Übungszettel 4

Robin Heinemann

November 13, 2017

Aufgabe 4.1

Herleitung des Newtonverfahren für Kubikwurzeln

Es ist gegeben

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} - \frac{f(x^{(t)})}{f'(x^{(t)})}$$

im Fall der Kubikwurzeln gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - y \\ f(x^*) &= 0 \\ x^* &= \sqrt[3]{y} \end{aligned}$$

Damit erhält man für $x^{(t+1)}$:

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} - \frac{{x^{(t)}}^3 - y}{3{x^{(t)}}^2} = \frac{2{x^{(t)}}^3 + y}{3{x^{(t)}}^2}$$

Als Abbruchbedingung könnte man wählen:

$$|{x^{(t)}}^3 - y| \leq \varepsilon$$

Für ein kleines ε zum Beispiel ist $\varepsilon = 10^{-15}y$ für double sinnvoll, denn diese sind nur auf genau 16 Nachkommastellen genau, also könnte eine höhere Genauigkeit mit trivialen Methoden gar nicht erreicht werden

Aufgabe 4.2b

Herleitung von n ist Quadratzahl $\implies (n \mod 4) \in \{0,1\}$ n Quadratzahl $\implies \exists\, a \in \mathbb{N} : a^2 = n$

$$n \mod 4 = (a \cdot a) \mod 4 = ((a \mod 4)(a \mod 4)) \mod 4$$

Für $a \mod 4$ gibt es 4 verschiedene Fälle:

1. $a \mod 4 = 0 \implies \underbrace{((a \mod 4)(a \mod 4))}_{=0} \mod 4 = 0$
2. $a \mod 4 = 1 \implies \underbrace{((a \mod 4)(a \mod 4))}_{=1} \mod 4 = 1$
3. $a \mod 4 = 2 \implies \underbrace{((a \mod 4)(a \mod 4))}_{=4} \mod 4 = 0$
4. $a \mod 4 = 3 \implies \underbrace{((a \mod 4)(a \mod 4))}_{=9} \mod 4 = 1$

$\implies n$ Quadratzahl $\implies (n \mod 4) \in \{0,1\}$