Higman 定理

对于有限群 G, 若域 K 的特征是零，则由 Maschke 定理知，群代数 KG 是半单代数，进而 KG 是有限表示型的. 以下 C_n 表示 n 阶循环群，p 为素数.

定理 1 (D.G Higman,1954) *设 K 是特征为 p 域，其中 p 是素数，G 是有限群，则群代数 KG 是有限表示型的当且仅当 G 的 Sylow $p-$ 子群是循环群.*

引理 1 *设域 K 的特征是素数 p, 则代数 $K[X,Y]/(X^p,Y^p)$ 是无限表示型的.*

证明: 因为 $(X^p,Y^p)\subseteq(X,Y)^2=(X^2,XY,Y^2)$, 从而有满的代数同态 $K[X,Y]/(X^p,Y^p)\longrightarrow K[X,Y]/(X^2,XY,Y^2)$, 因此只需证明 $K[X,Y]/(X^2,XY,Y^2)$ 是无限表示型即可.

令 $V_n=K^{2n}, \alpha_X=\begin{pmatrix}0&0\\I_n&0\end{pmatrix}, \alpha_Y=\begin{pmatrix}0&0\\J_n(0)&0\end{pmatrix}$, 其中 $J_n(0)$ 是 0 对应的 n 阶若当块，定义

$$X.v=\alpha_X(v),\ \ Y.v=\alpha_Y(v).$$

因为 $\alpha_X^2=0\alpha_Y^2, \alpha_X\alpha_Y=0=\alpha_Y\alpha_X$, 则 V_n 是 $K[X,Y]/(X^2,XY,Y^2)-$ 模，又因为 $\dim V_n=2n$, 则当 $m\neq n$ 时，V_n 与 V_m 不同构. 下面证明 V_n 是不可分解的 $K[X,Y]/(X^2,XY,Y^2)-$ 模.

设 $\varphi=\begin{pmatrix}A_1&A_2\\A_3&A_4\end{pmatrix}: V_n\longrightarrow V_n$ 为模同态, 其中 $A_i\in M_n(K)$. 则

$$\varphi\alpha_X=\alpha_X\varphi\Rightarrow\begin{cases}A_2=0\\A_1=A_4\end{cases}$$

$$\varphi\alpha_Y=\alpha_Y\varphi\Rightarrow\begin{cases}A_2=0\\A_1J_n(0)=J_n(0)A_4\end{cases}$$

则 $\varphi=\begin{pmatrix}A_1&0\\A_3&A_1\end{pmatrix}$, 其中 $A_1J_n(0)=J_n(0)A_1$. 从而存在多项式 $f(x)\in K[X]$ 使得 $A_1=f(J_n(0))$. 若 $\varphi^2=\varphi$, 则有

$$\begin{pmatrix}A_1^2&0\\A_3A_1+A_1A_3&A_1^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&0\\A_3&A_1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}A_1^2=A_1\\A_3A_1+A_1A_3=A_3\end{cases}$$

则 $f^2(J_n(0))-f(J_n(0))=0$, 即 $f^2(X)-f(X)$ 零化 $J_n(0)$, 进而 $X^n\mid f(X)(f(X)-1)$, 故 $X^n\mid f(X)$ 或 $X^n\mid f(X)-1$. 因此 $A_1=0$ 或 $A_1=I_n$. 则 $A_3=0$, 即得 $\varphi=0$ 或 I_{2n}. 因此 V_n 是不可分解的，故 $K[X,Y]/(X^2,XY,Y^2)$ 是无限表示型的，因此 $K[X,Y]/(X^p,Y^p)$ 是无限表示型的. □

引理 2 (近世代数标准的习题) *设 G 是群，G 的中心为 $Z(G)=\{a\in G|ag=ga,\forall g\in G\}$, 若 $G/Z(G)$ 是循环群，则 G 是交换群.*

引理 3 (p 群有非平凡的中心) *设 G 是有限 p 群，则 $|Z(G)|>1$, 进一步，有 $p\mid|Z(G)|$.*

引理 4 *p^2 阶群都是交换群，同构意义下只有两个：$C_{p^2},C_p\times C_p$.*

引理 5 *设 G 是有限 p 群，并且 G 不是循环群，则 G 存在正规子群 N 使得 $G/N\cong C_p\times C_p$.*

证明: 若 G 是交换群，则由有限生成交换群的结构定理知

$$G\cong C_{p^{m_1}}\times C_{p^{m_2}}\times\cdots\times C_{p^{m_r}},\ m_1\le m_2\le\cdots\le m_r.$$

由于 G 不是循环群，则 $r\ge 2$. 从而 G 有正规子群 N 使得 $G/N\cong C_p\times C_p$.

若 G 不是交换群. 设 $|G|=p^n$, 由引理4知 $n\ge 3$.

当 $n=3$ 时，则有 $|Z(G)|=p$，从而 $G/Z(G)\cong C_p\times C_p$. 假设结论对 $n\ge 3$ 都成立，则当 $|G|=p^{n+1}$ 时，则 $G/Z(G)$ 是 $p^m(m\le n)$ 阶群，不妨设 $G/Z(G)$ 是非交换的 (交换的情形自然成立)，由归纳假设，$G/Z(G)$ 存在正规子群 $N/Z(G)$ 使得 $\dfrac{G/Z(G)}{N/Z(G)}\cong C_p\times C_p$, 则 $G/N\cong C_p\times C_p$. 综上，引理成立. □

引理 6 *设域 K 的特征为 p, 则有代数同构 $K(C_p\times C_p)\cong K[X,Y]/(X^p,Y^p)$. 进而 $K(C_p\times C_p)$ 是无限表示型的.*

证明: 设 $C_p\times C_p=\{(g^i,h^j)|0\le i,j\le p-1\}$. 定义

$$\varphi:K[X,Y]\longrightarrow K(C_p\times C_p),\ \ X^iY^j\longmapsto(g^i,h^j)$$

线性延拓至 $K[X,Y]$. 则 φ 是满的 $K-$ 代数同态，又 $\dim K(C_p\times C_p)=p^2$, 则有代数同构 $K(C_p\times C_p)\cong K[X,Y]/(X^p,Y^p)$. □

引理 7 *设 G 是有限 p 群，域 K 的特征为 p, 则 KG 是有限表示型的当且仅当 G 是循环群.*

证明: $\Rightarrow$: 若 G 不是循环群，则由引理5知 G 存在正规子群 N 使得 $G/N\cong C_p\times C_p$. 考虑

$$f:KG\longrightarrow K(G/N),\ \sum_{g\in G}a_gg\longmapsto\sum_{a\in G}a_g\bar{g}$$

则 f 是满的代数同态，而由引理6知 $K(G/N)$ 是无限表示型的，进而 KG 是无限表示型的，矛盾！故 G 是循环群.

$\Leftarrow$: 若 G 是循环群，则 $KG \cong K[X]/(X^{p^n})$, 其中 $|G| = p^n$, 因此 KG 是有限表示型.

$\square$

引理 8 设 K 为域，G 是有限群，H 是 G 的子群. 则

(1) 若 KG 是有限表示型的，则 KH 也是有限表示型的.

(2) 若 $[G:H]$ 在 K 中可逆，则对于每个不可分解的 $KG-$ 模 W，W 都是 $KG \otimes_{KH} W$ 的直和项. 进一步，若 KH 是有限表示型的，则 KG 也是有限表示型的.

证明: (1) 考虑映射

$$\rho : KG \longrightarrow KH, \ \sum_{g \in G} a_g g \longmapsto \sum_{h \in H} a_h h$$

则 ρ 是 $KH - KH$ 双模同态，并且 ρ 是可裂满的，对任意不可分解的有限维 $KH-$ 模 N, 有 $KH-$ 模同态 $1 \otimes \rho : N \otimes_{KH} KG \longrightarrow N \otimes_{KH} KH \cong N$ 也是可裂满的，则 N 同构于 $N \otimes_{KH} KG$(视为 $KH-$ 模) 的直和项，又 KG 是有限表示型的，则可设全部有限维不可分解的 $KG-$ 模 (同构意义下) 为 $\{M_1, M_2, \cdots, M_t\}$. 则 $KG-$ 模 $N \otimes_{KH} KG$ 有分解

$$N \otimes_{KH} KG \cong a_1 M_1 \oplus a_2 M_3 \oplus \cdot \oplus a_t M_t, \ a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

上述同构作为 $KH-$ 模也是成立的，即 N 同构于 $a_1 M_1 \oplus a_2 M_3 \oplus \cdot \oplus a_t M_t$(作为 $KH-$ 模) 的直和项，由 $\mathrm{Krull-Schmidt}$ 定理，N 同构于某个 M_i(作为 $KH-$ 模) 的直和项，而 M_i(作为 $KH-$ 模) 的直和项只有有限个，因此 KH 是有限表示型的.

(2) 记 $s = [G:H]$, 设 G 关于 H 的左陪集代表元系为 T, 考虑

$$f : W \longrightarrow KG \otimes_{KH} W, \ w \longmapsto \sum_{t \in T} t \otimes t^{-1} w$$

$$g : KG \otimes_{KH} W \longrightarrow W, \ g \otimes w \longmapsto s^{-1} gw.\text{(由张量积泛性质诱导)}.$$

注意到 $\sum\limits_{t \in T} t \otimes t^{-1} w$ 与左陪集代表元系选取是无关的. 则 f 是 $KG-$ 模同态，并且

$$gf(w) = g(\sum_{t \in T} t \otimes t^{-1} w) = \sum_{t \in T} g(t \otimes t^{-1} w) = w.$$

亦即 $gf = \mathrm{id}_W$, 故 g 是可裂满的，因此 W 是 $KG \otimes_{KH} W$ 的直和项. 下面再证明：若 KH 是有限表示型的，则 KG 也是有限表示型的.

设有限维不可分解 $KH-$ 模的同构类为 $\{N_1, N_2, \cdots, N_r\}$. 则 W 作为 $KH-$ 模，有直和分解

$$W \cong \bigoplus_{i=1}^{r} a_i N_i, \ \ a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

则有

$$KG \otimes_{KH} W \cong \bigoplus_{i=1}^{r} a_i(KG \otimes_{KH} N_i).$$

因此 W 同构于 $\bigoplus\limits_{i=1}^{r} a_i(KG \otimes_{KH} N_i)$ 的直和项，而 W 是不可分解的，由 Krull – Schmidt 定理，W 同构于某个 $KG \otimes_{KH} N_i$ 的直和项，因此 KG 是有限表示型的. □

注 1 *(2)* 的证明事实上给出了求 KG 所有有限维不可分解模的方法.

下面来证明定理1：

证明: 必要性：设 H 是 G 的 Sylow $p-$ 子群，由于 KG 是有限表示型的，则由引理8知 KH 也是有限表示型的，再由引理7知 H 是循环群.

充分性：设 $|G| = p^r m$, 其中 $p \not| m$, 对于 G 的 Sylow $p-$ 子群 H, 有 $[G : H] = m$, 则 $[G : H]$ 在 K 中可逆，而 H 是循环群，则 KH 是有限表示型的，由引理8知 KG 也是有限表示型的. □

例 1 设 $G = S_3 = \langle r, s | r^3 = s^2 = (rs)^2 = 1 \rangle$, 考虑域 K 的特征为 2, 则 G 有 *Sylow* $2-$ 子群 $H = \{1, s\}$ 为循环群，则 KG 是有限表示型的. 取 G 关于 H 的左陪集代表元系 $T = \{1, r, r^2\}$.

由于 $KH \cong K[X]/(X^2)$, 则 KH 同构意义下只有两个不可分解模:$W_1 = \mathrm{span}\{w\}, sw = w$ 与 $W_2 = KH$ 正则模.(对应群 H 的两个不可分解 $K-$ 表示：单位表示与正则表示).

(1)$M = KG \otimes_{KH} W_1 = \mathrm{span}\{1 \otimes w, r \otimes w, r^2 \otimes w\}$. 记

$$V_1 = \mathrm{span}\{(1 + r + r^2) \otimes w\}, V_2 = \mathrm{span}\{(1 + r) \otimes w, (1 + r^2) \otimes w\}$$

可以验证 V_1, V_2 是 M 的子模，并且 $M = V_1 \oplus V_2$, 以及 V_1, V_2 都是单模，进而也是不可分解的.

(2)$M = KG \otimes_{KH} KH \cong KG = \mathrm{span}\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. 记

$$U_1 = \mathrm{span}\{1 + r + r^2, s(1 + r + r^2)\}$$

$U_2 = \mathrm{span}\{1+s+(1+s)r^2, r(1+r)+s(1+r)\}, U_3 = \mathrm{span}\{r+r^2+s(r+r^2), 1+r^2+s(1+r)\}$

可以验证：U_1, U_2, U_3 都是子模，$KG = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$, 且 $U_2 \cong U_3 \cong V_2$,U_1 是不可分解的但不是单模.

综上：同构意义下，KG 的有限维不可分解模为：V_1, V_2, U_1. 对应于群 $G = S_3$ 的 $K-$ 表示：单位表示，(K^2, ρ),(K^2, η). 其中

$$\rho(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \rho(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\eta(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \eta(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

参考文献

[1] I. ASSEM,D. SIMSON,A. SKOWRONSKI.Elements of the Representation Theory of Associative Algebras Volume 1 Techniques of Representation Theory[M].the United States of America by Cambridge University Press,:New York,2006:175.

[2] K.Erdmann,T.Holm.Algebras and Representation Theory [M].Springer,2010:150. https://doi.org/10.1007/978-3-319-91998-0