Analysis II (Marciniak-Czochra)

Robin Heinemann

21. April 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Metrische und normierte Räume

1.1 Metrische Räume

Definition 1.1 Sei M eine Menge, $d : M \times M \to [0, \infty)$ heißt **Metrik** auf M genau dann wenn $\forall x, y, z \in M$

- (D1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Definitheit)
- (D2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
- (D3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung)

Beispiel 1.2 1. Charakterische (diskrete) Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

2. Sei $X = \mathbb{K}^n\,(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C})$ mit Metrik

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{n}{2}}$$

(euklidische Metrik)

3. Sei $X = \mathbb{R}^n$. Für $1 \leq \phi \leq \infty$. Sei

$$d_\phi(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^\phi \right)^{\frac{n}{\phi}}$$

   Ist $\phi = \infty$, so definieren wir

$$d_\infty(x, y) = \max_{i-1,\dots,n} |x_i - y_i|$$

4. $X = \mathbb{R}$ mit Metrik

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

5. Der Raum der Folgen $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (beziehungsweise $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) kann mit der Metrik

$$d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

Definition 1.3 Sei M eine Menge mit Metrik d. Wir definieren für $x \in M, \varepsilon > 0$, die offene ε-Kugel um x durch

$$K_\varepsilon(x) := \{y \in M \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

$A \subset M$ heißt **Umgebung** von $x \in M \Leftrightarrow \exists \varepsilon : K_\varepsilon(x) \subset A$

Konvergenz und Stetigkeit in metrischen Räumen

Definition 1.4 Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d) ist konvergent gegen einem $x \in X$ genau dann wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 d(x_n, x) < \varepsilon$

Satz 1.5
1. Sei (X, d) ein metrischer Raumn. Dann ist $A \subseteq X$ abgeschlosen genau dann wenn $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in A mit $x_n \to x \Rightarrow x \in A$
2. Seien $(X, d_1), (Y, d_2)$ zwei metrische Räume. Dann ist die Funktion stetig in $x \in X$ genau dann wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$.

Definition 1.6 ((Cauchy Folgen und Vollständigkeit)) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge falls $d(x_n, x_m) \to 0$ für $n, m \to \infty$. Der metrische Raum heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge konvergent ist.

1.2 Normierte Räume

Definition 1.7 Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist ein Paar bestehend aus einem $\mathbb{K}$ -Vektorraum X und einer Abbildung $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ mit

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in X$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in X$

Bemerkung 1.8 1. Die Norm $\|\cdot\|$ induziert auf X eine Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$

2. Eine Metrik d auf einem Vektorraum definiert die Norm $\|d(x, 0)\|$ nur dann, wenn

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x, y, z \in X : d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y) \qquad \text{(Homagenität)}$$
$$d(x + z, y + z) = d(x, y) \qquad \text{(Translationsinvarianz)}$$

Definition 1.9 (1.8 Banachraum) Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt vollständig, falls X als metrischer Raum mit der Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ vollständig ist. Ein solcher vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**

Beispiel 1.10 (1.9) 1. $\left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2\right)$, wobei

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{n}{2}}$$

2. Sei K eine kompakte Menge:

$$C_{\mathbb{K}} := \{f : K \to \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\}$$

$$\|\cdot\|_\infty = \max_{\lambda \in K} |f(x)|$$

$\left(C_{\mathbb{K}(K)}, \|\cdot\|_\infty\right)$ ist ein Banachraum.

Bemerkung 1.11 1. Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{K}^n$ konvergiert, das heißt $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ ist vollständig

2. Jede beschränkte Folge in $\mathbb{K}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge. (Bolzano-Weierstraß Satz gilt in $\mathbb{R}^n$) (Beweis für $\mathbb{R}^n$ zum Beispiel in RR Ana2 Satz 1.1)

Satz 1.12 (1.10 (Äquivalenz von Normen)) Auf dem endlich dimesionalen Vektorraum $\mathbb{K}^n$ sind alle Normen **äquivalent** zur Maximumnorm, das heißt zu jeder Norm $\|\cdot\|$ gibt es positive Konstanten w, M mit denen gilt

$$m\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M\|x\|_\infty, x \in \mathbb{K}^n$$

Beweis Sei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm $\forall x \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\|x\| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \|e^{(k)}\| \leq M\|x\|_\infty$$

mit

$$M := \sum_{k=1}^{n} \|e^{(k)}\|$$

Wir setzen

$$S_1 := \{x \in \mathbb{K}^m \mid \|x\|_\infty = 1\}, m := \inf\{\|x\|, x \in S_1\} \geq 0$$

Zu zeigen $m > 0$ (dann ergibt sich für $x \neq 0$ wegen $\|x\|_\infty^{-1} x \in S_1$ auch $m \leq \|x\|_\infty^{-1}\|x\| \Rightarrow 0 < m\|x\|_\infty \leq \|x\| \quad x \in \mathbb{K}^n$) Sei also angenommen, dass $m = 0$

Dann gibt eine eine Folge $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \in S_1$ mit $\left\|x^{(k)}\right\| \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Da diee Folge bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ beschränkt ist, gibt ei nach dew B.-W. Satz eine Teilfolge auch von $\left(x^{(k)}\right)$, die bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ gegen ein $x \in \mathbb{K}^n$ konvergiert.

$$\left|1 - \|x\|_\infty\right| = \left|\left\|x^{(k)}\right\|_\infty - \|x\|_\infty\right| \leq \left\|x^{(k)} - x\right\|_\infty \to 0 \Rightarrow \|x\|_\infty = 1 \Rightarrow x \in S_1$$

Anderseits gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} : \|x\| \leq \left\|x - x^{(k)}\right\| + \left\|x^{(k)}\right\| \leq M\left\|x - x^{(k)}\right\|_\infty + \left\|x^{(k)}\right\| \xrightarrow{k\to\infty} \Rightarrow x = 0$$

↯zu $x \in S_1$ $\square$