同调代数 (2020 秋) 第二次考试

考试时间：2020 年 11 月 28 日 19:00-20:30

注：R 为任意含单位元的环.

1. 用 Baer 准则说明：

   (1) 对任意的正整数 n,$\mathbb{Z}_n$ 作为 $\mathbb{Z}_n-$ 模是内射的.

   (2) $\mathbb{Z}_6$ 作为 $\mathbb{Z}_{18}-$ 模不是内射的.

2. 证明： $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ 是 $\mathrm{Mod}-R$ 中的短正合列当且仅当

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(g,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(f,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

   是 $R-\mathrm{Mod}$ 中的短正合列.

3. 若 $_RP$ 满足对于任意的 $_RM$ 以及内射 $R-$ 模 $_RJ$, 满同态 $\alpha : J \longrightarrow M$ 以及 $\beta : P \longrightarrow M$，存在 $\gamma : P \longrightarrow J$ 使得 $\beta = \alpha\gamma$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] \arrow[d, "\beta"] \\ J \arrow[r, two heads, "\alpha"] & M \end{tikzcd}$$

   证明：P 是投射模.