

# Lineare Algebra II (Vogel)

Robin Heinemann

21. April 2017

## Inhaltsverzeichnis

18 Eigenwerte

1

## 18 Eigenwerte

In diesem Abschnitt sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V$  ein  $K$ -VR und  $\varphi \in \text{End}_K(V)$ .

Frage:  $V$  endlichdim. Existiert eine Basis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $V$ , sodass  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  eine Diagonalmatrix ist, das heißt

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ ?

Für  $i = 1, \dots, n$  wäre dann  $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$

**Definition 18.1**  $\lambda \in K, v \in V$

- $\lambda$  heißt Eigenwert von  $\varphi \stackrel{\text{Def}}{\iff} \exists v \in V, v \neq 0 : \varphi(v) = \lambda v$
- $v$  heißt Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda \stackrel{\text{Def}}{\iff} v \neq 0 \wedge \varphi(v) = \lambda v$
- $\varphi$  heißt diagonalisierbar  $\stackrel{\text{Def}}{\iff} V$  besitzt eine Basis aus EV von  $\varphi$

(Falls  $V$  endlichdimensional, ist die äquivalent zu: Es gibt eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  mit

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

)

Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit einer Matrix  $A \in M(n \times n, K)$  sind über den Endomorphismus  $\tilde{A} : K^n \rightarrow K^n$  definiert.

**Bemerkung 18.2**  $A \in M(n \times n, K)$ . Dann sind äquivalent:

1.  $A$  ist diagonalisierbar.
2. Es gibt eine Basis von  $K^n$  aus Eigenvektoren von  $A$
3. Es gibt ein  $S \in \text{GL}(n, K)$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  mit  $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$
4.  $A$  ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix

In diesem Fall steht in den Spalten von  $S^{-1}$  eine Basis des  $K^n$  aus EV von  $A$ , und für jede Matrix  $A \in M(n \times n, K)$  mit der Eigenschaft, dass die Spalten von  $S^{-1}$  eine Basis des  $K^n$  aus EV von  $A$  bilden, dann ist  $SAS^{-1}$  eine Diagonalmatrix (mit den EW auf der Diagonalen.)

**Beweis** Äquivalenz: \ 1.  $\iff$  2. Definition, 2.  $\iff$  3. aus Basiswechselsatz (16.6), 3.  $\iff$  4. aus Definition Ähnlichkeit (16.12)

Zusatz: Sei  $S \in \text{GL}(n, K)$  mit  $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \implies A(S^{-1}e_j) = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j.$

Wegen  $S^{-1} \in \text{GL}(n, K)$  ist  $S^{-1}e_j \neq 0$ , das heißt  $S^{-1}$  ist EV von  $A$  zum EW  $\lambda_j$

Wegen  $S^{-1} \in \text{GL}(n, K)$  ist  $(S^{-1}e_1, \dots, S^{-1}e_n)$  eine Basis des  $K^n$  aus EV von  $A$ .

Sei  $S \in \text{GL}(n, K)$ , das heißt die Spalten von  $S^{-1}$  eine Basis des  $K^n$  aus EV von  $A$  bilden, das heißt für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$  ist  $AS^{-1}e_j = \lambda_j S^{-1}e_j$  für ein  $\lambda_j \in K$ .

$$\implies AS^{-1}e_j = S^{-1}\lambda_j e_j = S^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j \implies SAS^{-1}e_j = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} e_j, j = 1, \dots, n$$

$$\implies SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \square$$

**Beispiel 18.3**  $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$

$$1. \varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ Es ist } \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

das heißt  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist EV von  $\varphi$  zum EW 1.

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ also ist } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ EV von } \varphi \text{ zum EW } -1. \text{ Somit:}$$

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$  ist eine Basis des  $\mathbb{R}^2$  aus EV von  $\varphi$ , das heißt  $\varphi$  ist diagonalisierbar.

In Termen von Matrizen:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$  ist diagonalisierbar, und mit  $S =$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  ist dann ist  $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  Achtung: Das  $\varphi$  diagonalisierbar ist, heißt nicht, dass jeder Vektor aus  $V = \mathbb{R}^2$  ein EV von  $\varphi$  ist, zum Beispiel ist  $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

2.  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$  (= Drehung um  $\frac{\pi}{2}$ ). hat keinen EW.  
Beweis dafür: später.

Ziel: Suche Kriterien für Diagonalisierbarkeit.

**Bemerkung 18.4**  $v_1, \dots, v_m$  EV von  $\varphi$  zu paarweise verschiedenen EW  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ . Dann ist  $(v_1, \dots, v_m)$  linear unabhängig, insbesondere ist  $m \leq \dim V$ . Insbesondere gilt: ist  $V$  endlichdimensional, dann hat  $\varphi$  höchstens  $\dim(V)$  Eigenwerte.

**Beweis** per Induktion nach  $m$ :

IA:  $m = 1 : v_1 \neq 0$ , da  $v_1$  EV  $\Rightarrow (v_1)$  linear unabhängig.

IS: sei  $m \geq 2$ , und die Aussage für  $m - 1$  bewiesen.

Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$  mit  $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m = 0$  Außerdem:  $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_1 v_m = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \dots + \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1)v_m &= 0 \\ \alpha_2\lambda_2 - \lambda_1 &= \dots = \alpha_m(\lambda_m - \lambda_1) = 0 \\ \Rightarrow \alpha_2 &= \dots = \alpha_m = 0 \\ \Rightarrow \alpha_1 v_1 &= 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow (v_1, \dots, v_m) \text{ linear unabhängig} \quad \square \end{aligned}$$

**Folgerung 18.5**  $V$  endlichdimensional,  $\varphi$  habe  $n$  paarweise verschiedene EW, wobei  $n = \dim V$ . Dann ist  $\varphi$  diagonalisierbar.

**Beweis** Für  $i = 1, \dots, n$  sei  $v_i$  ein EV von  $\varphi$  zum EW  $\lambda_i \Rightarrow (v_1, \dots, v_n)$  linear unabhängig, wegen  $n = \dim V$  ist  $(v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$  aus EV von  $\varphi$   $\square$

**Definition 18.6**  $\lambda \in K$

$\text{Eig}(\varphi, \lambda) := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$  heißt der Eigenraum von  $\varphi$  bezüglich  $\lambda$ .

$\mu_{geo}(\varphi, \lambda) := \dim \text{Eig}(\varphi, \lambda)$  heißt die geometrische Vielfachheit von  $\lambda$ .

Für  $A \in M(n \times n, K)$  setzen wir  $\text{Eig}(A, \lambda) := \text{Eig}(\tilde{A}, \lambda), \mu_{geo}(A, \lambda) := \mu_{geo}(\tilde{A}, \lambda)$ .

**Bemerkung 18.7**  $\lambda \in K$ . Dann gilt:

1.  $\text{Eig}(\varphi, \lambda)$  ist ein UVR von  $V$ .
2.  $\lambda$  ist EW von  $\varphi \iff \text{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\}$ .
3.  $\text{Eig}(\varphi, \lambda) \setminus \{0\}$  ist die Menge der zu  $\lambda$  gehörenden EV von  $\varphi$ .

4.  $\text{Eig}(\varphi, \lambda) = \ker(\lambda \text{id}_V - \varphi)$ , insbesondere ist  $\text{Eig}(A, \lambda) = \ker(\lambda E_n - \varphi) = \text{Lös}(\lambda E_n - A, 0)$  für  $A \in M(n \times n, K)$

5. Sind  $\lambda_1, \lambda_2 \in K$  mit  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , dann  $\text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \cap \text{Eig}(\varphi, \lambda_2) = \{0\}$

**Beweis** 4. Es ist  $v \in \text{Eig}(\varphi, \lambda) \iff \varphi(v) = \lambda v \iff \lambda v - \varphi(v) = 0 \iff (\lambda \text{id}_V - \varphi)(v) = 0 \iff v \in \ker(\lambda \text{id}_V - \varphi)$  Es ist  $\text{Eig}(A, \lambda) = \ker(\lambda \text{id}_{K^n} - \tilde{A}) = \ker(\lambda E_n - A) = \text{Lös}(\lambda E_n - A, 0)$

1. aus 4.

2.  $\lambda$  EW von  $\varphi \iff \exists v \in V, v \neq 0$  mit  $\varphi(v) = \lambda v \iff \text{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\}$ .

3. klar.

5. Sei  $\lambda_1 \neq \lambda_2, v \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \cap \text{Eig}(\varphi, \lambda_2) \Rightarrow \lambda_1 v = \varphi(v) = \lambda_2 v \Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} v = 0 \Rightarrow v = 0$   $\square$

**Bemerkung 18.8**  $V$  endlichdimensional,  $\lambda \in K$ . Dann sind äquivalent:

1.  $\lambda$  ist EW von  $\varphi$

2.  $\det(\lambda \text{id}_V - \varphi) = 0$

**Beweis** 1.  $\iff \text{Eig}(\varphi, \lambda) \neq \{0\} \Rightarrow \ker(\lambda \text{id}_V - \varphi) \neq \{0\} \Rightarrow \lambda \text{id}_V - \varphi$  nicht injektiv  $\Rightarrow \lambda \text{id}_V - \varphi$  kein Isomorphismus  $\Rightarrow \det(\lambda \text{id}_V - \varphi) = 0$ .  $\square$

**Definition 18.9**  $K$  Körper,  $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$

$$\chi_A^{char} := \det(tE_n - A) = \det \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ -a_{n1} & \dots & & t - a_{nn} \end{pmatrix} \in K[t]$$

heißt das charakteristische Polynom von  $A$ .

**Anmerkung** Hiefür nötig: Determinanten von Matrizen mit Einträgen in einem kommutativen Ring.

In manchen Büchern  $\chi_A^{char} = \det(A - tE_n)$  (schlecht)  $\square$

**Beispiel 18.10**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow A \chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ -3 & t-4 \end{pmatrix} = (t-1)(t-4) - 6 = t^2 - 5t - 2$$

**Bemerkung 18.11**  $A, B \in M(n \times n, K), A \approx B$ .

Dann ist  $\chi_A^{char} = \chi_B^{char}$ .

**Beweis**  $A \approx B \Rightarrow \exists S \in GL(n, K) : B = SAS^{-1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow tE_n - B &= tE_n - SAS^{-1} = SS^{-1}tE_n - SAS^{-1} = StE_nS^{-1} - SAS^{-1} = S(tE_n - A)S^{-1} \\ \Rightarrow \chi_B^{char} &= \det(tE_n - B) = \det(S(tE_n - A)S^{-1}) = \det(S) \det(tE_n - A) \det(S^{-1}) = \\ &= \underbrace{\det(S) \det(S)^{-1}}_{=1} \det(tE_n - A) = \chi_A^{char} \quad \square \end{aligned}$$

**Definition 18.12**  $V$  endlichdim,  $n = \dim V$ ,  $\mathcal{B}$  Basis von  $V$ ,  $\varphi \in \text{End}(V)$ ,  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$

$$\chi_{\varphi}^{char} := \chi_A^{char} = \det(tE_n - A) \in K[t]$$

heißt das charakteristische Polynom von  $\varphi$ .

**Anmerkung**  $\chi_{\varphi}^{char}$  ist wohldefiniert, dann: Ist  $\mathcal{B}'$  eine weitere Basis von  $V$ ,  $A' = M_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ , dann ist  $A \approx A'$  und deshalb nach 18.11:  $\chi_A^{char} = \chi_{A'}^{char}$ .  $\square$

**Satz 18.13**  $V$  endlichdimensional,  $n = \dim V$ . Dann gilt:

1.  $\chi_{\varphi}^{char}$  ist ein normiertes Polynom von Grad  $n$ :

$$\chi_{\varphi}^{char} = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_0$$

mit  $c_0 = (-1)^n \det \varphi$ ,  $c_{n-1} = -(\varphi)$  (vgl. Übung zur Spur)

2. Die Nullstellen von  $\chi_{\varphi}^{char}$  sind genau die EW von  $\varphi$ :

$$\lambda \in K \text{ ist EW von } \varphi \Leftrightarrow \chi_{\varphi}^{char} \lambda = 0$$

**Beweis** Sei  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$ ,  $A := M_{\mathcal{B}}(\varphi) \in M(n \times n, K)$

- 1.

$$\begin{aligned} \chi_{\varphi}^{char} &= \chi_A^{char} = \det \underbrace{(tE_n - A)}_{=: B = (B_{ij})} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) B_{1, \sigma(1)} \cdot \dots \cdot B_{n, \sigma(n)} \\ &= (t - a_{11}) \cdot \dots \cdot (t - a_{nn}) + \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n \setminus \{\text{id}\}} \text{sgn}(\sigma) B_{1, \sigma(1)} \cdot \dots \cdot B_{n, \sigma(n)}}_{:=g} \end{aligned}$$

Für  $\sigma \in S_n \setminus \{\text{id}\}$  treten in  $B_{1, \sigma(1)}, \dots, B_{n, \sigma(n)}$  höchstens  $n - 2$  Diagonalelemente auf, also  $\deg(g) \leq n - 2$ .

$$\Rightarrow \chi_{\varphi}^{char} = t^n - (a_{11} + \dots + a_{nn})t^{n-1} + \text{Terme kleineren Grades}$$

insbesondere:

$$c_{n-1} = -(a_{11} + \dots + a_{nn}) = -\text{tr} A = -\varphi$$

Es ist

$$c_0 = \chi_{\varphi}^{char}(0) = (\det(tE_n - A))(0) = \det(0E_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

2. Aus  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  folgt  $\lambda E_n - A = M_{\mathcal{B}}(\lambda \text{id}_V - \varphi)$ . Also:

$$\begin{aligned}\chi_{\varphi}^{char}(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow (\det(tE_n - A))(\lambda) = 0 \Rightarrow \det(\lambda E_n - A) = 0 \Leftrightarrow \det(M_{\mathcal{B}}(\lambda \text{id}_V - \varphi)) = 0 \\ &\Rightarrow \det(\lambda \text{id}_V - \varphi) = 0 \Leftrightarrow \lambda \text{ ist EW von } \varphi\end{aligned}\quad \square$$

**Definition 18.14**  $\lambda \in K$

$$\mu_{alg}(\varphi, \lambda) := \mu(\chi_{\varphi}^{char}, \lambda)$$

heißt die **algebraische Vielfachheit**

**Beispiel 18.15** 1.  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=: A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Es ist  $\chi_{\varphi}^{char} = \chi_A^{char} =$

$$\det \begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{pmatrix} = t^2 - 1 = (t-1)(t+1) \in \mathbb{R}[t] \quad \square \text{ EW von } \varphi : 1, -1.$$

$$\text{Es ist } \mu_{alg}(\varphi, 1) = 1, \mu_{alg}(\varphi, -1) = 1$$

$$\text{Eig}(\varphi, 1) = \text{Eig}(A, 1) = \text{Lös}(E_2 - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{also } \mu_{geo}(\varphi, 1) = \dim \text{Eig}(\varphi, 1) = 1$$

$$\text{Eig}(\varphi, -1) = \text{Eig}(A, -1) = \text{Lös}((-1) \cdot E_2 - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{also } \mu_{geo}(\varphi, -1) = 1.$$

2.  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=: A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Es ist  $\chi_{\varphi}^{char} = \chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} =$

$$t^2 + 1, \chi_{\varphi}^{char} \text{ hat keine NS in } \mathbb{R} \Rightarrow \varphi \text{ hat keine EW.}$$

3.  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=: A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Es ist  $\chi_{\varphi}^{char} = \chi_A^{char} = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix} =$

$$(t-1)^2 \Rightarrow 1 \text{ ist einziger EW von } \varphi, \text{ es ist } \mu_{alg}(\varphi, 1) = 2$$

$$\text{Eig}(\varphi, 1) = \text{Eig}(A, 1) = \text{Lös}(1E_2 - A, 0) = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \mu_{geo}(\varphi, 1) = 1. \Rightarrow \varphi \text{ ist nicht diagonalisierbar.}$$

**Satz 18.16**  $V$  endlichdimensional,  $n = \dim V$

1. Ist  $\varphi$  diagonalisierbar, dann ist  $\chi_{\varphi}^{char} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n)$  mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ , nicht notwendig verschieden, das heißt  $\chi_{\varphi}^{char}$  zerfällt in Linearfaktoren.

2. Ist  $\chi_\varphi^{char} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n)$  mit paarweise verschiedene  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ , dann ist  $\varphi$  diagonalisierbar.

**Beweis** 1. Sei  $\varphi$  diagonalisierbar  $\rightarrow V$  besitzt Basis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  aus EV zu EW  $\lambda_i \in K$ .

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_\varphi^{char} = \det \begin{pmatrix} t - \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t - \lambda_n \end{pmatrix} = (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n)$$

2. Aus  $\chi_\varphi^{char} = (t - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (t - \lambda_n)$  mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  paarweise verschieden  $\Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n$  sind paarweise verschiedene EW von  $\varphi \Rightarrow \varphi$  diagonalisierbar.  $\square$

**Bemerkung 18.17**  $V$  endlichdimensional,  $n = \dim V$ ,  $\lambda$  EW von  $\varphi$ . Dann gilt:

$$1 \leq \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \leq \mu_{alg}(\varphi, \lambda)$$

**Beweis** Sei  $(v_1, \dots, v_s)$  eine Basis von  $\text{Eig}(\varphi, \lambda) \Rightarrow s = \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \geq 1$ , da  $\lambda$  EW von  $\varphi$ . Nach Basiserweiterungssatz  $\exists v_{s+1}, \dots, v_n \in V$ , sodass  $\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$  ist.

$$\begin{aligned} \Rightarrow A := A_{\mathcal{B}}(\varphi) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} \lambda & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & \lambda & & & \\ \hline & & 0 & & & \end{array} \begin{array}{c} * \\ \\ \\ A' \end{array} \right), A' \in M((n-s) \times (n-s), K) \\ \Rightarrow \chi_\varphi^{char} = \chi_A^{char} &= \det \left( \begin{array}{ccc|ccc} t - \lambda & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & t - \lambda & & & \\ \hline & & 0 & & & \end{array} \begin{array}{c} * \\ \\ \\ tE_{n-s} - A' \end{array} \right) = (t - \lambda)^s \det(tE_{n-s} - A') = (t - \lambda)^s \chi_{A'}^{char} \\ \Rightarrow \mu_{geo}(\varphi, \lambda) = s &\leq \mu(\chi_\varphi^{char}, \lambda) = \mu_{alg}(\varphi, \lambda) \quad \square \end{aligned}$$

**Bemerkung 18.18**  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  paarweise verschiedene EW von  $\varphi$ . Dann gilt:

$$\text{Eig}(\varphi, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \text{Eig}(\varphi, \lambda_j) = \{0\} \forall i \in \{1, \dots, r\}$$

**Beweis** Sei  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Annahme:  $\exists v_i \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_i) \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \text{Eig}(\varphi, \lambda_j) : v_i \neq 0$ .

$$\Rightarrow \exists v_j \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_j), j = 1, \dots, r, j \neq i : v_i = v_1 + \dots + v_{i-1} + v_{i+1} + \dots + v_r$$

Setze  $J := \{j \in \{1, \dots, r\}, j \neq i \mid v_j \neq 0\} = \{j_1, \dots, j_s\}$

$$\Rightarrow v_i = v_{j_1} + \dots + v_{j_s} \Rightarrow v_{j_1} + \dots + v_{j_s} + (-1)v_i = 0 \Rightarrow (v_{j_1}, \dots, v_{j_s}, v_i) \text{ linear abhängig} \quad \square$$

**Satz 18.19**  $V$  endlichdimensional. Dann sind äquivalent:

1.  $\varphi$  diagonalisierbar
2.  $\chi_\varphi^{char}$  zerfällt in Linearfaktoren und  $\mu_{alg}(\varphi, \lambda) = \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \forall$  EW von  $\varphi$ .
3. Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  die paarweise verschiedenen EW von  $\varphi$ , dann ist

$$V = \text{Eig}(\varphi, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Eig}(\varphi, \lambda_k)$$

In diesem Fall erhält man eine Basis von  $V$  aus EV von  $\varphi$ , indem man Basen von  $\text{Eig}(\varphi, \lambda_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$  zusammenfügt.

**Beweis** 1.  $\Rightarrow$  2. Sei  $\varphi$  diagonalisierbar.  $\Rightarrow \exists$  Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  aus EV von  $\varphi$ . Wir ordnen die EV in  $\mathcal{B}$  den verschiedenen EW von  $\varphi$  zu und gelangen so zu Familien  $\mathcal{B}_i := (v_1^{(i)}, \dots, v_{s_i}^{(i)})$  von linear unabhängigen im  $\text{Eig}(\varphi, \lambda_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$

- a) Behauptung:  $\mathcal{B}_i$  ist eine Basis von  $\text{Eig}(\varphi, \lambda_i)$ , denn gezeigt:  $\mathcal{B}_i$  ist ein ES von  $\text{Eig}(\varphi, \lambda_i)$ .  
Sei  $v \in \text{Eig}(\varphi, \lambda_i) \leq V$

$$\Rightarrow \exists \lambda^{(j)} \in K : v = \sum_{j=1}^k (\lambda_1^{(j)} v_1^{(j)} + \dots + \lambda_{s_j}^{(j)} v_{s_j}^{(j)})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underbrace{v - (\lambda_1^{(i)} v_1^{(i)} + \dots + \lambda_{s_i}^{(i)} v_{s_i}^{(i)})}_{\in \text{Eig}(\varphi, \lambda_i)} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (\lambda_1^{(j)} v_1^{(j)} + \dots + \lambda_{s_j}^{(j)} v_{s_j}^{(j)}) \in \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \text{Eig}(\varphi, \lambda_j) \\ \Rightarrow v &= \lambda_1^{(i)} v_1^{(i)} + \dots + \lambda_{s_i}^{(i)} v_{s_i}^{(i)} \quad \square \end{aligned}$$