

Experimentalphysik III (Oberthaler)

Robin Heinemann

20. Oktober 2017

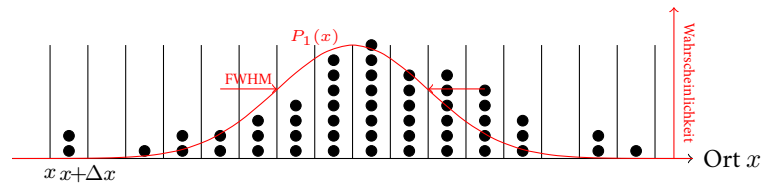
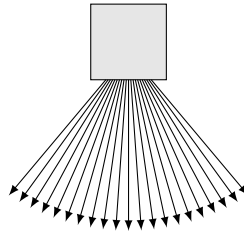
Inhaltsverzeichnis

1	Vorspann	1
1.1	Ein Experiment mit klassischen Teilchen	1
1.2	Ein Experiment mit klassischen Wellen	3
1.3	Ein Experiment mit Elektronen/Atomen	4
1.4	Zusammenfassung	6
2	Materiewellen	7
2.1	Historische Herleitung von de Broglie	7

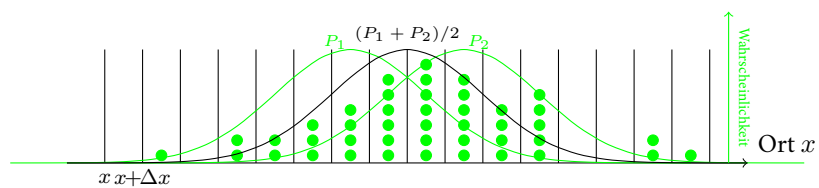
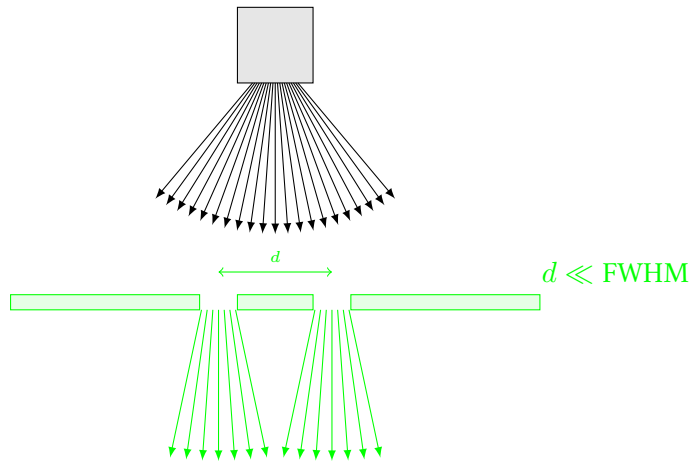
1 Vorspann

1.1 Ein Experiment mit klassischen Teilchen

1. Fall: Quelle von nicht weiter zerteilbaren Teilchen mit zufälliger Richtung. Es werden die Anzahl der Teilchen auf einem Raster x mit Gitterkonstante Δx gemessen. Dann werden in der Mitte die meisten Teilchen ankommen. Die diskrete Verteilung kann mit einer kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben werden. Die wichtigen Größen sind hier die Position der maximalen Wahrscheinlichkeit und die Breite (FWHM - full width half maximum)



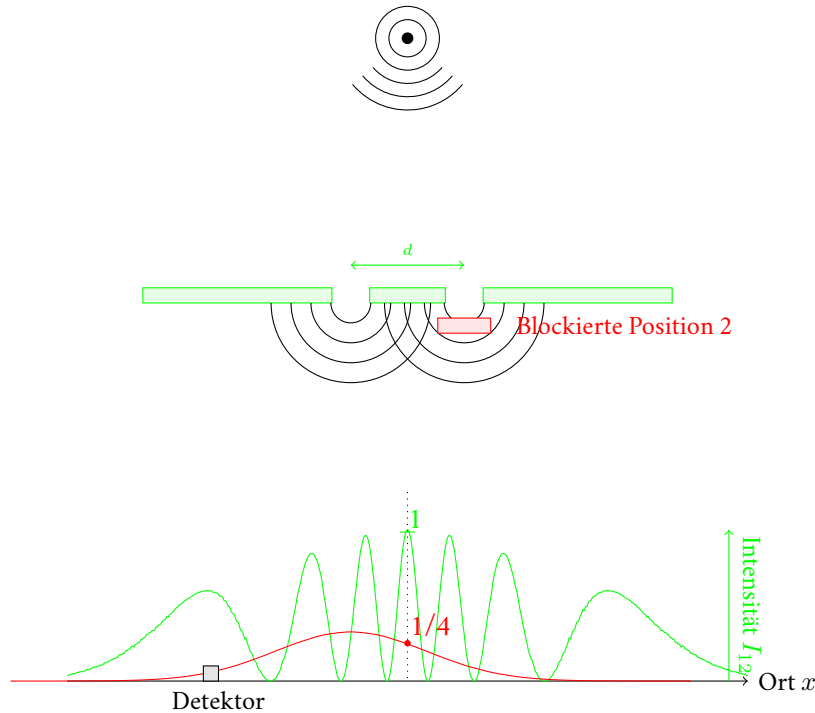
2. Fall: 2 Quellen (mittels Doppelspalt der Breite d , $d \ll \text{FWHM}$)



Wichtig: Diskrete Zahlen. Die theoretische Wahrscheinlichkeitsverteilung kann nur annähernd gemessen werden! Anzahl der Teilchen $\rightarrow \infty \Rightarrow P_1(x)$.

1.2 Ein Experiment mit klassischen Wellen

Quelle sendet Kugelwellen aus (fixe Frequenz, fixe Amplitude), Doppelspalt. Ein Detektor misst Strom \propto Intensität. Man erhält das Intensitätsmuster I_{12} eines Doppelspalts. Bei blockieren eines der Öffnungen des Doppelspalt erhält man einen Einzelspalt und somit nur noch das Intensitätsmuster eines Einzelspalts, mit Maximum bei dem nicht blockierten Spalt. Wichtig: Intensität ist kontinuierlich I_{12} kann genau gemessen werden.



Warum hat I_{12} die angegebene Form?

$$I(x) = c\varepsilon_0 \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E(x, t) dt$$

$$E(x, t) = E_1 \cos(\omega t + \vec{k} \vec{R}_1) + E_2 \cos(\omega t + \vec{k} \vec{R}_2)$$

mit Hilfe von komplexer Schreibweise

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \Re\{E_1 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{R}_1)} + E_2 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{R}_2)}\} \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &\quad \text{reell} \qquad \qquad \text{reell} \\ &= \Re\left\{ \underbrace{E_1 e^{-i(\vec{k} \vec{R}_1)}}_{a_1} + \underbrace{E_2 e^{-i\vec{k} \vec{R}_2}}_{a_2} \right\} e^{i\omega t} \\ \Rightarrow I_{12}(x) &\propto |a_1 + a_2|^2 \end{aligned}$$

Wir interessieren uns nur für x -Abhängigkeit, nicht für absolute Werte

$$\begin{aligned}
 I_{12}(x) &\propto |a_1 + a_2|^2 = (a_1^* + a_2^*)(a_1 + a_2) \\
 &= |a_1|^2 + |a_2|^2 + a_1^* a_2 + a_2^* a_1 \\
 |a_1|^2 &= E_1 e^{ikR_1} E_1 e^{-kR_1} = E_1^2 \sim I_1 \\
 |a_2|^2 &= E_2 e^{ikR_2} E_2 e^{-kR_2} = E_2^2 \sim I_2 \\
 a_1^* a_2 + a_2^* a_1 &= a_1^* a_2 + \text{c. c.} \\
 &= 2\Re\{a_1^* a_2\} = 2\Re\{E_1 E_2 e^{ik(\vec{R}_2 - \vec{R}_1)}\} \\
 &= 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\underbrace{\vec{k}(\vec{R}_2 - \vec{R}_1)}_{\phi}\right) \\
 \Rightarrow \boxed{I_{12} &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \phi}
 \end{aligned}$$

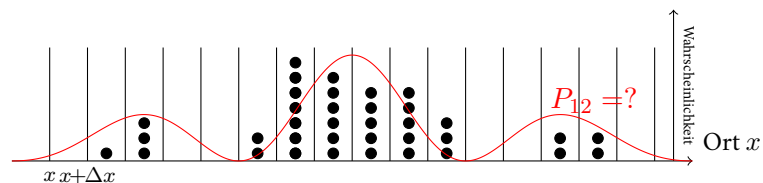
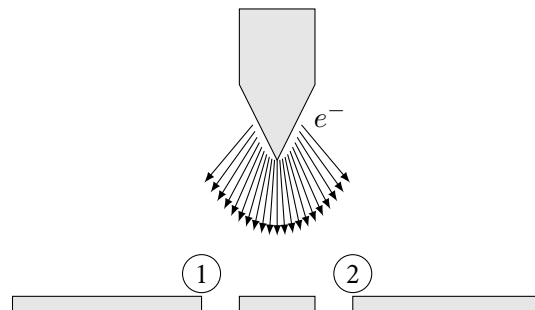
Maximale Intensität $\phi = 0$ $|\vec{R}_1| = |\vec{R}_2|$. Für $I_1 = I_2 = I_0$:

$$\begin{aligned}
 I_{\text{MAX}} &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} = 4I_0 \\
 I_{\text{MIN}} &= I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} = 0
 \end{aligned}$$

Intensität wird räumlich umverteilt, gesamt Intensität bleibt erhalten

$$I_1 + I_2 = \text{Energieerhaltung}$$

1.3 Ein Experiment mit Elektronen/Atomen

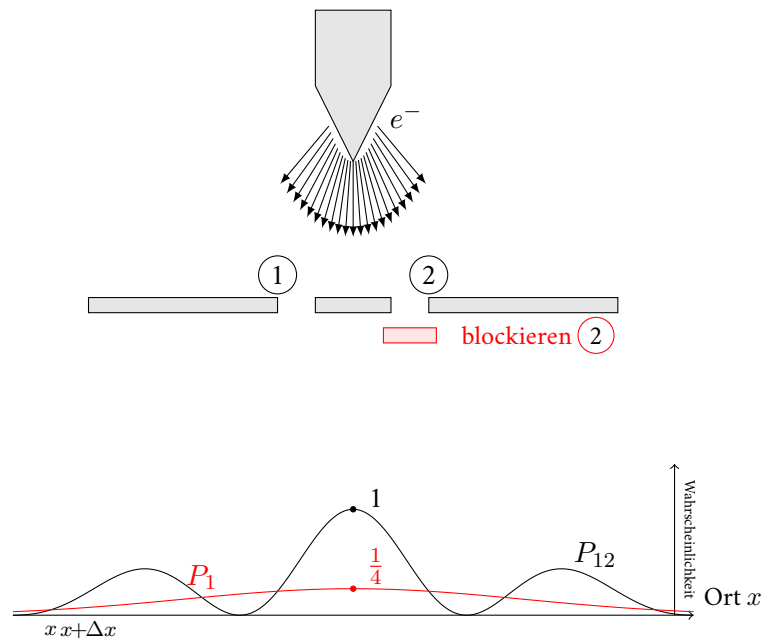


Quelle: Metallspitze aus hohem negativen Potential. Wieder diskrete Detektoren, Messung über Elektronenvervielfacher: durch anliegende Spannung löst ein Elektron aus einer Metallplatte weitere Elektronen aus, die wieder weiter auslösen. Es entsteht ein kurzer Strom-Peak, der gemessen werden kann.

Annahmen:

1. Das Elektron geht entweder durch Blende ①, oder Blende ②
2. Mit „komplizierter“ Dynamik

Einfacher Test für Annahme 2.: Blockieren einer Blende (hier ②). Man würde eine Verteilung ähnlich der mit zwei Blendern erwarten.



Teilchen verschwinden in den Minima bei der P_{12} , obwohl sie nach der Verteilung für eine Blende auch dort ankommen müssten.

$$\Rightarrow P_{12} \neq \frac{1}{2}\{P_1 + P_2\}$$

Mathematische „einfach“: Einführen der komplexen Wahrscheinlichkeitsamplitude ϕ . Wahrscheinlichkeiten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} P_1 &= |\phi_1|^2 \\ P_2 &= |\phi_2|^2 \\ P_{12} &= |\phi_1 + \phi_2|^2 \end{aligned}$$



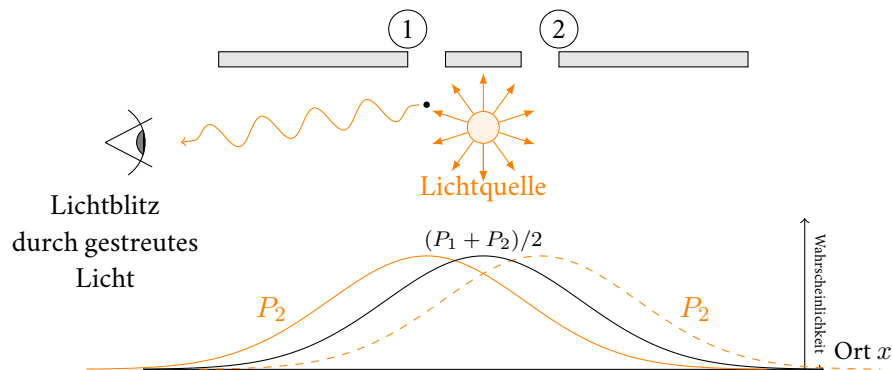
Wichtig

Elektronen werden einzeln gezählt. Es gibt keine "halben" Elektronen. Wahrscheinlichkeitsverteilung kann nur annähernd gemessen werden. $P_{12} \hat{=}$ unendlich viele Experimente.

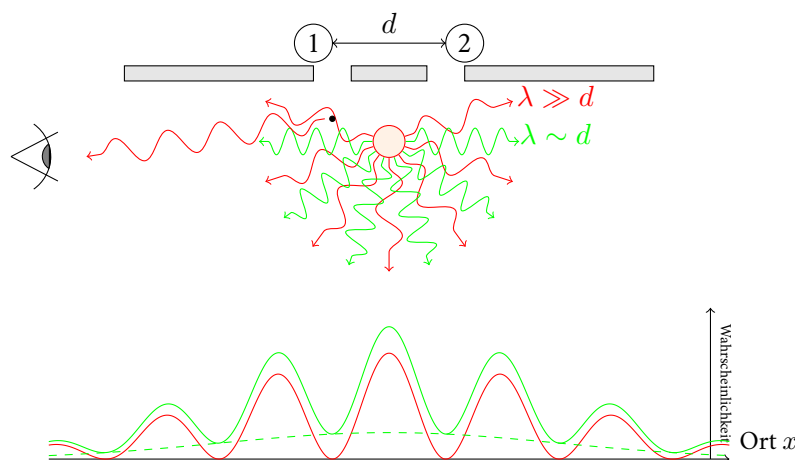
Welle-Teilchen Dualismus

Elektronen werden nur als Einheiten detektiert, die räumliche Verteilung kann als Interferenz von Wahrscheinlichkeits-Amplituden (komplexes ϕ) beschrieben werden.

Beobachtung der Elektronen an jedem Spalt.



Es entstehen Lichtblitze durch gestreutes Licht. P_1 : Blitz bei (1), P_2 : Blitz bei (2). Blitz bei (1) und (2) wird nie beobachtet. Dies bestätigt Annahme (1).



Bei $\lambda > d$ ist nicht mehr feststellbar, ob das Elektron durch (1) oder (2) kommt. Bei $\lambda \sim d$ erhält man eine Überlagerung von $|\phi_1 + \phi_2|$ und $\frac{1}{2}(P_1 + P_2)$

Quantenmechanik kann das beschreiben, weil das prinzipiell mögliche Wissen einer physikalischen

1.4 Zusammenfassung

Für fundierte Diskussion eines Quantenmechanischen Experiments muss definiert werden

1. Präparation de Anfangszustand
2. Wechselwirkung / Zeitlich Entwicklung
3. Detektion - Was wird beobachtet

Ein **Ereignis** ist definiert als ein spezielles Set von 1. bis 3..

Beispiel 1.1 Ein e^- verlässt die Quelle kann nicht alle Orte in Raum erreichen (Blenden), e^- wird in einem Ortsintervall $[x, x + \Delta x]$ detektiert.

Vorhersagen nach folgenden Regeln

1. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in einem idealen Experiment ist gegeben als das Quadrat des Absolutbetrages einer im allgemeinen komplexen Wahrscheinlichkeitsamplitude
 $P \dots$ Wahrscheinlichkeit
 $\phi \dots$ Wahrscheinlichkeits-Amplitude
 $P = |\phi|^2 = \phi^* \phi$
2. Wenn ein Ereignis in verschiedener Art und Weise stattfinden kann, dann ist die Wahrscheinlichkeits-Amplitude gegeben als Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeits-Amplituden der Möglichkeiten.

Beispiel 1.2 $e^- \rightarrow$ Detektor über

- Blende ①
- Blende ②

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_1 + \phi_2 & (\text{Superposition}) \\ P &= |\phi|^2 = |\phi_1 + \phi_2|^2\end{aligned}$$

3. Kann man die einzelnen Möglichkeiten prinzipiell unterscheiden, addieren sich die Wahrscheinlichkeiten

$$P = (P_1 + P_2)/2$$

2 Materiewellen

2.1 Historische Herleitung von de Broglie

Louis de Broglie. "XXXV. A tentative theory of light quanta". In: *Philosophical Magazine Series 6* 47.278 (1924), S. 446–458

3 Grundlegende Hypothesen ($3 \times$ Einstein)

1. $E = m_0 c^2$ Masse = Energie, m_0 : Ruhemasse, c : Lichtgeschwindigkeit
2. $E = h\nu_0$ Photoeffekt, $h = 6.626\,069\,934(89) \times 10^{-34}$ J s Planck Konstante, ν_0 : Frequenz
3. Gleichmäßig bewegte Bezugssysteme sind mit Lorentz Transformation verknüpft

Aus 1. und 2. folgt, dass man jedem Teilchen im Ruhesystem eine Frequenz zuordnen kann

$$\nu_0 = \frac{m_0 c^2}{h}$$

Sei S ein ruhendes Bezugssystem, betrachte ein ruhendes Teilchen ($v = 0$). Man erhält

$$\psi = e^{i\nu_0 2\pi t}$$

Nun betrachte ein bewegtes Bezugssystem S' mit $v_x = v$, $v_{y,z} = 0$. Man erhält

$$\psi = e^{i\nu_0 2\pi t'}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Die Zeit wird ortsabhängig!

$$S' : e^{i2\pi\nu_0 t'}$$

$$S : e^{i2\pi\nu_0 \left(\frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right)} = e^{i(\omega_{dB}t - k_{dB}x)} \quad (\text{die de Broglie Welle})$$

mit

$$\begin{aligned} \omega_{dB} &= \frac{2\pi\nu_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{2\pi}{h} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{E_{\text{gesRuhe}}}{\hbar} \\ \hbar &= \frac{h}{2\pi} \\ \vec{k}_{dB} &= \frac{2\pi\nu_0 \vec{v}}{c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{2\pi}{h} \frac{m_0 c^2 \vec{v}}{c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{\vec{P}_{\text{mel}}}{\hbar} \end{aligned}$$

nicht relativistischer Limes $v \ll c$

$$\begin{aligned} \omega_{dB} &= \frac{1}{\hbar} \left(m_0 c^2 + \frac{m_0 \vec{v}^2}{2} + \dots \right) \\ \vec{k}_{dB} &= \frac{1}{\hbar} m_0 \vec{v} \end{aligned}$$

$$\psi(x, t) = e^{i(\omega_{dB}t - \vec{k}_{dB}\vec{x})} = e^{i \frac{m_0 c^2}{\hbar} t} e^{i \left(\underbrace{\frac{m_0 \vec{v}^2}{2\hbar}}_{\omega} t - \underbrace{\frac{m_0 \vec{v}}{\hbar}}_{\vec{k}} \vec{x} \right)}$$

Materiewelle

$$\psi(x, t) = e^{i(\omega t - kx)}$$

mit

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

$$\hbar k = mv$$

Beschreibt ein massives Teilchen mit Masse m , das sich mit wohldefinierter Geschwindigkeit $v \ll c$ bewegt (Impuls Eigenzustand)

Den Zusammenhang $\omega(k) = f(k)$ nennt man Dispersionsrelation.



Wichtig

Unterschied zu elektromagnetischen Wellen im Vakuum:

$$\lambda \nu = c \implies \omega = ck$$

Materiewellen

$$\omega = \frac{\hbar}{2m} k^2 \text{ (2)}$$

Literatur

- [1] Louis de Broglie. "XXXV. A tentative theory of light quanta". In: *Philosophical Magazine Series 6* 47.278 (1924), S. 446–458.