补充的作业题

(作业题) 设 $\mathbb{F}$ 为域且 $\operatorname{char}\mathbb{F}\neq 2$, 设 S 是 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶对称矩阵，$\operatorname{rank}(A)=r\leq n$, 证明:

(1) 存在行满秩矩阵 $P\in\mathbb{F}^{r\times n}$ 以及可逆对角矩阵 $D\in\mathbb{F}^{r\times r}$ 使得

$$S=P^TDP$$

(2) S 存在 r 阶非零主子式.

(3) 若 $r<n-1, S=\begin{pmatrix}S_1 & \alpha\\ \alpha^T & a\end{pmatrix}, a\in\mathbb{F}$ 且 $\operatorname{rank}(S_1)=r$, 则 S 与 $\begin{pmatrix}S_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 相合.

证明: (1) 由于 $\operatorname{char}\mathbb{F}\neq 2$, 则存在 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶可逆矩阵 Q 以及 $d_1,d_2,\cdots,d_r\in\mathbb{F}^*$ 使得

$$S=Q^T\begin{pmatrix}D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$$

其中 $D=\operatorname{diag}\{d_1,d_2,\cdots,d_r\}$. 再将 Q 进行分块 $Q=\begin{pmatrix}P\\ Q_1\end{pmatrix}$, 其中 $P\in\mathbb{F}^{r\times n}$ 且 P 是行满秩的，则

$$S=P^TDP$$

(2). 由 (1) 的结论与 Cauchy-Binet 公式得

$$S\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_r\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r\end{pmatrix}=P^T\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_r\\ 1 & 2 & \cdots & r\end{pmatrix}(DP)\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & r\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r\end{pmatrix}$$

以及

$$(DP)\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & r\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r\end{pmatrix}=D\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & r\\ 1 & 2 & \cdots & r\end{pmatrix}P\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & r\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r\end{pmatrix}$$

因此

$$S\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_r\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & r\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r\end{pmatrix}^2\cdot\det D$$

由于 $\mathrm{rank}(P) = r$, 则存在 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n$ 使得

$$P\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} \ne 0$$

因此 S 有非零主子式.

(3) 由于 $r = \mathrm{rank}(S_1) \le \mathrm{rank}(S_1, \alpha) \le \mathrm{rank}(S) = r$, 则 $\mathrm{rank}(S_1, \alpha) = \mathrm{rank}(S_1)$, 故存在 $\beta \in \mathbb{F}^{n-1}$ 使得 $S_1\beta = \alpha$, 则

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\beta^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_1 & \alpha \\ \alpha^T & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & -\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & a-\beta^T\alpha \end{pmatrix}$$

即 $\begin{pmatrix} S_1 & \alpha \\ \alpha^T & a \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & a-\beta^T\alpha \end{pmatrix}$ 相合，再由二者秩相等知，$a-\beta^T\alpha = 0$, 故 S 与 $\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相合. □