-1)}(t) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n \partial_{i_{k-1}} \dots \partial_{i_1} f(x + th) h_1 \dots h_{i_{k-1}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \partial_i \left(\sum_{i_1 \dots i_{k-1}=1}^n \partial_{i_{k-1}} \dots \partial_{i_1} f(x + th) h_{i_1} \dots h_{i_{k-1}} \right) h_i \\ &= \sum_{i_1 \dots i_k=1}^n \partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f(x + th) h_{i_1} \dots h_{i_k} \end{aligned}$$

Es gilt

$$\partial_{i_k} \dots \partial_{i_1} f(x + th) h_{i_1} \dots h_{i_k} = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f(x + th) h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}$$

(der Index $i \in \{1, \dots, n\}$ kommt genau α_i mal vor und wegen Vertauschbarkeit der Ableitungen). Die Anzahl der k -Tupel (i_1, \dots, i_k) von Zahlen $i_j \in \{1, \dots, n\}$, bei denen die Zahl $i \in \{1, \dots, n\}$ genau α_i -mal vorkommt mit $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$ ist

$$\frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!}$$

(Lemma unten) Wir bekommen

$$\begin{aligned} g^{(k)}(t) &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f(x + th) h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n} \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \partial^\alpha f(x + th) h^\alpha \end{aligned}$$

Wir wenden die 1-dimensionale Taylor-Formel auf $g(t)$ an. $\exists \theta \in [0, 1]$ sodass

$$g(1) = \sum_{k=0}^r \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{g^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!} = \sum_{k=0}^r \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{1}{r!} \int_0^1 g^{(r+1)}(t) (1-t)^r dt$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha \\ \frac{g^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!} &= \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{\partial^\alpha f(x + \theta h)}{\alpha!} h^\alpha \\ \frac{1}{r!} \int_0^1 g^{(r+1)}(t) (1-t)^r dt &= (r+1) \int_0^1 \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{\partial^\alpha f(x + th)}{\alpha!} h^\alpha (1-t)^r dt \end{aligned}$$

Dies impliziert die Taylor-Formel mit den Restgliedern in differentieller oder integraler Form. \square

Lemma 2.19 (2.20) Sei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $|\alpha| = k \geq 1$. Dann ist die Anzahl $N_\alpha(k)$ der k -Tupel von Zahlen $i_j = \{1, \dots, n\}$, bei denen die Zahl $i \in \{1, \dots, n\}$ genau α_i -mal vorkommt, bestimmt durch

$$N_\alpha(k) = \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!}$$

Beweis Wir ordnen die Indizes in dem k -Tupel

$$(i_1, \dots, i_k) = \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{\alpha_2}, \dots, \underbrace{n, \dots, n}_{\alpha_n \text{ mal}} \right)$$

$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$. Die Anzahl der möglichen Permutationen der k Elemente des k -Tupel ist $k!$. Das k -Tupel bleibt unverändert bei Permutationen von gleichen Elementen i . Insgesamt bekommen wir

$$N_\alpha(k) = \frac{k!}{\alpha!} \quad \square$$

Korollar 2.20 (2.21) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine $r + 1$ mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für $x \in D$ und $h \in \mathbb{R}^n$ mit $x + sh \in D$, $s \in [0, 1]$:

$$f(x + h) = \sum_{|\alpha| \leq r+1} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \omega_{r+1}(x, h)$$

wobei $\omega_{r+1}(x, 0) = 0$ und $\omega_{r+1}(x, h) = o(\|h\|_2^{r+1})$.

Im Fall $r = 0$ gilt

$$f(x + h) = f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \omega_1(x, h)$$

Im Fall $r = 1$ gilt:

$$f(x + h) = f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \frac{1}{2} (H_f(x)h, h)_2 + \omega_2(x, h)$$

Beweis

$$\begin{aligned} f(x + h) &= \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{\partial^\alpha f(x + \theta h)}{\alpha!} h^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha| \leq r+1} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha|=r+1} r_\alpha(x, h) h^\alpha \end{aligned}$$

wobei

$$r_\alpha(x, h) := \frac{\partial^\alpha f(x + \theta h) - \partial^\alpha f(x)}{\alpha!}$$

$\lim_{h \rightarrow 0} r_\alpha(x, h) = 0$, wegen der Stetigkeit von $\partial^\alpha f$ für $|\alpha| = r + 1$. Wir setzen $\omega_{r+1}(x, h) := \sum_{|\alpha|=r+1} r_\alpha(x, h) h^\alpha$. Es gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(h)}{\|h\|_2^{r+1}} = 0$$

weil

$$\frac{|h^\alpha|}{\|h\|_2^\alpha} = \frac{|h_1^{\alpha_1}| \cdot \dots \cdot |h_n^{\alpha_n}|}{\|h\|_2^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \|h\|_2^{\alpha_n}} \leq 1 \quad |\alpha| = r + 1$$

Für $r = 0$ gilt

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{|\alpha| \leq 1} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \omega_1(x, h) \\ &= f(x) + \sum_{|\alpha|=1} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \omega_1(x, h) \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^n \partial_i f(x) h_i + \omega_1(x, h) \\ &= f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \omega_1(x, h) \end{aligned}$$

Für $r = 1$

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{|\alpha| \leq 2} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \omega_2(x, h) \\ &= f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \sum_{|\alpha|=2} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + \omega_2(x, h) \\ &= f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_i \partial_j f(x) h_i h_j + \omega_2(x, h) \\ &= f_1(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \frac{1}{2} (H_f(x)h, h)_2 + \omega_2(x, h) \quad \square \end{aligned}$$

Definition 2.21 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $x \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar.

$$F_\infty^f(x+h) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\partial^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha$$

heißt die Taylor-Reihe von f in x

Korollar 2.22 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Dann konvergiert die Taylor-Reihe von f und stellt f dar, wenn

$$R_{r+1}^f(x, h) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \quad x \in D$$

Hinreichend dafür ist, dass die partielle Ableitung gleichmäßig beschränkt sind:

$$\sup_{|\alpha| \geq 0} \sup_{x \in D} |\partial^\alpha f(x)| < \infty$$

Beweis

$$\left\| R_{r+1}^f(x, h) \right\|_{\infty} \leq \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{|\partial^{\alpha} f(x + \theta h)|}{\alpha!} \|h\|_{\infty}^{|\alpha|} \leq M(f) \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} \|h\|_{\infty}^{|\alpha|} \rightarrow 0 \quad \square$$

Definition 2.23 Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ hat in einem Punkt $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ ein lokales Extremum, wenn auf einer $K_{\sigma}(x) \subset \mathbb{R}^n$ (Kugelumgebung) gilt

$$f(x) = \sup_{y \in K_{\sigma}(x) \cap D} f(y) \quad \text{oder} \quad f(x) = \inf_{y \in K_{\sigma}(x) \cap D} f(y)$$

Das Extremum heißt strikt, wenn es in $K_{\sigma}(x) \cap D$ nur in dem Punkt angenommen wird. Das Extremum heißt global, wenn $f(x) = \sup_{y \in D} f(y)$ (oder $\inf_{y \in D} f(y)$)

Satz 2.24 (Notwendige Extremalbedingung) Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, D offen. Hat f in einem Punkt $\vec{x} \in D$ ein lokales Extremum, so gilt $\nabla f(\vec{x}) = 0$

Beweis Angenommen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ hat in $x \in D$ ein lokales Extremum. Wir nehmen $g_i(t) := f(\vec{x} + te^{(i)})$, $i = 1, \dots, n$, $e^{(i)}$ Einheitsvektor in \mathbb{R}^n . g_i ist auf einem nichtleeren $(-\delta_i, \delta_i) \subset \mathbb{R}$ definiert und hat lokales Extremum in $t = 0 \implies g'_i(0) = 0$

$$0 = g'_i(0) = \sum_{j=1}^n \partial_j f(\vec{x}) \delta_{ij} = \partial_i f(\vec{x}) \quad i = 1, \dots, n \implies \nabla f(\vec{x}) = 0 \quad \square$$

Satz 2.25 (Hinreichende Extremalbedingung) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $\nabla f(\vec{x}) = 0$ in einem $\vec{x} \in D$. Ist die Hesse Matrix $H_f(x)$ in \vec{x} **positiv definit** (das heißt alle Eigenwerte positiv), so liegt in \vec{x} ein striktes lokales Minimum. Ist sie negativ definit (das heißt alle Eigenwerte negativ), so liegt in \vec{x} ein striktes lokales Maximum. Ist sie indefinit (hat sowohl positive als auch negative Eigenwerte), so kann in \vec{x} kein lokales Extremum liegen.

Beweis Nach Korollar 2.21 gilt

$$f(x+h) = f(x) + (\nabla f(x), h)_2 + \frac{1}{2} (H_f(x)h, h)_2 + \omega_2(x, h)$$

wobei

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\omega_2(x, h)}{\|h\|_2^2} = 0$$

$$\nabla f(\vec{x}) = 0 \implies f(\vec{x}+h) - f(\vec{x}) = \frac{1}{2} (H_f(\vec{x})h, h)_2 + \omega_2(\vec{x}, h)$$

Ist $H_f(\vec{x})$ positiv definit, so gilt

$$(H_f(\vec{x})h, h)_2 \geq \lambda \|h\|_2^2, h \in \mathbb{R}^n$$

wobei λ der kleinste Eigenwert ist.

$$\implies f(\vec{x} + h) - f(\vec{x}) \geq \frac{1}{2}\lambda\|h\|_2^2 + \omega(\vec{x}, h)$$

Für kleines $\|h\|_2 < \sigma, h \neq 0$ ist

$$|\omega_2(\vec{x}, h)| < \frac{1}{2}\lambda\|h\|_2^2$$

und somit

$$f(\vec{x} + h) - f(\vec{x}) > \frac{1}{2}\lambda\|h\|_2^2 - \frac{1}{2}\lambda\|h\|_2^2 = 0$$

$\implies \vec{x}$ ist ein lokales Maximum. Ist $H_f(\vec{x})$ negativ definit $\implies \vec{x}$ ist ein lokales Maximum (analog).

Ist $H_f(\vec{x})$ indefinit $\implies \exists \lambda_+ > 0$ (mit Eigenvektor z_+) und $\exists \lambda_- < 0$ (mit EV z_-)

$$(H_f(\vec{x})z_+, z_+) = \lambda_+\|z_+\|_2^2 > 0$$

$$(H_f(\vec{x})z_-, z_-) = \lambda_-\|z_-\|_2^2 < 0$$

Für genügend kleines $t > 0$ gilt dann

$$f(\vec{x} + tz_+) - f(\vec{x}) > 0 \quad f(\vec{x} + tz_-) - f(\vec{x}) < 0$$

\implies kein Extremum in \vec{x}

□

Beispiel 2.26 1. $f_1(x) = a + x_1^2 + x_2^2$

$$\nabla f_1(x) = (2x_1, 2x_2) = 0 \iff \vec{x}_1 = 0 \wedge \vec{x}_2 = 0$$

$$H_{f_1}(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit $\implies \vec{x} = 0$ ist Minimum.

2. $f_2(x) = a - x_1^2 - x_2^2$

$$\nabla f_2(x) = (-2x_1, -2x_2) \implies \vec{x} = 0, H_{f_2}(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

negativ definit $\implies \vec{x} = 0$ ist Maximum.

Bemerkung Ist die Hesse Matrix in einer Nullstelle des Gradienten semidefinit (des heißt $\exists \lambda_i = 0$), so lassen sich keine allgemeinen Aussagen über lokale Extrema machen.