1. 마코위츠의 포트폴리오 최적화 모형

가용한 자본을 가능한 금융 상품들에 최적으로 투자하는 문제를 생각해보자. 모두 n개의 금융 상품이 있다고 하자. 그리고 어떤 기간 보유하는 상품 i의 양을 x_i라고 하자. 여기서 두가지 경우, $x_i > 0$ 그리고 $x_i < 0$은, 각각, 투자자가 상품 i를 매수(long position) 하거나 공매도(short position) 한다는 것을 의미한다.

해당 기간동안 각 상품 i의 가격의 증가를 p_i라고 하자. (물론 가격은 감소할 수도 있는데 이 경우 p_i는 음수 값을 가질 것이다.) $p = [p_1, \ldots, p_n]^T$라고 표기하자.

여기서 p_i들을 확률변수로 가정하고 이들의 평균을 $\bar{p} = [\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n]^T$, 그리고 p_i와 p_j의 공분산을 σ_{ij}라고 하자:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \mathrm{E}(p_i - \bar{p}_i)(p_j - \bar{p}_j). \tag{1}$$

특히, σ_{ii}는 p_i의 분산 σ_i^2이 된다. 이 공분산 행렬을 Σ라고 표기하자.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

다음과 같이 확률변수 p_i들을 상수 x_i를 사용하여 선형조합한 확률변수를 생각하자.

$$p^T x = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n.$$

그러면 그 기대값은

$$\mathrm{E}(p^T x) = \bar{p}_1 x_1 + \bar{p}_2 x_2 + \cdots + \bar{p}_n x_n = \bar{p}^T x \tag{3}$$

이고 분산은 다음과 같다.

$$\begin{gathered} \mathrm{Var}(p^T x) \\ = \mathrm{E}\left(\mathrm{E}(p^T x) - p^T x\right)^2 = \mathrm{E}\left(\bar{p}^T x - p^T x\right)^2 = \mathrm{E}\left((\bar{p} - p)^T x\right)^2 \\ = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^n (\bar{p}_i - p_i) x_i\right)^2 = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\bar{p}_i - p_i)(\bar{p}_j - p_j) x_i x_j\right) \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathrm{E}\left((\bar{p}_i - p_i)(\bar{p}_j - p_j)\right) x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j \\ = x^T \Sigma x \end{gathered}$$

여기서, 두 번째 등호는 식 (3)을, 그리고 마지막 두개 등호는 각각 식 (1)과 식 (2)을 사용한 것이다.

Example 0.1. 세개의 금융상품이 다음과 같은 공분산을 갖는다고 하자.

$$\Sigma \equiv \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1.2 & 3 \\ 1.2 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

그리고 $x = (20, 12, 13)^T$라고 하자. 그러면

$$\begin{gathered} \mathrm{Var}(20p_1 + 12p_2 + 13p_3) \\ = [20\ 12\ 13] \begin{bmatrix} 2 & 1.2 & 3 \\ 1.2 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix} \\ = 2 \times 20^2 + 6 \times 12^2 + 8 \times 13^2 \\ +2 \times 1.2 \times 20 \times 12 + 2 \times 3 \times 20 \times 13 + 2 \times 5 \times 12 \times 13 \end{gathered}$$

확률 변수의 분산은 변수 값 변동성의 척도이다. 분산이 0인 변수는 상수이다. 반대로 분산이 크면 클수록 평균과 먼 값이 발생할 확률이 큰 것을 의미한다. 따라서 포트폴리오의 분산이 크다는 것은, 실제 수익이 평균보다 훨씬 클 수도 있지만 훨씬 아래가 될 가능성도 커진다는 것을 의미하며 될 수 있으면 분산이 작은 분포트폴리오를 구성하는 것은 합리적이다.

포트폴리오 평균 수익 (3) 뿐만 아니라, 그 위험성을 나타내는 분산도 동시에 고려한다는 것이 포트폴리오 최적화 모형들의 아이디어이다.

먼저, 마코위츠가 제시한 가장 고전적인 모형을 살펴보자. 첫째, 공매도는 없다고 가정한다. 즉 모든 i에 대해 $x_i \geq 0$인 경우만 생각한다. 이 때는 투자에 사용할 수 있는 초기 자산이 있다고 가정할 수 있다. 결정 변수는 각 금융상품 i에 투자하는 가용액의 비율 x_i로 다음과 같이 표현이 가능하다.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0.$$

이 경우 평균 수익을 미리 정해진 수준 $p_{\min}$ 이상 보장하면서 위험을 최소화하는 포트폴리오는 다음과 같은 최적화문제의 해가 될 것이다.

$$\begin{array}{ll} \min & x^T \Sigma x \\ \text{st} & \bar{p}^T x \geq p_{\min}, \\ & \mathbf{1}^T x = 1,\ x \geq 0. \end{array}$$