Theoretische Physik II (Hebecker)

Robin Heinemann

12. Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Lagrange - Formalismus **2**
- 1.1 Grundidee (1788, Joseph-Louis Lagrange) 2
- 1.2 Variationsrechnung: Der Funktionalbegriff 2
- 1.3 Weglänge als Funktional 3
- 1.4 Variationsrechnung: Extremalisierung von Funktionalen 3
- 1.5 Das Hamiltonsche Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung) 4
- 1.6 Form der Lagrange-Funktion und erste Anwendungen 5
- 1.7 Vereinfachte Herleitung der Lagrange-Gleichungen 7
- 1.8 Kommentare 7

2 Symmetrien und Erhaltungssätze **8**
- 2.1 Symmetriemotivation der Wirkung 8
  - 2.1.1 Freier Massenpunkt 8
  - 2.1.2 Mehrere Massenpunkte 9
- 2.2 Homogene Funktionen und Satz von Euler 9
- 2.3 Energieerhaltung 10
- 2.4 Erhaltung von verallgemeinerten Impulsen 11
- 2.5 Noether-Theorem 12
- 2.6 Mechanische Ähnlichkeit 14
- 2.7 Virialsatz 15

3 Trägheitstensor **15**
- 3.1 Trägheitsmoment und Satz von Steiner 15
- 3.2 Trägheitstesor 17
- 3.3 Hauptträgheitsachsen 18
- 3.4 Trägheitsellipsoid 19

1 Lagrange - Formalismus

1.1 Grundidee (1788, Joseph-Louis Lagrange)

Vorteile gegenüber Newton:

- Flexibilität
- Zwangskräfte
- Zusammenhang zwischen Symmetrie und Erhaltungsgrößen

Zentrales Objekt: Wirkungsfunktional S.
Abbildung S : Trajektorie $\mapsto$ reelle Zahl
(S definiert mittels Lagrange-Funktion L)
Zentrale physikalische Aussage des Formalismus: „Wirkungsprinzip“ („Hamilton-Prinzip“)
Letztes besagt: Eine physikalische Bewegung verläuft so, dass das Wirkungsfunktional minimal wird.
$\rightarrow$ DGL („Euler-Lagrange-Gleichung“), im einfachen Fall $\equiv$ Newton Gleichung

1.2 Variationsrechnung: Der Funktionalbegriff

Funktion (mehrerer Variablen) y;

$$y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, y : \vec{x} \mapsto y(\vec{x})$$

Funktional: analog, mit $\mathbb{R}^n$ ersetzt durch eine Menge von Funktionen (Vektorraum $\mathbb{V}$)

$$F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}, F : y \mapsto F[y]$$

Beispiel 1.1 $\mathbb{V}$ seinen differenzierbare Funktionen auf $[0, 1]$ mit $y(0) = y(1) = 0$
Diskretisierung:

$$x_1, \dots, x_n \rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Vektor} \equiv \text{Funktion}}}{\{y(x_1), \dots, y(x_n)\}}$$

$\implies$ im diskreten Fall ist unser Funktional schlicht eine Funktion mit Vektor-Argument. (Eigentlicher Funktionalbegriff folgt im Limes $n \rightarrow \infty$).
Beispielfunktionale zu obigem $\mathbb{V}$.

- $F_1[y] = y(0.5)$
- $F_2[y] = y'(0.3)$
- $F_3[y] = y(0.1) + y(0.5) + y'(0.9)$
- $F_4[y] = \int_0^1 \mathrm{d}x \Big(x \cdot y(x)^2 + y'(x)^2 \Big)$

- $F_5[y] = \int_0^1 \mathrm{d}x f(y(x), y'(x), x)$

F_5 hängt von Funktion f (von 3 Variablen) ab. Falls wir $f(a,b,c) = ca^2 + b^2$ wählen, folgt F_4 wählen. Noch konkreter: wähle Beispielfunktion (ignoriere zur Einfachheit Randbedingung $y(1) = 0$)

$$y_0 : x \mapsto x^2; y_0(x) = x^2; y_0'(x) = 2x;$$
$$\implies F_1[y_0] = 0.25; F_2[y_0] = 0.6, F_3[y_0] = 0.01 + 0.25 + 1.8 = 2.06$$
$$F_4[y_0] = \int_0^1 \mathrm{d}x\big(x^5 + 4x^2\big) = \frac{1}{6} + \frac{4}{3} = \frac{3}{2}$$

1.3 Weglänge als Funktional

Weg von $\vec{y}_a$ nach $\vec{y}_b$: $\vec{y} : \tau \mapsto \vec{y}(\tau), \tau \in [0,1]$; $\vec{y}(0) = \vec{y}_a$, $\vec{y}(1) = \vec{y}_b$
Weglänge:

$$F[\vec{y}] = \int_{\vec{y}_a}^{\vec{y}_b} |\mathrm{d}\,\vec{y}| = \int_0^1 \mathrm{d}\tau \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\,\vec{y}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2}$$

(Eigentlich haben wir sogar ein Funktional einer vektorwertigen Funktion beziehungsweise ein Funktional mit 3 Argumenten: $F[y] = F[y^1, y^2, y^3]$)
Etwas interessanter: Weglänge im Gebirge:
Sei $\vec{x}(\tau) = \{x^1(\tau), x^2(\tau)\}$ die Projektion des Weges auf Horizontale. Zu jedem solchen Weg gehört die „echte“ Weglänge im Gebirge. Beachte: Höhenfunktion $z : \vec{x} \mapsto z(\vec{x})$
$\implies$ 3-d Weg:

$$\begin{aligned}\vec{y}(\tau) &= \{y^1(\tau), y^2(\tau), y^3(\tau)\}\\ &\equiv \{x^1(\tau), x^2(\tau), z(\vec{x}(\tau))\}\end{aligned}$$
$$F_{Geb.}[x] = F[\vec{y}[\vec{x}]] = \int \mathrm{d}t \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x^1(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}x^2(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z(x^1(\tau), x^2(\tau))}{\mathrm{d}\tau}\right)}$$

1.4 Variationsrechnung: Extremalisierung von Funktionalen

Funktionen: $y : x \mapsto y(x)$; wir wissen y hat Extremum bei $x_0 \implies y'(x_0) = 0$
Funktionale der Form: $F[y] = \int_0^1 \mathrm{d}x f(y, y', x); y : [0,1] \to \mathbb{R}; y(0) = y_a; y(1) = y_b$
Annahme: y_0 extremalisiert F. Sei weiterhin δy eine beliebige 2-fach differenzierbare Funktion mit $\delta y(0) = \delta y(1) = 0$

$$\implies \underbrace{y_\alpha \equiv y_0 + \alpha \cdot \delta y}_{\text{Ist eine Funktion aus unserem Wertevorrat von } F} \quad (\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon))$$

$\implies$ Betrachte Abbildung $(-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}, \alpha \mapsto F[y_\alpha]$. Per unserer Annahme hat diese Abbildung Extremum bei $\alpha = 0$. Also gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} F[y_\alpha] = 0\Big|_{\alpha=0}$$

Taylor-Entwicklung um $\alpha = 0$:

$$F[y_\alpha] = \int_0^1 \mathrm{d}x f\big(y_0 + \alpha\delta y, y_0' + \alpha\delta y', x\big)$$
$$= F[y_0] + \int_0^1 \mathrm{d}x \left(\frac{\partial f}{\partial y}(y_0, y_0', x) \cdot \alpha\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}(y_0, y_0', x) \cdot \alpha\delta y' \right) + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

Term linear in α muss verschwinden:

$$0 = \int_0^1 \mathrm{d}x \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta y) \right)$$

$\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y = 0$ bei $0, 1$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) \delta y = 0$$

für beliebige $\delta y \implies$ der Koeffizient von δy im Integral muss verschwinden

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial t}{\partial y'} \right) \qquad \text{(Eulersche Differentialgleichung)}$$

Falls y_0 das Funktional F extremalisiert, so gilt die obige Gleichung für $y_0 \forall x \in [0, 1]$

Beispiel 1.2 $f(y, y', x) = y^2 + y'^2$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} 2y' = 2y''$$
$$\implies y_0'' - y_0 = 0$$

Beachte: y und y' sind hier unabhängig, das heißt es spielt für die Herleitung der Eulerschen Differentialgleichung keine Rolle, dass y' die Ableitung von y ist.

1.5 Das Hamiltonsche Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung)

Die Lage einer sehr großen Klasse von Systemen beschreiben durch verallgemeinerte Koordinaten $(q_1, \ldots, q_s)$, s : Zahl der Freiheitsgrade.

Beispiel 1.3
- N Massenpunkte: $s = 3N, (q_1, \ldots, q_{3N}) = \big(x_1^1, x_1^2, x_1^3, \ldots, x_N^1, x_N^2, x_N^3\big)$
- 1 Massenpunkt in Kugelkoordinaten: $s = 3, (q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \varphi)$
- eine dünne Stange: $s = 5$. Schwerpunktskoordinaten x_s^1, x_s^2, x_s^3. 2 Winkel zur Ausrichtung θ, φ
- Rad auf einer Welle: $s = 1, q_1 = \varphi$

- Perle auf einem Draht: $s = 1, q_1 = s$ (Bogenlänge)

Hamiltonsches Prinzip:
Für jedes (in einer sehr großen Klasse) mechanische System s Freiheitsgraden existiert die Lagrange-Funktion $L(q_1, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s, t)$ (kurz $L(q, \dot{q}, t)$), für die gilt:
Die physikalische Bewegung aus einer Lage $q(t_1) = q^{(1)}$ in eine Lage $q(t_2) = q^{(2)}$ verläuft so, dass das Wirkungsfunktional

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t L(q, \dot{q}, t)$$

extremal wird.

Anmerkung 1.4
- für kleine Bahnabschnitte: Minimalität
- DGL. aus Stationalität
- Wirkung: Dimensionsgründe $[S] = $ Zeit $\cdot$ Wirkung
- Bedeutung des Wirkungsprinzip kann man kaum überschätzen. [spezielle + allgemeine Relativitätstheorie, Feldtheorie (Elektro-Dynamik), Quantenfeldtheorie (Teilchenphysik, kondensierte Materie), Quantengravitation]

für $s = 1$ folgt aus dem Hamiltonschen Prinzip:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

(Euler-Lagrange-Gleichung, oder Lagrange-Gleichung der 2. Art)
für $s \geq 1$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = 1, \ldots, s$$

1.6 Form der Lagrange-Funktion und erste Anwendungen

Fundamentaler Fakt:

$$L = T - V$$

- T: kinetische Energie
- V: potentielle Energie

Beispiel 1.5 (Massenpunkt im Potenzial)

$$\begin{aligned} L\left(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t\right) &= \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial}{\partial x^i} L &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m \dot{x}^i\right) - \left(-\frac{\partial V}{\partial x_i}\right) &= 0 \\ m \ddot{x}^i - F^i &= 0 \\ m \ddot{\vec{x}} - \vec{F} &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel 1.6 (System wechselwirkender Massenpunkte)

$$\begin{aligned} T &= \sum_a T_a = \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\vec{x}}_a{}^2 \\ V &= \sum_{\substack{a,b \\ a<b}} V_{ab}(|x_a - x_b|) \end{aligned}$$

Lagrange Gleichung für x_a^i:

$$\begin{aligned} m_a \ddot{x}_a^i - \frac{\partial}{\partial x_a^i}\left(\sum_b V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)\right) &= 0 \\ m_a \ddot{\vec{x}}_a - \vec{\nabla}_a \sum_b V_{ab}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|) &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel 1.7 (Perle auf Draht) Draht: beschrieben durch $\vec{x}(s)$ (s: Bogenlänge)

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} v^2 - V(\vec{x}(s)) \\ v &= \left|\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}s}\right| \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \\ L &= \frac{m}{2} \dot{s}^2 - V(\vec{x}(s)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} &= 0 \\ m\ddot{s} - \sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x^i}}_{-\frac{\partial V}{\partial x^i}} \frac{\partial x^i}{\partial s} &= 0 \\ m\ddot{s} - \vec{F} \cdot \frac{\vec{x}}{s} &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel 1.8 (Mathematisches Pendel im Fahrstuhl) Beschleunigung des Fahrstuhls: $v_y = a \cdot t$

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} \vec{v}^2 - V \\ \vec{v} &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(l \sin\varphi), at - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(l\cos\varphi)\right) \\ &= (l\cos(\varphi)\dot{\varphi}, at + l\sin\varphi\dot{\varphi}) \\ V &= mg\left(\frac{a}{2}t^2 - l\cos\varphi\right) \\ 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{m}{2}\big(l^2\cos^2\varphi 2\dot\varphi + 2atl\sin\varphi + l^2\sin^2\varphi 2\dot\varphi\big)\Big) - \\ \Big(\frac{m}{2}\big(l^2\dot\varphi^2 2\cos\varphi(-\sin\varphi) + 2atl\dot\varphi\cos\varphi + l^2\dot\varphi^2 2\sin\varphi\cos\varphi\big) - mgl\sin\varphi\Big)$$

$$0 = \big(2l^2\cos\varphi(-\sin\varphi)\dot\varphi^2 + l^2\cos^2\varphi\ddot\varphi + al\sin\varphi + atl\cos\varphi\dot\varphi + l^2 2\sin\varphi\cos\varphi\dot\varphi^2 + l^2\sin^2\varphi\ddot\varphi\big) \\ - tal\dot\varphi\cos\varphi + gl\sin\varphi$$

$$0 = l^2\ddot\varphi + l\sin\varphi(a+g)$$

1.7 Vereinfachte Herleitung der Lagrange-Gleichungen

$q(t)$ Trajektorie, Variation der Trajektorie: $\delta q(t)$

- neue Trajektorie: $q(t) + \delta q(t)$.
- neue Wirkung $S + \delta S$ Anders gesagt: $\delta S \equiv S[q+\delta q] - S[q]$.

Extremalität:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\delta L(q,\dot q,t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\left[\frac{\partial L(q,\dot q,t)}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L(q,\dot q,t)}{\partial \dot q}\delta\dot q\right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q)\right] \end{aligned}$$

Partielle Integration, nutze $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q\right) \\ 0 &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q \end{aligned}$$

δq beliebig $\implies$ Term muss verschwinden

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = 0 \checkmark$$

1.8 Kommentare

Argumente von L: $\ddot q$, $\dddot q$, etc. dürfen nicht in L vorkommen, weil sonst $\dddot q$, $\ddddot q$, etc. in den Bewegungsgleichungen vorkommen würden. Dann reichen $\vec x(t_0) \wedge \vec v(t_0)$ nicht mehr zur Lösung des Anfangswertproblems.

Totale Zeitableitungen:
Seinen L, L' zwei Lagrangefunktionen mit

$$
\begin{aligned}
L' &= L + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(q,t) \\
\implies S' &= S + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(q,t) = S + \underbrace{(f(q(t_2),t_2) - f(q(t_1),t_1))}_{\text{variiert nicht}} \\
\implies \delta S' &= \delta S
\end{aligned}
$$

$\implies$ L' physikalisch äquivalent zu L (L ist nur bis auf totale Zeitableitungen definiert.)
Bedeutung von S in der QM:
In der Quantenmechanik ist die Wahrscheinlichkeit w für den Übergang von $\left(q^{(1)}, t_1\right)$ zu $\left(q^{(2)}, t_2\right)$ gegeben durch

$$
w \sim |A|^2
$$

, $A \in \mathbb{C}$ ist „Amplitude“, mit

$$
A \sim \int Dqe^{\frac{iS[q]}{\hbar}}
$$

$\int Dq$ - Summe über alle mögliche Trajektorien („Wege“), („Pfade“).
Im Limes $\hbar \to 0$ dominiert klassischer Weg. Grund: S ist an dieser Stelle stationär. Beiträge von „ganz anderen“ Wegen heben sich wegen schneller Oszillation von $\exp[iS/\hbar]$ weg.

2 Symmetrien und Erhaltungssätze

Zentrales Ziel: **Noether Theorem** (Emmy Noether - 1918)
„Zu jeder Kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems gehört eine Erhaltungsgröße.“
Idealfall: Symmetrien $\implies$ Form der Wirkung. Wirkung hat Symmetrie $\implies$ Erhaltungsgrößen.

2.1 Symmetriemotivation der Wirkung

2.1.1 Freier Massenpunkt

Homogenität von Raum und Zeit $\implies$ $L(\vec{x}, \vec{v}, t) = L(\vec{v})$.
Isotropie des Raumes $\implies$ $L = L\left(\vec{v}^2\right)$.
Betrachte (kleine) Galilei-Boosts: $\vec{v} \to \vec{v}' = \vec{v} + \vec{\varepsilon}$.

$$
L\left(\vec{v}^2\right) \to L\left(\vec{v}^{2\prime}\right) = L\left(\vec{v}^2 + 2\,\vec{v} \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{\varepsilon}^2\right)
$$

Taylorentwicklung:

$$
= L\left(\vec{v}^2\right) + \frac{\partial L\left(\vec{v}^2\right)}{\partial\left(\vec{v}^2\right)}(2\,\vec{v}\,\vec{\varepsilon}) + \mathcal{O}\left(\vec{\varepsilon}^2\right)
$$

Falls nun $\left(\partial L/\partial\,\vec{v}^2\right) = \text{const.}$, so gilt

$$
\frac{\partial L}{\partial\,\vec{v}^2}(2\,\vec{v}\,\vec{\varepsilon}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\,\vec{v}^2}(2\,\vec{x}\,\vec{\varepsilon})\right)
$$

$\implies$ wir fordern, dass $\partial L/\partial\,\vec{v}^2$ eine Konstante ist und nennen diese $m/2$. $\implies$ $L = \frac{m}{2}\,\vec{v}^2$

2.1.2 Mehrere Massenpunkte

Für unabhängige Systeme können wir die Lagrangefunktionen schlicht addieren:

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) = L_1(q_1, \dot{q}_2, t) + L_2(q_2, \dot{q}_2, t)$$

Dazu rechnen wir nach, dass die Anwendung der Differentialoperatoren

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2)$$

auf L und Nullsetzen äquivalent ist zur Anwendung des Operators „1“ auf L_1 und „2“ auf L_2. Dies gibt aber gerade die Lagrangefunktionen und es ist somit egal ob ich $L_1 + L_2$ oder L_1 und L_2 getrennt als Lagrange-Funktionen betrachte

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial}{\partial q_1}\right)L = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial}{\partial q_1}\right)L_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L_1}{\partial q_1} \overset{!}{=} 0$$

Also Mehrere Massenpunkte:

$$L = \sum_a \frac{m_a}{2}\vec{v}_a^2$$

$\implies$ $L = T$ mit $T =$ kinetische Energie. Hinzunahme von Wechselwirkungen der Form

$$V = \sum_{a<b}^{V_{ab}}(|\vec{x}_a - \vec{x}_b|)$$

respektiert Galilei-Invarianz. Also Vorschlag: $L = T - V$ wie oben eingeführt. Aber: T, V sind im Moment nur Namen.

2.2 Homogene Funktionen und Satz von Euler

Eine Funktion f von n Variablen heißt homogen von Grad k falls $f(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, \ldots, x_n)$.

Beispiel 2.1 $f(x) = x^p$ ist homogen von Grad p.

Beispiel 2.2 $f(x, y, z) = \frac{x}{yf} + \frac{1}{z}\cos\left(\frac{x}{z}\right)$ ist homogen von Grad -1.

Beispiel 2.3 (”Unser Bespiel”)

$$T(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = \frac{1}{2} f_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j \text{ Summe!}$$

homogen **in den** $\dot{q}_i$ vom Grad 2.

Satz 2.4 (Satz von Euler) $f(x_1, \ldots, x_n)$ homogen von Grad k

$$\implies \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = kf$$

Begründung:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\Big(\alpha^k f(x_1, \dots, x_n)\Big)$$
$$\implies \sum_i \frac{\partial f(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)}{\partial(\alpha x_i)} \frac{\partial \alpha x_i}{\partial\alpha} = k\alpha^{k-1} f(x_1, \dots, x_n)$$

Setze $\alpha = 1$

$$\implies \sum_i \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} x_i = k f(x_1, \dots, x_n)$$

2.3 Energieerhaltung

Homogenität von t „$\implies$“ $L(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q})$
Wir betrachten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L = \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \qquad \text{(Kettenregel)}$$

Euler-Lagrange-Gleichung ($\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$)

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{q}_i$$

Produktregel

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i\right)$$
$$\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L\right)}_{=:E} = 0$$
$$\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E = 0$$

Beispiel 2.5

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = m\dot{x}^2 - \Big(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V\Big)$$
$$= \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V$$

Um dies allgemeiner zu zeigen: Satz von Euler. Wir nehmen an, dass L folgende Form hat:

$$L = T - V = \frac{1}{2} f_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - V(q)$$

Begründung: Diese Form ergibt sich typischerweise, wenn man

$$\sum_a \frac{m_a}{2}\dot{\vec{x}}_a^2 - V(\vec{x})$$

in verallgemeinerte Koordinaten umschreibt.
Mit dieser Annahme folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{1}{2} f_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k\right)\dot{q}_i \\ &= \frac{1}{2} f_{jk}\delta_{ij}\dot{q}_k\dot{q}_i + \frac{1}{2} f_{jk}\dot{q}_j\delta_{ik}\dot{q}_i \\ &= f_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k = 2T\end{aligned}$$

Leichter mit Satz von Euler

$$E \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = 2T - (T - V) = T + V \checkmark$$

2.4 Erhaltung von verallgemeinerten Impulsen

In einen durch $q_1, \ldots, q_s$ parametrisierten System heißen

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

„verallgemeinerte Impulse“
Bekannter Fall:

$$L = \sum_{i=1}^{3} \frac{m}{2}\dot{x}_i^2$$

mit

$$p_i = m\dot{x}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$$

Eine Koordinate heißt „zyklisch“, falls die **nicht** explizit in L vorkommt (Ableitung darf vorkommen).

Beispiel 2.6

$$L = L(q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_s)$$

In dieser Situation ist die Transformation $q_1 \to q_1' = q_1 + \varepsilon$ eine Symmetrie.

Sei q_1 zyklisch. Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \qquad \text{(Euler-Lagrange-Gleichung)}$$

$\partial L/\partial q_1 = 0$ per Annahme

$$\begin{aligned} \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_1) &= 0 \end{aligned}$$

$\implies$ „Die verallgemeinerten Impulse zyklischer Koordinaten sind erhalten.“

Beispiel 2.7 Massenpunkt in Potential, dass nicht von x_1 abhängt. Noch konkreter: schräger Wurf:

$$V(x_1, x_2, x_3) = mgx_3$$

$\implies$ x_1, x_2 zyklisch.

Beispiel 2.8 (Massenpunkt in Ebene mit Zentralpotential)

$$L = \frac{m}{2}\left(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2\right) - V(q)$$

φ zyklisch
$\implies$ $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$: Betrag des Drehimpulses. (Dieses Beispiel erklärt den Namen „zyklisch“ im Sinne von periodisch)

2.5 Noether-Theorem

Definition 2.9 (kontinuierliche Transformation)

$$\begin{aligned} q(t) \to q'(t) &= q(t) + \delta q(t) \\ &= q(t) + \varepsilon\chi(t) \end{aligned}$$

$\varepsilon \in \mathbb{R}$, sodass $\varepsilon \to 0$ möglich ist.

Definition 2.10 (kontinuierliche Transformation) Damit diese Transformation eine Symmetrie ist, fordern wir **Invarianz der Bewegungsgleichungen**, also

$$\delta L \equiv L(q + \delta q, \dot{q} + \dot{\delta}; t) - L(q, \dot{q}, t) = \varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f$$

Wir betrachten

$$\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f = \delta L = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}$$

mit Euler-Lagrange:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q\right) \\
\implies 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q - \varepsilon f\right) \\
&= \varepsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\chi - f\right)}_{\text{Erhaltungsgröße}} \qquad \text{(Erhaltungsgröße)}
\end{aligned}
$$

Satz 2.11 (Noether-Theorem) Noether-Theorem (nach analoger Rechnung mit $q_1, \ldots, q_n$):
Falls $\delta q_i = \varepsilon \chi_i$ Symmetrie (also $\delta L = \varepsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f$) gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\chi_i - f\right) = 0$$

Beispiel 2.12 (Zeittranslation) $q(t) \to q'(t) = q(t+\varepsilon) = q(t) + \dot q(t)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$
$\delta q = \dot q \varepsilon = \varepsilon \chi \implies \chi = \dot q$ Berechne δL:

$$
\begin{aligned}
\delta L &= \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta \dot q = \varepsilon \frac{\partial L}{\partial q}\dot q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\varepsilon \ddot q \\
&= \varepsilon\left(\frac{\partial L}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{\mathrm{d}\dot q}{\mathrm{d}t}\right) = \varepsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L \\
\implies \frac{\partial L}{\partial \dot q}\chi - f &= \frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q - L = E \checkmark
\end{aligned}
$$

Beispiel 2.13 (Verschiebung zyklischer Koordinate)

$$q' = q + \varepsilon \implies \chi = 1, \delta L = 0 \implies f = 0$$

Erhaltungsgröße:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q}\chi - f = \frac{\partial L}{\partial \dot q} = p \qquad \text{(verallgemeinerter Impuls)}$$

Zusammenstellung zu Galilei Transformationen

Symmetrie	Erhaltungsgröße
Zeittranslation	Energie
Translation	Impuls
Rotation	Drehimpuls
Boosts	$\vec{x}_s - \vec{v}_s \cdot t$

zum Boost:
$\vec{x}_s - \vec{v}_s \cdot t =$ const. Schwerpunkt bewegt sich geradlinig und gleichförmig.

2.6 Mechanische Ähnlichkeit

Lagrangefunktion:

$$L = \sum_a \frac{m_a}{2} \dot{\vec{x}}_a^2 - V(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$$

Sei V homogen in den x_a^i von Grad k.
Sei $\{\vec{x}_a(t)\}$ beziehungsweise $[t \mapsto \{\vec{x}_a(t)\}]$ eine physikalische Bewegung. Kurz: $t \mapsto x(t)$.
Betrachte Transformation: $x \to \alpha x, t \to \beta t \forall t, x$.
Alte Bewegung: $\{t \to x(t)\}$, Neue Bewegung $\{\beta t \mapsto \alpha x(t)\}$.
Variablenweschsel: $t' = \beta t$ und anschließend $t' \to t$. Neue Bewegung: $\{t \mapsto \alpha x(t/\beta)\}$
Betrachte nun Transformationen von T, V

$$T, V \to \Big((\alpha/\beta)^2 T, \alpha^k V\Big)$$

Fordere nun $\alpha^k = (\alpha/\beta)^2 \implies L \to \alpha^k L$
Beachte:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

ist homogen in L, x, t jeweils vom Grad $\{1, -1, 0\}$
$\implies$ Falls alte Bewegung Lösung $\implies$ neue Bewegung auch Lösung.(entscheidend: $L \to \alpha_k L$)
$\implies$ **„Mechanische Ähnlichkeit“**.

Definition 2.14 (Mechanische Ähnlichkeit) $\beta = \beta(\alpha)$ so wählbar, dass $x \to \alpha x, t \to \beta t \implies L \to \alpha^k L$.

Anwendung:
Sei X typische Länge einer Bewegung (Bahnradius, Entfernung von Umkehrpunkten, etc.). Sei T typische Zeit (Periode, Zeit zwischen Umkehrpunkten, etc.). Seien $X' = \alpha X, T' = \beta T$ die entsprechenden Größen ähnlischer Bewegungen. Dann gilt:

$$\frac{T'}{T} = \beta = \alpha^{1-k/2} = \left(\frac{X'}{X}\right)^{1-k/2}$$

Beispiel 2.15 (Harmonischer Oszillator)

$$V \sim x^2 \implies k = 2 \implies \frac{T'}{T} = 1$$

Beispiel 2.16 (Freier Fall)

$$V \sim x \implies k = 1 \implies \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{X'}{X}}$$

Beispiel 2.17 (Gravitation)

$$V \sim \frac{1}{x} \implies k = -1 \implies \frac{T'}{T} = \frac{{X'}^{3/2}}{X}$$

2.7 Virialsatz

Betrachte Zeitmittel: $< A >:= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{d}t' A t'$ (besonders leicht zu berechnen für totale Zeitableitungen).
Ziel: $< T >$ (kinetische Energie)
Also: Versuche T als totale Zeitableitung zu schreiben. (zur Vereinfachung in 1D, ein Teilchen)

$$\begin{aligned}
2T = mv^2 2 = p\dot{x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(px) - \dot{p}x \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(px) + x\frac{\partial V}{\partial x} \\
\implies 2T - x\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(px) \\
\implies < 2T - x\frac{\partial V}{\partial x} > &=< \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(px) > \\
&= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\left(px\big|_t - px\big|_0\right) = 0 \qquad \text{(falls } p, x \text{ beschränkt)}
\end{aligned}$$

Definition 2.18 (Virialsatz) Für Bewegungen in beschränkten Gebieten mit beschränket Geschwindigkeiten gilt:

$$2 < T >=< \sum_a \vec{x}_a \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_a} >=< \sum_a \sum_{i=1}^3 x_a^i \frac{\partial V}{\partial x_a^i} >$$

Beispiel 2.19 (homogenes Potential) Falls V homogen von Grad k: $2 < T >= k < V >$

Beispiel 2.20 (harmonischer Oszillator) $< T >=< V >$

Beispiel 2.21 (Gravitation) $k = -1, 2 < T >= - < V >$

3 Trägheitstensor

3.1 Trägheitsmoment und Satz von Steiner

Rotation von Körper um feste Achse A. Körper besteht aus Elementen m_a mit Radius $r_{a,\perp}$. Kontinuierlich: $m_a = \rho\Delta V$. Einzige erlaubte Bewegung sei Drehung um Achse A:

$$\begin{aligned}
T \simeq \sum_a \frac{m_a}{2} v_a^2 &= \sum_a \frac{m_a}{2}\omega_2 r_{a,\perp}^2 \\
&= \frac{1}{2} I_A \omega^2 \\
\implies I_A &\equiv \sum_a m_a r_{a,\perp}^2
\end{aligned}$$

Trägheitsmoment im Kontinuum:

$$I_A = \int \mathrm{d}^2\,\vec{r}\rho(\vec{r}) r_\perp^2$$

Einziger Freiheitsgrad: Drehwinkel φ (wobei $\omega = \dot{\varphi}$)

$$L(\varphi, \dots \varphi) = \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2 - V(\varphi)$$
$$\implies I_A \ddot{\varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

Annahme: V ergibt sich als Summe der Potentiale aller Teilmassen:

$$V(\varphi) = \sum_a V_a(\vec{r}_a(\varphi))$$

Betrachte

$$\begin{aligned}
V(\varphi + \delta\varphi) &= \sum_a V_a(\vec{r}_a(\varphi) + \delta\vec{v}_a) \\
&= \sum_a V_a(\vec{r}_a(\varphi) + \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_a(\varphi)) \\
&= \sum_a V_a + \sum_a (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_a) \cdot \vec{\nabla} V_a(\vec{r}_a(\varphi)) \\
V(\varphi + \delta\varphi) - V(\varphi) &= \sum_a (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_a) \vec{\nabla} V_a(\vec{r}_a(\varphi))
\end{aligned}$$

Limes $\delta\varphi \to 0, \delta\vec{\varphi} = \vec{e}_A \delta\varphi$, $\vec{e}_A$ Einheitsvektor der Achse

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}V(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} &= -\sum_a \frac{\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_a}{\delta\varphi} \vec{\nabla} V \\
&= \sum_a \varepsilon_{ijk} (\vec{e}_A)_j (\vec{r}_a)_k \cdot (F_a)_i \\
&= \sum_a (\vec{e}_A)_j \Big(\vec{r}_a \times \vec{F}_a\Big)_j = \sum_a \vec{e}_A \cdot \vec{M}_a
\end{aligned}$$

$\vec{M}_a$: Drehmoment auf Punkt „a“.
Zuletzt: $I_A \ddot{\varphi} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi}$

$$\implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_A \dot{\varphi}) = \vec{e}_A \vec{M}$$

$\vec{M}$: Gesamtdrehmoment.
Erinnerung: Drehimpuls für Punktmasse: $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$

$$\implies \vec{e}_A \cdot \vec{L} = m\vec{e}_A[\big(\vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp\big) \times \vec{r}]$$

$$|\vec{r}_\perp \times \vec{v}| = |\vec{r}_\perp||\vec{v}| = |\vec{r}_\perp||\vec{r}_\perp|\dot{\varphi}$$
$$\implies \vec{e}_A \vec{L} = m r_\perp^2 \dot{\varphi} \implies \vec{e}_A \vec{L} = I_A \dot{\varphi}$$
$$\implies \vec{e}_A \cdot \dot{\vec{L}} = \vec{e}_A \vec{M}$$

Bemerkung: I_A ist besonders einfach zu berechnen falls $A \parallel S$ (Schwerpunktsachse) und I_S bekannt, $\vec{R}_\perp$ ist der (senkrechte) Abstand der beiden Achsen.

$$I_A = \sum_a m_a v_{0,\perp}^2 = \sum_a m_a \Big(\vec{R}_\perp + \vec{r}'_{\perp,a} \Big)^2$$

Summe der Mischterme fällt weg

$$I_A = \sum_a m_a \Big(\vec{R}_\perp^2 + \vec{r}'^2_{a,\perp} \Big)$$

Satz von Steiner:

$$\Longrightarrow \quad I_A = M \vec{R}_\perp^2 + I_s$$

3.2 Trägheitstesor

Berechne kinetische Energie einen Körpers der sich mit $\vec{v}$ und mit $\vec{\omega}$ um Achse durch Schwerpunkt dreht.

$$\begin{aligned} T &= \sum_a \frac{m_a}{2} \vec{v}_a^2 = \sum_a \frac{m_a}{2} (\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}_a)^2 \\ &= \sum_a \frac{m_a}{2} \Big(\vec{v}^2 + 2 \vec{v} (\vec{\omega} \times \vec{r}_a) + (\vec{\omega} \times \vec{r}_a)^2 \Big) \end{aligned}$$

Mischtermfällt weg, da $\sum_a m_a \vec{r}_a = 0$, wegen Schwerpunktbedingung

$$\begin{aligned} &= \frac{M}{2} \vec{v}^2 + \sum_a \frac{m_a}{2} (\vec{\omega} + \vec{r}_a)^2 \\ &= \frac{M}{2} \vec{v}^2 + \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j \\ I_{ij} &\equiv \sum_a m_a \Big(\delta_{ij} \vec{r}_a^2 - (\vec{r}_a)_j (\vec{r}_a)_j \Big) \end{aligned}$$

Integralform:

$$I_{ij} = \int \mathrm{d}^3 \vec{r} \rho(\vec{r}) \big(\delta_{ij} \vec{r}^2 - r_i r_j \big)$$

Speziell für $\vec{r} = (x, y, z)$ findet man:

$$I = \int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \rho(\vec{r}) \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.1 (homogener Würfel) $\int \mathrm{d}x \to \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x$

$$\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}y y^2 \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}z = a \cdot \frac{a^3}{12} \cdot a$$

Insgesamt:

$$I = a^2 \rho \begin{pmatrix} \frac{1}{6}a^3 & & \\ & \frac{1}{6}a^3 & \\ & & \frac{1}{6}a^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} M a^2 \mathbb{1}$$

3.3 Hauptträgheitsachsen

Tensor ist (wie) Vektor ein geometrisches Objekt. Er beschreibt Dichte/ Form des Körpers. Bei Drehungen des Körpers: Dreht sich mit: $I'_{ij} = R_{ik} R_{jl} I_{kl} \iff I' = RIR^T = RIR^{-1}$ (aktive Sicht).
Passire Sicht: Für die Komponenten von I im gedrehten Koordinatensystem gilt:

$$I'_{ij} = R_{ik} R_{jl} I_{kl}$$

Zentraler Satz: Jede symmetrische, reelle Matrix kann durch eine orthogonale Transformation auf Diagonalform gebracht werden. $\Longrightarrow$ Wir können als stets den Körper so drehen beziehungsweise das Koordinatensystem so wählen, dass

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

I_1, I_2, I_3 heißen Hauptträgheitsmonente. Die Koordinaten $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ des Systems in dem I diagonal ist heißen Hauptträgheitsachsen. (im Allgemeinen sind dies die Symmetrieachsen des Körpers, soweit vorhanden).
Sei $\vec{v} = 0$, sei $\vec{\omega} = \omega \hat{e}$ ($\hat{e}$ beliebiger Einheitsvektor).

$$\Longrightarrow T = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j = \frac{1}{2} I_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j \omega^2 \equiv \frac{1}{2} I_e \omega^2$$

(Daher ist $I_e \equiv I_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j$) das Trägheitsmoment bezüglich $\hat{e}$.
Sei speziell I diagonal und $\hat{e} = \hat{e}_1 = (1, 0, 0)$. Es folgt $I_e = I_{11} = I_1$, sprich: Die Hauptträgheitsmomente sind also gerade die Trägheitsmomente bezüglich die Hauptträgheitsachsen.
Außerdem gilt:

$$I_{ij} (\hat{e}_1)_j = I_{ij} \delta_{j1} = I_{i1} = I_1 \delta_{i1} = I_1 (\hat{e}_1)_i$$

Matrixschreibweise:

$$I \hat{e}_1 = I_1 \hat{e}_1$$

Demnach ist $\hat{e}_1$ ein **Eigenvektor** von I mit **Eigenwert** I_1. Die Existenz eines gewissen Eigenvektors und dessen Eigenwert sind **koordinatenunabhängig**! In der Tat:

$$\begin{aligned} R \cdot I \hat{e}_1 &= I_1 R \hat{e}_1 \\ (RIR^{-1}) R &= I_1 R \hat{e}_1 \\ I' \hat{e}'_1 &= I_1 \hat{e}'_1 \qquad \hat{e}'_1 = R \hat{e}_1 \end{aligned}$$

Wir sehen: Die Matrix I hat 3 Eigenvektoren $\hat{e}_{(a)}$. Diese Eigenvektoren definieren die Hauptträgheitsachsen. Die Eigenwerte I_a sind die entsprechenden Hauptträgheitsmomente.

3.4 Trägheitsellipsoid

Bisher: $I_{\text{würfel}} = \frac{1}{6}Ma^2\mathbb{1}$
Nächstes Beispiel: Kugel, ohne Rechnung: $I \sim \mathbb{1}$, Warum?
Es muss gelten: $I = RIR^{-1} \forall R \in SO(3)$. Fakt: δ_{ij} ist der einzige invariante Tensor von $SO(3)$ mit zwei Indizes.