

1 Mengen und Zahlen

Quantoren, Mengen (operationen), Äquivalenzrelationen, Abbildungen

$f: X \rightarrow Y$ heißt

injektiv, wenn $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

surjektiv, wenn $f(X) = Y \iff \forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$

bijektiv, wenn surjektiv und injektiv $\iff \exists! g : Y \rightarrow X, g \circ f = \text{id}_X, f \circ g = \text{id}_Y$

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ injektiv/surjektiv $\implies g \circ f$ injektiv/surjektiv.

$g \circ f$ injektiv $\implies f$ injektiv

Natürliche Zahlen:

Peano-Axiome

vollständige Induktion

Körper \mathbb{Q}, \mathbb{R} , Ordnungsrelationen

Abzählbarkeit: $n \in \mathbb{N}, A_n := \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\} = \{1, \dots, n\}$

Menge M heißt

endlich, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $f: M \rightarrow A_n$ gibt.

abzählbar unendlich, wenn es eine bijektive Abbildung $f: M \rightarrow \mathbb{N}$ gibt.

$(\mathbb{N}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, kartesisches Produkt abzählbarer Mengen, abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen) überabzählbar, wenn sie weder endlich noch abzählbar ist.

$(\mathbb{R}$, Menge der Folgen mit Werten in $\{0, 1\}$) höchstens abzählbar, wenn sie abzählbar oder endlich ist

Schranken: M Menge, $A \subseteq M$, dann heißt $S \in M$

obere Schranke, wenn $\forall x \in A : x \leq S$

untere Schranke, wenn $\forall x \in A : x \geq S$

Supremum von A , wenn für alle oberen Schranken S' von A gilt $S' \geq S$

Infimum von A , wenn für alle unteren Schranken S' von A gilt $S' \leq S$

Axiome der reellen Zahlen: Körper, geordnet, Einbettung von \mathbb{N}

Vollständigkeit: Jede nach oben beschränkte Teilmenge hat ein Supremum.

Archimedisches Prinzip: $\forall x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} : x \leq n$

$M \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt:

S (obere Schranke) ist Supremum $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : S - \varepsilon \leq x$

S (untere Schranke) ist Infimum $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : S + \varepsilon \geq x$

$\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, sodass $A \subseteq B$, dann $\sup A \leq \sup B$

Monotonie:

$f: A \rightarrow B$ heißt (streng) monoton wachsend, wenn $x \leq y \implies f(x) \leq (<) f(y)$

$f: A \rightarrow B$ heißt (streng) monoton fallend, wenn $x \leq y \implies f(x) \geq (>) f(y)$

Betrag: $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

Signum: $\text{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}, x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, |x + y| \leq |x| + |y|, ||x| - |y|| \leq$

$|x - y|, |x - y| \leq \varepsilon \iff x - \varepsilon \leq y \leq x + \varepsilon$

Fakultät/Binomialkoeffizient: $k, n \in \mathbb{N}_0$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Binomialsatz: $\forall n \in \mathbb{N}_0, x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

Bernoulli-Ungleichung: Für $x \geq -1, n \in \mathbb{N}$ gilt

$(1 + x)^n \geq 1 + nx$

Intervalle: $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt Intervall, wenn es für $x, y \in D$ mit $x \leq y$ für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $x \leq z \leq y$ gilt $z \in D$

(beschränkt) offene Intervalle $(a, b), a, b \in \mathbb{R}$

(beschränkt) abgeschlossene Intervalle $[a, b], a, b \in \mathbb{R}$

Halbgeraden

$(a, \infty), (-\infty, b), [a, \infty), (-\infty, b], a, b \in \mathbb{R}$

reelle Gerade $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Komplexe Zahlen: definiere auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$+: (x_1, y_1), (x_2, y_2) \mapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$\cdot: (x_1, y_1), (x_2, y_2) \mapsto (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$

$\mathbb{C} := (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ ist Körper mit Lösungen der Gleichung

$(x, y) \cdot (x, y) + (1, 0) = (0, 0)$ der Form $\pm i := (0, \pm 1)$

Schreibweise: $z \in \mathbb{C}, z = x + iy$

$x =: \Re(z), y =: \Im(z), \mathbb{R}$ ist eingebetteter Unterkörper

$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = 0\}$

$|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+, z \mapsto \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$

$\bar{\cdot}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z} := \Re(z) - i\Im(z)$

$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Es existiert keine Ordnungsrelation auf \mathbb{C} , die die Körperstruktur respektiert. ($0 < i^2 < i^2 + 1 = 0^2$)

Fundamentalsatz der Algebra:

Jedes Polynom $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ mit Koeffizienten in \mathbb{C} hat eine Nullstelle in \mathbb{C}

2 Folgen und Reihen

(reelle) Folge ist Abbildung $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$a(n) =: a_n, a =: (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$|a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq N_\varepsilon$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt Cauchy-Folge, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, sodass

$|a_n - a_m| \leq \varepsilon \forall m \geq n \geq N_\varepsilon$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert $\iff (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge.

a heißt Häufungswert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder im Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ liegen.

jeder Grenzwert ist auch ein Häufungswert (aber nicht notwendig umgekehrt)

Grenzwerte sind eindeutig (Häufungswerte aber nicht notwendig).

$M \subseteq \mathbb{R}$, a Häufungspunkt von M , wenn für alle $\varepsilon > 0$ unendlich viele $x \in M$ im Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge, $M := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, dann a Häufungswert der Folge $\iff a$ Häufungspunkt der Menge, **aber** nicht notwendig umgekehrt, $(a_n := 1 \forall n \in \mathbb{N})$

Eigenschaften des Grenzwerts

Eindeutigkeit: sind a, a' Grenzwert der Folge

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dann gilt $a = a'$

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte, monoton wachsende

Folge $M := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, dann $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sup M$

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte, monoton fallende

Folge $M := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, dann $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf M$

Stabilität: Sind $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit Grenzwert a, b , dann

$(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$

$(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \cdot b$

$|a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a|$

$b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}, b \neq 0 : a_n/b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a/b$

Ist $a = b, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit $a_n \leq c_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$, dann $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a = b$

$\exists \gamma \in (0, 1) : |b_{n+1}| \leq \gamma |b_n| \forall n \in \mathbb{N} \implies b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$1/n, 1/n^2, 1/n^3, \dots \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

geometrische Folge, $|q| < 1$

$a_n = cq^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\sum_{k=0}^n cq^k = c \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - q}$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}$

$|x| > 1 : \frac{x^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \frac{n!}{n^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Bolzano-Weierstraß: Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, dann sind folgende

Aussagen äquivalent:

A ist beschränkt und abgeschlossen.

jede Folge in A hat einen Häufungswert in A .

jede Folge in A hat eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert A .

Jede Folge hat eine monotone Teilfolge.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow$ Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Folge der Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$

Konvergenzkriterien:

Notwendig: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge

Cauchy: $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > m \geq N_\varepsilon :$

$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon$

Leibnitz: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alternierend und $|a_n|$ ist monoton fallend und $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Außerdem

$\left| \sum_{k=m}^{\infty} a_k \right| \leq |a_m| \forall m \in \mathbb{N}$

Absolute Konvergenz: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

Majorante: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (absolut) konvergent und gilt

$|a_k| \leq b_k$ für fast alle $k \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Minorante: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent und gilt $b_k \leq |a_k|$

für fast alle $k \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

Wurzelkriterium: wenn es $q \in (0, 1)$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1 \forall k \implies$ absolute Konvergenz $\sum a_k$

(alternativ: $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} < 1$ Konvergenz, $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \implies$ Divergenz)

Quotientenkriterium: wenn es $g \in (0, 1)$ gibt mit $|a_{n+1}/a_n| \leq g < 1 \implies$ absolute Konvergenz $\sum a_k$

(alternativ: $\limsup |a_{k-1}/a_k| < 1$)

Cauchy'scher Verdichtungssatz: Reihe $\sum a_k, a_k \geq 0, a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, dann gilt

$\sum a_k \iff \sum 2^k a_{2^k}$

Teleskopreihe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge \implies

$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) = a_1$

oder auch

$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_1 - S \iff \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k-1}) = S$

Umordnungssatz: Ist $\sum a_n$ absolut konvergent, dann gilt $\forall \tau: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (bijektiv) ist auch $\sum a_{\tau(n)}$ absolut konvergent mit dem gleichen Grenzwert.

Potenzreihen: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$

\mathbb{C} . Entwicklungspunkt x_0 .

Potenzreihe konvergieren absolut $\forall x \in \mathbb{C}$ mit

$|x - x_0| < \rho := \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$

(mit der Konvention $1/\infty = 0, \frac{1}{0} = \infty$)

ρ heißt Konvergenzradius.

3 Stetige Funktionen

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D$ wenn für alle Folgen in D mit $x_n \xrightarrow{x \rightarrow x_0} x_0$ gilt

$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$

f heißt stetig auf D , wenn f in allen Punkten von D stetig ist.

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in \bar{D}$ einen Grenzwert, wenn für alle Folgen in D mit $x_n \xrightarrow{x \rightarrow x_0} x_0$ gilt

$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, schreibe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$

einseitiger Grenzwert:

$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) := \lim_{x \rightarrow x_0} f|_{\{x > x_0\}}(x)$

$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) := \lim_{x \rightarrow x_0} f|_{\{x < x_0\}}(x)$

Asymptotik: $f: D \rightarrow \mathbb{R}, D$ unbeschränkt.

f hat Grenzwert a in ∞ , wenn

$\forall \varepsilon > 0 \exists c \in \mathbb{R} : |f(x) - a| < \varepsilon \forall x > c$

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \pm \infty$, wenn $\forall c \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : f(x) > c, < -c \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap (D \setminus \{x_0\})$

Stetigkeit ist stabil gegenüber punktwisen Summen, Produkt, Quotient ($\neq 0$) und Komposition, das heißt

f, g stetig $\implies f + g, f \cdot g, (f/g) (g \neq 0), g \circ f$ stetig.

$(f + g)(x) = f(x) + g(x), (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$

ε - δ -Kriterium: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in D$, $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{\varepsilon, x_0} > 0 : \forall x \in D :$

$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
 gleichmäßige Stetigkeit: Eine stetige Funktion f heißt gleichmäßig stetig, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x, y \in D : |x - y| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
 Lipschitz-Stetigkeit: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Lipschitzstetig, wenn es $L > 0$, sodass $\forall x, y \in D$ gilt $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$
 Lipschitz-stetig \implies gleichmäßig stetig \implies stetig.
 Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit:
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig $\implies f$ ist gleichmäßig stetig auf $[a, b]$ Abbildungseigenschaften stetiger Funktionen:

Satz vom Extremum: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, D beschränkt und abgeschlossen. Dann existieren x_{\min}, x_{\max} , sodass $\sup_{x \in D} f(x) = f(x_{\max})$ $\inf_{x \in D} f(x) = f(x_{\min})$
 Zwischenwertsatz: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es zu $y \in [f(a), f(b)]$ ein $\xi \in (a, b)$, sodass $f(\xi) = y$ (stärker: $\forall y \in [\min f, \max f]$)
 Monotonie: $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist genau dann injektiv, wenn sie streng monoton ist.
 Funktionsfolgen: $n \in \mathbb{N}, f_n : D \rightarrow \mathbb{N}$
 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise, wenn für alle $x \in D$ die Zahlenfolge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen Grenzfunktion $f : f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$. (sprich: $\forall \varepsilon > 0 \exists N_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq N_{\varepsilon, x}$)
 gleichmäßige Konvergenz: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt gleichmäßig konvergent auf D gegen die Grenzfunktion f , wenn $\forall \varepsilon > 0$
 $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq N_\varepsilon \forall x \in D$
 $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f , dann ist auch f stetig.
 Funktionenräume: $\mathcal{C}([a, b]) := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$
 \mathbb{R} -Vektorraum (in der Regel unendlich dimensional)
 $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}_+, f \mapsto \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$
 Norm, normierter Raum $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$
 $\forall x, y \in V, \lambda \in \mathbb{R}$:
 $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Konvergenzbegriff in Norm: $f_n \rightarrow f$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \forall n \geq N$ Satz von Arzela-Ascoli: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}([a, b])$ Folge von gleichmäßig beschränkten (das heißt $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$) und gleichgradig stetig (das heißt $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall n \in \mathbb{N} : \sup_{|x-y| < \delta} |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$) dann gibt es eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in $\mathcal{C}([a, b])$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$
4 Differentialrechnung
 $f : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D$, definiere
 $D_h f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
 f heißt differenzierbar in x_0 , wenn für jede Nullfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Differenzenquotienten $(D_{h_n} f(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} D_{h_n} f(x_0)$ heißt Ableitung von f im Punkt

$x_0, f'(x_0)$.
 Alternativ: $\exists L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + r(x - x_0)$ mit $r(x - x_0)/(x - x_0) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0, f'(x_0) = L$
 f differenzierbar in $x_0 \implies f$ stetig in x_0 .
 f ist differenzierbar auf D , wenn f in jedem Punkt differenzierbar ist.
 Fasse f' als Funktion $f' : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$
 f heißt stetig differenzierbar, wenn f' stetig ist.
 n -te Ableitung: $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0), f^{(0)} = f$.
 f heißt glatt, wenn $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert.
 Stabilität: $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D$
 Linearität: $(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0) \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 Produktregel: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
 hat g keine Nullstelle, so gilt:
 Quotientenregel: $(f/g)'(x_0) = (f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0))/g^2(x_0)$
 Kettenregel: $f : D \rightarrow D', g : D' \rightarrow \mathbb{R}$ beide differenzierbar in $x_0 \in D, f(x_0) \in D'$. dann ist $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$ Satz von der inversen Funktion: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, injektiv, D abgeschlossen, f differenzierbar in $x_0 \in D, f : D \rightarrow f(D)$ bijektiv $\implies \exists f^{-1} : f(D) \rightarrow D$ und es gilt $(f^{-1})'(f(x_0)) = 1/f'(x_0)$
 Extremwertheorie: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein globales Extremum wenn gilt:
 $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in D$ (Maximum)
 $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in D$ (Minimum)
 f hat ein lokales Extremum, wenn obige Bedingungen auf einer δ -Umgebung von x_0 zutreffen.
 Satz von Extremum: (notwendige Bedingung)
 $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar hat lokales Extremum in $x_0 \in (a, b)$, dann gilt $f'(x_0) = 0$
 1. Mittelwertsatz: Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a, b) , dann gibt es $x \in (a, b)$, sodass

$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
 Hinreichende Bedingung: Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$, dann folgt f hat in x_0 ein lokales Extremum. (Maximum für $<$, Minimum für $>$)
 Taylorentwicklung: $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal stetig differenzierbar
 $t_n(x_0, x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$
 n -te Taylorpolynom mit Entwicklungsstelle x_0 .
 f $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar, dann gibt es zu jedem $x \in (a, b)$ ein ξ zwischen x_0 und x , sodass
 $f(x) - t_n(x_0, x) = R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$
 f glatt \implies
 $t_\infty(x_0, x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$
 f ist analytisch in x_0 , wenn es in $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ eine Umgebung gibt, sodass $f(x) = t_\infty(x_0, x)$ Regel von L'Hospital: $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sodass $g'(x) \neq 0$

und der Grenzwert $f'(x)/g'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} c \in \mathbb{R}$, dann gilt:
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \in \{-\infty, 0, \infty\} \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
 Differentiation und Limes: $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge stetig differenzierbarer Funktionen auf beschränkten Intervallen mit punktweisen Grenzwert $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ und gilt $f'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^*$ gleichmäßig, dann gilt f ist differenzierbar mit $f'(x) = f^*(x)$
5 Integration
 Zerlegung: $[a, b], Z := \{x_0, \dots, x_n\}, x_0 = a, x_n = b, x_0 < x_1 < \dots < x_n$.
 Feinheit: $h := \max_{k=1, \dots, n} |x_k - x_{k-1}|$
 Zerlegung äquidistant: $\iff h$ konstant in k .
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, Z$ Zerlegung, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$

Obersumme: $\bar{S}_Z f(x) := \sum_{k=1}^n \sup_{x \in I_k} f(x)(x_k - x_{k-1})$
 Untersumme: $\underline{S}_Z f(x) := \sum_{k=1}^n \inf_{x \in I_k} f(x)(x_k - x_{k-1})$
 Oberintegral: $\int_a^b f(x) dx := \inf_{Z \in \mathcal{Z}(a, b)} \bar{S}_Z f(x)$
 Unterintegral: $\int_a^b f(x) dx := \sup_{Z \in \mathcal{Z}(a, b)} \underline{S}_Z f(x)$
 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$
 f heißt Riemann-integrierbar, wenn
 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$
 $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists Z \in \mathcal{Z}(a, b) |\bar{S}_Z f(x) - \underline{S}_Z f(x)| < \varepsilon$
 Riemannsche Summe: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, Z$ Zerlegung, $\xi_k \in I_k$
 $RS_Z(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

Sei f beschränkt. f ist Riemann-integrierbar $\iff \forall (Z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit $h_n \rightarrow 0$ die zugehörigen Riemannschen Summen konvergieren und den gleichen Grenzwert haben.
 stetige Funktionen sind integrierbar.
 monotone Funktionen sind integrierbar.
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, dann auch für jedes $[c, d] \subseteq [a, b]$ und es gilt für $c \in [a, b]$:
 $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$
 Ferner ist das Integral linear, das heißt $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
 $\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$
 Monoton: $g(x) \geq f(x) \forall x \in [a, b] \implies$:
 $\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$
 Standardabschätzung: $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b] \implies$:
 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

Definitheit: $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b], \int_a^b f(x) dx = 0 \implies f(x) = 0$
 Mittelwertsatz: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ohne Voraussetzungen, dann gibt es $\xi \in [a, b]$ mit
 $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$ Stammfunktion:
 $F, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, F$ differenzierbar heißt Stammfunktion von f , wenn gilt: $F' = f$.
 Fundamentalsatz der Analysis: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig \implies :
 $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ ist eine Stammfunktion von f .
 Ist F Stammfunktion von f , dann gilt:
 $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
 Partielle Integration: $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt:
 $\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$
 Substitution: $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar, dann gilt:
 $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$

Definitheit: $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b], \int_a^b f(x) dx = 0 \implies f(x) = 0$
 Mittelwertsatz: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ohne Voraussetzungen, dann gibt es $\xi \in [a, b]$ mit
 $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$ Stammfunktion:
 $F, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, F$ differenzierbar heißt Stammfunktion von f , wenn gilt: $F' = f$.
 Fundamentalsatz der Analysis: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig \implies :
 $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ ist eine Stammfunktion von f .
 Ist F Stammfunktion von f , dann gilt:
 $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
 Partielle Integration: $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt:
 $\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$
 Substitution: $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar, dann gilt:
 $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$

Obersumme: $\bar{S}_Z f(x) := \sum_{k=1}^n \sup_{x \in I_k} f(x)(x_k - x_{k-1})$
 Untersumme: $\underline{S}_Z f(x) := \sum_{k=1}^n \inf_{x \in I_k} f(x)(x_k - x_{k-1})$
 Oberintegral: $\int_a^b f(x) dx := \inf_{Z \in \mathcal{Z}(a, b)} \bar{S}_Z f(x)$
 Unterintegral: $\int_a^b f(x) dx := \sup_{Z \in \mathcal{Z}(a, b)} \underline{S}_Z f(x)$
 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$
 f heißt Riemann-integrierbar, wenn
 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$
 $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists Z \in \mathcal{Z}(a, b) |\bar{S}_Z f(x) - \underline{S}_Z f(x)| < \varepsilon$
 Riemannsche Summe: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, Z$ Zerlegung, $\xi_k \in I_k$
 $RS_Z(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

Sei f beschränkt. f ist Riemann-integrierbar $\iff \forall (Z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{Z}(a, b)$ mit $h_n \rightarrow 0$ die zugehörigen Riemannschen Summen konvergieren und den gleichen Grenzwert haben.
 stetige Funktionen sind integrierbar.
 monotone Funktionen sind integrierbar.
 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, dann auch für jedes $[c, d] \subseteq [a, b]$ und es gilt für $c \in [a, b]$:
 $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$
 Ferner ist das Integral linear, das heißt $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
 $\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$
 Monoton: $g(x) \geq f(x) \forall x \in [a, b] \implies$:
 $\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$
 Standardabschätzung: $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b] \implies$:
 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$

Definitheit: $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b], \int_a^b f(x) dx = 0 \implies f(x) = 0$
 Mittelwertsatz: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ohne Voraussetzungen, dann gibt es $\xi \in [a, b]$ mit
 $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$ Stammfunktion:
 $F, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, F$ differenzierbar heißt Stammfunktion von f , wenn gilt: $F' = f$.
 Fundamentalsatz der Analysis: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig \implies :
 $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ ist eine Stammfunktion von f .
 Ist F Stammfunktion von f , dann gilt:
 $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
 Partielle Integration: $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt:
 $\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$
 Substitution: $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar, dann gilt:
 $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$