Einführung in die Numerik (Potschka)

Robin Heinemann

19. April 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Beispiel 1.1 Simulation einer Pendelbewegung
Modellannahmen:

- Masse m an Stange
- keine Reibung
- Stange: Gewicht 0, starr, Länge l
- Auslenkung ϕ

Erste Fehlerquelle: Modellierungsfehler
Modellgleichungen:

$$F_T(\phi) = -m \cdot g \sin \phi$$

Konsistenzcheck:

$$\begin{aligned} F_T(0) &= 0 && \text{(Ruhelage)} \\ F_T\left(\frac{\pi}{2}\right) &= F_G = -mg \end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen:

- Weg $s(t)$
- $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} =: v(t)$ Geschwindigkeit
- $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} =: a(t)$ Beschleunigung

Beziehungen:

- Bogenlänge $s(t) = l\phi(t)$
- 2. Newton'sches Gesetz ($F = ma$)

$$-mg\sin\phi(t) = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) = m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}s(t) = ml\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\phi(t)$$

$\Rightarrow$ DGL 2. Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\phi(t) = -\frac{g}{l}\sin\phi(t) \quad t \geq 0$$

Für eindeutige Lösung braucht man zwei Anfangsbedingungen:

$$\phi(0) = \phi_0 \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(0) = u_0$$

Lösung bei kleiner Auslenkung: Linearisiere um $\phi = 0$

$$\sin\phi = \phi - \frac{1}{3!}\phi^3 + \cdots \approx \phi$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\phi(t) = -\frac{g}{l}\phi(t)$$

Für $u_0 = 0$ findet man mit dem Ansatz $\phi(t) = A\cos(\omega t)$:

$$-\omega^2 A\cos(\omega t) = -\frac{g}{l}A\cos(\omega t)$$

die Lösung:

$$\phi(t) = \phi_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

Fehlerquelle: Abschneidefehler.
Numerische Lösung:
Setze $u(t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\phi\\ u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\ -\frac{g}{l}\sin(\phi)\end{pmatrix}$$

Appraximation mit Differenkenquotient

$$\begin{pmatrix}u(t)\\ -\frac{g}{l}\sin\phi(t)\end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\phi\\ u\end{pmatrix} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\begin{pmatrix}\phi(t+\Delta t)-\phi(t)\\ u(t+\Delta t)-u(t)\end{pmatrix} \approx \underset{\substack{\downarrow\\ >0,\text{ klein}}}{\frac{1}{\Delta t}}\begin{pmatrix}\phi(t+\Delta t)-\phi(t)\\ u(t+\Delta t)-u(t)\end{pmatrix}$$

Fehlerquelle: Diskretisierungsfehler
Auf Gitter $t_n = n\Delta t$ mit Werten $\phi_n = \phi(n\Delta t), u_n = u(n\Delta t)$:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \Delta t u_n, u_{n+1} = u_n - \Delta t\frac{g}{l}\phi_n$$

Kleinerer Diskretisierungsfehler mit zentralen Differenzen:

$$-\frac{g}{l}\sin\phi(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\phi(t) \approx \frac{\phi(t+\Delta t) - 2\phi(t) + \phi(t-\Delta t)}{\Delta t^2}$$

Rukursionsformel:

$$\phi_{n+1} = 2\phi_n - \phi_{n-1} - \Delta t^2\frac{g}{l}\sin\phi_n, n \geq 1$$

mit $\phi_1 = \phi_0 + \Delta t n_0$ (Expliziter Euler)
Letzte Fehlerquelle: Rundungsfehler