2020 年博士生资格考试试题- 几何与拓扑

1. （15分）对于欧氏空间$\mathbb{R}^n$ 中的任意两个集合A 和B，定义$A+B=\{x+y \mid x\in A, y\in B\}$.

   (a) 求证：若A, B 都是紧集，则$A+B$ 也是紧集.

   (b) 求证：若A 是紧集，B 是闭集，则$A+B$ 也是闭集.

   (c) 若A，B 都是闭集，$A+B$ 是否一定是闭集？证明你的结论或者给出反例.

2. （15分）

   (a) 叙述用以计算基本群的Van Kampen定理. 叙述用于计算奇异同调群的Mayer - Vietoris序列定理.

   (b) 设$X=\mathbb{T}^2\vee\mathbb{T}^2$ 为两个二维环面的单点并空间. 应用Van Kampen 定理计算X 的基本群.

   (c) 应用Mayer - Vietoris 序列计算X 的所有奇异同调群.

3. （10分）在$\mathbb{R}^3_+=\{(x,y,z)\mid x,y,z>0\}$ 上定义向量场$X=\frac{\partial}{\partial x}-\frac{z}{x}\frac{\partial}{\partial z}$ 和$Y=\frac{\partial}{\partial y}-\frac{z}{y}\frac{\partial}{\partial z}$.

   (a) 求证：由向量场X, Y 所定义的分布D 是可积的.

   (b) 对于任意点(x_0,y_0,z_0)，求分布D 的经过该点的积分流形.

4. （10分）

   (a) 叙述紧致无边曲面的分类定理，并给出分类中每个曲面的Euler 示性数.

   (b) 这些曲面中，哪些曲面是$\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2$ 的覆叠空间？证明你的断言.

5. （10分）设M 是闭的单连通光滑4 维流形.

   (a) 若β 是M 上的一个闭3-形式. 求证: 存在M 上的2-形式α 使得$\beta=d\alpha$.

   (b) 给出一个闭单连通光滑4维流形M 以及M上的非正合的闭2-形式 γ.

6. （25分）设M 是一个可微流形.

   (a) 求证：M 上存在Riemann 度量g.
   以下各问均假设M 上已经给定了一个Riemann 度量g.

   (b) 设$\gamma:[0,1]\to M$ 是一条光滑曲线. 写出曲线长度Length(γ) 的定义. 设p,q 是M 上的两点，写出两点距离dist(p,q) 的定义.

   (c) 求证: (M,dist) 是一个度量空间.

   (d) 固定一个点p, 考虑M 上的函数$f(q)=\mathrm{dist}(p,q)$. 求证: f 是流形M 上的连续函数.(其中M 的拓扑是M 作为可微流形原有的拓扑.)

   (e) 求证：M 上的作为可微流形原有的拓扑跟M 上的由dist 诱导的度量拓扑相同.

7. （15分）对任意实数$a>0$，定义T_a 为$\mathbb{R}^2$ 在如下等价关系之下的商空间：

$$(x,y)\sim(x+a,y)\quad 且\quad (x,y)\sim(x,y+\frac{1}{a}).$$

   (a) 证明: T_a 微分同胚于$\mathbb{T}^2$.

   (b) 证明: $\mathbb{R}^2$ 上的标准Riemann 度量$g=dx^2+dy^2$ 诱导出了T_a 上的Riemann 度量g_a，且所有(T_a,g_a) 具有相同的体积.

   (c) 若a,b 均为正实数，何时(T_a,g_a) 与(T_b,g_b) 等距同构？证明你的断言.