2021 年春 群与代数表示论 期末考试卷（闭卷）

姓名：__________　　　　　　学号：__________

（本卷中，F 为域，群均为有限群，表示（模）均为有限维表示（左模）。题目分值 120 分，卷面成绩超过 100 按 100 算。需要有详细解题过程。）

1. 设 G 为 3 阶循环群.

(1) 试确定 G 在 3 元域 $\mathbb{Z}_3$ 上的所有不可约表示及 $\mathbb{Z}_3$-特征标表；　(6')

(2) 试确定 G 在 5 元域 $\mathbb{Z}_5$ 上的所有不可约表示及 $\mathbb{Z}_5$-特征标表；　(7')

(3) 试确定 G 在 7 元域 $\mathbb{Z}_7$ 上的所有不可约表示及 $\mathbb{Z}_7$-特征标表.　(7')

2. 设 G 是四元数群.

(1) 试确定 G 的所有一次不可约复表示；　(8')

(2) 试利用行、列正交关系确定 G 的复特征标表.　(7')

3. 设 $A = \begin{pmatrix} F & F \\ F & F \end{pmatrix}$ 是 F 上的 2 阶全矩阵代数.

(1) 证明：A 是单代数；　(5')

(2) 试确定代数 A 上的所有单模、不可分解投射模和不可分解内射模（在同构意义下）；　(5')

(3) 考察 A 的子代数 $B = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$. 试确定 B 上的所有单模、不可分解投射模和不可分解内射模（在同构意义下）.　(10')

4. (15') 设 H 是群 G 的子群，$M \in FG$-mod, $N \in FH$-mod. 证明：有 F-线性空间同构

$$\mathrm{Hom}_{FG}(M, N^G) \simeq \mathrm{Hom}_{FH}(M, N).$$

5. 令 $G = \langle \sigma, \tau | \sigma^7 = \tau^3 = 1, \tau\sigma = \sigma^2\tau \rangle$.

(1) 证明: G 是 Frobenius 群;　(10')

(2) 试确定 G 的所有不可约复表示.　(10')

6. 定义 $\mathbb{C}$-代数 $U = \mathbb{C}\langle e, f, h\rangle / \langle he - eh - 2e, hf - fh + 2f, ef - fe - h\rangle$. 令 V 为复数域上二元多项式环 $\mathbb{C}[x, y]$.

(1) 证明：(V, ρ) 是 U 的一个表示，其中　(10')

$$\rho(e) = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad \rho(y) = y\frac{\partial}{\partial x}, \quad \rho(h) = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}.$$

(2) 证明：$\{\ f^i h^j e^k \mid i, j, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ \}$ 是 U 的一组基.　(10')

(3) 根据 (2)，典范映射 $\iota : \mathbb{C}[h] \to U$ 是单的代数同态. 在同构意义下，分类 U 的所有有限维不可约表示.（提示：可以先证明 U 的有限维不可约表示作为 $\mathbb{C}[h]$-模是完全可约的.）　(10')