1. Решение систем линейных алгебраических уравнений СЛАУ. 2. Решение плохо обусловленных систем СЛАУ. 3. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений

Цель 1-го раздела. Изучить известные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Содержание 1-го раздела

1. По данной системе СЛАУ подобрать подходящий точный метод ее решения.

2. Решить данную систему одним из приближенных методов.

3. Провести анализ полученных результатов.

Содержание отчёта

1. Цель работы.

2. Анализ известных методов решения СЛАУ.

3. Физические задачи, приводящие к решению СЛАУ.

Пример выполнения работы.

Решение СЛАУ реализовано в MathCAD в двух вариантах:

- Встроенная функция lsolve (точный алгоритм Гаусса);
- Вычислительный блок Given/Find (приближенный итерационный алгоритм).

Начиная с версии MathCAD 13, встроенная функция lsolve может использоваться не только для решения СЛАУ с квадратной матрицей, но также и систем с прямоугольной матрицей, т. е. как не доопределенных, так и пере определенных систем уравнений.

Очень важно, что при использовании вычислительного блока Given/Find всем неизвестным требуется присвоить начальные значения. Если матрица СЛАУ является невырожденной (точнее, если ее число обусловленности не слишком велико), то известно, что численное решение системы уравнений единственно. Поэтому начальные значения могут быть произвольными, т. к. результат работы численного метода все равно сойдется к точному решению.

Для вывода точного значения MathCAD предоставляет возможность выводить до 15 знаков после запятой, но не отображает ничего не значащие нули.

Вычислительный блок Given/Find не предоставляет информацию о количестве итераций, которая является очень важной в итерационных методах. Также в MathCAD не уточняется какой именно итерационный метод используется.

решение СЛАУ методом Гаусса.

Данная СЛАУ:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Вычисление результата с помощью встроенной функции lsolve:

$$X := \mathrm{lsolve}(A,B)$$

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left|A \cdot \mathrm{lsolve}(A,B) - B\right| = 0$$

Решение СЛАУ с помощью приближенного итерационного алгоритма

Входные данные:

$$A := \begin{pmatrix} 100 & 6 & -2 \\ 6 & 200 & -10 \\ 1 & 2 & 100 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 200 \\ 600 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вычисление результата с помощью в строенного блока Given/Find:

Given $\quad A \cdot x = b$

Ответ :

$$\mathrm{Find}(x) = \begin{pmatrix} 1.907 \\ 3.189 \\ 4.917 \end{pmatrix}$$

2. Решение плохо обусловленных систем СЛАУ

Цель 2-го раздела. Изучить известные методы решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений.

Содержание раздела

1. По данной системе СЛАУ подобрать подходящий метод ее решения.

2. Изучить этапы решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений.

3. Провести анализ полученных результатов.

Содержание отчёта

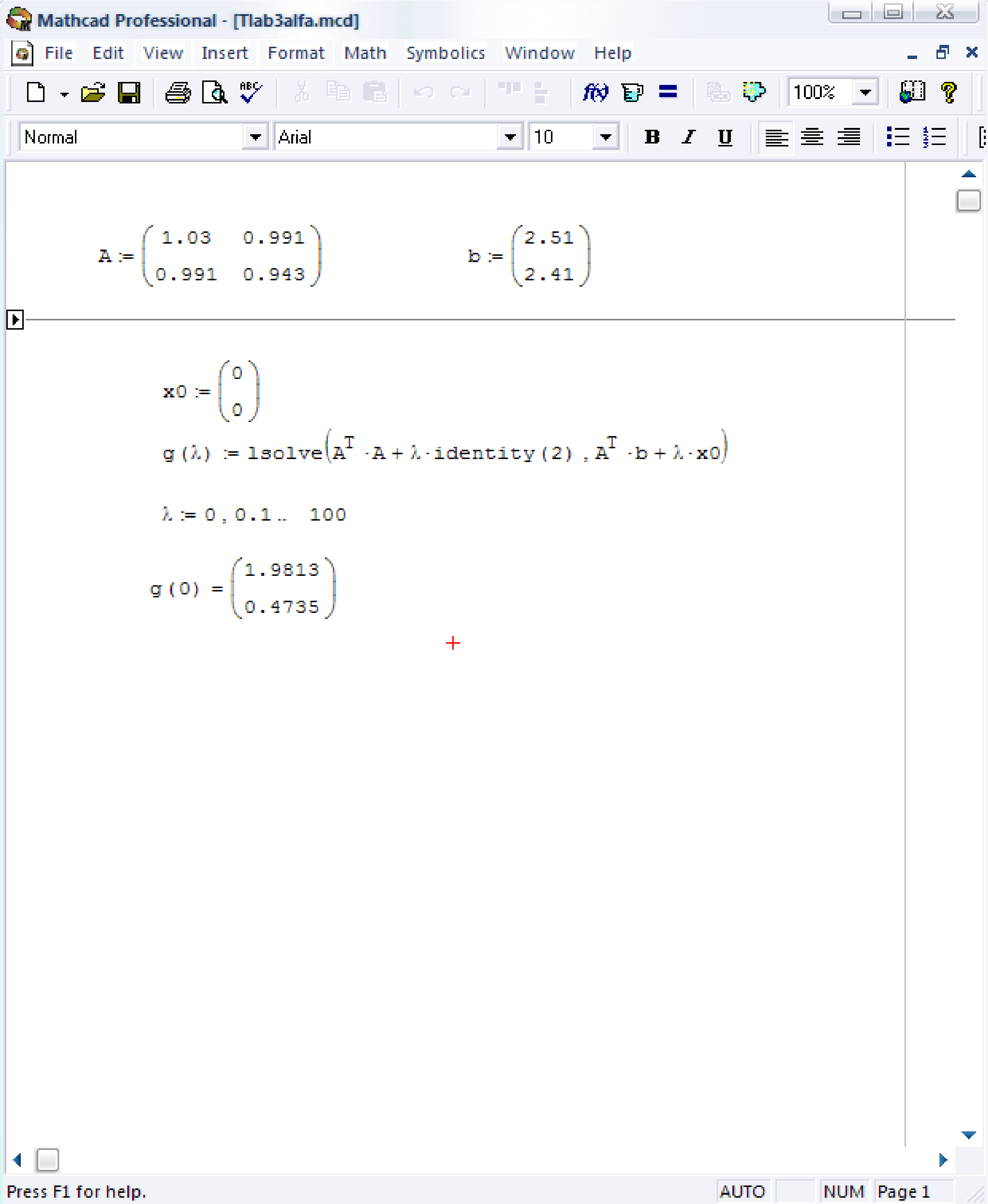
1. Цель работы.

2. Анализ известных методов решения плохо обусловленных СЛАУ.

3. Физические задачи, приводящие к решению плохо обусловленных СЛАУ.

Пример выполнения работы.

Решение плохо обусловленных систем СЛАУ реализовано в MathCAD методом регуляризации. В MathCAD вместе с квадратной матрицей коэффициентов и вектором значений, надо задать вектор априорной оценки. Также MathCAD автоматически не определяет оптимальный параметр регуляризации «альфа», вычисление которого оставляется пользователю.



Mathcad Professional - [Tlab3alfa.mcd]
File Edit View Insert Format Math Symbolics Window Help
100%
Normal
Arial
10
A := (1.03 0.991; 0.991 0.943)
b := (2.51; 2.41)
x0 := (0; 0)
g(λ) := lsolve(A^T·A + λ·identity(2), A^T·b + λ·x0)
λ := 0, 0.1 .. 100
g(0) = (1.9813; 0.4735)
Press F1 for help.
AUTO
NUM
Page 1

3. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений

Цель раздела. Изучить известные методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений.

Содержание раздела

1. По заданной системе подобрать подходящий метод ее решения.
2. Изучить этапы решения систем нелинейных алгебраических уравнений.
3. Провести анализ полученных результатов.

Содержание отчёта

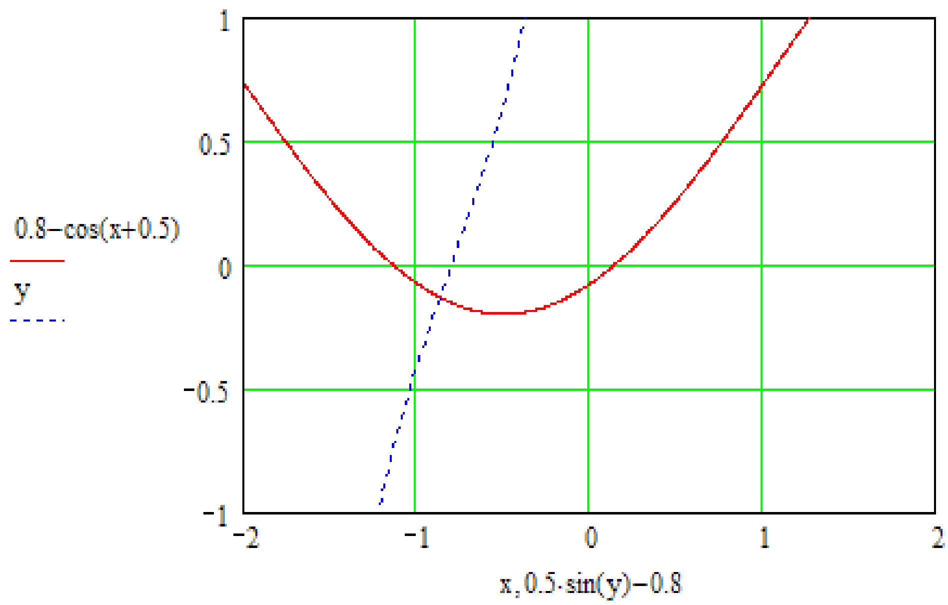
1. Цель работы.
2. Анализ известных методов решения систем нелинейных алгебраических уравнений.
3. Физические задачи, приводящие к решению систем нелинейных алгебраических уравнений.

Пример выполнения работы.

Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений реализовано в MathCAD вычислительным блоком Given/Find. Число уравнений и число неизвестных может не совпадать. В вычислительный блок можно добавить дополнительное условие в виде неравенств. Например, введение ограничений на поиск только отрицательных значений. Вычислительный блок Given/Find не предоставляет информацию о количестве итераций, которая является очень важной в итерационных методах.

Mathcad Professional - [Tlab4.mcd]

File Edit View Insert Format Math Symbolics Window Help



$x := 0 \qquad y := 0$

Given

$\cos(x + 0.5) + y = 0.8$

$\sin(y) - 2x = 1.6$

$$\mathrm{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} -0.8666 \\ -0.1336 \end{pmatrix}$$

Press F1 for help. AUTO NUM Page 1

Решение проблемы собственных значений и собственных векторов

Цель работы. Изучить известные методы решения **проблемы собственных значений и собственных векторов.**

Содержание работы

1. По заданной матрице подобрать подходящий метод нахождения собственных значений и собственных векторов.

2. Изучить этапы нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы.

3. Провести анализ полученных результатов.

Содержание отчёта

1. Цель работы.

2. Анализ известных методов нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы.

3. Физические задачи, приводящие к решению проблемы собственных значений и собственных векторов матрицы.

Пример выполнения работы.

При вычислении собственного вектора для матрицы A, в качестве собственного значения используется одно из вычисленных собственных значений, и ни в коем случае не допускается использовать их среднее арифметическое или какое-нибудь другое число. При необходимости собственный вектор может вычисляться для каждого собственного значения. При решении задачи на *обобщенные собственные значения*, вместо выбора начального вектора, встает задача выбора квадратной матрицы. Причем, элементы главной диагонали должны отличаться от нуля.

Mathcad Professional - [Tlab6.mcd]

Решение проблем собственных значений и собственных векторов:
Итеррационные методы

genvals(A,B) — вычисляет вектор v собственных значений, каждое из которых удовлетворяет задаче на обобщенные собственные значения;
genvecs(A,B) — вычисляет матрицу, содержащую нормированные собственные векторы, соответствующие собственным значениям в векторе v, который вычисляется спомощью genvals. В этой матрице i-й столбец является собственным вектором x, удовлетворяющим задаче на обобщенные собственные значения:
A, B — квадратные матрицы

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{genvals}(A, B) = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{genvecs}(A, B) = \begin{pmatrix} 0.333 & 0.943 & -0.11 \\ 0.667 & -0.236 & -0.675 \\ -0.667 & 0.236 & -0.73 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{genvals}(A, B)_0 \cdot B \cdot \mathrm{genvecs}(A, B)^{\langle 0 \rangle} - A \cdot \mathrm{genvecs}(A, B)^{\langle 0 \rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Press F1 for help. AUTO NUM Page 1

Mathcad Professional - [Tlab5.mcd]

File Edit View Insert Format Math Symbolics Window Help

Точные методы

eigenvals(A) — вычисляет вектор, элементами которого являются собственные значения матрицы A;
eigenvecs (A) — вычисляет матрицу, содержащую нормированные собственные векторы, соответствующие собственным значениям матрицы A. n-й столбец вычисляемой матрицы соответствует собственному вектору n-го собственного значения, вычисляемого eigenvals;
eigenvec(A, λ) — вычисляет собственный вектор для матрицы A и заданного собственного значения λ.
A — квадратная матрица.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvals}(A) = \begin{pmatrix} 0.618 \\ -1.618 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvecs}(A) = \begin{pmatrix} -0.168 & 0.341 & 0 & 0 \\ 0.88 & -0.261 & 0.894 & 0.894 \\ -0.064 & 0.894 & 0 & 0 \\ 0.44 & -0.13 & 0.447 & 0.447 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvec}(A, 0.618) = \begin{pmatrix} -0.168 \\ 0.88 \\ -0.064 \\ 0.44 \end{pmatrix} \qquad \text{eigenvec}(A, -1.618) = \begin{pmatrix} -0.341 \\ 0.261 \\ -0.894 \\ 0.13 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvec}(A, 1) = \begin{pmatrix} 5.447 \times 10^{-14} \\ -0.894 \\ 1.362 \times 10^{-14} \\ -0.447 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvals}(A)_0 \cdot \text{eigenvecs}(A)^{\langle 0 \rangle} - A \cdot \text{eigenvecs}(A)^{\langle 0 \rangle} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Press F1 for help. AUTO NUM Page 1

Задание на лабораторную работу №3 Приближение функций

Цель работы. Изучить известные методы решения задачи приближение функций

Содержание работы

1. По заданной таблице значений функции подобрать подходящий метод нахождения приближающей ее функции.

2. Изучить алгоритмы построения приближающей функции.

3. Провести анализ полученных результатов.

Содержание отчёта

1. Цель работы.

2. Анализ известных методов решения задачи приближение функций.

3. Физические задачи, приводящие к решению задачи приближение функций.

Пример выполнения работы.

Приближение функций

MathCAD предоставляет большое количество встроенных функций из раздела «Интерполяция и регрессия». Все что нужно пользователю – это задать вектор действительных данных аргумента и вектор действительных данных значений того же размера, и выбрать соответствующую функцию для решения.

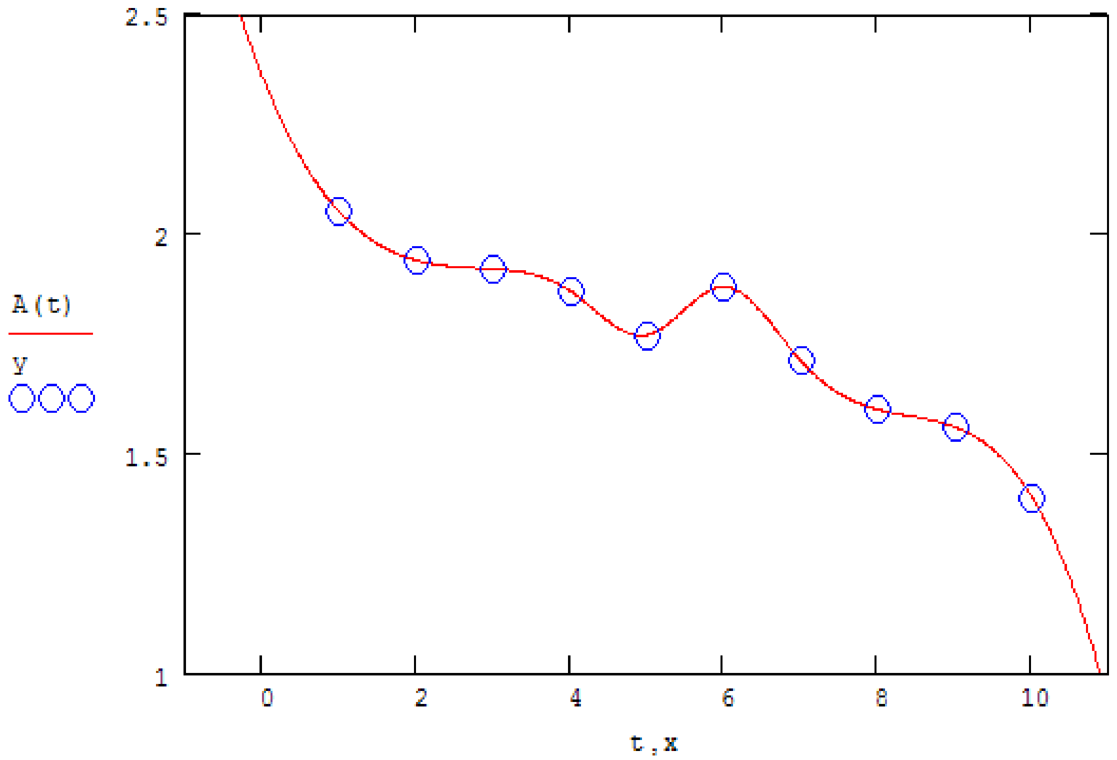
Кубическая сплайн-интерполяция

$x := (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10)^T$

$y := (2.05\ \ 1.94\ \ 1.92\ \ 1.87\ \ 1.77\ \ 1.88\ \ 1.71\ \ 1.60\ \ 1.56\ \ 1.40)^T$

$s := \mathrm{cspline}(x, y)$

$A(t) := \mathrm{interp}(s, x, y, t)$



$A(1) = 2.05$	$A(3.5) = 1.909$	$A(6) = 1.88$	$A(8.5) = 1.583$
$A(1.5) = 1.977$	$A(4) = 1.87$	$A(6.5) = 1.819$	$A(9) = 1.56$
$A(2) = 1.94$	$A(4.5) = 1.8$	$A(7) = 1.71$	$A(9.5) = 1.507$
$A(2.5) = 1.925$	$A(5) = 1.77$	$A(7.5) = 1.636$	$A(10) = 1.4$
$A(3) = 1.92$	$A(5.5) = 1.831$	$A(8) = 1.6$	

Mathcad Professional - [LAB64.mcd]

File Edit View Insert Format Math Symbolics Window Help

Регрессия общего вида:

$$x := (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10)^T$$

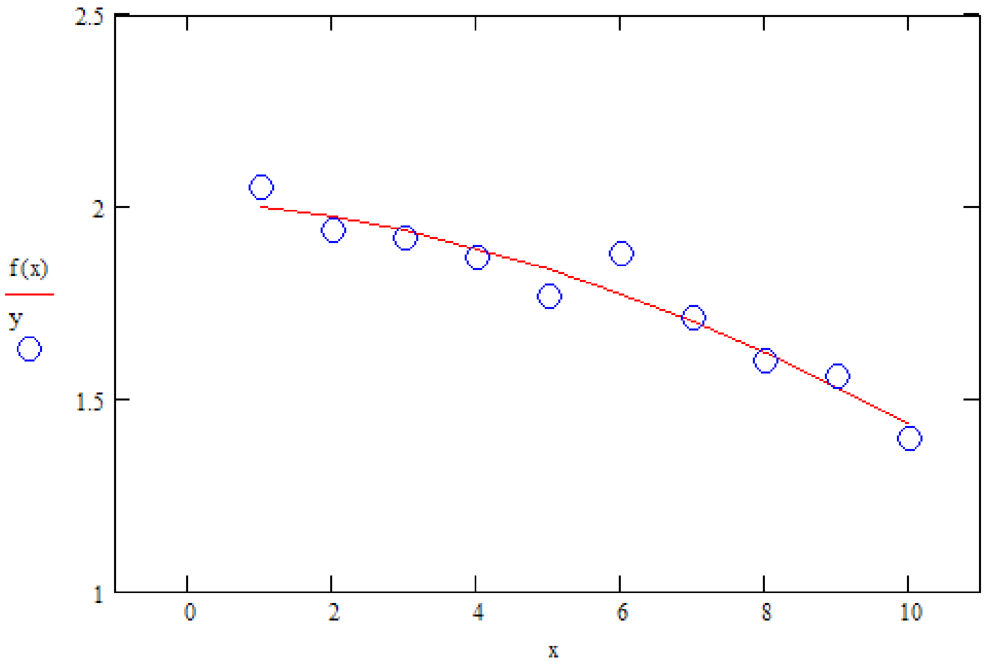
$$y := (2.05\ \ 1.94\ \ 1.92\ \ 1.87\ \ 1.77\ \ 1.88\ \ 1.71\ \ 1.60\ \ 1.56\ \ 1.40)^T$$

$$F(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$C := \mathrm{linfit}(x, y, F)$$

$$C = \begin{pmatrix} 2.0226666666667 \\ -0.0151818181818 \\ -4.3939393939395 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$$f(x) := C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2$$



f(1) = 2.003	f(3.5) = 1.916	f(6) = 1.773	f(8.5) = 1.576
f(1.5) = 1.99	f(4) = 1.892	f(6.5) = 1.738	f(9) = 1.53
f(2) = 1.975	f(4.5) = 1.865	f(7) = 1.701	f(9.5) = 1.482
f(2.5) = 1.957	f(5) = 1.837	f(7.5) = 1.662	f(10) = 1.431

For Help, press F1 AUTO NUM PAGE

Задание на лабораторную работу №4. 1. Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. 2. Решение жестких систем ОДУ. 3. Приближенное вычисление определенных интегралов

Цель 1-го раздела. Изучить известные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Содержание 1-го раздела

1. По заданному дифференциальному уравнению подобрать подходящий метод нахождения ее решения.

2. Изучить методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. Провести анализ полученных результатов.

Содержание отчёта

1. Цель работы.

2. Анализ известных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

3. Физические задачи, приводящие к решению задачи Коши.

Пример выполнения работы.

Решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений

Решение системы N дифференциальных уравнений реализовано в MathCAD в трех вариантах:

- rkfixed – метод Рунге-Кутта с фиксированным шагом;
- Rkadapt – метод Рунге-Кутта с переменным шагом;
- Bulstoer – метод Бурлиша-Штера.

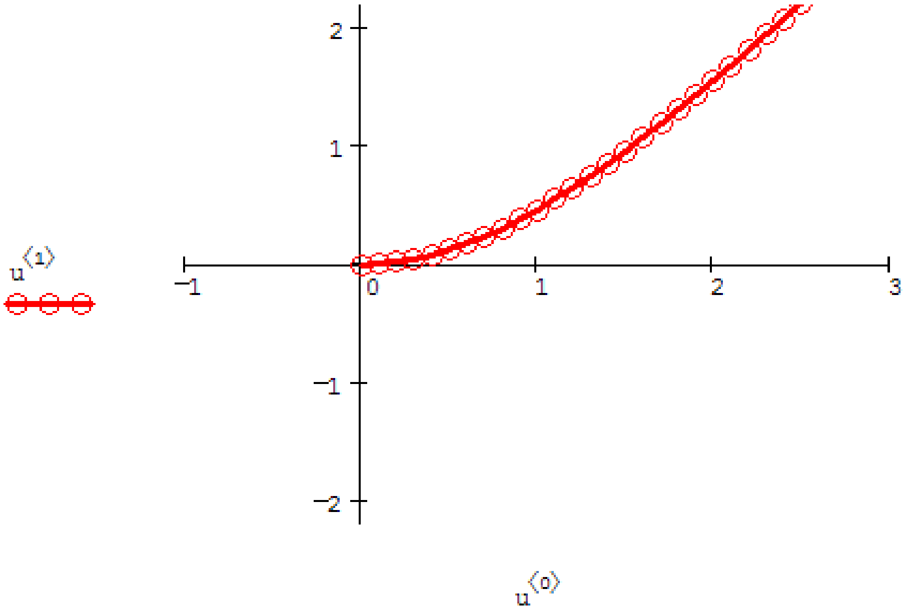
Метод Рунге-Кутты для решения систем ОДУ

$$y0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M := 30$$

$$D(t, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ e^{-y_0} \end{pmatrix}$$

$$u := \mathrm{rkfixed}(y0, 0, 3, M, D)$$



u =

	0	1	2
0	0	0	0
1	0.1	$4.996 \cdot 10^{-3}$	0.1
2	0.2	0.02	0.199
3	0.3	0.045	0.296
4	0.4	0.079	0.39
5	0.5	0.122	0.48
6	0.6	0.175	0.566
7	0.7	0.236	0.648
8	0.8	0.304	0.724
9	0.9	0.38	0.795
10	1	0.463	0.861
11	1.1	0.552	0.921
12	1.2	0.647	0.976
13	1.3	0.747	1.026
14	1.4	0.852	1.071
15	1.5	0.961	1.111

u =

	0	1	2
15	1.5	0.961	1.111
16	1.6	1.074	1.148
17	1.7	1.191	1.18
18	1.8	1.31	1.209
19	1.9	1.432	1.234
20	2	1.557	1.256
21	2.1	1.684	1.276
22	2.2	1.812	1.294
23	2.3	1.942	1.309
24	2.4	2.074	1.322
25	2.5	2.207	1.334
26	2.6	2.341	1.344
27	2.7	2.476	1.353
28	2.8	2.611	1.361
29	2.9	2.748	1.368
30	3	2.885	1.374

Рекомендации по выбору численного алгоритма

В MathCAD использован наиболее популярный алгоритм Рунге-Кутта четвертого порядка, описанный в большинстве книг по методам вычислений. Он обеспечивает малую погрешность для широкого класса систем ОДУ за исключением жестких систем. Поэтому в большинстве случаев стоит применять функцию rkfixed. Если по различным причинам время расчетов становится критичным или точность неудовлетворительна, стоит попробовать вместо rkfixed другие функции.

Функция Rkadapt может быть полезна в случае, когда известно, что решение на рассматриваемом интервале меняется слабо либо существуют участки медленных и быстрых его изменений. Метод Рунге-Кутта с переменным шагом разбивает интервал не на равномерные шаги, а более оптимальным способом. Там, где решение меняется слабо, шаги выбираются более редкими, а в областях его сильных изменений – частыми. В результате для достижения одинаковой точности требуется меньшее число шагов, чем для rkfixed. Метод Бурлиша-Штера Bulstoer часто оказывается более эффективным для поиска гладких решений.

2. Решение жестких систем ОДУ

Цель 2-го раздела. Изучить известные методы решения жестких систем ОДУ

Содержание 2-го раздела

1. По заданной системе дифференциальных уравнений подобрать подходящий метод нахождения ее решения.
2. Изучить методы решения жестких систем ОДУ
3. Провести анализ полученных результатов.

Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Анализ известных методов решения жестких систем ОДУ
3. Физические задачи, приводящие к решению жестких систем ОДУ.

Варианты заданий приведены в учебном пособии Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. Численные методы. Теория, алгоритмы, программы. Самара, 2006.

Пример выполнения работы.

Решение жестких систем ОДУ

Решение жестких ОДУ реализовано в MathCAD в трех вариантах:

- Radau – алгоритм RADAUS для жестких систем ОДУ;
- Stiffb – алгоритм Бурлиша-Штера для жестких систем ОДУ;
- Stiffr – алгоритм Розенброка для жестких систем ОДУ.

Для двух последних функций серьезным отличием является добавление к стандартному набору параметров дополнительной матричной функции, задающей якобиан системы ОДУ. Исходя из этого функция Radau, которая не требует явного задания якобиана системы уравнений, является более удобной, но она появилась в более поздних версиях MathCAD, что делает ее менее доступной.

Mathcad Professional - [Tlab10.mcd]

File Edit View Insert Format Math Symbolics Window Help

решения жестких систем ОДУ. Алгоритм Бурлиша-Штера

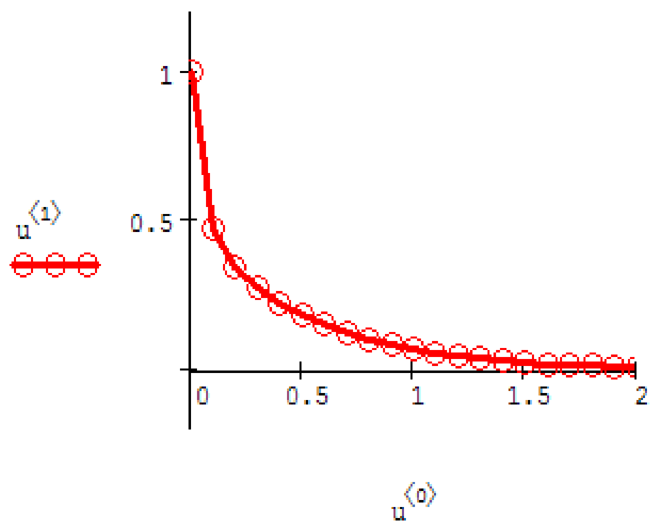
$$y0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad M := 20$$

$$D(t, y) := \begin{pmatrix} -11\,y_0 + 9\,y_1 \\ 9\,y_0 - 11\,y_1 \end{pmatrix} \qquad J(t, y) := \begin{pmatrix} 0 & -11 & 9 \\ 0 & 9 & -11 \end{pmatrix}$$

$$u := \mathrm{Stiffb}(y0, 0, 2, M, D, J)$$

u =

	0	1	2
0	0	1	0
1	0.1	0.477	0.342
2	0.2	0.344	0.326
3	0.3	0.276	0.273
4	0.4	0.225	0.225
5	0.5	0.184	0.184
6	0.6	0.151	0.151
7	0.7	0.123	0.123
8	0.8	0.101	0.101
9	0.9	0.083	0.083
10	1	0.068	0.068
11	1.1	0.055	0.055
12	1.2	0.045	0.045
13	1.3	0.037	0.037
14	1.4	0.03	0.03
15	1.5	0.025	0.025
16	1.6	0.02	0.02
17	1.7	0.017	0.017
18	1.8	0.014	0.014
19	1.9	0.011	0.011
20	2	$8\cdot10^{-3}$	$8\cdot10^{-3}$



3. Приближенное вычисление определенных интегралов

Цель 3-го раздела. Изучить известные методы приближенного вычисления определенных интегралов.

Содержание 3-го раздела

1. По заданному виду определенного интеграла подобрать подходящий метод его численного интегрирования.
2. Изучить методы численного интегрирования.
3. Провести анализ полученных результатов.

Содержание отчёта

1. Цель работы.
2. Анализ известных методов численного интегрирования.
3. Физические задачи, приводящие к численному интегрированию.

Пример выполнения работы.

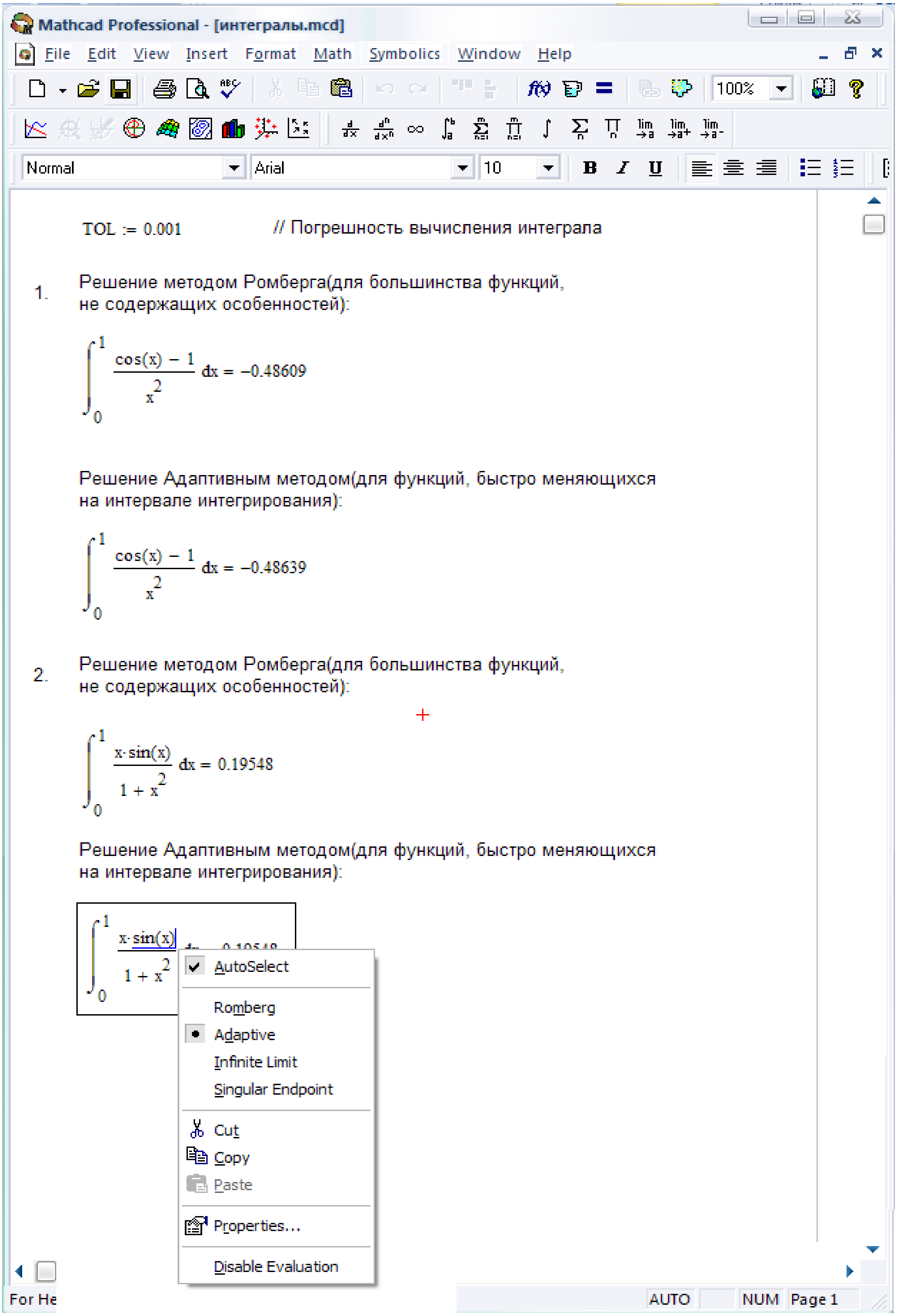
Вычисление интегралов

Разработчиками MathCAD запрограммированы четыре численных метода интегрирования:

- Romberg (Ромберга) – для большинства функций, не содержащих особенностей;
- Adaptive(Адаптивный) – для функций, быстро меняющихся на интервале интегрирования;
- Infinite Limit (Бесконечный предел) – для интервалов с бесконечными пределами;
- Singular Endpoint (Сингулярная граница) – для интегралов с сингулярностью на конце (применяется модифицированный алгоритм Розенберга для функций, не определенных на одном или обоих концах интервала интегрирования).

MathCAD автоматически выбирает метод для вычисления интеграла, но пользователь, в случае необходимости, сам может выбрать метод, по которому будет произведено решение.

Результат численного интегрирования – это не точное, а приближенное значение интеграла, определенное с погрешностью, которая зависит от встроенной константы TOL. Чем она меньше, тем с лучшей точность будет найден интеграл, но и тем больше времени будет затрачено на расчеты. По умолчанию TOL = 0.001. Для того чтобы ускорить вычисления, можно установить большее значение TOL.


Mathcad Professional - [интегралы.mcd]
File Edit View Insert Format Math Symbolics Window Help
100%
Normal
Arial
10
TOL := 0.001
// Погрешность вычисления интеграла
1. Решение методом Ромберга(для большинства функций, не содержащих особенностей):
$\int_0^1 \frac{\cos(x) - 1}{x^2}\,dx = -0.48609$
Решение Адаптивным методом(для функций, быстро меняющихся на интервале интегрирования):
$\int_0^1 \frac{\cos(x) - 1}{x^2}\,dx = -0.48639$
2. Решение методом Ромберга(для большинства функций, не содержащих особенностей):
$\int_0^1 \frac{x \cdot \sin(x)}{1 + x^2}\,dx = 0.19548$
Решение Адаптивным методом(для функций, быстро меняющихся на интервале интегрирования):
$\int_0^1 \frac{x \cdot \sin(x)}{1 + x^2}$
AutoSelect
Romberg
Adaptive
Infinite Limit
Singular Endpoint
Cut
Copy
Paste
Properties...
Disable Evaluation
For He
AUTO
NUM
Page 1