线性代数(B2)期末考试

2021年3月5日，星期五，14:30–16:30

姓名：__________ 学号：__________ 所在院系：__________

题号	一	二	三	四	五	六	总 分
得分							
复查							

一、 填空（共35分）

(1). 设2阶实对称方阵A的特征值为2和4，并且向量$\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$为属于特征值4的特征向量，则$A=$

__________.

(2). 实二次型

$$Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})^2$$

的正惯性系数为__________.

(3). λ-阵$\begin{pmatrix}0 & \lambda^3+\lambda^2 & 0\\ \lambda^3-\lambda & 0 & \lambda^3-\lambda^2\\ 1-\lambda^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$的初等因子组为__________,

Smith标准形为__________.

(4). 设3阶实方阵$A=\begin{pmatrix}5 & 0 & -1\\ a & 2 & 0\\ 0 & 2 & b\end{pmatrix}$和$B=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & c & 3\end{pmatrix}$正交相似，则参数$a=$__________,

$b=$__________，$c=$__________.

二、（共14分）给定Euclid空间$\mathbb{R}^4$(标准内积)的一组基：

$$\alpha_1=(1,1,1,-1),\ \alpha_2=(1,0,1,0),\ \alpha_3=(0,-1,1,-1),\ \alpha_4=(1,1,1,1).$$

(1). 通过Gram-Schmidt正交化求标准正交基$\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$（向量次序不能变）；

(2). 求行列式$\det(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T)$与行列式$\det(\beta_1^T,\beta_2^T,\beta_3^T,\beta_4^T)$的商。

三、(20分) 线性变换$\mathscr{A}$在复空间V的基$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$下的方阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}$。

(1). 求$\mathscr{A}$的最小多项式和上三角的Jordan标准形J；

(2). 求V的基$M = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$，使得$\mathscr{A}$在基$M$下的方阵为$J$；

(3). 求线性变换$\mathscr{A}$的所有2维不变子空间。

四、(16分) n阶实方阵A满足$A + A^T = 2I_n$，证明：

(1). A是n阶可逆方阵；

(2). $O = 2A^{-1} - I_n$是n阶正交方阵，并且$\det O = 1$。

五、(15分) 设$S>0$为n 阶实对称正定方阵，A为n阶可逆实对称方阵，α为n维实单位列向量。

(1). 试证明：AS的特征值均为实数；

(2). 令$B=A+\alpha\alpha^TA^{-1}$。证明：B的所有特征值都是实数；

(3). 证明：若a为A的$k\geq 2$重特征值，则a为B的至少$k-1$重特征值。

附加题(5分) 令$S=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}$，其中$\lambda$为正实数。问$\lambda$为何实数时一定存在2阶实方阵$T$，使得$T-S$为正定对称的，但$T^2-S^2$不是正定的。