线性代数 A1 期中考试参考答案及评分标准

一、(20 分) 判断下述论断是否成立, 并简述理由. (作出正确的判断得 2 分, 说明理由得 3 分).

1. 设 $\mathbb{F}$ 为域, $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 则 $\mathrm{tr}A^TA = 0$ 当且仅当 $A = 0$.

   不成立. 例如: $A = \mathrm{diag}(1, \sqrt{-1})$.

2. 设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$. 若 $I_m - AB$ 可逆则 $I_n - BA$ 可逆.

   成立. 若 $C = (I_m - AB)^{-1}$, 则 $(I_n - BA)^{-1} = I_n + BCA$. 也可以使用如下分块矩阵运算

$$\begin{vmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_m - AB & 0 \\ B & I_n \end{vmatrix} = |I_m - AB|,$$

$$\begin{vmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n - BA \end{vmatrix} = |I_n - BA|.$$

3. 存在 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 使得 $A^2 = I_n$, $A \neq I_n$ 且 $A + I_n$ 可逆.

   不成立. 由习题 4.6.6 知, 若 $A^2 = I_n$, 则

$$\mathrm{rank}(A - I_n) + \mathrm{rank}(A + I_n) = n.$$

   因此, 若 $A^2 = I_n$, 则 $A + I_n$ 可逆当且仅当 $A = I_n$.

4. 设 $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}$ 为分块矩阵, 则

$$\mathrm{rank}(M) \geq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(C)$$

   且等号成立当且仅当存在矩阵 X, Y 使得 $B = XA + CY$.

   成立. 设 $r = \mathrm{rank}(A)$, $s = \mathrm{rank}(C)$, 则存在可逆矩阵 P, P', Q, Q' 使得

$$PAQ = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P'CQ' = \begin{bmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PAQ & 0 \\ P'BQ & P'CQ' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & E_s & 0 \\ B_3 & B_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此, $\mathrm{rank}(M) = r + s + \mathrm{rank}(B_4) \geq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(C)$. 故等号成立当且仅当 $B_4 = 0$, 这等价于

$$P'BQ = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0 \end{bmatrix} PAQ + P'CQ' \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = X'PAQ + P'CQ'Y'$$

即 $B = P'^{-1}X'PA + CQ'Y'Q^{-1} = XA + CY$.

评注. 1 中能正确写出 $\mathrm{tr}(AA^T)$ 的表达式, 但误以为域是 $\mathbb{R}$, 可酌情给分. 2 为课本 207 页例题. 3 为习题 4.6.6. 4 为课本 222 页例题, 能通过分块矩阵的计算严格地得到 B 的表达式, 得满分.

二、(20 分)

1. 利用 Cramer 法则求解方程组 (a).

2. 判断当 λ 取何值时方程组 (b) 无解、有唯一解以及无穷多组解. 并在有解的情况下写出方程的通解.

$$(a)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}$$

(a) 记系数矩阵为 $A_{(1,2,3)}$, 将 $1, 2, 3$ 分别替换为 x, y, z, 记为 $A_{(x,y,z)}$. 容易验证 $A_{(x,y,z)}A^T_{(x,y,z)} = (x^2+2y^2+z^2)I_4$, 故 $|A_{(x,y,z)}| = (x^2+2y^2+z^2)^4$.

由于 $|A_{(x,0,0)}| = x^4$, 故 $|A_{(x,y,z)}| = (x^2+2y^2+z^2)^2$, 从而 $|A_{(1,2,3)}| = 18^2$.

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 \\ 8 & -1 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ -8 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} (4 \times C_3 \to C_1)$$

$$= \begin{vmatrix} 18 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 18^2.$$

故 $x_1 = 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 18 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} (4 \times C_3 \to C_2)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 18 & 3 & -2 \\ -4 & 0 & 0 & -7 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 8 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 18 \times 36.$$

故 $x_2 = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 18 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} (4 \times C_3 \to C_4)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 18 \\ -4 & -5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -18 \times 36.$$

故 $x_4=-2$. 将 x_1,x_2,x_4 带入原方程知, $x_3=-1$.

(b) 记系数矩阵为 B_λ, 则 $\det B_\lambda=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$.

$\lambda=1$ $\operatorname{rank}=1$. 有无穷多组解, $(x_1,x_2,x_3)=(1-s-t,s,t)$, $s,t\in\mathbb{F}$.

$\lambda=-2$ $\operatorname{rank}=2$. 将 3 个方程相加得 $0=3$, 无解.

$\lambda\neq 1,-2$ $\operatorname{rank}=3$. 有唯一解, $(x_1,x_2,x_3)=\left(-\frac{\lambda+1}{\lambda+2},\frac{1}{\lambda+2},\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}\right)$.

评注. (a) 为习题课原题, 只不过把字母换成了具体的数字. (b) 为课本习题 1.3.2.

三、(20 分) 设 $a_{ij}(t)$ 均为可微函数, 其中 $1\le i,j\le n$. 令 $A(t)=(a_{ij}(t))$, 证明 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|A(t)|=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}a_{ij}(t)}{\mathrm{d}t}A_{ij}(t)$.

四、(15 分)

1. 证明 Frobenius 秩不等式: 若 $A\in\mathbb{F}^{m\times n},B\in\mathbb{F}^{n\times p},C\in\mathbb{F}^{p\times q}$

$$\operatorname{rank}(ABC)\ge\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)-\operatorname{rank}(B).$$

2. 设 $T\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $f(x),g(x),h(x)\in\mathbb{F}[x]$ 且两两互素. 证明

$$\operatorname{rank}(f(T)g(T)h(T))+\operatorname{rank}(g(T))=\operatorname{rank}(f(T)g(T))+\operatorname{rank}(g(T)h(T)).$$

(1) 由于

$$\begin{bmatrix}I_m & A\\ 0 & I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}ABC & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -I_q\\ I_p & C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AB & 0\\ B & BC\end{bmatrix}$$

由第一题的 4 知

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(ABC)+\operatorname{rank}(B)&=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}ABC & 0\\ 0 & B\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}AB & 0\\ B & BC\end{bmatrix}\\ &\ge\operatorname{rank}(AB)+\operatorname{rank}(BC)\end{aligned}$$

且等号成立当且仅当存在矩阵 X, Y 使得 $B = XAB + BCY$.

(2) 由于 $f(x), h(x)$ 互素, 存在 $s(x), t(x) \in F[x]$ 使得

$$s(x)f(x) + h(x)t(x) = 1.$$

故

$$g(T) = s(T)f(T)g(T) + g(T)h(T)t(T).$$

令 $A = f(T), B = g(T), C = h(T)$, $X = s(T)$, $Y = t(T)$, 则

$$B = XAB + BCY.$$

由 (1) 知, 命题成立.

五、(20 分) 判断下列矩阵是否可逆, 若可逆求出逆矩阵.

$$(1)\ M = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 2 & 1 & & & \\ 3 & 2 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)\ C = \left(\frac{1}{a_i - b_j}\right)_{n\times n}$$

(1) 由于 $\det M = 1$, 故 M 可逆. 令

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则 $M = I_n + 2J_n + 3J_n^2 + \cdots + nJ_n^{n-1}$. 由于 $J_n^n = 0$, 故 $M = \sum\limits_{i=0}^{\infty}(i+1)J_n^i$. 利

用形式幂级数 $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum\limits_{i=0}^{\infty}(i+1)x^i$ 知

$$M^{-1} = (I_n - J_n)^2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) C 的代数余子式与 C 的行列式有相似的结构, 故 $C^{-1} = C^*/|C|$

$$|C| = \frac{\prod\limits_{k<l}(a_k - a_l)(b_l - b_k)}{\prod\limits_{i,j}(a_i - b_j)}, \quad C_{rs} = (-1)^{r+s}\frac{\prod\limits_{\substack{p<q\\p,q\neq r}}(a_p - a_q)\prod\limits_{\substack{p'<q'\\p',q'\neq s}}(b_{q'} - b_{p'})}{\prod\limits_{i\neq r, j\neq s}(a_i - b_j)}.$$

因此, C^{-1} 的第 s 行, 第 r 列的元素为

$$\frac{(-1)^{r+s}}{a_r - b_s}\cdot\frac{\prod\limits_{i}(a_r - b_i)(a_i - b_s)}{(-1)^{n-r}\prod\limits_{p\neq r}(a_p - a_r)\cdot(-1)^{s-1}\prod\limits_{q\neq s}(b_q - b_s)} = \frac{(-1)^n}{b_s - a_r}\cdot\frac{\prod\limits_{i}(a_r - b_i)(a_i - b_s)}{\prod\limits_{p\neq r, q\neq s}(a_p - a_r)(b_q - b_s)}.$$

六、(10 分) 令 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 为 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶可逆方阵全体, $B \le G$ 为可逆上三角方阵全体, W 为所有 P_{ij} (即交换单位阵第 i, j 两行所得到的方阵) 生成的子群.

1. 试写出 W 中所有的元素, 并证明 W 同构于 n 阶对称群 S_n.
2. 对任一 $g \in G$, 记 $BgB = \{b_1 g b_2 \mid b_1, b_2 \in B\}$. 设 $\sigma_1, \sigma_2 \in W$, 试判断 $B\sigma_1 B \cap B\sigma_2 B$ 何时非空.

(1) 令 $X = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{F}^n \mid \alpha_i \neq \alpha_j \text{ for any } i \neq j\}$. 将 X 中的元素视为行向量, 对于 $w \in W$, 定义 $f_w : X \mapsto X$

$$f_w : \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \mapsto w \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

其中右侧的元素由矩阵乘法得到. 容易验证, $f_u \circ f_v = f_{uv}$. 由于 W 由 P_{ij} 生成, 而 $f_{P_{ij}}$ 只会改变 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的排列, 因此 f_w well-defined. 特别地

$$w \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{i_1} \\ \vdots \\ \alpha_{i_n} \end{bmatrix} \tag{$*$}$$

至此, 我们从 $w \in W$ 出发, 得到了一个 S_n 中的元素

$$\sigma_w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

特别地, 由矩阵乘法的结合性知 $\varphi : W \to S_n$, $w \mapsto \sigma_w$ 是群同态.

由于 $\varphi(P_{ij}) = (ij)$, 因此 φ 是满同态. 由 $(*)$ 知, w 的每行每列有且仅有一个元素是 1, 其余都是 0, 故 $|W| \le n! = |S_n|$. 从而 φ 是群同构且

$$W = \{w \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid w \text{ 的每行每列有且仅有一个元素是 } 1, \text{ 其余都是 } 0\}.$$

若在 $(*)$ 中取 $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = I_n$, 则可得 $\varphi^{-1} : S_n \to W$, $\sigma \mapsto \begin{bmatrix} \varepsilon_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ \varepsilon_{\sigma(n)} \end{bmatrix}$, 其中 ε_i 为第 i 个坐标向量. 因此

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ \varepsilon_{\sigma(n)} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n} : \sigma \in S_n \right\}.$$

(2) 设 $B\sigma_1 B \cap B\sigma_2 B \ne \varnothing$, 则存在 $b_1, b_2, b_1', b_2' \in B$ 使得 $b_1\sigma_1 b_2 = b_1'\sigma_2 b_2'$, 即 $\sigma_1 b_2 b_2'^{-1} \sigma_2^{-1} = b_1^{-1} b_1'$. 故存在 $T \in B$ 使得 $\sigma_1 T \sigma_2^{-1} \in B$.

$w \in W$ 对矩阵的作用是排列(左乘对应行排列, 右乘对应列排列), 因此与 T 相比, $\sigma_1 T \sigma_2^{-1}$ 只是元素所在的位置发生了变化. 若 $\sigma_1 T \sigma_2^{-1} \in B$, 则 T 的对角线元素只能位于 $\sigma_1 T \sigma_2^{-1}$ 的右上角. 事实上, T 的对角线元素在 $\sigma_1 T \sigma_2^{-1}$ 中的位置与 $\sigma_1 I_n \sigma_2^{-1}$ 中 1 所在的位置相同. 这迫使 $\sigma_1 = \sigma_2$.

评注. (1) 中借助群作用给出到 S_n 的群同态是标准方法. 若采用列向量进行群作用, w 应作用在右侧(此时对应列排列). 这样得到的 φ 是群的反同态, 即 $\varphi(AB)=\varphi(B)\varphi(A)$. (2) 用到了如下组合事实(可通过数学归纳法证明), 每行每列有且仅有 1 个 1 再加上所有 1 都在右上角, 便可以得到所有 1 都在对角线上.

七、(15 分) 设 $A=(a_{ij})\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 为 n 阶反对称矩阵.

1. 证明 A $=2r$ 为偶数, 并且存在 n 阶可逆方阵 P, 使得

$$P^TAP=\begin{bmatrix} & I_r & \\ -I_r & & \\ & & 0\end{bmatrix}$$

2. 若 n 为奇数, 则 $\det A=0$.

3. 设 $n=2m$, 则有 $\det A=\mathrm{Pf}^2(A)^2$, 其中

$$\mathrm{Pf}(A)=\sum_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_m\\ i_1<j_1,\cdots,i_m<j_m}}(-1)^{\tau(i_1,j_1,i_2,j_2,\cdots,i_m,j_m)}a_{i_1,j_1}a_{i_2,j_2}\cdots a_{i_m,j_m}.$$

(1) 若 $A\neq 0$ 且 $\mathrm{rank}(A)=2r+1$ 是奇数, 则它有一个 $2r+1$ 阶主子式不为零, 但这是一个奇数阶反对称矩阵, 从而产生矛盾. 若 $A=0$, 则 $\mathrm{rank}(A)=0$ 是偶数.

设 A 为 $n-1$ 阶反对称矩阵时, 存在 $n-1$ 阶可逆方阵 P' 使得

$$P'^TAP'=\begin{bmatrix} & I_k & \\ -I_k & & \\ & & 0\end{bmatrix}$$

当 A 为 n 阶反对称矩阵时, 若 A 的第 2 个顺序主子式不为零, 则它为 $A_2=\begin{bmatrix} & a\\ -a & \end{bmatrix}$, $a\neq 0$. 此时, $A=\begin{bmatrix}A_2 & B\\ -B^T & C\end{bmatrix}$. 令 $Q=\begin{bmatrix}I_2 & -A_2^{-1}B\\ & I_{n-2}\end{bmatrix}$, 则

$$Q^TAQ=\begin{bmatrix}A_2 & \\ & C+B^TA_2^{-1}B\end{bmatrix}$$

现在, $C+B^TA_2^{-1}B$ 是 $n-2$ 阶反对称方阵. 由归纳假设, 存在 $n-2$ 阶可逆方阵 P' 使得

$$\begin{bmatrix} I_2/\sqrt{a} & \\ & P'^T \end{bmatrix} Q^TAQ \begin{bmatrix} I_2/\sqrt{a} & \\ & P' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 1 & & \\ -1 & & & \\ & & & I_k \\ & & -I_k & 0 \end{bmatrix}$$

因此, $E_{k+1,k+2}\cdots E_{34}E_{23}\begin{bmatrix} & 1 & & \\ -1 & & & \\ & & & I_k \\ & & -I_k & 0 \end{bmatrix}E_{23}E_{34}\cdots E_{k+1,k+2} = \begin{bmatrix} & I_{k+1} & \\ -I_{k+1} & & \\ & & 0 \end{bmatrix}$

令 $P = \begin{bmatrix} I_2 & -A_2^{-1}BP' \\ & P' \end{bmatrix} E_{23}E_{34}\cdots E_{k+1,k+2}$ 即可. 若 A 的第 2 个顺序主子式为零但 $A \neq 0$, 则 $\operatorname{rank}(A) \geq 2$. 因此, 存在一个 2 阶主子式不为零. 经过适当的合同变换后, 它可化为之前的情形.

(2) 若 n 为奇数, 则 $\operatorname{rank}(A) \neq n$, 故 $\det A = 0$.

(3) 略.