

# Mathematischer Vorkurs

Robin Heinemann

January 26, 2017

## Contents

<b>1</b>	<b>Messwert und Maßeinheit</b>	<b>4</b>
1.1	Beispiel . . . . .	4
1.2	Bezeichnungen . . . . .	4
1.3	Maßeinheiten . . . . .	5
1.3.1	Beispiel: . . . . .	5
1.3.2	SI-Einheiten . . . . .	5
1.4	Natürliches Einheitensystem der Teilchenphysik . . . . .	6
1.4.1	Grundlage . . . . .	6
1.4.2	natürliches Einheitensystem . . . . .	6
1.5	Endliche Messgenauigkeit . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Zeichen und Zahlen</b>	<b>7</b>
2.1	Symbole . . . . .	7
2.1.1	Summenzeichen . . . . .	7
2.1.2	Produktzeichen . . . . .	9
2.1.3	Fakultätszeichen . . . . .	9
2.2	Zahlen . . . . .	9
2.2.1	Rechengesetze für reelle Zahlen . . . . .	9
2.2.2	Satz des Pythagoras . . . . .	10
2.2.3	binomische Formeln: . . . . .	10
2.2.4	Pascalsches Dreieck . . . . .	11
2.2.5	Beweisprinzip der Vollständigen Induktion . . . . .	11
2.2.6	Quadratische Ergänzung . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Folgen und Reihen</b>	<b>11</b>
3.1	Folge . . . . .	11
3.1.1	Definition . . . . .	11
3.1.2	Beispiele . . . . .	12
3.1.3	Frage . . . . .	12
3.1.4	Beschränktheit . . . . .	12

3.1.5	Monotonie . . . . .	13
3.1.6	Konvergenz . . . . .	13
3.2	Reihen (unendliche Reihen) . . . . .	13
3.2.1	Bemerkung . . . . .	14
3.2.2	Rechenregeln für konvergente Reihen . . . . .	14
3.2.3	Beispiel . . . . .	14
3.2.4	Absolute Konvergenz . . . . .	14
<b>4</b>	<b>TODO what was done after this? (Funktionen? (only?))</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Funktionen</b>	<b>15</b>
5.1	Normal-Hyperbel . . . . .	15
5.1.1	Physik-Beispiel . . . . .	15
5.2	kubische Parabel . . . . .	15
5.2.1	Physik-Beispiel . . . . .	15
5.2.2	Verallgemeinerung . . . . .	15
5.3	$y = ax^{-2}$ . . . . .	15
5.3.1	Physik-Beispiel . . . . .	15
5.4	Symmetrieeigenschaften der Potenzfunktionen . . . . .	15
5.5	Potenzfunktionen als "Bausteine" in zusammengesetzten Funktionen . . .	16
5.6	Rationale Funktionen . . . . .	16
5.6.1	Beispiel . . . . .	16
5.7	Trigonometrische Funktionen . . . . .	16
5.7.1	<b>TODO</b> Table Formula? . . . . .	16
5.7.2	<b>TODO</b> Veranschaulichung am Einheitskreis . . . . .	16
5.7.3	Tangens/Cotangens . . . . .	17
5.7.4	Additionstheoreme . . . . .	17
5.8	Exponentialfunktionen . . . . .	17
5.8.1	Rechenregeln . . . . .	17
5.8.2	Beispiel radioaktiver Zerfall . . . . .	17
5.9	Cosinus hyperbolicus . . . . .	17
5.10	Sinus hyperbolicus . . . . .	18
5.11	Tangens hyperbolicus . . . . .	18
5.12	Cotangens hyperbolicus . . . . .	18
5.13	Wurzelfunktion . . . . .	18
5.13.1	Beispiel . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Funktionen mit Ecken und Sprüngen</b>	<b>18</b>
6.1	Betragsfunktion . . . . .	18
6.2	Heaviside-Stufenfunktion . . . . .	18
6.2.1	<b>TODO</b> Graphik . . . . .	19
6.2.2	Beispiel . . . . .	19

6.3	"symmetrischer Kasten" der Breite $2a$ und der Höhe $\frac{1}{2a}$ (Dirak Delta Funktion) . . . . .	19
6.3.1	<b>TODO</b> Graphik . . . . .	19
<b>7</b>	<b>Verkettung von Funktionen</b>	<b>19</b>
7.1	Beispiel . . . . .	19
7.2	Spiegelsymmetrie (Siegelung an der y-Achse, d.h. $x \rightarrow -x$ ) . . . . .	19
7.2.1	Beispiel . . . . .	20
7.2.2	Zerlegung . . . . .	20
<b>8</b>	<b>Eigenschaften von Funktionen</b>	<b>20</b>
8.1	Beschränktheit . . . . .	20
8.1.1	Beispiel . . . . .	21
8.2	Monotonie . . . . .	21
8.2.1	Beispiel . . . . .	21
<b>9</b>	<b>Umkehrfunktionen</b>	<b>21</b>
9.1	Graph der Umkehrfunktion . . . . .	21
9.1.1	Beispiel $y = x^2$ . . . . .	21
9.1.2	Graphisch . . . . .	22
<b>10</b>	<b>what after this?</b>	<b>22</b>
<b>11</b>	<b>Integral und Differenzialrechnung</b>	<b>22</b>
11.1	Die Kunst des Integrierens . . . . .	22
11.2	Ableiten über Umkehrfunktion . . . . .	22
11.3	Integrationsregeln . . . . .	22
11.3.1	Lineare Zerlegung . . . . .	22
11.3.2	Substitutionsregel . . . . .	23
11.3.3	Partielle Integration . . . . .	23
11.3.4	Weitere Integrationstricks . . . . .	25
11.4	Uneigentliche Integrale . . . . .	25
11.4.1	Unendliches Integralintervall . . . . .	25
11.5	Cauchy Hauptwert . . . . .	25
11.5.1	Unbeschränkter Integrand . . . . .	26
11.6	Integralfunktionen . . . . .	26
11.7	Gamma-Funktion . . . . .	26
11.7.1	Definition . . . . .	26
<b>12</b>	<b>Vektoren</b>	<b>27</b>
12.1	$\mathbb{R}^3$ . . . . .	27
12.1.1	Orthonormal . . . . .	27
12.2	Skalarprodukt und Kronecker-Symbol . . . . .	27
12.2.1	Motivation: mechanische Arbeit . . . . .	27
12.2.2	Definition . . . . .	27

12.2.3	Spezialfälle . . . . .	27
12.2.4	Betrag: . . . . .	27
12.2.5	Eigenschaften . . . . .	27
12.2.6	Orthonormalbasis der kartesischen Koordinatensystem . . . . .	28
12.2.7	Kronecker Symbol . . . . .	28
12.2.8	Komponentendarstellung des Skalarprodukts . . . . .	28
<b>13</b>	<b>Matrizen</b>	<b>28</b>
13.1	Determinante . . . . .	28
13.2	Homogenes Gleichungssystem . . . . .	28
13.3	Levi Civita Symbol . . . . .	29
13.4	Vektorprodukt / Kreuzprodukt . . . . .	29
13.5	Spatprodukt . . . . .	29
13.6	Geschachteltes Vektorprodukt . . . . .	29
13.6.1	Beweis . . . . .	29
<b>14</b>	<b>misc</b>	<b>30</b>

## 1 Messwert und Maßeinheit

Zu jeder phys. Größe gehören Messwert und Maßeinheit, d.h.  $\text{Zahlewert} \cdot \text{Einheit}$

### 1.1 Beispiel

Geschw.  $v = \text{km s}^{-1}$

### 1.2 Bezeichnungen

Abkürzung	Bedeutung
t	time
m	mass
v	velocity
a	acceleration
F	Force
E	Energy
T	Temperature
p	momentum
I	electric current
V	potential

Wenn das lateinische Alphabet nicht ausreicht: griechische Buchstaben

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \Delta, \Gamma, \epsilon, \zeta, \eta, \Theta, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \Xi, \pi, \rho, \sigma, \tau, \phi, \chi, \psi, \omega, \Omega$

### 1.3 Maßeinheiten

Maßeinheiten werden über Maßstäbe definiert.

#### 1.3.1 Beispiel:

1 m = Strecke, die das Licht in  $\frac{1}{299792458}$  s zurücklegt.

#### 1.3.2 SI-Einheiten

Internationaler Standard (außer die bösen Amerikaner :D)

Größe	Einheit	Symbol
Länge	Meter	m
Zeit	Sekunden	s
Masse	Kilogramm	kg
elektrischer Strom	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Lichstärke	Candela	cd
ebener Winkel	Radian	rad
Raumwinkel	Steradian	sr
Stoffmenge	Mol	mol

**Radian** Kreisumfang  $U = 2\pi r$  Bogenmaß  $b = \phi r$   
Umrechnung in Winkelgrad

$$2\pi \text{ rad} \stackrel{\wedge}{=} 360^\circ$$

$$\frac{\text{Winkel in Radian}}{2\pi} = \frac{\text{Winkel in Grad}}{360}$$

**Steradian**

$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$

#### Abgeleitete Einheiten

Größe	Einheit	Symbol	Equivalent
Frequenz	Hertz	Hz	1/s
Kraft	Newton	N	kg m s <sup>-2</sup>
Energie	Joule	J	N m
Leistung	Watt	W	J s <sup>-1</sup>
Druck	Pascal	Pa	N m <sup>-2</sup>
elektrischer Ladung	Coulomb	C	A s
elektrisches Potenzial	Volt	V	J C <sup>-1</sup>
elektrischer Widerstand	Ohm	$\Omega$	V A <sup>-1</sup>
Kapazität	Farad	F	C N <sup>-1</sup>
magn. Fluss	Weber	Wb	V s <sup>-1</sup>

## Prefix / Größenordnungen

Prefix	$\log\{10\}$	Abkürzung
Dezi	-1	d
Zenti	-2	c
Milli	-3	m
Mikro	-6	$\mu$
Nano	-9	n
Piko	-12	p
Femto	-15	f
Atto	-18	a
Zepta	-21	z
Yokto	-24	y
Deka	1	D
Hekto	2	h
Kilo	3	k
Mega	6	M
Giga	9	G
Tera	12	T
Peta	15	P
Exa	18	E
Zetta	21	Z
Yotta	24	Y

## 1.4 Natürliches Einheitensystem der Teilchenphysik

### 1.4.1 Grundlage

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 6.5822 \times 10^{-22} \text{ MeV s}$$

$$\text{betrachte } \frac{\hbar c}{\text{MeV m}} = 197.33 \times 10^{-15}$$

### 1.4.2 natürliches Einheitensystem

$\hbar = c = 1$  In diesem Fall ist  $1/\text{MeV} = 197.44 \text{ fm}$  In diesem Einheitensystem ist die Einheit von  $[Energie] = [Masse] = [Länge]^{-1} = [Zeit]^{-1}$

## 1.5 Endliche Messgenauigkeit

z.B. Plancksches Wirkungsquantum

$$\hbar = 1.05457168(18) \times 10^{-34} \text{ J s}$$

Das bedeutet, dass der Wert von  $\hbar$  mit einer Wahrscheinlichkeit von 68 % zwischen den beiden Schranken liegt

$$1.05457150 \times 10^{-34} \text{ J s} \leq \hbar \leq 1.05457186 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

## 2 Zeichen und Zahlen

### 2.1 Symbole

Zeichen	Bedeutung
+	plus
·	mal
=	gleich
<	ist kleiner als
>	ist größer als
∠	Windel zwischen
−	minus
/	geteilt
≠	ungleich
≤	kleiner gleich
≥	größer gleich
≈	ungefähr gleich
±	plus oder minus
⊥	steht senkrecht auf
≡	ist identisch gleich
≪	ist klein gegen
≫	ist groß gegen
∞	größer als jede Zahl
$\rightarrow \infty$	eine Größe wächst über alle Grenzen \ Limes
$\sum$	Summe
∈	Element von
⊆	ist Untermenge von oder gleich
∪	Vereinigungsmenge
∃	es existiert ein
$\Rightarrow$	daraus folgt, ist hinreichende Bedingung für
$\Leftarrow$	gilt wenn, ist notwendige Bedingung für
∃!	es existiert genau ein
∉	kein Element von
:=	ist definiert durch
∅	Nullmenge
∀	für alle

#### 2.1.1 Summenzeichen

##### Beispiel

1.

$$\sum_{n=1}^3 a_n = a_1 + a_2 + a_3$$

2. Summe der ersten  $m$  natürlichen Zahlen

$$\sum_{n=1}^m n = 1 + 2 + \dots + (m-1) + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

1. Summe der ersten  $m$  Quadrate der natürlichen Zahlen

$$\sum_{n=1}^m n^2 = 1 + 4 + \dots + (m-1)^2 + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

1. Summe der ersten  $m$  Potenzen einer Zahl ( $q \neq 1$ )

$$\sum_{n=0}^m q^n = 1 + q + \dots + q^{m-1} + q^m = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}$$

sog. *geometrische Summe*

- Beweis

$$s_m = 1 + \dots + q^m$$

$$qs_m = q + \dots + q^{m+1}$$

$$s_m - qs_m = s_m(1 - q) = 1 - q^{m+1}$$

## Rechenregeln

- 1.

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=m}^n a_j$$

- 2.

$$c \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^n ca_k$$

- 3.

$$\sum_{k=m}^n a_k \pm \sum_{j=m}^n nb_k = \sum_{k=m}^n (a_k \pm b_k)$$

- 4.

$$\sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=n+1}^p a_k = \sum_{k=m}^p a_k$$

- 5.

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} = \sum_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p}$$

- 6.

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{j=1}^m b_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i b_j$$

falls  $n = m$

$$\sum_{i,j=1}^n a_i b_j$$



### 2.1.2 Produktzeichen

Beispiel

$$\prod_{n=1}^3 a_n = a_1 a_2 a_3$$

### 2.1.3 Fakultätszeichen

$$m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-1) \cdot m = \prod_{n=1}^m n$$
$$0! = 1$$

## 2.2 Zahlen

Erinnerung natürliche Zahlen  $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots$  ganze Zahlen  $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup 0 \cup -a \mid a \in \mathbb{N}$  rationale Zahlen  $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \frac{b}{a} \mid a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{Z}$  reelle Zahlen  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \text{unendliche Dezimalbrüche}$   
Die reellen Zahlen lassen sich umkehrbar eindeutig auf die Zahlengerade abbilden, d.h. jedem Punkt entspricht genau eine reelle Zahl und umgekehrt

### 2.2.1 Rechengesetze für reelle Zahlen

**Addition**

- Assoziativität  $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Kommutativität  $a + b = b + a$
- neutrales Element  $a + 0 = a$
- Existenz des Negatives  $a + x = b$  hat immer genau eine Lösung:  $x = b - a$  für  $0 - a$  schreibe wir  $-a$

**Multiplikation:**

- Assoziativität  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Kommutativität  $a \cdot b = b \cdot a$
- neutrales Element  $a \cdot 1 = a$
- Inverses  $a \cdot x = b$  hat für jedes  $a \neq 0$  genau eine Lösung  $x = \frac{b}{a}$  für  $\frac{1}{a}$  schreiben wir  $a^{-1}$
- Distributivgesetz  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

**Ordnung der reellen Zahlen** Die kleiner-Beziehung  $a < b$ , oder auch  $b > a$  hat folgende Eigenschaften:

- Trichotomie: Es gilt immer genau eine Beziehung  $a < b$ ,  $a = b$   $a > b$
- Transitivität: Aus  $a < b$  und  $b < c$  folgt  $a < c$

### Beispiele, Folgerungen

**Rechenregeln für Potenzen**  $b^n := b \cdot b \cdot \dots \cdot b$   $n \in \mathbb{N}$  Faktoren

$$b^0 := 1$$

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

$$b^n \cdot b^m = b^{n+m}$$

$$(b^n)^m = b^{n \cdot m}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

### Betrag einer reellen Zahl

$$|a| := \begin{cases} a & a \leq 0 \\ -a & a > 0 \end{cases}$$

### Eigenschaften

$$|a| \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$|a| = 0$$

nur für  $a = 0$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Dreieckungleichung

### 2.2.2 Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

### 2.2.3 binomische Formeln:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Allgemein:

$$(a \pm b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} (\pm)^k$$

(Klammer) Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k}$$

### 2.2.4 Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{c}n = 0 \quad 1 \\n = 1 \quad 1 \quad 1 \\n = 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\n = 3 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\n = 4 \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\n = 5 \quad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\end{array}$$

### 2.2.5 Beweisprinzip der Vollständigen Induktion

**Beispiel** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  soll die Summe der ersten  $n$  Quadratzahlen bewiesen werden

$$A(n) := \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

1. Induktionsanfang  $A(1) = 1 \checkmark$
2. Induktionsschritt Falls  $A(k)$  richtig ist, wird gezeigt, dass auch  $A(k+1)$  richtig ist

$$\begin{aligned}A(k+1) &= \underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + k^2}_{A(k)} + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\&= \frac{1}{6}(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1)) \\&= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \\&= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)\end{aligned}$$

### 2.2.6 Quadratische Ergänzung

$$\begin{aligned}x^2 + ax + b &= 0 \\x_{1,2} &= -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\end{aligned}$$

## 3 Folgen und Reihen

### 3.1 Folge

#### 3.1.1 Definition

Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl  $n$  eine reelle Zahl  $a_n$  zuweist.

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

### 3.1.2 Beispiele

- die natürlichen Zahlen selbst

$$n_{n \in \mathbb{N}} = (1, 2, 3, \dots)$$

- alternierende Folge

$$((-1)^{n+1})_{n \in \mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, \dots)$$

- harmonische Folge

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$$

- inverse Fakultäten

$$\left(\frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \dots)$$

- Folge echter Brüche

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right)$$

- geometrische Folge

$$(q^n)_{n \in \mathbb{N}} = (q, q^2, q^3, \dots)$$

charakteristische Eigenschaft der geometrischen Folge  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$   $q$  heißt Quotient der Folge allgemeines Bildungsgesetz  $a_n = a_1 q^{n-1}$

- Folge der Ungeraden Zahlen (arithmetische Folge)

$$(1 + (n-1) \cdot 2)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 3, 5, 7, \dots)$$

$a_{n+1} - a_n = d$   $d$  heißt Differenz der Folge allgemeines Bildungsgesetz  $a_n = a_1 + (n-1)d$

- "zusammengesetzte Folgen" (hier Exponentialfolge)

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(2, \frac{3^2}{2}, \frac{4^2}{3}, \dots\right)$$

### 3.1.3 Frage

Kann man etwas über das Verhalten von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  für  $n \rightarrow \infty$  aussagen, ohne tatsächlich "die Reise ins Unendliche" anzutreten?

### 3.1.4 Beschränktheit

Eine Folge heißt nach oben beschränkt, wenn es eine obere Schranke  $B$  für die Glieder der Folge gibt:  $a_n \leq B$ , d.h.  $\exists B : a_n \leq B \forall n \in \mathbb{N}$  Nach unten beschränkt:  $\exists A : A \geq a_n \forall n \in \mathbb{N}$

### 3.1.5 Monotonie

- Eine Folge heißt monoton steigend, wenn aufeinanderfolgende Glieder mit wachsender Nummer immer größer werden:  $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton steigend  $a_n < a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- monoton fallend  $a_n \geq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton fallend  $a_n > a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

### 3.1.6 Konvergenz

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen  $a$  oder hat den Grenzwert  $a$ , wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  gibt mit  $|a - a_n| < \epsilon \forall n > N(\epsilon)$  Wir schreiben  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

#### Beispiel

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{\sqrt{n}}) = 1$

### Grenzwertfreie Konvergenzkriterien

- jede monoton wachsend, nach oben beschränkte Folge ist konvergent, entsprechend ist jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge konvergent
- Cauchy-Kriterium: Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau dann, wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  gibt, so dass

$$|a_n - a_m| < \epsilon \forall n, m > N(\epsilon)$$

**Für harmonische Folge**  $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$

$$|a_n - a_m| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| = |\frac{m-n}{mn}| < |\frac{m}{mn}| = \frac{1}{n} < \epsilon \text{ für } n > N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$$

### 3.2 Reihen (unendliche Reihen)

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen, Die Folge

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k, n \in \mathbb{N}$$

der Partialsumme heißt (unendliche) Reihe und wird oft mit  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  bezeichnet Konvergiert die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , so wird ihr Grenzwert ebenfalls mit  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  bezeichnet

### 3.2.1 Bemerkung

Ergebnisse für Folgen gelten auch für Reihen

### 3.2.2 Rechenregeln für konvergente Reihen

Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  zwei konvergente Reihen und  $\lambda \in \mathbb{R}$ , dann sind auch die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + b_k, \sum_{k=1}^{\infty} a_k - b_k, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$$

konvergent und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

**Bemerkung:** Für das Produkt zweier unendlicher Reihen gilt i.A. keine so einfache Formel

### 3.2.3 Beispiel

geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=0}^m q^n \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \text{ für } q < 1, q \neq 0$$

### 3.2.4 Absolute Konvergenz

Eine Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

heißt absolut konvergent, wenn die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert. Absolut konvergente Reihen können ohne Änderung der Grenzwertes umgeordnet werden, d.h. jede ihrer Umordnungen konvergiert wieder und zwar immer gegen den gleichen Grenzwert.

## 4 TODO what was done after this? (Funktionen? (only?))

## 5 Funktionen

### 5.1 Normal-Hyperbel

$$y = \frac{1}{x} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

#### 5.1.1 Physik-Beispiel

- Boyle-Mariettsches Gesetz
- Druck  $p$  eines idealen Gases in einem Volumen  $V$  bei konstanter Temperatur und Gasmenge:  $p = \frac{\text{cons}}{V}$

### 5.2 kubische Parabel

$$y = ax^3$$

#### 5.2.1 Physik-Beispiel

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

#### 5.2.2 Verallgemeinerung

$$y = ax^n \quad n \in \mathbb{N}$$

### 5.3 $y = ax^{-2}$

#### 5.3.1 Physik-Beispiel

Coulomb Gesetz der Elektrostatik

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

### 5.4 Symmetrieeigenschaften der Potenzfunktionen

$$y = f(x) = x^n$$

- gerade  $n$ :  $f$  ist symmetrisch, d.h.  $f(-x) = f(x)$
- ungerade  $n$ :  $f$  ist antisymmetrisch, d.h.  $f(-x) = -f(x)$

## 5.5 Potenzfunktionen als "Bausteine" in zusammengesetzten Funktionen

Polynom m-ten Grades

$$y = P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m = \sum_{k=0}^m a_k x^k$$

## 5.6 Rationale Funktionen

$$y = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q_n(x) \neq 0\}$$

$P_m(x)$  Polynom m-ten Grades,  $Q_n(x)$  n-ten Grades

### 5.6.1 Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

"Lorentz-Verteilung beschreibt die Linienbreite einer Spektrallinie"

## 5.7 Trigonometrische Funktionen

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \sin \beta$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \cot \beta = \frac{1}{\cot \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$\alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
0	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	$\rightarrow \infty$

### 5.7.1 TODO Table Formula?

### 5.7.2 TODO Veranschaulichung am Einheitskreis

$\sin \alpha = y$  Periodische Erweiterung auf  $\alpha < 0$ ,  $\alpha > \frac{\pi}{2}$

Periodische Funktion:

$$\sin x + 2\pi = \sin x \quad \text{Periode: } 2\pi$$

$$\cos x + 2\pi = \cos x \quad \text{Periode: } 2\pi$$



### Beispiel

$$\sin x + \pi = -\sin x$$

$$\cos x + \pi = -\cos x$$

$$\cos x = \sin \frac{\pi}{2} - x$$

### TODO Graphik

#### 5.7.3 Tangens/Cotangens

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

### TODO Graphik

#### 5.7.4 Additionstheoreme

$$\sin \alpha \pm \beta = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha \pm \beta = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

### 5.8 Exponentialfunktionen

$$y = f(x) = b^x \quad b > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

#### 5.8.1 Rechenregeln

$$b^x b^y = b^{x+y} \quad (b^x)^y = b^{xy}$$

natürliche Exponentialfunktion mit Zahl  $e$  als Basis

$$y = f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

#### 5.8.2 Beispiel radioaktiver Zerfall

$$N(t) = N(0)e^{\frac{-t}{\tau}}$$

### 5.9 Cosinus hyperbolicus

$$y = \cosh x := \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

### 5.10 Sinus hyperbolicus

$$y = \sinh x := \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

Es gilt:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

### 5.11 Tangens hyperbolicus

$$y = \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

### 5.12 Cotangens hyperbolicus

$$y = \coth x := \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

### 5.13 Wurzelfunktion

Umkehrfunktion der Potenzfunktionen

$$y = f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{Z}$$

Wurzelfunktion:

$$y = f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

n gerade: vor der Umkehrung ist die Einschränkung des Definitionsbereiches auf  $x \geq 0$  notwendig

#### 5.13.1 Beispiel

$$y = f(x) = x^2 + 1 \quad x \geq 0$$

Umkehrfunktion:

$$y = \sqrt{x - 1}$$

## 6 Funktionen mit Ecken und Sprüngen

### 6.1 Betragsfunktion

$$y = |x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

### 6.2 Heaviside-Stufenfunktion

$$y = \Theta(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

### 6.2.1 TODO Graphik

### 6.2.2 Beispiel

$$y = \Theta(x)\Theta(-x + a)$$

TODO Graphik

### 6.3 "symmetrischer Kasten" der Breite $2a$ und der Höhe $\frac{1}{2a}$ (Dirak Delta Funktion)

$$\Theta_a(x) := \frac{\Theta(x+a)\Theta(-x+a)}{2a}$$
$$\lim_{a \rightarrow 0} \Theta_a = \text{"(Dirak) } \delta\text{-Funktion"}$$

### 6.3.1 TODO Graphik

## 7 Verkettung von Funktionen

Seien

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$$

mit  $w_g \subseteq D_f$ , dann ist die Funktion  $f \circ g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \quad \forall x \in D_g$$

### 7.1 Beispiel

$$z = g(x) = 1 + x^2 \quad W_g : z \geq 1$$

$$y = f(z) = \frac{1}{z} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

also  $W_g \subset D_f$ , sodass

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

### 7.2 Spiegelsymmetrie (Siegelung an der y-Achse, d.h. $x \rightarrow -x$ )

Eine Funktion  $f(x)$  heißt

- gerade(symmetrisch) wenn  $f(-x) = f(x)$
- ungerade (antisymmetrisch) wenn  $f(-x) = -f(x)$

### 7.2.1 Beispiel

#### gerade Funktionen

- $f(x) = x^{2n} \quad n \in \mathbb{N}$
- $f(x) = \cos x$
- $f(x) = |x|$

#### ungerade Funktionen

- $f(x) = x^{2n+1}$
- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \sin(x)$

#### keins von beidem

- $f(x) = sx + c$

### 7.2.2 Zerlegung

Jede Funktion lässt sich in einen geraden und ungeraden Anteil zerlegen

- gerader Anteil:

$$f_+(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)) = f_+(-x)$$

- ungerader Anteil:

$$f_-(x) = \frac{1}{2} (f(x) - f(-x)) = -f_-(-x)$$

- check:

$$f_+(x) + f_-(x) = f(x) \quad \checkmark$$

## 8 Eigenschaften von Funktionen

### 8.1 Beschränktheit

$f$  heißt nach oben beschränkt im Intervall  $[a, b]$ , wenn es eine obere Schranke gibt, d.h.

$$\exists B \in \mathbb{R} : f(x) \leq B \quad \forall x \in [a, b]$$

analog: nach unten beschränkt

$$\exists A \in \mathbb{R} : f(x) \geq A \quad \forall x \in [a, b]$$

### 8.1.1 Beispiel

$f(x) = x^2$  durch  $A = 0$  nach unten beschränkt  
 $f(x) = \Theta(x)$   $B = 1$ ,  $A = 0$

## 8.2 Monotonie

Eine Funktion  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  heißt monoton steigend im Intervall  $[a, b] \subseteq D_f$ , wenn aus  $x_1, x_2 \in [a, b]$  mit  $x_1 < x_2$  stets folgt  $f(x_1) \leq f(x_2)$ . Gilt sogar  $f(x_1) < f(x_2)$  so heißt  $f$  streng monoton steigend im Intervall  $[a, b]$ . Analog heißt  $f$  monoton (streng monoton) fallend, wenn stets folgt  $f(x_1) \geq f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ).

### 8.2.1 Beispiel

$f(x) = x^3$  streng monoton steigend

## 9 Umkehrfunktionen

Sei  $f : D_f \rightarrow W_f$  eineindeutig (bijektiv), dann kann man die Gleichung  $y = f(x)$  eindeutig nach  $x$  auflösen

$$x = f^{-1}(y) := g(y) \quad D_g = W_f, \quad W_g = D_f$$

$$f^{-1} = g : W_f \rightarrow D_f$$

Die ursprüngliche Abbildung  $y = f(x)$  und die Umkehrabbildung  $x = f^{-1}(y) = g(y)$  heben sich in ihrer Wirkung auf

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

### 9.1 Graph der Umkehrfunktion

1. Gegebenfalls Einschränkung von  $D_f$ , sodass eine bijektive Funktion vorliegt
2. Auflösen der Gleichung  $y = f(x) \implies x = f^{-1}(y)$
3. Umbenennung der Variablen: die unabhängige Variable  $y$  wird wieder  $x$  genannt, die abhängige wieder  $y$ :  $y = f^{-1}(x)$

#### 9.1.1 Beispiel $y = x^2$

1. Einschränkung  $D_f$  auf  $x \geq 0$
2.  $y = x^2, x \geq 0 \iff x = \sqrt{y}$
3. Umbenennung:  $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

### 9.1.2 Graphisch

Spiegelung an  $y = x$

## 10 what after this?

## 11 Integral und Differenzialrechnung

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Hauptsatz:

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

$F(x) = \int f(x) dx$	f(x)	Bemerkungen
const	0	
$x^r$	$rx^{r-1}$	$r \in \mathbb{R}$
$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	$x^r$	$-1 \neq r \in \mathbb{R}$

### 11.1 Die Kunst des Integrierens

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_a^b$$

### 11.2 Ableiten über Umkehrfunktion

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

### 11.3 Integrationsregeln

#### 11.3.1 Lineare Zerlegung

$$\int_{a_1}^{a_2} cf(x) + bg(x) dx = c \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + b \int_{a_1}^{a_2} g(x) dx$$

Beispiel

$$F = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^2 dx = \int_0^1 1 - 2x^2 + x^4 dx = \int_0^1 1 dx - 2 \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x^4 dx = \frac{8}{15}$$

### 11.3.2 Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

merke:  $\frac{g(x)}{dx} dx = g'(x)dx = dy$

$$y = g(x), \quad \frac{dy}{dx} = g'(x), \quad dy = g'(x)dx$$

**Beweis**  $F$  sei die Stammfunktion zu  $f$ ,  $F' = f$

$$(F(g(t)))' = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = F(g(t)) \Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F(x) \Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

### Beispiel

•

$$\int_1^5 \sqrt{2x+1}dx = \int_1^9 \sqrt{y} \frac{1}{2}dy = \frac{26}{3}$$

$$y = 2x - 1 \quad y' = g'(x) = \frac{dy}{dx} = g'(x) = 2 \implies dy = 2dx \implies \frac{1}{2}dy = dx$$

•

$$\int_0^b te^{-\alpha t^2} dt = -\frac{1}{2\alpha} \int_0^{-\alpha b^2} e^y dy = -\frac{1}{2\alpha} (e^{-\alpha b^2} - 1)$$

$$y = g(t) = -\alpha t^2 \implies \frac{dy}{dt} = -2\alpha t \implies dy = -2\alpha t dt \implies dt = -\frac{1}{2\alpha t} dy$$

•

$$\int_0^T \cos \omega t dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega T} dy$$

•

$$\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{1}{y} dy = \ln |y| \Big|_{g(a)}^{g(b)}$$

•

$$\int \frac{dx}{ax \pm b} = \frac{1}{a} \ln |ax \pm b| + c$$

•

$$\int_a^b g^n(x)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} y^n dy$$

### 11.3.3 Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

### Beweis

$$F(x) = f(x)g(x) \implies F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

$$f(x)g(x) \Big|_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

$$f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

### Beispiel

•

$$\int_a^b x \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b x dx$$

•

$$\int 1 \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

•

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x$$

### Kreisfläche

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\int_a^b \sqrt{1 - x^2} dx = \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} \cos t \cos t dt = \frac{1}{2}(\arcsin b + b\sqrt{1 - b^2} - \arcsin a - a\sqrt{1 - a^2})$$

$$x = \sin t \implies t = \arcsin x, \quad \frac{dx}{dt} = \cos t, \quad dx = \cos t dt$$

$$\int \cos t \cos t = \sin t \cos t + \int \sin^2 t dt = \sin t \cos t + \int 1 - \cos^2 t dt = \frac{\sin t \cos t + t}{2}$$

### In Polarkoordinaten

$$y = \sin t$$

$$x = \cos t$$

$$dx = -\sin t dt$$

$$dA = y dx = -\sin^2 t dt$$

$$A = \int_0^\pi \sin^2 t = \frac{\pi}{2}$$



## Zerlegung

$$\begin{aligned} dA &= 2\pi r dr \\ \int dA &= \int_0^R 2\pi r dr = 2\pi \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^R = \pi R^2 \end{aligned}$$

### 11.3.4 Weitere Integrationstricks

**Partialbruchzerlegung**  $\implies$  Integration rationaler Funktionen

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{1-x^2} \text{ mit } \{-1, 1\} \notin [a, b] \\ 1-x^2 &= (1-x)(1+x) \\ \frac{1}{1-x^2} &= \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x} = \frac{\alpha(1+x) + \beta(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{\alpha + \beta + x(\alpha - \beta)}{1-x^2} \implies \alpha = \beta \frac{1}{2} \\ \int_a^b \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \left( \int_a^b \frac{1}{1-x} + \int_a^b \frac{1}{1+x} \right) \end{aligned}$$

## 11.4 Uneigentliche Integrale

### 11.4.1 Unendliches Integralintervall

**Definition** Sei  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die über jedem Intervall  $[a, R)$ ,  $a < R < \infty$  (Riemann-)integrierbar ist. Falls der Grenzwert  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$  existiert setzt man

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$$

**Beispiel**

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{1}{s-1} & s > 1 \\ \infty & s \leq 1 \end{cases}$$

### 11.5 Cauchy Hauptwert

$$P \int_{-\infty}^\infty f(x) dx := \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c f(x) dx$$

P := "principal Value"

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty x^{2n-1} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^c x^{2n-1} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b x^{2n-1} dx = \infty \\ P \int_{-\infty}^\infty x^{2n-1} dx &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c x^{2n-1} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2n} \underbrace{(c^{2n} - (-c)^{2n})}_{=0} \right) = 0 \end{aligned}$$

### 11.5.1 Unbeschränkter Integrand

Situation: Integrand wird an einer Stelle  $x_0 \in [a, b]$  unbeschränkt

**Definition** Sei  $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die über jedem Teilintervall  $[a + \eta, b]$ ,  $0 < \eta < b - a$  (Riemann-)integrierbar ist. Falls der Grenzwert  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{a+\eta}^b f(x) dx$  existiert, heißt das Integral  $\int_a^b f(x) dx$  konvergent

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{a+\eta}^b f(x) dx$$

**Beispiel**

$$\int_0^b \frac{1}{x^{1-\epsilon}} dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\eta}^b \frac{1}{x^{1-\epsilon}} dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (b^{\epsilon} - \eta^{\epsilon}) = \frac{1}{\epsilon} b^{\epsilon}$$

**Principal value**

$$P \int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_a^{x_0-\eta} f(x) dx + \int_{x_0+\eta}^b f(x) dx$$

## 11.6 Integralfunktionen

$$\ln x = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

$$\arctan x = \int_0^y \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx$$

Elliptisches Integral

## 11.7 Gamma-Funktion

### 11.7.1 Definition

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Satz: Es gilt  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(m+1) = m! \forall m \in \mathbb{N}$ ,  $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1$$

$$\Gamma(x+1) = \int_{\epsilon}^R t^x e^{-t} dt = \underbrace{t^x e^{-t} \Big|_{\epsilon}^R}_{R \rightarrow \infty} + x \int_{\epsilon}^R t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$f(t) = -e^{-t} \iff f'(t) = e^{-t}$$

$$g(t) = t^x \implies x t^{x-1} = g'(t)$$

## 12 Vektoren

### 12.1 $\mathbb{R}^3$

#### 12.1.1 Orthonormal

Länge eins, senkrecht aufeinander und sie bilden eine Basis, also jeder Vektor hat genau eine Darstellung:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \sum_{k=1}^3 a_k \vec{e}_k = \underbrace{a_k e_k}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

## 12.2 Skalarprodukt und Kronecker-Symbol

### 12.2.1 Motivation: mechanische Arbeit

#### 12.2.2 Definition

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

#### 12.2.3 Spezialfälle

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \implies \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$\vec{a}$  und  $\vec{b}$  antiparallel:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \implies \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

#### 12.2.4 Betrag:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}|^2 = a^2$$

#### 12.2.5 Eigenschaften

- Kommutativgesetz

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$

- Homogenität

$$\langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \lambda \vec{b} \rangle$$

- Distributivgesetz

$$\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$$

- 

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0 \quad \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \iff \vec{a} = 0$$

### 12.2.6 Orthonormalbasis der kartesischen Koordinatensystem

Basisvektoren  $\vec{e}_k, k = 1, 2, 3$  Orthogonalität  $\langle \vec{e}_k, \vec{e}_l \rangle = 0 \quad l \neq k$  Für  $k = l$  :  $\langle \vec{e}_k, \vec{e}_k \rangle = \cos(0) = 1$  Orthonormalität

### 12.2.7 Kronecker Symbol

$$\delta_{kl} := \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

Entspricht Komponenten der Einheitsmatrix Symmetrie gegen Vertauschung der Indizes

$$\delta_{kl} = \delta_{lk} \quad \text{Spur: } \delta_{kk} = \underbrace{\sum_{k=1}^3 \delta_{kk}}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}} = 3$$

### 12.2.8 Komponentendarstellung des Skalarprodukts

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^3 a_k \vec{e}_k = \underbrace{a_k \vec{e}_k}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

$$\vec{b} = \sum_{k=1}^3 b_k \vec{e}_k = \underbrace{b_k \vec{e}_k}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \left( \sum_{k=1}^3 a_k \vec{e}_k \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^3 b_k \vec{e}_k \right) = \sum_{k,l=1}^3 a_k b_l \underbrace{\langle \vec{e}_k, \vec{e}_l \rangle}_{=\delta_{kl}} = \sum_{k=1}^3 a_k b_k$$

## 13 Matrizen

### 13.1 Determinante

$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)})$  Summe über alle Permutationen von  $S_n$ , Vorzeichen der Permutation ist positiv, wenn eine gerade Anzahl an Vertauschungen notwendig ist, und entsprechend negativ bei einer ungeraden Anzahl.

### 13.2 Homogenes Gleichungssystem

$$A\vec{x} = 0 \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + x_3 a_{23} & = & 0 \\ \underbrace{a_{31}}_{\vec{a}_1} & \underbrace{a_{32}}_{\vec{a}_2} & \underbrace{a_{33}}_{\vec{a}_3} & 0 \end{matrix}$$

sind  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  linear unabhängig, dann gibt es nur die Lösung  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ .  
 Nichttriviale Lösung nur wenn  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  linear abhängig  $\implies \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , sodass z.B.  
 $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2 + \mu \vec{a}_3$ . Wenn  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  linear unabhängig, dann  $\det A = 0$ .

### 13.3 Levi Civita Symbol

$$\varepsilon_{ijk\dots} = \begin{cases} +1, & \text{falls } (i, j, k, \dots) \text{ eine gerade Permutation von } (1, 2, 3, \dots) \text{ ist,} \\ -1, & \text{falls } (i, j, k, \dots) \text{ eine ungerade Permutation von } (1, 2, 3, \dots) \text{ ist,} \\ 0, & \text{wenn mindestens zwei Indizes gleich sind.} \end{cases} \quad (1)$$

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \prod_{1 \leq p < q \leq n} \frac{i_p - i_q}{p - q} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{k,l,m} = \delta_{k1}(\delta_{l2}\delta_{m3} - \delta_{l3}\delta_{m2}) + \delta_{k2}(\delta_{l3}\delta_{m1} - \delta_{l1}\delta_{m3}) + \delta_{k3}(\delta_{l1}\delta_{m2} - \delta_{l2}\delta_{m1}) \quad (3)$$

### 13.4 Vektorprodukt / Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$= \vec{e}_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad (6)$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3, \quad (7)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k$$

### 13.5 Spatprodukt

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c}| = \text{Volumen eines Spats}$$

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \vec{a} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \vec{c}$$

### 13.6 Geschachteltes Vektorprodukt

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{v}) = (\vec{a} \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \vec{b}) \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \vec{b})$$

#### 13.6.1 Beweis

$$\vec{a} = (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times (\varepsilon_{ijk} b_i c_j \vec{e}_k) = \varepsilon_{pqm} a_p \varepsilon_{ijk} b_i c_j \vec{e}_m$$

## 14 misc

- mathe für physiker vs. analysis
- klausuren gebündelt
- auslandssemester