姓名:________ 学号:________ 所在院系:________

密 封 线 内 不 要 答 题

线性代数(B2)期中考试

2020年12月13日

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							
复查							

注：解答题需给出详细步骤，按步骤给分。

一、 填空（每空4分，共40分）

(1). $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^{2020} =$ ________________。

(2). n阶行列式$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$ $2^{n+1}-1$。

(3). 方阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$的逆方阵为________________。

(4). 设方阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & b \end{pmatrix}$的代数余子式满足$A_{11} + A_{12} + A_{13} = 1$。则$\det(A) =$________________。

(5). 假设A的伴随矩阵为$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$。则$A =$ ________________。

(6). 设$P \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$。则$P =$ ________________。

(7). 设$n \geq 2$，$M_n(\mathbb{C})$为全体n阶复方阵组成的复线性空间。考虑线性变换

$$\mathcal{A}\colon M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$$

满足$\mathcal{A}(X) = X^t + X$，其中X为任意方阵，X^t为其转置。考虑复合线性变换$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \circ \mathcal{A}$。则$\mathcal{A}$ 的特征多项式为________________，变换$\mathcal{A}^2$的最小多项式为________________。

(8). 设$\mathbb{C}_3[x]$为全体次数不超过3（包括3）复系数多项式组成的复线性空间。考虑线性变换

$$\mathcal{B} = (x-1)\frac{d}{dx}\colon \mathbb{C}_3[x] \longrightarrow \mathbb{C}_3[x].$$

则$\mathcal{B}$的所有特征值为________________，相应的（在$\mathbb{C}_3[x]$中的）特征向量为________________。

二、**(10分)** 设A为$m \times n$实矩阵，A^t为其转置。考虑子空间$V(A) = \{x \in \mathbb{R}^n_{\mathrm{col}} \mid Ax = 0\}$以及$R(A) = \{A^t y \mid y \in \mathbb{R}^m_{\mathrm{col}}\}$。试证明：$\mathbb{R}^n_{\mathrm{col}} = V(A) \oplus R(A)$.

证

三、(10分) 设B为n阶可逆实方阵。试讨论：是否总存在实方阵A使得$B = A^*$。

四、(20分) 对于任意$A, B \in M_2(\mathbb{C})$，我们定义复线性映射

$$\Psi_{A,B}\colon M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow M_2(\mathbb{C}), \quad X \mapsto AXB.$$

(1). 试证明：线性变换$\Psi_{A,B}$是幂零的（即，对于某个n满足$\Psi_{A,B}^n = 0$），当且仅当方阵A或B是幂零的。

(2). 取定$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$以及$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$。记$\Psi_{A,B} = \mathcal{A}$。试证明：复线性变换$\mathcal{A}\colon M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$相似可对角化。

五、(15分) 设V为有限维复线性空间。

(1). 设W_1以及W_2为V的线性子空间，其并$W_1 \cup W_2$也是线性子空间。证明：$W_1 \subseteq W_2$或$W_2 \subseteq W_1$。

(2). 设ϕ_1和ϕ_2为V上的非零复线性函数。证明：存在$\lambda \in \mathbb{C}$使得$\phi_1 = \lambda\phi_2$，当且仅当$\mathrm{Ker}(\phi_1) = \mathrm{Ker}(\phi_2)$。

六、(5分) 论证：是否存在实矩阵A和B，使得$AB=\begin{pmatrix}7 & -1\\ 9 & 3\end{pmatrix}$与$BA=\begin{pmatrix}7 & -3 & 3\\ 3 & 1 & 1\\ 3 & -7 & 2\end{pmatrix}$同时成立。