线性代数 A1 期中考试

2022.5.15;14:30-17:00

1. 判断下述论断是否成立，并简述理由.

   (1) 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 则齐次线性方程组 $Ax=0$ 与 $A^TAx=0$ 同解.

   (2) 存在 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times m}$, 使得线性方程组 $ABx=x$ 有非零解，而 $BAy=y$ 只有零解, 其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T, y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$ 为不定元.

   (3) 两个对称方阵的乘积仍是对称方阵.

   (4) 设 $\mathbb{F}$ 是域,$A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, 则 A 可逆当且仅当存在常数项非零的非常值多项式 $f(x)\in\mathbb{F}[x]$, 使得 $f(A)=0$.

   (5) 存在 3 阶复方阵 A, 使得 $\operatorname{rank}(A^*)=2$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵.

   (6) 设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 满足 $A^2=A$, 则存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$, 其中 $r=\operatorname{rank}(A)$.

2. 利用 Cramer 法则求解方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=4 \\ x_1-3x_2-6x_4=3 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$$

3. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{n\times n}$.

   (1) 令 $\omega=e^{2\pi\sqrt{-1}/n}$. 试找一个可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=\operatorname{diag}\{1,\omega,\cdots,\omega^{n-1}\}$.

   (2) 试求 $Z(A)=\{B\in\mathbb{C}^{n\times n}|AB=BA\}$, 并证明 $BC=CB, \forall B,C\in Z(A)$.

4. 证明:

(1) 设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{p\times q}$. 证明:$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & \\ C & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(C)$ 当且仅当存在 $X \in \mathbb{F}^{m\times p}, Y \in \mathbb{F}^{n\times q}$ 使得 $A = XC, B = CY$, 且 $XCY = 0$.

(2) 设 $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$, 则 $\operatorname{rank}(A+B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$ 当且仅当存在可逆矩阵 P, Q 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix},\ PBQ = \begin{pmatrix} 0 & \\ & I_s \end{pmatrix}$$

其中 $r = \operatorname{rank}(A), s = \operatorname{rank}(B)$, 且 $r + s \le \min\{m, n\}$.

5. 判断下面矩阵是否可逆，若可逆求出逆矩阵.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & & & \\ -1 & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$

6. (1) 设 A, B 为 n 阶复方阵, 证明:

$$\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A + \sqrt{-1}B) \cdot \det(A - \sqrt{-1}B)$$

(2) 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 且满足 $a_{ii} > 0, a_{ij} < 0, i \ne j, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$. 证明:$\det(A) > 0$.

7. 记 $V = C^{\infty}(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}$ 上连续函数全体,$S = \{1, \cos x, \cos 2x, \cos^2 x, \cos 3x\}$ 为 V 中的向量组，试求出 S 的全部极大线性无关组.