线性代数 A2 期中考试

考试时间：2021/11/21,14:30-16:45

1. (**10 分**) 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 为 $m \times n$ 实矩阵, 证明:$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^T A)$.

2. (**15 分**) 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}, B = (b_{ij})_{n\times n}$ 为同阶实方阵，记

$$A \circ B = (a_{ij}b_{ij})_{n\times n}.$$

   证明：若 A, B 正定，则 $A \circ B$ 也正定. 举例说明存在 A, B 满足 $A, A \circ B$ 正定, 但是 B 非正定的.

3. (**15 分**) 设 $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为 n 阶实方阵, 且 $X^2 + I_n = 0$.

   (1) 证明:$n = 2k$ 为偶数;

   (2) 写出 X 的初等因子组;

   (3) 证明:X 实相似到分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & I_k \\ -I_k & 0 \end{pmatrix}$.

4. (**15 分**) 考虑实二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_4 - 2x_2x_4$.

   (1) 将 f 化为主轴形式，并求 f 的正负惯性指数;

   (2) 求 f 在球面 $S^3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 1 \right\}$ 上的最值.

5. (**20 分**) 令 $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 其中 $n \in \mathbb{N}^*$. 记

$$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} | A^T J A = J\}$$

   (1) 证明:$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ 在矩阵乘法下构成群.

   (2) 证明: 若 $A \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, 则 $A^T \in Sp_n(\mathbb{R})$.

   (3) 证明:$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \leq \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{R})$, 且 $\mathrm{Sp}_1(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. 其中 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) | \det A = 1\}$.

6. (**10 分**) 设 A 是 n 阶正交矩阵,A_1 是 A 的任一子方阵, 证明：A_1 的特征值模长不超过 1.

7. (**20 分**) 设 $V = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{1, \cos x, \cos^2 x, \cdots, \cos^{n-1} x\}$ 为 $C[0,2\pi]$ 的子空间, 其中 $C[0,2\pi]$ 为区间 $[0,2\pi]$ 上实值连续函数全体形成的实向量空间, 在 V 上定义双线性型

$$(f,g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x, \quad f,g \in V$$

(1) 证明:$(-,-)$ 为 V 上的内积;

(2) 证明:$1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos(n-1)x$ 为 V 的一组正交基.

(3) 将向量组 $\{1, \cos x, \cos^2 x, \cdots, \cos^{n-1} x\}$ 进行 Gram-Schmidt 正交化, 求所得到的标准正交基.