Experimentalphysik II (H.-C. Schulz-Coulon)

Robin Heinemann

5. Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

11 Elektrostatik

11.1 Elektrische Ladung

- Neue Kraft
- anziehend oder abstoßend
- Konzept der elektrischen Ladung

Experimentelle Erkenntnisse:

- Erzeugung von Ladungen durch Reibung
- Ladungen gleicher Vorzeichen: Abstoßung
- Ladungen ungleicher Vorzeichen: Anziehung
- Ladung kann transportiert werden
- Elektrische Kräfte sind Fernkräfte

- Ladungen sind erhalten

Definition 11.1 Influenz Ladungstrennung durch die (Fern) Wirkung elektrischer Kräfte nennt man Influenz oder elektrostatische Induktion.

11.2 Mikroskopische Deutung

Elektron: negativ
Proton: positiv
Atome elektrische neutral

- Z: Anzahl Protonen / Elektronen
- N: Anzahl Neutronen
- A: Anzahl Neutronen + Protonen

Leiter und Nichtleiter: Unterschiedliche Verfügbarkeit von Ladungsträgern

11.3 Coulombsches Gesetz

Experimentelles Resultat:

$$\vec{F}_C = K\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

Definition 11.2

$$\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

mit $\varepsilon_0 = 8.854\,16 \times 10^{-12}\,\mathrm{C\,N^{-1}\,m^{-2}}$

Vergleich: Coulomb vs. Gravitation

$$\vec{F}_G = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$
$$\vec{F}_C = K\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$
$$\frac{F_C}{F_G} = 227 \times 10^{39}$$

11.4 elektrisches Feld

Definition 11.3 (Elektrisches Feld)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_C(\vec{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

Das elektrische Feld hängt nur von der Ladung Q ab, aber nicht von der Testladung q. Es gilt damit:

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r})$$

Bedeutung das elektrischen Feldes:
Coulomb-Gesetz beschreibt Fernwirkung.
Aber: Wodurch wird diese Wirkung übertragen?
Geschieht die Übertragung instantan? (nein!)
Feldwirkungstheorie: Elektrische Kraftübertragung über Ausbreitung des elektrischen Feldes, das mit der Probeladung q. Elektrostatik: Fernwirkung- und Feldwirkungstheorie äquivalent.
Elektrodynamik: Feldbegriff essentiell.
Feld einer allgemeinen Ladungsverteilung:
Wichtig: Es gilt das Superpositionsprinzips. Es gilt

$$\mathrm{d}Q = \rho(\vec{r})\mathrm{d}V$$

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\vec{R}-\vec{r}}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|^3}\rho(\vec{r})\mathrm{d}V$$

Für diskrete Ladungen:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}$$

Die Anwesenheit von Ladungen verändern den Raum. Es entsteht in Vektorfeld, dessen Stärke und Richtung in jedem Raumpunkt die normierte Kraft $\frac{\vec{F}}{q}$ auf eine Probeladung angibt.
Eigenschaften der Feldlinien

1. Das $\vec{E}$ -Feld zeigt tangential zu den Feldlinien
2. Feldlinien zeigen weg von positiven Ladungen
3. Feldliniendichte entspricht Stärke des Feldes.

11.5 Elektrischer Fluss

Definition 11.4 (Elektrischer Fluss ϕ_E) Maß für die Anzahl der Feldlinien, die Fläche A durchstoßen.

Für geschlossene Oberflächen:

$$\begin{aligned} Q_{innen} = 0 &\implies \phi_E = 0 \\ Q_{innen} > 0 &\implies \phi_E > 0 \\ Q_{innen} < 0 &\implies \phi_E < 0 \end{aligned}$$

Mathematisch:

- Homogenes Feld, $\perp$ zur Oberfläche $\implies \phi E = EA$
- Homogenes elektrisches Feld $EA' = EA\cos\theta = \vec{E}\vec{A} = \vec{E}\vec{n}A$

Verallgemeinerung:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_i &= \vec{E}_i\vec{n}_i\Delta A_i \\ \phi_E &= \lim_{\Delta A_i\to 0}\sum \vec{E}_i\vec{n}_i\Delta A \\ \phi_A &= \int \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} \end{aligned} \qquad \text{(Definition von Elektrischem Fluss)}$$

Ladung einer Kugel:

$$\begin{aligned} \phi_A &= \int \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\int \mathrm{d}\vec{D} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}4\pi R^2 \\ &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Definition 11.5 (Gauß'sches Gesetz (1. Maxwell-Gleichung))

$$\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q_{\text{innen}}}{\varepsilon_0}$$

Das Gauß'sche Gesetz ist allgemeingültig, da:

$$\begin{aligned} \oint_{A_2} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} - \oint_{A_1} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} &= 0 \\ \oint_{A_2} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \oint_{A_1} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} &= \frac{Q_{\text{innen}}}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Zusammen mit Superpositionsprinzip und homogener Fläche erhält man die Allgemeingültigkeit des Gauß'schen Gesetz.

Herleitung des Coulombschen Gesetz mit Gauß'schen Gesetz:

$$\begin{aligned} \oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ E\oint \mathrm{d}\vec{A} &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ E4\pi R^2 &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ E(R) &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^2} \end{aligned}$$

Beispiel 11.6 (Unendlich langer Draht) Ladungsdichte: $\lambda = Q/L$

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \vec{E}(R)$$

- Mantelfläche:e $\vec{E} \parallel \mathrm{d}\vec{A}$
- Deckel: $\vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{D}$

$$\phi_E = \oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \int_{\text{Mantel}} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} + \underbrace{\int_{\text{Deckel}} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A}}_{=0} = E \int_{\text{Mantel}} \mathrm{d}A = E2\pi RL = \frac{V}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\frac{Q}{L}}{2\pi R\varepsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

Beispiel 11.7 (Unendlich ausgedehnte Flächenladung) Flächenladungsdichte: $\sigma = Q/A$
Symmetrie:
$\vec{E}$ konstant für festen Abstand.
$\vec{E} \parallel \vec{A}$

$$\phi_E = \oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \underbrace{\int_{\text{Mantel}} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A}}_{0} + \int_{\text{Deckel}} \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = EA_1 + EA_2 = 2EA$$

$$\phi_E = 2EA = \frac{Q}{\varepsilon_0} \implies E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Beispiel 11.8 (Plattenkondensator)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

11.6 Elektrische Felder innerhalb von Leitern

Innerhalb eines Leiters verschwindet das elektrostatische Feld.
Bei einem geladenem, isolierten Leiter sitzen alle Ladungen auf der Oberfläche.
Dazu betrachte Oberfläche, die gerade kleiner als der Leiter ist, dort ist das Elektrische Feld gleich Null, also folgt:

$$\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = 0 = \frac{Q_{\text{innen}}}{\varepsilon_0} \implies Q_{\text{innen}} = 0$$

Leiter mit Hohlraum:

$$\oint_O \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = 0 \implies Q = 0$$

11.7 Differentielle Form des Gaußschen Gesetzes

$$\oint_A \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \int_V \mathrm{div}\ \vec{E}\mathrm{d}V$$

$\mathrm{div}\ \vec{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z$
Zur Divergenz:
Schreibweise: $\mathrm{div}\ \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$, $\vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ in Anschauung:

$$\begin{aligned}\phi_E &= E_O \Delta A - E_i \Delta A \\ &= \Delta E_x \Delta A \\ &= \frac{\Delta E_x}{\Delta x} \Delta x \Delta A = \underbrace{\partial_x E_x}_{\text{„div“}} \Delta V\end{aligned}$$

$$\int_V \mathrm{div}\ \vec{E}\mathrm{d}V = \oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V$$

Differentielle Form des Gauß Gesetz, 1. Maxwell Gleichung:

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ρ: Ladungsdichte.

11.8 Elektrisches Potential

Coulombkraft ist konservativ da radialsymmetrisch.

$$\begin{aligned} W = E_{pot}(2) - E_{pot}(1) &= -\int_1^2 \vec{F}_C \mathrm{d}\vec{s} \\ \vec{F}_C &= -\,\mathrm{grad}\, E_{pot} \\ E_{pot}(\vec{r}) &= -\int_\infty^{+r} \vec{F}_C \mathrm{d}\vec{r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{Qq}{r^2}\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r} \qquad \text{(Theorie: } Qq/r) \end{aligned}$$

Definition 11.9 (Coulombpotential)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{E_{pot}(\vec{r})}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}, \varphi(\infty) = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta\varphi = \varphi(\vec{r}_2) l \varphi \vec{r}_1 &= -\int \vec{E}\mathrm{d}\vec{s} \\ \oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{s} &= 0 \\ \vec{E}(\vec{r}) &= -\,\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r})\end{aligned}$$

Allgemeine Ladungsverteilung:

$$\varphi\left(\vec{R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r})}{\left|\vec{R} - \vec{r}\right|} \mathrm{d}V$$

Definition 11.10 (Elektrische Spannung)

$$U_{12} = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi_{21} = -\int_1^2 \vec{E} \mathrm{d}\,\vec{s}$$

11.9 Grundgleichungen der Elektrostatik

Integralform:

$$\oint \vec{E} \mathrm{d}\,\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \oint \vec{E} \mathrm{d}\,\vec{s} = 0$$

Differentialform:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

Stokscher Satz:

$$\oint_C E \mathrm{d}\,\vec{s} = \int_A \operatorname{rot} \vec{E} \mathrm{d}\,\vec{A}$$

Zur Rotation:
Schreibweise:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E}, \vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = (\partial_y E_z - \partial_z E_y, \partial_z E_x - \partial_x E_z, \partial_x E_y - \partial_y E_x)$$

Anschauung:

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{A} \mathrm{d}\,\vec{s} &= \Delta E_2 \Delta z - \Delta E_x \Delta x \\
&= \frac{\Delta E_z}{\Delta_x} \Delta x \Delta z - \frac{\Delta E_x}{\Delta z} \Delta z \Delta x \\
&= \underbrace{(\partial_x E_z - \partial_z E_x)}_{\text{rot}} \Delta A
\end{aligned}$$

Mathematik:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{E} &= -\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = -\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla}\varphi\right) = 0 \\
\operatorname{div} \vec{E} &= -\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla}\varphi\right) = -\vec{\nabla}^2 \varphi = -\Delta\varphi \\
&= -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}
\end{aligned}$$

Definition 11.11 (Poissongleichung)

$$\Delta\varphi = -\frac{\varphi}{\varepsilon_0}$$

Zentrale Gleichung der Elektrostatik

Definition 11.12 (Laplacegleichung)

$$\Delta\varphi = 0$$

Echstein der mathematischen Physik [PTP3]

Realisierung eines Feldes der Form

$$\begin{aligned}\varphi &= ax^2 + by^2 + cz^2 \quad a, b, c > 0\\ \Delta\varphi &= 2a + 2b + 2c > 0\end{aligned}$$

$2a + 2b + 2c$ ist immer $> 0 \implies$ solches Feld nicht möglich.

11.10 Elektrische Felder geladener Felder

„Einfach“: Berechnung für bekannte Ladungsverteilung.
„Schwierg“: Berechnung in Anwesenheit von Leitern.
Für statische Felder gilt:
im Leiter $\vec{E} = 0$
im Hohlraum $q = 0$, $\vec{E} = 0$

Oberfläche eines Leiters:

1. $\vec{E} \parallel \vec{A}$
2. $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\phi_E &= \vec{A}\mathrm{d}\vec{A} = E\mathrm{d}A\\ &= \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\varepsilon_0}\\ E &= \underbrace{\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}A}}_{\sigma}\frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

3. $\varphi =$ const. an Leiteroberfläche.

Berechnung von Verteilungen von Ladungen schwierig. Hier nur qualitatives Verständnis.
Kugelladung (Radius R):
Innen: $E = 0, \varphi = \text{const.}$
Außen: $E = 1/(4\pi\varepsilon_0)Q/r^2$

$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$
$$\vec{E}\left(\vec{R}\right) = \frac{\vec{\varphi}(R)}{R}$$

$\varphi = \text{const.} \implies$ Erzeugung hoher Felder für kleine R

Beispiel 11.13 (Zwei Kugeln (verbunden)) verbunden $\implies \varphi = \varphi_1 = \varphi_2 \implies Q_1/R_1 = Q_2/R_2$

$$\begin{aligned} R_1 &> R_2 \\ \implies Q_1 &> Q_2 \\ \sigma_1 &< \sigma_2 \\ E_1 &< E_2 \end{aligned}$$

kleiner krümmungsradius $\implies$ größeres Feld, größere Flächenladungsdichte.
Merke: Scharfe Kanten beziehungsweise kleiner Krümmugsradius bedeutet hohes E-Feld

Beispiel 11.14 (Halbraumleiter mit Ladung)

Beispiel 11.15 (Dipol)

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\left|\vec{r} - \frac{1}{2}\vec{d}\right|} + \frac{-q}{\left|\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{d}\right|}\right] \\ \varphi(\vec{r}) &= \frac{\vec{p}\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ \vec{p} &= q\vec{d} \\ \vec{E} &= y \operatorname{grad} \varphi \\ E(\vec{r}) &= \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} \end{aligned} \qquad \text{(Elektrisches Dipolfeld (ohne Beweis))}$$

Merke: Elektrischer Dipol, $r \gg d$

$$\varphi(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^2} \qquad E(\vec{r}) \sim \frac{1}{r^3}$$

Multipolentwicklung:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{a_0}{r} + \frac{a_1}{r^2} + \frac{a_2}{r^3} + \dots$$

$$a_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \quad a_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \vec{p}\hat{r}$$

$$\vec{p} = \int \rho(\vec{r})\,\vec{r}\mathrm{d}Q$$