中国科学技术大学数学科学学院
2021～2022 学年第 2 学期考试试卷 A 卷

课程名称：线性代数 A1　　课程代码：MATH1004

开课院系：数学科学学院　　考试形式：闭卷

姓名：________ 学号：________ 专业：________

题号	1 (20 分)	2 (15 分)	3 (15 分)	4 (20 分)	5 (30 分)	总分
得分						

说明：1. 需给出详细解答和证明过程，禁止使用课本习题或其他参考书中的结论.
2. 若某题有 a、b 两个版本，则选做其中 1 个版本，多做不得分.
3. 禁止使用计算器等电子设备.

1、 设$A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$满足$\varphi_A(x)=\prod_{i=1}^n(x-a_i)$，$\varphi_B(x)=\prod_{j=1}^n(x-b_j)$. 证明：矩阵方程$X+AXB=I_n$有唯一解$X\in\mathbb{C}^{n\times n}$当且仅当$a_ib_j\neq -1$，$\forall i,j$.

2、 设复方阵A满足$d_A(x)=\varphi_A(x)=(x^3-x)^{10}$. 求$A^3$的 Jordan 标准形.

3a、求实方阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$的$QR$分解.

3b、设V_1,V_2都是n维线性空间V的子空间. 证明：

$$(V_1+V_2)/(V_1\cap V_2)=V_1/(V_1\cap V_2)\oplus V_2/(V_1\cap V_2).$$

4a、设$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$满足$A^2=A$. 证明：(1) $\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(I-A)=n$. (2) 存在正交方阵$P$，使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}I&B\\O&O\end{pmatrix}$，其中$B$的对角元素都$\geq 0$，其他元素都$=0$.

4b、对任意$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，记$\mathrm{Ker}(A)=\{x\in\mathbb{R}^{n\times 1}|Ax=\mathbf{0}\}$，$\mathrm{Im}(A)=\{Ax|x\in\mathbb{R}^{n\times 1}\}$.
证明：若$A^2=A$，则有 (1) $\mathrm{Ker}(A)=\mathrm{Im}(I-A)$；(2) $\mathbb{R}^{n\times 1}=\mathrm{Ker}(A)\oplus\mathrm{Im}(A)$.

5a、设$A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$满足$AB=BA$. 证明：
(1) 若$d_A=\varphi_A$，则存在$f\in\mathbb{C}[x]$使得$B=f(A)$.
(2) 若$C\in\mathbb{C}^{n\times n}$满足$BC=CB,\forall AB=BA$，则存在$f\in\mathbb{C}[x]$使得$C=f(A)$.
(3) 若$A=\mathrm{diag}(A_1,A_2)$，其中A_1,A_2都是方阵且$d_{A_1}=\varphi_{A_1}=d_{A_2}=\varphi_{A_2}$，则存在可逆复方阵$P$和$f_1,f_2,f_3,f_4\in\mathbb{C}[x]$使得$A_2=P^{-1}A_1P$且$B=\begin{pmatrix}f_1(A_1)&f_2(A_1)P\\P^{-1}f_3(A_1)&f_4(A_2)\end{pmatrix}$.

5b、设$\mathcal{A}$是n维复线性空间V上的线性变换，$W=\{V$上的线性变换$\mathcal{B}|\mathcal{AB}=\mathcal{BA}\}$构成复线性空间. 对任意$\beta\in V$，记$\mathbb{C}[\mathcal{A}]\beta$是$\beta$生成的循环子空间，$d_\beta\in\mathbb{C}[x]$是$\beta$相对于$\mathcal{A}$的最小多项式. 证明：
(1) 若存在$\beta\in V$使得$V=\mathbb{C}[\mathcal{A}]\beta$，则$W=\{f(\mathcal{A})|f\in\mathbb{C}[x]\}$.
(2) 若V上的线性变换$\mathcal{C}$满足$\mathcal{BC}=\mathcal{CB}$，$\forall\mathcal{B}\in W$，则存在$f\in\mathbb{C}[x]$使得$\mathcal{C}=f(\mathcal{A})$.
(3) 若$V=\mathbb{C}[\mathcal{A}]\beta_1\oplus\mathbb{C}[\mathcal{A}]\beta_2$，其中$\beta_1,\beta_2\in V$满足$d_{\beta_1}=d_{\beta_2}$，则$\dim(W)=2n$.

（装订线内不要答题）