1. **前言**
2. **适用范围**
3. **控制方程**

模型控制方程为不可压缩纳维-斯托克斯（Naiver-Stokes）方程。在笛卡尔坐标系 和时间下，方程可表达为如下形式：





其中， ,是方向速度，*p*为总压力，ρ为水体密度，表示体积力，表示湍流应力，为运动粘性系数。

为了准确地描述底床和自由表面并施加压力边界条件，模型使用由Phillips（1957）提出的坐标系，见式（3）。



其中，，*h*是静水深，*η*为波面升高。坐标下，变化范围为0~1，物理域垂直方向上的坐标变化即被限制在该范围内（Lin and Li, 2002）。利用链式求导法则，对于变量，存在以下变换关系：



将式（4）代入式（1）、（2），可以导出坐标系和时间*t*下的控制方程：





其中，为变量矢量，***F***，***G***和***H***为通量矢量



为源项，定义为



其中总压力分为两部分：动压力*p*（为方便起见，下文用*p*表示动压力），静压力。

另外，式（7）中*w*表示笛卡尔坐标系下的垂向速度，式（5）、（7）中ω表示坐标系下垂向速度，定义为：



同时，存在下列变换关系



湍流耗散项表达式：



其中应力可由如下坐标变换关系计算：



运动粘性系数可根据Smagorinsky亚网格模型或者*k-ε*双方程模型计算得到，其中对于Smagorinsky亚网格模型可由下式计算：



式中，为Smagorinsky系数，取值范围0.1~0.2，，应力张量。

将式（5）对从0~1积分，并在利用ω在底床和水面的边界条件，可得自由表面运动控制方程



1. **数值方法**

对上述式（6）和式（14）的离散，模型采用Godunov类型的有限体积和有限差分混合格式进行。为了保持离散格式的Godunov性质，同时能准确地在自由表面上施加压力边界条件（Yuan and Wu, 2004），空间离散使用交错网格，并将速度定义在网格中心，压力定义在网格表面，如图1所示。动量方程采用二阶Godunov类有限体积法求解，使用HLL近似黎曼求解器计算网格界面处的通量（Harten et al., 1983; Shi et al., 2012）。

* 1. **时间积分**

为了获得二阶时间精度，时间积分采用两步二阶龙格-库塔（Runge-Kutta）方法进行。

第一步：两步校正计算中间变量





式（15）中，表示第*n*时间步的值，表示在第一步校正过程的中间值，是第一步龙格-库塔的最终值。

第二步：对采用相同的校正方法，获得





最终通过下式计算得到第*n+*1时间步的变量值



上述方法中每一步都需要通过非静压项对变量值作出修正，而压力场的确定依赖于泊松方程的求解，将在后续章节中叙述。另外在每一步中显示地求解式（14），得到波面升高。时间步长由CFL（Courant-Friedrichs-Lewy）条件确定：



其中，*C*为库朗数，为保证准确性和稳定性，在模型中推荐取0.5。

* 1. **空间离散**

使用Godunov格式的有限体积法离散方程，并不能保证模型满足数值格式的和谐性（Zhou et al., 2001; Kim et al, 2008; Liang and Marche, 2009），因此，有必要对方程形式作出调整，以保证通量项和底坡源项的平衡，即模型满足数值和谐性，对此模型使用由Liang和Marche（2009）提出的方法，以*x*方向为例，注意到总体水深*D=h+η*，源项可以重写成如下形式：



式（21）中右端第一项可以合并到通量项中，则通量项和源项调整为：



上述处理最大的好处是保证了通量项和源项的和谐性，避免了底坡项处理不当人为造成的伪流动。

为了求解式（15）和（17），需要获得网格界面处的通量。在高精度Godunov格式中，对于守恒变量，使用变量重构技术将网格中心的值构造得到界面处的值（Zhou et al., 2001），一般采用具有二阶精度的分段线性法进行。对于定义在网格*i*的表量***U***，有：



上式为***U***的梯度，由下式计算：



其中*avg*表示梯度限制器，用以限制重构过程中在界面处产生的数值振荡。模型中，我们使用van Leer梯度限制器：



***U***在单元格界面左右两侧取值：



通量需通过求解每一水平方向网格界面处的局部黎曼问题得到，在此，使用HLL黎曼求解器，界面处通量：



其中



特征波速和





式（29）和式（30）中





为得到非静压速度场，必须先计算动压力*p*，由式（16），（18）







其中*k* = 1, 2表示第*k*步龙格-库塔积分。

代入方程（3），（4），连续方程（1）可表达成如下形式：



再代入式（33）~式（35），可得到动压力修正方程，即 坐标系下的泊松方程：



* 1. **边界条件**