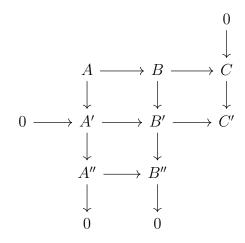
整理:周佳诺 授课教师:刘永强

## 代数学期中考试

(本试卷中 R 表示含幺交换环)

- 1. 求出PID上的所有有限生成投射模、内射模和平坦模并证明。
- 2. 设  $R = \mathbb{Z}_6$ , R 的理想 I = (3) 作为 R-模是投射、内射、平坦的吗? 证明你的结论。
- 3. 设有 R-模组成的交换图:



其中每行每列都正合。证明  $A'' \rightarrow B''$  为单射。

4. 设 R 为PID,M 为有限生成-R 模,证明对于任意素理想 P 有

$$\operatorname{rank}(M) = \lim_{n \to \infty} d_P(P^n M)$$
  
(注:  $d_P(M) = \dim_{R/P}(M/PM)$ )

- 5. 设 C 为范畴,  $f,g:X\to Y$  为两个态射。称态射  $h:H\to X$  为 f 和 g 的 equalizer,如果 fh=gh 且对任意满足 fu=gu 的态射  $u:U\to X$ ,唯一存在态射  $s:U\to H$  使得 u=hs。
  - (a) 证明如果 equalizer 存在则在相差一个同构的意义下唯一。
  - (b) 证明 equalizer 必为单射。
- 6. 设 R = k[x, y], 其中 k 为交换环。设有 R-模  $M_1 = k[x, y, y^{-1}]/k[x, y]$  和  $M_2 = k[x, y, x^{-1}]/k[x, y]$ 。设  $M = M_1 \oplus M_2$ ,证明  $M \otimes_R M \otimes_R M = 0$ 。
- 7. 设  $A = \{(1, n), (n, 1), (n, n)\} \subset \mathbb{Z}^2$ , M 为 A 生成的  $\mathbb{Z}^2$  的子  $\mathbb{Z}$ -模。证明 M 是自由  $\mathbb{Z}$ -模,  $\mathbb{Z}^2/M = \mathbb{Z}_{n-1}$ ,且不能在 A 中选取 M 的一组基。
- 8. 设 M 是有限生成 R-模, $f:R^m\to M$  为满射。证明  $\ker(f)$  是有限生成 R-模。