2024 春近世代数 (H) 期末考试

1. 考虑域 $E=\mathbb{Q}(\sqrt[4]{18},\mathrm{i})$, 以及 $K=E\cap\mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$. 其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.

   (1) 求维数 $\dim_{\mathbb{Q}} E$;

   (2) 判断并论证: 多项式 $x^4-18\in\mathbb{Q}(\mathrm{i})[x]$ 是否可约?

   (3) 计算维数 $\dim_{\mathbb{Q}} K$;

   (4) 考虑 x^4-18 的根集 $\mathcal{X}=\{a=\sqrt[4]{18},b=\sqrt[4]{18}\mathrm{i},c=-\sqrt[4]{18},d=-\sqrt[4]{18}\mathrm{i}\}$, 以及群 $\mathrm{Aut}(E)$ 自然作用在 $\mathcal{X}$ 上诱导的群同态 $\rho:\mathrm{Aut}(E)\to S(\mathcal{X})$. 试给出 $\mathrm{Im}\rho$ 中的全部元素.

   (5) 分类 E 的全部子域.

2. 考虑一元有理函数域 $E=\mathbb{C}(x)$, 对于正整数 n, 考虑 E 的子域 $L_n=\mathbb{C}(x^n+x^{-n})$.

   (1) 计算域扩张 E/L_n 的维数 $[E:L_n]$;

   (2) 判断并论证如下断言是否成立: $L_m\subseteq L_n$ 当且仅当 $n\mid m$.

   (3) 求 E/L_4 的全部中间域.

3. 设 G 是有限群, H 是 G 的真子群, 证明: $G\neq\bigcup\limits_{g\in G} gHg^{-1}$; 并且说明当 G 是无限群的时候，结论是否成立?

4. 设 A 是有限生成交换群并且秩为 2, 若 $\theta:A\to\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 为群的满同态, 证明: $\ker\theta$ 恰好为 A 的扭 (torsion) 子群.