同调代数 (2020 秋) 第一次考试

考试时间：2020 年 11 月 14 日 19:00-21:00

1. 设 R 是环, 任意 $R-$ 模均可自然视为 $\mathbb{Z}-$ 模，则可定义共变函子 $H: R-Mod \longrightarrow \mathbb{Z}-Mod, H(M)=M, H(f)=f$.

   (1) 验证 $R\otimes_{\mathbb{Z}} - : \mathbb{Z}-Mod \longrightarrow R-Mod$ 是 H 的左伴随.

   (2) 构造 H 的右伴随函子，并验证你的结论.

2. 设 $\mathcal{A}$ 为 abel 范畴，$f: A \longrightarrow B$ 为 $\mathcal{A}$ 中的单态射，$a: A \longrightarrow C$ 是 $\mathcal{A}$ 中的态射. 证明：

   (1) 有如下的行正合交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & E \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "g"] & D \arrow[r] & E \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

   并且图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "b"] \\
C \arrow[r, "g"] & D
\end{tikzcd}$$

   是 pushout.

   (2) 图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "b"] \\
C \arrow[r, "g"] & D
\end{tikzcd}$$

   还是 pullback.

3. 设 R 是环，构造 $R-\mathrm{Mod}$ 范畴到 $\mathrm{M}_n(R)-\mathrm{Mod}$ 范畴的等价函子，并验证你的结论.