

Mathematischer Vorkurs

Robin Heinemann

December 18, 2016

Contents

1	Messwert und Maßeinheit	4
1.1	Beispiel	4
1.2	Bezeichnungen	4
1.3	Maßeinheiten	5
1.3.1	Beispiel:	5
1.3.2	SI-Einheiten	5
1.4	Natürliches Einheitensystem der Teilchenphysik	6
1.4.1	Grundlage	6
1.4.2	natürliches Einheitensystem	6
1.5	Endliche Messgenauigkeit	6
2	Zeichen und Zahlen	7
2.1	Symbole	7
2.1.1	Summenzeichen	7
2.1.2	Produktzeichen	9
2.1.3	Fakultätszeichen	9
2.2	Zahlen	9
2.2.1	Rechengesetze für reelle Zahlen	9
2.2.2	Satz des Pythagoras	10
2.2.3	binomische Formeln:	10
2.2.4	Pascalsches Dreieck	11
2.2.5	Beweisprinzip der Vollständigen Induktion	11
2.2.6	Quadratische Ergänzung	11
3	Folgen und Reihen	11
3.1	Folge	11
3.1.1	Definition	11
3.1.2	Beispiele	12
3.1.3	Frage	12
3.1.4	Beschränktheit	12

3.1.5	Monotonie	13
3.1.6	Konvergenz	13
3.2	Reihen (unendliche Reihen)	13
3.2.1	Bemerkung	14
3.2.2	Rechenregeln für konvergente Reihen	14
3.2.3	Beispiel	14
3.2.4	Absolute Konvergenz	14
4	TODO what was done after this? (Funktionen? (only?))	15
5	Funktionen	15
5.1	Normal-Hyperbel	15
5.1.1	Physik-Beispiel	15
5.2	kubische Parabel	15
5.2.1	Physik-Beispiel	15
5.2.2	Verallgemeinerung	15
5.3	$y = ax^{-2}$	15
5.3.1	Physik-Beispiel	15
5.4	Symmetrieeigenschaften der Potenzfunktionen	15
5.5	Potenzfunktionen als "Bausteine" in zusammengesetzten Funktionen	16
5.6	Rationale Funktionen	16
5.6.1	Beispiel	16
5.7	Trigonometrische Funktionen	16
5.7.1	TODO Table Formula?	16
5.7.2	TODO Veranschaulichung am Einheitskreis	16
5.7.3	Tangens/Cotangens	17
5.7.4	Additionstheoreme	17
5.8	Exponentialfunktionen	17
5.8.1	Rechenregeln	17
5.8.2	Beispiel radioaktiver Zerfall	17
5.9	Cosinus hyperbolicus	17
5.10	Sinus hyperbolicus	18
5.11	Tangens hyperbolicus	18
5.12	Cotangens hyperbolicus	18
5.13	Wurzelfunktion	18
5.13.1	Beispiel	18
6	Funktionen mit Ecken und Sprüngen	18
6.1	Betragsfunktion	18
6.2	Heaviside-Stufenfunktion	18
6.2.1	TODO Graphik	19
6.2.2	Beispiel	19

6.3	"symmetrischer Kasten" der Breite $2a$ und der Höhe $\frac{1}{2a}$ (Dirak Delta Funktion)	19
6.3.1	TODO Graphik	19
7	Verkettung von Funktionen	19
7.1	Beispiel	19
7.2	Spiegelsymmetrie (Siegelung an der y-Achse, d.h. $x \rightarrow -x$)	19
7.2.1	Beispiel	20
7.2.2	Zerlegung	20
8	Eigenschaften von Funktionen	20
8.1	Beschränktheit	20
8.1.1	Beispiel	21
8.2	Monotonie	21
8.2.1	Beispiel	21
9	Umkehrfunktionen	21
9.1	Graph der Umkehrfunktion	21
9.1.1	Beispiel $y = x^2$	21
9.1.2	Graphisch	22
10	what after this?	22
11	Integral und Differenzialrechnung	22
11.1	Die Kunst des Integrierens	22
11.2	Ableiten über Umkehrfunktion	22
11.3	Integrationsregeln	22
11.3.1	Lineare Zerlegung	22
11.3.2	Substitutionsregel	23
11.3.3	Partielle Integration	23
11.3.4	Weitere Integrationstricks	25
11.4	Uneigentliche Integrale	25
11.4.1	Unendliches Integralintervall	25
11.5	Cauchy Hauptwert	25
11.5.1	Unbeschränkter Integrand	26
11.6	Integralfunktionen	26
11.7	Gamma-Funktion	26
11.7.1	Definition	26
12	Vektoren	27
12.1	\mathbb{R}^3	27
12.1.1	Orthonormal	27
12.2	Skalarprodukt und Kronecker-Symbol	27
12.2.1	Motivation: mechanische Arbeit	27
12.2.2	Definition	27

12.2.3	Spezialfälle	27
12.2.4	Betrag:	27
12.2.5	Eigenschaften	27
12.2.6	Orthonormalbasis der kartesischen Koordinatensystem	28
12.2.7	Kronecker Symbol	28
12.2.8	Komponentendarstellung des Skalarprodukts	28
13	Matrizen	28
13.1	Determinante	28
13.2	Homogenes Gleichungssystem	28
13.3	Levi Civita Symbol	29
13.4	Vektorprodukt / Kreuzprodukt	29
13.5	Spatprodukt	29
13.6	Geschachteltes Vektorprodukt	29
13.6.1	Beweis	29
14	misc	30

1 Messwert und Maßeinheit

Zu jeder phys. Größe gehören Messwert und Maßeinheit, d.h. $\text{Zahlewert} \cdot \text{Einheit}$

1.1 Beispiel

Geschw. $v = \text{km s}^{-1}$

1.2 Bezeichnungen

Abkürzung	Bedeutung
t	time
m	mass
v	velocity
a	acceleration
F	Force
E	Energy
T	Temperature
p	momentum
I	electric current
V	potential

Wenn das lateinische Alphabet nicht ausreicht: griechische Buchstaben

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \Delta, \Gamma, \epsilon, \zeta, \eta, \Theta, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \Xi, \pi, \rho, \sigma, \tau, \phi, \chi, \psi, \omega, \Omega$

1.3 Maßeinheiten

Maßeinheiten werden über Maßstäbe definiert.

1.3.1 Beispiel:

1 m = Strecke, die das Licht in $\frac{1}{299792458}$ s zurücklegt.

1.3.2 SI-Einheiten

Internationaler Standard (außer die bösen Amerikaner :D)

Größe	Einheit	Symbol
Länge	Meter	m
Zeit	Sekunden	s
Masse	Kilogramm	kg
elektrischer Strom	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Lichstärke	Candela	cd
ebener Winkel	Radian	rad
Raumwinkel	Steradian	sr
Stoffmenge	Mol	mol

Radian Kreisumfang $U = 2\pi r$ Bogenmaß $b = \phi r$
Umrechnung in Winkelgrad

$$2\pi \text{ rad} \stackrel{\wedge}{=} 360^\circ$$

$$\frac{\text{Winkel in Radian}}{2\pi} = \frac{\text{Winkel in Grad}}{360}$$

Steradian

$$\Omega = \frac{A}{r^2}$$

Abgeleitete Einheiten

Größe	Einheit	Symbol	Equivalent
Frequenz	Hertz	Hz	1/s
Kraft	Newton	N	kg m s ⁻²
Energie	Joule	J	N m
Leistung	Watt	W	J s ⁻¹
Druck	Pascal	Pa	N m ⁻²
elektrischer Ladung	Coulomb	C	A s
elektrisches Potenzial	Volt	V	J C ⁻¹
elektrischer Widerstand	Ohm	Ω	V A ⁻¹
Kapazität	Farad	F	C N ⁻¹
magn. Fluss	Weber	Wb	V s ⁻¹

Prefix / Größenordnungen

Prefix	$\log\{10\}$	Abkürzung
Dezi	-1	d
Zenti	-2	c
Milli	-3	m
Mikro	-6	μ
Nano	-9	n
Piko	-12	p
Femto	-15	f
Atto	-18	a
Zepta	-21	z
Yokto	-24	y
Deka	1	D
Hekto	2	h
Kilo	3	k
Mega	6	M
Giga	9	G
Tera	12	T
Peta	15	P
Exa	18	E
Zetta	21	Z
Yotta	24	Y

1.4 Natürliches Einheitensystem der Teilchenphysik

1.4.1 Grundlage

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 6.5822 \times 10^{-22} \text{ MeV s}$$

betrachte $\frac{\hbar c}{\text{MeV m}} = 197.33 \times 10^{-15}$

1.4.2 natürliches Einheitensystem

$\hbar = c = 1$ In diesem Fall ist $1/\text{MeV} = 197.44 \text{ fm}$ In diesem Einheitensystem ist die Einheit von $[Energie] = [Masse] = [Länge]^{-1} = [Zeit]^{-1}$

1.5 Endliche Messgenauigkeit

z.B. Plancksches Wirkungsquantum

$$\hbar = 1.05457168(18) \times 10^{-34} \text{ J s}$$

Das bedeutet, dass der Wert von \hbar mit einer Wahrscheinlichkeit von 68 % zwischen den beiden Schranken liegt

$$1.05457150 \times 10^{-34} \text{ J s} \leq \hbar \leq 1.05457186 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

2 Zeichen und Zahlen

2.1 Symbole

Zeichen	Bedeutung
+	plus
·	mal
=	gleich
<	ist kleiner als
>	ist größer als
∠	Windel zwischen
−	minus
/	geteilt
≠	ungleich
≤	kleiner gleich
≥	größer gleich
≈	ungefähr gleich
±	plus oder minus
⊥	steht senkrecht auf
≡	ist identisch gleich
≪	ist klein gegen
≫	ist groß gegen
∞	größer als jede Zahl
→ ∞	eine Größe wächst über alle Grenzen \ Limes
∑	Summe
∈	Element von
⊆	ist Untermenge von oder gleich
∪	Vereinigungsmenge
∃	es existiert ein
⇒	daraus folgt, ist hinreichende Bedingung für
⇐	gilt wenn, ist notwendige Bedingung für
∃!	es existiert genau ein
∉	kein Element von
:=	ist definiert durch
∅	Nullmenge
∀	für alle

2.1.1 Summenzeichen

Beispiel

1.

$$\sum_{n=1}^3 a_n = a_1 + a_2 + a_3$$

2. Summe der ersten m natürlichen Zahlen

$$\sum_{n=1}^m n = 1 + 2 + \dots + (m-1) + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

1. Summe der ersten m Quadrate der natürlichen Zahlen

$$\sum_{n=1}^m n^2 = 1 + 4 + \dots + (m-1)^2 + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

1. Summe der ersten m Potenzen einer Zahl ($q \neq 1$)

$$\sum_{n=0}^m q^n = 1 + q + \dots + q^{m-1} + q^m = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}$$

sog. *geometrische Summe*

- Beweis

$$s_m = 1 + \dots + q^m$$

$$qs_m = q + \dots + q^{m+1}$$

$$s_m - qs_m = s_m(1 - q) = 1 - q^{m+1}$$

Rechenregeln

- 1.

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{j=m}^n a_j$$

- 2.

$$c \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^n ca_k$$

- 3.

$$\sum_{k=m}^n a_k \pm \sum_{j=m}^n nb_k = \sum_{k=m}^n (a_k \pm b_k)$$

- 4.

$$\sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=n+1}^p a_k = \sum_{k=m}^p a_k$$

- 5.

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} = \sum_{k=m-p}^{n-p} a_{k+p}$$

- 6.

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^m b_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i b_j$$

falls $n = m$

$$\sum_{i,j=1}^n a_i b_j$$

2.1.2 Produktzeichen

Beispiel

$$\prod_{n=1}^3 a_n = a_1 a_2 a_3$$

2.1.3 Fakultätszeichen

$$m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (m-1) \cdot m = \prod_{n=1}^m n$$
$$0! = 1$$

2.2 Zahlen

Erinnerung natürliche Zahlen $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \dots$ ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup 0 \cup -a \mid a \in \mathbb{N}$ rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \cup \frac{b}{a} \mid a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{Z}$ reelle Zahlen $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \text{unendliche Dezimalbrüche}$
Die reellen Zahlen lassen sich umkehrbar eindeutig auf die Zahlengerade abbilden, d.h. jedem Punkt entspricht genau eine reelle Zahl und umgekehrt

2.2.1 Rechengesetze für reelle Zahlen

Addition

- Assoziativität $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Kommutativität $a + b = b + a$
- neutrales Element $a + 0 = a$
- Existenz des Negatives $a + x = b$ hat immer genau eine Lösung: $x = b - a$ für $0 - a$ schreibe wir $-a$

Multiplikation:

- Assoziativität $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Kommutativität $a \cdot b = b \cdot a$
- neutrales Element $a \cdot 1 = a$
- Inverses $a \cdot x = b$ hat für jedes $a \neq 0$ genau eine Lösung $x = \frac{b}{a}$ für $\frac{1}{a}$ schreiben wir a^{-1}
- Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Ordnung der reellen Zahlen Die kleiner-Beziehung $a < b$, oder auch $b > a$ hat folgende Eigenschaften:

- Trichotomie: Es gilt immer genau eine Beziehung $a < b$, $a = b$ $a > b$
- Transitivität: Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$

Beispiele, Folgerungen

Rechenregeln für Potenzen $b^n := b \cdot b \cdot \dots \cdot b$ $n \in \mathbb{N}$ Faktoren

$$b^0 := 1$$

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

$$b^n \cdot b^m = b^{n+m}$$

$$(b^n)^m = b^{n \cdot m}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Betrag einer reellen Zahl

$$|a| := \begin{cases} a & a \leq 0 \\ -a & a > 0 \end{cases}$$

Eigenschaften

$$|a| \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$|a| = 0$$

nur für $a = 0$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Dreieckungleichung

2.2.2 Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

2.2.3 binomische Formeln:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Allgemein:

$$(a \pm b)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} (\pm)^k$$

(Klammer) Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k}$$

2.2.4 Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{c}n = 0 \quad 1 \\n = 1 \quad 1 \quad 1 \\n = 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\n = 3 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\n = 4 \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\n = 5 \quad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\end{array}$$

2.2.5 Beweisprinzip der Vollständigen Induktion

Beispiel Für alle $n \in \mathbb{N}$ soll die Summe der ersten n Quadratzahlen bewiesen werden

$$A(n) := \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

1. Induktionsanfang $A(1) = 1$ ✓
2. Induktionsschritt Falls $A(k)$ richtig ist, wird gezeigt, dass auch $A(k+1)$ richtig ist

$$\begin{aligned}A(k+1) &= \underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + k^2}_{A(k)} + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 \\&= \frac{1}{6}(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1)) \\&= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) \\&= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)\end{aligned}$$

2.2.6 Quadratische Ergänzung

$$\begin{aligned}x^2 + ax + b &= 0 \\x_{1,2} &= -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}\end{aligned}$$

3 Folgen und Reihen

3.1 Folge

3.1.1 Definition

Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl a_n zuweist.

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

3.1.2 Beispiele

- die natürlichen Zahlen selbst

$$n_{n \in \mathbb{N}} = (1, 2, 3, \dots)$$

- alternierende Folge

$$((-1)^{n+1})_{n \in \mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, \dots)$$

- harmonische Folge

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$$

- inverse Fakultäten

$$\left(\frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \dots)$$

- Folge echter Brüche

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right)$$

- geometrische Folge

$$(q^n)_{n \in \mathbb{N}} = (q, q^2, q^3, \dots)$$

charakteristische Eigenschaft der geometrischen Folge $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ q heißt Quotient der Folge allgemeines Bildungsgesetz $a_n = a_1 q^{n-1}$

- Folge der Ungeraden Zahlen (arithmetische Folge)

$$(1 + (n-1) \cdot 2)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 3, 5, 7, \dots)$$

$a_{n+1} - a_n = d$ d heißt Differenz der Folge allgemeines Bildungsgesetz $a_n = a_1 + (n-1)d$

- "zusammengesetzte Folgen" (hier Exponentialfolge)

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}} = \left(2, \frac{3^2}{2}, \frac{4^2}{3}, \dots\right)$$

3.1.3 Frage

Kann man etwas über das Verhalten von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \rightarrow \infty$ aussagen, ohne tatsächlich "die Reise ins Unendliche" anzutreten?

3.1.4 Beschränktheit

Eine Folge heißt nach oben beschränkt, wenn es eine obere Schranke B für die Glieder der Folge gibt: $a_n \leq B$, d.h. $\exists B : a_n \leq B \forall n \in \mathbb{N}$ Nach unten beschränkt: $\exists A : A \geq a_n \forall n \in \mathbb{N}$

3.1.5 Monotonie

- Eine Folge heißt monoton steigend, wenn aufeinanderfolgende Glieder mit wachsender Nummer immer größer werden: $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton steigend $a_n < a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- monoton fallend $a_n \geq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- streng monoton fallend $a_n > a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

3.1.6 Konvergenz

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen a oder hat den Grenzwert a , wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a - a_n| < \epsilon \forall n > N(\epsilon)$ Wir schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Beispiel

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{\sqrt{n}}) = 1$

Grenzwertfreie Konvergenzkriterien

- jede monoton wachsend, nach oben beschränkte Folge ist konvergent, entsprechend ist jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge konvergent
- Cauchy-Kriterium: Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a_m| < \epsilon \forall n, m > N(\epsilon)$$

Für harmonische Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$

$$|a_n - a_m| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| = |\frac{m-n}{mn}| < |\frac{m}{mn}| = \frac{1}{n} < \epsilon \text{ für } n > N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$$

3.2 Reihen (unendliche Reihen)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, Die Folge

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k, n \in \mathbb{N}$$

der Partialsumme heißt (unendliche) Reihe und wird oft mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet Konvergiert die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so wird ihr Grenzwert ebenfalls mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet

3.2.1 Bemerkung

Ergebnisse für Folgen gelten auch für Reihen

3.2.2 Rechenregeln für konvergente Reihen

Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ zwei konvergente Reihen und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind auch die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + b_k, \sum_{k=1}^{\infty} a_k - b_k, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$$

konvergent und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Bemerkung: Für das Produkt zweier unendlicher Reihen gilt i.A. keine so einfache Formel

3.2.3 Beispiel

geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^m q^n \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \text{ für } q < 1, q \neq 0$$

3.2.4 Absolute Konvergenz

Eine Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

heißt absolut konvergent, wenn die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert. Absolut konvergente Reihen können ohne Änderung der Grenzwertes umgeordnet werden, d.h. jede ihrer Umordnungen konvergiert wieder und zwar immer gegen den gleichen Grenzwert.

4 TODO what was done after this? (Funktionen? (only?))

5 Funktionen

5.1 Normal-Hyperbel

$$y = \frac{1}{x} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

5.1.1 Physik-Beispiel

- Boyle-Mariettsches Gesetz
- Druck p eines idealen Gases in einem Volumen V bei konstanter Temperatur und Gasmenge: $p = \frac{\text{cons}}{V}$

5.2 kubische Parabel

$$y = ax^3$$

5.2.1 Physik-Beispiel

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

5.2.2 Verallgemeinerung

$$y = ax^n \quad n \in \mathbb{N}$$

5.3 $y = ax^{-2}$

5.3.1 Physik-Beispiel

Coulomb Gesetz der Elektrostatik

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

5.4 Symmetrieeigenschaften der Potenzfunktionen

$$y = f(x) = x^n$$

- gerade n : f ist symmetrisch, d.h. $f(-x) = f(x)$
- ungerade n : f ist antisymmetrisch, d.h. $f(-x) = -f(x)$

5.5 Potenzfunktionen als "Bausteine" in zusammengesetzten Funktionen

Polynom m-ten Grades

$$y = P_m(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m = \sum_{k=0}^m a_k x^k$$

5.6 Rationale Funktionen

$$y = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q_n(x) \neq 0\}$$

$P_m(x)$ Polynom m-ten Grades, $Q_n(x)$ n-ten Grades

5.6.1 Beispiel

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

"Lorentz-Verteilung beschreibt die Linienbreite einer Spektrallinie"

5.7 Trigonometrische Funktionen

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \sin \beta$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \cot \beta = \frac{1}{\cot \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
0	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	$\rightarrow \infty$

5.7.1 TODO Table Formula?

5.7.2 TODO Veranschaulichung am Einheitskreis

$\sin \alpha = y$ Periodische Erweiterung auf $\alpha < 0$, $\alpha > \frac{\pi}{2}$

Periodische Funktion:

$$\sin x + 2\pi = \sin x \quad \text{Periode: } 2\pi$$

$$\cos x + 2\pi = \cos x \quad \text{Periode: } 2\pi$$

Beispiel

$$\sin x + \pi = -\sin x$$

$$\cos x + \pi = -\cos x$$

$$\cos x = \sin \frac{\pi}{2} - x$$

TODO Graphik

5.7.3 Tangens/Cotangens

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

TODO Graphik

5.7.4 Additionstheoreme

$$\sin \alpha \pm \beta = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha \pm \beta = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

5.8 Exponentialfunktionen

$$y = f(x) = b^x \quad b > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

5.8.1 Rechenregeln

$$b^x b^y = b^{x+y} \quad (b^x)^y = b^{xy}$$

natürliche Exponentialfunktion mit Zahl e als Basis

$$y = f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

5.8.2 Beispiel radioaktiver Zerfall

$$N(t) = N(0)e^{\frac{-t}{\tau}}$$

5.9 Cosinus hyperbolicus

$$y = \cosh x := \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

5.10 Sinus hyperbolicus

$$y = \sinh x := \frac{1}{2} (e^x - e^{-x})$$

Es gilt:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

5.11 Tangens hyperbolicus

$$y = \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

5.12 Cotangens hyperbolicus

$$y = \coth x := \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

5.13 Wurzelfunktion

Umkehrfunktion der Potenzfunktionen

$$y = f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{Z}$$

Wurzelfunktion:

$$y = f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

n gerade: vor der Umkehrung ist die Einschränkung des Definitionsbereiches auf $x \geq 0$ notwendig

5.13.1 Beispiel

$$y = f(x) = x^2 + 1 \quad x \geq 0$$

Umkehrfunktion:

$$y = \sqrt{x - 1}$$

6 Funktionen mit Ecken und Sprüngen

6.1 Betragsfunktion

$$y = |x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

6.2 Heaviside-Stufenfunktion

$$y = \Theta(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

6.2.1 TODO Graphik

6.2.2 Beispiel

$$y = \Theta(x)\Theta(-x + a)$$

TODO Graphik

6.3 "symmetrischer Kasten" der Breite $2a$ und der Höhe $\frac{1}{2a}$ (Dirak Delta Funktion)

$$\Theta_a(x) := \frac{\Theta(x+a)\Theta(-x+a)}{2a}$$
$$\lim_{a \rightarrow 0} \Theta_a = \text{"(Dirak) } \delta\text{-Funktion"}$$

6.3.1 TODO Graphik

7 Verkettung von Funktionen

Seien

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$$

mit $w_g \subseteq D_f$, dann ist die Funktion $f \circ g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)) \quad \forall x \in D_g$$

7.1 Beispiel

$$z = g(x) = 1 + x^2 \quad W_g : z \geq 1$$

$$y = f(z) = \frac{1}{z} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

also $W_g \subset D_f$, sodass

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

7.2 Spiegelsymmetrie (Siegelung an der y-Achse, d.h. $x \rightarrow -x$)

Eine Funktion $f(x)$ heißt

- gerade(symmetrisch) wenn $f(-x) = f(x)$
- ungerade (antisymmetrisch) wenn $f(-x) = -f(x)$

7.2.1 Beispiel

gerade Funktionen

- $f(x) = x^{2n} \quad n \in \mathbb{N}$
- $f(x) = \cos x$
- $f(x) = |x|$

ungerade Funktionen

- $f(x) = x^{2n+1}$
- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \sin(x)$

keins von beidem

- $f(x) = sx + c$

7.2.2 Zerlegung

Jede Funktion lässt sich in einen geraden und ungeraden Anteil zerlegen

- gerader Anteil:

$$f_+(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(-x)) = f_+(-x)$$

- ungerader Anteil:

$$f_-(x) = \frac{1}{2} (f(x) - f(-x)) = -f_-(-x)$$

- check:

$$f_+(x) + f_-(x) = f(x) \quad \checkmark$$

8 Eigenschaften von Funktionen

8.1 Beschränktheit

f heißt nach oben beschränkt im Intervall $[a, b]$, wenn es eine obere Schranke gibt, d.h.

$$\exists B \in \mathbb{R} : f(x) \leq B \quad \forall x \in [a, b]$$

analog: nach unten beschränkt

$$\exists A \in \mathbb{R} : f(x) \geq A \quad \forall x \in [a, b]$$

8.1.1 Beispiel

$f(x) = x^2$ durch $A = 0$ nach unten beschränkt
 $f(x) = \Theta(x)$ $B = 1$, $A = 0$

8.2 Monotonie

Eine Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ heißt monoton steigend im Intervall $[a, b] \subseteq D_f$, wenn aus $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$ stets folgt $f(x_1) \leq f(x_2)$. Gilt sogar $f(x_1) < f(x_2)$ so heißt f streng monoton steigend im Intervall $[a, b]$. Analog heißt f monoton (streng monoton) fallend, wenn stets folgt $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

8.2.1 Beispiel

$f(x) = x^3$ streng monoton steigend

9 Umkehrfunktionen

Sei $f : D_f \rightarrow W_f$ eineindeutig (bijektiv), dann kann man die Gleichung $y = f(x)$ eindeutig nach x auflösen

$$x = f^{-1}(y) := g(y) \quad D_g = W_f, \quad W_g = D_f$$

$$f^{-1} = g : W_f \rightarrow D_f$$

Die ursprüngliche Abbildung $y = f(x)$ und die Umkehrabbildung $x = f^{-1}(y) = g(y)$ heben sich in ihrer Wirkung auf

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

9.1 Graph der Umkehrfunktion

1. Gegebenfalls Einschränkung von D_f , sodass eine bijektive Funktion vorliegt
2. Auflösen der Gleichung $y = f(x) \implies x = f^{-1}(y)$
3. Umbenennung der Variablen: die unabhängige Variable y wird wieder x genannt, die abhängige wieder y : $y = f^{-1}(x)$

9.1.1 Beispiel $y = x^2$

1. Einschränkung D_f auf $x \geq 0$
2. $y = x^2, x \geq 0 \iff x = \sqrt{y}$
3. Umbenennung: $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

9.1.2 Graphisch

Spiegelung an $y = x$

10 what after this?

11 Integral und Differenzialrechnung

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Hauptsatz:

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

$F(x) = \int f(x) dx$	f(x)	Bemerkungen
const	0	
x^r	rx^{r-1}	$r \in \mathbb{R}$
$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	x^r	$-1 \neq r \in \mathbb{R}$

11.1 Die Kunst des Integrierens

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_a^b$$

11.2 Ableiten über Umkehrfunktion

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

11.3 Integrationsregeln

11.3.1 Lineare Zerlegung

$$\int_{a_1}^{a_2} cf(x) + bg(x) dx = c \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + b \int_{a_1}^{a_2} g(x) dx$$

Beispiel

$$F = \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^2 dx = \int_0^1 1 - 2x^2 + x^4 dx = \int_0^1 1 dx - 2 \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x^4 dx = \frac{8}{15}$$

11.3.2 Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

merke: $\frac{g(x)}{dx} dx = g'(x)dx = dy$

$$y = g(x), \quad \frac{dy}{dx} = g'(x), \quad dy = g'(x)dx$$

Beweis F sei die Stammfunktion zu f , $F' = f$

$$(F(g(t)))' = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = F(g(t)) \Big|_a^b = F(g(b)) - F(g(a)) = F(x) \Big|_{g(a)}^{g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

Beispiel

•

$$\int_1^5 \sqrt{2x+1}dx = \int_1^9 \sqrt{y} \frac{1}{2}dy = \frac{26}{3}$$

$$y = 2x - 1 \quad y' = g'(x) = \frac{dy}{dx} = g'(x) = 2 \implies dy = 2dx \implies \frac{1}{2}dy = dx$$

•

$$\int_0^b te^{-\alpha t^2} dt = -\frac{1}{2\alpha} \int_0^{-\alpha b^2} e^y dy = -\frac{1}{2\alpha} (e^{-\alpha b^2} - 1)$$

$$y = g(t) = -\alpha t^2 \implies \frac{dy}{dt} = -2\alpha t \implies dy = -2\alpha t dt \implies dt = -\frac{1}{2\alpha t} dy$$

•

$$\int_0^T \cos \omega t dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega T} dy$$

•

$$\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{1}{y} dy = \ln |y| \Big|_{g(a)}^{g(b)}$$

•

$$\int \frac{dx}{ax \pm b} = \frac{1}{a} \ln |ax \pm b| + c$$

•

$$\int_a^b g^n(x)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} y^n dy$$

11.3.3 Partielle Integration

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

Beweis

$$F(x) = f(x)g(x) \implies F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

$$f(x)g(x) \Big|_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

$$f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Beispiel

•

$$\int_a^b x \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}x^2 \ln(x) \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b x dx$$

•

$$\int 1 \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$$

•

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x$$

Kreisfläche

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\int_a^b \sqrt{1 - x^2} dx = \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} \cos t \cos t dt = \frac{1}{2}(\arcsin b + b\sqrt{1 - b^2} - \arcsin a - a\sqrt{1 - a^2})$$

$$x = \sin t \implies t = \arcsin x, \quad \frac{dx}{dt} = \cos t, \quad dx = \cos t dt$$

$$\int \cos t \cos t = \sin t \cos t + \int \sin^2 t dt = \sin t \cos t + \int 1 - \cos^2 t dt = \frac{\sin t \cos t + t}{2}$$

In Polarkoordinaten

$$y = \sin t$$

$$x = \cos t$$

$$dx = -\sin t dt$$

$$dA = y dx = -\sin^2 t dt$$

$$A = \int_0^\pi \sin^2 t = \frac{\pi}{2}$$

Zerlegung

$$\begin{aligned} dA &= 2\pi r dr \\ \int dA &= \int_0^R 2\pi r dr = 2\pi \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^R = \pi R^2 \end{aligned}$$

11.3.4 Weitere Integrationstricks

Partialbruchzerlegung \implies Integration rationaler Funktionen

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{1-x^2} \text{ mit } \{-1, 1\} \notin [a, b] \\ 1-x^2 &= (1-x)(1+x) \\ \frac{1}{1-x^2} &= \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x} = \frac{\alpha(1+x) + \beta(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{\alpha + \beta + x(\alpha - \beta)}{1-x^2} \implies \alpha = \beta \frac{1}{2} \\ \int_a^b \frac{dx}{1-x^2} &= \frac{1}{2} \left(\int_a^b \frac{1}{1-x} + \int_a^b \frac{1}{1+x} \right) \end{aligned}$$

11.4 Uneigentliche Integrale

11.4.1 Unendliches Integralintervall

Definition Sei $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Intervall $[a, R)$, $a < R < \infty$ (Riemann-)integrierbar ist. Falls der Grenzwert $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$ existiert setzt man

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$$

Beispiel

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{1}{s-1} & s > 1 \\ \infty & s \leq 1 \end{cases}$$

11.5 Cauchy Hauptwert

$$P \int_{-\infty}^\infty f(x) dx := \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c f(x) dx$$

P := "principal Value"

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty x^{2n-1} dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^c x^{2n-1} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b x^{2n-1} dx = \infty \\ P \int_{-\infty}^\infty x^{2n-1} dx &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c x^{2n-1} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} \underbrace{(c^{2n} - (-c)^{2n})}_{=0} \right) = 0 \end{aligned}$$

11.5.1 Unbeschränkter Integrand

Situation: Integrand wird an einer Stelle $x_0 \in [a, b]$ unbeschränkt

Definition Sei $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[a + \eta, b]$, $0 < \eta < b - a$ (Riemann-)integrierbar ist. Falls der Grenzwert $\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{a+\eta}^b f(x) dx$ existiert, heißt das Integral $\int_a^b f(x) dx$ konvergent

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{a+\eta}^b f(x) dx$$

Beispiel

$$\int_0^b \frac{1}{x^{1-\epsilon}} dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\eta}^b \frac{1}{x^{1-\epsilon}} dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (b^{\epsilon} - \eta^{\epsilon}) = \frac{1}{\epsilon} b^{\epsilon}$$

Principal value

$$P \int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_a^{x_0-\eta} f(x) dx + \int_{x_0+\eta}^b f(x) dx$$

11.6 Integralfunktionen

$$\ln x = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

$$\arctan x = \int_0^y \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-x^2} dx$$

Elliptisches Integral

11.7 Gamma-Funktion

11.7.1 Definition

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Satz: Es gilt $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(m+1) = m! \forall n \in \mathbb{N}$, $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1$$

$$\Gamma(x+1) = \int_{\epsilon}^R t^x e^{-t} dt = \underbrace{t^x e^{-t} \Big|_{\epsilon}^R}_{R \rightarrow \infty} + x \int_{\epsilon}^R t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$f(t) = -e^{-t} \iff f'(t) = e^{-t}$$

$$g(t) = t^x \implies x t^{x-1} = g'(t)$$

12 Vektoren

12.1 \mathbb{R}^3

12.1.1 Orthonormal

Länge eins, senkrecht aufeinander und sie bilden eine Basis, also jeder Vektor hat genau eine Darstellung:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \sum_{k=1}^3 a_k \vec{e}_k = \underbrace{a_k e_k}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

12.2 Skalarprodukt und Kronecker-Symbol

12.2.1 Motivation: mechanische Arbeit

12.2.2 Definition

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

12.2.3 Spezialfälle

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \implies \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$$

\vec{a} und \vec{b} antiparallel:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \implies \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

12.2.4 Betrag:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}|^2 = a^2$$

12.2.5 Eigenschaften

- Kommutativgesetz

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$

- Homogenität

$$\langle \lambda \vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \lambda \vec{b} \rangle$$

- Distributivgesetz

$$\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$$

-

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0 \quad \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \iff \vec{a} = 0$$

12.2.6 Orthonormalbasis der kartesischen Koordinatensystem

Basisvektoren $\vec{e}_k, k = 1, 2, 3$ Orthogonalität $\langle \vec{e}_k, \vec{e}_l \rangle = 0 \quad l \neq k$ Für $k = l$: $\langle \vec{e}_k, \vec{e}_k \rangle = \cos(0) = 1$ Orthonormalität

12.2.7 Kronecker Symbol

$$\delta_{kl} := \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

Entspricht Komponenten der Einheitsmatrix Symmetrie gegen Vertauschung der Indizes

$$\delta_{kl} = \delta_{lk} \quad \text{Spur: } \delta_{kk} = \underbrace{\sum_{k=1}^3 \delta_{kk}}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}} = 3$$

12.2.8 Komponentendarstellung des Skalarprodukts

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^3 a_k \vec{e}_k = \underbrace{a_k \vec{e}_k}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

$$\vec{b} = \sum_{k=1}^3 b_k \vec{e}_k = \underbrace{b_k \vec{e}_k}_{\text{Einsteinsche Summenkonvention}}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \left(\sum_{k=1}^3 a_k \vec{e}_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^3 b_k \vec{e}_k \right) = \sum_{k,l=1}^3 a_k b_l \underbrace{\langle \vec{e}_k, \vec{e}_l \rangle}_{=\delta_{kl}} = \sum_{k=1}^3 a_k b_k$$

13 Matrizen

13.1 Determinante

$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)})$ Summe über alle Permutationen von S_n , Vorzeichen der Permutation ist positiv, wenn eine gerade Anzahl an Vertauschungen notwendig ist, und entsprechend negativ bei einer ungeraden Anzahl.

13.2 Homogenes Gleichungssystem

$$A\vec{x} = 0 \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + x_3 a_{23} & = & 0 \\ \underbrace{a_{31}}_{\vec{a}_1} & \underbrace{a_{32}}_{\vec{a}_2} & \underbrace{a_{33}}_{\vec{a}_3} & 0 \end{matrix}$$

sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear unabhängig, dann gibt es nur die Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
 Nichttriviale Lösung nur wenn $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear abhängig $\implies \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sodass z.B.
 $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2 + \mu \vec{a}_3$. Wenn $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ linear unabhängig, dann $\det A = 0$.

13.3 Levi Civita Symbol

$$\varepsilon_{ijk\dots} = \begin{cases} +1, & \text{falls } (i, j, k, \dots) \text{ eine gerade Permutation von } (1, 2, 3, \dots) \text{ ist,} \\ -1, & \text{falls } (i, j, k, \dots) \text{ eine ungerade Permutation von } (1, 2, 3, \dots) \text{ ist,} \\ 0, & \text{wenn mindestens zwei Indizes gleich sind.} \end{cases} \quad (1)$$

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \prod_{1 \leq p < q \leq n} \frac{i_p - i_q}{p - q} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{k,l,m} = \delta_{k1}(\delta_{l2}\delta_{m3} - \delta_{l3}\delta_{m2}) + \delta_{k2}(\delta_{l3}\delta_{m1} - \delta_{l1}\delta_{m3}) + \delta_{k3}(\delta_{l1}\delta_{m2} - \delta_{l2}\delta_{m1}) \quad (3)$$

13.4 Vektorprodukt / Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$= \vec{e}_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad (6)$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3, \quad (7)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k$$

13.5 Spatprodukt

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c}| = \text{Volumen eines Spats}$$

$$(\vec{a} \vec{b} \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \vec{a} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \vec{c}$$

13.6 Geschachteltes Vektorprodukt

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{v}) = (\vec{a} \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \vec{b}) \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \vec{b})$$

13.6.1 Beweis

$$\vec{a} = (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times (\varepsilon_{ijk} b_i c_j \vec{e}_k) = \varepsilon_{pqm} a_p \varepsilon_{ijk} b_i c_j \vec{e}_m$$

14 misc

- mathe für physiker vs. analysis
- klausuren gebündelt
- auslandssemester